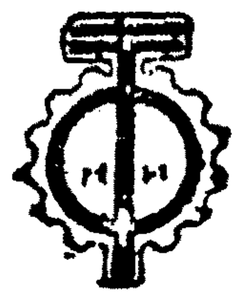
II

Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

Н. Жуковский



THE CENTRAL AEROHYDRODYNAMICAL INSTITUTE
in the Name of prof. JOUKOVSKY

THE N. E. JOUKOVSKY COMMEMORATION COMMITTEE

Prof. N. E. JOUKOVSKY

COLLECTED PAPERS

EDITORIAL BOARD
M. Ac. of Sc. of the USSR S. A. TCHAPLIGIN,
Member-Correspondent of the Ac.
of Sc. of the USSR Prof. A. I. NEKRASOV
Eng. V. A. ARKHANGELSKY
Prof. V. P. VETCHINKIN
Prof. A. P. KOTELNIKOV

VOLUME II

HYDRODYNAMICS

USSR • PEOPLE'S COMMISSARIAT OF HEAVY INDUSTRY
ONTI
UNITED SCIENTIFIC TECHNICAL PUBLISHING HOUSE

MOSKOW 1935 LENINGRAD

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

КОМИТЕТ ПО УВЕКОВЕЧЕНИЮ ПАМЯТИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Проф. Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
Академик С. А. ЧАПЛЫГИН,
чл. корр. Академии наук СССР
проф. А. И. НЕКРАСОВ,
инж. В. А. АРХАНГЕЛЬСКИЙ,
проф. В. П. ВЕТЧИНКИН,
заслуж. деятель науки и техники
проф. А. П. КОТЕЛЬНИКОВ

ТОМ II

ГИДРОДИНАМИКА

ОНТИ • НКТП • СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ АВИАЦИОННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД



Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

В ГОД ОКОНЧАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

(1867 г.)

ОТ РЕДАКЦИИ

Во втором томе помещены две большие работы Н. Е. Жуковского: „Кинематика жидкого тела“ и „Лекции по гидродинамике“.

В первой работе, представляющей собой магистерскую диссертацию, Н. Е. Жуковский не только излагает результаты Коши, Бельтрами, Гельмгольца и других авторов, но и дополняет их своими собственными обширными исследованиями как в области кинематики жидкой частицы, так и в области поля скоростей и ускорений точек жидкого тела.

Лекции по гидродинамике представляют собой образцовый по глубине и вместе с тем по простоте и ясности изложения курс гидродинамики. В них Н. Е. Жуковский подробно излагает кинематику жидкого тела, пользуясь результатами своих исследований в данной области, дает вывод и интегралы уравнений гидродинамики, рассматривает задачу о движении твердого тела в жидкости, вопрос об истечении жидкости из отверстия и задачу о струях. В последней лекции излагается задача о взаимодействии двух движущихся в жидкости шаров и задача Биеркнеса, которой Н. Е. Жуковский посвятил отдельную работу, обобщив задачу и внеся в ее изложение значительное упрощение. Редакция сочла удобным поместить эту работу, как непосредственно связанную с последними страницами лекции, в этом же томе.

В бумагах Н. Е. Жуковского была найдена рукопись вступительной лекции к курсу гидродинамики, содержащая краткий исторический очерк развития гидродинамики и довольно подробную программу предполагаемого курса. Как видно из программы, задуманный курс лекций по гидродинамике не был напечатан полностью: остались ненапечатан-

ными главы о движении вихрей, движении жидкого эллипсоида, теория волн, движение вязкой жидкости[1].

Для удобства читателя во всех работах проведено единство обозначений частных и полных производных: для обозначения частных производных принята буква ∂, для обозначения полных производных — буква d.

Большинство чертежей сделано заново.

---

[1] На титульном листе отдельных оттисков первого издания Лекций по гидродинамике напечатано: „выпуск первый“. Следующий, второй выпуск, который, вероятно, должен был содержать лекции 7, 8, 9, 10 программы, помещенной во вступительной лекции, никогда не был напечатан и в бумагах Н. Е. Жуковского не найден.

КИНЕМАТИКА ЖИДКОГО ТЕЛА

(*1876 г.*)

Pour être en état d'appliquer facilement la Géométrie à la Mécanique, il ne suffit pas de connaître les diverses formes que les lignes ou surfaces peuvent présenter, et les propriétés de ces lignes ou de ces surfaces, mais il importe encore de savoir quels sont les changements de forme que peuvent subir les corps considérés comme des systèmes de points matériels, et à quel les lois générales ces changements de forme se trouvent assujettis.

A. Cauchy.

ВВЕДЕНИЕ

Та высокая степень ясности, которая была внесена в область динамики твердого тела геометрическими исследованиями движения неизменяемой системы, заставляет ожидать значительного успеха гидродинамики от сближения ее с кинематикой изменяемой системы. К сожалению, геометрическая теория движения изменяемой системы находится только на первых ступенях своего развития. Все работы по этому предмету ограничиваются небольшим числом исследований движений простейших изменяемых систем и некоторыми общими соображениями о движении непрерывно изменяющегося тела, причем последние помещены по большей части в сочинениях по гидродинамике и по теории упругости.

Вот краткий перечень сочинений по тому и другому отделу. В 1830 г. Шаль[1] обнаружил главные свойства конеч-

---

[1] Chasles, Note sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre, Bulletin des sciences mathématiques, de Férussac, 1830.

ных перемещений подобно изменяемой фигуры, доказав существование неподвижной плоскости и точки. В 1860 и 1861 гг. появились сочинения Дирикле[1] и Бриоши[2] о движении жидкого эллипсоида, в которых указываются некоторые свойства изменяемой фигуры, перемещающейся так, что новые координаты суть линейные функции старых. От 1861 до 1868 г. Шёнеман[3], Петерсен[4], Дюран[5], Винер[6] и Аффольтер[7] печатают ряд небольших статей по вопросу о движении подобно изменяемой плоской фигуры. В 1867 г. Томсон и Тет издают свое сочинение „Treatise on natural Philosophy“[8], в котором помещают обстоятельное исследование о конечных перемещениях тела, однородно изменяемого; они называют так изменяющееся тело, новые координаты которого суть линейные функции старых. В том же году Пикар[9] выводит известные свойства движения неизменяемой системы, исходя из общих соображений о системе однородно изменяемой. В 1871 и 1872 гг. Дюрранд[10] представляет Парижской академии три глубоких исследования о скоростях и ускорениях одно-

---

[1] Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Journal von Borchardt, Bd. 53.

[2] Brioschi, Développements relatifs aux recherches de Dirichlet, Journal von Borchardt, Bd. 59.

[3] Schönemann, Über die Bewegung veränderlicher ebener Figuren, welche während der Bewegung sich ähnlich bleiben in ihrer Ebene, Programm des Gymnasiums zu Brandenburg für 1861—1862.

[4] Petersen, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2 Série, T. V.

[5] Durand, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2 Série, T. VI.

[6] Wiener, Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a sè stessa, scorre con tre delle sue rette sopra tre punti fissi, Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da Brioschi e Cremona, Série II, T. I.

[7] Affolter, Grunert's Archiv für Mathematik, 55 Theil.

[8] Мы пользовались немецким переводом Handbuch der Theoretischen Physik, Übersetzung von Helmholtz und Wertheim.

[9] Picart, Nouvelle théorie de déplacement continu d'un corps solide, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2 Série, T. VI.

[10] Durrande, Extrait d'une théorie du déplacement d'une figure qui se déforme, Comptes Rendus, T. LXXIII, 2 Semestre.

Propriétés générales du déplacement d'une figure qui se déforme, Ibid., T. LXXIV, 1 Semestre.

De l'accélération dans le déplacement d'un système de points qui reste homographique à lui-même, Ibid, T. LXXV, 2 Semestre.

родно изменяемой системы. Наконец, в 1873 и 1874 гг. появляются статьи Лигина[1] и Бурместера[2] о перемещениях коллинеарно изменяемой плоской фигуры. Лигин от общих соображений о коллинеарно изменяемой фигуре переходит к фигуре, подобно изменяемой; Бурместер идет обратным путем, переходя от подобно изменяемой к однородно изменяемой и коллинеарно изменяемой фигуре.

Второй отдел начал разрабатываться одновременно с первым. В 1827, 1828, 1829 и 1841 гг. Коши[3] поместил в своих Exercices ряд исследований об удлинениях, сжатиях и вращении бесконечно малой частицы изменяемого тела. В 1858 г. Гельмгольц[4] напечатал свою известную статью „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen“, в которой идеи Коши о вращении частицы получили широкое применение, развившись в новое учение о вихрях. Это учение легло в основу сочинений, появившихся в 1861, 1862, 1867 и 1868 гг., авторами которых были Ганкель[5], Рох[6], Том-

---

[1] Лигин, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1873. Также брошюра „Обобщения некоторых геометрических свойств движений системы“, Одесса, 1873.

[2] Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme, Zeitschrift von Schlömilch, 19 Jahrgang, 2 Heft.

Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und kollinear-veränderlicher ebener Systeme, Zeitschrift von Schlömilch, 19 Jahrgang, 6 Heft.

[3] Cauchy, Sur la condensation et la dilatation des corps solides, Exercices de Mathématiques, Seconde année.

Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation, des corps, Ibid., Troisième année.

Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou dilatation linéaire est la même en tous sens autour de chaque point, Ibid., Quatrième année.

Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, T. II.

[4] Helmholtz, Journal von Borchardt, Bd. 55.

[5] Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861.

[6] Roch, Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen, Journal von Borchardt, Bd. 61.

сон [1] и Липшиц [2]; во всех этих сочинениях пополняются и расширяются те аналитические соображения, которыми пользовался Гельмгольц при выводе своих кинематических теорем. В 1868 г. Бертран [3] обнаружил для бесконечно малой частицы теорему о плоскостях, сохраняющих направление, которую годом раньше доказали Томсон и Тет для однородно изменяемой системы. Некоторые замечания, сделанные в его статье, послужили основанием известной полемике между ним и Гельмгольцем [4], которая значительно способствовала разъяснению вопроса о вращении частицы. По поводу этой полемики в 1868 г. была напечатана небольшая заметка в журнале „Mondes“ [5], а в 1870 г. — небольшая статья Вельтмана [6]. В 1870 г. Больцман [7] по поводу одной гидродинамической задачи, которую разрешил Кирхгоф, напечатал статью, начинающуюся исследованием движения без вращения, возможного для несжимаемой жидкости, наполняющей многосвязное пространство. В 1871 г. появилось прекрасное сочинение Бельтрами [8] „Dell'idrodinamica razionale“, первые две части которого автор посвящает кинематике жидкого тела, излагая ее строго аналитическим путем. Наконец, в 1874 г. вышла из печати физика Кирхгофа [9], в которой можно найти многие интересные соображения о движении жидкости без сжатия и вращения.

Рассматривая эти сочинения, мы замечаем, что теория движения изменяемых систем различных частных видов

---

[1] Lipschitz, Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, Journal von Borchardt, Bd. 69.

[2] Thomson, On vortex motion, Philosophical Transactions of the Society of Edinburgh, T. XXV.

[3] Bertrand, Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide, Comptes Rendus, T. LXVI.

[4] Comptes Rendus, T. LXVII.

[5] „Mondes“, T. XVII.

[6] Weltmann, Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel, Zeitschrift von Schlömilch, 15 Jahrgang, 6 Heft.

[7] Boltzmann, Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen, Journal von Borchardt, Bd. 78.

[8] Beltrami, Dell'idrodinamica razionale, Memorie dell'Accademia delle scienze dell' Instituto di Bologna, Serie III, T. I и II.

[9] Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Leipzig, 1874.

развилась главным образом из обобщения и расширения идей о движении твердого тела; общая же теория движения изменяемой системы имела свое начало в теории упругости и гидродинамике. Мы видим, что несмотря на близкое сродство этих двух отделов кинематики изменяемой системы, несмотря на то, что они должны бы итти, расширяя и пополняя друг друга, они всегда развивались особняком; так, например, идеи Коши о движении частицы, как кажется, были неизвестны авторам, писавшим по кинематике изменяемых систем частного вида, и наоборот, мы встречаем в применении к жидкой частице доказательство теорем, уже известных для тела, однородно изменяемого. С другой стороны, мы видим, что общие законы движения непрерывно изменяемого тела были по большей части тесно связаны вместе с динамическими соображениями, и только в сочинении Бельтрами им посвящена отдельная статья. Это сочинение не оставляет ничего более желать по добросовестной отделке и глубине мысли; но, с одной стороны, строго аналитический метод исследования, принятый автором, не дает изложению той наглядности, которая, главным образом, была бы желательна; с другой, — итальянский ученый не решился включить в кинематику статью об ускорениях, а обстоятельное геометрическое исследование последних может, как нам кажется, наилучшим образом осветить трудные вопросы гидродинамики.

Сочинение „Кинематика жидкого тела“ имеет в виду дать краткий, но по возможности наглядный очерк теории скоростей и ускорений непрерывно изменяемого тела, и может быть рассматриваемо как вступление в гидродинамику. При составлении его мы старались поставить общие теоремы о движении жидкости в уровень с тем развитием, которое получили исследования изменяемых систем частного вида. Сочинение разделяется на четыре главы. В первой главе мы изложили движение бесконечно малой жидкой частицы; при этом мы старались обобщить различные воззрения на этот вопрос, исходя из одного общего исследования о свойствах поверхности удлинения Коши. В этой главе, кроме многих небольших теорем, нам принадлежит теория конуса постоян-

ных направлений и исследование вида траекторий точек частицы в движении относительно ее центра.

Вторая глава посвящена изучению линий токов (Stromlinien) и скоростей движущейся жидкости. Мы позволяем себе ввести в ней новый термин, характеризующий как линии токов, так и скорости точек жидкости, — *течение жидкости.* Глава начинается общим геометрическим и кинематическим исследованием течения жидкости и кончается специальным изучением течения жидкости без сжатия и вращения. При составлении этой главы мы пользовались, кроме вышеупомянутых сочинений, сочинениями, которые написали Клейц [1] и Гатон де ла Гупильер [2]. В этой главе нам принадлежат, кроме общего метода исследования, теоремы о зависимости изменения жидкой частицы от кривизны линий токов и теория критических точек.

Третья глава компилятивная; в ней излагается согласно с приемами исследования, предложенными во второй главе, учение о сложении и разложении течений жидкости, которое установили Гельмгольц, Рох, Томсон, Липшиц и Бельтрами.

Четвертая глава посвящена ускорениям точек движущейся жидкости. Мы начинаем ее общими теоремами об ускорениях, стараясь при этом выставить с возможной ясностью идеи Преображенского [3] и теорему Липшица [4], которые, на наш взгляд, должны играть высокую роль в гидродинамике. Глава оканчивается приложением найденных общих результатов к исследованию перманентного движения несжимаемой жидкости и движения несжимаемой жидкости, для которой давление равно нулю. В этой главе нам принадлежит обобщение

---

[1] Kleitz, Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement et application à l'Hydrodynamique, Paris, 1873.

[2] Haton de la Goupillière, Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique.

Nouvelle théorie générale des lignes isothermes.

Nouvelle théorie générale du potentiel cylindrique, Comptes Rendus, T. XLVIII, 1 Semestre.

[3] Преображенский, Отчеты казанского съезда естествоиспытателей.

[4] Lipschitz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne, Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da Brioschi e Cremona, Serie II, T. VI.

теоремы Кориолиса и многие новые результаты по перманентному движению, которые значительно пополняют теоремы, найденные Клебшем [1].

Во всем сочинении мы разбирали одновременно свойства сжимаемой и несжимаемой жидкости, указывая всякий раз на особенности последней. Мы старались сделать изложение по возможности простым, предпочитая, где было возможно, геометрические соображения аналитическим и пользуясь криволинейными координатами, имеющими непосредственное кинематическое значение в разбираемом вопросе. Мы старались следовать, насколько умели, совету великого геометра „étudier les choses en elles-mêmes“. Надеемся, что наш скромный труд не останется бесполезным и прольет некоторый свет на трудные вопросы гидродинамики.

---

[1] Clebsch, Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Journal von Borchardt, Bd. 54.

Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, Ibid Bd. 56

ГЛАВА

О движении бесконечно малой частицы жидкости

§ 1. Описанию сложного явления мы обыкновенно предпосылаем разбор некоторых простых явлений, которые его характеризуют. Так как эти явления не только должны быть просты, но и должны возможно глубже выяснять характер описываемого явления, то они по необходимости усложняются, по мере того как оно само становится сложнее. Во всех сочинениях по кинематике твердого тела занимаются сначала движениями точки; такое вступление нельзя считать достаточным при изложении движения непрерывной жидкой массы, так как каждая бесконечно малая частица ее изменяет современем не только свое положение, но и свою форму. В основу геометрической теории этого движения, кажется, всего удобнее положить изучение изменений бесконечно малой частицы.

Изменение частицы, несмотря на полную произвольность движущейся жидкой массы, совершается всегда по некоторым простым законам, что происходит от непрерывности функций, характеризующих движение жидкости. Вот какими словами выражает Бертран это влияние непрерывности: „На первый взгляд кажется невозможным исследование движения системы, точки которой друг от друга независимы и образуют непрерывную массу, плотность и форма которой могут изменяться каждое мгновение, так как индивидуальное движение каждой точки вполне произвольно. Но непрерывность функций является здесь, как всегда, условием весьма существенным и позволяет обнаружить между скоростями некоторые простые законы, подобно тому как непрерывность поверхностей дает всем известные теоремы о радиусах кри-

визны, несмотря на полную произвольность поверхности". Простые законы, о которых говорит геометр, суть законы изменения жидкой частицы, изучением которых мы намерены начать кинематику жидкости.

§ 2. Пусть a, b, c и x, y, z будут прямоугольные координаты одной из точек жидкости в начале времени и по прошествии времени t. Напишем приращения x, y, z, происходящие от изменения a, b, c:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

Вообразив бесконечно малую частицу жидкости произвольной формы, заключающую точку (a, b, c), увидим, что координаты точек этой частицы относительно точки (a, b, c) которую назовем ее центром, будут da, db, dc. По прошествии времени t частица изменяется так, что координаты точек ее относительно центра будут dx, dy, dz. Обозначая по примеру Бельтрами бесконечно малые величины da, db, dc, dx, dy, dz через a, b, c, x, y, z [1], получим уравнения:

$$\mathrm{x} = \frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{b} + \frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{c},$$

$$\mathrm{v} = \frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial y}{db}\mathrm{b} + \frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{c},$$

$$\mathrm{z} = \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{b} + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{c}.$$

Эти уравнения показывают, *что координаты точек измененной частицы относительно ее центра бывают всегда линейные функции первоначальных координат.*

---

[1] Подобным же образом и другие диференциалы будем обозначать, отбрасывая знак диференциала и изменяя шрифт: вместо dt, du, dv, dw, например, мы будем писать t, u, v, w.

Отсюда следует, что все точки жидкости, лежащие на бесконечно малой поверхности, будут во все время движения лежать на поверхности того же порядка. Бесконечно малые части плоскости и прямой линии будут во время движения оставаться плоскостью и прямой линией. Точки, делящие бесконечно малую прямую линию в известном отношении, будут делить в том же отношении и преобразованную линию, вследствие чего бесконечно малые параллельные линии и плоскости во все время движения останутся параллельны. Частица жидкости, ограниченная поверхностью бесконечно малого шара, будет во все время движения ограничена поверхностью эллипсоида, потому что поверхность должна сохранить порядок и из сомкнутой не может сделаться разомкнутой; при этом каждым трем взаимно перпендикулярным диаметрам шара будут соответствовать три сопряженные диаметра эллипсоида, между которыми всегда найдутся такие три, которые сохранят свою ортогональность.

Из последнего заключения вытекает теорема: *через всякие два положения точки движущейся жидкости можно провести две системы бесконечно малых жидких триортогональных линий, которые во время движения переходят одна в другую*[1]. Томсон называет эллипсоид, в который преобразуется бесконечно малый шарик, *эллипсоидом деформации* а линии, сохраняющие триортогональность, которые соответствуют осям эллипсоида, — осями деформации. Понятно, что *по направлению осей деформации частица претерпевает наибольшее и наименьшее удлинения*; мы называем сжатие отрицательным удлинением.

На основании сказанного *бесконечно малая частица может быть переведена из своего начального положения в положение, соответствующее времени t, помощью трех движений: помощью поступательного движения, помощью движения, обращающего бесконечно малый шарик в эллипсоид деформации, и помощью вращения эллипсоида деформации.*

§ 3. В предыдущем параграфе мы указали главные черты изменения частицы за конечный промежуток времени

[1] Эта теорема обнаружена в 1828 г. в сочинении Коши в Exercices de Mathématiques, Troisième année, p. 242.

для того, чтобы яснее представить ее бесконечно малые изменения. Прилагая найденные результаты к двум бесконечно близким положениям частицы, соответствующим моментам времени t и $t+dt=t+\mathrm{t}$, видим, что *через каждую точку движущейся жидкости можно провести три взаимно ортогональные бесконечно малые прямые, которые сохранят свою ортогональность, двигаясь вместе с жидкостью в продолжение бесконечно малого времени* t. Эти три линии будем называть *осями деформации данного момента времени t; они будут соответствовать линиям, по которым в этот момент частица претерпевает наибольшее и наименьшее удлинения. Все бесконечно малое движение частицы будет слагаться из поступательного движения ее центра, из движения, обращающего бесконечно малый шарик в эллипсоид деформации, бесконечно мало отличающийся от шара, и из вращения осей деформации.*

Скорость вращения осей деформации называют *скоростью вращения частицы.* Первое и третье движения частицы будем называть *внешними*, а второе — *внутренним.* Понятно, что внутреннее движение частицы вполне характеризуется эллипсоидом деформации, оси которого дают нам направление осей деформации. Но мы не будем пользоваться уравнением этого эллипсоида, а выведем уравнение некоторой другой поверхности второго порядка, которое получается при рассмотрении скорости точек частицы относительно центра. Для этого возьмем от x, y, z производные по времени и, положив

$$\frac{dx}{dt}=u,\ \frac{dy}{dt}=v,\ \frac{dz}{dt}=w,\ \frac{d\mathrm{x}}{dt}=\mathrm{u},\ \frac{d\mathrm{y}}{dt}=\mathrm{v},\ \frac{d\mathrm{z}}{dt}=\mathrm{w},$$

заменим начальные координаты

$$a,\ b,\ c,\ \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\ \text{на}\ x,\ y,\ z,\ \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}:$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{z},\\
\mathrm{v}&=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{z},\qquad(1)\\
\mathrm{w}&=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{z}.
\end{aligned}$$

Найденные уравнения выражают бесконечно малые скорости u, v, w точек частицы относительно движущихся осей x, y, z, параллельных x, y, z и имеющих начало в центре частицы. Пролагая эти скорости на радиус-вектор r, соединяющий точку частицы с ее центром, делим проложенное на r и называем полученный результат через ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}y^2 + \frac{\partial w}{\partial z}z^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)yz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)zx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)xy\right].$$

Здесь ε выражает удлинение радиуса-вектора, отнесенное к единице времени и длины. Делая положения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2,\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon\ ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\theta_1,\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\theta_2,\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\theta_3,$$

в которых ε_1, ε_2, ε_3 суть удлинения по направлениям координат, представим удлинение ε следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy). \qquad (2)$$

Если выберем бесконечно малые координаты x, y, z так, чтобы для них $\varepsilon r^2 = 2F$, где F постоянная бесконечно малая величина второго порядка, то увидим, что все точки, имеющие такие координаты, лежат на поверхности второго порядка:

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy. \qquad (3)$$

Это дает теорему Коши[1]: *линейные удлинения частицы по различным направлениям обратно пропорциональны квадрату центрального радиуса-вектора некоторой поверхности второго порядка.*

Эта поверхность, которую называют *поверхностью удлинения*, играет почти единственную роль в теории изменения

[1] Cauchy, Exercices de Mathématiques, seconde année, p. 69, 1827.

жидкой частицы, различные свойства движения которой связаны более или менее тесно со свойствами этой поверхности.

Так как оси деформации соответствуют наибольшему и наименьшему удлинениям, то направление их совпадает с направлением осей поверхности удлинения и может быть определено помощью уравнений:

$$\frac{\varepsilon_1 \cos\alpha + \theta_3 \cos\beta + \theta_2 \cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\theta_3 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \theta_1 \cos\gamma}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{\theta_2 \cos\alpha + \theta_1 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma}{\cos\gamma} = E,$$

в которых α, β, γ — углы, образуемые осью деформации с осями координат, а E — удлинение по этой оси, равное одному из корней кубического уравнения:

$$E^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)E^2 + (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2)E -$$

$$- (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - \varepsilon_1\theta_1^2 - \varepsilon_2\theta_2^2 - \varepsilon_3\theta_3^2) = 0. \qquad (4)$$

Называя через E_1, E_2, E_3 три действительные корня этого кубического уравнения, направляем оси координат по осям деформации и преобразуем уравнения (2) и (3) в (2′) и (3′):

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2); \qquad (2')$$

$$2F = E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2. \qquad (3')$$

Поверхность удлинения, выражаемая уравнением (3′), будет трехосный эллипсоид, когда три удлинения E_1, E_2, E_3, которые мы будем называть *главными*, имеют одинаковые знаки. В противном случае она представит гиперболоид, причем надо будет одновременно рассматривать оба сопряженные гиперболоида, давая F знаки + и —. Один гиперболоид будет соответствовать удлинению, другой — сжатию, а радиусы-векторы, направленные по асимптотическому конусу, будут иметь удлинения 0. Понятно, что в частных случаях поверхность удлинения может представить шар, цилиндр или две параллельные плоскости.

Все теоремы о диаметрах центральных поверхностей вто-

рого порядка дадут нам соответственные теоремы об удлинениях жидкой частицы. Так, например, равенство

$$E_1 + E_2 + E_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

дает теорему: *сумма линейных удлинений по всяким трем взаимно перпендикулярным осям равна сумме главных удлинений.* Пользуясь этой теоремой, можно получить известное выражение для изменения объема. Вообразив во время t бесконечно малый шар, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, получим для времени $t+\mathrm{t}$ эллипсоид деформации, объем которого выразится через

$$\frac{4}{3}\pi r^3(1+E_1\mathrm{t})(1+E_2\mathrm{t})(1+E_3\mathrm{t}).$$

Называя изменение объема, отнесенное к единице объема и времени, через Δ, получаем:

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$

Теоремы Аполлония, распространенные на свойства сопряженных диаметров центральных поверхностей второго порядка, дают нам следующие соотношения между удлинениями e_1, e_2, e_3 по сопряженным диаметрам:

$$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3};$$

$$e_1e_2e_3 = (1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)E_1E_2E_3 .$$

В последнем соотношении α, β, γ — углы между сопряженными диаметрами. Все радиусы-векторы, имеющие равные удлинения, должны лежать на конусе, вершина которого есть центр поверхности удлинения, а основание — пересечение этой поверхности с шаром. Мы будем называть такой конус *конусом равного удлинения.* Уравнение его получается из формулы $(2')$, полагая ε постоянным:

$$(E_1-\varepsilon)\,\mathrm{x}^2+(E_2-\varepsilon)\,\mathrm{y}^2+(E_3-\varepsilon)\,\mathrm{z}^2=0. \qquad (5)$$

Если $E_1 > E_2 > E_3$, то величина ε заключена между E_1 и E_3. Полагая $E_2 > \varepsilon > E_3$, находим конусы равного удлинения, имеющие действительной осью ось деформации E_3. В случае

$\varepsilon = E_2$ конус равного удлинения обращается в две плоскости, проходящие через ось деформации E_2 и образующие с осью деформации E_1 углы, тангенсы которых суть

$$\pm \frac{\sqrt{E_1 - E_2}}{\sqrt{E_2 - E_3}}.$$

Эти плоскости рассекают эллипсоид или однополый гиперболоид, соответствующий поверхности удлинения, по кругам. В случае $E_1 > \varepsilon > E_2$ мы получаем конус равного удлинения, имеющий действительной осью E_1. Из сказанного выясняется изменение вида конуса равного удлинения при непрерывном изменении ε от E_3 до E_1: при $\varepsilon = E_3$ конус совпадает с осью деформации E_3; с возрастанием ε он идет, расширяясь и сохраняя эту ось своей действительной осью; при $\varepsilon = E_2$ он распадается на две плоскости, проходящие через ось деформации E_2; после этого он располагается около оси деформации E_1 и идет, суживаясь, пока не сольется с этою осью. Понятно, что асимптотический конус есть конус нулевого удлинения и действителен только в том случае, когда

$$E_1 > 0,\ E_3 < 0.$$

§ 4. Перейдем теперь к определению слагающих скорости вращения жидкой частицы по направлению неподвижных осей x, y, z. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 будут подобные слагающие по осям деформации для данного момента времени. Возьмем на каждой из этих осей по точке, бесконечно близко отстоящей от центра частицы, и назовем их бесконечно малые координаты относительно центра через

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_3, z_2),\ (x_3, y_3, z_3),$$

а слагающие соответствующих им бесконечно малых относительных скоростей через

$$(u_1, v_1, w_1),\ (u_2, v_2, w_2),\ (u_3, v_3, w_3).$$

Так как оси деформации в продолжение бесконечно малого движения жидкости движутся как неизменяемая система, то проложение скорости точки *2* на ось деформации *3* равно скорости вращения точки *2* около оси деформации *1*.

Пользуясь этим замечанием и подобными же замечаниями для других точек, напишем три уравнения:

$$r_2r_3\omega_1 = u_2x_3 + v_2y_3 + w_2z_3;$$

$$r_3r_1\omega_2 = u_3x_1 + v_3y_1 + w_3z_1;$$

$$r_1r_2\omega_3 = u_1x_2 + v_1y_2 + w_1z_2,$$

в которых r_1, r_2, r_3 — бесконечно малые расстояния точек *1*, *2*, *3* от центра частицы. Подставляя в написанные равенства значения u, v, w из формулы (1), представим первое из них в виде:

$$\omega_1r_2r_3 = x_2x_3\frac{\partial u}{\partial x} + y_2y_3\frac{\partial v}{\partial y} + z_2z_3\frac{\partial w}{\partial z} + y_2z_3\frac{\partial w}{\partial y} +$$

$$+ z_2y_3\frac{\partial v}{\partial z} + z_2x_3\frac{\partial u}{\partial z} + x_2z_3\frac{\partial w}{\partial x} + x_2y_3\frac{\partial v}{\partial x} + y_2x_3\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как оси деформации суть сопряженные диаметры поверхности удлинения, то, пользуясь формулой (3), можем написать равенство:

$$0 = x_2x_3\frac{\partial u}{\partial x} + y_2y_3\frac{\partial v}{\partial y} + z_2z_3\frac{\partial w}{\partial z} + (y_2z_3 + z_2y_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$

$$+ (z_2x_3 + x_2z_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (x_2y_3 + y_2x_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Вычитая его из $\omega_1r_2r_3$, получим:

$$\omega_1r_2r_3 = (y_2z_3 - z_2y_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$

$$+ (z_2x_3 - x_2z_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (x_2y_3 - y_2x_3)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Называя через λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 углы осей деформации с осями x, y, z, имеем:

$$\frac{y_2z_3 - z_2y_3}{r_2r_3} = \cos\lambda_1, \quad \frac{z_2x_3 - x_2z_3}{r_2r_3} = \cos\mu_1,$$

$$\frac{x_2y_3 - y_2x_3}{r_2r_3} = \cos\nu_1.$$

Вследствие вышеизложенного наше вращение ω_1 может быть выражено так:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\lambda_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\mu_1 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\nu_1.$$

Из этой формулы и подобных же формул для ω_2 и ω_3 заключаем, что искомые слагающие вращения по осям x, y, z, которые мы назовем через p, q, r, суть:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^1. \quad (6)$$

Эти вращения считаются положительными по направлению часовой стрелки и имеют одинаковый вид для всяких прямоугольных осей координат. Любопытно заметить, что при косоугольных осях координат проложение скорости вращения частицы на нормали к координатным плоскостям выражается формулами, отличающимися от (6) только постоянными множителями. Если вообразим косоугольные оси координат x', y', z', плоскость $y'z'$ которых совпадает с плоскостью yz, а оси y' и y идут по одному направлению, и назовем угол $\angle y'oz'$ через φ_1, то получим:

$$y = y' + z'\cos\varphi_1,$$
$$z = z'\sin\varphi_1.$$

Далее, называя через u', v', w' проложения скорости точки по косоугольным осям x', y', z', имеем:

$$v' = v,$$
$$w' = v\cos\varphi_1 + w\sin\varphi_1.$$

---

[1] Эти формулы для вращения частицы найдены Коши в Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. II, p. 302, 1841. При этом он называет скоростью вращения частицы около оси среднюю скорость вращения всех радиусов, лежащих в плоскости, проходящей через центр частицы перпендикулярно к оси. Это определение тождественно с определением, принятым нами, так как средняя скорость радиуса, происходящая от внутреннего движения, равна нулю. Сен-Венан в VIII томе Журнала Лиувилля (1863) дает простой вывод формул (6), исходя из определения вращения Коши.

Составляя теперь выражение

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}$$

и обращая внимание на формулы, определяющие y, z по y', z', получим формулу

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} = \sin\varphi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

из которой определим проложение вращения на линию, перпендикулярную плоскости $y'z'$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2\sin\varphi_1}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right).$$

Называя три определяемые проложения через p', q', r', а углы $\angle z'ox'$, $\angle x'oy'$ через φ_2, φ_3, получаем:

$$p' = \frac{1}{2\sin\varphi_1}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right); \quad q' = \frac{1}{2\sin\varphi_2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} \right);$$

$$r' = \frac{1}{2\sin\varphi_3}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right).$$

§ 5. Зная вращение частицы, можно вычесть соответствующие ему скорости из скоростей u, v, w и получить скорости одного внутреннего движения. Эти скорости, которые мы назовем через u_1, v_1, w_1, будут:

$$u_1 = u - (qz - ry),$$
$$v_1 = v - (rx - pz),$$
$$w_1 = w - (py - qx),$$

и принимают на основании формул (1) и (6) следующий вид:

$$u_1 = \varepsilon_1 x + \theta_3 y + \theta_2 z,$$
$$v_1 = \theta_3 x + \varepsilon_2 y + \theta_1 z, \qquad (7)$$
$$w_1 = \theta_2 x + \theta_1 y + \varepsilon_3 z.$$

В случае же, когда оси координат суть оси деформации, эти формулы еще более упрощаются:

$$u_1 = E_1 x, \quad v_1 = E_2 y, \quad w_1 = E_3 z. \qquad (7')$$

Сравнивая формулы (6) с уравнением (3), видим, что u_1, v_1, w_1 суть частные производные функции F по координатам x, y, z:

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{7''}$$

Отсюда следует теорема [1]: *Скорости внутреннего движения имеют потенциальную функцию, которая равна половине линейного удлинения, умноженной на квадрат радиуса.*

Функция F вполне характеризует внутреннее движение точек частицы, скорости которых перпендикулярны поверхностям $F = \text{const}$ и обратно пропорциональны расстоянию между двумя бесконечно близкими поверхностями F и $F + dF$.

Вот какой прекрасной теоремой выражает Бельтрами в своем сочинении Dell'Idrodinamica razionale [2] свойство этого движения: *все точки, лежащие на поверхности, подобной поверхности удлинения, перейдут во время* t *по нормалям на поверхность софокусную.*

Для доказательства рассмотрим точки частицы, лежащие на бесконечно малой поверхности

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 2F,$$

где

$$\frac{1}{a} = E_1, \quad \frac{1}{b} = E_2, \quad \frac{1}{c} = E_3.$$

По прошествии бесконечно малого времени t координаты x, y, z обратятся на основании формул (7′) в

$$x' = x\left(1 + \frac{t}{a}\right), \quad y' = y\left(1 + \frac{t}{b}\right), \quad z' = z\left(1 + \frac{t}{c}\right).$$

---

[1] Первая часть теоремы принадлежит Гельмгольцу, Borchardt's Journal, Bd. 55, p. 31, вторая — Бельтрами, Memorie dell'Accademia dell'Istituto di Bologna, Serie III, T. I, Fascicolo 3, p. 439.

[2] Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie III, Tomo I, Fascicolo 3, p. 449, 1871.

Заменяя в вышенаписанном уравнении величины x, y, z через x′, y′, z′, получаем равенство

$$\frac{x'^2}{a+2t}+\frac{y'^2}{b+2t}+\frac{z'^2}{c+2t}=2F,$$

доказывающее теорему.

§ 6. Чтобы составить себе совершенно ясное представление о внутреннем движении частицы, укажем некоторые простые движения, на которые оно может быть разложено. Условимся называть *удлинением, перпендикулярным плоскости*, движение, в котором точки имеют скорости, перпендикулярные некоторой плоскости и пропорциональные расстоянию от нее. Скорость точки, находящейся на единице расстояния от плоскости, будем называть величиной удлинения, перпендикулярного плоскости. Рассматривая теперь формулы (7′), убеждаемся в справедливости следующего разложения движения частицы: *внутреннее движение частицы может быть получено тремя удлинениями, перпендикулярными плоскостям деформации, величины которых равны* E_1, E_2, E_3.

Эта теорема имеет также место для удлинений, перпендикулярных сопряженным диаметральным плоскостям. Представляя функцию F по косоугольным координатам, соответствующим сопряженным диаметрам

$$\frac{1}{\sqrt{e_1}},\quad \frac{1}{\sqrt{e_2}},\quad \frac{1}{\sqrt{e_3}},$$

и заменяя эти координаты перпендикулярами ρ_1, ρ_2, ρ_3, опущенными на диаметральные плоскости, получаем:

$$2F=\frac{e_1}{\cos^2\varphi_1}\rho_1^2+\frac{e_2}{\cos^2\varphi_2}\rho_2^2+\frac{e_3}{\cos^2\varphi_3}\rho_3^2.$$

В этой формуле φ_1, φ_2, φ_3 — углы, которые делают сопряженные диаметры с нормалями к соответствующим сопряженным плоскостям. Если обозначим через

$$\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1,\ \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2,\ \lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3$$

углы нормалей к диаметральным плоскостям с прямоуголь-

ными осями координат x, y, z, то выразим ρ_1, ρ_2, ρ_3 через x, y, z следующими уравнениями:

$$\rho_1 = x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1,$$

$$\rho_2 = x\cos\lambda_2 + y\cos\mu_2 + z\cos\nu_2,$$

$$\rho_3 = x\cos\lambda_3 + y\cos\mu_3 + z\cos\nu_3.$$

Составляем с помощью этих уравнений производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1}\rho_1\cos\lambda_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2}\rho_2\cos\lambda_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3}\rho_3\cos\lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1}\rho_1\cos\mu_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2}\rho_2\cos\mu_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3}\rho_3\cos\mu_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1}\rho_1\cos\nu_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2}\rho_2\cos\nu_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3}\rho_3\cos\nu_3.$$

Из этих выражений скоростей по осям координат x, y, z следует, что слагающие скорости по направлению нормалей ρ_1, ρ_2, ρ_3 суть:

$$\frac{e_1\rho_1}{\cos^2\varphi_1}, \quad \frac{e_2\rho_2}{\cos^2\varphi_2}, \quad \frac{e_3\rho_3}{\cos^2\varphi_3};$$

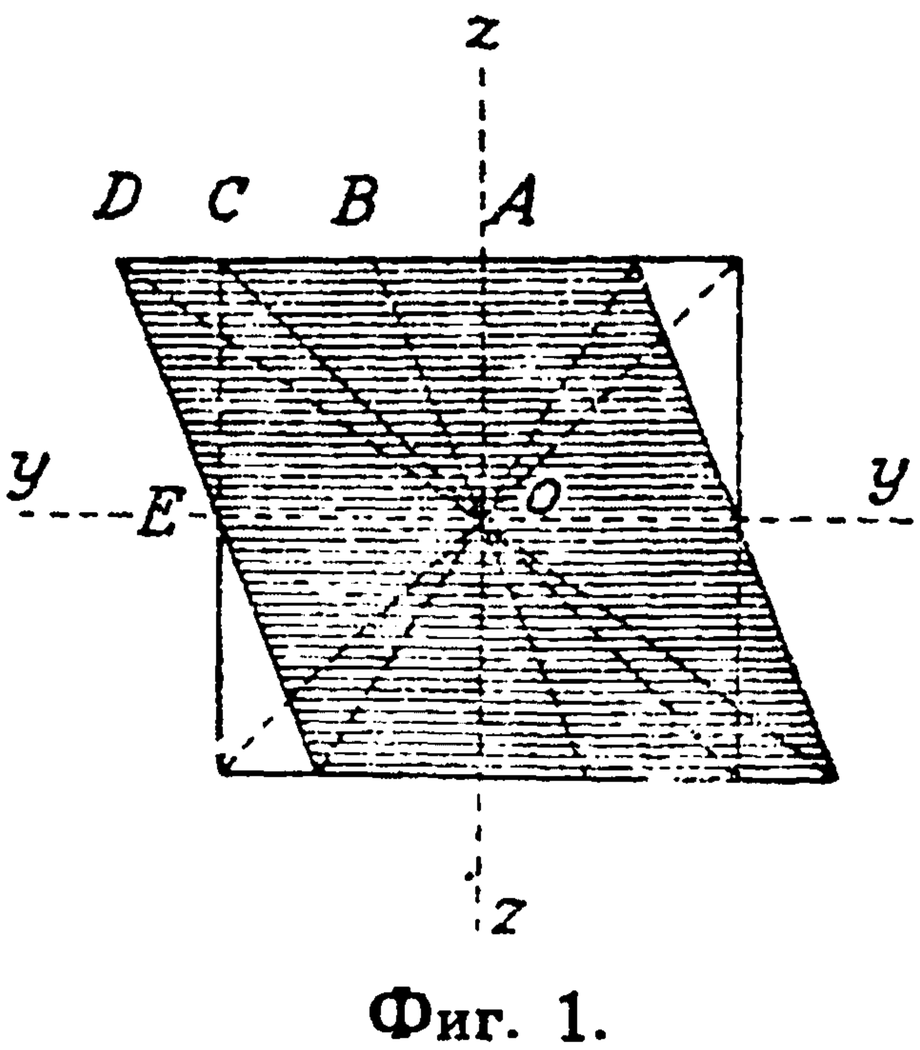
откуда вытекает теорема: *внутреннее движение частицы может быть разложено на три удлинения*

$$\frac{e_1}{\cos^2\varphi_1}, \quad \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2}, \quad \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3},$$

перпендикулярные трем сопряженным диаметрам. Понятно, что такое разложение отличается от указанного выше тем, что при движении частицы сами плоскости, перпендикулярно которым совершаются удлинения, приходят в движение. Укажем здесь еще на одно свойство внутреннего движения, вытекающее непосредственно из того условия, что скорости перпендикулярны поверхности $F = \text{const}$. *Все точки, лежащие на плоскости, диаметральной данному направлению, имеют*

скорости, перпендикулярные этому направлению. Все точки, лежащие на диаметре, сопряженном данной плоскости, имеют скорости, перпендикулярные этой плоскости.

§ 7. Формулы (7) показывают, что внутреннее движение частицы не может быть разложено на три удлинения, перпендикулярные плоскостям координат, если оси координат не суть оси деформации. Чтобы сделать разложение в этом случае, познакомимся с движением, называемым *скольжением без вращения*. Если точки частицы движутся в плоскостях, параллельных плоскости zy (фиг. 1), со скоростями, направленными вдоль по оси Oy и равными $2\theta_1 z$, то говорят, что частица претерпевает вдоль оси Oy в плоскости zy скольжение $2\theta_1$.



Фиг. 1.

Плоскость zy называют *плоскостью скольжения*, линию Oy — *направлением скольжения*, а $2\theta_1$ — его *величиной*. Будем вместо плоскости скольжения давать перпендикулярную к ней линию Ox, которую назовем *осью скольжения* [1], и условимся считать эту линию положительной в ту сторону, смотря с которой на центр частицы скольжение кажется совершающимся против часовой стрелки.

Вообразив в плоскости скольжения бесконечно малый квадрат, стороны которого параллельны осям Oy и Oz, увидим, что он по прошествии бесконечно малого времени t обратится с точностью до величин второго порядка в ромб, так что прямой угол между диагоналями изменится во время t на бесконечно малую величину второго порядка. Это показывает, что диагонали и ось Ox будут при рассматриваемом движении осями деформации. Угол, на который поворачивается частица в бесконечно малое время t, будет угол, заключенный между диагоналями квадрата и ромба. Этот угол, как видно из фиг. 1,

[1] Употребляемое нами название оси скольжения имеет другое значение, чем то, которое встречаем у Томсона и Тета. Они называют осями скольжения оси деформации, которые суть диагонали рассмотренного нами ниже квадрата. Handbuch der Theoretischen Physik, T. 1, S. 118.

равен $\theta_1 t$, потому что

$$\angle DOC = \angle COE - \angle DOE = \frac{\angle AOE - \angle BOE}{2} = \frac{BA}{2AO} = \theta_1 t.$$

Он откладывается в сторону скольжения. Отсюда следует, что *при скольжении оси деформации поворачиваются в сторону скольжения на угол, равный половине скольжения.* Чтобы из рассматриваемого движения получить скольжение без вращения, прибавляем к нему вращение около оси скольжения Ox, направленное по часовой стрелке с угловой скоростью θ_1. Скорости точек частицы по осям y и z в этом новом движении будут $\theta_1 z$ и $\theta_1 y$. Скольжение без вращения вполне определяется величиной скольжения, направлением скольжения и осью скольжения, сторона которой известна. Из сказанного ясно, что направление оси скольжения соответствует направлению оси вращения, прибавляемого к скольжению, когда вращение считаем положительным по стрелке часов.

Из симметрии осей y и z относительно рассматриваемого движения следует, что от одновременного поворачивания направления скольжения в плоскости скольжения на прямой угол и изменения направления оси скольжение без вращения не изменяется. Положим теперь, что частица имеет три скольжения без вращения $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$, направления которых суть координатные линии Oy, Oz, Ox, а оси скольжения — координатные линии Ox, Oy, Oz, и назовем скорости точек частицы, происходящие от этих трех движений, через u_2, v_2, w_2. Эти скорости будут:

$$\begin{aligned} u_2 &= \theta_2 z + \theta_3 y, \\ v_2 &= \theta_3 x + \theta_1 z, \\ w_2 &= \theta_1 y + \theta_2 x. \end{aligned} \tag{8}$$

Присоединяя к ним скорости, происходящие от трех удлинений ε_1, ε_2, ε_3, перпендикулярных плоскостям координат, получим формулы (7). Отсюда следует, что *внутреннее движение частицы можно всегда разложить на три удлинения, перпендикулярные осям координат и на три скольжения без вращения, для которых направления и оси*

скольжений суть оси координат. Формулы (8) показывают, что скорости скольжений суть частные производные по координатам от функции ϕ:

$$2\phi = 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy.$$

Это уравнение соответствует поверхности гиперболоида, асимптотический конус которого проходит через оси координат; оно дает поверхность удлинения для внутреннего движения, при котором $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Докажем, что при $\Delta = 0$ функцию F можно представить в виде ϕ, т. е. что *внутреннее движение всякой несжимаемой частицы может быть получено тремя скольжениями без вращения около трех прямоугольных осей.* Так как в рассматриваемом случае $E_1 + E_2 + E_3 = 0$, то поверхность удлинения будет соответствовать двум сопряженным гиперболоидам. Если допустим, например, что

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

есть уравнение асимптотического конуса этих гиперболоидов, то действительная ось его будет Oz. Сечения этого конуса плоскостями zx и zy будут четыре прямые линии, образующие с осью Oz углы, тангенсы которых даются формулами:

$$\frac{x}{z} = \pm\frac{1}{c} : \frac{1}{a},$$

$$\frac{y}{z} = \pm\frac{1}{c} : \frac{1}{b}.$$

Все четыре тангенса по абсолютной величине более единицы, так как вследствие равенства

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

получаются неравенства

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{c} > \frac{1}{b}.$$

Это показывает, что асимптотический конус имеет бесконечное множество взаимно ортогональных образующих. Взяв

две ортогональные образующие за оси Oy' и Oz' и проведя перпендикулярную им линию Ox', выражаем функцию $2F$ помощью координат x', y', z':

$$2F = \varepsilon_1' x'^2 + 2\theta_1' y' z' + 2\theta_2' z' x' + 2\theta_3' x' y'.$$

Так как $\Delta = 0$, то $\varepsilon_1' = 0$, и функция F получает вид ϕ.

Из предложенного доказательства видно, что *конус нулевого удлинения несжимаемой частицы, проведенный через два ребра прямого трехгранного угла, всегда проходит через третье ребро.*

Когда все внутреннее движение приводится к одному скольжению без вращения, направление которого есть Oy, а ось — Ox, то поверхность удлинения будет иметь уравнение

$$2\phi = 2\theta_1 yz$$

и представляет цилиндр, направляющая которого есть равносторонняя гипербола, а образующие параллельны оси Ox. Отсюда следует, что внутреннее движение частицы может быть получено одним скольжением без вращения только в том случае, когда поверхность удлинения есть равносторонний гиперболический цилиндр. По этой причине и по формуле (4) приведение всего внутреннего движения к одному скольжению характеризуется двумя условиями:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - \varepsilon_1\theta_1^2 - \varepsilon_2\theta_2^2 - \varepsilon_3\theta_3^2 = 0.$$

Рассмотрим теперь, в каких случаях два скольжения без вращения могут быть заменены одним. Пусть имеем два скольжения без вращения, которым соответствуют функции скоростей F и ϕ:

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy,$$

$$2\phi = 2\theta_1' yz.$$

Удлинения ε_1, ε_2, ε_3 и скольжения $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$ удовлетворяют вышенаписанным условиям. Функция скоростей сложного движения будет $(F + \phi)$:

$$2(F+\phi) = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2(\theta_1 + \theta_1') yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy.$$

Для того чтобы сложное движение было в свою очередь скольжением без вращения, необходимо удовлетворить равенству

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_1') - \varepsilon_1(\theta_1 + \theta_1')^2 - \varepsilon_2\theta_2^2 - \varepsilon_3\theta_3^2 = 0,$$

которому на основании условий, стесняющих F, можно дать вид

$$2\theta_2\theta_3 - \varepsilon_1(2\theta_1 + \theta_1') = 0.$$

Укажем на один частный случай, при котором это условие удовлетворяется. Пусть требуется сложить два скольжения без вращения, которым соответствуют функции скоростей $\Phi = \theta_1' yz$ и $F = \theta_2 zx$. Здесь имеем $\theta_3 = \varepsilon_1 = 0$, поэтому условие удовлетворяется. Функция скоростей сложного движения будет

$$\Phi + F = \theta_1' yz + \theta_2 zx.$$

Представим ее в более простом виде, переходя к новой системе прямоугольных координат x', y', z' помощью формул перехода:

$$x = x' \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}} + y' \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}},$$

$$y = -x' \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}} + y' \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}},$$

$$z = z'.$$

Делая подстановку, получаем:

$$F + \Phi = \sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}\, y'z'.$$

Эта формула показывает, что сложное движение есть скольжение без вращения, равное

$$2\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2},$$

направленное по линии Oy' и имеющее осью Ox'. Угол α, образуемый осями Ox' и Ox, как видно из формул перехода, выражается равенствами

$$\cos\alpha = \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{-\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}.$$

Заметим теперь, что для всех трех рассматриваемых нами скольжений можно принять ось Oz за направление, если условимся ось скольжения $2\theta_1'$ считать в отрицательную сторону оси координат Ox, ось скольжения $2\theta_2$ — в положительную сторону Oy и ось скольжения

$$2\sqrt{\theta_1'^2+\theta_2^2}$$

в отрицательную сторону Ox′. Углы, которые образует отрицательная ось Ox′ с отрицательной осью Ox и положительной Oy, имеют косинусами

$$\frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2+\theta_2^2}},\quad \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2+\theta_2^2}}.$$

На основании всего сказанного о сложении предложенных движений выводим теорему: *чтобы сложить два скольжения без вращения, имеющие общее направление и ортогональные оси, надо отложить на положительных осях величины скольжений и взять геометрическую сумму полученных линий. Эта сумма будет давать величину и ось составного скольжения без вращения, которое будет иметь то же направление, какое имели слагаемые скольжения.* Эта теорема распространяется на случай сложения скольких бы то ни было скольжений без вращения, имеющих одинаковое направление, причем оси скольжений могут быть расположены под какими бы то ни было углами. Взяв прямоугольные координаты, одна из осей которых совпадает с данным направлением, разложим по вышеприведенной теореме каждое скольжение на два, имеющие оси, направленные по двум другим координатам. Берем алгебраические суммы всех скольжений, имеющих оси по каждой из координат, и складываем два полученные скольжения в одно. Такой способ сложения нескольких скольжений оправдывает теорему: *сложное движение, происходящее от сложения нескольких скольжений без вращения, имеющих одинаковое направление, есть скольжение без вращения, имеющее то же направление, ось и величина которого получаются, откладывая величины слагаемых скольжений на их осях и слагая геометрически полученные линии.*

§ 8. Разберем еще одно разложение, которое, как кажется, всего яснее представляет нам внутреннее движение частицы.

Разложение это разбивает движение на две части: на удлинение всех центральных радиусов-векторов в предположении, что они неподвижны, и на вращение этих радиусов в предположении, что они сохраняют длину. Вращение радиуса-вектора называют его *девиацией*[1] и представляют направлением и величиной скорости точки радиуса, отстоящей на единицу от центра. В § 3 мы познакомились с удлинением ε центрального радиуса; посвятим этот параграф изучению его девиации. Называя через σ девиацию и через σ_1, σ_2, σ_3 ее проложения на оси деформации, определим эти проложения, замечая, что вся скорость точки частицы слагается из скорости по радиусу-вектору и скорости, перпендикулярной радиусу:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{x}{r}(E_1 - \varepsilon), \\ \sigma_2 &= \frac{y}{r}(E_2 - \varepsilon), \\ \sigma_3 &= \frac{z}{r}(E_3 - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Формулы (9) показывают, что *девиация лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и нормаль к поверхности удлинения, восставленную из точки пересечения ее с радиусом.* В самом деле, косинусы углов, которые образует перпендикуляр к упомянутой плоскости с осями деформации, находятся в отношении

$$yz(E_2 - E_3) : xz(E_3 - E_1) : xy(E_1 - E_2).$$

Умножая уравнения (9) на члены этого отношения и складывая, получаем нуль. Для определения величины девиации σ возвышаем уравнения (9) в квадрат и складываем их, обращая внимание на формулу (2′):

$$\sigma^2 = \frac{x^2E_1^2 + y^2E_2^2 + z^2E_3^2}{r^2} - \varepsilon^2. \tag{10}$$

[1] Определение девиации радиуса полного движения частицы мы встречаем у Коши в Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. II, p. 311. Название девиации (déviation) мы заимствуем из статьи Дюранда, помещенной в Comptes rendus, 2 Semestre, T. LXXIII, p. 737, 1871.

Эту формулу преобразовываем, вводя в нее выражение косинуса угла φ между радиусом-вектором и нормалью к поверхности удлинения:

$$\cos\varphi = \frac{E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2}{r\sqrt{E_1^2x^2 + E_2^2y^2 + E_3^2z^2}} = \frac{r\varepsilon}{\sqrt{E_1^2x^2 + E_2^2y^2 + E_3^2z^2}}.$$

Это дает нам формулу (10′):

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi, \qquad (10')$$

которую, впрочем, можно было бы написать прямо, так как скорость точки направлена по нормали и имеет своими слагающими по радиусу-вектору и перпендикуляру к нему

$$\varepsilon r \text{ и } \sigma r.$$

Формула (10′) показывает, что *девиация равна удлинению, умноженному на тангенс угла между радиусом-вектором и соответствующей нормалью к поверхности удлинения.* Таким образом поверхность удлинения, давая нам наглядное изображение удлинения каждого центрального радиуса, дает одновременно и полное представление о его девиации. Мне казалось бесполезным, подобно Коши, строить поверхность, выражающую девиацию по радиусу-вектору, тем более что поверхность, о которой идет речь, будет четвертого порядка, как это видно из формулы (10). Чтобы яснее представить себе направление девиации, заметим, что на основании формул (9) и (5) она должна быть перпендикулярна соответствующему конусу равного удлинения и должна быть направлена вне этого конуса при

$$E_2 > \varepsilon > E_3$$

и внутрь его при

$$E_1 > \varepsilon > E_2.$$

Проводя конические поверхности, ортогональные конусам равного удлинения, мы получим поверхности, по которым текут в продолжение бесконечно малого времени t центральные радиусы частицы. Условимся называть эти поверхности *конусами девиаций* и напишем их диференциальное уравнение, которое будет

$$yz(E_2 - E_3)dx + zx(E_3 - E_1)dy + xy(E_1 - E_2)dz = 0$$

и дает после интеграции

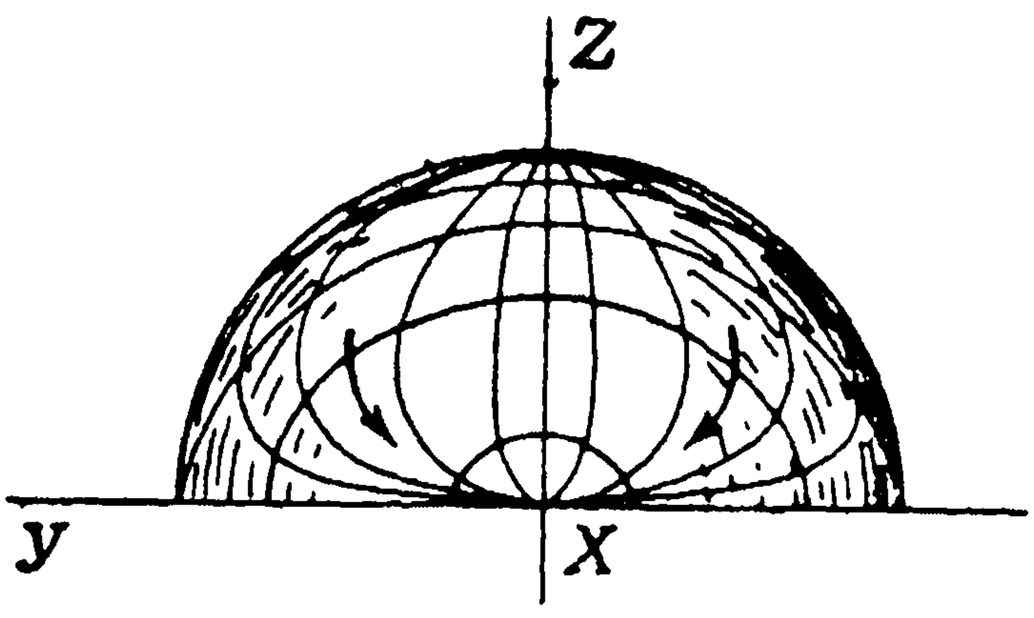
$$x^{E_2-E_3}\, y^{E_3-E_1}\, z^{E_1-E_2} = \text{const.}$$

Все конусы найденного семейства пересекают плоскости деформации по осям Ox и Oz. Начиная от слияния с плоскостью xz, эти конусы идут, все более и более выгибаясь, пока не обратятся в две пересекающиеся плоскости xy и zy. Нетрудно показать, что по осям Ox и Oz все конусы соприкасаются с плоскостями xy и yz; для этого определим производную $\frac{dz}{dy}$ при постоянном x и производную $\frac{dx}{dy}$ при постоянном z:

$$\frac{dz}{dy} = c_1 y^{\frac{E_2-E_3}{E_1-E_2}};$$

$$\frac{dx}{dy} = c_2 y^{\frac{E_1-E_2}{E_2-E_3}},$$

и заметим, что они обращаются в нули при $y = 0$. На фиг. 2 изображены следы конусов равного удлинения и конусов девиации на поверхности шара, описанного из центра частицы. *Во всякое бесконечно малое время* t *вся девиация центральных радиусов-векторов приводится к течению их по конусам девиации от оси наименьшего удлинения к оси наибольшего удлинения.*



Фиг. 2.

§ 9. Заканчивая описание внутреннего движения, обратим внимание на разложение девиации радиусов, лежащих в одной плоскости, на девиацию вдоль плоскости и девиацию, нормальную к плоскости. От первой девиации радиусы движутся по плоскости, изменяя между собою углы; от второй девиации плоскость, в которой они заключены, вращается около некоторой лежащей на ней линии. Назовем через r' бесконечно малую линию, отложенную на нормали рассматриваемой плоскости, и через x', y', z' ее проекции по осям деформации и определим проложения на r' девиации радиуса r, лежащего

в рассматриваемой плоскости. На основании формул (9) искомая проекция будет

$$\frac{1}{rr'}(E_1xx' + E_2yy' + E_2zz').$$

Пролагаем в свою очередь найденную девиацию на оси координат и преобразуем полученные проекции σ_1', σ_2', σ_3' на основании равенства

$$xx' + yy' + zz' = 0:$$

$$\sigma_1' = \frac{x'}{rr'^2}[(E_3 - E_1)zz' - (E_1 - E_2)yy'],$$

$$\sigma_2' = \frac{y'}{rr'^2}[(E_1 - E_2)xx' - (E_2 - E_3)zz'],$$

$$\sigma_3' = \frac{z'}{rr'^2}[(E_2 - E_3)yy' - (E_3 - E_1)xx'].$$

Эти формулы показывают, что линия, образующая с осями углы, косинусы которых находятся в отношении

$$(E_2 - E_3)y'z' : (E_3 - E_1)z'x' : (E_1 - E_2)x'y',$$

не имеет девиации по нормали r'. Эту линию называют *характеристикой* плоскости, соответствующей нормали r'; она лежит в пересечении этой плоскости с плоскостью, сопряженной нормали r' относительно поверхности удлинения. Если возьмем характеристику за нормаль некоторой плоскости и отыщем характеристику этой последней, то увидим, что косинусы ее углов находятся в отношении

$$x' : y' : z'.$$

Это показывает, что *нормаль и ее характеристика суть две линии взаимные*. Так как характеристика перпендикулярна нормали и лежит в ее сопряженной плоскости, то *сечение поверхности удлинения через нормаль и ее характеристику имеет эти две линии своими главными осями*. Понятно, что характеристика плоскости есть ось ее вращения. Чтобы определить угловую скорость плоскости около ее характеристики, заменяем в формулах для σ_1', σ_2', σ_3' координаты

x, y, z на x′, y′, z′ и находим таким образом скорость, которую имеет от вращения плоскости конец линии, равной единице и отложенной на нормали r′. Проекции этой скорости по осям будут величины

$$\frac{x'}{r'}(\varepsilon' - E_1), \quad \frac{y'}{r'}(\varepsilon' - E_2), \quad \frac{z'}{r'}(\varepsilon' - E_3),$$

в которых ε'—удлинение по нормали r′. Сравнение этих величин с формулами (9) приводит нас к следующей теореме: *бесконечно малая жидкая плоскость, проходящая через центр частицы, движется так, что нормаль, восставленная к ней из этого центра, имеет девиацию, равную и противоположную девиации бесконечно малой жидкой линии, соответствующей нормали.*

По этой теореме угловая скорость вращения плоскости около ее характеристики равна $\varepsilon' \operatorname{tg} \varphi'$, где φ' — угол, который образует нормаль к плоскости с нормалью к поверхности удлинения, восстановленной из точки ее пересечения с этой поверхностью. Что же касается прямого угла между плоскостью и жидкой линией, соответствующей ее нормали, то этот угол изменяется во время t на $2\varepsilon' \operatorname{tg} \varphi' t$. Переходя к девиации вдоль плоскости, замечаем, что на основании § 5 все внутреннее движение точек частицы в плоскости вполне определяется по кривой сечения этой плоскости с поверхностью удлинения. Если назовем через e_1 и e_2 главные оси этого сечения и направим координаты Ox и Oy по этим осям, то получим функцию скоростей:

$$2f = e_1 x^2 + e_2 y^2.$$

Все сказанное о внутреннем движении точек частицы в пространстве будет иметь место как частный случай при движении на плоскости. Полагая в формуле (10′) $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = 0$, получим следующее выражение для девиации радиусов-векторов в плоскости:

$$\sigma^2 = \frac{x^2 e_1^2 + y^2 e_2^2}{r^2} - \varepsilon^2.$$

Подставляя сюда

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(e_1 x^2 + e_2 y^2),$$

находим

$$\sigma r^2 = \pm (e_1 - e_2)\, xy. \tag{11}$$

Если выберем координаты x, y так, чтобы σr^2 была постоянная бесконечно малая величина k второго порядка, то увидим, что все точки, им соответствующие, лежат на равносторонней гиперболе

$$\pm \frac{k}{e_1 - e_2} = xy, \tag{11'}$$

асимптоты которой суть оси Ox и Oy. Это дает теорему: *девиация в плоскости обратно пропорциональна радиусу-вектору равносторонней гиперболы, асимптоты которой суть главные оси рассматриваемого сечения.* Знаки $\pm$ в уравнении (11′) показывают, что следует брать всякий раз обе сопряженные гиперболы, причем девиация будет совершаться для одной гиперболы в одну сторону, а для другой — в другую, направляясь от асимптоты, соответствующей меньшему удлинению, к асимптоте, соответствующей большему. Доказанная теорема дает нам целый ряд весьма интересных следствий [1].

Главные оси сечения не имеют девиации в его плоскости. Биссекторы главных осей имеют наибольшую девиацию и составляют потому две ортогональные линии, наиболее изменяющие прямой угол. Все ортогональные радиусы-векторы имеют в своей плоскости одинаковые, но направленные в разные стороны девиации. Все радиусы-векторы, образующие с одной из главных осей сечения взаимно дополнительные углы, имеют одинаковую и направленную в одну сторону девиацию в плоскости сечения и потому не изменяют своего угла в пространстве во время t. *Все радиусы-векторы, образующие с одной из осей равные углы, имеют одинаковую, но противоположно направленную девиацию, откуда следует, что линии, не изменяющие угла с плоскостью, лежат на конусе, удлинение которого равно удлинению нормали к плоскости.*

---

1 Некоторые из этих теорем в применении к конечному изменению плоской частицы можно найти в небольшой статье Тиссо о картографии, Comptes rendus, T. XLIX, deuxième semestre, p. 673, 1859.

§ **10.** Сказанное в предыдущих параграфах, кажется, вполне разъясняет характер внутреннего движения частицы; присоединяя к этому движению вращение осей деформации, получим ее *полное* движение относительно центра. Понятно, что полное движение можно разложить на удлинение радиусов-векторов, которое будет таким же, как для внутреннего движения, и на их девиацию, которая будет слагаться из внутренней девиации и скорости вращения. Называя через s_1, s_2, s_3 проложения полной девиации по осям деформации и через ω_1, ω_2, ω_3 угловые скорости вращения около этих осей, получим:

$$\left.\begin{aligned} rs_1 &= (E_1 - \varepsilon)x + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ rs_2 &= (E_2 - \varepsilon)y + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ rs_3 &= (E_3 - \varepsilon)z + \omega_1 y - \omega_2 x. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Подобным же образом можно выразить девиации нормали плоскости, припоминая, что внутренняя девиация нормали равна и противоположна девиации соответствующей ей жидкой линии.

Если назовем через s_1', s_2', s_3' девиацию нормали плоскости и отложим на этой нормали длину r', проложения которой по осям суть x', y', z', то получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} r's_1' &= -(E_1 - \varepsilon')x' + \omega_2 z' - \omega_3 y', \\ r's_2' &= -(E_2 - \varepsilon')y' + \omega_3 x' - \omega_1 z', \\ r's_3' &= -(E_3 - \varepsilon')z' + \omega_1 y' - \omega_2 x', \end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

отличающиеся от формул (12) только знаком при внутренней девиации.

Самый существенный вопрос при разборе полного движения заключается в определении линий и плоскостей, не изменяющих своего направления; решение его может быть получено помощью формул (12) и (12′), полагая в них

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_1' = s_2' = s_3' = 0:$$

$$\left.\begin{aligned} x(E_1 - \varepsilon) + \omega_2 z - \omega_3 y &= 0, \\ y(E_2 - \varepsilon) + \omega_3 x - \omega_1 z &= 0, \\ z(E_3 - \varepsilon) + \omega_1 y - \omega_2 x &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} -x'(E_1 - \varepsilon') + \omega_2 z' - \omega_3 y' &= 0, \\ -y'(E_2 - \varepsilon') + \omega_3 x' - \omega_1 z' &= 0, \\ -z'(E_3 - \varepsilon') + \omega_1 y' - \omega_2 x' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Эти уравнения позволяют при данном вращении частицы отыскать линии и плоскости, не изменяющие своих направлений. Нетрудно заметить, что каждая из систем уравнений (13) и (13′) соответствует только двум уравнениям, потому что, умножая, например, уравнения первой системы последовательно на x, y, z и складывая, получаем тождество:

$$E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 z^2 - \varepsilon r^2 = 0.$$

Для определения искомых направлений находим прежде величины ε и ε', исключая из уравнений (13) и (13′) координаты x, y, z, x′, y′, z′. Это дает нам из уравнений (13) кубическое уравнение

$$(E_1 - \varepsilon)(E_2 - \varepsilon)(E_3 - \varepsilon) +$$
$$+ \omega_1^2(E_1 - \varepsilon) + \omega_2^2(E_2 - \varepsilon) + \omega_3^2(E_3 - \varepsilon) = 0,$$

которое не изменяется при перемене знака двучленов

$$(E_1 - \varepsilon),\ (E_2 - \varepsilon),\ (E_3 - \varepsilon)$$

и потому соответствует также и уравнениям (13′). Отсюда: *каждой величине ε соответствует равная ей величина ε'.*

Найденное уравнение можно написать в более простом виде, вводя удлинение ε_0 по оси вращения частицы:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\omega^2}(E_1\omega_1^2 + E_2\omega_2^2 + E_3\omega_3^2),$$

где

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

$$(E_1 - \varepsilon)(E_2 - \varepsilon)(E_3 - \varepsilon) + \omega^2(\varepsilon_0 - \varepsilon) = 0. \qquad (14)$$

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2(E_1 + E_2 + E_3) + \varepsilon(E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2 + \omega^2) -$$
$$- (\omega^2\varepsilon_0 + E_1E_2E_3) = 0. \qquad (14')$$

Каждому действительному корню этого уравнения найдем из формул (13) и (13′) соответствующую, не изменяющую направления, линию и плоскость, и так как кубическое уравнение имеет всегда, по крайней мере, один действительный корень, то получаем теорему[1]: *через каждую точку движу-*

[1] Bertrand, Comptes rendus, 1868, I sem., p. 1227. Также Thomson und Tait, Handbuch der Theoretischen Physik, S. 125, 1871.

щейся жидкости можно всегда провести по крайней мере одну бесконечно малую линию и одну бесконечно малую плоскость, которые, двигаясь вместе с жидкостью, сохраняют во время t *свое направление.*

Когда все три корня уравнения (14) действительны, то будем иметь три действительные, не изменяющие своего направления, линии и три действительные, не изменяющие своего направления, плоскости. Умножая уравнения (13) и (13′) последовательно на x', y', z', x, y, z и складывая их, получаем равенство

$$(\varepsilon' - \varepsilon)(xx' + yy' + zz') = 0,$$

которое показывает, что всякий раз, как ε' не равно ε, r' перпендикулярен r. Отсюда следует, что каждые две не изменяющие направлений линии лежат в не изменяющей направления плоскости, нормаль которой имеет удлинение, не равное удлинению этих линий.

Условимся называть линию и плоскость, удлинение нормали которой равно удлинению линии, *соответственными* и обратимся к теореме: *три не изменяющие направления плоскости и линии суть грани и ребра трехгранного угла, расположенного таким образом, что не изменяющим направления линиям противолежат соответственные не изменяющие направления плоскости.* Отсюда следует, что всякий раз, как две сохраняющие направление линии сливаются или становятся мнимыми, сливаются и становятся мнимыми соответственные им плоскости. Найденная теорема могла бы быть получена, если обратить внимание на то, что линии, сохраняющие во время t свой угол с плоскостью, должны иметь удлинение, равное удлинению нормали к плоскости. Построив трехгранный угол, дополнительный до трехгранного угла, неподвижного в полном движении частицы относительно центра, увидим, что ребра и нормали противоположных плоскостей будут в нем тоже иметь равные удлинения, а потому этот угол не изменится при движении частицы в продолжение времени t. Если дадим вращению частицы противоположное направление, то заметим, что уравнения (13) и (13′) обратятся друг в друга; линии, сохраняющие направление в новом дви-

жении, займут место нормалей плоскостей, сохраняющих направление в старом, и наоборот, так что в новом полном движении относительно центра станет неподвижен трехгранный угол, дополнительный старому трехгранному углу. Мы получим теорему: *при изменении стороны вращения линии, сохраняющие направление, и нормали соответственных им плоскостей взаимно переменяются.* Рассматривая уравнения (14′) и (14), выводим из них еще две теоремы: *сумма удлинений по трем линиям, сохраняющим направление, или по трем нормалям плоскостей, соответственных этим линиям, равна сумме удлинений по осям деформации. Если будем перемещать ось постоянного вращения по конусу равного удлинения, то линии и нормали плоскостей постоянного направления будут тоже перемещаться: каждая соответственная пара по своему конусу удлинения.*

§ 11. Займемся теперь исследованием уравнения (14), которому дадим вид:

$$\omega^2 = \frac{(E_1 - \varepsilon)(E_2 - \varepsilon)(E_3 - \varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \qquad (14'')$$

При непрерывном изменении ε от E_3 до E_1 величина ω три раза переходит через 0; она может иметь на этом промежутке, вообще говоря, три наибольшие и наименьшие значения, так как уравнение

$$\frac{d \lg \omega^2}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon - E_1} + \frac{1}{\varepsilon - E_2} + \frac{1}{\varepsilon - E_3} - \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} = 0$$

есть кубическое. Положим

$$E_1 > E_2 > \varepsilon_0 > E_3.$$

При непрерывном изменении ε от E_3 до ε_0 величина ω изменяется от 0 до ∞, причем на этом промежутке она может иметь одно наибольшее значение вместе с одним наименьшим. При изменении ε от ε_0 величина ω становится мнимой и обращается в 0 при $\varepsilon = E_2$. Наконец, при изменении ε от E_2 до E_1 величина ω действительна и идет, прежде возрастая от 0, потом убывая до 0; в этом промежутке может быть только одно наибольшее значение ее, потому что

если бы на нем было два наибольших и одно наименьшее значение ω, то можно было бы найти такую величину ω, которой бы соответствовало в уравнении (14″) более трех действительных корней ε. Предполагая, что существуют три действительных наибольших и наименьших значения ω, назовем наибольшее и наименьшее значения, заключенные в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

через ω' и ω'', а наибольшее значение, заключенное в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1,$$

через ω'''; между этими тремя величинами необходимо должно существовать неравенство

$$\omega''' < \omega'' < \omega',$$

потому что в противном случае можно опять найти величину ω, которой соответствует в уравнении (14″) более трех действительных корней ε.

Давая теперь в уравнении (14″) различные значения ω, получим четыре случая:

1. При

$$\omega < \omega'''$$

существует три действительных корня ε, из которых один лежит в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

а два — в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1.$$

2. При

$$\omega''' < \omega < \omega''$$

существует только один действительный корень ε в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

3. При

$$\omega'' < \omega < \omega'$$

существуют три действительных корня, лежащих в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

4. Наконец, при

$$\omega' < \omega$$

получаем только один действительный корень в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Всякий раз, как ω получает одно из значений ω', ω'' или ω''', две линии, сохраняющие свое направление, и две соответственные им плоскости сливаются в одну. Будем называть такие сливающиеся линии и плоскости *двойными*. Когда существует только одно наибольшее значение ω, равное ω''', то для всех вращений

$$\omega < \omega'''$$

будут существовать три действительных корня ε, из которых два заключены в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1,$$

и один — в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0;$$

когда же возьмем

$$\omega''' < \omega,$$

то будет только один действительный корень в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Мы сделали предположение:

$$E_1 > E_2 > \varepsilon_0 > E_3;$$

понятно, что в предположении

$$E_1 > \varepsilon_0 > E_2 > E_3$$

получим совершенно такие же результаты, с той только разницей, что роль промежутка

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

будет играть промежуток

$$\varepsilon_0 < \varepsilon < E_1,$$

а роль промежутка .

$$E_2 < \varepsilon < E_1$$

будет играть промежуток

$$E_3 < \varepsilon < E_2.$$

Посмотрим теперь, какова должна быть величина ε_0, чтобы существовали три двойные линии и плоскости.

Делая в уравнении

$$\frac{d \lg \omega^2}{d\varepsilon} = 0$$

подстановки:

$$\varepsilon = z + \varepsilon_0, \quad E_1 - \varepsilon_0 = k_1, \quad E_2 - \varepsilon_0 = k_2, \; E_3 - \varepsilon = k_3,$$

получим уравнение

$$\frac{1}{z - k_1} + \frac{1}{z - k_2} + \frac{1}{z - k_3} - \frac{1}{z} = 0,$$

которое можно представить так:

$$2z^3 - z^2(k_1 + k_2 + k_3) + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Полагая здесь в свою очередь

$$\frac{\sqrt[3]{k_1 k_2 k_3}}{z} = y,$$

найдем

$$y^3 - y \frac{k_1 + k_2 + k_3}{\sqrt[3]{k_1 k_2 k_3}} + 2 = 0.$$

Для того чтобы три .корня этого последнего уравнения были действительны, необходимо выполнить условие:

$$-\frac{(k_1 + k_2 + k_3)^3}{27 k_1 k_2 k_3} + 1 < 0.$$

Внося в это неравенство значение k, получим:

$$\frac{1}{(E_1-\varepsilon_0)(E_2-\varepsilon_0)(E_3-\varepsilon_0)}\times$$

$$\times\left\{\varepsilon_0\left[\frac{(E_1+E_2+E_3)^2}{3}-(E_2E_3+E_3E_1+E_1E_2)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(E_1+E_2+E_3)^3}{3^3}-E_1E_2E_3\right]\right\}<0.$$

Так как множитель при ε_0 в квадратной скобке существенно положителен, что видно из тождества

$$\frac{(E_1+E_2+E_3)^2}{3}-(E_2E_3+E_3E_1+E_1E_2)=$$

$$=\frac{(E_2-E_3)^2+(E_3-E_1)^2+(E_1-E_2)^2}{6},$$

то делим на него полученное неравенство и представляем найденный результат таким образом:

$$\frac{p-\varepsilon_0}{(E_1-\varepsilon_0)(E_2-\varepsilon_0)(E_3-\varepsilon_0)}>0, \tag{15}$$

где

$$p=\frac{E_1+E_2+E_3}{9}+$$

$$+\frac{2}{3}\,\frac{E_1(E_2-E_3)^2+E_2(E_3-E_1)^2+E_3(E_1-E_2)^2}{(E_2-E_3)^2+(E_3-E_1)^2+(E_1-E_2)^2}.$$

Неравенство (15) есть искомое нами условие существования трех действительных значений ω', ω'', ω'''. Входящая в это неравенство величина p заключена между E_1 и E_3, потому что, полагая все E, не заключенные в скобках, равными E_1, мы получим $p=E_1$, а полагая все E вне скобок равными E_3, найдем $p=E_3$. Что касается E_2, то может быть $E_2>p$ и $E_2<p$; решая неравенство (15) в первом и втором предположении, получим

$$E_2>\varepsilon_0>p \quad \text{и} \quad p>\varepsilon_0>E_2.$$

Мы видим, что *для того, чтобы ось вращения допускала двойные не изменяющие направления линии и плоскости*:

при трех вращениях ω', ω'', ω''', *необходимо, чтобы эта ось лежала между плоскостями удлинения* E_2 *и конусом удлинения* p.

Называя через ε' удлинение радиуса, образующего с осями деформации равные углы, косинусы которых равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а через ε'' удлинение соответствующей ему характеристики, найдем:

$$\varepsilon' = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3},$$

$$\varepsilon'' = \frac{E_1 (E_2 - E_3)^2 + E_2 (E_3 - E_1)^2 + E_3 (E_1 - E_2)^2}{(E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 + (E_1 - E_2)^2},$$

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon' + \frac{2}{3} \varepsilon''.$$

§ **12.** Мы перейдем теперь к разбору зависимости, существующей между положением оси вращения и положениями линий и плоскостей, не изменяющих направления. Эта зависимость представляется весьма наглядно помощью одного конуса третьего порядка, который мы будем называть *конусом постоянных направлений.* Чтобы вывести уравнение этого конуса, отлагаем на оси вращения бесконечно малую длину ρ, проекции ξ, η, ζ которой по осям деформации находятся в отношении

$$\xi : \eta : \zeta = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3.$$

Составляя сумму уравнений (13), умноженных последовательно на ξ, η, ζ, и подобную же сумму уравнений (13′), получим между x, y, z в первом случае уравнение

$$\xi x (E_1 - \varepsilon) + \eta y (E_2 - \varepsilon) + \zeta z (E_3 - \varepsilon) = 0 \qquad (16)$$

и подобное же уравнение между x′, y′, z′ во втором случае. Рассматривая координаты x, y, z как постоянные, а ξ, η, ζ как текущие, получим уравнение плоскости, проходящей через точку (x, y, z) и точку

$$[yz (E_2 - E_3), \quad zx (E_3 - E_1), \quad xy (E_1 - E_2)].$$

Это показывает, что *все оси, при вращении около которых данная линия или нормаль данной плоскости сохраняет свое направление, лежат в плоскости, проходящей через это направление и соответствующую ему характеристику.* Когда же будем рассматривать координаты ξ, η, ζ как постоянные, а координаты x, y, z как текущие и подставим в уравнение (16):

$$\varepsilon = \frac{E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

то получим уравнение конуса третьего порядка:

$$\begin{aligned} &\xi (E_1 - E_2) xy^2 + \xi (E_1 - E_3) xz^2 + \\ &+ \eta (E_2 - E_3) yz^2 + \eta (E_2 - E_1) yx^2 + \\ &+ \zeta (E_3 - E_1) zx^2 + \zeta (E_3 - E_2) zy^2 = 0. \end{aligned} \tag{16'}$$

Имеем теорему: *место линий и нормалей плоскостей, которые могут сохранять направление при вращении частицы около данной оси с различными угловыми скоростями, есть конус третьего порядка.* Этот конус мы и будем называть конусом постоянных направлений. Познакомимся теперь с его свойствами. Уравнение (16′) показывает прямо, что *конус постоянных направлений проходит через оси деформации*; делая в этом уравнении поочередно

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

находим:

$$\frac{y}{z} = \frac{\eta}{\zeta}; \quad \frac{z}{x} = \frac{\zeta}{\xi}; \quad \frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Это показывает, что *конус постоянных направлений пересекает плоскости деформации по проекциям оси вращения.* Далее, представляя уравнение конуса постоянных направлений в форме (16), убеждаемся, что оно удовлетворяется при

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

а также при

$$x = \eta\zeta (E_2 - E_3), \quad y = \xi\zeta (E_3 - E_1), \quad z = \eta\xi (E_1 - E_2),$$

откуда следует, что *конус постоянных направлений проходит через ось вращения и через соответствующую ей характеристику.*

Вообразив теперь на конусе постоянных направлений две образующие (x, y, z) и (x′, y′, z′), имеющие равные удлинения, получим из уравнения (16) равенство:

$$\frac{E_1\xi x + E_2\eta y + E_3\zeta z}{\xi x + \eta y + \zeta z} = \frac{E_1\xi x' + E_2\eta y' + E_3\zeta z'}{\xi x' + \eta y' + \zeta z'},$$

которое можно преобразовать так:

$$\eta\zeta(E_2 - E_3)(yz' - zy') + \zeta\xi(E_3 - E_1)(zx' - xz') + \\ + \xi\eta(E_1 - E_2)(xy' - yx') = 0.$$

Полученное уравнение показывает, что *плоскость, проходящая через две линии на конусе постоянного направления, имеющие равные удлинения, проходит всегда через характеристику, соответствующую оси вращения.* Так как из нижнего равенства получается верхнее, то имеет место и обратная теорема. *Всякая плоскость, проходящая через характеристику оси вращения, рассекает конус постоянных направлений еще по двум линиям равного удлинения.*

Эта теорема показывает, что *четыре касательные плоскости* [1], *проведенные через характеристику оси вращения к конусу постоянных направлений, соприкасаются к нему по трем осям деформации и по оси вращения*, так как каждая из этих линий имеет в своей плоскости наибольшее и наименьшее удлинения. Далее из этой же теоремы следует, что на конусе постоянных направлений не может лежать более двух радиусов с равным удлинением, потому что если бы существовало более двух таких радиусов, то все они должны бы были лежать на плоскости, проходящей через один из радиусов и характеристику оси вращения, что невозможно, так как плоскость может пересекать конус третьего порядка только по трем образующим.

Вследствие этого при вращении секущей плоскости, проходящей через характеристику оси вращения, величина ε, *соответствующая сечениям конуса постоянных направлений, постоянно возрастает или убывает.*

---

[1] Пятая касательная плоскость соприкасается к конусу по характеристике оси вращения.

Посмотрим теперь, какая связь существует между образующими конуса постоянных направлений и плоскостью, проходящей через ось вращения. Из уравнений (16) и (5) прямо видим, что *плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус еще по двум образующим, в которых она соприкасается с соответственными конусами равного удлинения.* Эта теорема показывает, что *конус постоянных направлений можно рассматривать как место образующих по которым различные плоскости, проходящие через ось вращения, соприкасаются с конусами равного удлинения.* Так как на основании сказанного плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянных направлений по двум радиусам, имеющим наибольшее и наименьшее удлинения во всей плоскости, то эти радиусы будут главными осями сечения плоскости с поверхностью удлинения. Отсюда следует, что *плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянного направления по двум образующим, которые представляют собой взаимные характеристики.*

Пользуясь этим свойством, можно найти весьма простой способ построения конуса постоянных направлений. Взяв конус равного удлинения, проходящий через ось вращения, находим его следы на концентрической сфере. Всякая плоскость, проходящая через ось вращения, рассечет эти следы в четырех точках, соединяя которые получим прямоугольник. Линии, делящие пополам углы между диагоналями прямоугольника, и будут те образующие, по которым проведенная плоскость рассекает конус постоянных направлений. Так как эти образующие параллельны сторонам прямоугольника, то получаем следующее простое построение конуса постоянных направлений.

Начертив на сфере следы конуса равного удлинения, соответствующего оси вращения, строим конус, имеющий вершиной точку пересечения сферы с осью вращения, а основанием два полученных следа; найденный конус будет отличаться от конуса постоянных направлений только местом вершины.

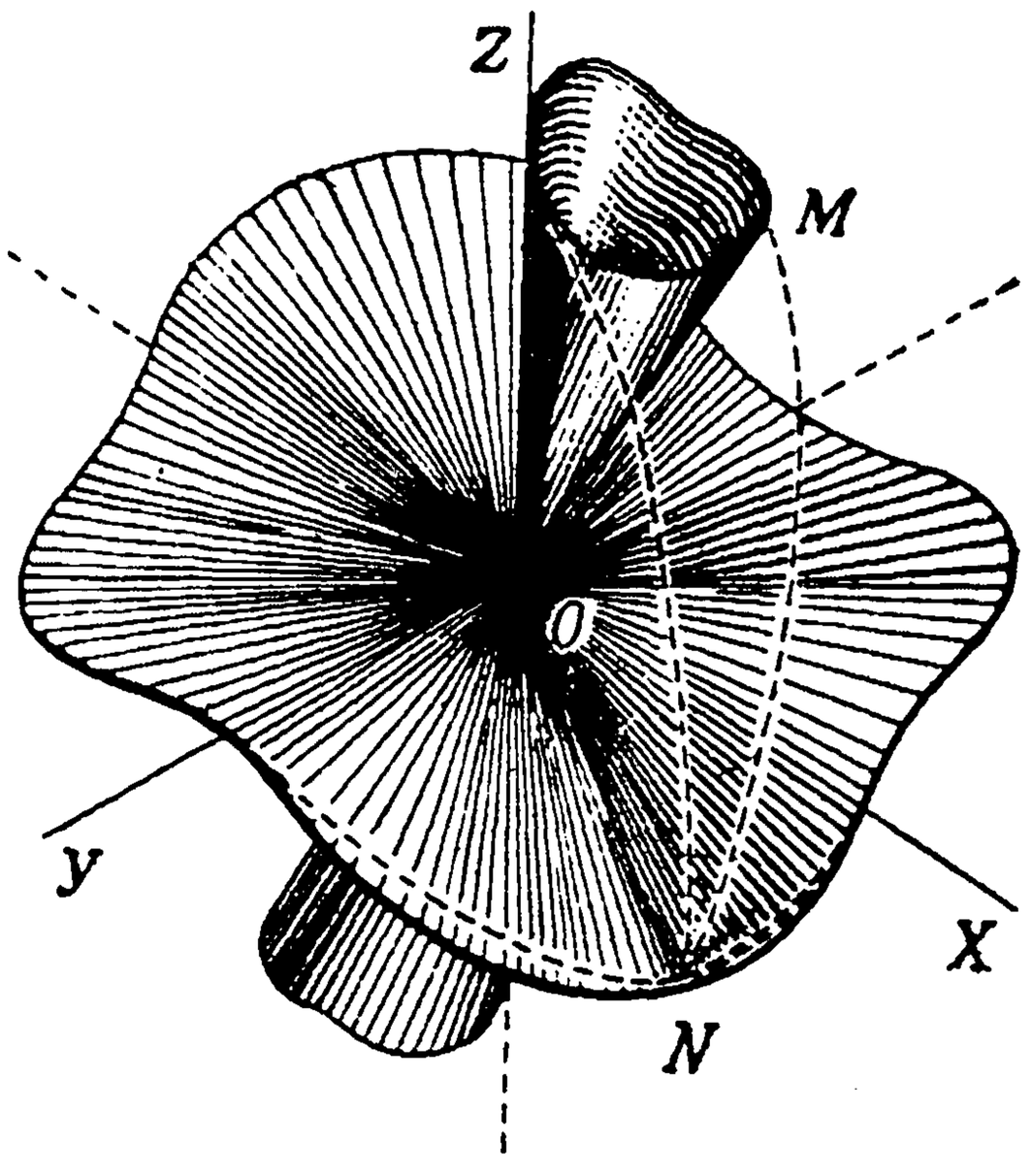
Из всего сказанного вполне выясняется вид разбираемого

конуса и положение его относительно осей деформации. Он будет состоять из двух полостей, из которых одна, подобно конусу второго порядка, рассекает концентрическую сферу по двум замкнутым линиям, а другая, подобно плоскости, рассекает эту сферу по одной непрерывной линии. Ось вращения будет лежать на первой полости, а характеристика ее — на второй; равным образом все взаимные характеристики будут лежать на различных полостях, так как они будут соответствовать сторонам вышеупомянутого прямоугольника.

Будем называть полость, на которой лежит ось вращения, *полостью оси вращения*, а полость, на которой лежит характеристика, — *полостью характеристики оси вращения*. Плоскость, проходящая через полость оси вращения, может пересекать ее только по двум линиям, поэтому на этой полости не могут лежать образующие, соответствующие точкам перегиба; все такие образующие будут лежать на второй полости. То обстоятельство, что плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянных направлений по двум образующим, в которых она соприкасается с конусами равного удлинения, показывает, что конус постоянных направлений может пересекать две плоскости, соответствующие конусу равного удлинения E_2, только по оси деформации E_2. Отсюда следует, что в каждой паре вертикальных углов, образуемых этими плоскостями, лежит только одна полость конуса постоянных направлений. Понятно, что при этом полость оси вращения проходит только через ту ось деформации, которая лежит в ее угле, а полость характеристики оси вращения проходит через лежащую в ее угле ось деформации и еще через ось E_2; кроме того, так как характеристики осей деформации лежат на противоположных плоскостях деформации, то полость оси вращения проходит через две проекции оси вращения на плоскости деформации, а полость характеристики оси вращения — только через одну проекцию. Проведя через характеристику оси вращения четыре касательные плоскости к конусу постоянных направлений, увидим, что плоскости, проходящие через одну из осей деформации и ось вращения, вполне заключают в своем двугранном угле полость оси вращения, а плоскости, прохо-

дящие через две другие оси деформации, вполне заключают в своем двугранном угле полость характеристики оси вращения; отсюда следует, что каждые две образующие, имеющие одинаковое удлинение, лежат на одной и той же полости конуса.

На фиг. 3 изображен конус постоянных направлений в его надлежащем положении относительно осей деформации, обрезанный по концентрической сфере. OM есть ось вращения, а ON — ее характеристика. Линии, обозначенные пунктиром, представляют следы на сфере четырех касательных плоскостей, проведенных к конусу через характеристику оси вращения.



Фиг. 3.

Заметим, что в частном случае, когда ось вращения попадает на одну из плоскостей удлинения E_2 и когда

$$\zeta = \xi \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_2 - E_3}},$$

уравнение (16′) распадается на два множителя:

$$(z\sqrt{E_2 - E_3} - x\sqrt{E_1 - E_2}) \times$$
$$\times \left[-\xi y^2 \sqrt{E_1 - E_2} + \xi xz \frac{E_1 - E_3}{\sqrt{E_2 - E_3}} + \right.$$
$$\left. + \eta yz \sqrt{E_2 - E_3} + \eta yx \sqrt{E_1 - E_2} \right] = 0,$$

из которых один дает уравнение той плоскости удлинения E_2 на которую вступает ось вращения, а другой — уравнение конуса второго порядка, пересекающего по двум образующим эту плоскость. Эта плоскость и конус второго порядка служат переходной ступенью от конуса постоянных направлений, у которого полость оси проходит через ось деформации E_1, к конусу постоянных направлений, у которого эта полость проходит через E_3.

Приложим теперь свойства исследованного конуса к нашему кинематическому вопросу. Каждой образующей конуса удлинения ε будет соответствовать на той же полости другая образующая с тем же удлинением ε, расположенная таким образом, что плоскость, проходящая через обе образующие, пройдет через характеристику оси вращения. Если при данном вращении одна образующая будет соответствовать не изменяющей направления линии, то другая будет нормалью соответственной ей плоскости; при этом при данном направлении вращения частицы всегда можно сказать, которая из образующих соответствует линии и которая — нормали; для этого стоит только припомнить, что девиация линии совершается от радиусов меньшего удлинения к радиусам большего удлинения, а девиация нормали — наоборот.

Положим теперь, что при данном вращении образующие a и a' представляют не изменяющую направления линию и нормаль соответствующей ей плоскости. Чтобы найти две другие не изменяющие направлений линий, проводим плоскость, перпендикулярную a'; эта плоскость рассечет конус постоянных направлений или по одной линии, которая есть характеристика a', или по этой линии и еще по двум другим линиям b и c. Так как характеристика линии a' не должна, вообще говоря, сохранять от внутренней девиации угол с линией a, то в первом случае будет для данного вращения существовать только одна не изменяющая направления линия a и одна нормаль a' не изменяющей направления плоскости; во втором случае мы будем иметь три не изменяющие направления линии a, b, c и три не изменяющие своего направления плоскости, проходящие через эти линии. Нормали b' и c' к плоскостям ac и ab будут лежать на линии пересечения конуса постоянных направлений с плоскостью, перпендикулярной a, и будут обладать тем свойством, что плоскости bb', и cc' пройдут через характеристику оси вращения. Из указанного построения образующих b и b', c и c' следует, что если пара образующих a и a' лежит на полости оси вращения, то пары b и b', c и c' лежат или обе на полости оси вращения, или обе на полости характеристики оси вращения, или, наконец, обе мнимы; в случае же, когда пара a и a' лежит на

полости характеристики оси вращения, то пары b и b', c и c' наверно действительны и лежат одна на полости оси вращения, другая — на полости характеристики оси вращения.

Мы получили такой результат: *всякий раз, как существуют три сохраняющие направление линии, а следовательно, и три соответственные им нормали, все три соответственные пары расположены на полости оси вращения, или одна пара расположена на полости оси вращения, а другие две — на полости характеристики оси вращения; всякий раз, как две пары этих линий мнимы, действительная пара лежит на полости оси вращения.* Заметив, что при

$$E_3 < \varepsilon_0 < E_2$$

на полости оси вращения будут лежать образующие, удлинения которых удовлетворяют неравенству

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

а на полости характеристики оси вращения — образующие, удлинения которых удовлетворяют неравенству

$$E_2 < \varepsilon < E_1,$$

увидим полное тождество найденного результата с изложенным в § 11.

Прежде чем сделаться мнимыми, две не изменяющие направления линии и соответствующие им нормали сливаются в одну двойную линию и одну двойную нормаль; эти две двойные линии должны быть взаимно перпендикулярны и должны лежать на пересечении одной из полостей конуса постоянных направлений плоскостью, проходящей через характеристику оси вращения. Понятно, что обратное заключение тоже справедливо, т. е. всякие две взаимно перпендикулярные образующие конуса постоянных направлений, лежащие на одной и той же полости и на плоскости, проходящей через характеристику оси вращения, представляют двойную линию и соответствующую ей двойную нормаль. Это замечание позволяет графически определить три двойные линии и три соответственные нормали; из этого замечания видно, что на полости оси вращения могут быть только

две действительные или мнимые пары двойных линий, следовательно, на конусе характеристики всегда будет одна действительная пара.

Теория конуса постоянных направлений позволяет с удобством разрешить многие задачи о не изменяющих направления линиях и плоскостях; предлагаем решение четырех подобных задач.

1. По положению двух данных сохраняющих направление линий найти ось вращения и третью линию.

Проводим через данные линии касательные плоскости к проходящим через них конусам равного удлинения; получим в пересечении этих плоскостей ось вращения. Строим характеристику оси вращения и соединяем с ней плоскостями данные линии; пересечение плоскостей с соответствующими конусами, проходящими через данные линии, дает соответствующие им нормали неподвижных плоскостей; проведя эти плоскости, найдем в их пересечении третью не изменяющую направления линию.

2. По данной не изменяющей направления линии и соответственной нормали найти ось вращения и две другие не изменяющие направления линии.

Ось вращения, как в предыдущей задаче, есть пересечение двух плоскостей, касательных к конусам постоянного удлинения, на которых лежат данные линии. Чтобы найти две другие не изменяющие направления линии, пользуемся началом, на котором основано вышеприведенное построение конуса постоянных направлений. Для этого строим поверхность удлинения и концентрическую с ней сферу, проходящую через точку, в которой ось вращения пересекает поверхность удлинения, и проводим через эту точку плоскость, перпендикулярную данной нормали; плоскость пересечет поверхность удлинения по кривой второго порядка, а сферу — по кругу; из четырех точек A, B, C, D пересечения этих линий точка A будет лежать на оси вращения, точка B будет обладать тем свойством, что хорда AB параллельна характеристике данной нормали, точки же C и D дадут нам хорды CA и CD, параллельные искомым не изменяющим направления линиям.

3. По оси вращения и сохраняющей свое направление линии найти другие сохраняющие направление линии.

Эта задача сводится к задаче второй, когда через характеристику оси вращения и данную линию проведем плоскость и определим ее пересечение с конусом равного удлинения, на котором лежит данная линия.

4. По не изменяющим направления линиям a_1, a_2, a_3 и по соответствующим им удлинениям найти ось и скорость вращения, а также оси деформации и главные удлинения.

Построим сначала характеристику оси вращения, замечая, что она должна лежать в пересечении трех плоскостей, из которых каждая проходит через одну из не изменяющих своего направления линий и через нормаль соответствующей не изменяющей направления плоскости. Так как удлинения по линиям, не изменяющим своего направления, даны, то по ним можно определить направление и величину девиации найденной линии. Величина девиации будет искомая скорость вращения частицы, а перпендикуляр к направлению девиации и к направлению характеристики оси вращения будет ось вращения частицы. Для определения осей деформации строим конус равного удлинения, проходящий через неподвижную линию a_1. Этот конус вполне определяется по данным задачи, так как он должен проходить через линию a_1, через нормаль к плоскости $(a_2\ a_3)$, через два перпендикуляра к линиям a_2 и a_3, проведенные по плоскостям $(a_1\ a_2)$, $(a_1\ a_3)$, и должен еще касаться плоскостей, соединяющих линию a_1 и нормаль плоскости $(a_1\ a_2)$ с осью вращения частицы. Оси найденного конуса будут оси деформации, а соответствующие им удлинения — главные удлинения частицы.

§ 13. Когда известны для какой-нибудь точки жидкости не изменяющая своего направления линия и соответствующая плоскость, то полное движение частицы, имеющей эту точку центром, может быть исследовано весьма просто. Отнимая от скоростей всех точек частицы скорость ее центра, разлагаем бесконечно малые относительные скорости точек частицы каждую на две слагающие, из которых одна параллельна не изменяющей своего направления линии, а другая — парал-

лельна соответственной плоскости. Первые слагающие будут пропорциональны расстоянию от не изменяющей направления плоскости, а вторые слагающие будут одинаковы для всех точек, лежащих на линиях, параллельных соответственной линии. Если теперь назовем *косоугольным удлинением относительно плоскости* движение, при котором все точки частицы имеют параллельные скорости, направленные под косым углом к плоскости и пропорциональные расстоянию точки от плоскости, то получим следующую теорему: *полное движение частицы относительно центра может быть разложено на косоугольное удлинение относительно не изменяющей своего направления плоскости, проходящей через этот центр, которое направлено вдоль неподвижной линии, и на движение, параллельное неподвижной плоскости, в котором все точки, лежащие на линиях, параллельных не изменяющей направления линии, имеют одинаковые скорости.*

Движение точек частицы параллельно плоскости, не изменяющей направления, определяется по движению точек, лежащих в этой плоскости. Разлагаем это последнее движение на удлинение радиуса и девиацию. Удлинение радиуса будет зависеть от кривой сечения, по которой не изменяющая направления плоскость пересечет поверхность удлинения, а девиация сложится из внутренней девиации радиуса в этой плоскости и из угловой скорости, равной проложению скорости вращения частицы на нормаль к плоскости, не изменяющей направления. Если наибольшая внутренняя девиация радиуса в не изменяющей направления плоскости будет менее проложения вращения частицы на нормаль к этой плоскости, то мы будем иметь только одну не изменяющую направления плоскость и одну не изменяющую направления линию; в противном случае два радиуса, лежащие в данной не изменяющей направления плоскости и имеющие девиации, равные угловой скорости вращения частицы около нормали к плоскости, но направленные в сторону, обратную этому вращению, будут две новые не изменяющие направлений линии. По § 9 эти не изменяющие направления линии должны лежать обе в одном и том же прямом углу, образуемом главными осями сечения не изменяющей направления плоскости с поверхностью удли-

нения, и должны быть равно наклонены к биссектору этого угла. Когда в данной не изменяющей направления плоскости не существует неподвижных линий, то девиация всех радиусов, лежащих в этой плоскости, совершается в сторону вращения частицы около нормали к плоскости; в противном случае *девиация совершается в различные стороны, направляясь от не изменяющей направления линии с меньшим удлинением к не изменяющей направления линии с бо́льшим удлинением.* В частном случае, когда наибольшая девиация радиуса в не изменяющей направления плоскости равна проложению скорости вращения частицы на нормаль к плоскости, мы будем иметь в этой плоскости двойную неподвижную линию; девиация же всех радиусов будет совершаться в сторону вращения частицы около нормали к не изменяющей направления плоскости.

Проводим через центр частицы оси координат x, y, ζ, из которых две первые направлены по осям сечения не изменяющей направления плоскости с поверхностью удлинения, а последняя — по соответствующей плоскости (yx) не изменяющей направления линии, и назовем через u, v, w скорости точек частицы по этим осям, а через ε и σ — удлинение и девиацию радиуса в плоскости xy. На основании сказанного выше получим формулы:

$$\begin{aligned} u &= e_1 x - ry, \\ v &= e_2 y + rx, \\ w &= \varepsilon_3 \zeta, \\ \varepsilon &= \frac{1}{r^2}(e_1 x^2 + e_2 y^2), \\ r^2\sigma &= (e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{17}$$

в которых e_1, e_2, ε_3 суть удлинения по осям x, y, ζ, а r — проложение вращения частицы на нормаль к плоскости xy.

Что касается девиации σ, то она считается положительной от оси x к оси y. Полагая $r^2\sigma = \pm k$, где k — бесконечно малая постоянная величина второго порядка, найдем уравнение центрального конического сечения:

$$(e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2) = \pm k. \tag{11''}$$

Мы видим, что *в полном движении частицы относительно центра девиация радиуса-вектора, лежащего в не изменяющей направления плоскости, обратно пропорциональна центральному радиусу-вектору кривой второго порядка.* Эта кривая будет эллипсис, гипербола или две параллельные прямые, смотря по тому, будет ли r^2 больше, меньше или равен

$$\left(\frac{e_2 - e_1}{2}\right)^2.$$

Так как

$$\left(\frac{e_2 - e_1}{2}\right)^2$$

есть квадрат наибольшей внутренней девиации радиуса-вектора в неподвижной плоскости, то мы получаем из уравнения (11″) результаты, вполне согласные с изложенным выше. Воспользуемся уравнениями (17) для определения бесконечно малых линий токов точек частицы в полном движении относительно центра. Диференциальные уравнения этих линий будут:

$$\frac{dx}{e_1 x - ry} = \frac{dy}{e_2 y + rx} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta}. \tag{18}$$

Они могут быть обинтегрированы помощью следующих преобразований. Представляем первую часть уравнения (18) в виде:

$$dx\,(e_2 y + rx) + dy\,(e_1 x - ry).$$

Делим это уравнение на интегрирующий делитель

$$(e_2 - e_1)\,xy + r\,(x^2 + y^2)$$

и полагаем

$$e_2 = \frac{e_2 + e_1}{2} + \frac{e_2 - e_1}{2}, \quad e_1 = \frac{e_2 + e_1}{2} - \frac{e_2 - e_1}{2}.$$

Это дает

$$\frac{(e_2 - e_1)(y\,dx + x\,dy) + 2r\,(x\,dx + y\,dy)}{(e_2 - e_1)\,xy + r\,(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{(e_2 + e_1)(x\,dy - y\,dx)}{(e_2 - e_1)\,xy + r\,(x^2 + y^2)}.$$

Умножая, с другой стороны, числителя и знаменателя первой дроби в уравнении (18) на — y, а числителя и знаменателя второй дроби на x, и складывая числитель первой дроби с числителем второй, а знаменатель первой дроби с знаменателем второй, найдем:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{(e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2)} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta}.$$

Уравнение (18) получает таким образом следующий вид:

$$(e_2 + e_1)\frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta} = \frac{(e_2 - e_1)(y\,dx + x\,dy) + 2r(x\,dx + y\,dy)}{(e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{(e_2 + e_1)}{r}\,d\,\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{e_2 - e_1}{2r}\right)^2 + 1 - \dfrac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}. \qquad (18')$$

Интегрируя уравнение (18′), получим в третьей части lg или arc tg, смотря по тому, будет ли

$$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} > r^2$$

или

$$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} < r^2.$$

В первом случае уравнение линий токов будет такое:

$$c_1 \zeta^{\frac{e_2 + e_1}{\varepsilon_3}} = c_2 \xi^{\eta} = \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{e_2 + e_1}{\sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}}}. \qquad (19)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а ξ и η — величины, пропорциональные перпендикулярам, опущенным из точки (x, y) на асимптоты гиперболы (11^{σ}):

$$ry + \frac{1}{2}\left[(e_2 - e_1) - \sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}\right]x = 0,$$

$$ry + \frac{1}{2}\left[(e_2 - e_1) + \sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}\right]x = 0.$$

Удлинения ε_2 и ε_1, соответствующие этим асимптотам, найдутся из формулы

$$\varepsilon = (e_1 - e_2)\frac{x^2}{r^2} + e_2,$$

подставляя в нее соответствующие значения $\frac{x^2}{r^2}$:

$$\varepsilon_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{\sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}}{2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{\sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}}{2}.$$

Пользуясь этими величинами и принимая ξ, η за косоугольные координаты относительно асимптот упомянутой гиперболы, найдем следующее симметричное уравнение линий токов относительно косоугольных осей ξ, η, ζ, соответствующих не изменяющим своего направления линиям:

$$a\xi^{\frac{1}{\varepsilon_1}} = b\eta^{\frac{1}{\varepsilon_2}} = c\zeta^{\frac{1}{\varepsilon_3}}. \qquad (19')$$

Поверхности конусов, имеющие эти линии токов направляющими, а вершину — в центре частицы, выражаются такими же уравнениями, как конусы девиаций.

Действительно, написав на основании уравнений (19′) три равенства:

$$\xi^{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon_2\varepsilon_1}\left(\frac{a}{c}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\eta^{\varepsilon_1}}{\zeta^{\varepsilon_1}},$$

$$\eta^{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{\varepsilon_3\varepsilon_2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon_2\varepsilon_1}\frac{\zeta^{\varepsilon_2}}{\xi^{\varepsilon_2}},$$

$$\zeta^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\left(\frac{b}{c}\right)^{\varepsilon_3\varepsilon_2}\frac{\xi^{\varepsilon_3}}{\eta^{\varepsilon_3}},$$

перемножив их и перенося все переменные величины в первую часть, найдем уравнение нулевого измерения

$$\xi^{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}\eta^{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}\zeta^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \text{const}. \qquad (19'')$$

Это уравнение представляет семейство конусов, расположенных относительно косоугольных осей точно так же, как конусы девиации расположены относительно осей деформации.

Найденные поверхности могут быть названы *конусами полной девиации*. Замечая, что на основании сказанного в начале этого параграфа девиация радиусов-векторов в неподвижных плоскостях совершается от линии, не изменяющей направления, с меньшим удлинением к линии с бóльшим удлинением, получаем для полного движения совершенно такую же теорему, как для внутреннего. *В случае существования трех не изменяющих направления линий бесконечно малые радиусы-векторы частицы в полном движении относительно центра текут в бесконечно малое время* t *по конусам полной девиации, направляясь от не изменяющей направления линии с меньшим удлинением к не изменяющей направления линии с бóльшим удлинением.*

Приняв $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, рассмотрим вытекающую из уравнения (19″) связь между ξ и ζ:

$$\xi^{\frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \text{const.}$$

Если удлинение ε_3 отрицательно, а ε_1 — положительно, то это уравнение представляет гиперболы высшего порядка, имеющие асимптотами оси ξ и ζ, которые в частном случае при $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0$ обращаются в гиперболы второй степени [1]. Когда ε_1 и ε_3 имеют одинаковые знаки, то мы получаем гиперболы, проходящие через начало координат, соприкасающиеся в начале с той из осей, которой соответствует меньшее по абсолютной величине удлинение, и имеющие в бесконечности касательную, параллельную другой оси; в частном случае, когда $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0$, эти гиперболы представляют пря-

[1] Во втором томе „Математического сборника“ помещена статья Цингера „О движении свободной жидкой массы“, в которой, между прочим, разбирается движение жидкой площади в предположении, что вращение ее равно нулю; вследствие этого неподвижные линии взаимно перпендикулярны и линии токов суть равносторонние гиперболы.

мые линии, проходящие через начало координат. Сказанное о линиях

$$\xi\zeta^{\frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \text{const}$$

выясняет расположение линий токов на конусах девиации.

Переходим к интегрированию уравнений (18′) в предположении, что

$$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} < r^2.$$

Последняя часть уравнения дает в интеграле arc tg, и мы получим после интегрирования и небольшого преобразования следующие уравнения линий токов:

$$c_1\zeta^{\frac{e_2+e_1}{\varepsilon_3}} = c_2\,[(e_2 - e_1)\,xy + r\,(x^2 + y^2)] = e^{r\sqrt{1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}\,(\psi - \frac{(e_2+e_1)\,\psi}{\varepsilon_3})}. \quad (20)$$

Здесь для краткости положено

$$\psi = \text{arc tg}\,\frac{\frac{y}{x} + \frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}.$$

Полагая

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\,\varphi,$$

видим, что при непрерывном возрастании φ от 0 до ∞ ψ возрастает непрерывно от

$$\text{arc tg}\,\frac{\frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}$$

до бесконечности, переходя через все значения

$$\frac{\pi}{2},\quad 3\frac{\pi}{2},\quad 5\frac{\pi}{2},\ldots$$

одновременно с φ; также и при непрерывном убывании φ до $-\infty$ ψ непрерывно убывает до $-\infty$. Это показывает, что

в полном движении, которому соответствует одна неподвижная плоскость, точки, лежащие в этой плоскости, движутся по спиралеобразным линиям, имеющим центр частицы асимптотической точкой. Эти спирали будут итти от оси x *к* y, *расширяясь или сжимаясь, смотря по тому, будем ли мы иметь*

$$\frac{e_1 + e_2}{r} > 0 \quad \textit{или} \quad \frac{e_1 + e_2}{r} < 0.$$

Далее из уравнений (20) видим, что *в частном случае, когда*

$$e_1 + e_2 = 0,$$

эти спирали обращаются в эллипсы.

Для составления уравнений конусов полной девиации находим связь между

$$\frac{\zeta}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\zeta}{\rho} \text{ и } \varphi,$$

которая на основании уравнений (20) будет иметь следующий вид:

$$\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^2 = \text{const}\,[(e_2 - e_1)\sin\varphi\cos\varphi + r]\cdot e^{\frac{(2\varepsilon_3 - e_2 - e_1)\,\varphi}{r\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}}. \qquad (20')$$

Найденное уравнение показывает, что при существовании одной действительной не изменяющей направления плоскости конусы полной девиации рассекают концентрическую сферу по спиралеобразным линиям, которые расположены на двух полусферах, отсекаемых этой плоскостью. Каждая из спиралей идет одним своим концом к кругу, лежащему на не изменяющей направления плоскости, а другим концом — к точке, лежащей на соответственной не изменяющей направления линии, но достигает этого круга и этой точки только после бесконечного числа оборотов. Смотря на проведенную нами сферу с положительного конца оси ζ и считая ось y, как всегда, вправо от x, видим, что спирали будут итти от нашего глаза, завиваясь по стрелке часов, когда

$$\frac{2\varepsilon_3 - e_2 - e_1}{r} < 0,$$

и завиваясь против стрелки в случае

$$\frac{2\varepsilon_3 - e_2 - e_1}{r} > 0.$$

Понятно, что при том же положении глаза спирали, лежащие на нижней полусфере, будут завиваться в сторону, обратную спиралям верхней полусферы.

Из сказанного о направлении спиралей следует, что при

$$2\varepsilon_3 - (e_2 + e_1) < 0$$

радиусы-векторы частицы будут приближаться к плоскости, не изменяющей направления, а при

$$2\varepsilon_3 - (e_2 + e_1) > 0$$

они будут удаляться от нее.

Остается еще рассмотреть частный случай

$$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} = r^2,$$

при котором две из не изменяющих направления линий и две из не изменяющих направления плоскостей сливаются в одну линию и в одну плоскость.

Из двух положений

$$e_2 - e_1 = -2r \text{ и } e_2 - e_1 = 2r$$

разберем первое.

Уравнения (18′) дают при

$$e_2 - e_1 = -2r$$

следующие интегралы:

$$c_1\zeta^{\frac{e_2+e_1}{\varepsilon_3}} = c_2\rho^2 \sin^2 u = e^{\frac{e_2+e_1}{r}\frac{\operatorname{tg} u - 1}{2\operatorname{tg} u}}. \qquad (21)$$

Здесь угол

$$u = \varphi - \frac{\pi}{4}$$

есть угол, заключенный между радиусом-вектором и неподвижной линией, уравнение которой есть

$$x - y = 0.$$

Полярное уравнение линий токов, лежащих на плоскости xy, в предположении, что полярная ось есть двойная не изменяющая направления линия, будет

$$\rho^2 = \text{const}\,\frac{1}{\sin^2 u}\,e^{\frac{e_2+e_1}{r}\,\frac{\operatorname{tg} u-1}{2\operatorname{tg} u}}. \qquad (21')$$

Входящее в него постоянное можно удобно определить по отрезку, который образует линия токов на оси деформации y; полагая этот отрезок равным ρ_0 и замечая, что для оси деформации

$$u = \frac{\pi}{4},$$

находим

$$\text{const} = \frac{\rho_0^2}{2}.$$

Рассмотрим вид кривых, выражаемых уравнением (21′), в предположении

$$\frac{e_2+e_1}{r} > 0,$$

которое имеет, например, место, когда вращение r совершается по часовой стрелке и когда удлинение по двойной не изменяющей направления линии положительно. При

$$u = +0 \text{ и } u = \pi - 0$$

находим

$$\rho^2 = 0 \text{ и } \rho^2 = \infty.$$

Умножая уравнение (21′) на $\sin^2 u$ и замечая, что $\rho^2 \sin^2 u$ есть квадрат длины перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на полярную ось, видим, что этот перпендикуляр при

$$u = +0 \text{ и } u = \pi - 0,$$

так же как и ρ, обращается в 0 и ∞. Составляя, наконец, выражение $\frac{\rho\, du}{d\rho}$, которое при

$$u = +0 \text{ и } u = \pi - 0$$

дает нам тангенс угла касательной к кривой с полярной осью, заключаем, что этот тангенс при обоих указанных положениях

радиуса-вектора равен нулю. Принимая во внимание сказанное и замечая, что траектории, выражаемые уравнением (21′), симметричны относительно центра частицы, убеждаемся, что все эти траектории имеют в центре точку перегиба, касательная которой есть наша полярная ось. Каждая траектория имеет две симметричные части, которые, начиная от точки перегиба, идут в различные стороны, потом загибаются и идут опять в различные стороны, удаляясь в бесконечность, где они становятся параллельны полярной оси.

Конусы полной девиации в разбираемом нами случае имеют такое уравнение:

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 = \text{const}\,\sin^2 u e^{\frac{2\varepsilon_3-(e_1+e_2)}{r}\,\frac{\operatorname{tg} u-1}{2\operatorname{tg} u}}. \qquad (21'')$$

Полагая

$$\frac{2\varepsilon_3-(e_2+e_1)}{r} > 0,$$

найдем для

$$u = +0 \quad \text{и} \quad u = \pi+0, \quad \frac{r}{\rho} = 0,$$

а для

$$u = \pi-0 \quad \text{и} \quad u = 2\pi-0, \quad \frac{\rho}{\zeta} = 0.$$

Это показывает, что все конусы полной девиации проходят через обе не изменяющие направления линии. Проведя из центра частицы сферу, увидим, что не изменяющие направления плоскости разделят ее кругами на четыре части, а не изменяющие линии пересекут ее в четырех полюсах. Следы конусов полной девиации на этой сфере будут итти в каждой ее части, направляясь от полюса одной не изменяющей направления линии к полюсу другой, и будут, как видно из сказанного об уравнении (21′), касаться в этих полюсах соответствующих кругов, образуемым на сфере не изменяющими направления плоскостями. Нетрудно вывести все сказанное нами о конусе полной девиации при существовании двойной не изменяющей направления линии и двойной не изменяющей направления плоскости, рассматривая этот случай как предельный случай при слиянии двух из трех не изменяющих направления линий.

§ 14. Для полноты изложения движения бесконечно малой частицы мы считаем полезным сказать еще несколько слов о прекрасном способе, предложенном Дюрандом [1] для исследования движения однородно изменяемого тела. Для каждой точки частицы (x, y, z) строим другую точку (u, v, w), центральный радиус-вектор которой выражает по величине и направлению скорость полного движения первой точки, и называем первую точку *сопряженной* относительно второй. Взяв оси координат по осям деформации, найдем между координатами x, y, z, u, v, w следующую связь:

$$u = E_1 x + (\omega_2 z - \omega_3 y),$$

$$v = E_2 y + (\omega_3 x - \omega_1 z),$$

$$w = E_3 z + (\omega_1 y - \omega_2 x),$$

$$x = \frac{1}{D}[E_2 E_3 u + \omega_1(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_2 \omega_2 w - E_3 \omega_3 v)], \quad (1')$$

$$y = \frac{1}{D}[E_3 E_1 v + \omega_2(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_3 \omega_3 u - E_1 \omega_1 w)],$$

$$z = \frac{1}{D}[E_1 E_2 w + \omega_3(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_1 \omega_1 v - E_2 \omega_2 u)],$$

$$D = E_1 E_2 E_3 + \omega_1^2 E_1 + \omega_2^2 E_2 + \omega_3^2 E_3.$$

Мы видим из этих формул, что величины x, y, z определяются по u, v, w как слагающие скорости точки (u, v, w) при движении, которому соответствует поверхность удлинения

$$2F'D = [E_2 E_3 u^2 + E_3 E_1 v^2 + E_1 E_2 w^2 + (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2]$$

и вращение

$$(-\omega_1 E_1, \ -\omega_2 E_2, \ -\omega_3 E_3).$$

Обращая внимание на тождество

$$ux + vy + wz = E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 z^2 =$$

$$= \frac{1}{D}[E_2 E_3 u^2 + E_3 E_1 v^2 + E_1 E_2 w^2 + (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2] \quad (22)$$

---

[1] Статья Дюранда помещена в Comptes Rendus, T. LXXIII, 2 semestre, p. 1243. Он называет сопряженную плоскость и линию „plan conjugué“ и „droite adjointe“.

и замечая, что при

$$u = \omega_1 E_1, \quad v = \omega_2 E_2, \quad w = \omega_3 E_3,$$

из формулы (1′)

$$x = \omega_1, \; y = \omega_2, \; z = \omega_3$$

получаем теорему: *точки, лежащие на поверхности* $F = \text{const}$, *сопряжены точкам, лежащим на поверхности* $F' = \text{const}$, *так что радиусы-векторы второй поверхности выражают скорости точек, лежащих на первой. Точки, лежащие на оси* $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, *сопряжены точкам, лежащим на оси*

$$(\omega_1 E_1, \quad \omega_2 E_2, \quad \omega_3 E_3).$$

Возьмем теперь какой-нибудь бесконечно малый радиус r_1, имеющий по осям деформации проекции x_1, y_1, z_1, и найдем уравнения линии и плоскости, на которых лежат точки, сопряженные точкам, лежащим на линии r_1, и точки, сопряженные точкам, лежащим на плоскости, перпендикулярной r_1. Эти уравнения будут:

$$\frac{u}{x_1} = \frac{v}{y_1} = \frac{w}{z_1}, \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0. \tag{23}$$

Называя найденную линию и плоскость линией и плоскостью, сопряженными направлению r_1, получаем из формулы (23) теорему: *все точки, лежащие на линии, сопряженной данному радиусу, имеют скорости, параллельные этому радиусу. Все точки, лежащие на плоскости, сопряженной данному радиусу, имеют скорости, перпендикулярные этому радиусу.* В частном случае, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

уравнения (23) и (1′) показывают, что линия, сопряженная радиусу r_1, есть не что иное, как сопряженный диаметр относительно поверхности удлинения плоскости, перпендикулярной r_1, а сопряженная плоскость есть не что иное, как диаметральная плоскость, сопряженная радиусу r_1 относительно той же поверхности. Вышеприведенная теорема дает в этом случае теорему, помещенную в конце § 6.

Разлагая скорость движения точек, лежащих в одной плоскости, проходящей через центр частицы, на слагающую, направленную перпендикулярно плоскости, и слагающую, направленную по плоскости, назовем *характеристикой плоскости в полном движении* линию, для которой первая слагающая равна нулю, а линиями *неподвижными в плоскости* — две действительные или мнимые линии, направление которых совпадает с соответствующими им слагающими скорости по плоскости. На основании свойств линии и плоскости, сопряженной данному направлению, получаем следующие теоремы: *плоскость, проходящая через центр частицы, перпендикулярно данному радиусу, пересекает его сопряженную плоскость по своей характеристике. Плоскость, проходящая через данный радиус и его сопряженную прямую, имеет последнюю своей характеристикой. Плоскость, проходящая через данный радиус и пересекающая его сопряженную плоскость по линии, перпендикулярной к нему, имеет сечение своей неподвижной линией. Плоскость, проходящая через сопряженную линию перпендикулярно плоскости, проведенной через эту линию и соответствующий радиус, имеет сопряженную линию своей неподвижной линией.*

Если вставим во второе уравнение (23) координаты какой-нибудь точки частицы, то получим, с одной стороны, величину, пропорциональную перпендикуляру, опущенному из точки на плоскость, сопряженную радиусу r_1, с другой стороны, величину, пропорциональную проекции скорости рассматриваемой точки на радиус r_1. Обозначая перпендикуляр через p, скорость — через V и угол, который образует эта скорость с радиусом r_1, через α, можем написать равенство:

$$V\cos\alpha = cp.$$

Постоянное c определяется, предполагая, что рассматриваемая точка лежит на радиусе r_1. Называя ε_1 — удлинение по радиусу r_1 и φ_1 — угол, который этот радиус образует с перпендикуляром p, получим:

$$c = \frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}, \qquad V\cos\alpha = \frac{p\varepsilon_1}{\cos\varphi_1},$$

Отсюда следует теорема: *проекция скорости на данный радиус равна расстоянию рассматриваемой точки от сопряженной плоскости этого радиуса, умноженному на удлинение радиуса и разделенному на косинус угла между перпендикуляром и радиусом.*

Возьмем теперь три радиуса r_1, r_2, r_3 и разложим скорость каждой точки частицы на три слагающие по направлению радиусов ρ_1, ρ_2, ρ_3, представляющих систему осей, дополнительную первой системе. Строим плоскости, сопряженные радиусам r_1, r_2, r_3, и называем через p_1, p_2, p_3 перпендикуляры, опущенные из точки частицы на эти плоскости, через ε_1, ε_2, ε_3 — удлинения по радиусам r_1, r_2, r_3, через φ_1, φ_2, φ_3 — углы между r_1 и p_1, r_2 и p_2, и r_3 и p_3 и, наконец, θ_1, θ_2, θ_3 — углы между r_1 и ρ_1, r_2 и ρ_2, r_3 и ρ_3. На основании приведенной теоремы проекции скорости на радиусы r_1, r_2, r_3 будут:

$$\frac{p_1\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}, \quad \frac{p_2\varepsilon_2}{\cos\varphi_2}, \quad \frac{p_3\varepsilon_3}{\cos\varphi_3}.$$

Замечая, что проекция скорости на радиус r_i равна проекции на этот радиус слагающей скорости по радиусу ρ_i, получим для трех искомых слагающих скорости по радиусам ρ_1, ρ_2, ρ_3 следующие формулы:

$$\frac{p_1\varepsilon_1}{\cos\varphi_1\cos\theta_1}, \quad \frac{p_2\varepsilon_2}{\cos\varphi_2\cos\theta_2}, \quad \frac{p_3\varepsilon_3}{\cos\varphi_3\cos\theta_3}.$$

Это дает нам теорему о разложении полного движения: *полное движение всегда можно разложить на три косоугольные удлинения, направленные по трем произвольным осям, причем удлинения совершаются относительно плоскостей, сопряженных дополнительной системе осей.*

Эта теорема в случае, когда вращение частицы равно нулю и линии r_1, r_2, r_3 представляют три сопряженные диаметра относительно поверхности удлинения, дает нам разложение Бельтрами, изложенное в § 6. При этом можно показать помощью формул (23) и (1′), что разложение движения на три прямоугольные удлинения относительно плоскостей возможно только в том случае, когда вращение частицы равно нулю.

В другом частном случае, когда ρ_1, ρ_2, ρ_3 суть линии, не изменяющие своих направлений, а следовательно, $\rho_2\rho_3$, $\rho_3\rho_1$, $\rho_1\rho_2$ суть сопряженные плоскости линий r_1, r_2, r_3, мы получаем теорему: *в случае существования трех не изменяющих своих направлений линий полное движение частицы может быть разложено на три косоугольные удлинения относительно неподвижных плоскостей, направленные по неподвижным линиям.*

На основании свойств сопряженной линии и плоскости могут быть решены уже исследованные нами вопросы о линиях и плоскостях, сохраняющих свое направление. Первые будут соответствовать линиям, которые сами себе сопряжены, вторые — плоскостям, сопряженным своему перпендикуляру. Пользуясь этим замечанием, находим из уравнений (23) и (1′) уравнения (13) и (13′). Кроме того, можно еще отыскивать линии, сопряженные к радиусу, перпендикулярному линиям, и плоскости, сопряженные лежащему на них радиусу. Уравнения (22) показывают, что подобные линии, а также радиусы, которым сопряжены подобные плоскости, лежат на конусе нулевого удлинения; это, впрочем, очевидно само собою. Заметим, что линии, лежащие на конусе нулевого удлинения, будут сопряжены линиям, лежащим на конусе $F' = 0$, который, таким образом, дает направление полных девиаций всех радиусов конуса нулевого удлинения.

§ 15. Сказанного нами достаточно, чтобы составить себе отчетливое представление о движении точек частицы. Окончим главу разбором употребленных в ней способов исследования.

В основу нашего изложения положено разложение движения частицы на внешнее и внутреннее. Против этого разложения, которым пользовался Гельмгольц[1], возражал Бертран, оспаривая его преимущество сравнительно с другими разложениями и находя неуместным называть вращением частицы вращение осей деформации[2]. Понятно, что, отделяя от движения частицы поступательное движение, мы можем

---

[1] Гельмгольц указывает на Кирхгофа, который пользовался этим разложением в своем сочинении по теории упругости, помещенном в „Journal von Crelle“, Bd. XL, 1850.

[2] Comptes Rendus, T. LVII, p. 221, 267, 469, 755, 773, 1035.

разложить оставшееся относительное движение множеством способов на вращение

$$(\omega_1', \quad \omega_2', \quad \omega_3')$$

и движение, выражаемое по осям деформации скоростями u'_1, v'_1, w'_1:

$$\begin{aligned} u_1' &= E_1 x + (\omega_2 - \omega_2')\, z - (\omega_3 - \omega_3')\, y, \\ v_1' &= E_2 y + (\omega_3 - \omega_3')\, x - (\omega_1 - \omega_1')\, z, \\ w_1' &= E_3 z + (\omega_1 - \omega_1')\, y - (\omega_2 - \omega_2')\, x. \end{aligned} \tag{7'''}$$

Но между всеми движениями, определяемыми формулами (7'''), только одно движение, при котором

$$\omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3,$$

будет иметь потенциал скоростей, да и вообще говоря, только при этом движении скорости

$$u_1', \quad v_1', \quad w_1'$$

будут перпендикулярны семейству некоторых поверхностей[1]. Существование потенциала скоростей, равного F, объясняет кинематическое значение внутреннего движения, так как от этой причины свойства его могут быть исследованы полно и просто и являются, по большей части, следствием простых геометрических теорем о поверхности удлинения. С другой стороны, составляя для движения, выражаемого формулами (7'''), моменты количеств движения бесконечно малого жидкого шарика относительно осей деформации, находим выражения:

$$i(\omega_1 - \omega_1'), \quad i(\omega_2 - \omega_2'), \quad i(\omega_3 - \omega_3'),$$

[1] Это заключение Бельтрами оправдывает, составляя известное условие, при котором существует семейство поверхностей, ортогональных направлению (u_1', v_1', w_1'):

$$u_1'\left(\frac{\partial w_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial z}\right) + v_1'\left(\frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial w_1'}{\partial x}\right) + w_1'\left(\frac{\partial v_1'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y}\right) =$$
$$= E_1(\omega_1 - \omega_1')\, x + E_2(\omega_2 - \omega_2')\, y + E_3(\omega_3 - \omega_3')\, z = 0.$$

Заметим, что кроме положения

$$\omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3,$$

это условие удовлетворяется еще в частных случаях:

$$\omega_1 = \omega_1', \quad \omega_2 = \omega_2', \quad E_3 = 0; \quad \omega_1 = \omega_1', \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0.$$

в которых i — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр. Эти моменты будут равны нулю только при внутреннем движении. Прибавляя к внутреннему движению внешнее, найдем, что момент количества абсолютного движения бесконечно малого жидкого шарика, взятый относительно его центра, направлен по вращению осей деформации и равен этому вращению, умноженному на i. В этом, как заметил Гельмгольц, заключается причина, вследствие которой вращение осей деформации следует считать вращением жидкой частицы.

Кроме Бертрана, против рассматриваемого нами разложения возражал еще Вельтман [1], но его возражение, кажется, происходило оттого, что он приписал разложению Гельмгольца значение, которого никогда не давал ему последний. Вельтман предполагает, что речь идет не о разложении движения частицы, но о разложении всего движения жидкой массы на движение, имеющее потенциал скоростей, и движение, при котором частицы имеют только вращение, т. е. при котором

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0.$$

Понятно, что подобное разложение возможно только в том случае, когда для всех точек жидкости p, q и r постоянны. Не находя никакого геометрического значения в разложении Гельмгольца, Вельтман приходит к следующему резкому заключению: „Wir können deshalb die Definition der Rotationsgeschwindigkeit mit ihren Componenten p, q und r nur als eine rein analytische betrachten“.

Мы видели, какое определенное геометрическое значение имеют величины p, q, r как с точки зрения Коши, так и с точки зрения Гельмгольца. Это значение может быть указано и независимо от движения частицы, когда заметим, что во всякой жидкой массе всегда существуют три единственные семейства триортогональных линий, которые сохраняют свою ортогональность, двигаясь вместе с жидкостью в продолжение бесконечно малого времени t. Проведя из двух положений

---

[1] Weltmann, Die Helmholtz'sche Theorie der Flussigkeitswirbel, Zeitschrift von Schlömilch, I, 15, H. 6, p. 454, 1870.

какой-нибудь точки жидкости, соответствующих временам t и $t+t$, касательные к упомянутым линиям, найдем два прямые трехгранные угла, из которых второй будет повернут относительно первого около некоторой оси на бесконечно малый угол; этот угол и эта ось и будут соответствовать вращению (p, q, r).

Оспаривая разложение Гельмгольца, Бертран предлагал изучать движение частицы, опираясь на свойства плоскостей, не изменяющих своего направления. Такое изучение имеет тоже весьма важное кинематическое значение, но мы поставили его после разбора внутреннего движения, так как при этом лучше выясняется причина, вследствие которой линия и соответствующая ей плоскость становятся неподвижны. Изучив главные свойства линий и плоскостей, не изменяющих своих направлений, мы перешли к определению линий, по которым текут в продолжение бесконечно малого времени t точки частицы в их полном движении относительно центра. Уравнения этих линий могли бы быть выведены проще, рассматривая порознь линии, соответствующие трем и одной неподвижной плоскости, но мы сочли более удобным написать общие диференциальные уравнения и указать особенности искомых линий при самом интегрировании этих уравнений.

Для того чтобы познакомить читателя с одним из простых искусственных приемов исследования движения частицы, мы изложили коротко теорию Дюранда, помощью которой можно бы получить результаты, уже найденные нами раньше, но на наш взгляд всегда останется преимущество за тем способом, которому мы следовали сначала.

Пусть вообразит читатель жидкую частицу и соответствующую ей поверхность удлинения, и он ясно представит себе внутреннее движение частицы, происходящее от удлинения радиусов, которое определяется поверхностью удлинения, и от течения радиусов по конусам внутренней девиации, ортогональным конусам равного удлинения; пусть он прибавит к внутреннему движению вращение частицы, и тогда он поймет причину, вследствие которой три или один радиус и соответствующие им плоскости станут непод-

вижны; он увидит, что вследствие этого прибавления характер движения частицы изменится: в случае трех неподвижных плоскостей она разделится на восемь частей, так что в каждом из косых трехгранных углов радиусы будут двигаться так же, как при внутреннем движении; если же существует только одна неподвижная плоскость и линия, то все радиусы будут течь по спиралеобразным конусам, закручивающимся около неподвижной линии и подходящим к этой линии и соответствующей ей плоскости только после бесконечного числа оборотов. Таким образом перед глазами читателя встанет отчетливая картина полного движения частицы относительно ее центра, что, на наш взгляд, всего дороже.

ГЛАВА II

Исследование течения жидкости

§ 16. Если проведем внутри движущейся жидкой массы семейство линий, касательные которых направлены по скоростям соответственных точек жидкости, то получим *линии токов*. Эти линии дают траектории точек жидкости в перманентном движении и служат огибающими траекторий для движения неперманентного. Когда даны линии токов и величины скоростей в каждой точке этих линий, то перманентное движение жидкости вполне определено; движение же неперманентное определяется этим только для бесконечно малого времени.

Будем называть *течением жидкости* в данный момент времени перманентное движение, скорости которого геометрически равны скоростям рассматриваемого движения, и заметим, что, разделяя время на бесконечно малые промежутки, можно разложить всякое движение жидкости на ряд течений, изменяющихся от одного промежутка к другому.

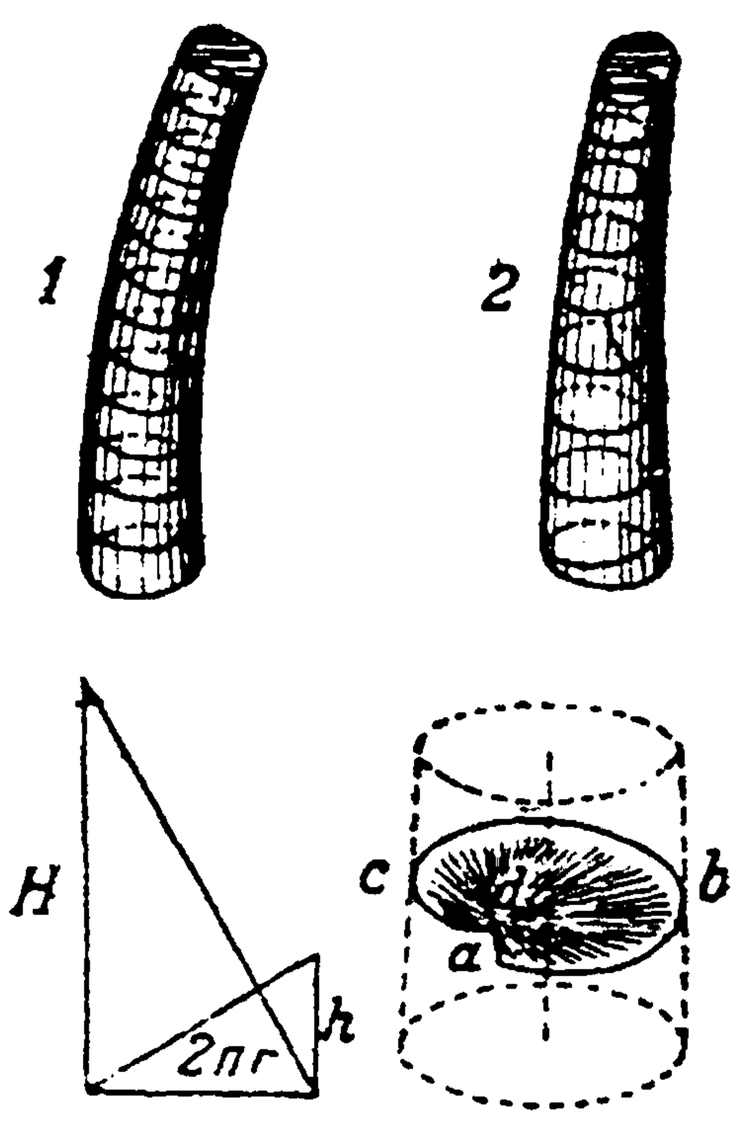
Всякую поверхность, проходящую через линии токов, называют *поверхностью тока*; через такую поверхность жидкость не протекает в продолжение соответствующего бесконечно малого времени. Вообразив поверхность тока, имеющую форму бесконечно тонкой трубки, получим канал, по которому в продолжение бесконечно малого времени будет течь наполняющая его жидкость. Будем называть жидкость, наполняющую такой бесконечно тонкий канал, *жидкой струйкой*, а самый канал — *поверхностью струйки*. Разделяя всю движущуюся жидкую массу в данный момент времени на жидкие струйки, увидим, что течение жидкости, соответствующее бесконечно малому времени, следующему за этим мо-

ментом, приводится к течению струек внутри их поверхностей.

Понятно, что теория движения жидкой струйки является промежуточным звеном, связывающим учение о движении частицы с учением о жидком течении. Мы займемся сначала геометрическими свойствами струйки в зависимости от проходящих через нее линий токов, а потом разберем ее движение.

§ 17. Называя через α, β, γ косинусы углов, которые образует направление скорости точек жидкости с осями координат, получим следующие дифференциальные уравнения линий токов:

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$



Фиг. 4.

Если существует семейство поверхностей, ортогональных этим линиям, то его диференциальное уравнение будет:

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0.$$

Так как это последнее уравнение имеет интегрирующий множитель только в том случае, когда удовлетворено условие

$$\alpha\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) = 0,$$

то это условие служит признаком существования ортогональных поверхностей.

Чтобы глубже вникнуть в геометрическое значение найденного условия, построим поверхность струйки и проведем по ней непрерывный ряд линий токов. Эти линии будут итти, как видно на фиг. 4, или не закручиваясь (1), или закручиваясь (2). Если начертим теперь на поверхности струйки линии, ортогональные линиям токов, то увидим, что в первом случае они представят нам систему замкнутых, бесконечно малых линий, а во втором — систему винтовых линий. Само собой разумеется, что к первому семейству линии токов можно провести ортогональные поверхности,

а ко второму — нельзя. Чтобы выразить аналитически, чем отличаются линии токов первого рода от линий токов второго, определим для последних шаг h винтовой линии, проведенной по поверхности струйки ортогонально к линиям токов. Рассматривая замкнутую бесконечно малую линию *adcb*, в которой *ad* есть искомый шаг h, напишем известное равенство:

$$\int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = \int\int \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \alpha' + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \beta' + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \gamma' \right] df.$$

Здесь первый интеграл берется по бесконечно малой линии *adcb*, а второй — по бесконечно малой поверхности, проходящей через эту линию; α', β', γ' суть косинусы углов нормали поверхности с осями. Замечая, что первый интеграл равен h, и взяв вместо второго интеграла подинтегральную функцию, умноженную на поверхность *adcb*, равную f, получаем, опуская величины третьего порядка:

$$\mathrm{h} = \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \gamma \right] \mathrm{f}.$$

Мы видим теперь ясно геометрическую причину вышенайденного условия существования ортогональных поверхностей к линиям токов.

На основании сказанного будем называть линии токов, имеющие ортогональные поверхности, *незакручивающимися*, а линии токов, не имеющие таких поверхностей, *закручивающимися*. Если бы поверхность струйки была прямой, круглый цилиндр радиуса r и линии токов были бы винтовые, то шаг их *H* определился бы по шагу h из пропорции

$$\frac{H}{2\pi \mathrm{r}} = \frac{2\pi \mathrm{r}}{\mathrm{h}},$$

которая дала бы для *H* конечную величину:

$$\frac{2\pi}{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \gamma \right]. \quad (24)$$

Будем называть для всякой струйки величину H *шагом закручивания* линий токов в рассматриваемой точке. Шаг закручивания имеет знак $+$, когда по направлению скорости линии токов завиваются по стрелке часов, и знак $-$ в противоположном случае.

Для дальнейшего исследования свойств линий тока, заключенных внутри поверхности струйки, назовем одну из таких линий *осью струйки* и рассмотрим движение струйки, при котором точки ее бегут по линиям токов плоскими слоями, перпендикулярными ее оси. Полагая, что точки, лежащие на осевой линии, имеют скорость, равную единице, начало осей координат лежит на осевой линии, а ось x направлена по касательной к последней, выразим полученное нами движение помощью слагающих скорости:

$$u' = \alpha m, \quad v' = \beta m, \quad w' = \gamma m,$$

где m — отношение элемента дуги линии тока, на которой лежит рассматриваемая точка, к элементу дуги осевой линии, предполагая, что тот и другой элемент заключены между двумя бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными осевой линии.

Обращая внимание на равенства

$$\beta = \gamma = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial x} = 0, \quad \alpha = m = 1,$$

которые имеют место для начала координат, составляем помощью формул (1) скорости u', v', w' относительного движения частицы, имеющей центр в начале координат:

$$u' = \frac{\partial m}{\partial y} y + \frac{\partial m}{\partial z} z,$$

$$v' = \frac{\partial \beta}{\partial x} x + \frac{\partial \beta}{\partial y} y + \frac{\partial \beta}{\partial z} z, \tag{25}$$

$$w' = \frac{\partial \gamma}{\partial x} x + \frac{\partial \gamma}{\partial y} y + \frac{\partial \gamma}{\partial z} z.$$

Пользуясь этими формулами, определим связь между производными от α, β, γ и кривизной линий токов. Вообразив

две поверхности тока, проходящие через ось рассматриваемой струйки и прикасающиеся к осям *oy* и *oz*, проведем по этим поверхностям линии токов s_1 и линии, ортогональные линиям токов, s_2 и s_3. Условимся при этом называть вообще *ортогональными линиями* линии, проведенные перпендикулярно линиям тока.

Обозначая через $\frac{1}{R_p^q}$ и $\frac{1}{L_p^q}$ геодезическую кривизну и геодезическое вращение линии s_p в поверхности $s_p s_q$, припомним известное выражение для геодезической кривизны [1]:

$$\frac{1}{R^q} = -\frac{\delta_q \delta_p s_p}{\delta_q s_q \delta_p s_p}, \tag{26}$$

в котором $\delta_p s_p$ и $\delta_q s_q$ суть бесконечно малые элементы взаимно ортогональных дуг s_p и s_q, а $\delta_q \delta_p s_p$ — бесконечно малое изменение элемента дуги s_p, заключенного между двумя бесконечно близкими кривыми s_q, при перемещении вдоль этих кривых. Заметив, что при рассматриваемом движении плоскость *yz* есть одна из плоскостей деформации, и припоминая значение m, находим из формул (25):

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial m}{\partial y} = -\frac{\delta_2 \delta_1 s_1}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{\partial m}{\partial z} = -\frac{\delta_3 \delta_1 s_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3}.$$

Далее

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

суть удлинения по осям y и z и потому выражаются подобными же формулами:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\delta_1 \delta_2 s_2}{\delta_2 s_2 \delta_1 s_1}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\delta_1 \delta_3 s_3}{\delta_3 s_3 \delta_1 s_1}.$$

---

[1] Мы считаем радиус геодезической кривизны K_p^q положительным, когда он направлен в ту сторону, в которую дуга s_q возрастает. Такой же знак приписывает радиусам кривизны Ляме, — Leçons sur les coordonnées curvilignes, § XXVIII. Что касается геодезического вращения, то мы даем ему знак +, когда, передвигаясь в положительную сторону дуги s_p, касательная к поверхности $s_p s_q$, перпендикулярная кривой s_p, вращается по стрелке для наблюдателя, к которому она приближается.

Наконец,

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial\gamma}{\partial y}$$

дают, как показывают формулы (25), девиации радиусов, направленных по осям oz и oy в плоскости yz, и потому суть геодезические вращения линии s_1 в плоскостях s_1s_3, s_1s_2, взятые со знаками — и +. На основании всего сказанного получаем для производных от β и γ по координатам формулы, найденные Клейцем [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial y} = -\frac{1}{R_2^1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = -\frac{1}{L_1^3}, \\ &\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{1}{R_1^3}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{1}{L_1^2}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\frac{1}{R_3^1}. \end{aligned} \tag{26'}$$

Определим теперь изменение объема и вращение частицы в рассматриваемом нами движении. Изменение объема равно, как видно из формул (25), изменению бесконечно малой площади сечения струйки. Называя это изменение расширением струйки и обозначая его через $\frac{1}{k_1}$, получаем:

$$\frac{1}{k_1} = -\left(\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_3^1}\right).$$

Расширение струйки равно отрицательной сумме геодезических кривизн в поверхностях тока двух перпендикулярных между собой ортогональных линий, проходящих через рассматриваемую точку на оси струйки. Понятно, что *в случае незакручивающихся линий тока расширение струйки есть отрицательная сферическая кривизна ортогональной поверхности.*

Вращения частицы по осям y и z будут, конечно, равны $-\frac{1}{R_1^3}$ и $\frac{1}{R_1^2}$; что касается вращения по оси x, то его можно

[1] Kleitz, Etudes sur les forces moléculaires, chapitre V, 1873.

представить на основании формул (25), (24) и (26′) таким образом:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}=\frac{4\pi}{H}=\frac{1}{L_1^{\,2}}+\frac{1}{L_1^{\,3}}. \qquad (24')$$

Эта формула показывает, что *сумма геодезических вращений оси струйки в двух поверхностях тока, ортогональных между собой в данной точке на оси струйки, равна для этой точки отношению* 4π *к шагу закручивания линий тока.*

Назовем бесконечно малую кривую, получаемую от сечения струйки плоскостью, перпендикулярной оси, *сечением струйки*, а точку, в которой эта плоскость пересекает ось, — *центром сечения* и займемся изменением радиусов сечения при передвижении его центра по оси струйки. Это изменение вполне определится помощью кривой, по которой плоскость сечения пересекает соответствующую поверхность удлинения; будем называть такую кривую *указательницей поверхности струйки.* Так как удлинение радиусов сечения струйки равно геодезической кривизне соответствующих ортогональных линий в поверхностях токов с обратным знаком, то получаем теорему: *геодезические кривизны в поверхностях тока всех ортогональных линий, проходящих через одну точку на оси струйки, пропорциональны квадратам радиусов-векторов указательницы струйки.* Эта теорема показывает, что *для незакручивающихся линий тока указательница струйки есть дюпенова указательница ортогональной поверхности.*

Предполагая, что оси *oy* и *oz* касаются ортогональных линий, имеющих наибольшую и наименьшую геодезическую кривизну в поверхностях тока, найдем следующее уравнение указательницы:

$$-2F'=\frac{y^2}{R_2^{\,1}}+\frac{z^2}{R_3^{\,1}}.$$

Геодезическая кривизна в поверхности тока какой-нибудь ортогональной линии σ, проходящей через центр сечения струйки и образующей с осью *oy* угол φ, а также геодези-

ческое вращение оси струйки в поверхности тока, проходящей через линию σ, выразятся по формулам (17):

$$\frac{1}{R_\sigma^1} = \frac{\cos^2\varphi}{R_2^1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_3^1}, \quad \frac{1}{L_1^\sigma} = \left(\frac{1}{R_2^1} - \frac{1}{R_3^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi + \frac{2\pi}{H}.$$

Понятно, что для незакручивающихся линий тока последняя формула примет вид:

$$\frac{1}{L_1^\sigma} = \left(\frac{1}{R_2^1} - \frac{1}{R_3^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Называя через σ_1 линию, проведенную по ортогональной поверхности перпендикулярно σ, и направляя ось y по σ, имеем:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = -\frac{1}{L_{\sigma_1}},$$

а по (26′)

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{1}{L_1^\sigma};$$

$$\frac{1}{L_1^\sigma} = -\frac{1}{L_\sigma^{\sigma_1}}.$$

Получаем формулу Морена [1]:

$$\frac{1}{L_\sigma^{\sigma_1}} = \left(\frac{1}{R_3^1} - \frac{1}{R_2^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Так как по этой формуле кривая, не имеющая в поверхности геодезического вращения, есть одна из линий кривизны поверхности, то можем сказать, что *поверхности тока, проходящие через ось струйки и прикасающиеся к радиусам сечения, не имеющим девиации в плоскости сечения, имеют в центре сечения линии кривизны, направленные по оси струйки.* Отсюда прямо вытекает теорема Дюпена о триортогональных поверхностях и теорема Иоахимсталя о поверхностях, пересекающихся под постоянным углом.

Если бы в сечении струйки существовали такие два ради-

[1] Morin, Théorèmes relatifs à la théorie des surfaces, Comptes Rendus, T. 66, p. 741.

уса, которые сохраняли бы между собой угол во все время воображаемого нами движения струйки, то это бы показывало, что через ось струйки возможно провести две пересекающиеся под прямым углом поверхности тока. Эта мысль, высказанная Клейцем, может послужить основанием для определения аналитического условия, при котором к данному семейству поверхностей можно подыскать два новые семейства, так чтобы все три семейства были ортогональны [1].

---

[1] Мне удалось вывести это условие весьма просто. Проведя комплекс линий, ортогональных данному семейству $\varphi = \text{const}$, воображаем жидкость, текущую по этим линиям со скоростями, равными обратному параметру $\frac{1}{h}$. Выбирая оси, как было показано, и называя частные производные φ по координатам x, y, z через a, b, c, определяем скорости v', w', выражающие изменение бесконечно малой площади, параллельной yz:

$$\left.\begin{aligned} v' &= \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial b}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h^2}\right)y + \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{h^2}\right)z, \\ w' &= \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial c}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h^2}\right)y + \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial c}{\partial z} + c\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{h^2}\right)z. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Искомое нами условие будет удовлетворено, когда оси указательницы струйки во всяком сечении будут совпадать с проекциями на это сечение осей бесконечно близкой указательницы. Это условие может быть выражено проще. Так как проекции главных осей центрального сечения поверхности удлинения на плоскость деформации образуют с осями деформации бесконечно малые углы второго порядка, когда плоскость сечения наклонена к плоскости деформации под бесконечно малым углом первого порядка, то вместо того, чтобы брать оси бесконечно близкой указательницы, можно взять оси бесконечно близкой площади, параллельной первому сечению. Далее можно принять за центр такой площади, делая ошибку второго порядка, не точку, лежащую на оси струйки, а точку, лежащую на перпендикуляре, восставленном из центра первого сечения. На основании этих замечаний приходим к такому условию: *оси кривой удлинения бесконечно малой площади, проведенной параллельно yz на расстоянии δx и имеющей центр на оси x, должны быть параллельны осям указательницы, имеющей центр в начале координат, если в этом начале*

$$b = c = 0.$$

Выражаем относительные скорости упомянутой площади, разлагая скорости u', v' в формулах (α) по строке Маклорена и ограничиваясь первыми степенями δx:

$$v' = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\delta x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial y}y + \frac{\partial b}{\partial z}z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{a}y + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{1}{a}z\right)\delta x,$$

§ 18. Займемся движением струек. Вообразив бесконечно малую часть струйки, имеющую форму цилиндра, среднее сечение которого положим круглым, разлагаем движение такой частицы на четыре движения: 1) поступательное движение; 2) вращение по оси струйки и перпендикулярно оси; 3) движение, изменяющее высоту цилиндрика и обращающее его из круглого в эллиптический; 4) скольжение около оси перпендикулярно осевой линии, вследствие которого цилиндрик из прямого обращается в косой.

Все эти изменения могут быть определены по производным от скорости жидкости v_1, взятым по направлению линий тока и по двум взаимно перпендикулярным ортогональным линиям. Располагая оси x, y, z, как в предыдущем параграфе, и сохраняя для s_1, s_2, s_3 указанные значения, определим относительные скорости u, v, w точек частицы, имеющей центр в начале координат. Для этого подставляем в формуле (1) вместо u, v, w величины αv_1, βv_1, γv_1 и обращаем внимание на формулы (26′):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\,x + \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\,y + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\,z, \\ v_1 &= \frac{v_1}{R_1^{\,2}}\,x - \frac{v_1}{R_2^{\,1}}\,y - \frac{v_1}{L_1^{\,3}}\,z, \\ w_1 &= \frac{v_1}{R_1^{\,3}}\,x + \frac{v_1}{L_1^{\,2}}\,y - \frac{v_1}{R_3^{\,1}}\,z. \end{aligned}\right\} \qquad (25')$$

$$w' = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\delta x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y}\,y + \frac{\partial c}{\partial z}\,z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\,\frac{1}{a}\,y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{1}{a}\,z\right)\delta x.$$

Так как движению, выражаемому первыми скобками, соответствуют главные оси, параллельные осям деформации, проходящим через начало координат по плоскости xy, то необходимо, чтобы направление осей, соответствующих движению, выражаемому вторыми скобками, было одинаково с направлением осей движения, выражаемого первыми скобками. Это дает формулу

$$\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,\dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{\partial b}{\partial z}}{\dfrac{\partial b}{\partial y} - \dfrac{\partial c}{\partial z}},$$

которая представляет условие ортогональности трех поверхностей, найденное Леви, Mémoire sur les coordcnnées curvilignes ortogcnales, „Journal de l'Ecole Polytechnique“, T. XXVI, p 157, 1870.

Помощью этих формул находим все величины, характеризующие вышеупомянутые изменения цилиндрика. Обозначая вращения по осям координат через p, q, r, скольжения по осям y и z, направленные по x, через $2\theta_2$, $2\theta_3$, удлинение радиуса r среднего сечения цилиндрика через ε и изменение объема через Δ, получаем:

$$\left.\begin{aligned} p = \frac{2\pi}{H} v_1,\ 2q = -\frac{v_1}{R_1^3} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3},\ 2r = \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}, \\ 2\theta_2 = -\frac{v_1}{R_1^3} - \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3},\ 2\theta_3 = \frac{v_1}{R_1^2} + \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2},\ \varepsilon = 2\frac{v_1}{r^2} F', \\ \Delta = \frac{v_1}{k_1} + \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Первая из этих формул показывает, что *вращение цилиндрика по оси струйки происходит исключительно от закручивания линий тока, причем цилиндрик вращается внутри поверхности тока, как винт в своей гайке.* Вторая, третья, четвертая и пятая формулы показывают, что вращение и скольжение перпендикулярно оси струйки зависят от кривизны этой линии и от изменения скорости по ортогональным линиям. Полагая $q = r = 0$, получаем:

$$\theta_2 = -\frac{v_1}{R_1^3},\ \theta_3 = \frac{v_1}{R_1^2}.$$

Отсюда на основании § 7 следует теорема: *если струйка не имеет вращения перпендикулярно своей оси, то жидкая площадь, соответствующая ее сечению, вращается во время движения около перпендикуляра к соприкасающейся плоскости осевой линии на бесконечно малый угол, равный углу смежности этой линии, в сторону, обратную ее вращению.* Шестое равенство из группы (27) определяет изменение среднего сечения цилиндрика из круглого в эллиптическое. Мы видим, что это изменение вполне определяется по указательнице струйки, так что удлинение каждого радиуса среднего сечения равно геодезической кривизне в поверхности тока, соответствующей ортогональной линии, умноженной на $-v_1$.

Последняя формула (27) дает удлинение высоты цилиндрика:

$$\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} = \Delta - \frac{v_1}{k_1}.$$

Отсюда следует, что *для несжимаемой жидкости приращение скорости по оси струйки равно отрицательному расширению ее сечения, умноженному на скорость.*

Помощью формул (25′) могут быть получены общие формулы, дающие относительное движение частицы по трем проекциям скорости v_1, v_2, v_3 на касательные трех семейств взаимно ортогональных линий s_1, s_2, s_3. Предположив, что к рассматриваемому выше течению прибавлены два другие, совершающиеся по линиям s_2 и s_3 со скоростями v_2 и v_3, найдем для относительного движения частицы формулы (25″), в которых геодезические кривизны и вращения берутся относительно шести поверхностей тока:

$$s_1s_2,\ s_1s_3,\ s_2s_3,\ s_2s_1,\ s_3s_1,\ s_3s_2.$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{x}\left(\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_2}{R_1^2} - \frac{v_3}{R_1^3}\right) + \mathrm{y}\left(\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + \frac{v_2}{R_2^1} - \frac{v_3}{L_3^2}\right) +$$

$$+ \mathrm{z}\left(\frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} + \frac{v_3}{R_3^1} + \frac{v_2}{L_2^3}\right),$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{y}\left(\frac{\delta_2 v_2}{\delta_2 s_2} - \frac{v_3}{R_2^3} - \frac{v_1}{R_2^1}\right) + \mathrm{z}\left(\frac{\delta_3 v_2}{\delta_3 s_3} + \frac{v_3}{R_3^2} - \frac{v_1}{L_1^3}\right) +$$

$$+ \mathrm{x}\left(\frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} + \frac{v_1}{R_1^2} + \frac{v_3}{L_3^1}\right), \qquad (25'')$$

$$\mathrm{w} = \mathrm{z}\left(\frac{\delta_3 v_3}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1}{R_3^1} - \frac{v_2}{R_3^2}\right) + \mathrm{x}\left(\frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} + \frac{v_1}{R_1^3} - \frac{v_2}{L_2^1}\right) +$$

$$+ \mathrm{y}\left(\frac{\delta_2 v_3}{\delta_2 s_2} + \frac{v_2}{R_2^3} + \frac{v_1}{L_1^2}\right).$$

Мы будем часто в дальнейшем пользоваться этими формулами. Определим теперь с их помощью изменения элемента поверхности s_1s_2 при движении жидкости. Проведя линии s_3,

нормальные к семейству поверхностей $s_1 s_2$, полагаем в формулах (25″)

$$v_2 = 0, \quad \frac{1}{L_3^1} + \frac{1}{L_3^2} = 0$$

и определяем из них изменение элемента площади $\delta_1 s_1 \delta_2 s_2$, которое назовем через d, и вращение этого элемента около линии s_3:

$$\left.\begin{aligned} d' &= \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_1}{R_2^1} - v_3 \left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right), \\ 2r &= \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

На основании формулы (26) этим величинам можно дать вид:

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{\delta_1 (v_1 \delta_2 s_2)}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2} - v_3 \left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right), \\ 2r &= - \frac{\delta_2 (v_1 \delta_1 s_1)}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2}. \end{aligned}\right\} \tag{28′}$$

Называя *относительным течением* по поверхности $s_1 s_2$ движение со скоростью v_1, получаем результат: *вращение частицы на поверхности около нормали зависит только от относительного течения по поверхности, а изменение площади элемента поверхности равно изменению площади в относительном движении плюс сферическая кривизна поверхности, умноженная на отрицательную нормальную скорость.*

Из второй формулы (28′) можно получить равенство:

$$\int v_1 \cos (v_1 d\sigma) \cdot d\sigma = 2 \int \int r \, df,$$

в котором второй интеграл распространяется на площадь замкнутой кривой на поверхности $s_1 s_2$, а первый — на ее контур. Проекцию $v_1 \cos (v_1 d\sigma)$ можно заменить на $v \cos (v \, d\sigma)$, где v — абсолютная скорость, откуда

$$\int v \cos (v \, d\sigma) \, d\sigma = 2 \int \int r \, df. \tag{29}$$

§ 19. Соединяя струйки в движущуюся массу жидкости, мы можем рассматривать семейства кривых, касательные ко-

торых направлены по осям вращения частичек, по осям их деформации или по линиям, не изменяющим своего направления. Все эти семейства обладают любопытными геометрическими свойствами, но наибольшего внимания заслуживает первое семейство, названное Гельмгольцем линиями вихрей (Wirbellinien). Если вообразим течение, совершающееся по линиям вихрей со скоростями, равными вращению частиц, то получим на основании формулы (6) течение без изменения объема. Поверхность тока такого течения Гельмгольц называет *поверхностью вихрей* (Wirbelfläche), соответствующую ему струйку — *вихревой струйкой* (Wirbelfaden), а количество жидкости, которое протекает при таком течении через разрез струйки в единицу времени, — *напряжением вихревой струйки.*

Понятно, что *напряжение вихревой струйки есть постоянная величина вдоль всей струйки и что все вихревые струйки должны быть или замкнуты, или должны лежать концами на свободной поверхности жидкости.*

Называя *обтечением* данной разомкнутой или замкнутой линии интеграл

$$N = \int v \cos(v\, ds) \cdot ds,$$

взятый по этой линии, имеем по формуле (29): *обтечение всякой замкнутой линии равно двойной сумме напряжений вихревых струек, ею обхватываемых. Обтечение по замкнутой линии, лежащей на поверхности вихря, равно нулю, если эта линия может, не покидая поверхности, обратиться в точку. По всяким двум линиям на поверхности вихря, которые проведены между двумя точками и могут перейти, не покидая поверхности, одна в другую, обтечения равны.*

Разложим течение жидкости на два течения со скоростями v_1 и v_3 так, чтобы точки, лежащие на поверхности вихря, имели скорость v_3 по нормали, а скорость v_1 — по касательной к поверхности.

Возьмем по линии ab на этой поверхности интеграл

$$N = \int_a^b v_1 \cos(v_1 ds) \cdot ds,$$

и будем рассматривать его, на основании вышесказанного, как функцию точки b. Эта функция будет постоянна по линиям s_2, перпендикулярным направлению скорости v_1, а производная ее $\frac{dN}{d\sigma}$ будет давать проложение скорости v_1 на направление $d\sigma$; поэтому *относительное движение жидкости на поверхности вихрей имеет потенциальную функцию, равную обтечению кривой, идущей по поверхности вихрей от постоянной точки до рассматриваемой точки.*

Потенциальная функция N будет однозначна, если поверхность тока односвязна; в противном случае она может быть многозначна и иметь столько модулей периодичности, сколько существует различных обтечений по путям, не обращающимся в точку [1].

На основании второй формулы (28′) заключаем, что *при поворачивании скоростей относительного движения по поверхности вихря на прямой угол около нормалей получаем по этой поверхности новое течение без изменения площади.*

Составляя для этого нового течения количество жидкой площади, протекающей через данную кривую, которое будем обозначать через M, увидим, что $M = N$.

Мы будем называть количество жидкой площади, протекающей через данную кривую, *протечением* относительно этой кривой; так же будем называть количество жидкости, протекающей через данную поверхность.

То обстоятельство, что линии s_2 суть линии токов течения, не изменяющего площадь, выясняет нам расположение этих линий на поверхностях вихря, а следовательно, и расположение линий s_1; но чтобы лучше понять это расположение, мы должны сначала изучить свойства точек, в которых линии токов имеют бесконечно большую кривизну.

§ 20. Вообразив некоторое пространство, ограниченное замкнутой поверхностью, внутри которой скорости течения u, v, w непрерывны, однозначны и конечны, увидим, что ли-

---

[1] Этот вопрос обстоятельно исследуется Томсоном, у которого мы заимствовали и остальные результаты этого параграфа. Он называет обтечение по разомкнутой кривой flow, а по замкнутой — circulation. On vortex motion, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, p. 217.

нии токов, наполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, когда скорости u, v, w обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Будем называть критическими точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разберем свойства таких точек сначала для плоского течения.

Относя начало координат в точку, для которой скорости плоского течения u и v обращаются в нули, в бесконечности или становятся неопределенны, отыскиваем предел дроби $\frac{v}{u}$ при

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Если этот предел имеет конечную величину $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнения линий токов, бесконечно близких от начала координат, получатся помощью интегрирования уравнения (30):

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{30}$$

Рассмотрим теперь различные критические точки. Когда скорости u и v обращаются для начала координат в нули, а их производные по координатам конечны (некоторые из производных могут быть равны нулю), то уравнение (30) может быть представлено в виде уравнения (18′). Сохраняя обозначения § 13, получим следующие случаи критических точек:

1. $$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} > r^2.$$

Линии тока бесконечно близко от критической точки представляют гиперболы с бесконечно большой кривизной

$$\xi \eta^{-\frac{e_1}{e_2}} = \text{const},$$

имеющие вид *1* в случае $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0$ и *2* — в случае $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$ (фиг. 5).

При $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -1$ гиперболы обращаются в квадратные, а при $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$ в прямые линии *3*. При $r = 0$ оси ξ и η ортогональны.

2. $$\frac{e_2 - e_1}{2} = \mp r.$$

Линии токов на бесконечно близком расстоянии от критической точки по уравнениям (21′) будут:

$$\rho^2 \sin^2 u = \text{const}\, e^{-\frac{e_2 + e_1}{r} \frac{1 \mp \operatorname{tg} u}{2 \operatorname{tg} u}},$$

где

$$u = \varphi \mp \frac{\pi}{4}.$$

Взяв верхний знак и предположив

$$\frac{e_2 + e_1}{r} > 0,$$

найдем бесконечно близко от критической точки линии токов *4*, изображенные на фиг. 5. Когда

$$e_2 + e_1 = 0,$$

то вышенаписанное уравнение даст прямые линии, и начало координат не будет критической точкой.

3. $$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} < r^2,$$

Уравнения линий токов по формуле (20) бесконечно близко от критической точки будут иметь вид:

$$(e_2 - e_1)xy + r(x^2 + y^2) = \text{const}\, e^{\frac{(e_2 + e_1)\psi}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}},$$

где

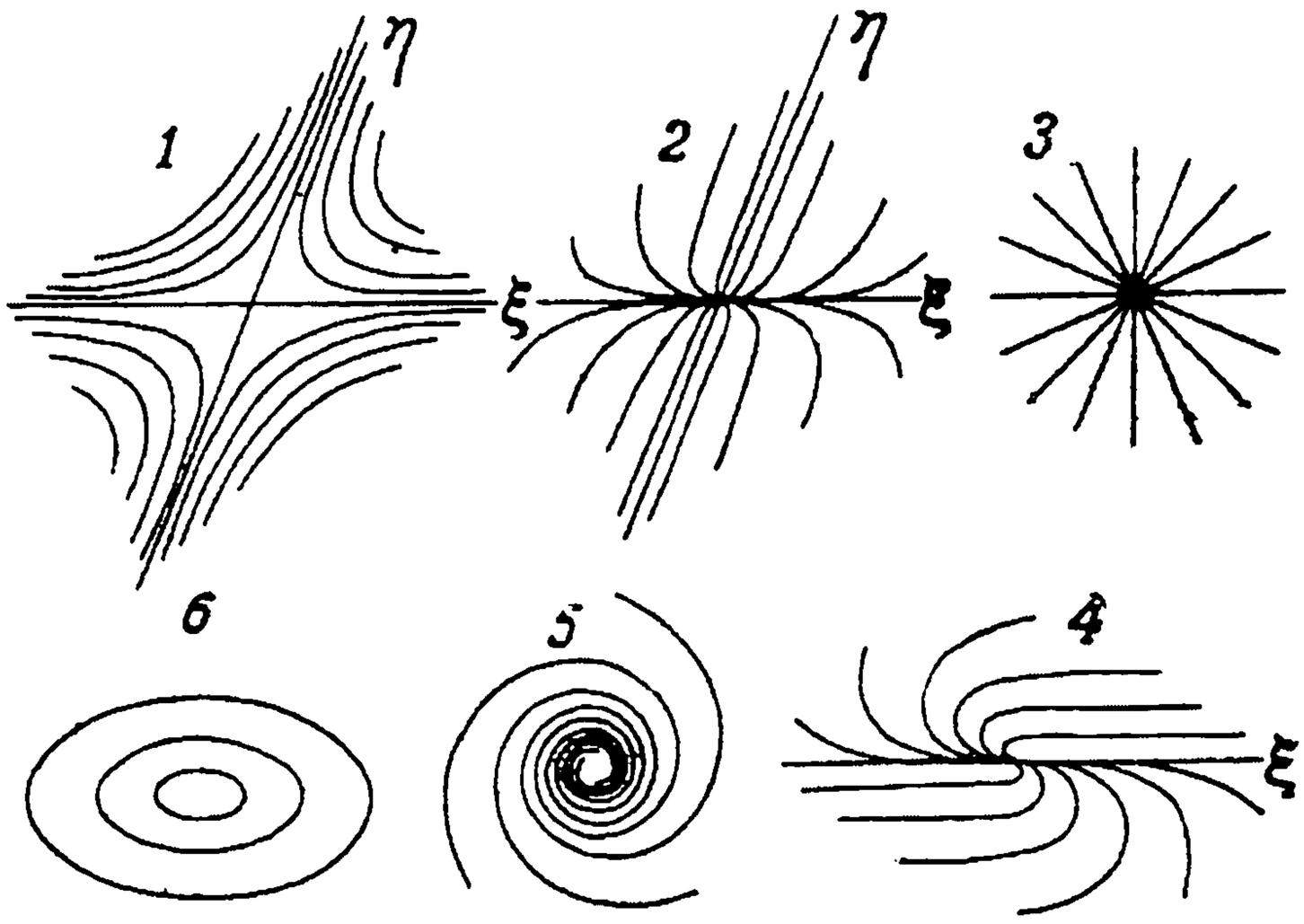
$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{y}{x} + \frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}.$$

Это уравнение представляет спирали, для которых критическая точка есть асимптотический полюс, как это изображено на фиг. 5, 5. В случае

$$e_2 \frac{1}{1} e_1 = 0$$

спирали обращаются в эллипсы.

Назовем разобранные точки нулевыми критическими точками первого порядка и обратим внимание на следующие результаты. *При движении несжимаемой жидкой площади нулевые критические точки первого порядка бывают гиперболические или эллиптические.*



Фиг. 5.

В первом случае две линии тока пересекаются в критической точке, во втором — линии токов охватывают критическую точку, обращаясь в пределе в бесконечно малые эллипсы. Если в нулевой критической точке первого порядка вращение элемента площади равно нулю, то через эту точку проходят две пересекающиеся под прямым углом линии тока.

Кроме нулевых критических точек первого порядка могут еще быть нулевые критические точки *n*-го *порядка*, которые имеют место, когда в данной точке скорости u, v и их производные до n-го порядка обращаются в нули, а производные n-го порядка конечны. Мы исследуем подробно такие точки только для плоского течения без сжатия и вращения, а теперь заметим, что при течении без сжатия через нулевую критическую точку n-го порядка не может проходить более $n+1$ линий тока.

Критические точки, в которых u и v обращаются в ∞ или $\frac{0}{0}$, мы будем называть *бесконечными* или *неопределен-*

ными критическими точками; они представляют бесчисленное множество различных видов, потому что $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ может быть всякой функцией. Чтобы выяснить характер рассматриваемой критической точки, проведем из нее, как из центра, окружность и, взяв по ней замкнутые интегралы

$$M = \int v\cos(vn)\cdot ds, \quad N = \int v\cos(vs)\cdot ds,$$

определим их пределы M_0, N_0, полагая радиус окружности равным нулю. Величины M_0 и N_0 могут быть нули, конечны или бесконечны. Будем называть *точкой истечения* критическую точку, для которой $N_0 = 0$, а $M_0 \neq 0$, и *вихревой точкой* критическую точку, дающую $M_0 = 0$, а $N_0 \neq 0$; точку, для которой M_0 и N_0 не равны нулю, будем называть точкой *истечения и вихря*. Понятно, что нулевые критические точки не соответствуют ни точкам истечения, ни точкам вихря. Возьмем пример точки истечения и вихревой:

$$u = \frac{ax - by}{\rho^2}, \quad v = \frac{ay + bx}{\rho^2}.$$

По уравнению (30) находим для линии тока

$$\rho^2 = \text{const}\cdot e^{\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \tag{30'}$$

уравнения спиралей, асимптотический полюс которых есть точка истечения и вихревая. При $a = 0$ рассмотренный пример дает точку вихревую, а при $b = 0$ точку истечения.

Называя M_0 и N_0 коэфициентами точек истечения и вихря, обратим внимание читателя на теоремы: *для плоского течения без изменения площади протечение, взятое по замкнутой кривой, равно сумме коэфициентов точек истечения, лежащих внутри этой кривой. Для плоского течения без вращения обтечение, взятое по замкнутой кривой, равно сумме коэфициентов вихревых точек, лежащих внутри кривой.*

Переходим к исследованию критических точек плоского течения без вращения и изменения площади. Известно, что в этом случае линии токов и ортогональные линии могут

быть получены, приравнивая постоянным действительные и мнимые коэфициенты функции мнимого переменного. Так, если дано

$$F(z) = \Phi + \varphi i,$$

то искомые линии будут

$$\Phi = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}. \tag{30''}$$

Предположив, что данная функция $F(z)$ обращается в начале координат в 0 или ∞, отыскиваем величину n, для которой

$$\lim_{z=0}\left(\frac{F(z)}{z^n}\right)$$

будет конечным. Если возможно найти такое значение n, то уравнения линий тока вблизи рассматриваемой точки найдутся помощью формул (30″) и будут при надлежащем выборе полярной оси иметь следующий простой вид:

$$\rho^n \sin(n\varphi) = \text{const},$$

$$\rho^n \cos(n\varphi) = \text{const}.$$

Замечая, что для целого и положительного n начало координат будет нулевой критической точкой $(n-1)$-го порядка, и называя *бесконечной нулевой критической точкой n-го порядка* точку, соответствующую целому и отрицательному n, обнаружим помощью вышеописанных уравнений теорему Гатона де ла Гупильера[1]: *в случае плоского течения без вращения и изменения площади через нулевую критическую точку* $(n-1)$*-го порядка и бесконечную критическую точку n-го порядка проходят n линий тока, касательные которых образуют* $2n$ *равных углов. Через нулевую точку не проходит ни одна другая линия тока; через бесконечную проходят все линии тока, причем бесконечно близко от критической точки они образуют бесконечно малые замкнутые кривые с* $2n$ *петлями.* На фиг. 6 представлены точки 2 и (—3)-го порядка.

[1] Haton de la Goupilière, Nouvelle théorie générale de lignes isothermes, C. R, T, XIVIII, 1 semestre, p. 621, 1859.

Все точки целого положительного порядка дают

$$M_0 = N_0 = 0.$$

Этим же свойством обладают критические точки отрицательного целого порядка, если $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = \frac{A}{z^n} + \frac{A_1}{z^{n_1}} + \frac{A_2}{z^{n_2}} + \ldots + A_0,$$

где

$$A,\ A_1,\ A_2 \ldots\ A_0$$

суть функции z, не имеющие критической точки при $z = 0$, а $n > n_1 > n_2 \ldots$ целые числа [1].

Случай дробного значения n может иметь место только при многозначных скоростях u и v.

Чтобы получить здесь определенное течение, нужно сделать, как известно, разрез плоскости, проходящий через критическую точку в бесконечность. При этом линии токов с обеих сторон разреза не представляют непрерывных кривых. Мы можем избежать этой разрывности и рассматривать дробную критическую точку как целую, когда введем римановские плоскости и вообразим, что жидкость течет непрерывно по всем плоскостям.

Мы разобрали этот вопрос в предположении, что возможно найти степень n, при которой

$$\lim \left(\frac{F(z)}{z^n} \right)_{z=0}$$

есть величина конечная; но это не всегда бывает, в чем легко убедиться, полагая

$$F(z) = \lg z \text{ и } F(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

При первом положении находим точку истечения или точку вихря

$$\varphi = \lg \rho,\ \psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

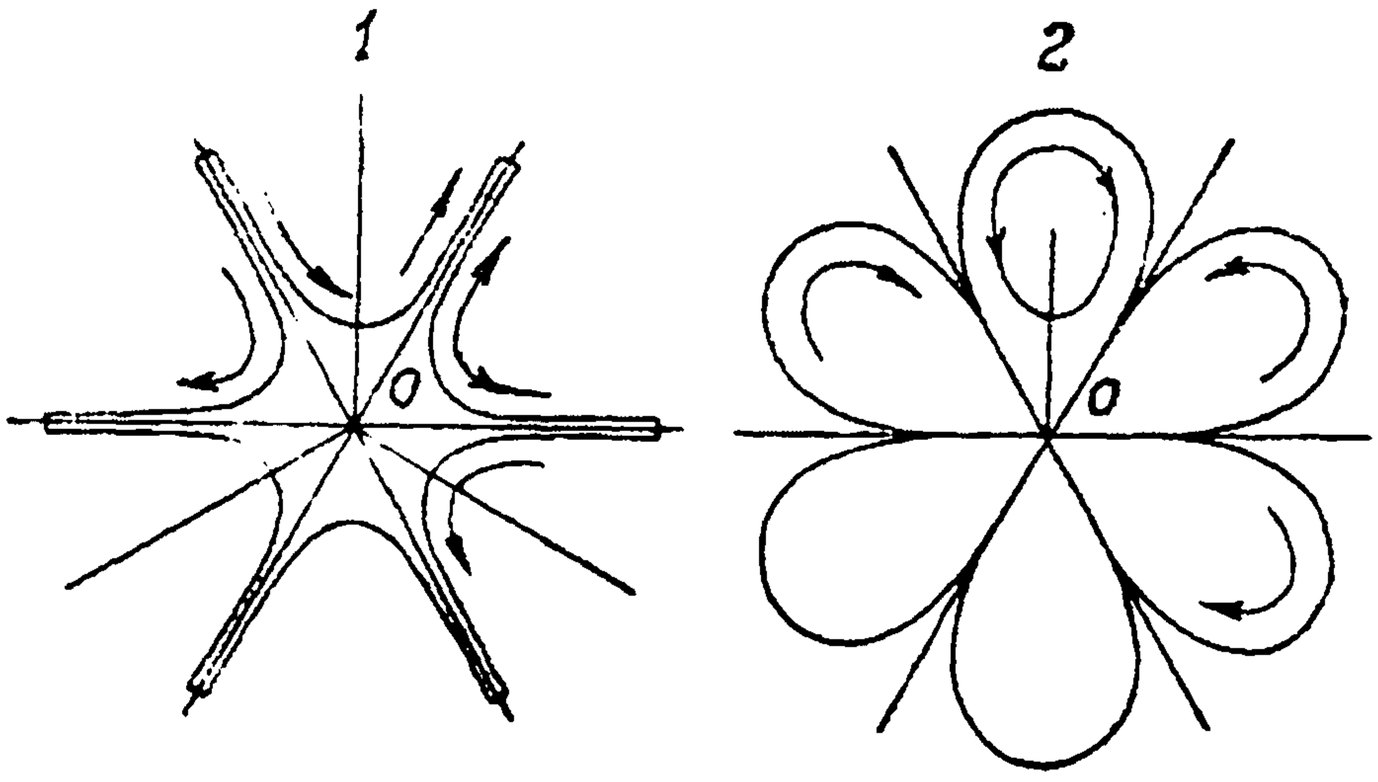
которые были исследованы в вышеприведенном примере (30′).

[1] Можно предположить, что из таких критических точек столько же истекает жидкости, сколько втекает в них.

Переходим к исследованию критических точек при движении жидкой массы. Если все точки, лежащие на некоторой линии, имеют

$$u = v = w = 0,$$

а производные от u, v, w по координатам конечны, то такая линия может быть названа *нулевой критической осью первого порядка. Поверхности тока, пересекающие критическую ось первого порядка, должны соприкасаться в точке пересечения к не изменяющей направления плоскости, соответственной касательной к критической оси.*



Фиг. 6.

Располагая оси x, y, z, как в § 13, заметим, что удлинение ε_3 по оси z равно нулю, а следовательно, при несжимаемой жидкости $e_1 + e_2 = 0$. Это положение дает теорему: *при несжимаемой жидкости точки пересечения поверхностей тока с нулевой критической осью первого порядка соответствуют эллиптическим или гиперболическим критическим точкам на этих поверхностях.* В одном случае через критическую ось будут проходить две поверхности тока; в другом — поверхности токов будут охватывать критическую ось, суживаясь по мере приближения к ней.

Вообразив замкнутую односвязную поверхность тока при течении несжимаемой жидкости, увидим, что число гиперболических точек на такой поверхности будет на два менее числа эллиптических. Всякую многосвязную замкнутую поверхность можно сделать односвязной, проведя k перегородок и рассматривая обе стороны каждой перегородки как части поверхности. Нетрудно показать, что *на замкнутой поверхности тока, которая делается односвязной помощью k перегородок, число гиперболических точек на $2k-2$ более числа эллиптических.* Сказанное выясняет расположение ортогональных линий на поверхностях вихря.

Мы рассмотрели нулевые критические точки первого порядка в предположении о существовании критической оси. Но, разумеется, может быть и одна нулевая критическая точка первого порядка. Вид линий тока в бесконечной близости от такой точки вполне выясняется на основании сказанного в § 13. *Через критическую точку будут проходить три не изменяющие направления плоскости или одна.*

Рассмотрим первое предположенне. Если $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0$, то всякая линия тока пройдет через критическую точку, как показано на фиг. 7, *1*. Если же $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} < 0$, то через критическую точку пройдут только линии, прикасающиеся к одной из не изменяющих направления плоскостей, и линия, прикасающаяся к соответственной не изменяющей направления прямой.

Во втором предположении уравнения (20) дают нам поверхности тока:

$$(e_2 - e_1)xy + r(x^2 + y^2) = \text{const} \cdot \zeta^{\frac{e_2 + e_1}{\varepsilon_3}},$$

охватывающие линию тока, прикасающуюся к не изменяющей направления линии. Если

$$\frac{e_2 + e_1}{\varepsilon_3} > 0,$$

то эти поверхности будут суживаться, приближаясь к критической точке, и обратятся в ней в острие (фиг. 7, *3*). Если же, наоборот,

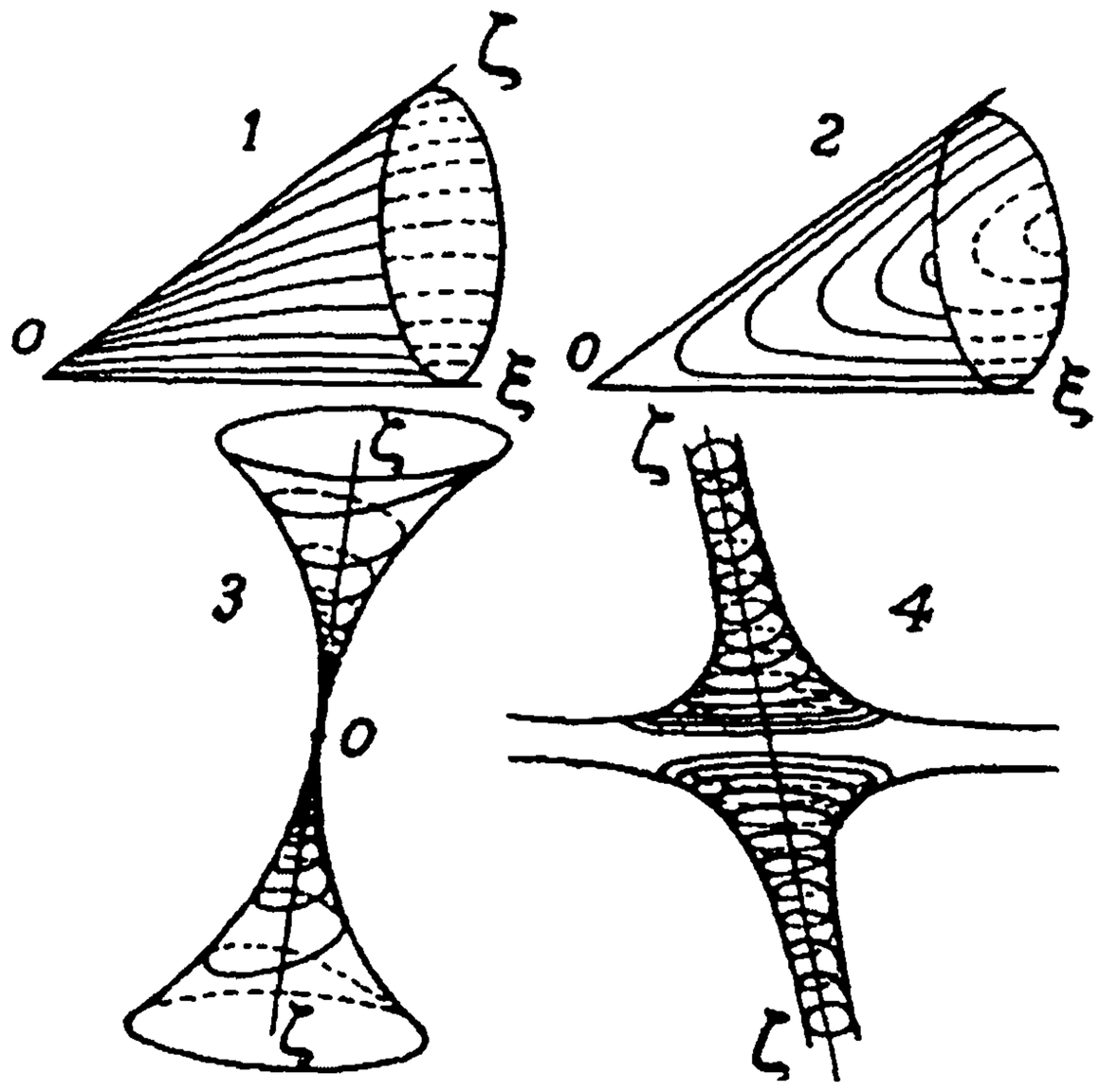
$$\frac{e_2 + e_1}{\varepsilon_3} < 0,$$

то рассматриваемая поверхность тока будет, приближаясь к критической точке, расстилаться по поверхности тока, проходящей через эту точку (фиг. 7, *4*). В первом случае каждая линия тока пройдет через критическую точку, во втором — нет.

Замечая, что при несжимаемой жидкости

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} < 0, \quad \frac{e_2 + e_1}{\varepsilon_3} < 0,$$

приходим к заключению: *при несжимаемой жидкости все линии тока не могут проходить через нулевую критическую точку первого порядка.* Понятно, что при *течении без вращения через нулевую критическую точку первого порядка будут проходить три пересекающиеся под прямым углом линии тока; а ортогональные поверхности, бесконечно близкие от этой точки, будут бесконечно малые эллипсоиды или гиперболоиды с бесконечно большой кривизной, причем при несжимаемой жидкости может иметь место только последний случай.*



Фиг. 7.

О других видах критических точек для жидкой массы мы скажем только несколько слов.

Для исследования критической точки на поверхности тока предполагаем, что плоскость xy прямоугольных осей x, y, z прикасается к поверхности в начале координат, и определяем проекции линий тока поверхности на эту плоскость. Искомые проекции найдутся как линии токов некоторого плоского течения, совершающегося по плоскости xy со скоростями u, v, соответствующими точкам поверхности; так что, рассматривая u и v как функции координат x, y, которые входят в них явно и неявно под видом координаты z, мы можем свести исследование критической точки на поверхности к исследованию критической точки на плоскости.

Если $n-1$ первых производных от u и v, взятых по x и y в указанном смысле, обращаются в нули, то мы будем иметь на поверхности нулевую критическую точку n-го порядка.

Линия, соединяющая непрерывный ряд критических точек n-го порядка, расположенных на семействе поверхностей тока, может быть названа критической осью n-го порядка.

Подобным же образом могут быть исследованы и другие

виды критических точек на поверхностях тока и проведены соответствующие им оси.

Смотря по тому, будут ли критические точки на поверхностях тока точками истечения или вихря, соответствующие им критические оси должны получить те же названия. Коэфициентом вихревой оси будем называть предел обтечения замкнутой линии, охватывающей ось, при обращении этой линии в точку.

Пользуясь теоремой § 19, легко доказать, что *при невращаемой жидкости предел обтечения постоянен для всех точек вихревой оси, которая должна быть необходимо или замкнута, или должна кончаться на свободной поверхности.*

Далее получаем теорему: *обтечение по замкнутой кривой внутри невращаемой жидкости равно сумме коэфициентов всех вихревых осей, проходящих через замкнутую линию.*

Коэфициент истечения критической точки определяется как предел интеграла

$$M = \int\int v \cos(v\, dn) \cdot df,$$

взятого по поверхности сферы, описанной около критической точки, при убывании радиуса до нуля. Понятно, что *протечение, взятое по произвольной замкнутой поверхности внутри течения несжимаемой жидкости, равно сумме коэфициентов истечения, заключенных внутри поверхности критических точек.*

§ 21. Мы перейдем теперь к изучению течения без сжатия и вращения и изложим в этом параграфе некоторые теоремы о потенциальной функции, которые с кинематической точки зрения почти очевидны. Вообразив течение жидкости с конечными непрерывными и однозначными скоростями, наполняющее односвязное пространство, ограниченное поверхностью f, увидим, что при отсутствии вращения и сжатия струйки не могут нигде пересекаться, что все они будут разомкнуты и будут лежать своими концами на поверхности f; при этом на каждой струйке жидкость будет течь, постоянно направляясь в одну сторону. Отсюда следует, что *все скорости жидкости внутри f равны нулю всякий раз*

как на поверхности функция F постоянна или $\frac{dF}{dn} = 0$. Далее видим, что *два течения, имеющие на f одинаковые значения F или* $\frac{dF}{dn}$, *тождественны*, ибо, составляя их разность, получим течение, имеющее внутри поверхности скорость, равную нулю. *Функция F не может нигде внутри рассматриваемого пространства иметь максимум или минимум*, так что все наибольшие и наименьшие значения F будут лежать на поверхности f. Также можно показать, что скорость течения *не может внутри пространства*, ограниченнаго поверхностью f, *иметь максимум*[1]. Проведя ось x параллельно скорости данной точки, заметим, что производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, которая в рассматриваемой точке есть скорость течения v_0, удовлетворяет условию:

$$\Delta_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0.$$

Если производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ по координатам внутри рассматриваемого пространства конечны, непрерывны и однозначны, то $\frac{\partial F}{\partial x}$ не может иметь ни в одной точке max. При этом всегда можно выбрать бесконечно близко от рассматриваемой точки другую точку, для которой

$$\frac{\partial F}{\partial x} > v_0,$$

откуда и подавно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > v_0^2.$$

Все сказанное выше можно распространить на многосвязное пространство, когда проведем перегородки и будем рассматривать обе стороны каждой перегородки как части ограничивающей поверхности f. Линии токов течения с не-

[1] Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, p. 184.

прерывными однозначными и конечными скоростями могут замыкаться на перегородках, так как обтечения по линиям, не приводимым в точку, не должны быть равны нулю.

Можно также рассматривать течение, ограниченное конечными поверхностями f и бесконечно удаленной поверхностью s.

Предположим, что при этом скорости удовлетворяют вышеупомянутым условиям и обращаются в бесконечности в нули, а линии токов разомкнуты и лежат своими концами на поверхностях f и поверхности s. Кирхгофф называет такое течение течением жидкости, *неподвижной в бесконечности* (die Flüssigkeit ruht in der Unendlichkeit), и показывает, каким образом по количеству жидкости, вытекающей из поверхности f, определить F и $\frac{dF}{dn}$ в бесконечности. Пусть M будет это количество; по теореме Грина можно написать:

$$F=\frac{1}{4\pi}\int dfF\frac{d}{dn}\frac{1}{r}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{df}{r}\frac{dF}{dn}+\frac{1}{4\pi R^2}\int dsF-\frac{1}{4\pi R}\int ds\frac{dF}{dn},$$

где два первые интеграла распространяются на поверхность f, а последние — на поверхность s сферы бесконечно большого радиуса R, имеющей центр в рассматриваемой точке; dn — элемент внутренней нормали. Последний интеграл равен нулю, а предпоследний не изменяется с изменением центра сферы, ибо в бесконечности

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

поэтому он равен постоянной величине c.

Мы находим формулу:

$$F-c=\frac{1}{4\pi}\int df\,F\frac{d}{dn}\frac{1}{r}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{df}{r}\frac{dF}{dn},$$

которая определяет F до постоянного. Полагая, что точка, для которой определяем F, уходит в бесконечность, находим

$$F-c=\frac{M}{R},\quad\frac{dF}{dn}=\frac{M}{R^2}.$$

При $M=0$

$$\frac{dF}{dn}$$

есть бесконечно малая величина выше второго порядка; поэтому через всякую часть поверхности s жидкость не протекает, поверхность s может быть взята для такого течения поверхностью тока. Что касается линий тока, то все они будут лежать своими концами на поверхностях f.

Для такого течения имеют место все теоремы, доказанные для течения, заключенного в конечном пространстве, причем можно не обращать внимания на бесконечно удаленную поверхность s.

§ 22. Посвятим этот параграф исследованию геометрических свойств линий тока без сжатия и вращения. Такое исследование в случае плоского течения могло бы быть сделано помощью теории мнимых величин; но мы предпочитаем чисто геометрические приемы, которые могут быть одинаково приложимы как для движения по плоскости или поверхности, так и для движения в пространстве.

Вообразив бесконечно тонкий слой несжимаемой жидкости, заключенный между двумя бесконечно близкими параллельными поверхностями тока, которые совпадают с поверхностями вихря, отнесем движение такого слоя к системе криволинейных координат (s_1, s_2), соответствующих линиям тока и ортогональным линиям. Формулы 28 и 28′ если положить в них

$$v_3 = r = d = 0,$$

дадут уравнения, которые можно представить двумя способами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1^2} &= \frac{\delta_2 \lg v_1}{\delta_2 s_2}, \quad \frac{1}{R_2^1} = \frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_1 s_1}, \\ \delta_2(v_1\delta_1 s_1) &= 0, \quad \delta_1(v_1\delta_2 s_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Симметрия этих формул относительно s_1 и s_2 показывает, что при поворачивании всех скоростей около нормали к поверхности на 90° течение остается без сжатия и вращения; это вытекает также из сказанного в конце § 18.

Из вторых двух уравнений видна возможность выбрать две

функции F_1 и F_2, постоянные, первая — на s_1, а вторая — на s_2, которые удовлетворяют условию

$$v_1 = \frac{\delta_2 F_1}{\delta_2 s_2} = \frac{\delta_1 F_2}{\delta_1 s_1}.$$

Когда расположим линии s_1 и s_2 таким образом, чтобы приращения $\delta_1 F_2$ и $\delta_2 F_1$ были постоянны и равны, то для всех точек будем иметь $\delta_2 s_2 = \delta_1 s_1$. Называя две системы взаимно перпендикулярных кривых, образующих в пересечении бесконечно малые квадратики, *квадратной сеткой*, получим теорему: *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данное течение по поверхности было без изменения площади и без вращения по нормали к поверхности, состоит в том, чтобы линии токов и ортогональные линии могли образовать квадратную сетку, а скорость была бы обратно пропорциональна стороне соответствующего квадрата.*

Условие квадратности ортогональной сетки может быть выражено некоторой зависимостью между радиусами кривизны. Взяв δ_1 и δ_2 от двух первых уравнений (31), умноженных на $\delta_2 s_2$ и $\delta_1 s_1$, вычитаем полученные результаты:

$$\delta_1 \left[\frac{\delta s_2}{R_1^{\,2}} \right] - \delta_2 \left[\frac{\delta s_1}{R_2^{\,1}} \right] = 0; \qquad (32)$$

это и есть искомое соотношение. Оно показывает на основании формул (25″) и (26), что, *слагая два течения, направленные по* s_1 *и* s_2, *со скоростями* $\frac{1}{R_2^{\,1}}$ *и* $\frac{1}{R_1^{\,2}}$, *мы получаем течение без вращения около нормали к поверхности.* Назовем линии токов и ортогональные линии такого течения через p_1 и p_2. Из формул (31) видно, что *на линиях* p_2 *скорость* v_1 *постоянна.* Если бы поверхность была развертываема, то, развернув ее, нашли бы, что *по кривым* p_1 *скорость* v_1 *сохраняет свое направление.*

Определяя по формуле (25′) удлинения, которые претерпевают радиусы-векторы плоской частицы, направленные по p_1 и p_2 при движении жидкости по кривым s_1 со скоростью v_1,

найдем:

$$\frac{v_1}{R_2^1}, \quad \frac{v_1}{R_1^2},$$

откуда получается теорема: *удлинения по кривым* p_1 *и* p_2 *равны удлинениям по кривым* s_1 и s_2. Мы будем называть на основании этой теоремы прямоугольную сетку $(p_1\ p_2)$ сеткой линий *равного удлинения с* $(s_1\ s_2)$.

Обратим внимание на связь, существующую между геодезическими кривизнами всякой ортогональной сетки [1]:

$$\delta_1\left(\frac{\delta_2 s_2}{R_2^1}\right)+\delta_2\left(\frac{\delta_1 s_1}{R_1^2}\right)=\frac{\delta_1 s_1\,\delta_2 s_2}{R'R''}, \tag{32'}$$

в которой $\frac{1}{R'}$ и $\frac{1}{R''}$ — главные кривизны поверхности. Эта связь показывает, что течение, скорости которого слагаются геометрически из кривизн ортогональной сетки, имеет расширение площади, равное произведению главных кривизн поверхности.

Называя параметром квадратной сетки соответствующую скорость течения без сжатия и вращения, получаем из формул (32) и (32′) теорему [2]: *для развертывающейся поверхности сетка* $(p_1\ p_2)$ *квадратная и имеет своим параметром*

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}.$$

---

[1] Эта формула получается из теоремы:

$$\int\frac{ds}{R_s}+A_1+A_2+\ldots=2\pi-\theta,$$

где интеграл распространяется на все стороны криволинейного замкнутого многоугольника, начертанного на поверхности; A_1, A_2, ... суть внешние углы многоугольника, а θ — площадь сферического изображения многоугольника, которое получаем, проводя из центра сферы радиуса единицы линии, параллельные нормалям, восставленным из точек многоугольника к поверхности. Эта площадь определяется помощью радиусов кривизны поверхности интегралом:

$$\theta=\int\frac{1}{R'R''}\,df,$$

распространенным на площадь данного криволинейного многоугольника. Analytische Geometrie des Raumes von Salmon. Deutsch bearbeitet von Fiedler, p. 574, 1865.

[2] Для всякой поверхности можно по двум квадратным сеткам получить третью, составляя разность течений, слагающихся геометрически из кривизн той и другой сетки.

Эта теорема дает при развертывающейся поверхности следующие радиусы кривизны r_1^2 и r_2^1 сетки равного удлинения, причем d_1 и d_2 суть изменения по кривым p_1, p_2:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{d_2 \lg \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}}{d_2 p_2};$$

$$\frac{1}{r_2^1} = \frac{d_1 \lg \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}}{d_1 p_1}.$$

Две системы взаимно ортогональных линий (q_1, q_2), делящих пополам углы между s_1 и p_1, s_2 и p_2, будут, как мы знаем, соответствовать направлению осей деформации элемента поверхности $s_1 s_2$. Мы назовем сетку $(q_1\ q_2)$ сеткой осей деформации и постараемся определить ее радиусы кривизны в случае

$$\frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{R''} = 0.$$

Разлагаем скорость v_1 на слагающие u_1 и u_2, направленные по линиям q_1 и q_2, и пишем на основании формулы (25″) уравнения:

$$\frac{\partial_1 u_1}{\partial_1 q_1} - \frac{u_2}{\rho_1^2} = \varepsilon, \quad \frac{\partial_2 u_2}{\partial_2 q_2} - \frac{u_1}{\rho_2^1} = -\varepsilon;$$

$$\frac{\partial_2 u_1}{\partial_2 q_2} + \frac{u_2}{\rho_2^1} = 0, \quad \frac{\partial_1 u_2}{\partial_1 q_1} + \frac{u_1}{\rho_1^2} = 0,$$

в которых $\frac{1}{\rho_1^2}$ и $\frac{1}{\rho_2^1}$ — кривизны линий q_1 и q_2, ε — главное удлинение, а ∂_1 и ∂_2 — изменения по кривым q_1 и q_2. Взяв ∂_2 от первого равенства, умноженного на $\partial_1 q_1$, и ∂_1 — от третьего, умноженного на $\partial_2 q_2$, вычитаем полученные результаты:

$$\frac{-\partial_1 q_1 \partial_2 u_2}{\rho_1^2} - \frac{\partial_2 q_2 \partial_1 u_2}{\rho_2^1} - u_2 \left[\partial_2 \left(\frac{\partial_1 q_1}{\rho_1^2}\right) + \partial_1 \left(\frac{\partial_2 q_2}{\rho_2^1}\right)\right] = \partial_2(\varepsilon \partial_1 q_1).$$

Преобразуя это равенство на основании формулы (32′) и заменяя в нем $\partial_2 u_2$ и $\partial_1 u_2$ данными выше величинами, на-

ходим $\frac{1}{\rho_1^2}$. Эта величина вместе с подобной же величиной для $\frac{1}{\rho_2^1}$ будет:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\partial_2 \lg \sqrt{\varepsilon}}{\partial_2 q_2}, \quad \frac{1}{\rho_2^1} = \frac{\partial_1 \lg \sqrt{\varepsilon}}{\partial_1 q_1}.$$

Отсюда: *для развертывающихся поверхностей сетка линий деформации квадратная и имеет своим параметром корень квадратный из главного удлинения.*

Воображая два течения, совершающиеся по обоим семействам линий деформации со скоростями $\sqrt{\varepsilon}$, получим течение со скоростью $\sqrt{2\varepsilon}$, совершающееся по линиям нулевого удлинения. Отсюда — *сетка линий нулевого удлинения на развертывающейся поверхности тоже квадратная и имеет тоже параметр* $\sqrt{\varepsilon}$.

Понятно, что, изменяя линии токов на ортогональные линии, мы изменим сетку линий деформации на сетку нулевого удлинения, и наоборот. Предположив, что данная поверхность развернута на плоскости и обозначая через Δ знак первого диференциального параметра, найдем из (31), (25′) и (4):

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2} = \Delta \lg v_1,$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{v_1 \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}} = \sqrt{\Delta v_1}.$$

Помощью одной квадратной сетки мы можем составить бесчисленное множество других. Так, например, можно составить на плоскости сетки с параметрами

$$(\Delta \lg)^k v_1, \quad \sqrt{(\Delta)^k v_1},$$

взяв от данной сетки k раз сетку равного удлинения или k раз сетку линий деформации[1].

---

[1] Читатель может познакомиться с вопросом об образовании новых квадратных сеток на плоскости из сочинения Гатона дела Гупильера „Nouvelle théorie générale des lignes isothermes", который разбирает вопрос с помощью теории мнимых величин.

Переходим к течению без вращения и сжатия в пространстве.

Отнесем движение к системе криволинейных координат, образуемых семейством ортогональных поверхностей и двумя семействами поверхностей тока. Заметив, что в уравнении (27) угол между ортогональными линиями s_2, s_3 может быть взят острым, если будем называть через q, r, θ_2, θ_3 проекции вращения и скольжения струи на перпендикуляры к поверхностям s_1s_3, s_1s_2, напишем для нашего случая:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{k_1} &= \frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_1 s_1}, \quad \delta_1(v_1 df) = 0; \\ \frac{1}{R_1^{\,2}} &= \frac{\delta_2 \lg v_1}{\delta_2 s_2}, \quad \delta_2(v_1 \delta_1 s_1) = 0; \\ \frac{1}{R_1^{\,3}} &= \frac{\delta_3 \lg v_1}{\delta_3 s_3}, \quad \delta_3(v_1 \delta_1 s_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Второй вид формул (33) показывает, что *условие, необходимое и достаточное для возможности течения без сжатия и вращения относительно данного семейства ортогональных поверхностей, состоит в том, чтобы эти поверхности вместе с двумя семействами поверхностей тока разделяли пространство на бесконечно малые параллелепипеды, для которых отношение* $df : \delta_1 s_1$ *постоянно* [1]. *Скорость при этом будет обратно пропорциональна* $\delta_1 s_1$ *или* df.

Первый вид уравнений (33) определяет сжатие и кривизны струй по изменениям скорости. Из него видно, что

[1] Равенство

$$\delta_1 \frac{df}{\delta_1 s_1} = 0$$

приводит к известному условию, стесняющему функцию F, постоянную на изотермической системе поверхностей; вычитая это равенство, умноженное на $\delta_1 F$, из тождества

$$\delta_1 \left(\frac{\delta_1 F}{\delta_1 s_1} df \right) = \Delta_2 F \cdot \delta_1 s_1 \cdot df,$$

найдем формулу, данную Ляме:

$$\frac{\Delta_2 F}{(\Delta F)^2} = \frac{\delta_1{}^2 F}{(\delta_1 F)^2}$$

(„Leçons sur les coordonnées curvilignes“, § XX).

течение, слагающееся геометрически из кривизны линий тока и сжатия струй течения без сжатия и вращения[1], *само бывает без вращения и имеет ортогональной поверхностью* $v_1 = \text{const}$.

Первую часть этой теоремы весьма удобно принять за признак изотермичности линий тока.

Из второй части получаем такой результат: *на ортогональных поверхностях скорость* v_1 *бывает постоянна по линиям, перпендикулярным к радиусам кривизны линий тока.*

Чтобы показать, в каком случае течение, слагаемое геометрически из кривизн линий тока и сжатия струй, будет несжимаемо, определим $\Delta_2 \lg v_1$. Для этого предположим, что линии s_2, s_3 представляют собой линии кривизны одной из ортогональных поверхностей, и составим по формулам (25″) изменение объема течения, скорости которого по s_1, s_2, s_3 суть

$$-\frac{1}{k_1}, \quad \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{1}{R_1^3}.$$

Это дает:

$$\Delta_2 \lg v_1 = -\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{k_1} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^2} + \frac{\delta_3}{\delta_3 s_2}\frac{1}{R_1^3} - \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 - \\ -\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_3^2}\right) - \frac{1}{R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3}\right).$$

Заметив, что по теореме Иоахимсталя линии s_2, s_3 будут не только линиями кривизны для ортогональных поверхностей, но и линиями кривизны для поверхностей тока, пишем по формуле (33) соотношения между радиусами кривизны, которые в нашем случае представляют известные формулы Ляме[2]:

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_2^1} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^2} = \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \frac{1}{R_1^3}\cdot\frac{1}{R_2^3},$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_3^1} + \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{R_1^3} = \left(\frac{1}{R_3^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^3}\right)^2 + \frac{1}{R_1^2}\cdot\frac{1}{R_3^2}.$$

---

[1] Причем первая отлагается по радиусу кривизны линии тока, а вторая — по ее касательной.

[2] Leçons sur les coordonnées curvilignes, § XLVI.

Складывая, получаем:

$$-\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)+\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^{\,2}}+\frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{R_1^{\,3}}-\left(\frac{1}{k_1}\right)^2-$$

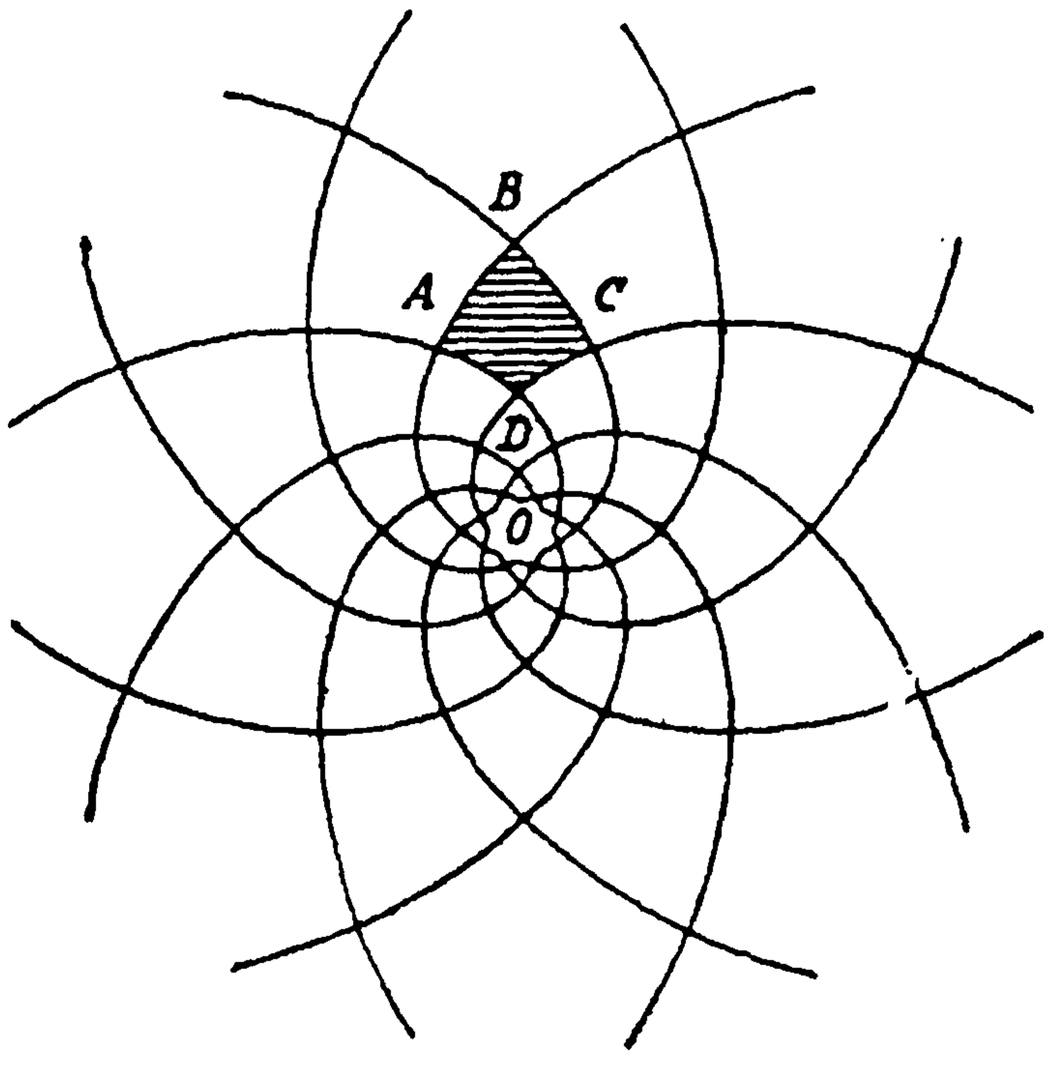
$$-\frac{1}{R_1^{\,2}}\left(\frac{1}{R_1^{\,2}}+\frac{1}{R_3^{\,2}}\right)-\frac{1}{R_1^{\,3}}\left(\frac{1}{R_2^{\,3}}-\frac{1}{R_1^{\,3}}\right)=-\frac{2}{R_2^{\,1}R_3^{\,1}},$$

откуда

$$\Delta_2 \lg v_1=-\frac{2}{R_2^{\,1}R_3^{\,1}}. \tag{33'}$$

Мы получаем такой результат: *если ортогональные поверхности разверзаются, то течение, определяемое функцией скоростей* $\lg v_1$, *будет без сжатия.*

§ 23. Заканчивая главу о течении жидкости, необходимо еще познакомиться с одним частным случаем течения без вращения и изменения объема. Это течение при движении жидкой площади определяется квадратной сеткой, образуемой концентрическими кругами и радиусами. Скорость его равна $\frac{\alpha}{2\pi\rho}$ и направлена по тем или другим линиям сетки. Будем называть движение по радиусам истечением, а по кругам — вихрем. Угловая скорость вихревого движения обратно пропорциональна квадрату радиуса, поэтому жидкая площадь при таком движении претерпевает закручивание, возрастающее до бесконечности в критической точке. Так как при вихревом движении удлинения по кругам и радиусам равны нулю, то линии деформации делают с радиусами углы в 45° и образуют квадратную сетку из взаимно ортогональных логарифмических спиралей. Каждый криволинейный прямоугольник $ABCD$, изображенный на фиг. 8, остается прямоугольным по прошествии бесконечно малого времени. Скорость течения, соответствующего сетке осей деформации, есть $\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho}}$; это те-



Фиг. 8.

чение имеет в центре критическую точку истечения и вихря.

Движение в пространстве, которое мы назовем истечением, есть течение без сжатия и вращения; ортогональные поверхности суть концентрические сферы. Скорость такого течения, как видно из формулы (33), есть $\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha}{\rho^2}$, так что слагающие по осям координат будут:

$$u=\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha x}{\rho^3},\quad v=\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha y}{\rho^3},\quad w=\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha z}{\rho^3}.$$

Вихревым движением, соответствующим бесконечно малому вихрю dz, направленному по оси z, называют движение, совершающееся параллельно плоскости xy по кругам, центры которых лежат на оси z, со скоростями

$$v=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha\, dz\sin\varphi}{\rho^2},$$

где φ — угол ρ с z. Скорости по осям такого движения:

$$u'=-\frac{1}{2\pi}\alpha\, dz\frac{y}{\rho^3},\quad v'=\frac{1}{2\pi}\alpha\, dz\frac{x}{\rho^3},\quad w'=0.$$

Мы принимаем коэфициент α положительным, когда вращение — по стрелке часов для наблюдателя, смотрящего с положительного конца dz.

Вихревое движение около элемента dz не дает изменения объема, но дает вращения:

$$p'=-\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{d}{dz}\frac{x}{\rho^3},\quad q'=-\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{d}{dz}\frac{y}{\rho^3};$$

$$r'=\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\rho^3}\right)=-\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\rho^3}.$$

Величины найденных вращений суть не что иное, как сумма скоростей двух истечений относительно точек 0 и 0′, помещенных в начале и конце элемента dz и имеющих коэфициенты $-\alpha$ и $+\alpha$. *Воображая некоторую линию AB, все элементы которой сообщают жидкости вихревые движения,*

имеющие коэфициент α, *получим движение без сжатия, но с вращением, угловые скорости которого равны скоростям течения, слагающегося из двух истечений* $-\alpha$ *и* $+\alpha$, *помещенных в точках* A *и* B. Будем называть такое движение вихревым движением около оси AB. *Когда ось вихревого движения замкнута, то оно не имеет ни сжатия, ни вращения.* Исключение представляют точки, лежащие на самой оси, являющейся вихревой критической осью. Чтобы определить скорости вихревого движения с замкнутой осью вихря, рассмотрим на плоскости xy бесконечно малый прямоугольник $dxdy$, каждая сторона которого соответствует осям бесконечно малого вихревого движения с коэфициентом α (периметр прямоугольника считаем от $+x$ к $+y$). Такой вихрь дает скорости:

$$u'' = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dxd\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\rho^3} = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dx\, dy\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\rho^3},$$

$$v'' = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dx\, dy\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\rho^3} = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dx\, dy\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\rho^3},$$

$$w'' = \frac{1}{2\pi}\alpha\, dx\, dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\rho^3}\right) = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dx\, dy\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\rho^3}.$$

Это показывает, что движение, сообщаемое нашим бесконечно малым замкнутым вихрем, может быть заменено двумя истечениями, критические точки которых лежат на концах элемента dz и имеют коэфициенты

$$\mp\frac{2\varkappa\, dx\, dy}{dz}.$$

Отсюда является возможность заменить движение, сообщаемое каким-нибудь конечным замкнутым вихрем, двумя истечениями, которым соответствуют две бесконечно близкие поверхности истечения, и выразить потенциал вихревого движения площадью сферического изображения вихревой оси.

ГЛАВА III

Сложение и разложение течений жидкости

§ 24. Исследования движений систем частного вида обязаны своим успехом, главным образом, разложению этих движений на более простые. То же имеет место и относительно движения жидкости, и можно, не преувеличивая, сказать, что успехи гидродинамики за последние годы являются следствием разложения движения жидкости, указанного Гельмгольцем. Ввиду важности этого разложения мы посвящаем ему особую главу, которую начнем общими замечаниями о сложении и разложении течений.

При сложении течений жидкости соответствующие им скорости слагаются геометрически; так же слагаются и скорости относительного движения частички, вследствие чего линейное удлинение радиуса сложного движения равно сумме его удлинений в слагаемых движениях, а вращение частички в сложном движении есть геометрическая сумма вращений в слагаемых движениях. Нулевые критические точки в слагаемых движениях не будут, вообще говоря, критическими точками сложного, но бесконечные и неопределенные точки останутся и в сложном движении.

Этого нельзя сказать всегда о критических точках при сложении бесконечно большого числа бесконечно медленных движений.

Мы будем слагать такие течения, предполагая, что они определяются координатами точек, непрерывно распределенных по линии, по поверхности или внутри объема, и что они имеют скорости, пропорциональные диференциалу дуги, площади или объема. Таким образом получаются, например, сложные движения, слагающиеся из бесчисленного множества истечений или вихревых движений, предполагая, что данная

поверхность или данный объем представляют непрерывную последовательность точек истечения или вихревых осей.

В случае объема скорости первого движения слагаются из скоростей

$$\frac{1}{4\pi}\alpha\frac{dv}{\rho^2},$$

направленных к элементу объема dv, а скорости второго — из скоростей

$$\frac{1}{2\pi}\alpha\frac{dv}{\rho^2}\sin(dl,\rho),$$

перпендикулярных радиусу ρ и элементу dl вихревой оси. В случае поверхности роль элемента объема играет элемент поверхности. Будем называть такие движения *истечением и вихревым движением относительно данного объема или данной поверхности.* Первое движение вполне определяется *коэфициентом* α в каждой точке, второе требует еще знания направления элемента *dl вихревой оси* в каждой точке.

§ 25. Предположим теперь, что внутри данного замкнутого пространства совершается течение жидкости со скоростями u, v, w, и постараемся разложить это движение на вихревое и истечение. Для этого определяем скорости вихревого течения относительно всего объема жидкости, предполагая, что вихревые оси суть линии вихрей, а коэфициенты в каждой точке равны вращению частицы; эти скорости будут:

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{q(z-c)-r(y-b)}{\rho^3}\,da\,db\,dc=\frac{\partial}{\partial y}N-\frac{\partial}{\partial z}M,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{r(x-a)-p(z-c)}{\rho^3}\,da\,db\,dc=\frac{\partial}{\partial z}L-\frac{\partial}{\partial x}N,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{p(y-b)-q(x-a)}{\rho^3}\,da\,db\,dc=\frac{\partial}{\partial x}M-\frac{\partial}{\partial y}L,$$

где

$$L=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{p}{\rho}\,da\,db\,dc,$$

$$M=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{q}{\rho}\,da\,db\,dc,\quad N=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{r}{\rho}\,da\,db\,dc. \tag{34}$$

Интегралы распространяются на весь объем, заключенный в данной поверхности f, а p, q, r, ρ представляют собой слагающие вращения и расстояние рассматриваемой точки (x, y, z) от точки объема (a, b, c). Подставляя в последние формулы значения p, q, r, преобразуем их помощью интегрирования по частям:

$$L = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} - L',$$

$$M = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} - M',$$

$$N = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - N'.$$

Здесь

$$P = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{u}{\rho}\, da\, db\, dc,$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{v}{\rho}\, da\, db\, dc, \quad R = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{w}{\rho}\, da\, db\, dc;$$

$$L' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{\rho}\left[v\cos(nz) - w\cos(ny)\right] df, \qquad (34')$$

$$M' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{\rho}\left[w\cos(nx) - u\cos(nz)\right] df,$$

$$N' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{\rho}\left[u\cos(ny) - v\cos(nx)\right] df.$$

Двойные интегралы распространяются на поверхность f; n — внутренняя нормаль этой поверхности. Подставляем значения M, N в формулу скорости:

$$\frac{\partial}{\partial y}N - \frac{\partial}{\partial z}M = -\Delta_2 P +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial N'}{\partial b}-\frac{\partial M'}{\partial c}\right),$$

и преобразовываем член, входящий в скобки, помощью интеграции по частям:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{v_n}{\rho}\,df+\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\Delta}{\rho}\,da\,db\,dc;$$

v_n обозначает скорость на поверхности по внутренней нормали, а Δ — изменение объема. Полагая

$$S=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\Delta}{\rho}\,da\,db\,dc,\quad S'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{v_n}{\rho}\,df \qquad (34'')$$

и замечая, что $-\Delta_2 P$ равняется нулю вне поверхности f и дает u для внутренней точки, находим формулу для скорости u и подобные же формулы для v, w:

$$u=\frac{\partial(N+N')}{\partial y}-\frac{\partial(M+M')}{\partial z}+\frac{\partial(S+S')}{\partial x},$$

$$v=\frac{\partial(L+L')}{\partial z}-\frac{\partial(N+N')}{\partial x}+\frac{\partial(S+S')}{\partial y}, \qquad (34''')$$

$$w=\frac{\partial(M+M')}{\partial x}-\frac{\partial(L+L')}{\partial y}+\frac{\partial(S+S')}{\partial z}.$$

Рассматривая формулы (34), (34′), (34″), (34‴), приходим к основной теореме о разложении всякого течения, которая во всей ее полноте была изложена Бельтрами [1]. Мы назовем через ω и v_s вращение частицы и слагающую скорости на поверхность f.

Всякое течение жидкости можно разложить на четыре движения:

1) истечение относительно всего объема жидкости, коэфициенты которого равны Δ; *2) вихревое движение относительно всего объема, оси которого представляют собой линии вихрей, а коэфициенты равны* ω; *3) истечение относительно поверхности, замыкающей рассматриваемую массу, коэфициенты которого равны* v_n; *4) вихревое движение относительно поверхности, оси которого получаются, если по-*

[1] Dell'idrodinamica razionale, § 15, 16 и 17. Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, t. II.

вернуть скорости относительного течения поверхности на прямой угол около внутренней нормали по часовой стрелке, и коэфициенты которого равны $v_s : 2$.

Чтобы выяснить себе причину, вследствие которой течение жидкости разлагается на четыре движения, заметим, что скорости, определяемые формулами

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial S}{\partial z},$$

не имеют вращения, но имеют изменение объема Δ. Скорости же

$$u_2 = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},$$

$$v_2 = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$w_2 = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

наоборот, не имеют изменения объема, но имеют некоторые вращения p_2, q_2, r_2, как видно из формулы (34):

$$\rho_2 = p + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df,$$

$$q_2 = q + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df,$$

$$r_2 = r + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df;$$

ω_n — вращение около внутренней нормали к f.

Вторые члены происходят от концов вихрей и могут быть рассматриваемы как вращения некоторого вихревого течения относительно поверхности f. Заменяя ω_n по формуле (28), получим:

$$\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df = -\frac{1}{2}\int\int \frac{\delta_2 (v_1 \delta_1 s_1)}{\rho},$$

где $v_1 = v_s$, а s_1 и s_2 — линии токов и ортогональные линии относительного движения по поверхности f. Это показывает,

на основании сказанного в § 23, что вращение может быть получено от скоростей вихревого движения относительно поверхности f, оси которого — ортогональные линии этой поверхности, а коэфициенты равны $-v_s:2$.

Если теперь возьмем это вихревое движение в обратную сторону и сложим его с движением

$$(u_1,\ v_1,\ w_1) \text{ и } (u_2,\ v_2,\ w_2),$$

то получим течение, имеющее во всякой точке внутри поверхности f то же вращение и то же изменение объема, как данное течение. Для полного тождества обоих течений нужно к слагаемым движениям прибавить еще течение без вращения и изменения объема; мы видели, каково это течение.

§ 26. Рассмотрим теперь теорему Бельтрами в различных частных случаях.

Когда поверхность f есть ортогональная поверхность и жидкость не имеет вращения, то в формуле (34‴) надо положить

$$L = M = N = L' = M' = N' = 0.$$

Это дает такой результат: *движение без вращения внутри ортогональной поверхности f может быть разложено на истечение относительно объема, заключенного в f, с коэфициентами Δ и на истечение относительно поверхности f с коэфициентами v_n* [1].

Для несжимаемой жидкости остается только последнее течение, причем определение v_n представляет известную задачу электростатики.

Если, наоборот, поверхность f есть поверхность тока и изменение объема равно нулю, то в формулах (34‴) надо положить

$$S = S' = 0.$$

Движение без изменения объема внутри поверхности тока может быть разложено на вихревое движение относительно объема с коэфициентами ω и с осями, направлен-

---

[1] Влияние, оказываемое изменением объема одной частички на скорости других частичек, указано Pохом—Anwendung der Potentialausdrüke auf mathematische Physik, Borchardt's Journal, Bd. 61, § 5.

ными по линиям вихрей, и на вихревое движение относительно поверхности тока с коэфициентами $v_s : 2$ *и с осями направленными по ортогональным линиям поверхности.*

Когда вращение жидкости равно нулю, то остается только второе течение, как показал Больцман, под следующим условием [1].

Если проведем по поверхности f *бесконечное множество ортогональных линий* s_2 *и предположим, что между каждыми двумя линиями пробегает гальванический ток с напряжением* $v_s \delta_1 s_1$, *то действие всех таких токов на элемент каждого из них даст силу, перпендикулярную поверхности* f.

Это условие является следствием такого свойства электрических взаимодействий: если на магнитную массу dm действуют другие магнитные массы с известной силой g и мы заменим магнитную массу на элемент тока dl, то на этот элемент будет действовать сила, перпендикулярная g и dl.

Приняв, наконец, что f — поверхность вихрей и что жидкость несжимаема, получаем разложение Гельмгольца [2]. *Если поверхность* f *есть поверхность вихрей, то все жидкое течение можно разложить на вихревое движение относительно объема жидкости, оси которого направлены по линиям вихрей, а коэфициенты равны* ω, *и на некоторое течение без вращения и изменения объема.*

Мы видели, какими условиями стеснены v_n на ортогональной поверхности и v_s на поверхности тока для течения без сжатия и вращения. Заметим вообще, что при всяком течении, в котором даны

$$\Delta,\ p,\ q,\ r,$$

из двух скоростей v_n и v_s произвольна только одна, так что, дав относительное течение по поверхности, мы определяем этим нормальную скорость, и наоборот [3].

---

[1] Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, Borchardt's Journal, Bd. 78.

[2] Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, § 3, Borchardt's Journal, Bd. 55.

[3] Это вытекает из сказанного в § 21. Если пространство многосвязно, то следует принять в соображение перегородки.

ГЛАВА IV

Об ускорениях точек движущейся жидкости

§ 27. Движение жидкости представляет, как было сказано в главе 2, ряд непрерывно изменяющихся течений. Изменение течения в данный момент времени вполне определяется, когда даны геометрические производные скорости в каждой точке пространства. Мы будем называть эти производные *ускорениями течения*. Ускорения течения будут известны, когда даны полные ускорения точек движущейся жидкости и ускорения, которые они имели бы, если бы течение не изменялось. Эти последние ускорения назовем *перманентными ускорениями*.

Ускорения течения по тем и другим ускорениям определяются по теореме: *полное ускорение есть геометрическая сумма ускорения течения и перманентного ускорения.*

§ 28. Займемся свойствами перманентного ускорения. Называя его проекции по осям x, y, z через g_1, g_2, g_3, имеем:

$$g_1 = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$g_2 = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (35)$$

$$g_3 = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z};$$

u, v, w — скорости по осям. Предполагая, что оси x, y, z касаются линий s_1, s_2, s_3, указанных в § 18, преобразуем найденные проекции помощью формул (25′) и (27):

$$g_1 = \Delta \cdot v_1 - \frac{{v_1}^2}{k_1}, \quad g_2 = \frac{{v_1}^2}{{R_1}^2}, \quad g_3 = \frac{{v_1}^2}{{R_1}^3}.$$

Отсюда следует, что перманентное ускорение слагается из центростремительного и тангенциального, причем *тангенциальное ускорение при несжимаемой жидкости равно отрицательному расширению струйки, умноженному на квадрат скорости.*

Будем рассматривать перманентные ускорения как скорости некоторого течения, и определим соответствующее этому течению изменение объема и вращение. По формулам (35) имеем:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}=v_1\frac{\delta_1\Delta}{\delta_1 s_1}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2-4\omega^2;$$

здесь δ_1 — изменение по линии тока s_1, а ω — скорость вращения частицы. Найденное выражение упрощается, когда предположим, что оси координат суть оси деформации

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}=v_1\frac{\delta_1\Delta}{\delta_1 s_1}+E_1^2+E_2^2+E_3^3-2\omega^2; \quad (36)$$

получаем теорему: *изменение объема течения, соответствующего перманентному ускорению, равно изменению сжатия течения при передвижении точки по траектории плюс сумма квадратов главных удлинений без двойного квадрата угловой скорости частицы.*

Найденная величина может быть выражена через удлинения ε_1, ε_2, ε_3 по линиям, не изменяющим направления. Пользуясь уравнением (14′), получаем:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}=v_1\frac{\delta_1\Delta}{\delta_1 s_1}+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^3. \quad (36')$$

Полагая $\Delta=0$, находим теорему [1]: *изменение объема для течения, соответствующего перманентным ускорениям при несжимаемой жидкости, равно сумме квадратов удлинений по линиям, не изменяющим своего направления.*

[1] Lipschitz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggeto ad attrazioni interne ed esterne, Annali di Matematica pura ed applicata, deretti da Brioschie e Cremona, serie II, t. VI.

Определяем вращение при течении, соответствующем перманентным ускорениям. Из формулы (35) имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)=v_1\frac{\delta_1 p}{\delta_1 s_1}-p\frac{\partial u}{\partial x}-q\frac{\partial u}{\partial y}-r\frac{\partial u}{\partial z}+\Delta\cdot p. \quad (36'')$$

Здесь p, q, r — проекции по осям вращения ω частицы. Эта формула вместе с двумя подобными оправдывает теорему: *вращение перманентного ускорения слагается геометрически из трех линий: из производной вращения частицы при передвижении ее центра, из скорости, которую бы имела точка* $(-p, -q, -r)$ *в относительном движении частицы* [1], *и из линии* $\Delta\cdot\omega$, *отложенной по оси вращения.* Понятно, что при $\omega=0$ перманентные ускорения дают невращаемое течение. Выведем еще одно заключение из формул (35). Предполагая, что слагаются два течения, соответствующие скоростям u, v, w и u', v', w', сравниваем ускорения слагаемых движений с ускорением сложного движения. Это дает теорему о сложении перманентных ускорений: *перманентное ускорение сложного движения слагается геометрически из четырех линий: из ускорения первого движения, из ускорения второго движения, из скорости, которую бы имела точка* (u, v, w) *в относительном движении частицы при втором течении, и скорости, которую бы имела точка* (u', v', w') *в относительном движении частицы при первом течении.* Приняв ряд положений движущейся траектории за линии токов одного течения, а пути, описываемые точками траектории, за линии токов другого течения, читатель без труда выведет из этой теоремы теорему Кориолиса.

§ 29. Вообразим теперь два течения, скорости которых геометрически равны ускорению течения и полному ускорению. Изменение объема первого течения равно производной от изменения объема жидкости в данной точке, поэтому изменение объема для полных ускорений равно изменению объема для перманентных ускорений плюс производная от изменения объема жидкости в данной точке. *Когда жидкость несжимаема, то изменение объема для полного ускорения равно*

[1] Координаты $-p$, $-q$, $-r$ взяты относительно центра частицы.

сумме квадратов удлинений частицы по не изменяющим направление линиям.

В большинстве вопросов гидродинамики полагают, что полные ускорения имеют потенциальную функцию F, вследствие чего вращение для ускорений течения равно по величине, но противоположно по направлению вращению перманентных ускорений. Так как вращение ускорений течения есть геометрическая производная вращения жидкости в данной точке пространства, то получаем по формуле (36″) следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{\theta} = \frac{1}{\theta}\left(p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} + r\frac{\partial u}{\partial z}\right). \qquad (36''')$$

Здесь d — полное изменение по времени, а θ — плотность жидкости. Эта формула вместе с двумя подобными показывает, что для каждой точки линия $\frac{\omega}{\theta}$, направленная по оси вращения, изменяется так, как радиус-вектор точки $\left(\frac{p}{\theta}, \frac{q}{\theta}, \frac{r}{\theta}\right)$ в предположении, что эта точка перемещается по закону относительного движения частицы. Отсюда следует известная теорема Гельмгольца [1]: *если полные ускорения имеют потенциальную функцию, то все точки, лежащие на линиях вихрей, остаются на этих линиях во все время движения, а напряжение вихревых струек не изменяется.*

Из теоремы Гельмгольца следует, что полная производная от обтечения по замкнутой жидкой линии равна нулю. Понятно, наоборот, что эта последняя теорема заключает в себе теорему Гельмгольца; приведем для нее самостоятельное доказательство. Вообразив жидкую линию s'_1 и линию, соответствующую ее бесконечно близкому положению, s''_1, проведем три семейства взаимно ортогональных поверхностей координат

$$s_1 s_2,\ s_2 s_3,\ s_3 s_1,$$

так чтобы линии s'_1 и s''_1 были координатными линиями семейства s_1 и соответствовали, кроме того, геодезическим ли-

[1] Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, § 2.

ниям в поверхностях $s_1 s_3$. Построив оси x, y, z, имеющие начало на линии s'_1 и касательные координатным линиям, определим по формулам (35) и (25″) g_1. Полагая в формулах (25″) все геодезические вращения равными нулю, находим:

$$g_1 = v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} + v_2 \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + v_3 \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} + \frac{v_2^2}{R_2^1} + \frac{v_3^2}{R_3^1}.$$

Но так как в нашем случае течение, слагающееся из течений v_2 и v_3, не дает скольжения, имеющего направлением x, а осью — перпендикуляр к скорости

$$\sqrt{v_2^2 + v_3^2}$$

по плоскости yz, то по теореме о сложении скольжений можно написать:

$$\left(\frac{v_3}{R_3^1} + \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1}\right) v_3 + \left(\frac{v_2}{R_2^1} + \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1}\right) v_2 = 0.$$

Отсюда

$$g_1 = v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} + v_2 \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + v_3 \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} - \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} v_2 - \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} v_3.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства ускорение течения по оси x, найдем формулу [1] для полного ускорения, слагающие которого назовем через J_1, J_2, J_3:

$$J_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} - \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} v_2 - \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} v_3 = \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} + v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{1}{2} \delta_1 \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{\delta s_1}.$$

Предполагая, что кривая s_1, совпадающая с s'_1, замкнута, умножаем найденное равенство на δs_1 и берем от обеих частей интеграл по всей кривой s_1:

$$\int J_1 \delta_1 s_1 = \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} + \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} v_1\right) \delta_1 s_1.$$

[1] По Томсону эта формула выведена Вальтоном в Cambridge Mathematical Journal, 1842.

Здесь первая часть может быть преобразована на основании равенства

$$\frac{\partial \delta_1 s_1}{\partial t} = \left(\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_2}{R_1^2} \right) \delta_1 s_1,$$

вытекающего из формулы (25″). Мы получаем:

$$\int J_1 \delta_1 s_1 = \int \frac{\partial (v_1 \delta_1 s_1)}{\partial t}. \qquad (36''''')$$

Из этого равенства вытекает теорема Томсона [1], из которой, как следствие, получается теорема Гельмгольца: *полная производная от обтечения скорости по замкнутой линии равна обтечению полного ускорения по этой линии.*

Перейдем теперь к вопросу о разложении течения, соответствующего полным ускорениям. Назовем через J_n и J_s слагающие полного ускорения по нормали и касательной, g_n и g_s — подобные слагающие для перманентного ускорения и

$$\frac{dv_n}{dt} \text{ и } \frac{dv_s}{dt}$$

—для ускорения течения и предположим, что полное ускорение имеет потенциальную функцию F.

Прилагая сказанное в главе 3 к полному ускорению, получим теорему Липшица [2]: *если жидкость несжимаема и полные ускорения имеют потенциальную функцию, то течение полного ускорения может быть разложено на три: на истечение относительно объема жидкости с коэфициентом*

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

---

[1] On vortex motion, p. 274.

[2] Эта теорема выражена Липшицем несколько иначе, так как он определяет не полные ускорения, но давление. При этом формула, помощью которой он определяет давление, одинаково приложима как для жидкости без трения, так и для жидкости с трением. „Determinazione della pressionne“ etc., p. 226, 1874. Бобылев тоже указывает способ определения давления жидкости с трением как потенциала масс, но ничего не говорит об условиях на поверхности. Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Mathematische Annalen von Neumann, Bd. VI, Heft. I, 1873.

на истечение относительно поверхности с коэфициентом J_n *и на вихревое движение относительно поверхности, оси которого перпендикулярны* J_s, *а коэфициенты равны* $J_s:2$.

Во всех вопросах о движении несжимаемой жидкости всегда бывает известно на поверхности J_n или значение функции F [1], а так как из этих двух величин только одна может быть произвольна, то вопрос об определении ускорений течения при движении жидкости вполне определенный. Давая течение свободной несжимаемой жидкости для данного момента и функцию F на поверхности для всякого времени, мы можем, как показал Преображенский [2], определить все движение, переходя от одного момента времени к другому. Отыскав функцию F, имеющую данное значение на поверхности и удовлетворяющую внутри жидкости условию

$$\Delta_2 F = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

найдем полные ускорения, а следовательно, и ускорения течения и потому будем знать течение для второго момента, по этому течению можем определить течение третьего момента, и т. д. до бесконечности.

Понятно, что вместо того, чтобы определять полное ускорение, мы можем прямо отыскивать ускорения течения, так как при вышеупомянутых условиях вращение этого течения равно и противоположно вращению перманентных ускорений,

---

[1] На свободной поверхности жидкости известно давление жидкости P и силовая функция U, поэтому известна и функция F:

$$F = U - \frac{1}{\theta} P,$$

а следовательно, величина и направление J_s. Если ограничивающая поверхность представляет стенки сосуда, то известно J_n:

$$J_n = \frac{dF}{dn} = \frac{v^2}{\rho_n},$$

где $\frac{1}{\rho_n}$ — проекция кривизны траектории на нормаль к поверхности.

[2] Преображенский пользуется подобным соображением для того, чтобы выразить давление жидкости бесконечной строкой. При этом способ его одинаково приложим, существует ли или не существует силовая функция. Отчеты Казанского съезда, 1873.

а изменение объема равно нулю. Что же касается условий на поверхности, то на стенках сосуда

$$\frac{dv_n}{dt} = 0,$$

а на свободной поверхности $\frac{dv_s}{dt}$ слагается геометрически из J_s и $(-g_s)$. Мы получим теорему: *при несжимаемой жидкости, для которой полное ускорение имеет потенциальную функцию, изменение течения во время dt происходит от прибавления к нему трех течений: вихревого течения относительно объема жидкости, оси которого суть линии вихрей перманентных ускорений, а коэфициенты равны*

$$-dt\sqrt{\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2},$$

вихревого движения относительно ограничивающей поверхности, оси которого перпендикулярны ускорениям течения, а коэфициенты равны $dt\,\frac{dv_s}{dt}:2$, *и истечения относительно свободной поверхности с коэфициентом* $dt\,\frac{dv_n}{dt}$.

§ 30. Мы займемся теперь перманентным движением несжимаемой жидкости и исследуем, какими условиями должны быть стеснены траектории и скорости этого движения, чтобы ускорения имели потенциальную функцию F. Начнем для простоты с плоского движения. Относя его к криволинейным координатам s_1, s_2, где s_1 — линии токов, а s_2 — ортогональные линии, пишем на основании формул (27) и (35) следующие равенства:

$$g_1 = \frac{v_1^2}{R_2^1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}, \quad \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} = \frac{v_1}{R_2^1}, \quad \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} = -2r + \frac{v_1}{R_1^2}. \tag{37}$$

Подставляя вместо g_1 и g_2 величины

$$g_1 = \frac{\delta_1 F}{\delta_1 s_1}, \quad g_2 = \frac{\delta_2 F}{\delta_2 s_2}$$

и исключая F помощью равенства

$$\delta_1\delta_2 F = \delta_2\delta_1 F,$$

получаем условие:

$$\delta_2 \frac{v_1^2 \delta_1 s_1}{R_2^1} - \delta_1 \frac{v_1^2 \delta_2 s_2}{R_1^2} = 0.$$

Чтобы обнаружить механическое значение этого условия, представляем вторые формулы (37) так:

$$\delta_1 \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{R_2^1}\delta_1 s_1, \quad \delta_2 \frac{v_1^2}{2} = -2rv_1\delta_2 s_2 + \frac{v_1^2}{R_1^2}\delta_2 s_2.$$

Помощью этих уравнений наше условие дает

$$\delta_1 (rv_1\delta_2 s_2) = 0.$$

Но так как вследствие несжимаемости жидкости

$$\delta_1 (v_1\delta_2 s_2) = 0,$$

то

$$\delta_1 r = 0.$$

Мы видим, что *вращение плоской частицы не изменяется по ее траектории*, что, впрочем, прямо следует из теоремы Гельмгольца.

Чтобы найти условие, стесняющее линии токов, берем от вторых формул (37) производные по $\delta_2 s_2$ и $\delta_1 s_1$:

$$\frac{\delta_2\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1\,\delta_2 s_2} + \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} = v_1 \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_2^1}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2},$$

$$\frac{\delta_1\delta_2 v_1}{\delta_1 s_1\delta_2 s_2} + \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1} = v_1 \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1^2}\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}.$$

Производя вычитание и заменяя $\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}$ его величиной из формулы (37), получаем:

$$\frac{2}{v_1}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1}\right) : \frac{1}{R_2^1} + \frac{2}{R_1^2}.$$

Мы имеем теперь две формулы для производных v_1:

$$\frac{\delta_2 \lg v_1}{\delta_2 s_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^{\,2}} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^{\,1}}\right) : \frac{1}{R_2^{\,1}} + \frac{1}{R_1^{\,2}};$$

$$\frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_1 s_1} = \frac{1}{R_2^{\,1}}. \tag{38}$$

Исключая из этих формул v_1 помощью равенства

$$\delta_1 \delta_2 \lg v_1 = \delta_2 \delta_1 \lg v_1,$$

найдем условие, стесняющее траектории плоского перманентного движения:

$$\frac{1}{2}\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^{\,2}} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^{\,1}}\right) : \frac{1}{R_2^{\,1}}\right] +$$

$$+ \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^{\,2}} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^{\,1}} = 0. \tag{38'}$$

Величина, стоящая в скобках, выражает, как видно из формулы (25″), двойное вращение течения, скорости которого по s_1 и s_2 суть

$$\frac{1}{R_2^{\,1}} \text{ и } \frac{1}{R_1^{\,2}}.$$

Мы видели, что для квадратной сетки это вращение равно нулю; следовательно, квадратная сетка удовлетворяет условию (38′). Так как по формулам (38) и (37)

$$r = -\frac{v_1}{4}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^{\,2}} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^{\,1}}\right) : \frac{1}{R_2^{\,1}},$$

то заключаем, что *всякий раз, как сетка траекторий есть квадратная, перманентное течение не имеет вращения.*

Когда данная сетка ($s_1 s_2$) удовлетворяет условию (38′), то по формулам (38) находим соответствующие ей скорости, зная скорость в одной точке; а найдя скорости, по формулам (37) определяем ускорения.

§ **31.** Займемся теперь обратным вопросом и постараемся по данным ускорениям, имеющим потенциальную функцию, отыскать течение жидкости. Вообразив сетку ускорений (фиг. 9)

(p_1p_2), назовем через θ угол, который образует траектория s_1 с направлением ускорения p_1, и постараемся определить изменение этого угла по p_1 и p_2. Мы будем обозначать изменения по линиям сетки ускорений через d_1 и d_2.

Величины $d_1\theta$ и $d_2\theta$ могут быть определены по теореме: сумма внешних углов бесконечно малого криволинейного треугольника плюс сумма углов смежности его сторон равна 2π.

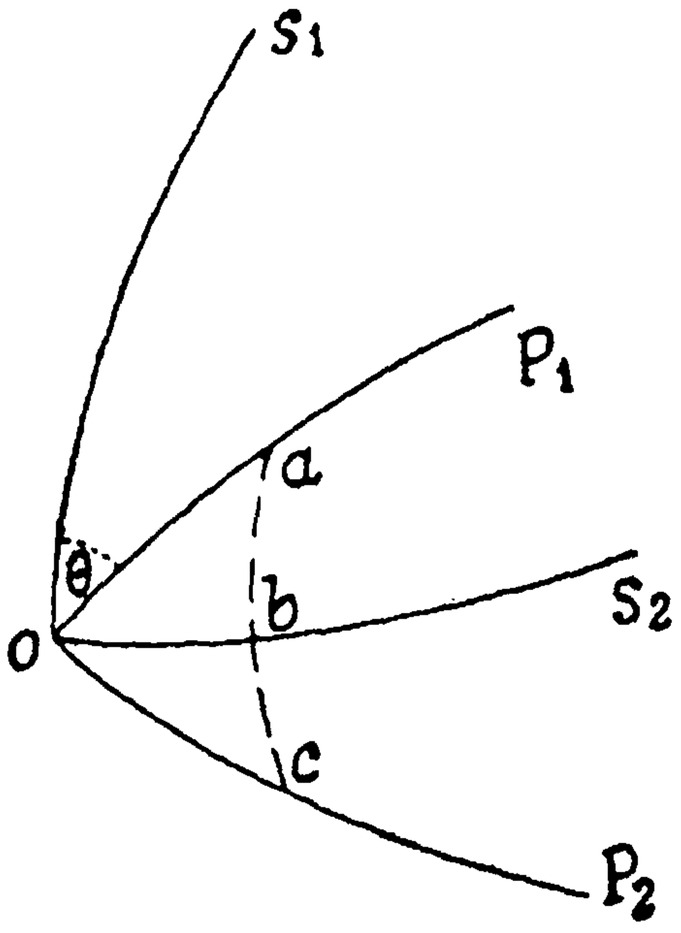
Прилагая эту теорему к треугольникам oab и ocb и пользуясь формулами (37), получаем:

$$d_1\theta = \frac{1}{r_1^2}\,d_1p_1, \quad d_2\theta = \left(-\frac{1}{r_2^1} + \frac{g}{v_1^2}\right) d_2p_2. \tag{39}$$

Здесь

$$\frac{1}{r_1^2} \text{ и } \frac{1}{r_2^1}$$

суть кривизны сетки ускорений, а g — полное ускорение. Первое уравнение (39) дает нам интересную теорему: *по линиям ускорения направление скорости не изменяется.* Эта теорема имеет место для перманентного ускорения всякого плоского течения несжимаемой жидкости.



Фиг. 9.

Чтобы определить изменения v_1 по p_1 и p_2, выводим из первой и второй формулы (37) и формулы (32′) уравнение:

$$\delta_1\left(\frac{g_1\delta_2s_2}{v_1^2}\right) + \delta_2\left(\frac{g_2\delta_1s_1}{v_1^2}\right) = 0,$$

которое показывает, что течение, направленное по линиям ускорения и равное ускорению g, разделенному на v_1^2, несжимаемо. Выражая это самое условие в координатах (p_1p_2), получаем:

$$d_1\left(\frac{gd_2p_2}{v_1^2}\right) = 0, \quad \frac{d_1 \lg v_1^2}{d_1p_1} = \frac{\Delta_2F}{g}.$$

Далее обратим внимание на формулу:

$$\frac{\delta_1 \lg v_1^2}{\delta_1s_1} = \frac{d_1 \lg v_1^2}{d_1p_1}\cos\theta - \frac{d_2 \lg v_1^2}{d_2p_2}\sin\theta,$$

в которой можно заменить первый и второй члены известными величинами

$$\frac{2g\cos\theta}{v_1^2} = \frac{\Delta_2 F}{g}\cos\theta - \frac{d_2 \lg v_1^2}{d_2 p_2}\sin\theta.$$

Мы получаем, таким образом, искомые изменения v_1:

$$\frac{d_1 \lg v_1^2}{d_1 p_1} = \frac{\Delta_2 F}{g},$$

$$\frac{d_2 \lg v_1^2}{d_2 p_2} = \operatorname{ctg}\theta\left[\frac{\Delta_2 F}{g} - \frac{2g}{v_1^2}\right]. \qquad (39')$$

Уравнения (39) и (39′) позволяют определить по направлению и величине ускорений соответствующее перманентное течение. Но для того, чтобы эти уравнения были совместны, необходимо выполнить такие условия:

$$d_1 d_2\theta = d_2 d_1\theta, \quad d_1 d_2 \lg v_1^2 = d_2 d_1 \lg v_1^2.$$

Первое условие удовлетворяется само собой, так как, подставляя в него $d_1\theta$ и $d_2\theta$ из (39), получаем на основании формулы (32′):

$$d_1\left(\frac{g d_2 p_2}{v_1^2}\right) = 0, \quad \frac{d_1 \lg v_1^2}{d_2 p_1} = \frac{\Delta_2 F}{g}.$$

Второе условие на основании формул (39) и (39′) дает:

$$\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{2g}{v_1^2} - \frac{\Delta_2 F}{g}\right) d_1 p_1 d_2 p_2 =$$

$$= \sin^2\theta\, d_2\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_1 p_1\right) - \sin\theta\cos\theta\, d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_2 p_2\right).$$

Делаем здесь некоторые преобразования:

$$\frac{d_2 \lg g}{d_2 p_2} = \frac{1}{r_1^2}, \quad \frac{d_1 \lg g}{d_1 p_1} = \frac{1}{r_2^1} + \frac{\Delta_2 F}{g},$$

$$\Delta_2 \lg g \cdot d_1 p_1 d_2 p_2 = d_2 \frac{d_1 p_1}{r_1^2} + d_1 \frac{d_2 p_2}{r_2^1} +$$

$$+ d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_2 p_2\right) = d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_2 p_2\right),$$

$$d_2 \frac{d_1 p_1}{r_2^1} - d_1 \frac{d_2 p_2}{r_1^2} = \left\{\frac{d_2 \frac{1}{r_2^1}}{d_2 p_2} - \frac{d_1 \frac{1}{r_1^2}}{d_1 p_1}\right\} d_1 p_1 d_2 p_2 = -d_2\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_1 p_1\right),$$

откуда

$$\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{2g}{v_1^2}-\frac{\Delta_2 F}{g}\right)=$$

$$\doteq -\sin^2\theta\left(\frac{d_2}{d_2p_2}\frac{1}{r_2^1}-\frac{d_1}{d_1\rho_1}\frac{1}{r_1^2}\right)-\cos\theta\sin\theta\Delta_2\lg g. \quad (39'')$$

Условие (39″) будет удовлетворено независимо от θ в двух случаях:

1. $$\frac{1}{r_1^2}=0,\quad \frac{d_2}{d_2p_2}\frac{1}{r_2^1}=0,\quad \Delta_2\lg g=0.$$

Линии $F=\text{const}$ будут круги.

2. $$\frac{2g}{r_1^2}-\frac{\Delta_2 F}{g}=0,\quad \frac{d_2\frac{1}{r_1^2}}{d_2p_2}-\frac{d_1\frac{1}{r_2^1}}{d_1p_1}=0,\quad \Delta_2\lg g=0.$$

Линии $F=\text{const}$ и линии, по которым направлены ускорения, дают квадратную сетку. F и g определяются из условия

$$\Delta_2\lg g=0.$$

Скорость дается уравнением

$$\frac{2}{v_1^2}=\frac{\Delta_2 F}{g^2},$$

которое удовлетворяет уравнению (39′), потому что

$$0=\frac{\partial_1}{\partial_1 p_1}\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_2p_2\right)=\left(g\frac{\partial_1}{\partial_1 p_1}\frac{\Delta_2 F}{g^2}+\frac{\Delta_2 F}{g^2}\Delta_2 F\right)d_2p_2,$$

$$\frac{\partial_1}{\partial_1 p_1}\lg\left(\frac{\Delta_2 F}{g^2}\right)=-\frac{\Delta_2 F}{g},$$

$$0=\frac{\partial_2}{\partial_2 p_2}\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_1p_1\right)=g\frac{\partial_2}{\partial_2 p_2}\frac{\Delta_2 F}{g^2}d_1p_1,\quad \frac{\partial_2}{\partial_2 p_2}\lg\frac{\Delta_2 F}{g^2}=0.$$

Далее, зная g и v_1, определяем θ из уравнений (39).

§ 32. Обращаемся к перманентному движению несжимаемой жидкости в пространстве, предполагая, что существует потенциал ускорений [1]. Проведя через данное семейство

[1] Мы будем называть свойства этого движения вообще свойствами перманентного движения несжимаемой жидкости.

линий s_1 два семейства поверхностей тока (фиг. 10) и покрыв их ортогональными линиями s_2 и s_3, предположим, что в точке o три линии s_1, s_2, s_3 пересекаются под прямыми углами.

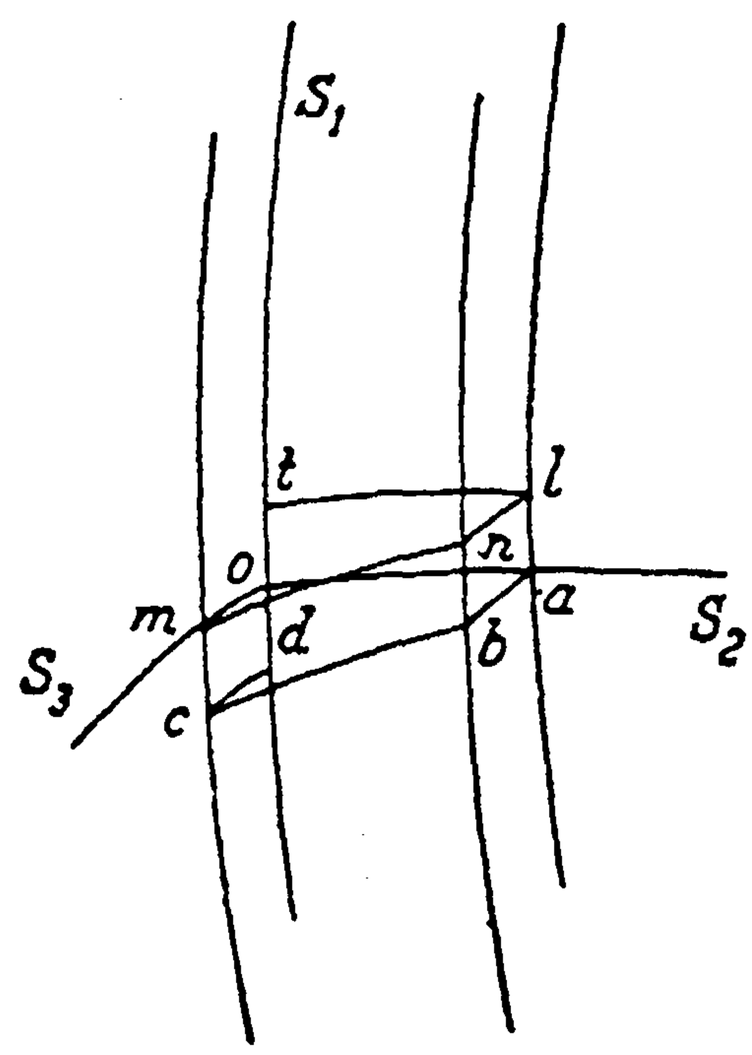
Будем называть через g_1, g_2, g_3, p, q, r проекции ускорения на s_1, s_2, s_3 и вращения частицы по линии s_1 и по перпендикулярам к поверхностям тока s_1s_3, s_2s_1. На основании формул (36) и (27) можем для всякой точки написать уравнения:

$$g_1 = -\frac{v_1^2}{k_1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}, \quad g_3 = \frac{v_1^3}{R_1^3},$$

$$-\frac{v_1}{k_1} = \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}, \quad p = \frac{2\pi}{H} v_1, \quad 2q = -\frac{v_1}{R_1^3} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3},$$

$$2r = \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}. \tag{40}$$

Первые формулы показывают, что течение, скорости которого слагаются геометрически из сжатия и кривизны линий тока (причем первое откладывается по касательной s_1, а вторая — по радиусу кривизны линии s_1), должно иметь ортогональную поверхность.



Фиг. 10.

Обозначая через Ω_1, Ω_2, Ω_3 вращения такого течения по линиям s_1 и по нормалям к поверхностям s_1s_3, s_1s_2, получим условие, которое в точке o выражается таким образом:

$$-\frac{1}{k_1}\Omega_1 + \frac{1}{R_1^2}\Omega_2 + \frac{1}{R_1^3}\Omega_3 = 0. \tag{41}$$

Для определения Ω_1 пользуемся формулой (29) и фиг. 10:

$$2\Omega f_1 = \int \frac{d\sigma}{R_1^\sigma} - \frac{1}{k_1}\,\mathrm{od}.$$

Интеграл распространяется на разомкнутую кривую oabcd, f — площадь сечения струйки, а $\frac{1}{R_1^\sigma}$ — проекция кривизны траектории на касательную к элементу $d\sigma$.

Полагая по (26)

$$\frac{1}{R_1^{\sigma}} = -\frac{\delta \lg \delta_1 s_1}{\delta \sigma}$$

и произведя интегрирование, получаем:

$$2\Omega_1 f = \lg(ot) - \lg(od) - \frac{1}{k_1} od.$$

Подставляем сюда величины, указанные в § 17:

$$od = \frac{4\pi}{H} f, \quad \frac{\delta_1 \lg f}{\delta_1 s_1} = \frac{1}{k_1},$$

что дает

$$2\Omega_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \frac{2\pi}{H}. \tag{41'}$$

Называя дробь $\frac{2\pi}{H}$ геометрическим вращением струйки, получаем теорему: *вращение течения, слагающегося из сжатия и кривизны струек, проложенное на ось струйки, равно производной геометрического вращения струйки по ее оси.*

Вращения Ω_2 и Ω_3 могут быть также определены по формуле (29), которая дает:

$$2\Omega_3 \delta_1 s_1 \delta_2 s_2 = \delta_1 \frac{\delta_2 s_2}{R_1^{2}} + \delta_2 \frac{\delta_1 s_1}{k_1},$$

$$2\Omega_2 \delta_1 s_1 \delta_3 s_3 = -\delta_1 \frac{\delta_3 s_3}{K_1^{3}} - \delta_3 \frac{\delta_1 s_1}{k_1};$$

$$2\Omega_3 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \frac{1}{R_1^{2}} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2} \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^{2} R_3^{1}},$$

$$2\Omega_2 = -\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \frac{1}{R_1^{3}} - \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3} \frac{1}{k_1} - \frac{1}{R_1^{3} R_2^{1}}. \tag{41''}$$

В случае существования поверхности $\rho = \text{const}$, ортогональной к линиям токов, эти формулы упрощаются. Называя через ρ функцию, постоянную на поверхности, через h_1 и $\Delta_2 \rho$ — ее первый и второй параметры, имеем:

$$\delta_1 (f h_1) = \delta_1 s_1 f \Delta_2 \rho,$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{\delta_1 \lg h_1}{\delta_1 s_1}\right)=\frac{\Delta_2\rho}{{h_1}^2},$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\,\frac{1}{{R_1}^2}+\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\,\frac{1}{k_1}+\frac{1}{R_1{}^2 R_3{}^1}\right)=\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\,\frac{\Delta_2\rho}{{h_1}^2}.$$

Отсюда

$$\frac{2\Omega_3}{h_1}=\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\,\frac{\Delta_2\rho}{{h_1}^2},\quad \frac{2\Omega_2}{h_1}=-\frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\,\frac{\Delta_2\rho}{{h_1}^2}. \tag{41'''}$$

Обращаемся к другим условиям, вытекающим из предположения, что g_1, g_2, g_3 — частные производные некоторой функции F. Первые формулы (40) могут быть на основании вторых формул представлены таким образом:

$$\delta_1 F=\delta_1\,\frac{{v_1}^2}{2},\quad \delta_2 F=\delta_2\,\frac{{v_1}^2}{2}+2rv_1\delta_2 s_2,$$

$$\delta_3 F=\delta_3\,\frac{{v_1}^2}{2}-2qv_1\delta_3 s_3. \tag{42}$$

Отсюда сейчас же получаем соотношения:

$$\delta_1(rv_1\delta_2 s_2)=0,\quad \delta_1(qv_1\delta_3 s_3)=0, \tag{42'}$$

которые обращаются в формулы, найденные Клебшем, когда назовем через h_2 и h_3 диференциальные параметры поверхностей $s_1 s_3$, $s_1 s_2$ и заметим, что вдоль линии s_1

$$\frac{v_1\delta_2 s_2}{h_3}=\text{const},\quad \frac{v_1\delta_3 s_3}{h_2}=\text{const}.$$

Получаем

$$\delta_1 r h_3=0,\quad \delta_1 q h_2=0. \tag{42''}$$

Для всякого семейства поверхностей токов несжимаемого перманентного течения вращение частицы около нормали к поверхности, умноженное на параметр поверхности, не изменяется по линии тока.

Переходим теперь к определению изменений скорости v_1 Умножаем в формуле (40) $2q$ на h_2, $2r$ на h_3 и берем от произведений δ_1, обращая внимание на формулы (42″):

$$0 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left(-\frac{v_1}{R_1^3}h_2 + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}h_2\right) = \frac{v_1 h_2}{R_1^3}\frac{1}{k_1} - v_1 h_2 \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^3} -$$

$$- h_2 v_1 \frac{1}{R_2^1}\frac{1}{R_1^3} + h_2 \frac{\delta_1\delta_3 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} h_2 \frac{1}{R_2^1} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} h_2 \frac{1}{R_3^1};$$

$$0 = \frac{v_1}{R_1^3}\frac{1}{k_1} - v_1 \frac{\delta_1}{\delta s_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{v_1}{R_2^1 R_1^3} - \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} + \frac{\delta_1\delta_3 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3}.$$

Исключаем $\delta_1\delta_3 v_1$, взяв δ_3 от четвертой формулы (40):

$$\frac{\delta_3\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3} = \frac{v_1}{k_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} - v_1 \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1}.$$

Подставляя, получаем:

$$\frac{2}{k_1}\frac{\delta_3 \lg v_1}{\delta_3 s_3} = -\frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} - \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^1 R_1^3} + \frac{2}{R_1^3}\frac{1}{k_1}.$$

Подставляя сюда величину Ω_2 из формулы (41″), находим формулу для изменения $\delta_3 \lg v_1$. Подобным же образом найдем $\delta_2 \lg v_1$, так что будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_1 s_1} &= -\frac{1}{k_1}, \\ \frac{\delta_2 \lg v_1}{\delta_2 s_2} &= -\Omega_3 : \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^2}, \\ \frac{\delta_3 \lg v_1}{\delta_3 s_3} &= \Omega_3 : \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^3}. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Пользуясь формулами (43), можно сделать ряд интересных заключений. Умножаем вторую формулу на $\frac{1}{R_1^3}$, третью — на $\frac{1}{R_1^2}$ и вычитаем первое произведение из второго. Это дает для точки o:

$$\frac{\delta_3 \lg v_1}{\delta_3 s_3}\cdot\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 \lg v_1}{\delta_2 s_2}\cdot\frac{1}{R_1^3} = \left(\frac{\Omega_2}{R_1^2} + \frac{\Omega_3}{R_1^3}\right) : \frac{1}{k_1} = \Omega_1.$$

Получаем теорему: *производная от $\lg v_1$ по элементу линии, перпендикулярной к линии тока и к радиусу кривизны,*

равна производной геометрического вращения по элементу линии тока, разделенной на кривизну этой линии.

Подставляя производные v_1 из двух последних формул (43) в две последние формулы (40), получаем:

$$2q = v_1\Omega_2 : \frac{1}{k_1}, \qquad 2r = v_1\Omega_3 : \frac{1}{k_1}. \tag{43'}$$

Эти уравнения дают теорему: *проекция вращения частицы на плоскость, перпендикулярную линии тока, геометрически равна проекции на ту же плоскость вращения течения, слагающегося из кривизн и сжатий струек, когда это вращение уменьшено в* $\frac{1}{v_1 k_1}$ *раз.*

Кроме того, из этих уравнений вместе с пятым уравнением (40) следует, что *по линиям токов, перпендикулярным изотермическим поверхностям, возможно только невращаемое перманентное течение несжимаемой жидкости.*

Когда даны линии токов перманентного течения, то соответствующая им скорость вполне определяется по формуле (43); но для того чтобы подобное определение было возможно, линии токов должны удовлетворять некоторому условию, состоящему в том, что *течение, имеющее по линиям* s_1, s_2, s_3 *скорости*

$$-\frac{1}{k_1}, \quad -\Omega_3 : \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^2}, \quad \Omega_2 : \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^3},$$

должно быть без вращения.

Исходя из формулы (29), по которой вращения упомянутого течения по нормалям к поверхностям s_1s_2, s_1s_3 суть нули, получаем:

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \lg\left(\Omega_3 : \frac{1}{k_1}\right) - \frac{2}{k_1} - \frac{1}{R_2^1} = 0,$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \lg\left(\Omega_2 : \frac{1}{k_1}\right) - \frac{2}{k_1} - \frac{1}{R_3^1} = 0. \tag{43''}$$

Вычитая эти уравнения, можно на основании формулы (26) написать равенство:

$$\delta_1 \lg \frac{\Omega_3 \delta_2 s_2}{\Omega_2 \delta_3 s_3} = 0,$$

которое показывает, что бесконечно малая прямая

$$\sqrt{(\delta_3 s_3)^2 + (\delta_2 s_2)^2 + 2\delta_3 s_3 \delta_2 s_2 \cos(s_3 s_2)},$$

направленная по вращению

$$\frac{1}{\sin(s_2 s_3)} \sqrt{(\Omega_2)^2 + (\Omega_3)^2 + 2\Omega_2 \Omega_3 \cos(s_3 s_2)},$$

передвигаясь по поверхности тока, все время остается направленной по этому вращению. Это замечание вместе с формулой (43′) дает теорему: *в перманентном движении несжимаемой жидкости линии вихрей лежат в поверхностях тока, в которых также лежат и линии вихрей течения, слагающегося из сжатия и кривизны струек.*

Понятно, что первая часть этой теоремы непосредственно следует из теоремы Гельмгольца.

Рассмотрим теперь результаты, имеющие место при существовании ортогональных поверхностей. Формула (41′) дает нам $\Omega = 0$. Заменяя эту величину, из формул (41), (43′), (44‴), (43) и (41″) получаем такие теоремы.

При существовании ортогональных поверхностей вращения течения, слагающегося из кривизн и сжатий струек, направлены по линиям вихря и перпендикулярны к линиям токов и их радиусам кривизны, вследствие чего поверхность тока, проходящая через линии вихрей, имеет линии токов геодезическими кривыми.

При существовании ортогональных поверхностей величины

$$h_1, \quad v_1, \quad \frac{\Delta_2 \rho}{{h_1}^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k_1}$$

не изменяются при передвижении по линиям, ортогональным к линиям тока и радиусам кривизны.

Если бы мы направили поверхность тока $s_1 s_2$ по поверхности вихрей перманентного течения, имеющего ортогональные поверхности, то нашли бы по формуле (26):

$$\delta_2 \delta_1 s_1 = 0.$$

Это показывает, что *на поверхности вихрей, совпадающей с поверхностью тока, отрезки линий тока между двумя*

ортогональными кривыми между собой равны. Так как вдоль всех кривых s_2 скорость v_1 будет постоянна, то получаем еще такой результат: *линии токов и ортогональные кривые на поверхности вихря, совпадающей с поверхностью тока, суть линии деформации элемента площади на этой поверхности.*

§ **33.** Мы сделаем еще одно небольшое исследование несжимаемого течения, при котором перманентные ускорения, рассматриваемые как скорости, не дают изменения объема, и ограничимся при этом только разбором плоского течения.

Относя движение к системе криволинейных координат s_1, s_2, соответствующих линиям токов и ортогональным линиям, выражаем слагаемые перманентного ускорения по этим линиям помощью формул (35):

$$g_1 = \frac{{v_1}^2}{{R_2}^1}, \qquad g_2 = \frac{{v_1}^2}{{R_1}^2}.$$

Так как g_1 и g_2, рассматриваемые как скорости, не дают изменения объема, то

$$\delta_1 \frac{{v_1}^2 \delta_2 s_2}{{R_2}^1} + \delta_2 \frac{{v_1}^2 \delta_1 s_1}{{R_1}^2} = 0.$$

Это равенство упрощается помощью формулы (32′):

$$\frac{1}{{R_2}^1} \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} + \frac{1}{{R_1}^2} \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} = 0. \tag{44}$$

Имея в виду, что во всяком несжимаемом плоском течении скорость сохраняет свое направление на линиях, направленных по перманентному ускорению, получаем из формулы (44) такую теорему: *если в данном плоском несжимаемом течении перманентные ускорения не имеют сжатия, то скорость течения сохраняет по направлению этих ускорений свою величину и направление.*

На основании последней из формул (27) и формулы (44) получаем производные от скорости:

$$\frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_1 s_1} = \frac{1}{{R_2}^1},$$

$$\frac{\delta_1 \lg v_1}{\delta_2 s_2} = -\left(\frac{1}{{R_2}^1}\right)^2 : \frac{1}{{R_1}^2}. \tag{44′}$$

Интегрирование этих уравнений дает v_2; но чтобы интеграция была возможна, необходимо выполнить условие

$$\delta_2\delta_1 \lg v_1 = \delta_1\delta_2 \lg v_1,$$

которое налагает стеснение на сетку линий токов и ортогональных кривых. Подставляя в это условие

$$\delta_1 \lg v_1 \quad \text{и} \quad \delta_2 \lg v_1$$

из формул (44′), получаем:

$$\delta_2 \frac{\delta_1 s_1}{R_1^{\,2}} + \delta_1 \left[\delta_2 s_2 \left(\frac{1}{R_2^{\,1}} \right)^2 : \frac{1}{R_1^{\,2}} \right] = 0,$$

что по формуле (32′) можно написать так:

$$\delta_1 \left[\delta_2 s_2 \frac{1}{R_2^{\,1}} \left(\frac{1}{R_2^{\,1}} : \frac{1}{R_1^{\,2}} - 1 \right) \right] = 0. \qquad (44'')$$

Это условие показывает, что *течение, совершающееся со скоростью*

$$\frac{1}{R_2^{\,1}} \left(\frac{1}{R_2^{\,1}} : \frac{1}{R_1^{\,2}} - 1 \right)$$

по линиям s_1, *должно быть несжимаемо.*

Так как по теореме Липшица

$$\varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} = 0,$$

а по условию несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,$$

то

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.$$

Это показывает, что в рассматриваемом движении *две системы не изменяющих направления линий сливаются в одну систему линий, направленных по линиям нулевого удлинения и делящих потому пополам углы между осями деформации.* Формула (14′) дает нам:

$$E_1 = -E_2 = \omega.$$

Если назовем через u_1 и u_2 скорости нашего течения по касательным к линиям деформации q_1 и q_2, то по формулам (25″) можем написать:

$$\frac{d_1 u_1}{d_1 q_1} = \frac{u_2}{\rho_1{}^2} + E_1, \quad \frac{d_2 u_1}{d_2 q_2} = -\frac{u_2}{\rho_2{}^1} - E_1,$$

$$\frac{d_1 u_2}{d_1 q_1} = -\frac{u_1}{\rho_1{}^2} + E_1, \quad \frac{d_2 u_2}{d_2 q_2} = \frac{u_1}{\rho_2{}^1} - E_1.$$

Исключая u_1 из двух первых формул помощью условия

$$d_2 d_1 u_1 = d_1 d_2 u_1$$

и пользуясь двумя вторыми формулами, получаем:

$$\frac{1}{\rho_1{}^2}\frac{d_2 u_2}{d_2 q_2} + \frac{1}{\rho_2{}^1}\frac{d_2 u_2}{d_1 q_1} + \frac{d_2 E_1}{d_2 q_2} + \frac{d_1 E_1}{d_1 q_1} - \frac{E_1}{\rho_1{}^2} - \frac{E_1}{\rho_2{}^1} = 0,$$

$$\frac{2}{\rho_1{}^2} = \frac{d_1 \lg E_1}{d_1 q_1} + \frac{d_2 \lg E_1}{d_2 q_2}.$$

Симметрия найденной формулы показывает, что *кривизны обеих линий деформации в каждой точке между собой равны.*

Положим теперь, что функция полного ускорения сохраняет одно и то же значение во всех точках линии, ограничивающей данную жидкую площадь, во все время движения, и постараемся определить движение этой площади, предполагая, что начальное ускорение ее обладает вышеизложенными свойствами. По способу Преображенского найдем, что ускорение течения равно и противоположно перманентному. Таким образом по прошествии бесконечно малого времени dt мы будем иметь течение, скорости v_1', v_2' которого по кривым s_1 и s_2 будут:

$$v_1' = v_1 - \frac{v_1{}^2}{R_2{}^1} dt, \quad v_2' = -\frac{v_1{}^2}{R_1{}^2} dt. \tag{45}$$

Это течение несжимаемо. Определяем его перманентные ускорения g_1', g_2' по формулам (35), (25″), (44) и (44″):

$$g_1' = g_1 - v_1\left(\frac{\delta_1}{\delta s_1}\,\frac{v_1^2}{R_2^1} - \frac{v_1^2}{(R_1^2)^2}\right)dt =$$

$$= g_1 + \left(v_1\,\frac{\delta_2}{\delta s_2}\,\frac{v_1^2}{R_1^2} - \frac{v_1^2}{(R_2^1)^2}\right)dt =$$

$$= g_1 + \left(v_1\,\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\,\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2}\,\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\right)d$$

$$g_2' = g_2 - v_1\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\,\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2 R_2^1}\right)dt =$$

$$= g_2 - \left(v_1\,\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\,\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2}\,\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\right)dt;$$

$$g_1' = g_1 + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\,\frac{v_1^3}{R_1^2}\,dt; \qquad g_2' = g_2 - \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\,\frac{v_1^3}{R_1^2}\,dt. \qquad (45')$$

Формулы (45′) показывают, что *перманентные ускорения нового течения будут тоже несжимаемы*. Отсюда следует, что и для второго момента полное ускорение будет равно нулю, и т. д. до бесконечности. Все точки нашей жидкой площади будут двигаться прямолинейно и равномерно [1].

„Кинематика жидкого тела“ — магистерская диссертация Н. Е. Жуковского была напечатана в первый раз в VIII томе Математического сборника. Содержание этой работы было сообщено Математическому обществу в сентябре и октябре 1876 г. и реферировано в Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. VIII, S. 610 и Bd. X, S. 638. Во второй раз эта работа была напечатана в юбилейном издании сочинений Н. Е. Жуковского, т. I.

Прим. ред.

---

[1] В своей статье „О свободном движении свободной капельной жидкости“, помещенной в Математическом сборнике т. VI, 1873 г., Ф. А. Слудский разбирает, между прочим, вопрос о прямолинейном и равномерном движении жидких частиц в предположении, что они друг на друга не давят. Условия, найденные им для начального течения, в применении к жидкой площади будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, находим следующие общие интегралы:

$$v = \varphi(u), \qquad x\varphi'(u) = y - \phi(u),$$

в которых φ и ϕ — произвольные функции. Первый интеграл показывает, что скорость сохраняет свою величину и направление на одной и той же кривой, что согласно со сказанным выше.

After an introduction outlining the history of development of kinematics of a variable medium, in chapter I is discussed the kinematics of an infinitesimal particle.

Making use of the fact that a moving particle originally spherically shaped is transformed into an ellipsoid, three mutually perpendicular diameters of the sphere becoming three conjugate diameters of the ellipsoid, prof. Joukowsky resolves the motion of the particle into the external motion of translation and of rotation, and the internal motion the strain—transforming the sphere into an ellipsoid whose axes (axes of the strain) maintain a constant direction. Prof. Joukowsky deduces the known formulae for the angular velocity of rotation of the particle (§ 4), and in order to study the internal motion introduces a surface of elongation

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_2 xy,$$

where

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\ 2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},\ 2\theta_3 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

the square of the radius-vector of which is inversaly proportiona to its elongation. The internal motion has a velocity petencial F. All radii-vectores having equal elongations lie on a cone of the second degree — a cone of elongation.

To obtain a clear idea of the internal motion of the particle prof. Joukowsky resolves it by several ways into simpler ones, viz:

1. Stretches perpendicular to any three planes conjugate with respect to the surface of elongation (in a particular case, to planes of strain).

2. Three stretches along the coordinate axes and three pure shears, of which the axes are directed along the coordinate axes.

3. A stretch of all the central radii-vectores, and a rotation a deviation — of these radii, on the assumption of their length remaining constant. The deviation of the radii reduces itself to shifting along the cones of deviation, from the axis of the least elongation to that of the maximum elongation (see the fig. 2).

Considering the vectors situated in one plane prof. Joukowsky resolves the deviation of the vector into: 1) a deviation normal to the plane and 2) a deviation in the plane. The first is reduced to a rotation of the plane about an axis in the plane (a characteristic of the plane and its normal); the second is defined by a hyperbola, the deviation in the plane being inversely proportional to a radius-vector of an equilateral hyperbola.

By adding to the internal motion of the particle a rotation there is obtained the complete motion of the particle about its centre. In this motion, to every vector maintaining a constant direction there corresponds a plane of constant direction, so that the elongation of the vector is equal to the elongation of the normal to the plane. In general there exist three vectors of constant direction and three planes of constant direction, forming the edges and sides of a trihedral angle disposed so that the lines of constant direction are opposite to the corresponding planes of constant direction. The case when all the three vectors are real, and that when two of them are imaginary of coincide, are discussed in detail.

To analyse the relation between the position of the axis of rotation and the position of the lines and planes of constant direction, prof. Joukowsky constructs a cone of the third order—a cone of constant directions — the locus of lines and of normals to planes maintaining their directions during the strain and the rotation of the particle, with different angular velocities, about a given axis. After a detailed investigation of the properties of this cone prof. Joukowsky applies it to the solution of various problems.

The beginning of chapter II deals with the motion of a current. In his analysis of the problem prof. Joukowsky draws through the central line of the current s_1, two surfaces of flow intersecting at right angles at the point under consideration, and on these surfaces draws the lines s_2, and s_3 ortogonal to the lines of flow. All the quantities determining the strain and the rotation of an element of the current prof. Joukowsky expresses in terms of geodesic curvature and of twist of the lines s_1, s_2, and s_3 on the surfaces s_1s_2, s_2s_3, s_3s_1 (§ 16, 17, 18), and of the pitch of twist, a quantity defined by formula on p. 80, and representing the pitch of screw-shaped lines of flow on the surface of the current. Thus are obtained formule 25, 25′ and 25″ forming the basis of the investigation of the relation between the variation of the particle and the curvature of the lines of flow.

The shape of the lines of flow in the vicinity of critical points is discussed in great detail. By the term critical points prof. Joukowsky denotes the points at which the velocity components (u, v, w) obtain infinite, zero, or indeterminate values. Various types of critical points at which the velocity components are zero are graphically represented on p. 95, 99 for two-dimensional flow, and on p. 101 for three dimensional flow

The and of chapter II is devoted to a discussion of the properties of the lines of flow in the absence of contraction and rotation. First is discussed in detail the motion of a thin lamina of fluid bounded between two infinitely near parallel surfaces. For such a flow a net of squares can be formed of lines of flow s_1, and of lines s_2 orthogonal to them, the velocity of flow being inversely proportional to the side of the corres ponding square. In connection with the net of squares named are considered other nets, viz, a net formed by the lines of flow of a motion, in which the velocities along s_1 and s_2 are proportional to geodesic curvatures of these lines, a net of strain lines, a net of zero elongation.

The condition necessary and sufficient to ensure the possibility of a flow in three dimentions without contraction and rotation is that the surfaces orthogonal to lines of flow, together with two sets of surfaces of flow, divide the space into infini-

tesimal parallelepipeds, of which the area of cross-section is in a constant ratio to the height. The velocity will be inversely proportional to the height, or to the area of cross-section.

The chapter ends with a discussion of certain properties of a three-dimensional non-vortical motion of an incompressible fluid, and of a related motion of which the velocities are determined by the curvature of the lines of flows of the given motion and of the contraction of its currents.

Chapter III is devoted to the deduction and interpretation of the theorem of Beltrami.

The last (IV) chapter deals with the properties of permanent accelerations of points of a moving fluid, determined by equations (35). At the beginning of the chapter are deduced certain general theorems on acceleration, among which there is found a generalization of the theorem of Coriolis. Next follows a discussion of the conditions that are to be imposed on the paths and the velocities of flow of an incompressible fluid in order that the accelerations have a potential function. First is treated the two-dimensional case (§ 30 and 31), next the three-dimensional. In connection with the flow in question is discussed the flow of which the velocities are determined by the curvature and the dilatation of currents of the flow considered.

The chapter ends with a brief disscussion of an incompressible flow (§ 33), in which the permanent acceleration regarded as velocities produce no change in volume.

ЛЕКЦИИ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Содержание моей вступительной лекции заключается в разъяснении роли, которую в настоящее время занимает гидродинамика в теоретической механике, и в изложении краткой программы предлагаемого мною курса.

Точные исследования древних ученых по теоретической механике относились только к статике. Динамика получила свое прочное основание только в конце XVII столетия в бессмертных сочинениях Галилея, Гюйгенса и Ньютона. Так как это время совпало с открытием анализа бесконечно-малых, то динамика в продолжение XVIII столетия сделала громадные успехи. В работах Эйлера, трех Бернулли, Гопиталя и других ученых она обогатилась исследованием различных частных вопросов о движении материальных точек и твердых тел, а в знаменитых сочинениях Даламбера и Лагранжа получила точное формулирование своих принципов и широкое аналитическое развитие своих методов исследования. Свое главное приложение динамика XVIII века нашла в астрономических задачах, — и как блестяще было это приложение! Ньютон открыл закон всемирного тяготения и исследовал движение центров планет; Эйлер подверг теоретическому исследованию движение луны и показал, каково должно бы быть влияние на движение планет сопротивляющейся среды; Даламбер исследовал вращение планет около центра их тяжести и объяснил явление прецессии; Лагранж в своем методе изменения произвольных постоянных положил основание исследованию пертурбационной функции; наконец,

в появившейся в 1799 г. небесной механике Лапласа приложение теоретической механики к астрономии достигло своего апогея.

Какая разница между этими великими завоеваниями человеческой мысли и теми скромными результатами, которые были достигнуты в изучении движения непрерывных систем — в изучении движения жидкого тела! От гидродинамики Даниила Бернулли у нас осталась только теорема его имени об установившемся движении и исследование удара струи о плоскость; гидродинамика Даламбера с его гипотезой шаровидных частичек вся отошла в Лету; Эйлер хотя и вывел уравнения гидродинамики как в их обыкновенной форме, так и в той, которая обыкновенно приписывается Лагранжу, но сам очень мало воспользовался ими и для решения задачи о сопротивлении среды прибегает к особой теории струй. Уравнениями Эйлера воспользовался Лагранж, доказав свою теорему о сохранении потенциала скоростей и исследовав теорию распространения волн на мелкой воде, но он не указал общего приема пользования уравнениями гидродинамики и не обнаружил даже, что эти уравнения вместе с поверхностными условиями вполне достаточны для решения задач, — положение, в котором впоследствии сомневались и некоторые авторы XVIII века. Чтобы не пропустить все, относящееся к гидродинамике XVIII века, мы должны еще упомянуть здесь задачу о равновесии вращающегося жидкого эллипсоида вращения, решенную Маклореном и Лапласом, которая, впрочем, относится скорее к гидростатике, нежели к гидродинамике.

При своем дальнейшем развитии в XIX веке динамика пошла главным образом по направлению, указанному Лагранжем. Появляется школа аналитиков, которая ставит себе задачей исследование общих уравнений движения с целью отыскания методов их интегрирования и установления новых принципов динамики. Сюда относятся глубокие исследования Пуассона, Гамильтона, Якоби, Лиувилля, Бура, Остроградского, Бертрана, которые подарили динамике много прекрасных теорем, но, надо сознаться, немного прибавили к старым интегралам XVIII столетия. Насколько мне из-

вестно, скобки Пуассона, теорема Лиувилля и способ последнего множителя Якоби исчерпывают все, относящееся к этой области. Но если эти исследования немного дали интегралов, то они дали нам возможность подбирать типы вполне интегрируемых задач, подобно тому как это сделал Лиувилль в своих исследованиях по движению точки по поверхности, что, разумеется, тоже имеет свою цену. Рядом со школой аналитиков, как бы в противовес ей, возникает другая школа — механиков-геометров, которые стремятся „изучать вещи сами в себе“. Я говорю о необычайно ясных и простых работах Пуансо, Кориолиса, Мебиуса и новейших английских ученых Сильвестра, Рута, Максвелла и Томсона; при этом я не могу не выразить своего удивления перед натуральной философией Томсона и Тета, в которой самые сложные динамические задачи представляются с такой уже конкретностью, как задача о движении твердого тела в „новой теории вращения[1]“.

Переходя теперь к динамике систем частного вида, мы замечаем, что XIX век подвинул еще далее задачи о движении твердого тела благодаря преимущественно вышеупомянутому геометрическому направлению, но в основном астрономическом вопросе, т. е. в задаче о движении материальных точек под действием взаимного тяготения, ученые встретились с непреодолимыми трудностями. Несмотря на всевозможные новые методы интеграции, предлагаемые школой аналитиков, несмотря на обширные труды первоклассных математиков — Якоби, Серре и других, задача о трех телах ушла недалеко от рассмотрения простых частных случаев. Такая же участь постигла и теорию возмущенного движения. Если разложение в ряд пертурбационной функции и удовлетворяет практике астронома, то для математика исследование нескольких лишних членов ряда, сходимость которого не доказана для вечного времени, немного прибавляет к убеждению в прочности солнечной системы. Я думаю, что с точки зрения теоретического интереса следует искать иных способов доказательства этой теоремы,

---

[1] Н. Е. Жуковский говорит о классическом сочинении M. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris, 1852. *Прим. ред.*

которые может быть заключаются в тех интегральных неравенствах, какие были разобраны Якоби и Слудским, или в том приеме, который обещает нам Пикар в своей статье „О кривых, определенных диференциальным уравнением".

Но если XIX век дал нам немного для решения основной астрономической задачи, то его можно приветствовать как век блистательного развития динамики непрерывного тела. Оставляя в стороне результаты исследования колебательного движения упругого тела, я перехожу теперь к изложению успехов в области гидродинамики.

Здесь как знамение времени нужно отметить появившееся в начале нашего века сочинение Фурье, которое вместе с дальнейшими работами Пуассона, Гаусса, Грина, Ламе и других создало анализ математической физики, тот самый анализ, который явился также и ключом разрешения гидродинамических вопросов. Этот анализ сейчас же получил свое применение в обширных работах Коши и Пуассона о распространении волн на глубокой воде, в работах, которые вместе с позабытыми сочинениями Остроградского, Ранкина, Буссинеˊ, Релея и других вполне закончили этот интересный отдел гидродинамики.

Упомянув здесь сочинение Коши „О распространении волн", мы должны указать, что в этом сочинении знаменитого математика, независимо от его специальной темы, заключается еще вывод трех новых интегралов уравнений гидродинамики, которые известны теперь под видом принципа сохранения напряжения вихря, а также доказательство определенности гидродинамической задачи, которое я в своей „Кинематике жидкого тела" ошибочно приписывал Липшицу и Преображенскому. Коши сделал также весьма обстоятельные кинематические исследования изменения частицы. Но я не знаю, почему все эти результаты были забыты, и прошло более 40 лет прежде, нежели интегралы Коши появились снова в знаменитом сочинении Гельмгольца „Об интегралах уравнений динамики", облеченные в форму изящной теории вихрей. Такова сила удачной интерпретации: после Гельмгольца принцип сохранения вихря сделался общим достоянием и вошел во все последующие сочинения по гидродина-

мике. Сочинение Гельмгольца породило целый ряд примыкающих к нему работ как по гидрокинематике, так и по гидродинамике. Останавливаясь только на последних, упомяну сочинения по движению вихрей В. Томсона, Гринхилля, Гребли и недавнюю работу Д. Томсона о движении вихревых колец.

Еще ранее появления сочинения Томсона о движении вихрей наметилась другая весьма интересная задача о движении твердого тела в беспредельной жидкости. Если не ошибаемся, Пуассон был первым, разобравшим теоретически вопрос о колебании сферы в беспредельной жидкости. Окончательно эта задача была для колебательного движения решена Стоксом, а для поступательного — Дирихле. Клебш и Грин перешли к более трудному случаю движения эллипсоида. Общий вопрос о движении тел в жидкости разъяснил Томсон в его „Движении вихрей“, и я полагаю, что это исследование — одно из самых обстоятельных, хотя его как будто заслонили дальнейшие работы Кирхгофа, Больцмана, Бьеркнеса и Неймана.

Чтобы закончить здесь очерк развития гидродинамики в нашем столетии, я должен еще указать, что задача о вращении жидкого эллипсоида, начатая Маклореном и Лапласом, получила свое дальнейшее развитие в исследованиях Якоби, Мейера, Дирихле и Римана, причем она в сочинениях последних ученых вполне отошла в область гидродинамики, так как ученые эти рассматривали движения деформирующегося эллипсоида.

Вот все, относящееся к гидродинамике идеальной жидкости. Но наряду с этим разрабатывалась и теория движения жидкости с трением. В работах Стокса, Стефана, Гельмгольца, Любека, Буссине и других ученых мы находим обстоятельное исследование разных видов движения жидкостей с трением. Правильное употребление приемов вместе с внимательным изучением могущих образоваться разрывов сплошности приводят нас к результатам, хорошо оправдываемым на опыте, так что мы можем совершенно смело здесь повторить слова Гельмгольца о том, что „можно считать уравнения гидродинамики за истинные законы, управляющие движением физической жидкости“.

Из всего сказанного мы можем теперь притти к заключению, что главная часть успешных динамических исследований нашего века выпала на долю гидродинамики. Если в старое время гидродинамика изгонялась из курсов теоретической механики как недостойная этого названия, то теперь, разумеется, она должна занять видное место, являясь одной из блестящих глав механики.

Я перейду теперь к краткому изложению программы предлагаемого мною курса. Но прежде я обращаюсь к вам, мои будущие слушатели, чтобы отстранить от вас сомнение в излишней обширности того материала, о котором я упомяну. Вот уже 15 лет, как я с интересом занимаюсь гидродинамикой, я много передумал и переработал разных вопросов за это время. Я старался отбросить все, что не заключало в себе успешных результатов, и изложить возможно простым образом те выводы, которые к ним приводили. Таким образом получился довольно сжатый курс, который я и хочу предложить вашему вниманию. Я расположил его на 10 двухчасовых лекций.

1. Деформация частицы жидкости. Разложение движения частицы на поступательное, вращательное и движение, имеющее потенциал скоростей (такое разложение возможно только единственным способом). Угловая скорость вращения частицы. Поверхность удлинения Коши как поверхность равного потенциала. Переход на главные оси деформации. Коэфициент кубического расширения. Девиация радиусов-векторов и скошение прямых углов.

2. О течении жидкости. Линии токов и струйки жидкости. Критические точки. Вихревая нить и напряжение вихря. Теоремы Грина и Стокса. Невихревое движение в односвязном и многосвязном пространстве. Определенность гидродинамических задач. Бесконечная жидкая масса, покоящаяся в бесконечности. Вращение частицы по жидкой струйке, шаг закручивания линий тока, случай существования ортогональных поверхностей.

3. Уравнения гидродинамики и их интегралы. Уравнения гидродинамики в форме Эйлера. Теоремы Бернулли и Лагранжа. Сообщение движения жидкости импульсом. Теорема

Томсона. Гельмгольцев принцип сохранения напряжения вихревой нити. Основные принципы динамики, отнесенные к жидкой массе. Определенность гидрокинетической задачи.

4. Установившееся движение. Необходимый и достаточный признак установившегося движения. Случаи движения без вращения: истечение из сосудов (Сан-Венан и Буссине), движение жидкого потока, омывающего неподвижные твердые тела. Исследования Ранкина. Построение свободной поверхности жидкости по методу Кирхгоффа. Разрыв сплошности. Случай установившегося движения с одинаковым вращением для всех частиц.

5. О движении твердого тела в беспредельной жидкости. Сумма моментов количеств движения в бесконечно длинном цилиндре и момент моментов количеств движения в сфере. Импульсивная сила и пара, их неизменяемость. Уравнения движения тела в беспредельной жидкости. Выражение импульсивной силы и пары как производные от живой силы, кажущееся изменение массы и моментов инерции. Задача Клебша. Примеры движения при постоянном относительном течении. Решение задачи о движении тела вращения в плоскости, проходящей через ось вращения (Кирхгофф, Körpcke, Schülke). Случай многозначного потенциала.

6. Кажущиеся взаимодействия тел, движущихся в беспредельной жидкости. Аналогия между скоростями точек жидкой массы, движущейся с потенциалом скоростей, и силами действия на единицу магнитной массы, магнитными массами и токами, расположенными на граничной поверхности. Теорема о гидродинамическом давлении на элемент поверхности движущегося тела (в обобщенном виде). Задача о кажущемся взаимодействии двух колец, погруженных в жидкую массу, движущуюся с многозначным потенциалом. Задача Биеркнеса о взаимодействии двух пульсирующих шаров. Кажущиеся взаимодействия двух быстро движущихся шаров. Влияние стенок и свободной поверхности на движущиеся тела, объяснение рикошета. Неустойчивость поверхности раздела.

7. Движение вихрей. Теорема Бельтрами о скоростях внутри жидкой массы. Вихревая жидкая масса, помещенная внутри жидкости, движущейся с потенциалом ско-

ростей. Движение бесконечно тонких прямолинейных вихрей. Принцип сохранения центра тяжести напряжений вихрей. Движение вихревых колец.

8. Движение жидкого эллипсоида. Сведение задачи о движении жидкого эллипсоида, вращающегося около одной из своих осей и деформирующегося, к задаче о движении материальной точки по поверхности $xyz = \text{const}$. Случай, рассмотренный Маклореном и Якоби. Случай вращающегося и деформирующегося эллипсоида вращения, найденный Дирихле. Теорема Дедекинда о взаимности обыкновенного и эллиптического вращения, приложение ее к получению из движения трехосного эллипсоида Якоби движения, найденного для трехосного эллипсоида Лежен-Дирихле.

9. Движение волн. Волны с потенциалом скоростей на безграничной поверхности, стоячие волны. Теорема Лагранжа о распространении волн на мелкой воде. Теория Коши и Пуассона. Волны с вращением частиц жидкости. Приложение теории Буссине к волнам Герстнера и Римана. О распространении волн в газовой массе.

10. Трение жидкости. Определение нормальных и тангенциальных слагающих трения жидкости. Уравнения гидродинамики трения, вторые вихри. Поверхностные условия. Движение жидкости в тонких трубках. Колебательные и вращательные движения шара. Теория Ранкина о сопротивлении судов. Роль трения жидкости в движении тел, движущихся в ней под действием внутренних сил.

Оканчивая теперь мое вступление, позволю себе, мои будущие слушатели, выразить надежду, что вы получите интерес и любовь к предмету, которым я сам занимался всегда с таким увлечением. Я думаю, что в настоящее время великих открытий в области аэронавигации и подводного плавания такая надежда не должна быть тщетной. Может быть, некоторым из вас и самим придется заняться гидродинамическими опытами, освещенными истинным пониманием теории, и внести свою лепту в сокровищницу науки.

ЛЕКЦИЯ I

О движении частицы жидкости

§ 1. Разложение движения частицы жидкости. Возьмем начало прямоугольных осей координат x, y, z в какой-нибудь точке o движущейся жидкой массы и назовем через u_0, v_0, w_0 компоненты относительно этих осей скорости точки o, а через u, v, w — подобные компоненты других точек жидкости. Допустим, что u, v, w суть непрерывные функции, которые для точек, весьма близких к o, могут быть разложены в строку Тейлора по x, y, z. Это условие непрерывности компонентов скорости позволяет, несмотря на все разнообразие движений жидкости, указать некоторые общие законы движения бесконечно малой части ее, прилегающей к точке o, подобно тому как условие непрерывности поверхности позволяет установить законы для радиусов кривизны нормальных сечений, проведенных через точку поверхности. Такую бесконечно малую часть жидкости мы назовем *частицей жидкости*, а точку жидкости o, лежащую внутри частицы, — ее центром. Разлагая u, v, w в строку Тейлора по бесконечно малым координатам x, y, z и отбрасывая бесконечно малые члены выше первого порядка, представим скорости точек частицы жидкости следующими линейными функциями координат:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z,$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}x + \frac{\partial v}{\partial y}y + \frac{\partial v}{\partial z}z,$$

$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x}x + \frac{\partial w}{\partial y}y + \frac{\partial w}{\partial z}z.$$

Преобразуем первую из этих формул:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)z +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)y,$$

и, сделав такие же преобразования с двумя другими, положим что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\sigma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\sigma_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sigma_3, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_3; \tag{3}$$

тогда найдем:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_2 z - \omega_3 y + \frac{\partial F}{\partial x}; \\ v &= v_0 + \omega_3 x - \omega_1 z + \frac{\partial F}{\partial y}; \\ w &= w_0 + \omega_1 y - \omega_2 x + \frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\sigma_1 yz + 2\sigma_2 zx + \sigma_3 xy). \tag{5}$$

Формулы (4) показывают нам, что *движение частицы жидкости может б ть разложено на три движения: поступательное со скоростью ее центра, вращательное относительно оси, проходящей через этот центр, и движение с потенциалом скоростей, при котором центр неподвижен* [1].

Величины ω_1, ω_2, ω_3, определяемые формулами (3), являются компонентами угловой скорости вращения частицы, отложен-

[1] Эта теорема дана Гельмгольцем, Journal von Borchardt, Bd. 55, 1858. „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, § 1.

ной на оси ее вращения так, что наблюдатель, смотрящий из конца полученного вектора в центр частицы, видит вращение по солнцу. Назовем этот вектор через ω и покажем, что формулы (3) дают для него одну и ту же величину и одно и то же направление, как бы ни были направлены оси координат.

Взяв другие оси ox', oy', oz', составляем соответствующие им компоненты скорости u', v', w', проектируя на ox', oy', oz' порознь скорости трех вышеупомянутых движений. Пусть ω_1', ω_2', ω_3' будут проекции ω на новые оси, u_0', v_0', w_0' — проекции на эти оси скорости поступательного движения, а F' — функция F, выраженная в новых координатах; тогда

$$u' = u_0' + \omega_2' z' - \omega_3' y' + \frac{\partial F'}{\partial x'},$$

$$v' = v_0' + \omega_3' x' - \omega_1' z' + \frac{\partial F'}{\partial y'},$$

$$w' = w_0' + \omega_1' y' - \omega_2' x' + \frac{\partial F'}{\partial z'}.$$

Взяв производную по y' от обеих частей последнего уравнения и производную по z' от обеих частей второго, вычитаем полученные уравнения:

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} = 2\omega_1'.$$

Это равенство вместе с двумя аналогичными доказывает желаемое.

Отбросив поступательное и вращательное движения частицы, мы будем заниматься исследованием третьего ее движения, которое назовем *деформацией*, так как только от него происходит изменение вида частицы. Деформация может быть рассматриваема как движение частицы относительно подвижных осей координат, которые имеют то же поступательное и вращательное движение, как и частица жидкости. Для простоты письма мы будем эти подвижные оси обозначать теми же

буквами x, y, z, так что скорости деформации выразятся формулами:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{6}$$

Имея потенциал скоростей, скорости деформации ортогональны к семейству поверхностей $F = \text{const}$ и обратно пропорциональны расстояниям dn между двумя бесконечно близкими поверхностями этого семейства, отличающимися на постоянное приращение dF.

§ 2. Коэфициенты линейного расширения радиусов-векторов частицы жидкости. Оси деформации. Проведем через центр частицы жидкости радиус-вектор r и, написав, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

возьмем от обеих частей этого равенства производную по времени:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}.$$

Подставляем сюда величины скоростей из формул (6) и делим на r^2:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{2F}{r^2}.$$

Найденная величина представляет *коэфициент линейного расширения* рассматриваемого радиуса, отнесенный к единице длины и времени. Мы будем обозначать его буквой ε и считать отрицательным, когда радиус укорачивается. Мы нашли, что

$$\varepsilon = \frac{2F}{r^2}; \tag{7}$$

подставляя сюда функцию F из формулы (5) и обозначая через α, β и γ углы r с осями координат, получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + 2\sigma_1 \cos\beta\cos\gamma + \\ + 2\sigma_2 \cos\gamma\cos\alpha + 2\sigma_3 \cos\alpha\cos\beta. \tag{8}$$

Если в формуле (8) положим $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то найдем, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1;$$

отсюда и из подобных соображений для осей oy и oz следует, что ε_1, ε_2, ε_3 суть коэфициенты линейного расширения радиусов, направленных по осям координат. Принимая в формуле (7), что r есть радиус-вектор точки поверхности $F = \text{const}$, найдем, что числитель второй части этой формулы будет постоянная величина, так что *коэфициенты линейного расширения для различных направлений радиуса-вектора частицы обратно пропорциональны квадратам радиусов-векторов поверхности* $F = \text{const}$ [1]. Будем называть эту поверхность *поверхностью расширения*; мы видим, что она является одной из поверхностей равного потенциала скоростей. Формула (5) показывает, что поверхность расширения есть эллипсоид или гиперболоид (в частном случае она может быть шар, цилиндр или две параллельные плоскости). Если она будет эллипсоидом, то вторая часть формулы (5) будет иметь постоянный знак при всяких действительных значениях x, y, z, — этот знак и надо приписать постоянному числителю в формуле (7); если же поверхность расширения есть гиперболоид, то вторая часть формулы (5) для точек, лежащих внутри асимптотического конуса, получает один знак, а для точек, лежащих вне его, — другой; мы должны в этом случае приписывать постоянному $2F$ в формуле (7) поочередно тот и другой знак и считать поверхностью расширения оба сопряженные гиперболоида, из которых один (для которого берем $+2F$) будет соответствовать расширению, а другой — сжатию; радиусы же, направленные по асимптотическому конусу, не будут изменять длины. Из формулы (7) следует, что радиусы, соответствующие наибольшему и наименьшему коэфициенту линейного расширения, будут направлены по главным осям поверхностей расширения, которые мы будем называть *осями деформации*. Так как скорости точек частицы при ее деформации направлены по нормалям семейства поверхностей $F = \text{const}$, то оси

[1] Cauchy, Exercices de Mathématiques, seconde année, p. 69, 1827.

деформации дают нам направление трех единственных радиусов-векторов частицы, которые при рассматриваемом движении остаются неподвижны. На основании этого свойства мы можем определить направление осей деформации из уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2F}{r^2} = \varepsilon,$$

$$\frac{\overline{\partial x}}{x} = \frac{\overline{\partial y}}{y} = \frac{\overline{\partial z}}{z} = \frac{2F}{r^2} = \varepsilon,$$

в которых ε по уравнению (7) есть коэфициент линейного расширения по направлению искомого неподвижного радиуса-вектора.

Из написанных уравнений на основании формулы (5) получаем:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon)\, x + \sigma_3 y + \sigma_2 z = 0;$$

$$\sigma_3 x + (\varepsilon_2 - \varepsilon)\, y + \sigma_1 z = 0;$$

$$\sigma_2 x + \sigma_1 y + (\varepsilon_3 - \varepsilon)\, z = 0.$$

Для того чтобы эти уравнения могли быть удовлетворены величинами x, y, z, не равными нулю, коэфициент линейного расширения ε должен удовлетворять условию:

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\varepsilon^2 + (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2)\,\varepsilon -$$

$$- (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \varepsilon_1\sigma_1^2 - \varepsilon_2\sigma_2^2 - \varepsilon_3\sigma_3^2) = 0. \qquad (9)$$

Определив отсюда ε, мы найдем из двух вышенаписанных уравнений отношение $x : y : z$, соответствующее искомому направлению. Уравнение (9), как известно, имеет три действительных корня, которые мы обозначим через $e_1 > e_2 > e_3$. Так как коэфициент при ε^2 равен сумме корней с обратным знаком, то

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3,$$

или по уравнению (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e_1 + e_2 + e_3. \qquad (10)$$

На основании сказанного выше e_1 будет представлять наибольший, а e_3 — наименьший коэфициент линейного расши-

рения радиусов-векторов частицы. Предположив, что оси ox, oy, oz направлены по осям деформации, представим формулы (5) и (6) в виде:

$$F = \frac{1}{2}(e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2), \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = e_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = e_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = e_3 z. \tag{12}$$

Формулы (12) показывают, что частица жидкости, имеющая форму бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, стороны которого параллельны осям деформации, остается прямоугольным параллелепипедом и по прошествии времени dt.

§ 3. Коэфициент кубического расширения. Предположим, что частица жидкости имеет форму бесконечно малого шарика, уравнение которого есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

и определим ее вид по прошествии времени dt. На основании уравнений (12) точка жидкой частицы, имеющая координаты x, y, z, будет по прошествии времени dt иметь координаты:

$$x_1 = x(1 + e_1 dt), \; y_1 = y(1 + e_2 dt), \; z_1 = z(1 + e_3 dt).$$

Определив отсюда x, y, z и подставив их в уравнение сферы, получим уравнение эллипсоида:

$$\frac{{x_1}^2}{a^2(1 + e_1 dt)^2} + \frac{{y_1}^2}{a^2(1 + e_2 dt)^2} + \frac{{z_1}^2}{a^2(1 + e_3 dt)^2} = 1.$$

Объем сферы будет

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

а объем эллипсоида

$$V' = \frac{4}{3}\pi a^3(1 + e_1 dt)(1 + e_2 dt)(1 + e_3 dt),$$

так что приращение объема будет

$$V' - V = \frac{4}{3}\pi a^3 (e_1 + e_2 + e_3)\, dt.$$

Разделяя это приращение на объем V и время dt, найдем коэфициент кубического расширения θ жидкой частицы, отнесенный к единице объема и времени:

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3$$

или по (10)

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{13}$$

где x, y, z — какие-нибудь прямоугольные оси координат. Если θ отрицательно, то частица жидкости сжимается.

§ 4. Девиация радиусов-векторов в плоскости. Скошение прямых углов. Проведем через центр частицы плоскость s, которую примем за плоскость координат xoy при составлении формулы (5). На этой плоскости возьмем точку, бесконечно близкую от центра, и определим ее место радиусом r и углом φ, который этот радиус образует с осью ox. Определим проекцию скорости этой точки на направление элемента дуги $r\,d\varphi$, проведенной из центра o радиусом r. Эта проекция будет

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

где в выражении F, данном формулой (5), надо подставить: $z = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Мы найдем, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = r\left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\varphi\sin\varphi + \sigma_3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right].$$

Разделяя эту скорость на r и делая некоторые преобразования, найдем угловую скорость σ рассматриваемого радиуса в плоскости s:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + \sigma_2\cos 2\varphi. \tag{14}$$

Мы назовем эту угловую скорость *девиацией* радиуса-вектора в плоскости s. Так как вторая часть формулы (14) имеет для φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ равные величины, но различные знаки, то *девиации в плоскости двух взаимно перпендикулярных радиусов равны и противоположны.* Вообразив в плоскости s

два радиуса r и r', образующие с осью ox углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, увидим на основании этой теоремы, что прямой угол между r и r' уменьшится во время dt на

$$2\sigma\, dt = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + 2\sigma_3 \cos 2\varphi]\, dt.$$

Разделив это уменьшение прямого угла на dt, получим величину, которую назовем *коэфициентом скошения*, отнесенным к единице времени:

$$2\sigma = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + 2\sigma_3 \cos 2\varphi.$$

Если примем здесь $\varphi = 0$, то найдем, что

$$2\sigma = 2\sigma_3.$$

На основании этого равенства и подобных равенств для плоскостей zox и zoy приходим к заключению, что $2\sigma_1$, $2\sigma_2$, $2\sigma_3$ суть коэфициенты скошения координатных углов. Если коэфициент скошения прямого угла отрицателен, то этот угол увеличивается.

Предположим для большей простоты, что оси ox и oy направляются по главным осям кривой второго порядка, по которой плоскость s пересекает поверхность расширения, и назовем эти оси *осями деформации плоскости s*. Формула (14) примет в этом предположении вид:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi. \qquad (15)$$

Это равенство показывает, что *радиусы-векторы плоскости* направленные *по ее осям деформации, не имеют девиации в плоскости; все же остальные радиусы движутся по направлению от оси деформации с меньшим коэфициентом расширения к оси деформации с бо́льшим коэфициентом расширения*. Кроме того, так как вторая часть формулы (15) имеет одну и ту же величину для φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$, то *два радиуса-вектора, лежащие на плоскости внутри прямого угла, образованного осями ее деформации и наклоненные к его сторонам под равными углами, имеют одинаковые девиации, на-*

правленные в одну сторону. Наибольшая по абсолютной величине девиация получается из формулы (15) при $\varphi = 45°$:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

так что прямой угол, стороны которого делят пополам прямые вертикальные углы, не имеющие скошения, имеет наибольшее скошение.

§ 5. Конусы девиаций. Скошение перпендикуляра к плоскости. Предположим, что в формулах (12) e_1, e_2, e_3 не изменяются со временем, и определим траектории точек частицы жидкости. Диференциальные уравнения этих траекторий будут

$$\frac{dx}{e_1 x} = \frac{dy}{e_2 y} = \frac{dz}{e_3 z};$$

интегрируя их, находим:

$$x^{\frac{1}{e_1}} = a y^{\frac{1}{e_2}} = b z^{\frac{1}{e_3}},$$

где a и b — произвольные постоянные.

Если приравняем каждую из частей вышенаписанного равенства некоторому переменному ξ и определим x, y, z, то найдем:

$$x = \xi^{e_1},\ y = a^{-e_2}\xi^{e_2},\ z = b^{-e_3}\xi^{e_3}.$$

Возведем эти уравнения в степени $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$, $e_1 - e_2$ и перемножим:

$$x^{e_2-e_3} y^{e_3-e_1} z^{e_1-e_2} = \text{const}. \tag{16}$$

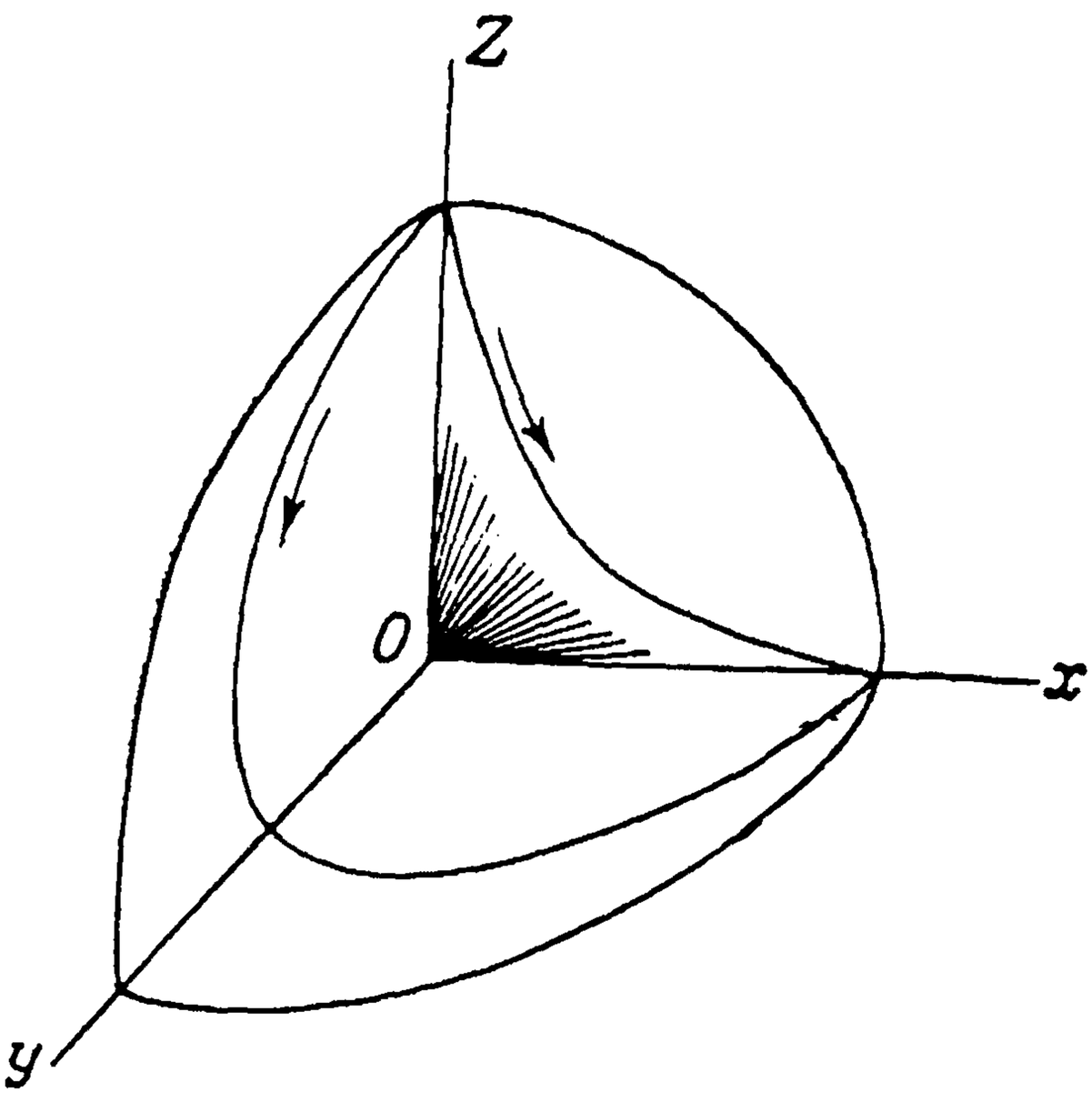
Так как первая часть этого уравнения нулевого измерения относительно координат, то оно представляет нам некоторую коническую поверхность, по которой перемещаются радиусы-векторы частицы при ее деформации. Если e_1, e_2, e_3 изменяются со временем, то можно сказать, что радиусы-векторы перемещаются по поверхности (16) только в продолжение времени dt. Будем называть найденное семейство поверхностей *конусами девиаций* [1]. Принимая попрежнему $e_1 > e_2 > e_3$, увидим, что все

[1] Свойства конусов девиаций изложены более подробно в нашем сочинении „Кинематика жидкого тела“, § 8.

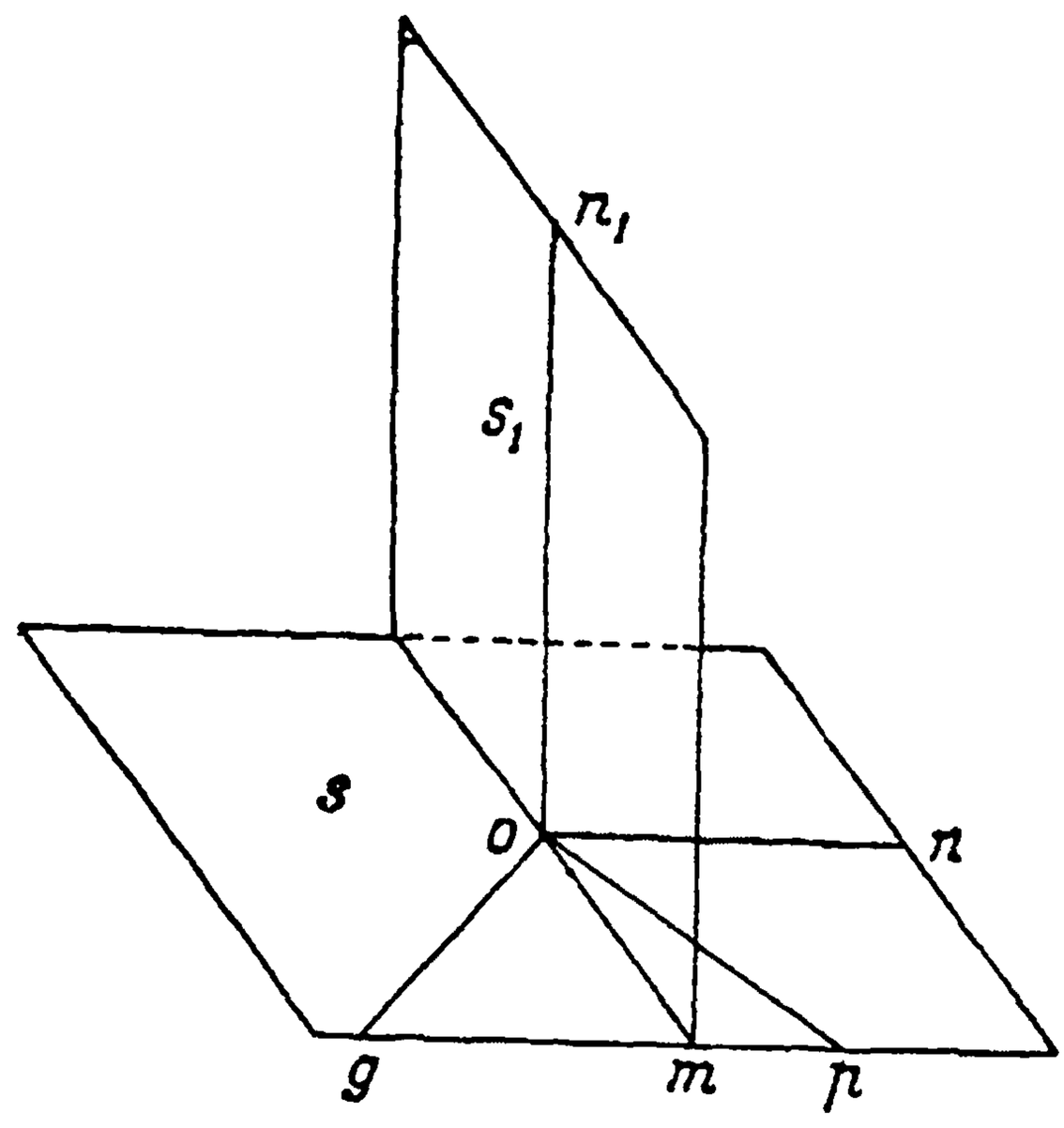
конусы девиаций проходят через оси ox и oz (фиг. 1), потому что, представив уравнение (16) в виде:

$$x^{e_2-e_3} z^{e_1-e_2} = \text{const}\, y^{e_1-e_3},$$

мы удовлетворим ему положением $z = 0$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 0$. Чтобы определить скорость, с которой какой-нибудь радиус частицы r перемещается по конусу девиаций, проведем через



Фиг. 1.



Фиг. 2.

этот радиус плоскость s, прикасающуюся к упомянутому конусу. Если назовем через φ угол между r и одной из осей деформации плоскости s, то искомая нами скорость, отнесенная к единице длины радиуса, выразится формулой (15). Определенную таким образом величину σ мы будем называть *девиацией радиуса-вектора в пространстве*. Из формулы (15) следует, что радиусы-векторы движутся по конусу девиаций, направляясь от радиуса-вектора с наименьшим коэфициентом расширения к радиусу-вектору с наибольшим коэфициентом расширения, как это представлено стрелками на фиг. 1. Так как в рассматриваемом случае вся девиация радиуса r лежит в плоскости s, то все точки частицы жидкости, находящиеся в плоскости s, будут лежать по прошествии времени dt в некоторой плоскости s_1, которая пересечет плоскость s по радиусу r. В этом смысле радиус r называется *характеристикой плоскости* s. Предположив, что проекции радиуса r на оси

координат суть x, y, z, найдем из уравнения (16), что косинусы углов нормали плоскости s с осями координат находятся в отношении

$$(e_2 - e_3)\,yz : (e_3 - e_1)\,zx : (e_1 - e_2)\,xy\,.$$

Если теперь примем, наоборот, радиус $r_1 = on_1$ (фиг. 2), представляющий нормаль плоскости s, за характеристику некоторой плоскости s_1 и будем искать нормаль on этой плоскости, то найдем для ее направления отношения косинусов:

$$(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\,x^2yz : (e_3 - e_1)(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\,xy^2z :$$
$$: (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\,xyz^2,$$

т. е.

$$x : y : z.$$

Таким образом *нормаль и характеристика плоскости представляют собой две взаимные прямые линии.* Движение плоскости s, образованной точками частицы, приводится к ее вращению около характеристики on с угловой скоростью, равной девиации радиуса om в плоскости s_1. По первой теореме § 4 эта девиация равна и противоположна девиации радиуса on_1 в той же плоскости; но так как девиация радиуса on_1 в плоскости s_1 представляет всю его девиацию в пространстве, то *перемещение нормали плоскости s от движения этой плоскости равно и прямо противоположно перемещению радиуса частицы жидкости, направленного по этой нормали.*

Из этой теоремы следует, что проекция перемещенного радиуса-вектора on_1 на перемещенную плоскость s (перемещение совершается во время dt) пойдет по направлению om, так что из всех прямых углов, образованных радиусом on_1 и радиусом, лежащим в плоскости s, угол n_1om имеет наибольший по абсолютной величине коэфициент скошения.

Назовем его *коэфициентом скошения перпендикуляра к плоскости.* Этот коэфициент равен двойной девиации радиуса on_1 в пространстве; коэфициент же скошения всякого другого прямого угла n_1op равен двойной проекции этой девиации на радиус op. Отсюда следует, что, *отложив на радиусах op и oq величины скошений прямых углов pon*$_1$ и *qon*$_1$

и построив на плоскости s вектор, имеющий эти две проекции на радиусах op и oq, мы найдем направление ot и коэфициент скошения перпендикуляра op_1 к плоскости s.

§ 6. О радиусах и плоскостях частицы жидкости, не изменяющих своего направления. Прибавляя к скоростям, данным формулами (12), скорости вращательного движения частицы, мы получим скорости ее точек относительно осей, движущихся поступательно со скоростью ее центра. Отношение проекций $x : y : z$ радиуса r, который в этом движении остается неподвижен в продолжение времени dt, найдем из уравнений:

$$\frac{e_1 x + \omega_2 z - \omega_3 y}{x} = \frac{e_2 y + \omega_3 x - \omega_1 z}{y} =$$

$$= \frac{e_3 z + \omega_1 y - \omega_2 x}{z} = \frac{2F}{r^2} = \varepsilon,$$

в которых ε — коэфициент линейного расширения по направлению искомого радиуса. Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned} (e_1 - \varepsilon)\, x - \omega_3 y + \omega_2 z &= 0, \\ \omega_3 x + (e_2 - \varepsilon)\, y - \omega_1 z &= 0, \\ -\omega_2 x + \omega_1 y + (e_3 - \varepsilon)\, z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Для того чтобы эти уравнения удовлетворялись величинами x, y, z, не равными нулю, необходимо, чтобы коэфициент линейного расширения обращал в нуль их определитель, т. е.

$$(\varepsilon - e_1)(\varepsilon - e_2)(\varepsilon - e_3) + \omega_1^2 (\varepsilon - e_1) + \omega_2^2 (\varepsilon - e_2) +$$

$$+ \omega_3^2 (\varepsilon - e_3) = 0. \qquad (18)$$

Так как это уравнение имеет по крайней мере один действительный корень, то в рассматриваемом движении существует по крайней мере один неподвижный радиус-вектор r. Его направление найдется из формул (17), внося в них найденную величину ε.

Переходя затем к отысканию неподвижной плоскости s, проходящей через центр частицы, заметим, что по теореме § 5 о движении нормали плоскости следует, что неподвижный радиус частицы при изменении ее вращения в прямо противоположное дает направление нормали неподвижной плоскости.

Мы найдем поэтому направление нормали неподвижной плоскости из тех же уравнений (17), изменив в них знаки при ω_1, ω_2, ω_3. Но так как от этого уравнение (18) не изменяется, то найденный нами коэфициент линейного расширения для неподвижного радиуса будет также коэфициентом линейного расширения по направлению нормали неподвижной плоскости и послужит для ее определения.

Когда неподвижный радиус и соответствующая ему (с тем же ε) неподвижная плоскость будут найдены, то разыскание других неподвижных радиусов и плоскостей легко производится из рассмотрения девиаций радиусов частицы жидкости в неподвижной плоскости s. Называя через ω_3 проекцию ω на нормаль к плоскости s, найдем на основании сказанного в конце § 4, что при

$$\omega_3^2 \leqq \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

в плоскости s будут существовать два различных или два слившихся неподвижных радиуса, которые с осями деформации плоскости s образуют равные углы. Обозначая через c_1 и c_2 коэфициенты расширения этих радиусов, найдем:

$$c_1 = \varepsilon_1 \cos^2\varphi + \varepsilon_2 \sin^2\varphi,$$

$$c_2 = \varepsilon_1 \sin^2\varphi + \varepsilon_2 \cos^2\varphi,$$

так что

$$c_1 + c_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{19}$$

Если же

$$\omega_3^2 > \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2,$$

то неподвижных радиусов в плоскости s не существует. В первом случае мы будем иметь три неподвижные радиуса, через которые пройдут три неподвижные плоскости, причем в частном случае два радиуса и две плоскости могут между собой слиться; во втором же случае будет существовать только один неподвижный радиус и одна неподвижная плоскость. Останавливаясь на предположении о трех неподвижных радиусах, примем их за косоугольные оси координат $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$. Компо-

ненты скорости точки частицы в рассматриваемом движении относительно этих осей должны иметь вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = c_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = c_2\eta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = c_3\zeta,$$

потому что первый компонент должен быть равен нулю для всех точек плоскости $\eta o \zeta$ и т. д. Коэфициенты c_1, c_2, c_3 в этих формулах суть, очевидно, коэфициенты линейных расширений неподвижных радиусов. Поступая, как в § 5, найдем, что в рассматриваемом движении скорости точек частицы будут направлены по кривым

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}} = b\zeta^{\frac{1}{c_3}}, \tag{20}$$

а перемещения радиусов-векторов во время dt будут совершаться по конусам:

$$\xi^{c_2-c_3}\eta^{c_3-c_1}\zeta^{c_1-c_2} = \text{const.}$$

В случае существования только одного неподвижного радиуса-вектора скорости точек частицы в неподвижной плоскости s относительно осей деформации этой плоскости будут:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \omega_3 y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 y + \omega_3 x;$$

поэтому диференциальное уравнение семейства кривых, дающих направление этих скоростей, представится в виде

$$\frac{dx}{\varepsilon_1 x - \omega_3 y} = \frac{dy}{\varepsilon_2 y + \omega_3 x}$$

или

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(y\,dx + x\,dy) - 2\omega_3(x\,dx + y\,dy) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(y\,dx - x\,dy).$$

Это уравнение по разделении на интегрирующий делитель

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,xy - \omega_3(x^2 + y^2)$$

и по интеграции дает:

$$\lg\{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,xy - \omega_3(x^2+y^2)\} =$$

$$= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{y}{x} - \omega_3\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} + \text{const.} \qquad (21)$$

Переходя от рассматриваемого относительного движения частицы к ее абсолютному движению, мы должны будем еще прибавить поступательное движение; тогда найдем, что неподвижные радиусы-векторы и плоскости обратятся в радиусы-векторы и плоскости, не изменяющие своего направления [1].

§ 7. Изменение объема частицы жидкости за конечный промежуток времени. До сих пор мы рассматривали движение частицы жидкости в продолжение бесконечно малого времени dt; в некоторых вопросах гидродинамики полезно знать изменение частицы за конечный промежуток времени. Здесь мы встречаемся с подобным же исследованием линейных формул, как в § 1. Если примем попрежнему, что центр частицы жидкости в начальный момент времени лежит в начале неподвижных прямоугольных координат, а по прошествии времени t занимает положение (x_0, y_0, z_0), и назовем через a, b, c — начальные, а через x, y, z — конечные координаты точек жидкости, то найдем для точек частицы:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{\partial x}{\partial t}\,a + \frac{\partial x}{\partial b}\,b + \frac{\partial x}{\partial c}\,c, \\ y - y_0 &= \frac{\partial y}{\partial a}\,a + \frac{\partial y}{\partial b}\,b + \frac{\partial y}{\partial c}\,c, \\ z - z_0 &= \frac{\partial z}{\partial a}\,a + \frac{\partial z}{\partial b}\,b + \frac{\partial z}{\partial c}\,c. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Пусть в начале времени частица имела форму треугольной пирамиды, ребра которой направлены по осям координат

[1] Вопрос о радиусах и плоскостях, не изменяющих своего направления, был разъяснен Бертраном в его „Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide", Comptes Rendus, t. LXVI. Более подробные исследования можно найти в сочинении автора „Кинематика жидкого тела", §§ 10—13.

и равны соответственно a, b и c. Во время t концы этих ребер будут иметь координаты x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', для которых по формуле (22) получаем:

$$x - x_0 = \frac{\partial x}{\partial a} a, \quad x' - x_0 = \frac{\partial x}{\partial b} b, \quad x'' - x_0 = \frac{\partial x}{\partial c} c,$$

$$y - y_0 = \frac{\partial y}{\partial a} a, \quad y' - y_0 = \frac{\partial y}{\partial b} b, \quad y'' - y_0 = \frac{\partial y}{\partial c} c,$$

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial a} a, \quad z' - z_0 = \frac{\partial z}{\partial b} b, \quad z'' - z_0 = \frac{\partial z}{\partial c} c.$$

Первоначальный объем треугольной пирамиды V будет

$$V = \frac{1}{6} abc,$$

а объем ее V' во время t выразится с помощью определителя:

$$V' = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a\frac{\partial x}{\partial a} & b\frac{\partial x}{\partial b} & c\frac{\partial x}{\partial c} \\ a\frac{\partial y}{\partial a} & b\frac{\partial y}{\partial b} & c\frac{\partial y}{\partial c} \\ a\frac{\partial z}{\partial a} & b\frac{\partial z}{\partial b} & c\frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{abc}{6} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, обозначая здесь через θ коэфициент кубического расширения жидкости, отнесенный к единице объема и времени t, получим:

$$\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} - 1. \qquad (23)$$

ЛЕКЦИЯ II

Исследование течения жидкости

§ 8. Линии и поверхности токов. Теорема Клебша и ее приложения. Мы назовем *течением жидкости* движение жидкой массы в данный момент времени, определенное для каждой точки рассматриваемого пространства величиной и направлением скорости V, т. е. ее компонентами u, v, w на некоторых прямоугольных осях. Мы будем считать u, v, w непрерывными функциями координат; если же внутри жидкой массы существует *поверхность раздела*, при переходе через которую скорость V изменяется скачком, то мы будем в отдельности рассматривать ту и другую часть жидкой массы, прилегающую к поверхности раздела. Понятно, что при этом в случае несжимаемой жидкости необходимо, чтобы нормальные составляющие скорости с обеих сторон поверхности раздела были одинаковы, в случае же газообразного тела эти скорости должны быть обратно пропорциональны плотностям соприкоснувшихся масс. Семейство линий, касательные которых дают направление скоростей течения жидкости, мы будем называть *линиями тока*. Если течение жидкости не изменяется со временем, т. е. жидкость имеет *установившееся движение*, то линии токов суть траектории точек жидкости. Диференциальные уравнения линий токов суть

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{1}$$

Всякий интеграл этого уравнения

$$f(x, y, z) = c$$

представляет поверхность, проходящую через линии токов. Мы назовем такую поверхность *поверхностью тока*. Семей-

ство линий тока будет найдено, когда определим два интеграла уравнения (1), т. е. найдем два семейства поверхностей тока. Вообразив внутри жидкой массы бесконечно малую замкнутую линию и проведя через все ее точки линии токов, получим поверхность тока, имеющую форму бесконечно тонкой трубки. Вся жидкая масса может быть с помощью таких трубок разбита на бесконечно тонкие нити, которые мы будем называть *струйками жидкости*. Обозначая через dq площадь перпендикулярного сечения струйки жидкости, найдем, что количество жидкости, протекающей через это сечение, отнесенное к единице времени, будет Vdq; для всякого же косого сечения, площадь которого есть $d\sigma$, оно выразится через $V\cos\lambda\, d\sigma$, где λ — угол V с нормалью к $d\sigma$.

В случае несжимаемой жидкости, скорости которой на основании уравнения (13) первой лекции должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2}$$

вдоль всей жидкой струйки Vdq есть постоянная величина. Условившись строить все струйки жидкости с одной и той же величиной Vdq, напишем, что количество жидкости, протекающее через поверхность Σ, ограничивающую рассматриваемую массу, равно нулю:

$$\int\int V\cos\lambda\, d\sigma=0, \tag{3}$$

где направление нормалей элементов $d\sigma$ берем внутрь жидкой массы [1]. Так как для всех элементов $d\sigma$, вырезанных на поверхности Σ струйками жидкости, $V\cos\lambda\, d\sigma$ одинаково по абсолютной величине, но имеет знак $(+)$ или $(-)$, смотря по тому, входит ли струйка внутрь рассматриваемого пространства или выходит из него, то уравнение (3) показывает, что для всей поверхности Σ число тех и других концов струек будет одинаково. Таким образом ни одна струйка не может оканчиваться внутри жидкой массы, и все струйки будут или лежать своими концами на поверхности Σ, или будут замкнуты.

---

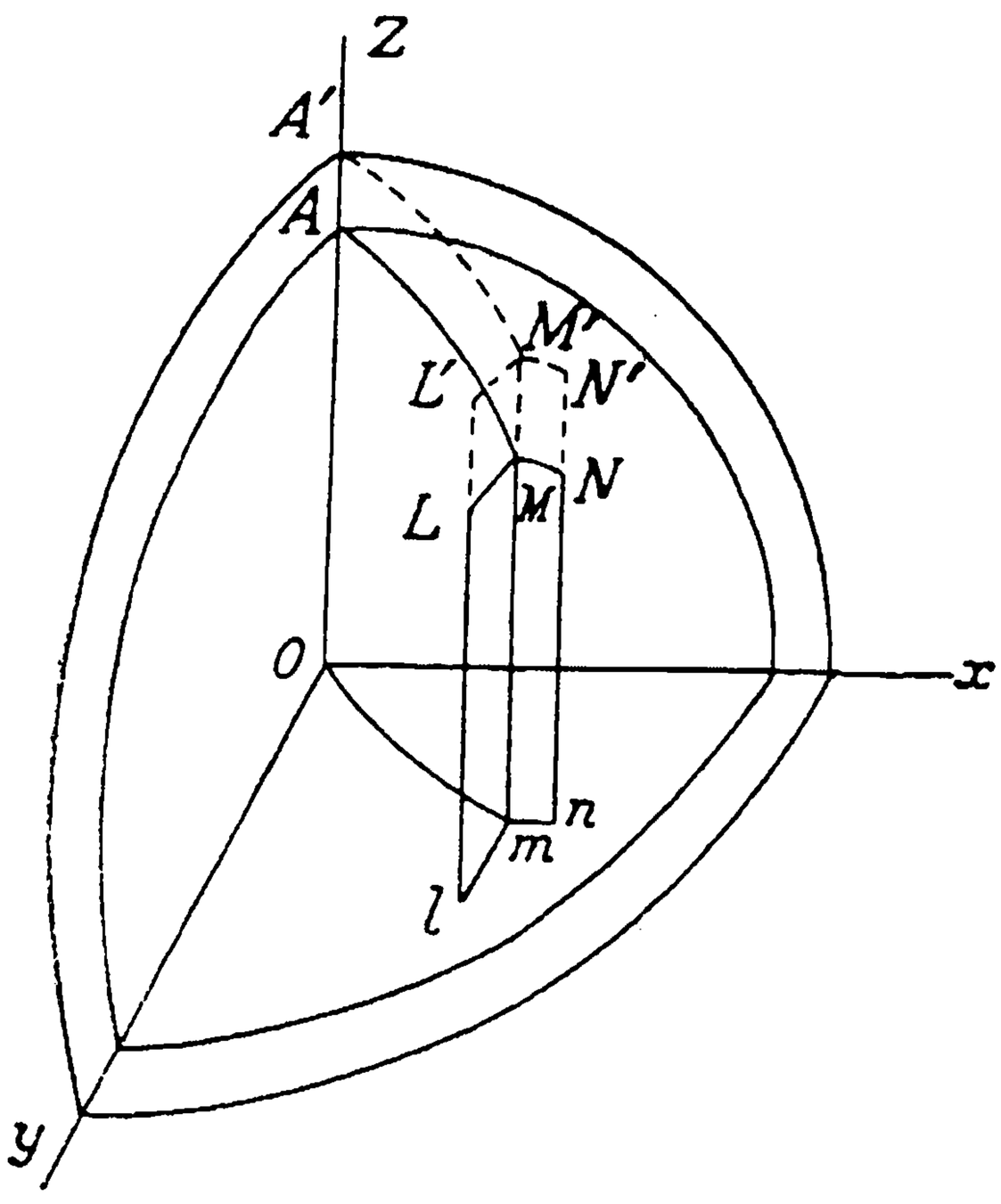
[1] При дальнейшем изложении мы будем брать такое же направление нормали.

Интегрирование уравнения (1) при существовании условия (2) облегчается с помощью следующей теоремы Клебша.

Если найдено семейство поверхностей тока $f(x, y, z) = c$ *несжимаемой жидкой массы, то уравнение проекций линий тока с одной из таких поверхностей на плоскость* xoy *найдется интегрированием уравнения*

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}(u\,dy - v\,dx) = 0,$$

первая часть которого, по исключении z *с помощью уравнения* $f(x, y, z) = c$, *представит полный диференциал* [1].



Фиг. 3.

Пусть (фиг. 3) ALN есть поверхность тока, соответствующая уравнению

$$f(x, y, z) = c,$$

а $A'L'N'$ — поверхность тока, получаемая при возрастании c на dc. Проведем по первой поверхности произвольную линию AM и, спроектировав ее на плоскость xoy, продолжим проектирующий цилиндр $omMA$ до пересечения по кривой $A'M'$ с поверхностью $A'L'N'$. Назовем через Q отнесенное к единице времени количество жидкости, протекающей через бесконечно тонкую цилиндрическую ленту $AMM'A'$. Вследствие несжимаемости жидкости это количество не зависит от вида кривой AM, а только от места точки M, поэтому величина Q есть функция координат x, y точки m. Предположим, что точка m продвинулась параллельно оси ox на бесконечно малый путь $mn = dx$, вследствие чего точка M перешла по поверхности ALN в точку N.

Поверхность нашей бесконечно тонкой ленты увеличи-

[1] Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, Borchardts Journal, Bd. LVI. Легко видеть, что теорема Клебша является частным случаем принципа последнего множителя.

вается при этом на площадь параллелограма $MM'N'N$, равную $MM' \cdot mn = MM'dx$, поэтому Q прирастает на [1]

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = - vMM'dx.$$

Если бы точка m продвинулась параллельно оси oy на путь $ml = dy$, то поверхность ленты увеличилась бы на площадь параллелограма $M'M'LL'$, равную $MM' \cdot ml = MM'dy$, а объем Q возрос бы на

$$\frac{\partial Q}{\partial y} dy = uMM'dy.$$

Бесконечно малую величину MM' найдем, определив dz из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial z} dz = dc.$$

Подставляя эту величину и складывая оба найденные приращения Q, находим:

$$dQ = \frac{dc}{\frac{\partial f}{\partial z}} (- v\,dx + u\,dy).$$

Так как первая часть этого равенства есть полный дифференциал от некоторой функции x и y, то этим свойством должна обладать и вторая его часть по исключении из нее z с помощью уравнения

$$f(x, y, z) = c.$$

Если мы будем передвигать M по линии тока, начертанной на поверхности ALN, то Q не должно изменяться; поэтому

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} (u\,dy - v\,dx) = 0 \qquad (4)$$

есть диференциальное уравнение проекций линий тока на плоскость xoy. Желаемое таким образом доказано.

---

[1] Мы полагаем, что Q представляет количество жидкости, протекшей с левой стороны ленты на правую.

Предположив, что mn и ml на фиг. 3 суть элементы координатных линий в какой-нибудь системе криволинейных ортогональных координат на плоскости xoy, а u и v представляют собой проекции скорости точки M на направление этих элементов, найдем с помощью рассуждения, аналогичного вышеприведенному, диференциальное уравнение проекций линий тока в заданных координатах. Так, например, для полярных координат вместо уравнения (4) получим:

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}(u\,dr - vr\,d\theta) = 0, \tag{5}$$

где v — проекция скорости на радиус-вектор r, а u — на направление элемента дуги $r\,d\theta$.

Приложим теорему Клебша к течению жидкости, совершающемуся параллельно плоскости xoy. В этом случае одно из семейств поверхностей тока есть

$$z = c$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1,$$

так что по уравнению (4) выражение

$$u\,dy - v\,dx = 0 \tag{6}$$

должно быть полным диференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, что, впрочем, прямо видно из уравнения (2), полагая в нем $w = 0$. На основании сказанного выше функция $\psi(x, y)$ равна $Q : dc$, т. е. представляет объем жидкости, протекший через цилиндрическую ленту единицы высоты в единицу времени.

Интеграция уравнения (6) дает нам семейство линий тока:

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

Скорости же u и v выражаются через производные от функции ψ таким образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Если бы мы желали провести в рассматриваемой плоскости семейство линий, ортогональных к линиям тока, то должны бы были интегрировать уравнение:

$$u\,dx + v\,dy = 0. \tag{8}$$

Первая часть этого уравнения, вообще говоря, не будет полным дефференциалом; но если проекции угловых скоростей частиц жидкости на ось oz суть нули, то по формулам (3) первой лекции

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

и первая часть уравнения (8) будет полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y)$. Интегрируя уравнение (8) в этом случае, найдем семейство искомых ортогональных линий:

$$\varphi(x, y) = \text{const}.$$

Скорости же u и v могут быть с помощью функции $\varphi(x, y)$ выражены так:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{9}$$

Сравнение формул (7) и (9) приводит нас к связи между функциями ψ и φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{10}$$

из которой следует, что

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} = F(x + y\sqrt{-1}). \tag{11}$$

Если теперь, наоборот, возьмем какую-нибудь функцию F от полной мнимой величины и определим по уравнению (11) функции φ и ψ, то по произволу можем принять одну из этих функций за потенциал скоростей *плоского течения* [1] без сжатия и вращения, а другую — за функцию, определяющую линии токов.

---

[1] Мы будем называть так течение, параллельное плоскости xoy, при котором u и v суть функции x и y.

Действительно, положив

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

найдем из уравнений (10), что жидкость движется без изменения объема:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \tag{12}$$

далее из тех же уравнений следует, что уравнение (6) обращается в

$$d\psi = 0,$$

и уравнения линий тока суть

$$\psi = \text{const}.$$

Как второй пример для приложения теоремы Клебша возьмем течение жидкости, совершающееся в плоскостях, проходящих через ось ox. Уравнение известного семейства поверхностей тока будет здесь:

$$\frac{z}{y} = c,$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y},$$

или в полярных координатах

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

По формуле (5)

$$r \sin \theta \,(u\, dr - vr\, d\theta) = 0 \tag{13}$$

будет диференциальное уравнение проекций линий токов на плоскость xoy, причем надо положить:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = cr \cos \theta.$$

Рассматриваемый пример представляет наибольший интерес в предположении, что течение жидкости симметрично

относительно оси *ox*; тогда во всех меридиональных плоскостях, проходящих через эту ось, линии токов одинаковы, и нам достаточно отыскать линии токов в плоскости *xoy*, которые найдутся, положив в формуле (13) $z = 0$.

§ 9. Критические точки. Для лучшего уяснения расположения линий токов течения жидкости следует обращать внимание на *критические точки*. Мы называем так точки, в которых некоторые из линий тока пересекаются или обращаются в бесконечно малые замкнутые кривые. Для простоты изложения остановимся сначала на плоском течении несжимаемой жидкости. Рассматривая какую-нибудь точку линии тока в плоскости *xoy*, мы заметим, что тангенс угла ее касательной с осью *ox*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

есть величина вполне определенная до тех пор, пока u и v конечны; но если $u = v = 0$, то этот тангенс обращается в $\frac{0}{0}$, и для исследования вида линий токов в расстоянии, бесконечно близком от упомянутой покоящейся точки жидкости, нам следует обратиться к рассмотрению движения частицы жидкости, имеющей эту точку центром. Возьмем начало координат в этом центре и направим оси *ox* и *oy* по осям деформации плоскости *xoy*, которая в нашем случае будет одной из неподвижных плоскостей *s*. На основании § 6 заключаем, что в случае

$$\omega_3^2 < \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

частица будет иметь два неподвижных радиуса, которые представят нам направления касательных двух пересекающихся линий тока. Принимая эти касательные за косоугольные оси координат $o\xi$ и $o\eta$, найдем по уравнениям (20) первой лекции, что линии токов, бесконечно близкие от критической точки, будут иметь уравнение:

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}},$$

и, так как по формуле (19) той же лекции в случае плоского течения несжимаемой жидкости

$$c_1 + c_2 = 0,$$

то для рассматриваемого случая получаем гиперболы:

$$\xi\eta = a^{c_1}.$$

Если движение жидкости совершается так же и без вращения частиц, то оси $o\xi$ и $o\eta$ будут направлены по осям деформации ox и oy, и гиперболы будут равносторонние.

В случае

$$\omega_3^2 > \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

в плоскости s не будет существовать неподвижных радиусов, и мы не получим линий тока, проходящих через точку o. Уравнения линий токов в бесконечной близости от o будут даны формулой (21) первой лекции, в которой надо положить $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Получим

$$\omega_3 (x^2 + y^2) - xy (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \text{const}$$

и придем на основании вышенаписанного неравенства к заключению, что линии токов, бесконечно близкие точке o, представляют эллипсы, имеющие эту точку центром. Два вида рассмотренных критических точек представлены на фиг. 4 под буквами a и b. Точки первого вида мы будем называть *узлами*, а второго — *полюсами*. Кроме таких простейших критических точек *первого порядка* могут быть еще критические точки *порядка* n, через которые могут проходить $n+1$ линий тока. Они получаются, когда в рассматриваемой точке обращаются в нуль компоненты скорости жидкости и все их производные по x и y до $n-1$-го порядка, так что для определения линий тока в бесконечной близости от критической точки приходится пользоваться производными порядка n.

Возьмем, например, плоское течение жидкости без сжатия и вращения, для которого потенциальная функция скоростей φ получается из уравнения:

$$(x + y\sqrt{-1})^{n+1} = \varphi + \psi\sqrt{-1},$$

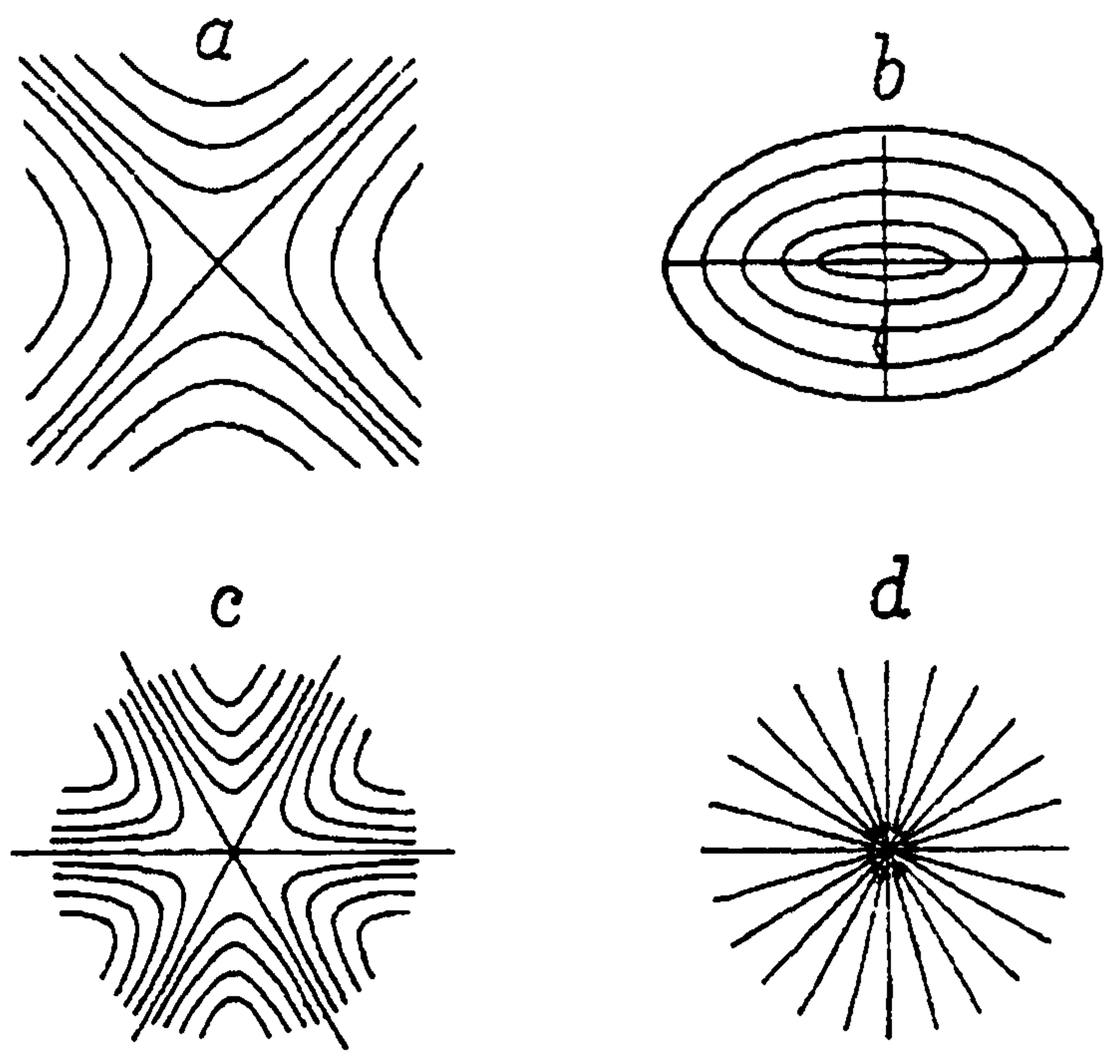
где n — целое число, большее единицы. Полагая $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$, находим:

$$\varphi = r^{n+1}\cos(n+1)\theta, \qquad \psi = r^{n+1}\sin(n+1)\theta.$$

Первая из этих формул показывает, что при $r = 0$ компоненты скорости и их $n-1$ производные обращаются в нули; второе же дает нам уравнение линий тока:

$$r^{n+1}\sin(n+1)\theta = \text{const},$$

которое при $\text{const} = 0$ представляет $n+1$ прямых, проходящих через критическую точку под равными углами, как это представлено на фиг. 4 под буквой c для критической точки второго порядка [1]. В случае плоского течения сжимаемой жидкости в критической точке первого порядка может пересекаться бесчисленное множество линий тока.



Фиг. 4.

Если, например, в уравнении

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}}$$

положим $c_1 = c_2$, то найдем, что линии тока в бесконечной близости от критической точки представятся уравнениями

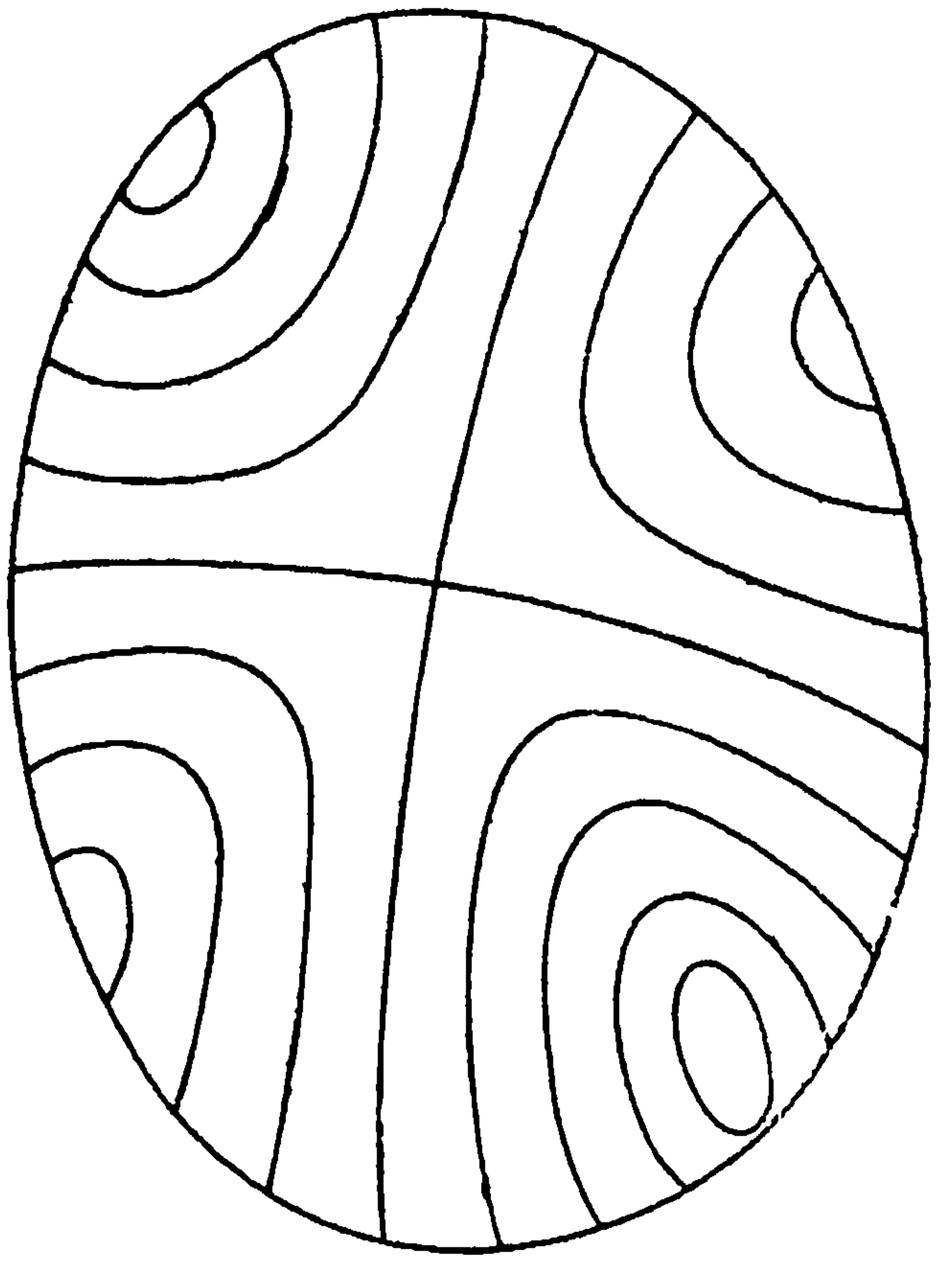
$$\xi = a^{c_1}\eta,$$

т. е. будут прямые, проходящие через эту точку, как это изображено на фиг. 4 под буквой d. Такую критическую точку мы будем называть *точкой схода*.

Все сказанное о плоском течении переносится на течение жидкости, совершающееся между двумя бесконечно близкими

[1] О критических точках порядка n см. в сочинении Haton de la Goupillière, Nouvelle théorie général de lignes isothermes, C.R., T. XVIII, 1 semestre, p. 621. Теория критических точек первого порядка изложена подробно в „Кинематике жидкого тела“, § 20.

поверхностями тока. Если жидкость несжимаема и нормальное расстояние во всех местах рассматриваемых поверхностей одинаково, то их критические точки будут иметь вид a, b или c; если же при несжимаемой жидкости нормальное расстояние между поверхностями тока изменяется, то $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ не равно нулю, и критические точки будут иметь вид, как при сжимаемой жидкости в плоском течении. Так как в § 6 было показано, что всякой неподвижной плоскости s соответствует неподвижный радиус, не лежащий в этой плоскости, то через каждую критическую точку на поверхность тока проходит линия тока, не лежащая в этой поверхности; при том, если эта критическая точка — узел, то через эту линию тока проходят две поверхности тока. В случае течения жидкости без вращения ее частиц все



Фиг. 5.

три поверхности тока, проходящие через критическую точку, пересекаются в ней под прямыми углами.

Укажем в конце этого параграфа на некоторые расположения линий токов течения несжимаемой жидкости при существовании в нем критических точек первого порядка.

Если плоское течение совершается внутри замкнутой линии тока, ограничивающей односвязное пространство, то внутри этого пространства должен быть по крайней мере один полюс; далее можно прибавлять по одному узлу и одному полюсу, так что число всех полюсов выйдет всегда на единицу более числа узлов.

В односвязном жидком слое постоянной толщины, заключенном между двумя бесконечно близкими замкнутыми поверхностями тока, критические точки распределяются так: необходимо должны существовать по крайней мере два полюса; далее можно прибавлять по одному узлу и одному полюсу, так что число полюсов будет всегда на два более числа узлов. На фиг. 5 представлены линии токов в таком

бесконечно тонком слое, причем имеется один узел и три полюса, из которых два изображены, а третий лежит за чертежом.

§ 10. Вихревые нити. Теорема Стокса. Условие существования поверхностей, ортогональных к линиям тока. Если известно течение жидкости, заполняющей данное пространство, то на основании формул (3) первой лекции для всякой точки этого пространства известны компоненты ω_1, ω_2, ω_3 угловых скоростей вращения частиц жидкости. Предположим, что эти компоненты представляются непрерывными функциями координат, и построим семейство линий, касательные которых направлены по осям вращения частиц жидкости. Эти линии, удовлетворяющие диференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3}, \tag{14}$$

мы будем называть *линиями вихрей*, а всякую проходящую через них поверхность — *поверхностью вихря*. Вообразив внутри жидкой массы бесконечно малую замкнутую линию и проведя через все ее точки линии вихрей, мы получим поверхность вихря, имеющую форму бесконечно тонкой трубки. Вся рассматриваемая жидкая масса может быть с помощью таких трубок разбита на бесконечно тонкие нити, которые мы будем называть *вихревыми нитями*. Так как на основании формул (3) первой лекции

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

то компоненты угловых скоростей ω_1, ω_2, ω_3 могут быть рассматриваемы как компоненты скоростей несжимаемой жидкости, а вихревые нити — как струйки жидкости. Таким образом все сказанное о струйках несжимаемой жидкости переносится на вихревые нити. Обозначая площадь сечения вихревой нити через dq, назовем произведение $\omega\, dq$ *напряжением вихря*. Эта величина будет постоянна вдоль линий вихря, которые должны быть или замкнутыми, или должны лежать своими концами на границах жидкой массы.

Мы предполагали пока, что внутри рассматриваемых границ ω_1, ω_2, ω_3 непрерывны, но далее будет показано, что упомянутые свойства вихревых нитей остаются верны и в том случае, когда u, v, w изменяются непрерывно, а ω_1, ω_2, ω_3 при переходе через некоторую *поверхность раздела* [1], проведенную внутри рассматриваемого пространства, изменяются скачком.

Так как ω_1, ω_2, ω_3 могут быть рассматриваемы как скорости несжимаемой жидкости, то при интеграции уравнения (14) мы можем пользоваться теоремой Клебша.

Переходим теперь к исследованию *циркуляции скорости* по данному контуру, лежащему внутри рассматриваемой жидкой массы.

Мы будем называть таким образом взятый по данному контуру интеграл:

$$\int V \cos\theta \, ds,$$

где V — скорость жидкости, ds — элемент дуги контура, а θ — угол между V и ds. Для сокращения письма будем обозначать циркуляцию скорости скобкой, в которую вписан контур. Определим, чему равна циркуляция скорости по бесконечно малому замкнутому контуру. Пусть (фиг. 6) $oLMo$ будет такой контур. Предполагаем, что начало наших прямоугольных осей координат x, y, z находится в точке o и ось oz направлена по угловой скорости ω частицы жидкости, имеющей точку o центром и заключающей в себе контур $oLMo$. На основании § 1 скорость V для каждой точки рассматриваемого контура будет слагаться из скорости движения, имеющего потенциальную функцию скоростей (происходящего от поступательного движения частицы и ее деформации), и из скорости вращательного движения частицы около оси oz. Обозначив вышеупомянутую функцию скоростей через $\varphi(x, y, z)$, найдем, что

$$(oLMo) = \int V \cos\theta \, ds = \int \frac{d\varphi}{ds} ds + \int r\omega \cos\lambda \, ds,$$

[1] Это будет поверхность раздела для компонентов вихря, а выше мы имели поверхность раздела скоростей.

где r — проекция радиуса-вектора точки контура на плоскость xoy, а λ — угол между элементом контура ds и скоростью ωr вращательного движения рассматриваемой точки контура. Пусть oL и oM два радиуса контура, проведенные к концам элемента $LM = ds$. Проектируем их на плоскость xoy и проводим радиусом $ol = r$ дугу $ln = r\,d\mu$, где μ — угол между r и ox. Эта дуга будет равна дуге LN, отсекаемой проектирующими плоскостями lLo и mMo на окружности круга, описываемого точкой L при ее вращении около оси oz. Соединив точки N и M, находим из прямоугольного треугольника LMN:

$$\cos\lambda\, ds = LN = r\,d\mu.$$

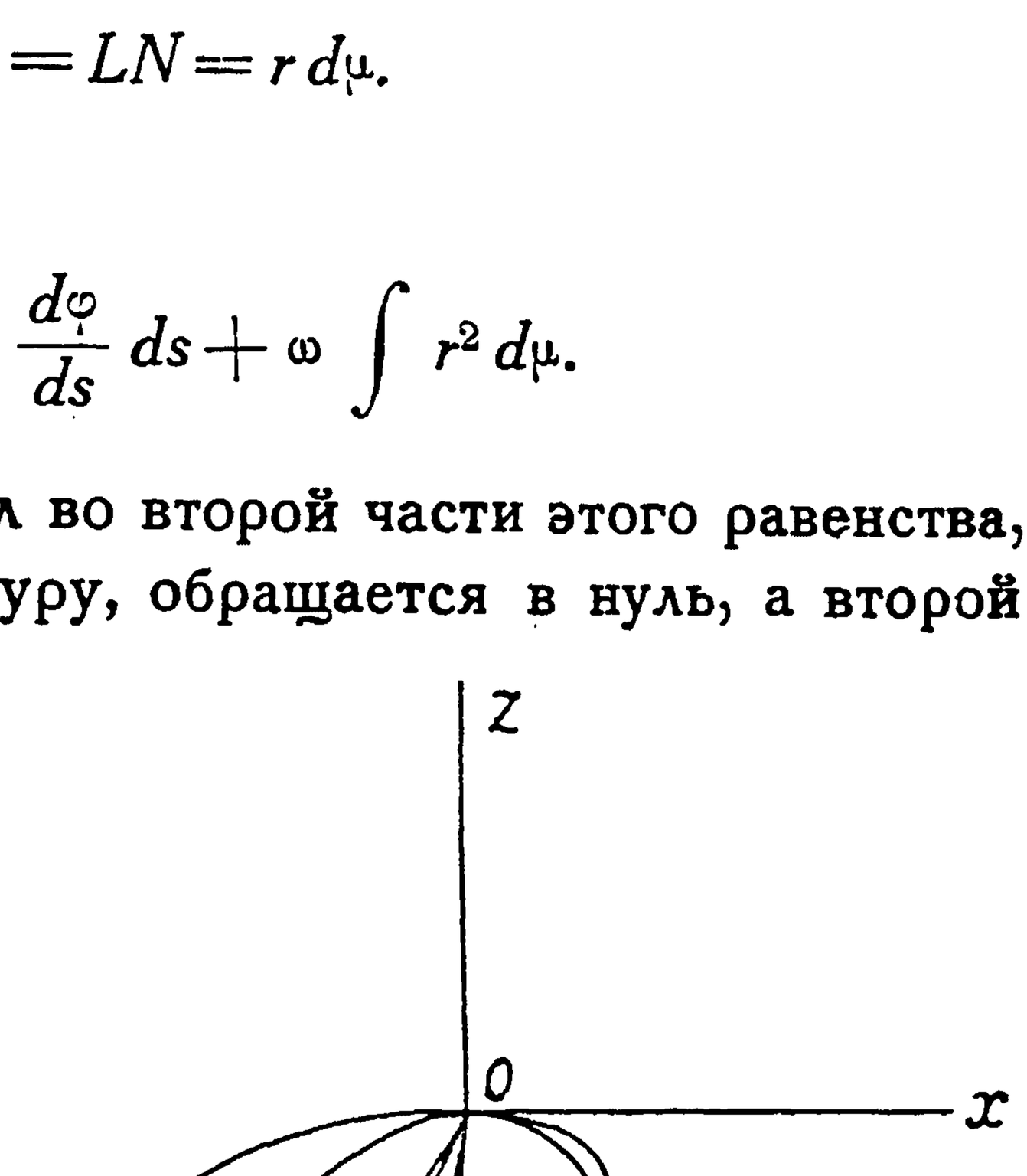
Отсюда следует, что

$$(oLMo) = \int \frac{d\varphi}{ds}\, ds + \omega \int r^2\, d\mu.$$

Так как первый интеграл во второй части этого равенства, взятый по замкнутому контуру, обращается в нуль, а второй интеграл представляет двойную площадь dq проекции нашего бесконечно малого контура на плоскость xoy, то

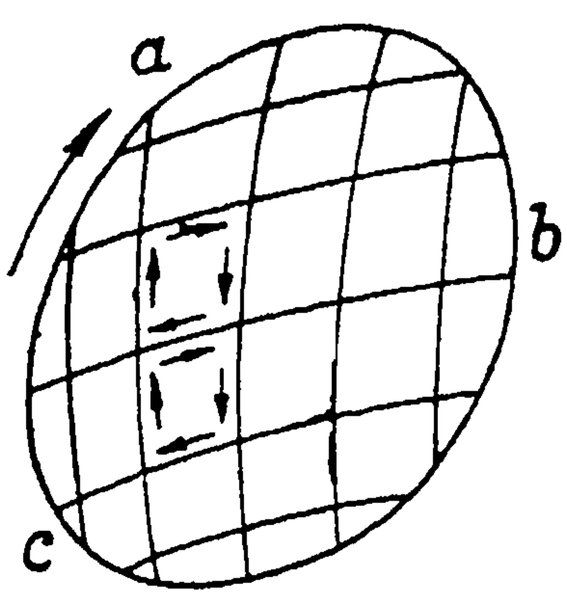
$$(oLMo) = 2\omega\, dq.$$

Легко увидеть, что dq есть не что иное, как площадь перпендикулярного сечения вихревой нити, построенной на нашем бесконечно малом замкнутом контуре $oLMo$, так что определенная нами циркуляция скорости равна двойному напряжению этой вихревой нити. Напряжению вихревой нити следует здесь приписывать знак (+) или (—), смотря по тому, берем ли мы направление контура $oLMo$ в сторону вращения



Фиг. 6.

частицы жидкости или в обратную сторону. Переходим к определению циркуляции скорости по конечному замкнутому контуру, *обращаемому в точку*. Мы будем называть таким образом всякий контур, который может быть обращен в точку посредством непрерывного изменения, не выходя из пространства, занятого рассматриваемой жидкостью. Через такой контур всегда можно провести поверхность, которая вся будет лежать в жидкости. Вообразим (фиг. 7), что такая поверхность проведена через данный контур *abca*, и построим на ней два семейства линий, которые разделят площадь контура на бесконечно малые части. Нетрудно видеть, что циркуляция *abca* может быть заменена суммой циркуляций, взятых по всем полученным бесконечно малым контурам в том же направлении, потому что при таком суммировании циркуляции скорости по всем внутренним линиям сократятся, и останется циркуляция по заданному контуру. Так как циркуляция по всякому бесконечно малому замкнутому контуру равна двойному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре, то сумма всех таких циркуляций будет равна сумме двойных напряжений всех вихревых нитей, проходящих через контур *abca*.



Фиг. 7.

Отсюда получается теорема Стокса [1]: *циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, обращаемому в точку, равна двойной сумме напряжений всех вихревых нитей, проходящих сквозь этот контур*. Напряжения вихревых нитей следует считать положительными, если вращение частиц жидкости совершается в ту сторону, в которую берем циркуляцию, и отрицательными, если оно совершается в обратную сторону.

Так как сумма напряжений вихревых нитей, проходящих сквозь контур *abca*, равна отнесенному к единице времени количеству жидкости, протекшей через поверхность, проведенную через этот контур, при течении жидкости с компонентами скоростей ω_1, ω_2, ω_3, то, обозначая через α, β, γ углы

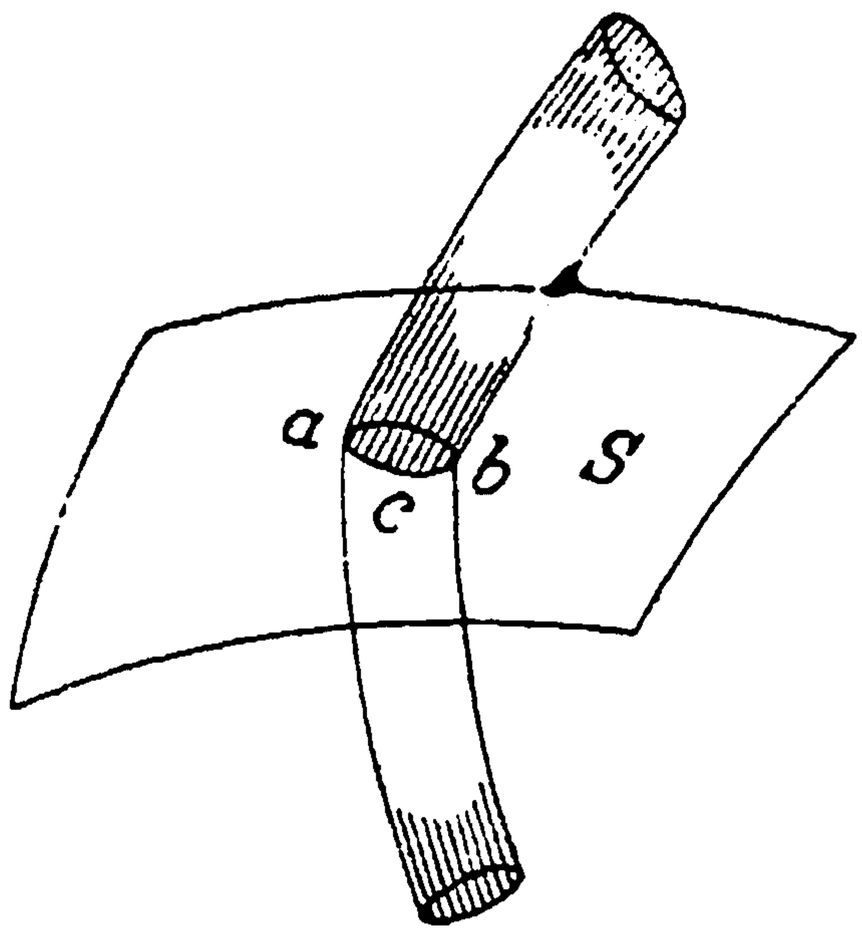
[1] Stokes, Cambridge University Calendar, 1854.

нормали к элементу поверхности с осями координат, можем выразить доказанную теорему формулой:

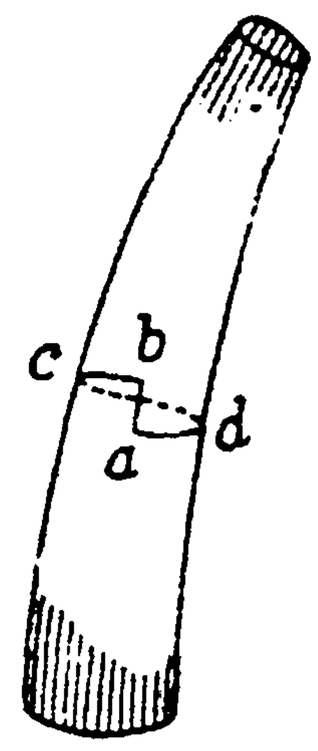
$$(abca) = 2\int\int(\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta + \omega_3\cos\gamma)\,d\sigma. \qquad (16)$$

При этом направление нормали поверхности берется в ту сторону, глядя из которой направление контура идет по солнцу.

Пользуясь теоремой Стокса, легко распространить теорему о постоянстве напряжения вихревой нити на тот случай, когда при непрерывно изменяющихся u, v, w величины ω_1, ω_2, ω_3 изменяются скачком при переходе через некоторую поверхность раздела S, лежащую внутри жидкой массы. При этом (фиг. 8) вихревая струйка, проходя через S, переломится и будет состоять из двух половин, лежащих с двух сторон этой поверхности, смыкающихся на ней по некоторому бесконечно малому контуру abc. Обозначая через $\omega\,dq$ и $\omega'dq'$ напряжения обеих половин вихревой нити, найдем по теореме Стокса:



Фиг. 8.



Фиг. 9.

$$(abca) = 2\omega\,dq = 2\omega'dq',$$

что и требовалось доказать.

Другое приложение теоремы Стокса мы сделаем при отыскании условия существования семейства поверхностей, ортогональных данному семейству линий тока. Вообразим (фиг. 9) струйку жидкости и проведем по ее поверхности кривую $adcb$, ортогональную к линиям токов. Эта кривая, вообще говоря, не будет сомкнута, а, начавшись в точке a на линии тока ab, она придет на эту линию в точку b. Назовем через h бесконечно малую величину ab и через $d\sigma$ — площадь сечения струйки плоскостью, проходящей через точку a перпендикулярно линии тока, и напишем по теореме Стокса, что

$$(abcda) = 2\omega\cos\lambda\,d\sigma,$$

где λ — угол между ω и V в точке a. Но $(bcda) = 0$, так как кривая $bcda$ ортогональна скоростям, а $(ab) = hv$, поэтому

$$hv = 2\omega \cos\lambda \, d\sigma. \tag{17}$$

Если существует семейство ортогональных поверхностей, то $h = 0$, и потому

$$\omega \cos\lambda = \omega_1 \frac{u}{V} + \omega_2 \frac{v}{V} + \omega_2 \frac{w}{V} = 0.$$

Подставляя сюда величины ω_1, ω_2, ω_3 из формул (3) первой лекции, находим условие существования семейства ортогональных поверхностей:

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{18}$$

Это условие требует, чтобы линии вихрей были ортогональны линиям тока.

Невихревое течение несжимаемой жидкости

§ 11. Свойства потенциала скоростей невихревого течения несжимаемой жидкости. Принцип Дирикле. Случай многосвязного пространства.

Течение жидкости, при котором все частицы ее не имеют вращения, мы будем называть *невихревым*, течение же жидкости с вращением частиц будем называть *вихревым*. Пусть масса несжимаемой жидкости находится в односвязном замкнутом пространстве Σ, т. е. в таком, внутри которого могут быть проведены только замкнутые контуры, обращаемые в точку. Рассматривая невихревое течение такой массы, заключаем из условия несжимаемости, что все его струйки жидкости должны или лежать своими концами на границах пространства Σ, или быть замкнутыми, и жидкость должна течь вдоль всякой струйки постоянно в одном и том же направлении. Из этого последнего обстоятельства следует, что струйки не могут быть замкнуты, так как в этом случае мы получили бы замкнутый контур, обращаемый в точку, циркуляция по которому в направлении скорости была бы некоторая конечная положительная величина, а по теореме Стокса эта циркуляция должна быть равна нулю. Таким образом все струйки рассматриваемого течения будут лежать своими концами на границах пространства Σ. Взяв внутри этого пространства Σ постоянную точку a и проведя через нее два разомкнутые контура acb и adb, получим по теореме Стокса:

$$0 = (acbda) = (acb) + (bda),$$

откуда

$$(acb) = (adb).$$

Таким образом циркуляция скорости по контуру, соединяющему постоянную точку a с переменной точкой b, не зависит от формы контура и потому является функцией координат x, y, z точки b. Обозначив эту функцию через $F(x, y, z)$, найдем:

$$F(x, y, z) = \int V \cos\theta \, ds, \tag{1}$$

где интеграл берется по какому-нибудь контуру abc. Если этот контур прирастает на элемент пути $bb' = ds$, то

$$\frac{dF}{ds} = V \cos\theta.$$

Эта формула показывает, что функция F для рассматриваемого течения жидкости есть потенциал скоростей. Скорости u, v, w определяются таким образом частными производными:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{2}$$

Так как эти скорости удовлетворяют уравнению несжимаемости, то наша функция F должна для всех точек пространства Σ удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta_2 F = 0. \tag{3}$$

Из формулы (1) следует, что при данном невихревом течении несжимаемой жидкости функция F определена до постоянного, которое зависит от точки a, так как, приняв за такую точку вместо a некоторую точку a', мы увеличим функцию F на $(a'a)$. Та же формула показывает, что при перемещении точки b вдоль линии тока в направлении течения жидкости функция F постоянно возрастает, и так как все струйки лежат своими концами на границах пространства Σ, то нигде внутри его функция F не может иметь наибольшей или наименьшей величины. Из этой последней теоремы следует в свою очередь, что нигде внутри пространства Σ скорость V не может иметь наибольшей величины [1]. Действи-

[1] Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, S. 184.

тельно, проведя ось ox параллельно скорости какой-нибудь точки A, мы выразим эту скорость через $\frac{\partial F}{\partial x}$. Но так как

$$\Delta_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0,$$

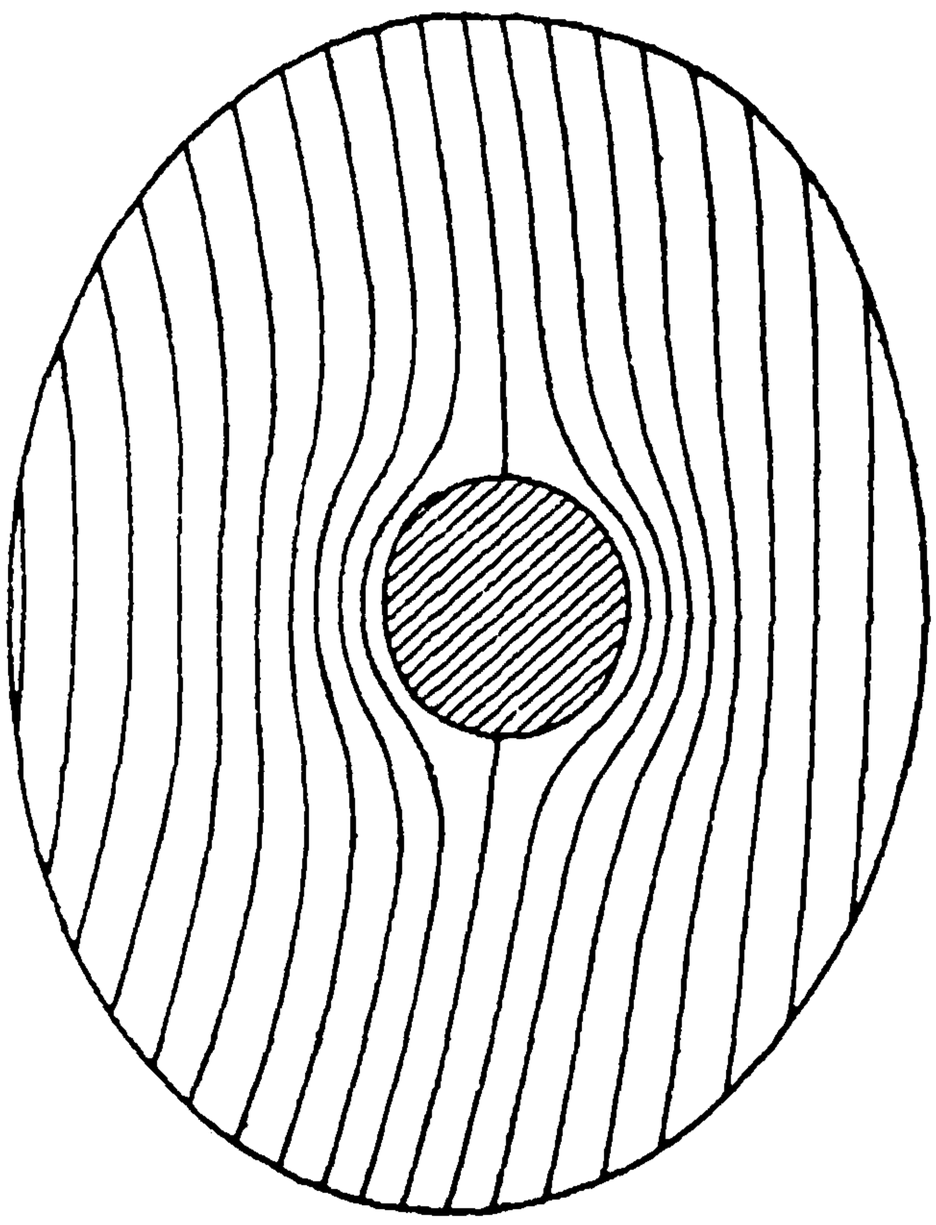
то относительно $\frac{\partial F}{\partial x}$ заключаем, так же как и относительно F, что нигде внутри пространства Σ функция $\frac{\partial F}{\partial x}$ не имеет наибольшей величины. Таким образом всегда существует точка B, бесконечно близкая точке A, для которой $\frac{\partial F}{\partial x}$ имеет бо́льшую величину, нежели для точки A, а скорость

$$V=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

и подавно более скорости в точке A.

Перейдем теперь к доказательству принципа *Дирикле*, который в о́тношении гидродинамики состоит в следующем: *невихревое течение несжимаемой жидкости в односвязном пространстве* Σ *вполне определено, когда на одних границах пространства дана потенциальная функция скоростей* F, *а на других — нормальная скорость* $\frac{dF}{dn}$. Заметим сначала, что в рассматриваемом пространстве не может существовать невихревого течения несжимаемой жидкости, для которого на всех границах $\frac{dF}{dn}=0$ или $F=\text{const}$, так как в первом случае границы явились бы поверхностями тока и струйки могли бы быть только замкнутыми, что невозможно, а во втором случае струйки хотя и лежали бы своими концами на границах пространства, но функция F при передвижении по струйке по направлению движения жидкости должна бы непременно возрастать и не могла бы иметь равных значений на концах струйки. Точно так же не может существовать невихревого течения несжимаемой жидкости, для которого на одних гра-

ницах $\frac{dF}{dn} = 0$, а на других $F = \text{const}$. Здесь все струйки должны бы лежать своими концами на тех границах, для которых $F = \text{const}$, причем некоторые из струек будут прилегать к границам, для которых $\frac{dF}{dn} = 0$ (фиг. 10); при перемещении вдоль каждой струйки в направлении течения жидкости функция F должна возрастать и не может иметь равных значений на концах струйки. Всякий раз, когда дано невихревое течение жидкости, обладающее упомянутыми свойствами, следует притти к заключению, что скорости этого течения равны нулю.



Фиг. 1

Предположим теперь, что в нашем пространстве Σ даны два невихревых течения несжимаемой жидкости, определенные потенциальными функциями F и F', причем на некоторых границах пространства Σ имеем $F = F'$, а на других

$$\frac{dF}{dn} = \frac{dF'}{dn}.$$

Составляем течение несжимаемой жидкости, скорости которого представляются геометрическими разностями скоростей данных течений. Это течение будет тоже невихревое и определится потенциалом скоростей $F'' = F - F'$. Так как на одних границах пространства Σ имеем $F' = 0$, а на других

$$\frac{dF'}{dn} = 0,$$

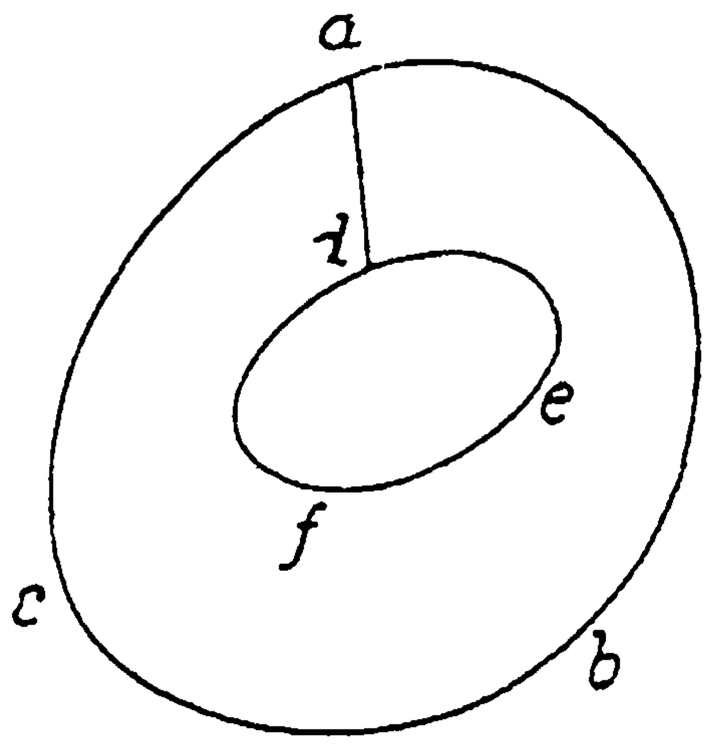
то скорости полученного течения нули, т. е. оба течения одинаковы, что и требовалось доказать. Если на некоторых из границ имеем $F = F'$, то везде внутри Σ имеем $F = F'$; если же на всех границах пространства

$$\frac{dF}{dn} = \frac{dF'}{dn},$$

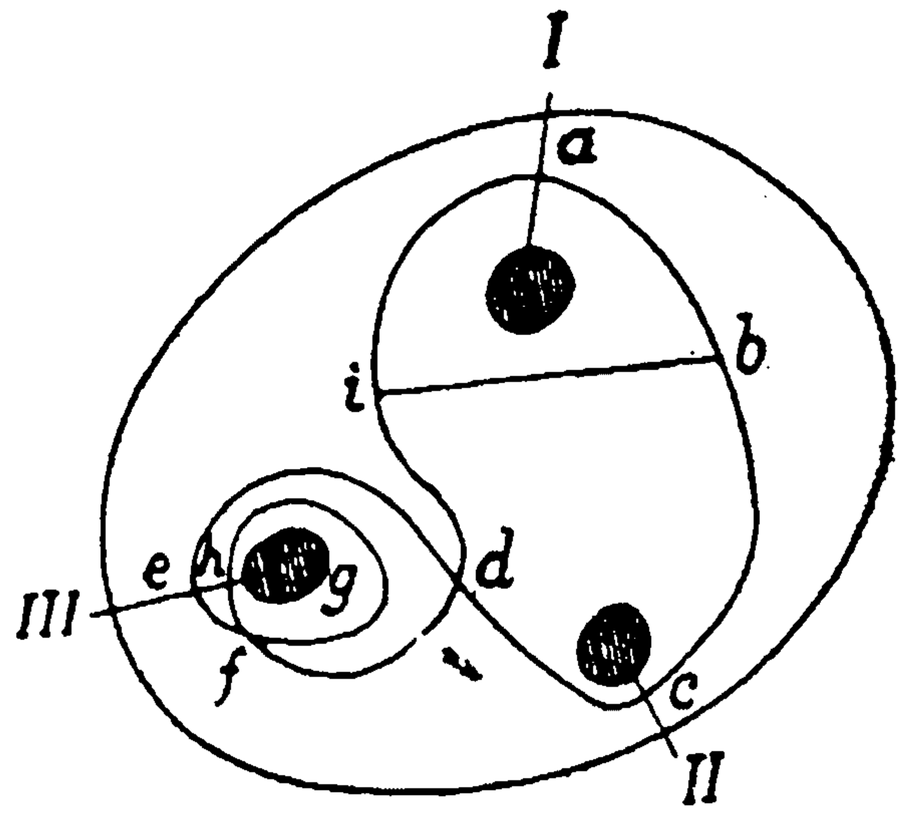
то из сказанного надо заключить, что везде внутри Σ

$$F = F' + \text{const.}$$

До сих пор мы предполагали, что пространство Σ односвязно; если бы оно было многосвязно, то в нем можно бы было проводить замкнутые контуры, в точку не обращаемые. Всякое многосвязное пространство может быть обращено в односвязное с помощью проведения нескольких перегородок,



Фиг. 11.



Фиг. 12.

которые мы прибавляем к его границам. Если многосвязное пространство обращается в односвязное с помощью проведения n перегородок, то мы будем называть его $n+1$-связным пространством.

Два замкнутых контура, которые могут быть преобразованы из одного в другой посредством непрерывного изменения, не выходя из данного многосвязного пространства, мы будем называть *приводимыми контурами*. Легко показать, что при невихревом течении жидкости в многосвязном пространстве циркуляции скорости по приводимым контурам равны между собой. Пусть (фиг. 11) $abca$ и $defd$ будут два приводимых замкнутых контура. Проведя соединительный контур ad, найдем, что замкнутый контур $abcadefda$, в котором линию ad считаем двойной, обращаем в точку; поэтому

$$(abcadfeda) = (abca) + (dfed) = 0,$$

или

$$(abca) = (defd).$$

Обратив $n+1$-связное пространство с помощью n перегородок в односвязное, можно провести n замкнутых контуров,

не обращаемых в точку и не приводимых из одного в другой, из которых каждый пересекает только одну перегородку в одной точке. Мы будем называть такие контуры *главными* контурами, а соответствующие им циркуляции скорости — *главными циркуляциями.* Докажем, что циркуляция скорости невихревого течения в многосвязном пространстве по всякому замкнутому контуру выражается с помощью главных циркуляций. Возьмем, например, контур *abcdefghfdia* в четырехсвязном пространстве (фиг. 12) и, проведя в нем линию *ib*, напишем, что

$$(abcdefghfdia) = (abia) + (ibcdi) + (defd) + (fghf).$$

Обозначая здесь через k_1, k_2, k_3 главные циркуляции, соответствующие перегородкам *I*, *II*, *III*, находим

$$(abcdefghfdia) = k_1 + k_2 - 2k_3.$$

Это рассуждение показывает, что в многосвязном пространстве циркуляция скорости невихревого течения по всякому замкнутому контуру равна нулю, если главные циркуляции скорости суть нули. В этом предположении невихревое течение несжимаемой жидкости может, так же как в односвязном пространстве, совершаться только разомкнутыми струйками, концы которых лежат на границах пространства. Если же некоторые из главных циркуляций не суть нули, то струйки невихревого течения несжимаемой жидкости могут быть замкнутые; при этом они должны пересекать такие перегородки, для которых главные циркуляции не равны нулю. Когда $n+1$-связное пространство посредством n перегородок обращено в односвязное, то по данному течению жидкости мы можем для полученного таким образом пространства определить потенциальную функцию скоростей F по формуле (1).

Взяв с двух противоположных сторон какой-нибудь перегородки сливающиеся точки b и b', проведем контур $abb'a$, не пересекающий других перегородок и пересекающий рассматриваемую только один раз. Так как этот контур обращаем в главный контур рассматриваемой перегородки, то, называя соответственную главную циркуляцию через k, найдем что

$$(abb'a) = (ab) - (ab') = k.$$

Таким образом при переходе через рассматриваемую перегородку в направлении главного контура потенциальная функция скоростей $F.(x, y, z)$ убывает скачком на величину k. Отсюда заключаем, что для течения жидкости в многосвязном пространстве потенциальная функция скоростей может быть многозначной, причем при переходе через каждую перегородку она будет убывать на циркуляцию главного контура, соответствующего этой перегородке. Если все главные циркуляции скорости суть нули, то потенциальная функция скорости в многосвязном пространстве будет однозначна. Вышеприведенный принцип Дирикле для многосвязного пространства выражается так: *невихревое течение несжимаемо жидкости в многосвязном пространстве* Σ *вполне определено, если для некоторых из границ пространства дано* F, *а для других дано* $\frac{dF}{dn}$, *и если известны все главные циркуляции скорости.* Вообразив два течения жидкости, определенные потенциальными функциями скоростей F и F' и удовлетворяющие всем вышеупомянутым условиям, составим течение несжимаемой жидкости, скорости которого — геометрические разности скоростей двух воображаемых течений. Это новое течение будет, очевидно, невихревое и все его главные циркуляции будут нули, и так как соответствующая ему потенциальная функция скоростей $F'' = F - F'$ будет на одних границах равна нулю, а на других

$$\frac{dF''}{dn} = 0,$$

то по предыдущему везде внутри Σ скорости составленного течения будут равны нулю, что и доказывает желаемое.

§ 12. Теорема Грина. Беспредельная жидкая масса. Вообразим внутри пространства Σ (односвязного или многосвязного) течение сжимаемой жидкости со скоростями lF, mF, nF, где l, m и n — компоненты некоторого вектора, которые внутри пространства Σ конечны и непрерывны, а F — некоторая функция координат, обладающая тем же свойством. Допустим, что производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial l}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z}$$

внутри пространства Σ везде конечны, и притом три последние удовлетворяют условию

$$\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Вследствие этого условия коэфициент кубического расширения рассматриваемого течения по формуле (13) первой лекции представится в виде:

$$\theta = l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Напишем теперь, что количество жидкости, протекшей через границы пространства Σ внутрь его, равно сумме уменьшений объема всех частиц жидкости, заключенных в этом пространстве:

$$\int\int F(l\cos\alpha+m\cos\beta+n\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$=-\int\int\int\left(l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

где двукратный интеграл распространяется на границы пространства Σ, а трехкратный на это пространство, величины же α, β, γ — углы внутренней нормали элемента поверхности $d\sigma$ с осями координат. Формула (5) будет одинаково справедлива и в том случае, когда при переходе через некоторую поверхность внутри пространства Σ некоторые из шести вышенаписанных производных по x, y, z изменяются скачком, так как тогда можно разбить с помощью упомянутой поверхности пространство Σ на две половины и, доказав формулу (5) для каждой из них, сложить полученные равенства. Эта формула будет нам весьма полезна при изложении многих вопросов гидродинамики, теперь же мы приложим ее к выводу теоремы Грина. Для этого положим, что

$$l=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad m=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad n=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

где φ — функция координат, удовлетворяющая на основании условия (4) уравнению Лапласа:

$$\Delta_2 \varphi = 0.$$

Получим:

$$\int\int F \frac{d\varphi}{dn} d\sigma =$$

$$= -\int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{cz} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (6)$$

Это равенство и есть известная формула Грина. Если в ней обе функции F и φ конечны и непрерывны внутри пространства Σ и внутри его удовлетворяют уравнению Лапласа, то эти две функции могут быть переставлены, вследствие чего

$$\int\int \varphi \frac{dF}{dn} d\sigma = \int\int F \frac{d\varphi}{dn} d\sigma. \qquad (7)$$

Вообразив внутри пространства Σ некоторую точку A, назовем через r расстояние от нее других точек пространства Σ, из которого исключим часть, заключенную внутри сферы, проведенной из центра A бесконечно малым радиусом ρ. Для полученного таким образом пространства напишем формулу (7), приняв в ней

$$\varphi = \frac{1}{r},$$

так как

$$\Delta_2 \frac{1}{r} = 0;$$

найдем, что

$$\frac{1}{\rho^2} \int\int F\, d\sigma' + \frac{1}{\rho} \int\int \frac{dF}{d\rho} d\sigma' =$$

$$= \int\int F \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \int\int \frac{1}{r} \frac{dF}{dn} d\sigma,$$

где $d\sigma'$ — элемент поверхности бесконечно малой сферы. Так как первый интеграл в первой части этого равенства равен

$4\pi\rho^2 F$, где F есть значение функции в точке A, а второй интеграл равен нулю, то

$$F = \frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{dF}{dn}\,d\sigma. \qquad (8)$$

При выводе формул (6), (7), (8) мы предполагали, что функция F внутри пространства Σ изменяется непрерывно; если бы при переходе через некоторые поверхности внутри его она изменялась бы скачком, то можно бы пользоваться теми же формулами, прибавив упомянутые поверхности к границам пространства. Воспользуемся формулой (8) для исследования невихревого течения беспредельной массы несжимаемой жидкости, *покоящейся в бесконечности.* Так называет Кирхгофф [1] жидкую массу, скорости которой приближаются к нулю при бесконечном возрастании расстояния точек жидкости от конечных границ ее. Докажем, что *потенциальная функция скоростей F невихревого течения несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, для всех бесконечно удаленных точек есть одна и та же постоянная величина C.* Пусть (фиг. 13) A будет точка жидкости, находящаяся на конечном расстоянии от конечных границ рассматриваемой жидкой массы. Проведем из этой точки, как из центра, сферу радиуса R, охватывающую все внутренние границы жидкости, и обозначим через Σ пространство, ограниченное этой сферой и этими границами. Прилагая к такому пространству формулу (8), найдем для определения значения функции F в точке A:

$$F = \frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{dF}{dn}\,d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi R^2}\int\int F\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi R}\int\int \frac{dF}{dR}\,d\sigma', \qquad (9)$$

где два первые интеграла распространяются на внутренние границы, а два вторые — на поверхность сферы. Проведем из центра A радиусом, равным единице, сферу и, назвав эле-

[1] Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, S. 190.

мент ее поверхности через $d\omega$, положим в третьем интеграле формулы (9)

$$d\sigma' = R^2 d\omega;$$

получим:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int F\, d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\int\int F\, d\omega.$$

Если отнесенное к единице времени количество жидкости, протекшей через внутренние границы пространства Σ, назовем через $4\pi M$, то

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{dF}{dR}\, d\sigma' = M,$$

или

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{4\pi}\int\int F\, d\omega\right) = \frac{M}{R^2}.$$

Умножаем на dR и интегрируем:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int F\, d\omega = -\frac{M}{R} + C;$$

здесь постоянное C не зависит от R и может быть определено, приняв $R = \infty$, так что

$$C = \left(\frac{1}{4\pi}\int\int F\, d\omega\right)_{R=\infty}. \qquad (10)$$

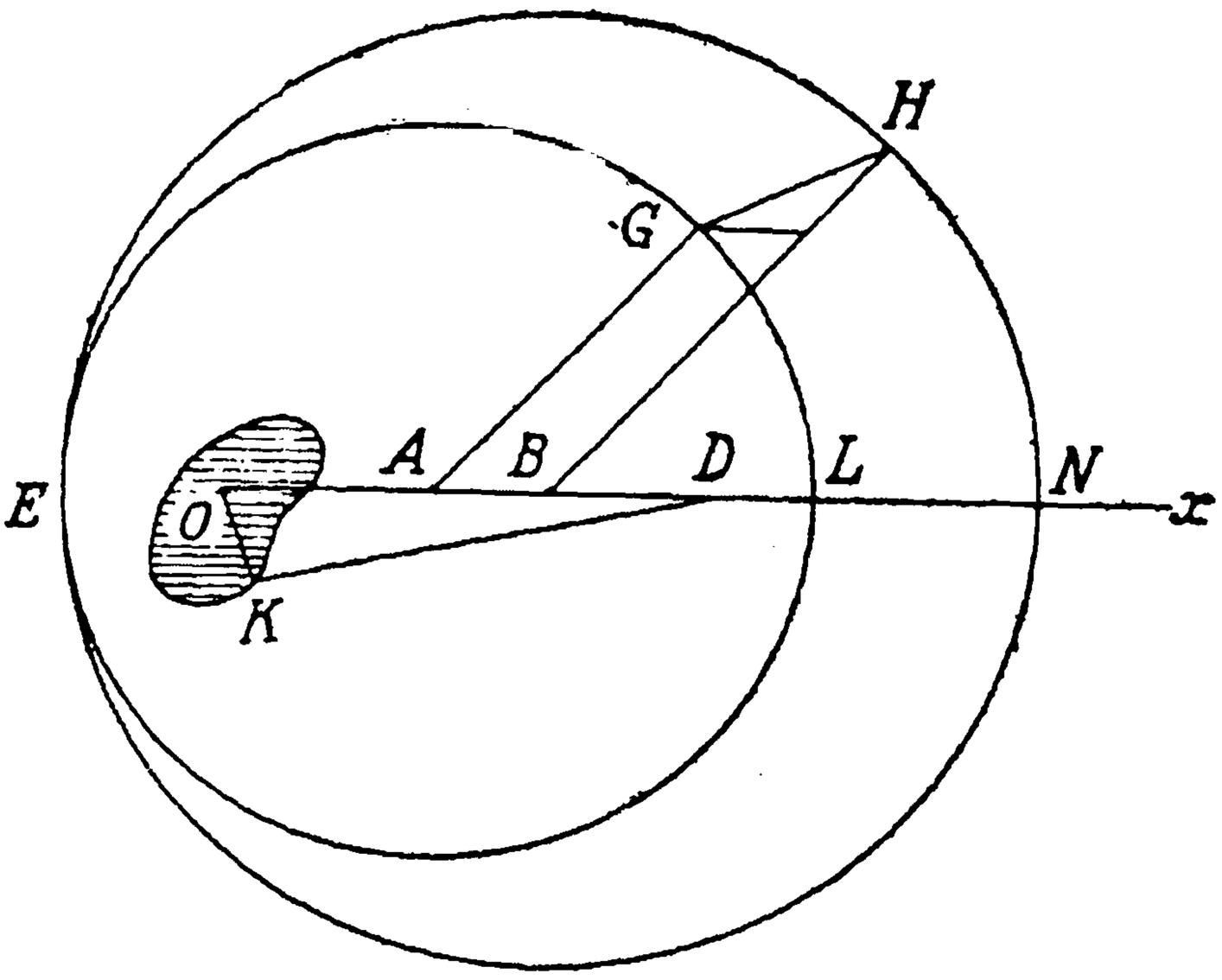
Делаем подстановки найденных интегралов в формулу (9):

$$F = \frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{dF}{dn}\frac{1}{r}\, d\sigma + C. \qquad (11)$$

Обнаружим, что входящее сюда постоянное C остается одно и то же, где бы точка A ни находилась, даже если бы она удалилась от внутренних границ жидкой массы на бесконечно большое расстояние.

Предположим, как это представлено на фиг. 13, что ось координат Ox проходит через точку A, и передвинем центр сферы единицы радиуса, на поверхность которой распространена интеграция в формуле (10), из A в бесконечно близкую точку B на расстояние $AB = dx$; при этом передвижении мы

будем брать для определения F, стоящего под интегралом в формуле (10), вместо бесконечно большой величины R бесконечно большую величину $R+dx$. Это значит, что сперва мы брали значения F на бесконечно большой сфере EGL, имеющей центр в A, а теперь будем брать их на сфере EHN, имеющей центр в B и прикасающейся к прежней сфере в точке E. Проведя параллельные радиусы AG и BH, найдем на обеих сферах соответственные точки G и H. Полагая $GH=dl$, выразим приращение C при переходе из точки A в точку B через



Фиг. 13.

$$dC=\frac{dx}{4\pi}\int\int\frac{dF}{dl}\frac{dl}{dx}\,d\omega; \tag{12}$$

здесь производная

$$\frac{dF}{dl}$$

представляет скорость точки жидкости G по направлению GH и является бесконечно малой величиной вследствие того, что скорости в бесконечности равны нулю. Отношение же $\frac{dl}{dx}$ есть конечная величина, которая, как легко видеть на фигуре, выражается через

$$\frac{dl}{dx}=\sqrt{2(1+\cos\theta)},$$

где $\theta=\angle GAL$.

Назовем через ε наибольшую абсолютную величину из всех произведений

$$\frac{dF}{dl}\frac{dl}{dx},$$

которые будут нам встречаться при составлении dC по формуле (12), в предположении, что вышеупомянутый центр передвигается от A до D. Эта величина ε вследствие бесконечной малости всех

$$\frac{dF}{dl}$$

будет сама бесконечно мала. Для всех приращений dC при передвижении центра по линии AD будем на основании формулы (12) иметь неравенство

$$dC < \varepsilon\, dx,$$

интегрируя обе части которого между точками A и D, найдем:

$$C' - C < AD \cdot \varepsilon, \tag{13}$$

где C' — значение постоянного в точке D.

Если AD имеет конечную длину, то из формулы (13) получаем $C' = C$, но это заключение будет иметь место и при бесконечной длине AD, так как вследствие независимости R от AD мы всегда можем вообразить R бесконечно большой величиной настолько большего порядка против AD, что

$$AD \cdot \varepsilon = 0.$$

Прилагая формулу (11) к бесконечно удаленной точке D, подставляем в нее

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - 2\frac{b}{a}\cos\alpha + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $\alpha = oD$, b — радиус-вектор Ko некоторой точки K, принадлежащей внутренним границам, а

$$\alpha = \angle Kox$$

есть полярный угол этой точки.

Разлагая в ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{P_1}{a^2} + \frac{P_2}{a^3} + \dots$$

и подставляя в формулу (11), найдем, что

$$F = C + \frac{M}{a} + \frac{M_1}{a^2} + \frac{M_2}{a^3} + \dots \qquad (14)$$

Здесь M представляет разделенное на 4π количество жидкости, протекшей через внутренние границы, а M_1, M_2, ... , так же, как и P_1, P_2, ... суть сферические функции первого, второго и т. д. порядка.

Мы видим, что для всех бесконечно удаленных точек функция F представляет одну и ту же постоянную величину C, что и требовалось доказать [1]. Кроме того, из формулы (14) следует, что *при M, не равном нулю, скорости в бесконечности будут бесконечно малые величины порядка a^{-2}, а при $M = 0$ они будут бесконечно малые величины порядка a^{-3}.*

Останавливаясь на случае $M = 0$, проведем из точки o сферу радиуса a и определим число струек n, проходящих через элемент площади $a^2 d\omega$ этой сферы. Если dQ будет отнесенное к единице времени бесконечно малое количество жидкости, протекающее через сечение каждой струйки, то

$$n = a^2 \frac{dF}{da} \frac{d\omega}{dQ}.$$

Это число при возрастании a стремится к нулю, так как по формуле (14) при бесконечно большом a

$$n = -\frac{2}{a} \frac{d\omega}{dQ} M_1 = 0.$$

Отсюда следует, что при $M = 0$ с возрастанием радиуса сферы число струек, ее пересекающих, все уменьшается, т. е. эти струйки, загибаясь, возвращаются назад на внутренние границы, и так как при $a = \infty$ ни одна струйка не пересекает сферу, то *все они лежат своими концами на внутренних границах жидкой массы.*

Эта теорема позволяет нам распространить принцип Дирикле на беспредельную жидкую массу: *невихревое течение*

---

[1] Другое доказательство см. у Lamb, Einleitung in die Hydrodynamik, §§ 50, 51, 52, Freiburg, 1884 (перевод с английского).

беспредельной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, определяется, если на конечных границах известны: на одних $\frac{dF}{dn}$, *на других* F, *и дано отнесенное к единице времени количество жидкости* $4\pi M$, *протекающей через все конечные границы* [1]. Предположив, что при наложенных условиях существуют два течения с потенциалами скоростей F и F', найдем, что течение с потенциалом скоростей $F''=F-F'$ имеет на одних поверхностях конечных границ $\frac{dF''}{dn}=0$, на других $F''=0$, количество протекающей через эти границы жидкости есть нуль; следовательно, все струйки этого течения должны начинаться и кончаться на конечных границах, для которых $F''=0$. Но такое течение невозможно, так как, идя по струйке в направлении течения жидкости, мы получим постоянное возрастание функции F''. Таким образом скорости течения с потенциалом скоростей F'' будут нули, и мы найдем

$$F=F'$$

или

$$F=F'+\text{const.}$$

Так как при $M=0$ все струйки лежат своими концами на внутренних границах, то получаемое при этом течение жидкости, покоящейся в бесконечности, может быть рассматриваемо как предельный случай движения несжимаемой жидкой массы, заключенной внутри замкнутого со всех сторон неподвижного сосуда при бесконечном возрастании размеров этого сосуда (причем все стенки его удаляются на бесконечное расстояние от конечных границ жидкой массы). Поясним это примером. Пусть конечные границы жидкой массы представляются поверхностью шара, движущегося со скоростью q; тогда на поверхности сферы мы должны иметь

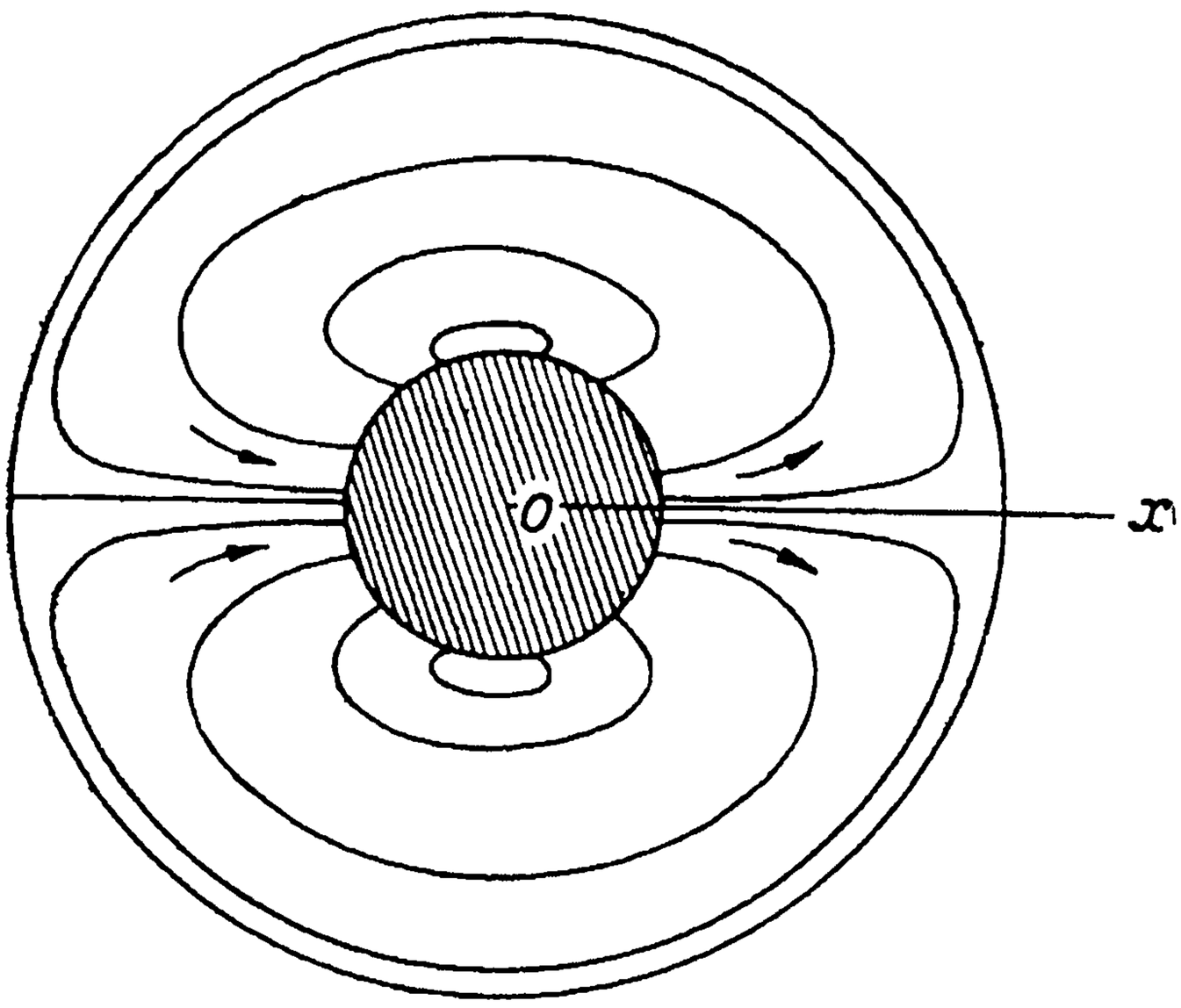
$$\frac{dF}{dn}=q\cos\theta, \tag{15}$$

---

[1] Если на всех конечных границах дано $\frac{dF}{dn}$, то не нужно давать $4\pi M$.

где θ — угол рассматриваемого радиуса сферы с направлением скорости q. Приняв начало декартовых и полярных координат в центре сферы и направив ось ox, которую примем за полярную, по направлению скорости q, попробуем удовлетворить искомому течению потенциальной функцией:

$$F = A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -A\frac{x}{r^3} = -A\frac{\cos\theta}{r^2},$$



Фиг. 14.

где A — постоянное, а r — радиус-вектор.

Очевидно, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа и дает в бесконечности скорость, равную нулю; для того же, чтобы удовлетворить на поверхности сферы условию (15), нам следует только положить

$$A = \frac{q}{2}b^3,$$

где b — радиус сферы. Таким образом рассматриваемое течение несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, будет иметь потенциал скоростей

$$F = -\frac{qb^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}. \qquad (16)$$

Если бы мы искали решение задачи о движении нашей сферы внутри жидкой массы, ограниченной снаружи неподвижной поверхностью концентрической сферы радиуса a, то могли бы найти соответствующую потенциальную функцию скоростей, приняв

$$F = -A\frac{x}{r^3} + Bx = -A\frac{\cos\theta}{r^2} + Br\cos\theta$$

и выбрав A и B так, чтобы на внутренней сфере удовлетворялось уравнение (15), а на внешней

$$\frac{dF}{dn} = 0.$$

Это дает нам

$$2\frac{A}{b^3}+B=q,$$

$$2\frac{A}{a^3}+B=0,$$

откуда следует, что

$$A=\frac{qa^3b^3}{2(a^3-b^3)},\quad B=-\frac{qb^3}{a^3-b^3}.$$

Подставляя эти величины постоянных коэфициентов, находим искомую потенциальную функцию скоростей:

$$F=-\frac{qb^3a^3}{2(a^3-b^3)}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{a^3}\right)\cos\theta. \qquad (17)$$

Мы видим, что при возрастании a до бесконечности формула (17) обращается в (16), так что линии токов второго течения по мере возрастания a все ближе и ближе подходят к линиям токов первого. Определим эти линии токов с помощью формулы (13) второй лекции, в которую подставим:

$$u=\frac{\partial F}{r\partial\theta}=\frac{qb^3a^3}{2(a^3-b^3)}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{2}{a^3}\right)\sin\theta,$$

$$v=\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{qb^3a^3}{a^3-b^3}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right)\cos\theta;$$

найдем:

$$\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{a^3}\right)\sin^2\theta\,dr+2\left(\frac{r^2}{a^3}-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta=0.$$

Интеграл этого уравнения будет

$$\left(\frac{r^2}{a^3}-\frac{1}{r}\right)\sin^2\theta=\text{const}. \qquad (18)$$

При $\text{const}=0$ это уравнение удовлетворяется положениями:

$$\sin\theta=0 \text{ или } r=a,$$

т. е. линии токов представляют ось ox и окружность радиуса a. Все остальные линии токов начинаются и кончаются на внутренней сфере, как это изображено на фиг. 14. Точки пересечения ox с внешней сферой будут здесь критическими точками первого порядка, в которых линии токов пересекаются под прямым углом. При $a = \infty$ формула (18) обращается в

$$\frac{\sin^2\theta}{r} = \text{const} \tag{19}$$

и дает нам семейство линий токов жидкой массы, покоящейся в бесконечности, вид которых будет схож с представленным на фиг. 14.

Электрогидродинамические аналогии

§ 13. Теорема Бельтрами. Если имеем в пространстве Σ вихревое течение сжимаемой жидкости, то для его определения достаточно знать: во всех точках рассматриваемого пространства Σ величины θ, ω_1, ω_2, ω_3, на одних граничных поверхностях его — нормальные составляющие скорости, на других — тангенциальные, циркуляции скорости по разомкнутым контурам, соединяющим граничные поверхности, на которых даны тангенциальные скорости, и циркуляции скорости по всем главным контурам. Это вытекает из принципа Дирикле. Вообразив два течения, удовлетворяющие всем вышеупомянутым данным, и составив течение, скорости которого суть геометрические разности скоростей этих двух течений, мы получим невихревое течение несжимаемой жидкости, в котором одни граничные поверхности суть поверхности тока, другие — поверхности равного потенциала скоростей, циркуляции же по всем главным контурам суть нули.

В таком течении все скорости должны быть равны нулю, и, следовательно, оба воображаемые течения будут одинаковы.

Если мы сумеем по указанным данным определить тангенциальные скорости на тех границах, на которых даны нормальные скорости, и нормальные скорости на тех, на которых даны тангенциальные, то легко найдем скорости жидкости во всем пространстве Σ, подобно тому как с помощью формулы (11) третьей лекции по F и $\frac{dF}{dn}$ на границах пространства определяем F для всего пространства. Это делается с помощью теоремы Бельтрами, выводом которой мы теперь займемся.

Возьмем три интеграла:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{u}{r}\,da\,db\,dc, \\ Q &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{v}{r}\,da\,db\,dc, \\ R &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{w}{r}\,da\,db\,dc, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где интеграция распространяется на весь объем пространства Σ, r — расстояние точки этого пространства (a, b, c) от данной точки (x, y, z), а u, v, w — компоненты скорости точки (a, b, c). От составленных таким образом трех функций переменных x, y, z составим три новые функции, подобно тому как составляются двойные компоненты угловых скоростей частиц жидкости по компонентам скоростей точек жидкости:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[w\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\,db\,dc.$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

то по формуле (3) первой лекции

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{v}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{w}{r}\right)\right] da\,db\,dc + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc.$$

Здесь подинтегральная функция в первом интеграле может быть рассматриваема как коэфициент кубического расширения течения с компонентами скоростей

$$-\frac{w}{r}, \quad \frac{v}{r};$$

вследствие этого

$$\int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{v}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{w}{r}\right)\right]da\,db\,dc=$$

$$=-\int\int\frac{1}{r}(v\cos\gamma-w\cos\beta)\,d\sigma,$$

где двойная интеграция распространяется на граничные поверхности пространства Σ, а α, β и γ суть углы внутренней нормали элемента $d\sigma$ этих поверхностей с осями координат. Подставляя, найдем, что

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(w\cos\beta-v\cos\gamma)\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc.$$

Полагаем для сокращения письма:

$$\left.\begin{aligned}L&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc,\\ M&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_2}{r}\,da\,db\,dc,\\ N&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_3}{r}\,da\,db\,dc,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}L'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(w\cos\beta-v\cos\gamma)\,d\sigma,\\ M'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(u\cos\gamma-w\cos\alpha)\,d\sigma,\\ N'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(v\cos\alpha-u\cos\beta)\,d\sigma.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Тогда найденная функция и две ей аналогичные будут:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=L+L',$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=M+M',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=N+N'.$$

От этих трех функций переменных x, y, z составляем тем же способом три новые функции:

$$\frac{\partial (N+N')}{\partial y} - \frac{\partial (M+M')}{\partial z} = -\Delta_2 P + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right). \quad (5)$$

Функцию P, данную формулой (1), можно рассматривать как потенциал масс, заполняющих пространство Σ, с плотностью $u:4\pi$; поэтому на основании теоремы Пуассона

$$-\Delta_2 P = u.$$

Второй член второй части формулы (5) преобразуется на основании уравнений (1) и (2) таким образом:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[u\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) + v\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) + w\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\, db\, dc =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{w}{r}\right)\right] da\, db\, dc +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}\right) da\, db\, dc.$$

Во втором интеграле

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} = 0,$$

а в первом — подинтегральная функция может быть рассматриваема как коэфициент кубического расширения течения со скоростями:

$$\frac{u}{r}, \quad \frac{v}{r}, \quad \frac{w}{r},$$

так что

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{w}{r}\right)\right] da\, db\, dc =$$

$$= -\int\int \frac{1}{r}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Положив для сокращения

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\sigma, \qquad (6)$$

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\theta}{r}\,da\,db\,dc, \qquad (7)$$

найдем на основании сказанного из уравнения (5) формулу для u, которая вместе с двумя аналогичными формулами для v и w представится в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial(N+N')}{\partial y} - \frac{\partial(M+M')}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(S+S'), \\ v &= \frac{\partial(L+L')}{\partial z} - \frac{\partial(N+N')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(S+S'), \\ w &= \frac{\partial(M+M')}{\partial x} - \frac{\partial(L+L')}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(S+S'). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Если бы точка (x, y, z) лежала вне пространства Σ, то мы получили бы по теореме Лапласа:

$$\Delta_2 P = \Delta_2 Q = \Delta_2 R = 0,$$

и потому первые части формул (8) были бы нули. Рассматривая вторые части формул (8), замечаем, что они аналогичны силам действия на единицу магнитной массы (мы считаем магнитную массу положительной при южном магнитизме) магнитных масс, имеющих потенциал $S+S'$, и гальванических токов, имеющих детерминанты тока: $L+L'$, $M+M'$, $N+N'$. Условившись называть через V_n и V_s нормальную и тангенциальную скорости жидкости на границах пространства Σ (нормаль n, как всегда, направлена внутрь Σ), получаем из формул (8), (5), (4), (6), (7) теорему Бельтрами [1].

Скорость точки жидкости (x, y, z) внутри пространства Σ выражается силой, происходящей от действия на

[1] Beltrami, Dell'idrodinamica razionale, §§ 15, 16, 17. Memorie dell'accademia delle scienze dell'istituto di Bologna, Serie III, T. II. Следует сказать, что Бельтрами принадлежит только соединение в одно целое различных теорем, указанных Гельмгольцем, Рохом и Больцманом.

единицу магнитной массы, помещенной в этой точке, следующих факторов: 1) магнитной массы, заполняющей все пространство Σ, *с плотностью* $\theta : 4\pi$; *2) магнитного слоя, покрывающего границы этого пространства, с поверхностной плотностью* $V_n : 4\pi$; *3) гальванических токов, текущих по всем вихревым нитям рассматриваемого течения, с силой тока, равной отношению напряжения вихревых нитей* $\omega\, dq$ *к* 2π, *в сторону вектора* ω; *4) гальванических токов, текущих на граничных поверхностях по линиям, ортогональным линиям токов, в направлении, получаемом от поворота скорости* V_s *по часовой стрелке на прямой угол около внутренней нормали* n, *с силой тока* $V_s ds : 4\pi$, *где* ds — *расстояние между двумя бесконечно близкими ортогональными линиями.*

Сила тока $\omega\, dq : 2\pi$ вдоль всякой вихревой нити постоянна на основании § 10; что же касается силы тока $V_s ds : 4\pi$, то она изменяется при передвижении по поверхностной ленте, заключенной между двумя бесконечно близкими ортогональными линиями, и это изменение происходит так, как будто новое количество электричества приносится на эту ленту или уносится с нее вихревыми струйками [1]. Действительно, пусть (фиг. 15) ef и gh будут две бесконечно близкие ортогональные линии, ограничивающие поверхностную ленту. Вырежем из нее бесконечно малый прямоугольник $abcd$ и построим на нем вихревую нить, идущую внутрь пространства Σ; потом напишем по теореме Стокса, что

$$V_s' ad - V_s bc = 2\omega\, dq,$$

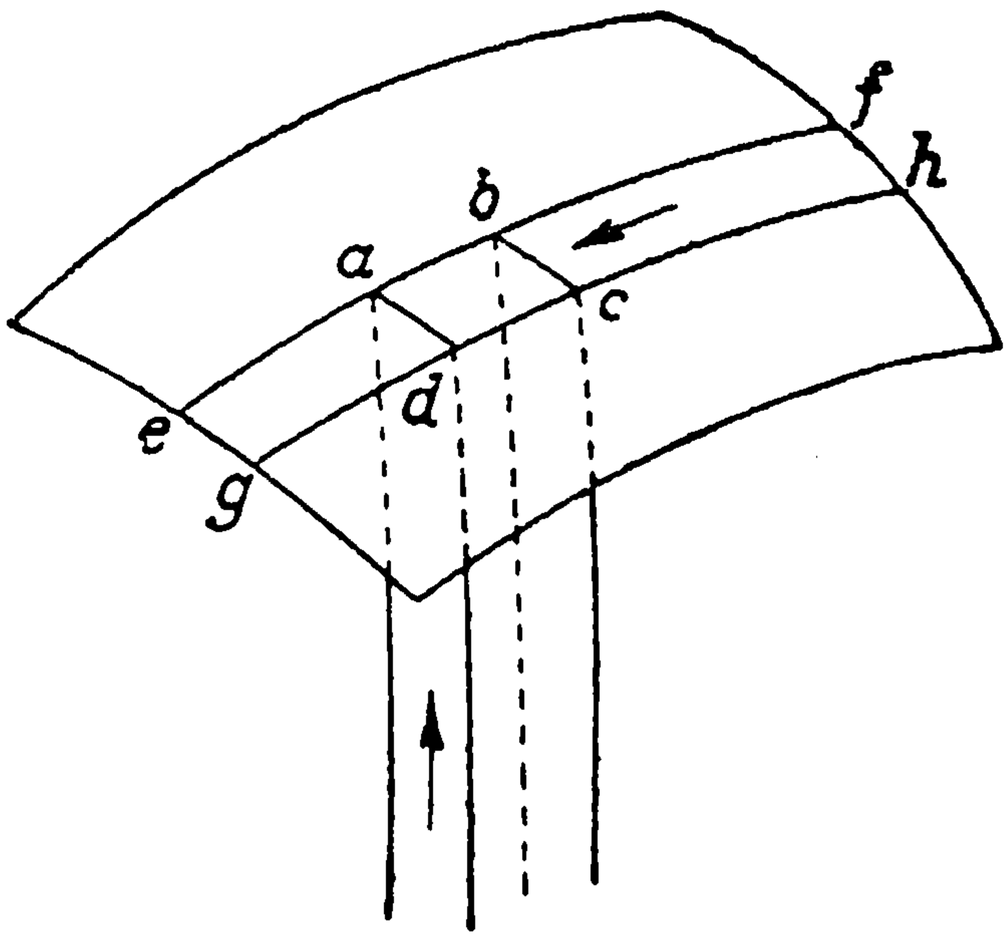
где V_s и V_s' — тангенциальные скорости в точках c и d, а $\omega\, dq$ — напряжение вихревой нити, построенной на контуре $abcd$. Разделив написанное равенство на 4π, найдем, что количество электричества, протекшее через разрез ленты ad, более количества электричества, протекшего через разрез ее bc, на количество электричества, притекшего по вихревой нити, построенной на контуре $abcd$, что и требовалось доказать.

Если $\theta = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, т. е. рассматривается невихревое

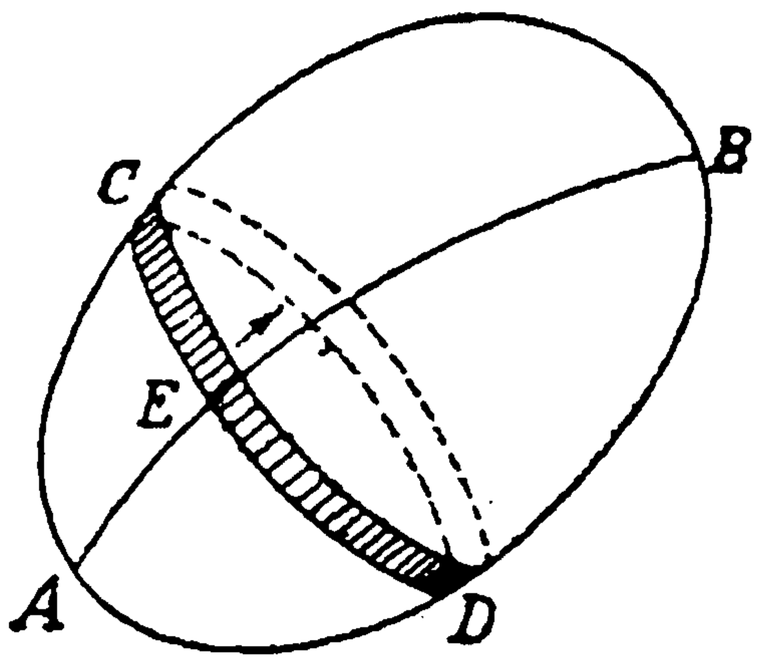
[1] Это обстоятельство указано проф. Н. Н. Шиллером „Киевские университетские известия“, 1881.

течение несжимаемой жидкости, то скорости будут выражаться силами, происходящими только от магнитных масс и токов, расположенных на границах пространства. Потенциал магнитных масс будет при этом по формуле (6):

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{dF}{dn}d\sigma, \tag{9}$$



Фиг. 15.



Фиг. 16.

где F — потенциал скоростей рассматриваемого невихревого течения. Что же касается поверхностных токов, то все они на основании сказанного выше должны иметь постоянную силу тока и быть замкнутыми. (На односвязной граничной поверхности они будут иметь расположение, указанное в конце § 9.) Действие каждого такого тока, как известно, имеет потенциал сил, который равен потенциалу двойного магнитного слоя, расположенного на поверхности, проходящей через контур слоя [1]. Пусть пространство рассматриваемого течения односвязно, и все линии, идущие по его граничной поверхности в направлении V_s, пересекаются в *точках схода* A и B (фиг. 16), так что ортогональные линии имеют эти точки полюсами. Потенциал тока, идущего по одной из лент CD,

[1] Поверхностная плотность двойного слоя получается так: проведем через рассматриваемую точку сквозь контур тока прямую, которую будем считать направленной в ту сторону, глядя из которой ток идет по солнцу; эта прямая пересечет двойной слой толщины dn в двух точках, которые, считая по направлению прямой, пусть будут A и B; в A надо взять плотность $\frac{i}{dn}$, а в B плотность $-\frac{i}{dn}$, где i — сила тока.

ограниченной двумя бесконечно близкими ортогональными линиями, может быть выражен двойным интегралом

$$-\frac{V_s ds}{4\pi}\int\int \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

распространенным на поверхность CAD. Определяя место каждой из лент CD с помощью отрезка $AE = s$, который она отсекает на одной из линий AB, направленных по V_s, обозначим часть двойного интеграла, относящуюся к какой-нибудь ленте CD, через $f(s)\,ds$, так что весь вышенаписанный потенциал представится в виде

$$-\frac{V_s ds}{4\pi}\int f(s)\,ds.$$

Составляем сумму подобных потенциалов, взятых для всех поверхностных токов:

$$S'' = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0}\left\{\int_0 f(s)\,ds\right\}V_s ds,$$

где $s_0 = AB$. Интегрируем по частям:

$$S'' = -\frac{1}{4\pi}\int_0 (s)\,ds\int_0 V_s ds + \frac{1}{4\pi}\int_0\left\{\int_0 V_s ds\right\}f(s)\,ds.$$

Так как на основании формулы (1) третьей лекции

$$\int_0^s V_s ds = F,$$

и для внутренней точки (x, y, z)

$$\int_0^{s_0} f(s)\,ds = \int\int \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = 4\pi,$$

потому что интеграция распространяется на всю граничную поверхность, то

$$S'' = \text{const} + \frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma, \qquad (10)$$

где интеграция распространяется на всю граничную поверхность. По теореме Бельтрами мы должны иметь для рассматриваемого течения

$$F = S' + S'' = \text{const},$$

что на основании формул (9) и (10) вполне согласно с формулой (8) третьей лекции.

Если $\theta = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = V_n = 0$, то мы будем иметь невихревое течение несжимаемой жидкости, ограниченное поверхностями тока. Такое течение может, как было показано в § 11, совершаться только в многосвязном пространстве. Скорости всех точек жидкости будут при этом выражаться одними силами действия токов, расположенных на ее границах. Эти токи будут действовать на единицу магнитной массы, помещенную на граничной поверхности, силой, направленной по этой поверхности и равной V. Припомним из теории электромагнитных взаимодействий следующую теорему: если вектор R представляет силу действия магнитного поля на единицу магнитной массы, помещенной в его начальной точке, то сила действия этого поля на элемент тока dc, помещенный в той же точке, выразится геометрически скоростью конца вектора R при его вращении около dc с угловой скоростью idc, где i — сила тока в сторону часовой стрелки для наблюдателя, глядящего с той стороны, куда идет ток. Так как элемент поверхностного тока будет направлен по элементу dc ортогональных линий и будет иметь силу тока $i = V\,ds : 4\pi$, то на основании вышенаписанной теоремы сила R' действия на него всех поверхностных токов будет равна

$$R' = \frac{1}{4\pi} V^2 dc\, ds$$

или, положив $dc\, ds = d\sigma$,

$$R' = \frac{1}{4\pi} V^2 d\sigma; \tag{11}$$

направление же этой силы будет на основании сказанного в конце теоремы Бельтрами совпадать с внутренней нормалью граничной поверхности. Вообразив, что жидкая масса отвер-

дела, и покрыв ее поверхность токами, пробегающими по деформируемым проводникам в том же направлении и с той же силой тока, как вышеупомянутые фиктивные токи, мы увидим, что все такие токи, взаимодействуя друг на друга, останутся в равновесии.

§ 14. Жидкие массы, соприкасающиеся по поверхностям раздела. Так как скорости, определяемые по теореме Бельтрами для точек, лежащих вне пространства, занятого рассматриваемой массой, равны нулю, то эту теорему удобно применять зараз к нескольким движущимся жидким массам, соприкасающимся по поверхностям раздела. Рассмотрим здесь два подобных случая:

Предположим, что внутри массы несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое движение, находится масса несжимаемой жидкости, движущаяся таким вихревым движением, что на поверхности раздела обе массы имеют одинаковые нормальные и тангенциальные скорости. В этом случае рассматриваемая поверхность является только поверхностью раздела компонентов вихря, и так как циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру на этой поверхности для обоих течений одинакова, то эта поверхность будет непременно поверхностью вихря внутреннего течения. Ограничим наружную жидкую массу бесконечно большой сферой и сложим скорости, которые дает для нее теорема Бельтрами, с подобными же выражениями скоростей для внутренней жидкой массы. Мы увидим, что при этом силы, получаемые от магнитных масс и токов, расположенных на поверхности раздела, взаимно уничтожатся (вследствие равенства нормальных и тангенциальных скоростей), силы, происходящие от магнитных масс и токов, расположенных на бесконечно удаленной сфере, будут бесконечно малыми величинами a^{-3} порядка, где a — радиус сферы (по § 12), и у нас останутся только силы, происходящие от токов, текущих по имеющимся вихревым нитям. Эти силы и выразят скорости обеих жидких масс. Мы будем называть жидкую массу с вихревым течением, погруженную в жидкость, имеющую невихревое течение, *вихревой массой*. Понятно, что сказанное нами одинаково приложимо как к одной, так и ко многим

вихревым массам, погруженным в беспредельную жидкость, покоящуюся в бесконечности и имеющую невихревое течение. *Скорости этого невихревого течения, равно как и скорости всех вихревых масс, геометрически равны силам, действующим на единицу магнитной массы гальванических токов, пробегающих по всем имеющимся вихревым нитям с силой тока* $\omega : 2\pi$.

Для второго случая вообразим, что внутри массы несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое течение, находится несжимаемая жидкая масса, имеющая тоже невихревое течение, причем на поверхности раздела обеих масс равны только нормальные скорости. Ограничивая беспредельную жидкую массу бесконечно большой сферой, сложим скорости, которые дает для нее теорема Бельтрами, с подобными же скоростями для внутренней жидкой массы.

При этом сложении силы, происходящие от магнитных масс на поверхности раздела, взаимно уничтожаются (вследствие равенства нормальных скоростей), силы, происходящие от магнитных масс и токов на бесконечно удаленной сфере, будут бесконечно малы, и у нас остаются только силы, происходящие от токов, расположенных на поверхности раздела. Эти токи будут иметь детерминанты:

$$\left.\begin{aligned} L' &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(w-w')\cos\beta-(v-v')\cos\gamma\right]d\sigma, \\ M' &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(u-u')\cos\gamma-(w-w')\cos\alpha\right]d\sigma, \\ N' &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(v-v')\cos\alpha-(u-u')\cos\beta\right]d\sigma, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где u, v, w — скорости внутреннего, u', v', w' — скорости внешнего течения, а α, β, γ — углы нормали к поверхности раздела, взятой внутрь жидкой массы.

Таким образом *скорости обоих течений жидкости представляются здесь силами, происходящими от токов, иду-*

щих по поверхностям раздела перпендикулярно к геометрическим разностям скоростей течений с силами тока

$$ds\sqrt{(u-u')^2-(v-v')^2+(w-w')^2}:4\pi,$$

где ds *— ширина поверхностной ленты.*

Если заменим поверхность раздела бесконечно тонким слоем, внутри которого жидкость имеет вихревое движение, и предположим, что скорости u, v, w при переходе через этот слой, изменяясь непрерывно, обращаются в u', v', w', то приведем разбираемый здесь случай к вышеисследованному и придем к заключению, что скорости всей жидкой массы выражаются силами действия токов, протекающих по вихревым нитям воображаемой вихревой массы. Такую бесконечно тонкую вихревую массу называют *вихревым слоем*. Направление вихревых нитей вихревого слоя и соответствующие им напряжения вихря могут быть определены из сравнения формул (12) с формулами (3). Если ε будет бесконечно малая толщина вихревого слоя, то компоненты угловых скоростей частиц слоя будут:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{(w-w')\cos\beta-(v-v')\cos\gamma}{2\varepsilon},\\ \omega_2 &= \frac{(u-u')\cos\gamma-(w-w')\cos\alpha}{2\varepsilon},\\ \omega_3 &= \frac{(v-v')\cos\alpha-(u-u')\cos\beta}{2\varepsilon}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

При бесконечно большой скорости вращательного движения частицы вихревого слоя претерпевают бесконечно большую деформацию, так как коэфициент скошения перпендикуляра к плоскости, прикасающейся к поверхности раздела, бесконечно велик.

Поясним рассматриваемый случай примером. Положим, что жидкая масса, имеющая форму шара радиуса b, движется поступательно со скоростью q внутри беспредельной массы несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое течение. Примем центр шара за полюс полярных

координат, полярная ось которых направлена по скорости поступательного движения q. Для внутреннего течения жидкости на поверхности сферы скорости v_s направлены по меридианам ее и выражаются так:

$$v_s = -q \sin\theta.$$

Мы пишем здесь знак (—), чтобы показать, что v_s направлены в сторону, противоположную отсчету полярной дуги θ. Для внешнего течения тангенциальные скорости v_s' на поверхности сферы тоже направлены по ее меридианам и выражаются на основании формулы (16) третьей лекции через

$$v_s' = \frac{d}{b\,d\theta}\left(-\frac{qb\cos\theta}{2}\right) = \frac{q\sin\theta}{2}.$$

Поворачивая первую скорость на прямой угол по часовой стрелке около внутренней нормали сферы, а вторую — около внешней нормали ее, получим гальванические токи, текущие по параллельным кругам сферы с силами тока

$$\frac{3q\sin\theta}{8\pi}\,b\,d\theta \qquad (14)$$

по направлению часовой стрелки для наблюдателя, глядящего с той стороны, в которую движется сфера. Определим потенциал этих токов для внешней и внутренней точек сферы. Проводим через все токи плоскости параллельных кругов и покрываем их магнитными массами, имеющими поверхностную плотность

$$-\frac{3q}{8\pi}\,b\sin\theta\,d\theta.$$

Такое распределение магнитных масс будет тождественно с объемным распределением масс в бесконечно тонком слое, заключенном между двумя плоскостями параллельных кругов, проходящих через края поверхностной ленты ширины $b\,d\theta$ с объемной плотностью

$$-\frac{3q}{8\pi}.$$

Все такие слои будут представлять нам сферу радиуса b, наполненную однородной магнитной массой плотности

$$-\frac{3q}{8\pi}.$$

Чтобы получить двойные магнитные слои, продвинем эту сферу в направлении полярной оси на расстояние dx и изменим ее плотность на

$$\frac{3q}{8\pi}.$$

Сумма потенциалов обеих сфер на каждую внешнюю точку, разделенная на dx, будет искомым потенциалом на внешнюю магнитную массу всех наших токов.

Этот потенциал есть:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3q}{8\pi}\frac{4}{3}\pi b^3\frac{1}{r}\right)=-\frac{b^3qx}{2r^3}=-\frac{qb^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad (15)$$

где положено $x=r\cos\theta$. Это вполне согласно с формулой (16) третьей лекции.

Повторяя такое же рассуждение относительно внутренней точки, мы должны заметить, что при отбрасывании токов, плоскости которых бесконечно близки к рассматриваемой точке, сумма потенциалов на эту точку всех других токов может быть представлена формулой

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3q}{8\pi}\frac{2}{3}\pi r^2\right)=-\frac{1}{2}qx, \qquad (16)$$

так что изменение потенциала при передвижении единицы магнитной массы на dx будет слагаться из

$$-\frac{1}{2}q\,dx$$

и того приращения, которое получается вследствие того, что рассматриваемая точка проходит сквозь плоскости некоторых из отброшенных токов.

Если $dx=b\sin\theta\,d\theta$, то сумма сил токов для всех токов, через плоскости которых проходит единица магнитной массы

при передвижении на dx, будет дана формулой (14), и потому потенциал их должен возрасти [1] на

$$4\pi \frac{3q \sin\theta}{8\pi} b\, d\theta = \frac{3}{2} q\, dx. \tag{17}$$

Складывая оба приращения потенциала (16) и (17) и деля сумму на dx, найдем, что скорость внутренней точки по направлению полярной оси будет q. Скорость же по направлению, перпендикулярному полярной оси, будет нуль, потому что при передвижении в этом направлении потенциал (16) не изменяется, и точка не пересекает плоскостей токов. Таким образом мы видим, что данное поверхностное распределение токов развивает силы, выражающие не только скорости внешнего, но и скорости внутреннего течения жидкости.

---

[1] Известно, что при прохождении через двойной магнитный слой потенциал возрастает на $-4\pi i$, если идем из той стороны, из которой ток кажется по солнцу.

Уравнения гидродинамики и их интегралы

§ 15. Уравнения гидродинамики в форме Эйлера и Лагранжа. Формулы Бернулли и Лагранжа.

Назвав через ρ плотность жидкости, p — гидростатическое давление и X, Y, Z — составляющие действующих сил, отнесенные к единице массы, напишем уравнения равновесия жидкости:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Если в этих уравнениях заменим силы действующие силами потерянными и будем под p разуметь гидродинамическое давление, то по началу Даламбера получим уравнения движения жидкой массы:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dx} = X - \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dy} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dz} = Z - \frac{d^2z}{dt^2},$$

где d представляет диференциал по времени функции, отнесенной к определенной частице жидкости. Мы будем рассматривать только такие случаи, в которых силы X, Y, Z имеют

силовую функцию U, а плотность ρ или постоянна (для несжимаемой жидкости), или есть известная функция p (для газообразных тел, изменяющихся по определенному процессу). Положив при таком предположении, что

$$\int \frac{dp}{\rho} = P, \tag{2}$$

можем написать уравнения (1) в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(U-P)}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(U-P)}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(U-P)}{\partial z}.$$

Эти уравнения вместе с присоединенным к ним условием неизменяемости массы частицы жидкости и граничными условиями служат для решения вопросов о движении жидкости. Их можно представить в форме Эйлера или в форме Лагранжа [1] В первом случае за неизвестные задачи принимаются компоненты скорости u, v, w и давление p, рассматриваемые как функции координат данной точки пространства и времени t. Полное изменение скорости, отнесенной к данной точке жидкости, будет при этом происходить и от того, что t изменяется, и от того, что место точки измененяется, вследствие чего

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w,$$

где ∂ — изменение по времени, совершающееся в данной точке пространства. Подставив это и подобные выражения в формулы (3), найдем:

---

[1] Hankel в своем сочинении „Zur allgemeinen Thecrie der Bewegung der Flüssigkeiten“ (Göttingen, 1861) указывает, что обе формы уравнений принадлежат Эйлеру; но вследствие того, что за уравнениями (7) установилось название лагранжевых, мы будем их тоже так называть.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial(U-P)}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial(U-P)}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial(U-P)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Сюда следует прибавить условие неизменяемости массы частицы жидкости. Назовем бесконечно малый объем частицы жидкости через V и напишем, что

$$\frac{d}{dt}\lg(\rho V)=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\theta=0,$$

где θ — коэфициент кубического расширения, который определяется по формуле (13) первой лекции, так что

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Когда жидкость несжимаема, то $d\rho=0$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \tag{5}$$

для газообразной же жидкости формулу (5) можно написать так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{6}$$

Уравнения (4) с прибавленными к ним уравнениями (5) или (6) и суть уравнения гидродинамики в форме Эйлера.

Для составления лагранжевой формы уравнений гидродинамики будем рассматривать x, y, z и p как функции начальных координат a, b, c точек жидкости и времени t. Умножаем уравнения (3) на

$$\frac{\partial x}{\partial a},\ \frac{\partial y}{\partial a},\ \frac{\partial z}{\partial a}$$

и складываем. Тогда получится уравнение, которое вместе с двумя аналогичными можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial(U-P)}{\partial a},\\
&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial(U-P)}{\partial b},\\
&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{\partial(U-P}{\partial}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Сюда следует прибавить условие неизменяемости массы частицы жидкости за все время движения t. Обозначая через V_0 и ρ_0 начальные объем и плотность частицы и V и ρ — ее объем и плотность во время t, находим, что

$$V\rho - V_0\rho_0 = (V - V_0)\rho + V_0(\rho - \rho_0) = 0,$$

или, деля на $V_0\rho$,

$$\theta + 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 0,$$

где коэфициент кубического расширения θ определяется по формуле (23) первой лекции, так что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho}. \qquad (8)$$

Что касается граничных условий, которые должны быть приняты во внимание при той и другой форме уравнений гидродинамики, то они требуют, чтобы на свободной поверхности жидкой массы p имело данную величину, а на поверхностях стенок надо, чтобы нормальные составляющие скоростей прилегающих точек жидкости равнялись нулю, если стенка неподвижна, и равнялись бы нормальным скоростям точек самой стенки, если она движется.

Ко всему этому следует еще прибавить, что гидродинамическое давление p во всех точках жидкой массы должно быть положительно и должно изменяться непрерывно при переходе от одной точки к другой.

Уравнения (4) могут быть еще представлены в иной форме, весьма удобной для многих выводов, с помощью компонентов вихря ω_1, ω_2, ω_3. По первому из уравнений (4)

$$\frac{\partial}{\partial x}(U-P)=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)w-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)v.$$

Обозначая здесь через V скорость точки жидкости и обращаясь к формулам (3) первой лекции, преобразуем это уравнение вместе с двумя аналогичными в такие:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{V^2}{2}\right)&=\frac{\partial u}{\partial t}+2(\omega_2 w-\omega_3 v),\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{V^2}{2}\right)&=\frac{\partial v}{\partial t}+2(\omega_3 u-\omega_1 w),\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{V^2}{2}\right)&=\frac{\partial w}{\partial t}+2(\omega_1 v-\omega_2 u).\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Если рассматриваемое движение жидкости есть установившееся, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0.$$

Умножив в этом предложении формулы (9) соответственно на диференциалы dx, dy, dz, находящиеся в отношении

$$dx:dy:dz=u:v:w,$$

и сложив полученные уравнения, найдем, что

$$d\left(U-P-\frac{V^2}{2}\right)=0,$$

где d обозначает изменение при передвижении по линии тока (траектории). Интегрируем:

$$U-P-\frac{V^2}{2}=\text{const}.\qquad(10)$$

Этот интеграл, в котором постоянное зависит от взятой линии тока, и есть формула Бернулли.

Аналогичная формула Лагранжа получается, когда течение жидкости в начальный момент времени было невихревое, и силы имеют силовую функцию; тогда, как будет показано ниже, течение все время будет невихревое, т. е. все время движения

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Подставляем это в формулы (9):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что многочлен, стоящий в скобках, постоянен для всех точек жидкости:

$$U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t} = \text{const}, \tag{11}$$

где постоянное есть функция времени.

§ 16. Теорема Томсона. Принцип сохранения вихрей. Выделим мысленно ряд точек жидкости, лежащих в начальный момент времени на некоторой замкнутой кривой, уравнение второй с помощью параметра σ выражается в виде[1]:

$$a = \varphi(\sigma), \quad b = \varphi_1(\sigma), \quad c = \varphi_2(\sigma).$$

Относя уравнения (7) к рассматриваемым точкам жидкости, умножаем их соответственно на

$$\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}.$$

---

[1] За такой параметр удобно принять длину кривой, считаемую от некоторой ее точки.

и складываем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\sigma}=\frac{d(U-P)}{d\sigma}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\sigma}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{d(U-P)}{d\sigma}.$$

Назовем через ds элемент дуги замкнутого контура, на котором будут лежать рассматриваемые точки жидкости во время t, и через θ — угол между ds и скоростью V; тогда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=V^2,$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\sigma}=\frac{Vds\cos\theta}{d\sigma}.$$

Подставляем в вышенаписанное уравнение и преобразуем его в

$$\frac{d}{dt}\left(Vds\cos\theta\right)=d\left(U-P+\frac{V^2}{2}\right).$$

Берем от обеих частей этого равенства интеграл, распространенный на изменение σ вдоль всего замкнутого контура:

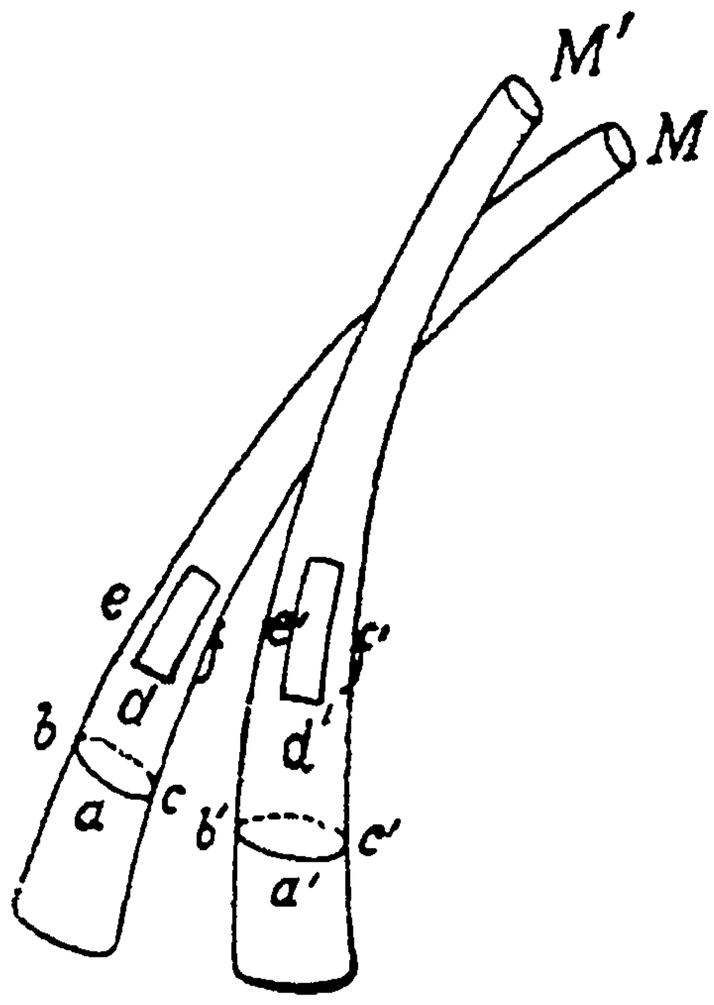
$$\frac{d}{dt}\left(\int Vds\cos\theta\right)=0. \tag{12}$$

Это равенство дает нам теорему Томсона [1]: *если силы, под действием которых движется жидкость, имеют силовую функцию, то циркуляция скорости по замкнутому контуру, проводимому постоянно через одни и те же точки жидкости, не изменяется со временем.*

Пользуясь теоремой Томсона, легко обнаружить знаменитый принцип Гельмгольца сохранения вихрей. Вообразим

[1] „On vortex motion“, Philos. Trans. R. S. Edin., p. 274, 1869.

ф иг. 17) в начальный момент времени некоторую вихревую нить M и проведем на ее поверхности два бесконечно малых замкнутых контура: контур def, обращаемый в точку, не сходя с поверхности нити, и контур abc, охватывающий нить. По прошествии времени t жидкость, заполняющая трубку M, будет заполнять некоторую бесконечно тонкую трубку M'; точки же жидкости, лежащие на контурах def и abc, будут лежать на контурах $d'e'f'$ и $a'b'c'$. По теореме Томсона циркуляции скорости по этим новым контурам будут те же, какие были по старым. Так как контур def лежит на поверхности вихря, то $(def) = 0$, а следовательно, и $(d'e'f') = 0$, и так как это рассуждение применимо ко всякому бесконечно малому контуру рассматриваемого вида, то заключаем, что поверхность трубки M' есть поверхность вихря, т. е. бесконечно тонкая масса жидкости, заполняющая эту трубку, есть вихревая нить. Далее (abc) есть двойное напряжение вихревой нити M, а $(a'b'c')$ есть двойное напряжение вихревой нити M'; так как $(abc) = (a'b'c')$, то напряжения обоих вихрей одинаковы.



Фиг. 17.

Таким образом *при движении жидкости под действием сил, имеющих силовую функцию, часть жидкой массы, образующая вихревую нить, движется, оставаясь вихревой нитью с постоянным напряжением вихря.* Этот замечательный принцип был установлен Гельмгольцем [1], которому принадлежит введение в гидродинамику учения о вихревых нитях, но три интеграла уравнений (7), из которых этот принцип прямо вытекает, были даны много раньше Коши [2].

Если бы в начальный момент времени течение жидкости было невихревое, то циркуляции скорости по всем замкнутым контурам, обращаемым в точки, были бы равны нулю. По

[1] Über Integrale der hydrodinamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, § 2, „Journal von Borchardt", Bd. 55, 1858.

[2] Sur la théorie des ondes, seconde partie, § 4, „Savants étrangers", 1815.

теореме Томсона при существовании силовой функции это свойство циркуляций останется во все время движения, т. е. *во все время движения жидкость будет иметь невихревое течение.* Эта теорема, являющаяся частным случаем принципа сохранения вихрей, была доказана в первый раз Лагранжем [1]. Пользуясь теоремой Томсона, сделаем здесь еще одно интересное заключение о движении несжимаемой жидкости, движущейся под действием сил, имеющих однозначную в рассматриваемом пространстве силовую функцию, внутри замкнутого многосвязного сосуда. Предположив, что начальное течение жидкости есть невихревое, мы должны будем по § 11 допустить, что циркуляции скорости по всем замкнутым контурам, обращаемым в точки, суть нули, а некоторые из циркуляций по главным контурам имеют конечные величины. Отсюда по теореме Томсона следует, что во все время движения жидкость будет иметь внутри сосуда невихревое течение с теми же главными циркуляциями. Но так как (§ 11) главные циркуляции вполне определяют рассматриваемое течение, то *оно все время будет оставаться неизменным, каковы бы ни были действующие силы.*

§ 17. Об определенности уравнений гидродинамики. Рассматривая уравнения движения газообразного тела, для которого дана связь между p и ρ, мы замечаем, что здесь все искомые величины определяются по прошествии элемента времени dt, если они были известны в начале этого времени. Действительно, если в некоторый момент времени t мы знаем u, v, w и ρ, то, определив по ρ давление p и функцию P (формула 2), найдем из уравнений (4) и (6) du, dv, dw, $d\rho$, т. е. будем знать u, v, w, ρ для момента времени $t + dt$. Это показывает, что, задавшись начальными значениями u, v, w, ρ и переходя затем последовательно от одного момента к другому, бесконечно близкому, мы определим u, v, w, ρ для всего времени движения. Разумеется, такое определение невыполнимо практически, но приведенное рассуждение показывает, что данные уравнения гидродинамики вполне достаточны для решения задачи.

---

[1] Mécanique analytique, t. II, sec. X, § 16.

Рассмотрение с этой точки зрения задачи о движении несжимаемой жидкости представляет большие трудности, так как в этом случае плотность ρ постоянна и не может служить для определения гидродинамического давления. Здесь нам дают только величины u, v, w в начальный момент времени для всех точек жидкой массы и величину $P = \frac{p}{\rho}$ во все время движения для всех точек свободных поверхностей ее; но можно показать, что и этих данных вполне достаточно для определения u, v, w во всякое время. Пусть во время t нам известны u, v, w. Относя к этому времени уравнения (4), берем от обеих частей их соответственно производные по x, y, z и складываем все полученные уравнения, обратив внимание на уравнение (5):

$$\Delta_2(U-P) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

где Δ_2 — знак второго диференциального параметра. Пользуясь знаком первого диференциального параметра, т. е. полагая

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = (\Delta u)^2 \text{ и т. д.}$$

и обращая внимание на формулы компонентов угловой скорости ω вращения частицы жидкости, можем найденное уравнение написать еще так:

$$\Delta_2(U-P) = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 - 4\omega^2. \qquad (13)$$

Эта величина известна нам во всех точках жидкой массы; на всех же свободных поверхностях ее мы знаем самую функцию $U-P$. Покажем, что на всех неподвижных стенках мы можем определить нормальную производную этой функции. Назовем через α, β, γ углы внутренней нормали n неподвижной стенки с осями координат и, умножив уравнения (3) соответственно на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, сложим их:

$$\frac{d(U-P)}{dn} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma = \frac{V^2}{\rho}\cos\theta,$$

где V — скорость точки жидкости, прилегающей к стенке, ρ — радиус кривизны траектории этой точки, а θ — угол между ρ и n. Так как по теореме Менье между ρ и радиусом кривизны r нормального сечения поверхности стенки, проведенного через направление V, имеется связь:

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{r},$$

то [1]

$$\frac{d(U-P)}{dn} = \frac{V^2}{r}. \tag{14}$$

По принципу Дирикле при указанных данных может существовать внутри рассматриваемого пространства только одна, совершенно определенная функция $U-P$, которая вместе с своими производными конечна и непрерывна в рассматриваемом пространстве. Действительно, если бы существовали две такие функции, то, составляя их разность, мы нашли бы функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, которая на некоторых из граничных поверхностей равняется нулю, а на других — имеет нормальную производную, равную нулю; такая функция по § 11 везде внутри рассматриваемого пространства равна нулю.

Когда функция $U-P$ будет определена, то из уравнений (4) найдем du, dv, dw и, следовательно, будем знать u, v, w для времени $t+dt$.

Это показывает, что, задавшись величинами u, v, w в начальный момент времени и дав значение P на свободных поверхностях во всякое время, мы можем, переходя от одного момента времени к другому, бесконечно близкому, определить

---

[1] Если бы рассматриваемая твердая стенка была в движении, то, назвав через V скорость относительного движения точки жидкости по стенке, Ω — проекцию угловой скорости вращения стенки на ее касательную плоскость, k — нормальную составляющую полного ускорения самой стенки и φ — угол между V и Ω, считаемый по часовой стрелке от V к Ω около нормали n, мы нашли бы

$$\frac{d}{dn}(U-P) = \frac{V}{r} - 2V\Omega\sin\varphi + k.$$

u, v, w для всякого времени[1]. Таким образом уравнения (4) и (5) вместе с поверхностными условиями и начальными значениями u, v, w вполне достаточны для определения движения несжимаемой жидкой массы[2].

Предполагая, что функция U вместе со своими производными конечна и непрерывна внутри пространства, занимаемого несжимаемой жидкостью (т. е. циркуляция силы по всякому замкнутому контуру в этом пространстве равна нулю), замечаем из сказанного выше, что для определения движения несжимаемой жидкости нам нужно знать только величину U на свободных поверхностях ее. Это приводит нас к весьма важному заключению, на которое, как мне кажется, не было указано с достаточной определенностью: *силовая функция сил, действующих на частицы движущейся несжимаемой жидкости, оказывает влияние на движение этой жидкости только своим значением на ее свободных поверхностях.* Если нет свободных поверхностей, то силы, действующие на частицы жидкой массы, не оказывают никакого влияния на их движения. Если бы имелась только одна свободная поверхность, находящаяся под постоянным внешним давлением, и нам удалось бы найти движение несжимаемой жидкости, удовлетворяющее ее кинематическим условиям, при котором полные ускорения имеют потенциальную функцию (циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру равна нулю), то оставалось бы только посмотреть, будет ли для всех точек свободной поверхности проекция полного ускорения

---

[1] Проф. В. В. Преображенский предложил воспользоваться этим соображением для того, чтобы выразить u, v, w и P в виде бесконечных строк. Отчеты Казанского съезда, 1873.

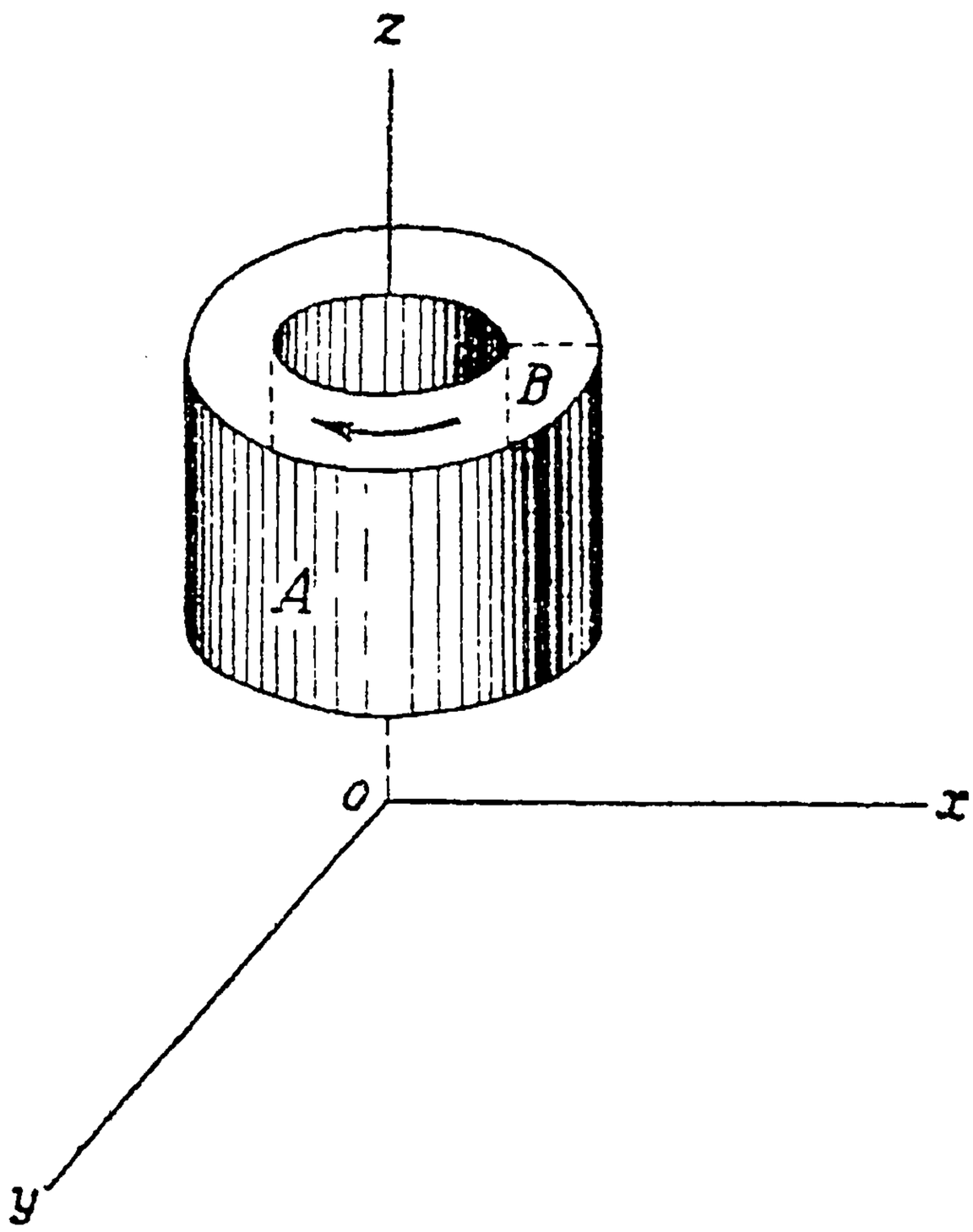
[2] Основания для суждения об определенности уравнений гидродинамики при малых скоростях даны в заметке Коши к его сочинению „Sur la théorie des ondes“, note XX, „Savant étrangers“, 1815. Впоследствии Липшиц и проф. Д. К. Бобылев показали, как определить давление при конечных скоростях и при существовании трения.

Lipschiz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne. Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, T. VI.

Бобылев, Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Mathematische Annalen von Neumann, Bd. VI, 1873.

на касательную плоскость геометрически равна проекции на эту плоскость действующей силы. Если бы и это имело место, то найденное движение жидкости было бы ее истинным движением.

Можно сказать, таким образом, что силы движут несжимаемую жидкую массу, только действуя на ее свободную поверхность. Но все эти заключения справедливы в предположении, что можно во всякой точке жидкой массы дать значение функции U, которое будет непрерывно изменяться при переходе от одной точки к другой. Если бы циркуляция действующей силы по некоторым замкнутым контурам не равнялась нулю, т. е. мы могли бы задать значения функции U для каждой точки пространства только так, что при переходе через некоторую поверхность они бы изменялись скачком (стр. 193), то для такой силовой функции наши заключения были бы несправедливы. Поясним это примером.



Фиг. 18.

Пусть (фиг. 18) несжимаемая жидкая масса заключена между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров.

Направим ось oz прямоугольных осей координат по оси цилиндров и предположим, что силовая функция U выражается формулой

$$U = k \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = k\varphi, \qquad (15)$$

где φ — угол, образуемый с осью ox радиусом-вектором проекции рассматриваемой точки на плоскость xoy. Если бы в рассматриваемом сосуде существовала перегородка B, то в нем жидкая масса могла бы находиться в равновесии.

При этом гидростатическое давление было бы

$$p = k\rho\varphi + \text{const}$$

и отличалось бы с двух сторон перегородки на $2\pi k\rho$. Отняв перегородку B, мы получили бы движение жидкости, несмотря на то, что она заключена в замкнутом сосуде. Определим это движение, заметив, что оно будет совершаться по кругам около оси oz со скоростями V, зависящими только от r и t. Положив в формулах (9) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, умножаем первую формулу на $\cos\varphi$, вторую — на $\sin\varphi$ и складываем; потом умножаем первую на $-\sin\varphi$, вторую — на $\cos\varphi$ и опять складываем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(U - \rho - \frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(U - \rho - \frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0,$$

то из первого уравнения получаем:

$$P = -\frac{V^2}{2} + \text{const}, \tag{16}$$

а из второго по формуле (15) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{r}$$

или

$$V = \frac{kt}{r}. \tag{17}$$

Таким образом рассматриваемые силы будут двигать жидкую массу с беспредельно возрастающими скоростями.

Об установившемся течении жидкости

§ 18. Признак установившегося движения. Положим, что нам дано установившееся течение жидкости под действием сил, имеющих силовую функцию. Вообразив поверхность тока, проходящую через какую-нибудь линию вихрей, придем к заключению, что эта поверхность будет описана точками жидкости, лежащими на этой линии, и так как по теореме Гельмгольца эти точки будут все время движения оставаться на линии вихрей, то построенная нами поверхность тока должна быть также и поверхностью вихрей. Отсюда вытекает первый признак установившегося движения: *одно из семейств линий тока должно быть семейством поверхностей вихря.* Рассматривая одну из поверхностей такого семейства, заметим, что по теореме Бернулли трехчлен

$$\lambda = U - P - \frac{V^2}{2} \qquad (1)$$

не изменяет своей величины, когда мы перемещаемся вдоль линий тока этой поверхности; но, с другой стороны, этот трехчлен не изменяется также, когда мы перемещаемся по поверхности вдоль линий вихря, так как, умножая уравнения (9) пятой лекции соответственно на dx, dy, dz в предположении

$$dx : dy : dz = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3,$$

находим для установившегося течения:

$$d\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

где d — изменение по линии вихрей.

Если функция λ не изменяется как при передвижении по линиям тока рассматриваемой поверхности, так и по имеющимся на ней линиям вихря, то она остается на ней постоянной. Таким образом уравнения рассматриваемого семейства поверхностей представляются формулой (1), где λ — параметр семейства. Пользуясь функцией λ, напишем уравнения (9) пятой лекции в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial x} &= 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} &= 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} &= 2(\omega_1 v - \omega_2 u). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Возводим в квадрат и складываем:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= 4\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2\right]$$

или

$$\frac{d\lambda}{dn} = 2\omega V \sin\theta, \tag{3}$$

где векторы ω и V имеют значение, указанное в пятой лекции, θ — угол между ними, а dn — элемент нормали, заключенный между двумя бесконечно близкими поверхностями семейства (1).

Формула (3) дает нам второй признак установившегося движения: *объем бесконечно тонкого параллелепипеда, построенного на V, ω и dn, постоянен на каждой из поверхностей семейства* (1) [1].

При этом, если жидкость несжимаема, то, не зная наперед P, мы находим семейство (1) по первому признаку и смотрим, удовлетворен ли на этом семействе второй признак. Если же имеем жидкость, сжимаемую по известному процессу, то P вполне определяется по ρ, так что, зная ρ, мы получаем по

---

1 Эти признаки даны в сочинении Ламба, Einleitung in die Hydrodynamik von Horace Lamb, § 145.

формуле (1) семейство искомых поверхностей и должны посмотреть, удовлетворяются ли на этом семействе признаки первый и второй. Докажем, что указанные признаки являются достаточными условиями установившегося движения (вместе с граничными условиями). Предполагая, что жидкость сжимаема по известному процессу, найдем по первому признаку:

$$\frac{2(\omega_2 w - \omega_3 v)}{\frac{\partial \lambda}{\partial x}} = \frac{2(\omega_3 u - \omega_1 w)}{\frac{\partial \lambda}{\partial y}} = \frac{2(\omega_1 v - \omega_2 u)}{\frac{\partial \lambda}{\partial z}};$$

по второму признаку знаменатель отношения этой пропорции, который может быть представлен в виде

$$\frac{2\omega V \sin\theta}{\frac{d\lambda}{dn}},$$

есть единица. Вследствие этого будут удовлетворены уравнения (2), которые по сравнению с уравнениями (9) пятой лекции приводят нас к заключению, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Переходим к несжимаемой жидкости. Допустив, что уравнение семейства поверхностей токов, совпадающих с поверхностями вихрей, есть

$$f(x, y, z) = \text{const},$$

напишем, что

$$\frac{2(\omega_2 w - \omega_3 v)}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{2(\omega_3 u - \omega_1 w)}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{2(\omega_1 v - \omega_2 u)}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{2\omega V \sin\theta}{\frac{df}{dn}}.$$

По второму признаку последнее отношение должно быть некоторой функцией от f; представим ее в виде $\varphi'(f) = \frac{d}{df}\varphi[(f)]$ и напишем на основании уравнений (9) пятой лекции, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda - \varphi),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda - \varphi),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda - \varphi).$$

Взяв от этих уравнений соответственно частные производные по x, y, z и сложив их, найдем под условием несжимаемости жидкости

$$\Delta_2(\lambda - \varphi) = 0.$$

Если границы рассматриваемой жидкой массы суть непо-движные стенки, то, называя через α, β, γ углы с осями координат нормали к поверхности стенок, умножим наши уравнения на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и сложим:

$$\frac{d(\lambda - \varphi)}{dn} = \frac{\partial}{\partial t}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) = 0,$$

где dn — элемент нормали к поверхности стенок.

Так как на границах жидкой массы функция $\lambda - \varphi$ имеет нормальную производную, равной нулю, а везде внутри жидкой массы удовлетворяет уравнению Лапласа, то

$$\lambda = \varphi + \text{const};$$

следовательно, везде внутри жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Подобное же доказательство распространяется и на случай когда данное течение есть течение жидкости, покоящейся в бесконечности.

Укажем теперь на некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, при которых изложенные признаки удовлетворяются

Если несжимаемая жидкость движется без вращения частиц то всякая поверхность тока может быть принята за поверхность вихрей, и объем вышеупомянутого параллелепипеда

равен нулю, почему такое течение есть установившееся. Если жидкость движется параллельно плоскости xy так, что u и v не зависят от z, то первый признак, очевидно, удовлетворяется, ибо цилиндрические поверхности тока с образующей, параллельной оси oz, суть поверхности вихрей. Для удовлетворения второго признака необходимо, чтобы на всякой линии тока ω_3 было постоянно. Действительно, мы имеем $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $Vdn = \text{const}$ по условию несжимаемости, следовательно, остается удовлетворить условию $\omega_3 = \text{const}$. Если нам не даны u и v, а даны только линии тока на плоскости xy, то легко узнать, соответствует ли это семейство линий установившемуся течению, и если оно соответствует, то определить это течение.

Пусть

$$f(\psi) = \text{const}$$

будет заданное семейство линий тока, где ψ — функция, по которой u и v выражаются формулами (7) второй лекции. Составляя по этим формулам ω_3, найдем:

$$\omega_3 = -\frac{1}{2}\Delta_2\psi. \qquad (4$$

Если по заданным линиям тока существует установившееся движение, то $\Delta_2\psi$ должно быть функцией от f. Составим теперь

$$\Delta_2 f = f'\Delta_2\psi + f''\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] =$$

$$= f'\Delta_2\psi + \frac{f''}{f'^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right].$$

Мы видим, что в случае существования установившегося течения по заданным линиям тока должна существовать такая функция $\mu(f)$, при которой

$$\Delta_2 f - \mu(\Delta f)^2$$

есть функция одного f. Если подобная функция μ существует, то данное семейство линий соответствует установившемуся течению, которое определяется из уравнения:

$$\frac{f''}{f'^2} = \mu. \qquad (5)$$

Как последний пример установившегося движения несжимаемой жидкости укажем движение, которое может быть названо *винтовым*. Это такое движение, при котором линии вихрей совпадают с линиями тока. В этом случае любое семейство поверхностей тока является поверхностями вихря, и так как $\theta = 0$, то вторая часть формулы (3) обращается в нуль. Так как для винтового установившегося движения вторые части формул (9) пятой лекции суть нули, то функция λ, данная формулой (1), будет для такого движения постоянна во всей жидкой массе. На основании сказанного в конце § 10 заключаем, что траектории винтового движения не имеют ортогональных поверхностей [1].

§ 19. Истечение жидкости из сосудов. Теоретические исследования об истечении жидкости из сосудов заключаются главным образом в работах С.-Венана [2], Буссине [3] и в методе Кирхгофа [4] для определения вида струи вытекающей жидкости.

Все эти авторы рассматривают установившееся невихревое течение несжимаемой жидкости и определяют соответствующую ему потенциальную функцию скоростей.

С.-Венан разлагает эту функцию в тригонометрический ряд, считая заранее известными нормальные скорости жидкости на площади дна и на некотором горизонтальном поршне, прикрывающем сосуд сверху. Рассмотрим здесь только самую простую из задач, решенных С.-Венаном. Вообразим сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, на середине дна которого сделано поперечное прямоугольное отверстие, идущее от одного края дна до другого. Пусть высота жидкости в сосуде будет h, длина сосуда $-2a$, измерение отверстия в направлении длины сосуда $-2b$. Возьмем начало прямоугольных осей координат в центре отверстия и направим ось oy по вертикальной линии вверх, ось ox — по направлению длины сосуда, а ось oz — по направлению его ширины.

---

[1] Подробно о винтовом движении жидкости см. в сочинении проф. И. С. Громеки, Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, Казань, 1881.

[2] Saint-Venant, Comptes rendus, T. LXVII, 1868, p. 131, 203, 278.

[3] Boussinesq, Comptes rendus, T. LXX, 1870, p. 33, 177.

[4] Kirchhoff, Crelle. Bd. 70, 1869, p. 289.

Полнее о том же см. Vorlesungen über Mathematische Physik, Vorl. 22.

Приняв, что скорость поршня есть q, а нормальная скорость жидкости на площади отверстия выражается некоторой симметрической функцией $f(x)$, мы придем к заключению, что потенциальная функция φ будет зависеть только от x и y, причем на оси oy скорости будут нули. Таким образом нам придется определять функцию φ по следующим условиям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \text{везде внутри жидкости;}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-q \qquad \text{при } y=h;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \text{при } a>x>b;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-f(x) \qquad \text{при } b>x>0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=a.$$

Мы удовлетворим первому из этих условий, положив

$$\varphi=-qy+\sum Ae^{nx+my},$$

где

$$n^2+m^2=0$$

или

$$n=\pm m\sqrt{-1}.$$

Подставляя и приводя к тригонометрическому виду, найдем:

$$\varphi=-qy+\sum e^{my}(B\cos mx+B'\sin mx).$$

Чтобы удовлетворить пятому условию, надо положить все $B'=0$, а чтобы удовлетворить второму, следует принять коэфициенты B при положительном и отрицательном m находящимися в отношении

$$e^{-mh}:e^{mh},$$

вследствие чего получаем:

$$\varphi=-qy+\sum C(e^{m(h-y)}+e^{-m(h-y)})\cos mx.$$

Наконец, для удовлетворения шестого условия надо принять

$$m = \frac{\pi i}{a},$$

где i — целое число. Таким образом

$$\varphi = -qy + \sum C_i \left(e^{\frac{\pi i(h-y)}{a}} + e^{\frac{-\pi i(h-y)}{a}}\right) \cos\frac{\pi i x}{a}. \qquad (6)$$

Остается теперь определить коэфициенты C на основании третьего и четвертого условий, которые дают нам

$$-\sum C_i \frac{\pi i}{a}\left(e^{\frac{\pi i h}{a}} - e^{\frac{-\pi i h}{a}}\right) \cos\frac{\pi i x}{a} = F(x), \qquad (7)$$

где для $b > x > 0$

$$F(x) = q - f(x),$$

а для $a > x > b$

$$F(x) = q.$$

Умножая формулу (7) на $\cos\frac{\pi i x}{a}\,dx$ и взяв от обеих ее частей интеграл в пределах от 0 до a, находим для определения C_i формулу:

$$C_i \frac{\pi i}{2}\left(e^{\frac{\pi i h}{a}} - e^{\frac{-\pi i h}{a}}\right) = \int_0^b f(x) \cos\frac{\pi i x}{a}\,dx. \qquad (8)$$

Определяя отсюда C_i и подставляя в формулу (6), находим искомую потенциальную функцию скоростей

$$\varphi = -qy + \frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{i}\int_0^b f(x)\cos\frac{\pi i x}{a}\,dx \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{a}(h-y)} + e^{\frac{-\pi i}{a}(h-y)}}{e^{\frac{\pi i}{a}} - e^{\frac{-\pi i}{a}}} \cos\frac{\pi i x}{a}. \qquad (9$$

Если умножим формулу (7) на dx и возьмем от обеих ее частей интегралы от 0 до a, то получим связь между q и $f(x)$:

$$0 = qa - \int_0^a f(x)\,dx.$$

Эта связь есть прямое следствие условия несжимаемости жидкости. Для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей этой связи, найдем по формуле (9) скорость во всякой точке сосуда. С.-Венан останавливается на предположении о постоянстве $f(x)$, но это последнее предположение не имеет места при истечении жидкости.

Исследования Буссине тоже опираются на предположение, что нормальные скорости жидкости на площади отверстия сосуда известны. Он предполагает, что размеры сосуда весьма велики сравнительно с размерами отверстия, и сводит задачу к отысканию невихревого течения несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности. Это течение будет ограничено бесконечным горизонтальным дном сосуда, на котором расположим на конечном расстоянии друг от друга несколько отверстий.

Скорости жидкости в бесконечном расстоянии от отверстий должны быть равны нулю, на плоскости дна нормальные составляющие скоростей должны быть нули, а на площади отверстий они должны равняться некоторым данным величинам $-v_n$. Покажем, что потенциальная функция скоростей искомого течения выражается потенциалом масс, покрывающих площади всех отверстий с плотностью

$$\gamma = \frac{v_n}{2\pi}.$$

Действительно, если притягиваемая точка единицы массы бесконечно удалена от площадей отверстий, то сила притяжения на нее взятых масс есть нуль; если она находится на плоскости дна, то сила притяжения направлена по дну и не имеет нормальной составляющей; если же она находится на площади одного из отверстий, то по известной теореме о притяжении бесконечно тонкого слоя нормальная сила притяжения будет

$$-2\pi\gamma = -v_n.$$

Известно, что при приближении притягиваемой точки к краю бесконечно тонкой пластинки сила притяжения устремляется к бесконечности, если плотность масс, покрывающих

пластинку, на ее краях не равна нулю; поэтому для того, чтобы течение жидкости имело везде конечные скорости, мы должны будем принять v_n на краях всех отверстий равной нулю.

Рассмотрим по способу Буссине решенную выше задачу, считая в ней a, h и ширину сосуда весьма большими сравнительно с b. Сохраняя принятое положение осей и указанное значение $f(x)$, найдем

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} f(\xi)\, d\xi \int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}}, \qquad (10)$$

где $2c$ есть весьма большая ширина сосуда. Положим в последнем интеграле

$$\zeta - z = \zeta', \; y^2 + (x-\xi)^2 = m^2$$

и напишем вследствие большего значения c, что

$$\int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}} = 2 \int_0^c \frac{d\zeta'}{\sqrt{m^2 + \zeta'^2}} =$$

$$= 2 \lg 2c - \lg [y^2 + (x-\xi)^2].$$

Подставляем этот результат, отбросив в нем постоянную величину, в формулу (10):

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} f(\xi) \lg [y^2 + (x-\xi)^2]\, d\xi. \qquad (11)$$

Функция $f(\xi)$ есть функция от ξ^2 и так как она должна обращаться в нуль на краях отверстия, то она должна иметь множителем $(b^2 - \xi^2)$. Кроме того, Буссине предполагает, что скорость жидкости в центре отверстия есть нуль, и пробует удовлетворить наблюдениям посредством положения

$$f(\xi) = k\xi^2 (b^2 - \xi^2). \qquad (12)$$

Тогда

$$\varphi = -\frac{k}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \xi^2 (b^2 - \xi^2) \lg [y^2 + (x-\xi)^2]\, d\xi. \qquad (13)$$

Входящее сюда постоянное k определяется по величине скорости на краю отверстия, т. е. при $y=0$, $x=b$.

Так как эта скорость может быть определена по формуле Бернулли (мы полагаем, что жидкость в сосуде ограничена сверху свободной поверхностью), то

$$\sqrt{2gh}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{k}{\pi}\int_{-b}^{+b}\xi^2(b+\xi)\,d\xi=\frac{2kb^4}{3\pi},$$

откуда

$$k=\frac{3\pi\sqrt{2gh}}{2b^4}.$$

Зная k, легко можем определить по формуле (12) секундный объем Q жидкости, протекающей через единицу ширины отверстия:

$$Q=2k\int_0^b\xi^2(b^2-\xi^2)\,d\xi=\frac{4kb^5}{15}$$

или, подставляя k,

$$Q=\frac{\pi}{5}2b\sqrt{2gh}=0{,}62832\cdot 2b\sqrt{2gh}. \qquad (14)$$

До сих пор мы рассматривали нормальные скорости жидкости на площади отверстия как данные задачи. Перейдем теперь к изложению метода Кирхгоффа, который позволяет зараз отыскивать все течение жидкой массы, включая в него и струю жидкости. Основная мысль этого метода заключается в рассмотрении величин, характеризующих искомое течение как функции параметров φ и ψ, значение которых указано в § 8, т. е. φ есть потенциальная функция скоростей, а ψ — количество протекающей жидкости, отсчитываемое от какой-нибудь линии тока. Напишем по формуле (11) второй лекции, что

$$F(x+y\sqrt{-1})=\varphi+\psi\sqrt{-1}, \qquad (15)$$

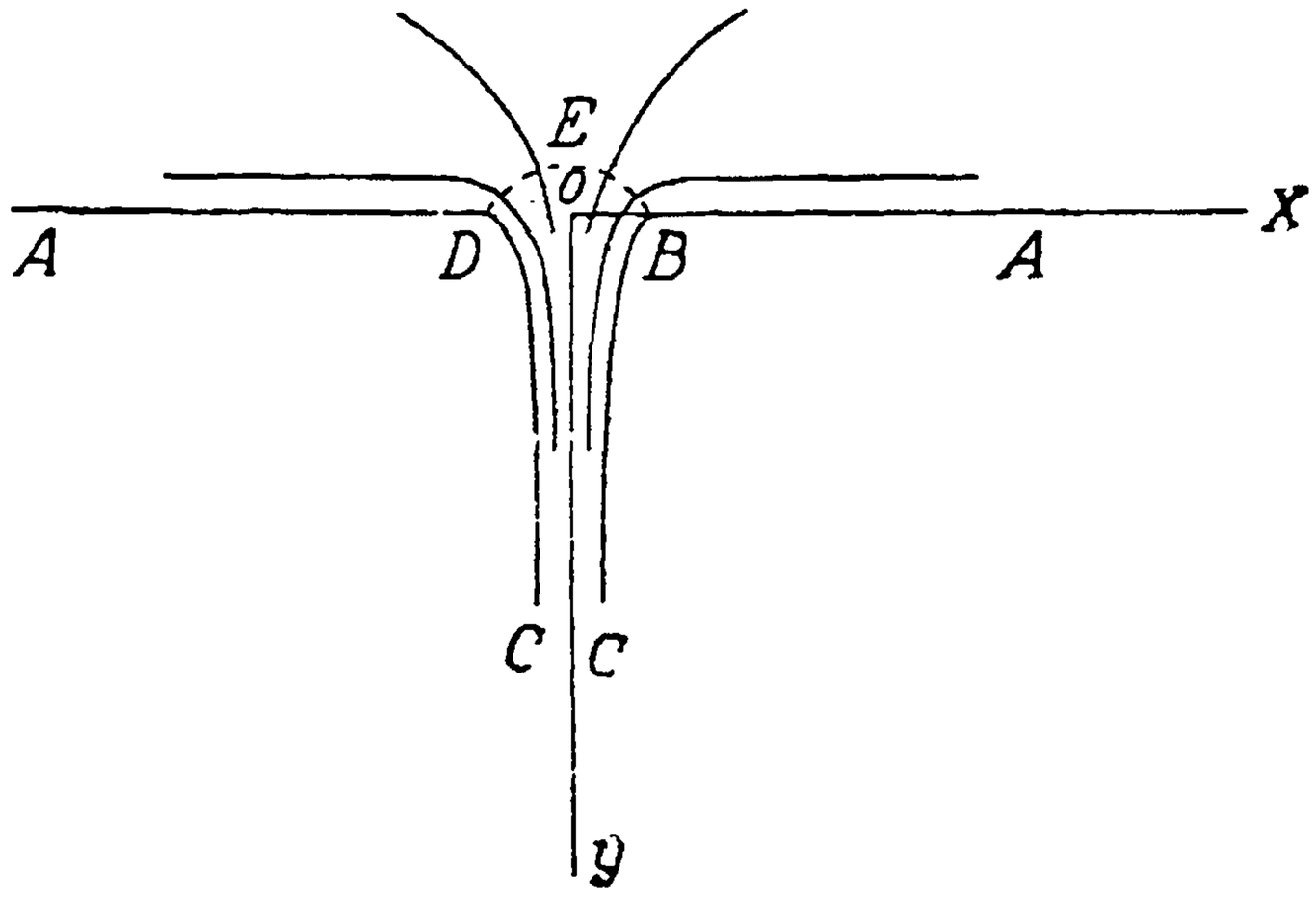
и возьмем от обеих частей производную по x:

$$F'(x+y\sqrt{-1})=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\sqrt{-1}$$

или по формуле (10) второй лекции

$$F'(x+y\sqrt{-1})=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sqrt{-1}. \tag{16}$$

Расположим оси координат, как представлено на фиг. 19, и предположим, что струя вытекает из весьма большого сосуда, где она находилась под напором, в пустоту, где на нее не действуют никакие силы. Назовем через V скорость внутри жидкости, через w — величину этой скорости на поверхности струи, которая по теореме Бернулли должна быть постоянна, через θ — угол V с осью ox. Найдем:



Фиг. 19.

$$V=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

кроме того, назовем через ϑ величину

$$\vartheta=\lg\frac{w}{V}. \tag{18}$$

На основании сделанных обозначений можем теперь дать формуле (16) следующий вид:

$$F'(x+y\sqrt{-1})=we^{-(\vartheta+\theta\sqrt{-1})}; \tag{19}$$

отсюда заключаем, что $\vartheta+\theta\sqrt{-1}$ есть функция от $x+y\sqrt{-1}$, а следовательно, по формуле (15) есть функция от $\varphi+\psi\sqrt{-1}$. Таким образом функции ϑ и θ будут везде внутри жидкой массы удовлетворять уравнению Лапласа как

относительно переменных x и y, так и относительно переменных φ и ψ. На стенках сосуда AB и DA должно получиться:

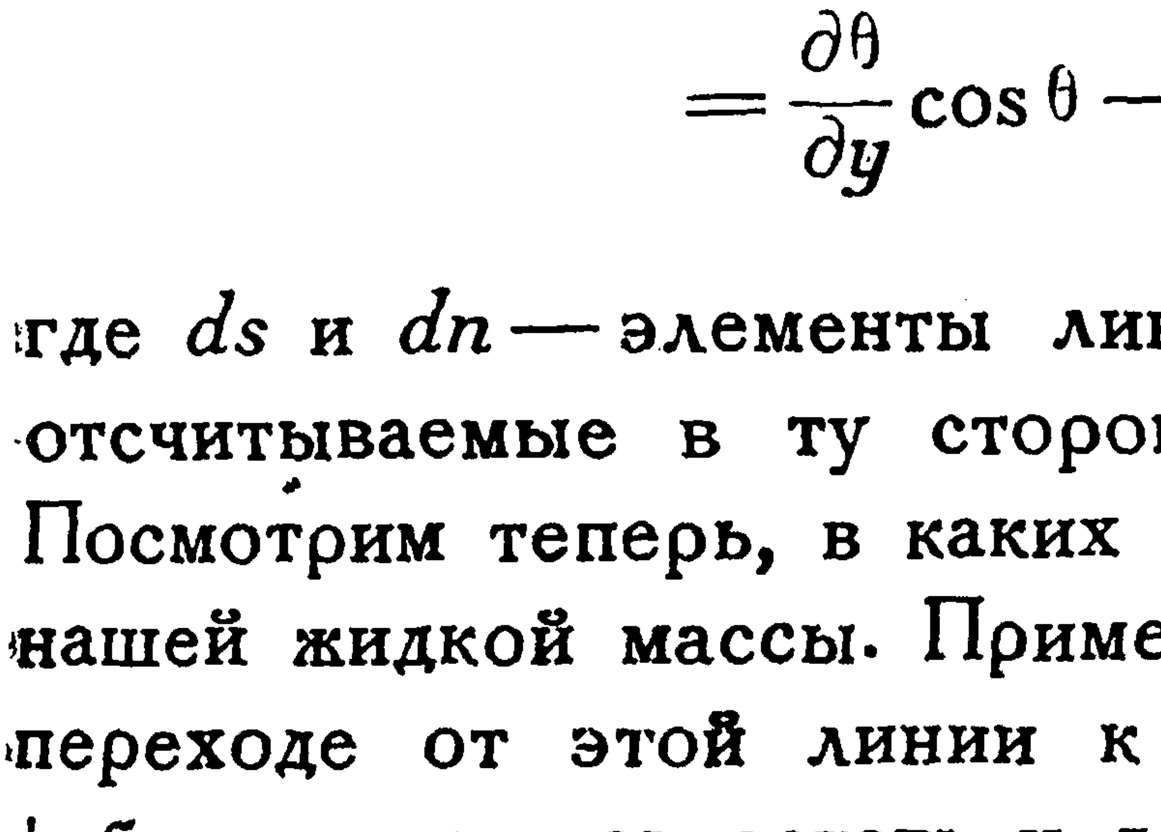
$$\pi = \theta \text{ или } 0 = \theta \text{ и } 0 = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\vartheta}{\partial y}; \tag{20}$$

на поверхности же струи BC и DC мы должны иметь:

$$0 = \vartheta,\ 0 = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\sin\theta =$$

$$= \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta = -\frac{d\theta}{dn}, \tag{21}$$

где ds и dn — элементы линии тока и ортогональной линии, отсчитываемые в ту сторону, в которую φ и ψ возрастают. Посмотрим теперь, в каких пределах изменяются φ и ψ внутри нашей жидкой массы. Примем $\psi = 0$ на линии тока ABC; при переходе от этой линии к другим, расположенным вправо, ψ будет все возрастать и достигает на линии тока ADC величины Q, где Q — количество жидкости, проходящее в единицу времени через единицу ширины отверстия. Далее, проведя через точку B ортогональную линию BED к линиям тока, условимся на ней считать $\varphi = 0$; при переходе по линиям тока вниз и вверх от этой линии функция φ будет возрастать от 0 до ∞ и убывать от 0 до $-\infty$. Изменяющиеся таким образом φ и ψ могут быть представлены на фиг. 20 с помощью полярных координат r и α, имеющих полюс A' и полярную ось $A'B'C'$. Примем:



Фиг. 20.

$$\alpha = \frac{\pi}{Q}\psi,\ r = e^{\frac{\pi}{Q}\varphi}. \tag{22}$$

При этом всем значениям φ и ψ внутри нашего течения будут соответствовать на плоскости фиг. 20 точки, лежащие сверху от полярной оси; бесконечно удаленные точки жидкости в сосуде будут представлены точкой A', а бесконечно

удаленные точки струи — бесконечно удаленными точками плоскости фиг. 20. Проведя из A' полукруг $B'E'D'$ радиусом, равным единице, найдем, что он будет соответствовать ортогональной линии BED; все точки, лежащие внутри этого полукруга, представят нам точки сосуда, а точки, лежащие вне его, — точки струи жидкости; линии тока ABC и ADC будут представлены прямыми $A'B'C'$ и $A'D'C'$, где соответственные точки названы одинаковыми буквами.

Так как из формулы (22) следует, что

$$r(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1}) = e^{\frac{\pi}{Q}(\varphi+\psi\sqrt{-1})},$$

где $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ есть функция от $r(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$, то, следовательно, от этого последнего мнимого переменного зависит также и $\vartheta + \theta\sqrt{-1}$. Функции ϑ и θ, рассматриваемые как функции полярных координат r и α, будут во всех точках плоскости фиг. 20, лежащих выше $C'C'$, удовлетворять уравнению Лапласа; в бесконечности мы должны иметь $\vartheta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$; на прямой же $C'C'$ на основании формул (20) и (21) мы должны иметь:

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } C'B';$$

$$\theta = \pi, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } B'A';$$

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } A'D';$$

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } D'C'.$$

Из принципа Дирикле явствует, что этими условиями ϑ и θ вполне определяются как функции от r и α, а следовательно, по формуле (22) — и как функции от φ и ψ. Примем ϑ и θ за параметры, определяющие искомое нами течение. Для того чтобы найти их по указанным свойствам, положим:

$$(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})^{-1} = -\cos[\sqrt{-1}(\vartheta + \theta\sqrt{-1})]. \quad (23)$$

Отсюда, введя для сокращения обозначения гиперболических функций, т. е. приняв

$$\cosh\vartheta = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}, \quad \sinh\vartheta = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\cos\alpha &= -\cos\theta\cosh\vartheta, \\ \frac{1}{r}\sin\alpha &= \sin\theta\sinh\vartheta. \end{aligned} \tag{24}$$

Определенные по этим формулам функции ϑ и θ, очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа; при $r=0$ получается $\vartheta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$. Далее при $\alpha=0$ и $\infty > r > 1$ получаем $\vartheta=0$, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=0$ и $1 > r > 0$ получаем $\theta=\pi$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=\pi$ и $1 > r > 0$ получаем $\theta=0$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=\pi$ и $\infty > r > 1$ получаем $\vartheta=0$, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0$. Таким образом все условия, наложенные на искомые функции, будут удовлетворены. Подставляем в формулу (24) соответственные величины из формулы (22):

$$\begin{aligned} \cos\theta\cosh\vartheta &= -e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}\cos\frac{\pi}{Q}\psi, \\ \sin\theta\sinh\vartheta &= e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}\sin\frac{\pi}{Q}\psi. \end{aligned} \tag{25}$$

По этим формулам определим ϑ и θ через φ и ψ, после чего сейчас же можем выразить через φ и ψ также и x и y.

Имеем:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial\psi}d\psi = \frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi - \frac{\partial y}{\partial\varphi}d\psi,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial\psi}d\psi = \frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial\varphi}d\psi;$$

подставляем сюда в знаменатели $d\varphi = V\,ds$:

$$dx = \frac{1}{V}(\cos\theta\,d\varphi - \sin\theta\,d\psi),$$
$$dy = \frac{1}{V}(\sin\theta\,d\varphi + \cos\theta\,d\psi). \tag{26}$$

Внося во вторые части формул (26) θ и V, получим полные диференциалы, интегрируя которые, определим x и y через φ и ψ и, следовательно, будем знать искомое течение.

Воспользуемся формулами (26) для получения линии тока BC, ограничивающей нашу струю. Для этой линии тока $\psi = 0$, $d\psi = 0$, $V = w$, $\vartheta = 0$, поэтому

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = w\int_0^{s} ds$$

или

$$\varphi = ws,$$

и по первой формуле (25)

$$\cos\theta = -e^{-\frac{\pi}{Q}ws}.$$

Переходим к первой формуле (26):

$$dx = -e^{-\frac{\pi}{Q}ws}\,ds$$

или, интегрируя,

$$x = \text{const} + \frac{Q}{\pi w}e^{-\frac{\pi}{Q}ws}.$$

Постоянное определяется под условием $x = b$ при $s = 0$ и равно

$$b - \frac{Q}{\pi w},$$

так что

$$x = b - \frac{Q}{\pi w}(1 - e^{-\frac{\pi}{Q}ws}). \tag{27}$$

Это уравнение представляет нам очертание струи с помощью координаты x и дуги s. Мы видим, что найденная

кривая имеет асимптоту, отстоящую от оси струи на расстоянии

$$b - \frac{Q}{\pi w}.$$

Найденное расстояние асимптоты представляет половину длины сечения струи в ее наиболее сжатом месте, почему, умножив это расстояние на $2w$, мы должны получить Q:

$$2bw - 2\frac{Q}{\pi} = Q.$$

Отсюда легко определить Q:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + 2} 2bw = 0{,}611 \cdot 2bw. \tag{28}$$

Заметим, заканчивая этот параграф [1], что по теории Кирхгоффа скорость в центре отверстия не будет равна нулю, как предполагает Буссине, потому что для получения ϑ, соответствующего этой скорости, надо будет взять во второй формуле (26) $\psi = \frac{Q}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi > 0$, что дает

$$\sinh \vartheta = e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}.$$

§ 20. Неподвижные твердые тела в бесконечном потоке жидкости. Мы будем теперь рассматривать невихревое течение беспредельного потока несжимаемой жидкости, обтекающей неподвижное твердое тело, в предположении, что на бесконечном расстоянии от этого тела все скорости точек жидкости равны w и параллельны оси ox. Если вообразим, что телу и рассматриваемой жидкой массе сообщено по направлению оси ox поступательное движение со скоростью $-w$, то получим невихревое течение несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, в которой наше твердое тело движется поступательно со скоростью $-w$. Так как по § 12 кинематическая

[1] Более обстоятельное исследование о сжатии струи см. у Lord Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Philosophical Magazine, v. II, p. 441, 1876.

задача об отыскании такого течения имеет вполне определенное решение, то и поставленная в этом параграфе задача вполне определенна. Можно даже заметить, что, найдя потенциальную функцию скоростей φ_1 второго течения и прибавив к ней wx, мы получим потенциальную функцию скоростей

$$\varphi = \varphi_1 + wx \tag{29}$$

первого течения.

Остановимся сначала на плоском течении несжимаемой жидкости. Если ψ_1 будет функция, сопряженная φ_1, т. е. такая функция, при которой $\varphi_1 + \psi_1\sqrt{-1}$ есть функция от $x + y\sqrt{-1}$, то функция ψ, сопряженная φ, найдется по формуле (10) второй лекции:

$$d\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx = w\,dy + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx$$

или

$$\psi = wy + \psi_1. \tag{30}$$

Формула (30) позволяет нам с удобством разыскивать различные плоские течения и соответственные им обтекаемые контуры. Стоит только взять за ψ_1 некоторую функцию координат x, y, производные которой по координатам обращаются в бесконечности в нули и которая удовлетворяет уравнению Лапласа, потом представить семейство линий тока уравнением

$$\beta = wy + \psi_1 \tag{31}$$

и искать значение параметра β, при котором линия тока представляет замкнутую кривую; эту кривую и можно принять за контур обтекаемого тела.

Положим, что на оси ox расположено несколько точек с массами m, m_1, m_2, ..., притягивающих обратно пропорционально расстоянию и прямо пропорционально массам, и, назвав через ξ, ξ_1, ... абсциссы этих точек, приравняем ψ_1 проекции на oy силы притяжения этих масс на точку единицы массы:

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\sum m \lg\left[y^2 + (x-\zeta)^2\right] = -\sum\frac{my}{y^2 + (x-\xi)^2},$$

где сумма распространяется на все точки. Очевидно, что составленная таким образом функция ψ_1 удовлетворяет всем вышеупомянутым условиям.

Функция ψ и уравнение линий тока будут при этом:

$$\psi = y\left(w - \sum \frac{m}{y^2 + (x-\xi)^2}\right),$$
$$\beta = y\left(w - \sum \frac{m}{y^2 + (x-\xi)^2}\right). \tag{32}$$

При $\beta = 0$ линии тока представляются частью прямой $y = 0$ и частью замкнутым контуром

$$\sum \frac{m}{y^2 + (x-\xi)^2} = w, \tag{33}$$

который мы и примем за контур обтекаемого тела.

В частном случае, когда имеется одна только масса m, помещенная в начале координат, уравнение (33) обращается в

$$x^2 + y^2 = \frac{m}{w} = a^2,$$

а контур, ему соответствующий — в круг. Уравнение линий тока течения, обтекающего наш круглый цилиндр, будет

$$\beta = yw\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right);$$

скорости же найдутся по формуле (7) второй лекции с помощью функции

$$\psi = wy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

и будут:

$$u = w\left(1 - \frac{a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right),$$

$$v = -w\frac{2a^2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

что удобнее представить в полярных координатах:

$$u = w\left(1 - \frac{a^2 \cos 2\alpha}{r^2}\right),$$

$$v = -wa^2 \frac{\sin 2\alpha}{r^2}.$$

Определив отсюда скорость V и подставив в формулу (11) пятой лекции, найдем для нашего случая

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{w^2}{2}\left(1 + \frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\alpha\right). \qquad (34)$$

Обозначая через p_0 давление в бесконечности, находим, что постоянное есть

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2},$$

так что

$$p = p_0 - \rho\frac{a^2w^2}{2r^2}\left(\frac{a^2}{r^2} + 2\right) + 2\rho\frac{a^2w^2}{r^2}\cos^2\alpha.$$

Наименьшую величину p получает при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $r = a$; она будет

$$p = p_0 - \frac{3}{2}w^2\rho.$$

Отсюда следует, что для возможности рассматриваемого движения необходимо условие

$$p_0 > \frac{3}{2}w^2\rho.$$

Для второго примера возьмем случай, исследованный Ранкьным [1]. Предположим в формуле (32) $m = k\,d\xi$ и заменим в ней сумму интегралом, распространенным от $-c$ до $+c$:

$$\beta = wy - k\int_{-c}^{+c}\frac{y\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2} =$$

$$= wy - k\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-c} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+c}\right).$$

[1] Rankine, On plane water-lines in two dimensions, Miscellaneous scientific papers, London, p. 495, 1881.

При $\beta = 0$ линия тока распадается на прямую $y = 0$ и овал, данный уравнением:

$$y = -\frac{w}{w}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-c} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+c}\right) = \frac{k}{w}\theta, \qquad (35)$$

где θ — угол между радиусами-векторами, идущими к точке кривой от точек $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, которые Ранкин называет фокусами овала. Полуоси овала a и b, из которых первая проходит через фокусы, найдутся из уравнения (35) (для определения a надо положить $\frac{dx}{dy} = 0$) и будут:

$$a = \sqrt{c^2 + 2c\frac{k}{w}},$$

$$b \operatorname{tg}\frac{wb}{2k} = c.$$

Пользуясь углом θ, мы с удобством построим как самый овал, так и все линии токов. Для этого надо брать точки пересечения прямых, параллельных оси ox, и дуг кругов, проходящих через фокусы и вмещающих углы θ, под условием, что

$$y = \frac{\beta}{w} + \frac{k}{w}\theta.$$

Положив в формуле (32)

$$m = k\sqrt{c^2 - \xi^2}\,d\xi,$$

мы могли бы получить течение жидкости, обтекающей эллиптический цилиндр, но при этом пришлось бы иметь дело с довольно сложным интегралом, так что эту задачу удобнее решать прямо по формулам (30) и (31). Назовем через ϑ и θ некоторые параметры и положим

$$x + y\sqrt{-1} = c \cdot \cos\left[\sqrt{-1}\,(\vartheta + \theta\sqrt{-1})\right],$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cosh\vartheta\cos\theta, \\ y &= c\sinh\vartheta\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Легко усмотреть, что кривые $\vartheta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ соответствуют эллипсам и гиперболам с фокусным расстоянием c. Действительно, из формул (36) имеем:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \vartheta} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \vartheta} = 1,$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \theta} = 1,$$

где полуоси эллипса $c \cosh \vartheta$ и $c \sinh \vartheta$ удовлетворяют условию

$$c^2 \cosh^2 \vartheta - c^2 \sinh^2 \vartheta = c^2,$$

а полуоси гиперболы $c \cos \theta$ и $c \sin \theta$ условию

$$c^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta = c^2.$$

Так как $\operatorname{tg} \theta$ равен отношению мнимой полуоси гиперболы к действительной, то θ есть угол асимптоты гиперболы с осью ox. Из формул (36) видно, что, изменяя параметр ϑ от 0 до ∞, а параметр θ от 0 до 2π, мы проходим через все точки плоскости xy. Всякая функция от мнимого переменного $\vartheta + \theta \sqrt{-1}$ будет функцией от $x + y\sqrt{-1}$ и, следовательно, ее действительная и мнимые части удовлетворяют уравнению Лапласа. Полагаем

$$\varphi_1 + \psi_1 \sqrt{-1} = kce^{-(\vartheta + \theta\sqrt{-1})},$$

так что

$$\psi_1 = -kce^{-\vartheta} \sin \theta.$$

Эта функция обращается в бесконечности в нуль, и потому мы можем подставить ее в формулу (31). Сделав эту подстановку и исключив $\sin \theta$ с помощью формулы (36), найдем:

$$\beta = y\left(w - \frac{2k}{e^{2\vartheta} - 1}\right).$$

При $\beta = 0$ линия тока распадается на прямую $y = 0$ и эллипс, определенный параметром

$$\vartheta = \frac{1}{2} \lg \frac{w + 2k}{w}. \tag{37}$$

Заметим, что во всех рассматриваемых примерах точки пересечения прямой линии тока с контуром тела суть критические и в них скорость жидкости равна нулю.

Переходим к течению жидкости в трех измерениях. Вообразив внутри жидкости прямоугольные оси координат x, y, z, расположим на оси ox притягивающие центры с массами $m, m_1, \ldots$ на расстояниях от начала $\xi, \xi_1, \ldots$ и составим компонент по оси ox силы их ньютонова притяжения на точку единицы массы. Назовем этот компонент через $-\varphi_1$:

$$\varphi_1 = \sum \frac{m(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как функция φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и производные ее по координатам обращаются в бесконечности в нули, то ее можно подставить в формулу (29):

$$\varphi = wx + \sum \frac{m(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{38}$$

Эта потенциальная функция скоростей представляет некоторое течение, симметричное относительно оси ox; поэтому одни из поверхностей тока будут плоскости, проходящие через эту ось. Найдем по теореме Клебша другие поверхности тока. Подставляем в формулу (4) второй лекции

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y}$$

и величины компонентов скорости u и v, определенные из формулы (38). Положив в полученном результате $z=0$, находим для линий тока на плоскости xy:

$$wy\,dy + \sum \frac{my\,dy}{r^3} - 3\sum \frac{m(x-\xi)^2 y\,dy}{r^5} + 3\sum \frac{m(x-\xi)y^2\,dx}{r^5} =$$

$$= wy\,dy - 2\sum \frac{my\,dy}{r^3} + 3y^2 \sum \frac{m[(x-\xi)\,dx + y\,dy]}{r^5} = 0,$$

где

$$r = [(x-\xi)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируем:

$$\beta = y^2\left(\frac{w}{2} - \sum\frac{m}{r^3}\right). \tag{39}$$

Так как во всех плоскостях, проходящих через ось ox, линии тока одинаковы, то уравнение (39) можно считать за уравнение семейства поверхностей тока, которые суть поверхности вращения. При $\beta = 0$ уравнение такой поверхности тока распадается на

$$y = 0$$

и

$$\sum\frac{m}{r^3} = \frac{w}{2}. \tag{40}$$

Это последнее уравнение мы можем принять за уравнение тела вращения, которое обтекает рассматриваемый нами поток жидкости [1].

В случае одного притягивающего центра, помещенного в начале координат, получаем из формулы (40):

$$r = \sqrt[3]{\frac{2m}{w}} = a$$

и убеждаемся, что обтекаемое тело есть шар.

Уравнение (39) принимает при этом вид

$$\beta = \frac{wy^2}{2}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right).$$

Если бы мы желали определить давление во всякой точке потока, то для этого было бы удобно выразить формулу (38) в полярных координатах r, α и определить компоненты скорости по направлению dr и дуги $r\,d\alpha$ из формул:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = w\cos\alpha\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\alpha} = -w\sin\alpha\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right),$$

так что

$$V^2 = w^2\left(1 + \frac{a^3}{r^3} + \frac{1}{4}\,\frac{a^6}{r^6}\right) - 3\,\frac{a^3}{r^3}\cos^2\alpha\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{a^3}{r^3}\right).$$

---

[1] В такой форме задача о телах вращения в бесконечном потоке жидкости была решена Hоppe, Poggendorff Annalen, Bd. 93 S. 321.

Подставляя эту величину в формулу (11) пятой лекции и полагая в бесконечности $p = p_0$, находим:

$$p = p_0 - \frac{\rho w^2}{2}\left(\frac{a^3}{r^3} + \frac{1}{4}\frac{a^6}{r^6}\right) + \frac{3\rho w^2}{2}\frac{a^3}{r^3}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\cos^2\alpha. \quad (41)$$

аименьшую величину p здесь получаем тоже при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $r = a$; она будет

$$p = p_0 - \frac{5}{8} w^2\rho,$$

так что рассматриваемое течение возможно под условием [1]

$$p_0 > \frac{5}{8} w^2\rho.$$

Рассмотрим еще один пример, в котором обтекаемое тело не есть тело вращения. Пусть обтекаемое тело есть эллипсоид, имеющий уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для определения функции φ_1 в формуле (30) можно здесь воспользоваться выражением силы притяжения однородным эллипсоидом материальной точки. Назовем составляющую этой силы по оси ox через X и покажем, что

$$\varphi_1 = -kX.$$

Эта функция для внешних точек удовлетворяет уравнению Лапласа и производные ее по координатам обращаются в бесконечности в нуль. Составим для поверхности эллипсоида

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = -k\frac{dX}{dn},$$

где dn — элемент нормали, направленный внутрь жидкости. Называя через dn_1 элемент нормали, направленной внутрь

[1] Если это условие не соблюдено, то в течении жидкости образуется поверхность раздела. См. об этом случае у W. Thomson, Philosophical Magazine, v. 23, p. 255, 1887.

эллипсоида, напишем известное соотношение из теории притяжения:

$$\frac{dX}{dn} + \frac{dX}{dn_1} = 2\pi \cos\alpha,$$

где α — угол элемента dn с осью ox (мы принимаем плотность притягивающего эллипсоида и коэфициент притяжения за единицу). Но для точки, лежащей внутри эллипсоида, имеем

$$X = -Ax,$$

где A — известная функция от a, b, c; поэтому

$$\frac{dX}{dn} = (2\pi - A) \quad \alpha,$$

и нам остается только положить

$$k = \frac{w}{2\pi - A}$$

для того, чтобы удовлетворить на поверхности эллипсоида условию

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = -w\cos\alpha.$$

Мы видим, таким образом, что потенциальная функция течения, обтекающего по направлению оси ox наш эллипсоид, есть

$$\varphi = w\left(x + \frac{X}{A - 2\pi}\right). \tag{42}$$

Переходим теперь к определению равнодействующей P по оси ox сил давления жидкости на обтекаемое ей тело. Из формул (34) и (41) заключаем, что для цилиндра и шара $P = 0$, потому что элементы поверхности того и другого тела, соответствующие углам α и $\pi - \alpha$, подвержены равным давлениям p. Покажем, что *при всякой форме тела* $P = 0$. На основании формулы (29)

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{43}$$

Проводим из начала координат (которое возьмем внутри тела) как центра сферу бесконечно большим радиусом и прилагаем формулу (5) третьей лекции к объему, ограниченному этой сферой и поверхностью рассматриваемого тела, приняв в ней

$$F = p, \quad l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0.$$

Это дает нам

$$\int\int p\cos\alpha\, d\sigma = \rho \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + w \right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) \right\} dx\, dy\, dz.$$

Полученный здесь объемный интеграл приводим опять к поверхностному по формуле (5) третьей лекции, делая положения:

$$F = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + w, \quad m = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad n = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.$$

Получаем:

$$\int\int p\cos\alpha\, d\sigma = -\rho \int\int \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + w \right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos\gamma \right] d\sigma. \qquad (44)$$

Рассматриваем сначала интегралы первой и второй части, распространенные на поверхность тела. В первой части имеем $-P$, во второй же части интеграл равен нулю, ибо на поверхности тела

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + w \right)\cos\alpha + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos\gamma = 0.$$

Переходя затем к интегралам, распространенным на поверхность бесконечно большой сферы, замечаем, что в первой и второй части [по подстановке p из формулы (43)] сокращается

$$\rho \int\int w\,\frac{d\varphi_1}{\partial x}\cos\alpha\, d\sigma;$$

остающиеся же члены равны нулю, ибо под интегралы входят квадраты и произведения производных от φ_1 по координатам, т. е. члены четвертого порядка относительно единицы, деленной на радиус сферы, как это видно из формулы (14) третьей лекции. Таким образом уравнение (44) приводится к

$$P = 0. \tag{45}$$

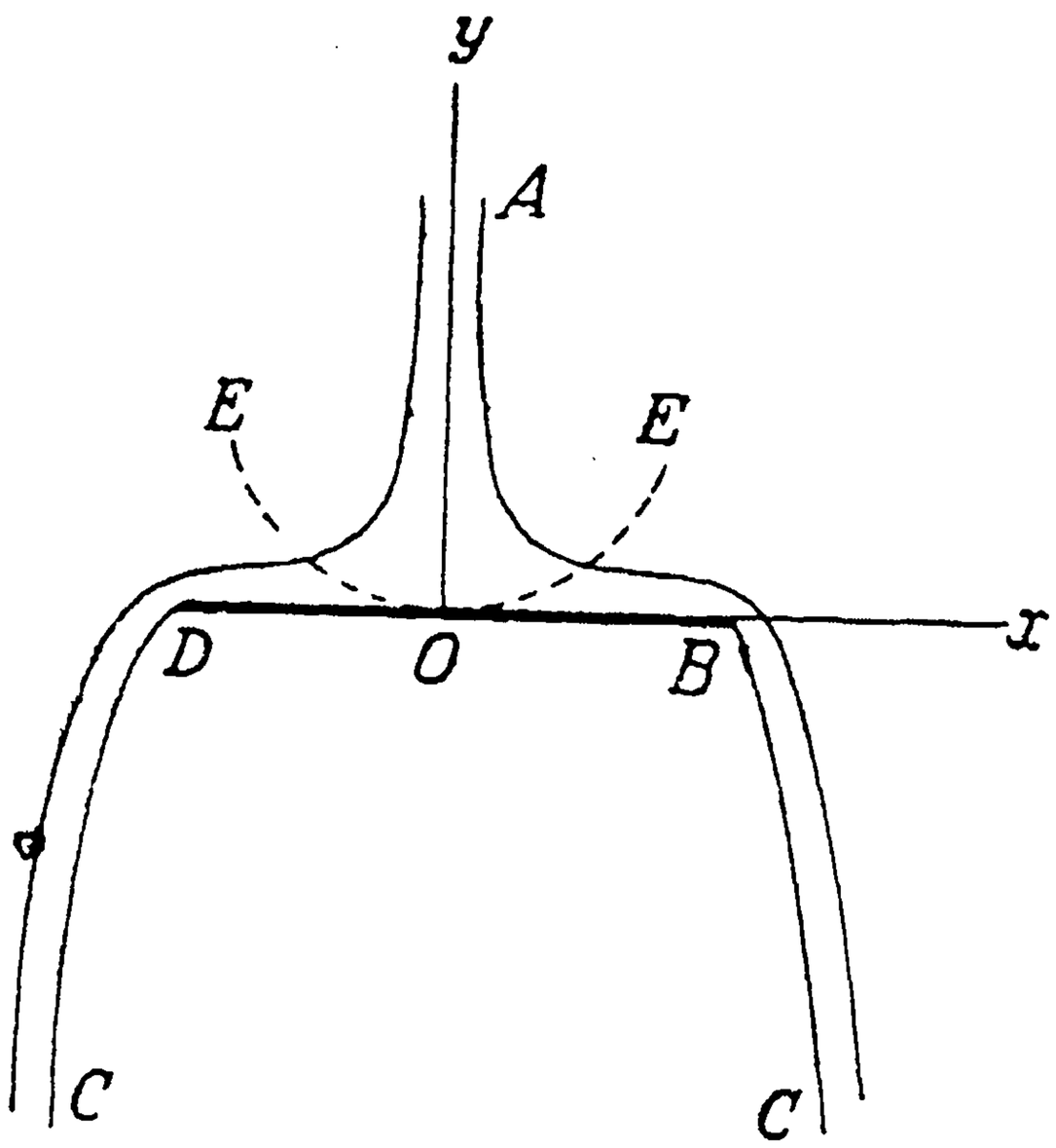
Этот парадоксальный результат получается потому, что не приняты во внимание факторы, обусловливающие сопротивление жидкости: трение жидкости, образование вихрей и образование поверхностей раздела в течении жидкости. В этой лекции мы займемся только последним фактором сопротивления, который в телах, ограниченных угловатыми контурами, играет главную роль.

Теоретические исследования этого вопроса относятся только к плоскому течению несжимаемой жидкости и опираются на применение метода Кирхгоффа, объясненного в предыдущем параграфе. .

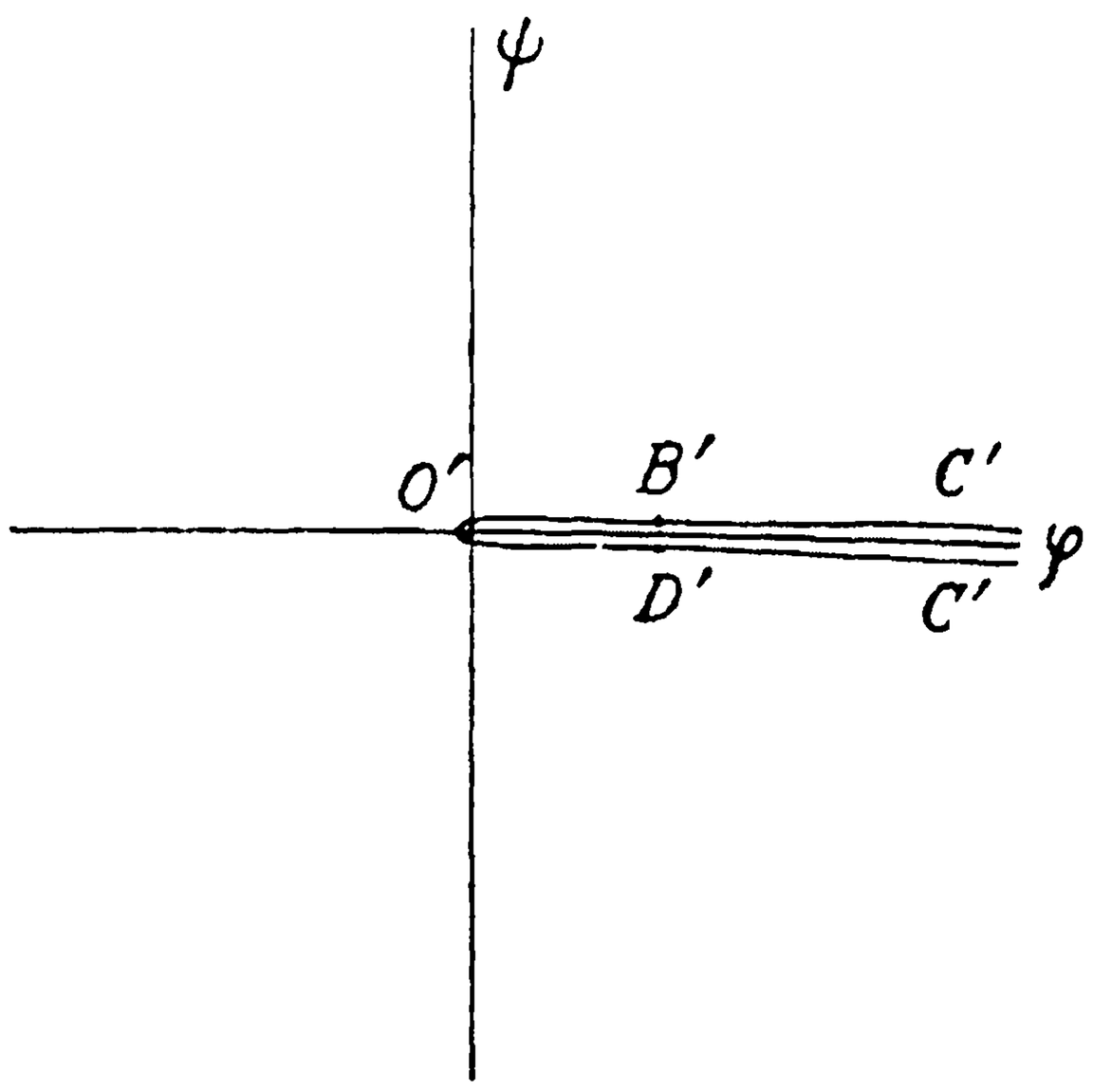
Положим, что в поток жидкости, движущейся в бесконечности с постоянной скоростью w, погружена пластинка, перпендикулярная к этой скорости, и расположим относительно ее оси координат, как представлено на фиг. 21. Точка O, лежащая посреди пластинки, будет критической, и все линии тока рассматриваемого течения лежат: одни — вправо от линии тока $AOBC$, а другие — влево от $AODC$. Линии тока BC и DC являются линиями раздела; мы предположим, что между этими линиями жидкость имеет постоянное давление p_0 (на самом деле здесь будет некоторое вихревое движение и давление, хотя мало, но будет изменяться). Будем приписывать буквам φ, ψ, ϑ, 0 значения, принятые в конце § 19, и посмотрим, как изменяются ψ и φ в нашей задаче. На линиях тока $AOBC$ и $AODC$ будем считать $\psi = 0$ и предположим, что при переходе от линии тока $AOBC$ в правую сторону ψ возрастает, а при переходе от $AODC$ в левую сторону ψ убывает [1], и так как количество протекающей жидкости с правой и левой сторон пластинки бесконечно велико, то воз-

[1] Соображая изменение ψ, надо удовлетворить знакам u и v в формуле (7) второй лекции.

растание идет до $+\infty$, а убывание до $-\infty$. Проведя через O ортогональ EOE к линиям тока, примем на ней $\varphi = 0$. Переходя от этой ортогонали по линиям тока вниз, мы будем иметь возрастание φ от 0 до $+\infty$, а вверх — убывание φ от 0 до $-\infty$. Если будем теперь на фиг. 22 рассматривать φ и ψ как абсциссу и ординату некоторой точки, то пространство, занимаемое на фиг. 21 исследуемым течением, будет на фиг. 22



Фиг. 21.



Фиг. 22.

представлено всеми точками плоскости. Посмотрим, какими условиями стеснены θ и ϑ на границах течения. В бесконечности $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = 1$; на OB имеем $\theta = 0$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$; на OD имеем $\theta = \pi$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$; наконец, на BC и DC имеем $\vartheta = 1$, $\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$. Назовем через φ_0 величину, на которую возрастает φ при переходе от O к B или D, и отложим на фиг. 22 отрезок $O'B' = \varphi_0$. Линии тока OBC и ODC представятся на фиг. 22 прямой $O'C'$; для различия этих двух линий будем предполагать, что плоскость на фиг. 22 разрезана по $O'C'$, так что верхняя часть разреза $O'B'C'$ соответствует линии тока OBC, а нижняя часть разреза $O'D'C'$ — линии тока ODC.

Функции θ и ϑ, удовлетворяя во всех точках плоскости

фиг. 22 уравнению Лапласа, дают в бесконечных точках ее $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = 1$; далее на краях разреза $O'C'$ получаем:

$$\text{на} \quad O'B' \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0,$$

$$\text{„} \quad C'B' \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0,$$

$$\text{„} \quad O'D' \quad \theta = \pi, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0,$$

$$\text{„} \quad D'C' \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0.$$

Мы удовлетворим всем этим условиям, положив

$$\left(\frac{\varphi + \psi\sqrt{-1}}{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\cos\left[\sqrt{-1}\,(\vartheta + \theta\sqrt{-1})\right]. \quad (46$$

Действительно, введя полярные координаты

$$\varphi = r\cos\alpha, \quad \psi = r\sin\alpha, \quad (47)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varphi_0}{r}}\cos\frac{\alpha}{2} &= \cosh\vartheta\cos\theta, \\ \sqrt{\frac{\varphi_0}{r}}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sinh\vartheta\sin\theta. \end{aligned} \quad (48)$$

Из этих формул следует, что при $r = \infty$ имеем $\vartheta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$; при $\alpha = 0$ и $r < \varphi_0$ имеем $\theta = 0$ и $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = 0$; при $\alpha = 0$ и $r > \varphi_0$ имеем $\vartheta = 0$ и $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0$; при $\alpha = 2\pi$ и $r < \varphi_0$ имеем $\theta = \pi$ и $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = 0$; наконец, при $\alpha = 2\pi$ и $r > \varphi_0$ получаем $\vartheta = 0$ и $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0$.

Определив с помощью формул (47) и (48) через φ и ψ функции ϑ и θ и подставив в формулы (26), выразим x и y по φ и ψ, так что будем знать искомое течение.

Мы остановимся здесь только на решении двух вопросов: определении равнодействующей P сил давления на пластинку и определении вида кривой BC. Положив в первой формуле (48) $\theta = 0$, $\alpha = 0$, $r = \varphi$, найдем для определения скорости жидкости на поверхности пластинки

$$\operatorname{cosh} \vartheta = \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}}$$

или, заменяя гиперболический косинус и подставляя значение ϑ из формулы (18),

$$\frac{V}{w} + \frac{w}{V} = 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{V}{w} &= \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} - \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}, \\ \frac{w}{V} &= \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} + \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Считая силу P положительной по направлению скорости w, напишем, что

$$P = \int (p - p_0)\, dx = \frac{\rho}{2} \int (w^2 - V^2)\, dx =$$

$$= \frac{\rho w}{2} \int \left(\frac{w}{V} - \frac{V}{w}\right) V\, dx = \rho w \int \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right) - 1}\; V dx.$$

Но $V\, dx = d\varphi$, потому

$$P = 2\rho w \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right) - 1}\; d\varphi.$$

Этот интеграл удобно взять, введя новое переменное

$$\varphi = \varphi_0 \sin^2 \chi;$$

тогда

$$P = 4\rho w \varphi_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \chi\, d\chi = \rho w \varphi_0 \pi.$$

Исключим отсюда φ_0 с помощью длины пластинки $2b$. Мы имеем:

$$b = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{V} = \frac{1}{w} \int_0^{\varphi_0} \left(\frac{w}{V}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{w} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}}\, d\varphi + \frac{1}{w} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}\, d\varphi = \frac{\varphi_0}{2w}(4+\pi),$$

так что

$$\varphi_0 = \frac{2bw}{4+\pi}. \tag{50}$$

Подставляя эту величину в выражение для P, находим:

$$P = \frac{2b\rho w^2}{4+\pi}. \tag{51}$$

Мы видим отсюда, что сила давления потока жидкости на пластинку, происходящая от образования поверхностей раздела, пропорциональна площади пластинки, плотности жидкости и квадрату скорости потока.

Переходим к составлению уравнения линии тока BC. На этой линии имеем $\vartheta = 0$, $\alpha = 0$, $r = \varphi$, поэтому из первой формулы (48)

$$\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} = \cos\vartheta$$

или, так как $\varphi = \varphi_0 + sw$,

$$\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_0 + sw}} = \frac{dx}{ds}.$$

Интегрируем:

$$x = 2\frac{\varphi_0}{w}\sqrt{1 + \frac{w}{\varphi_0}s} + \text{const.} \tag{52}$$

Мы видим отсюда, что расстояние между линиями тока BC и DC будет беспредельно возрастать [1].

---

[1] О силе давления потока жидкости на погруженные в него тела см. следующие сочинения:

Lord Rayleigh, On the Resistance of fluids, Philosophical Magazine, v. 2, p. 431, 1876.

Бобылев, Заметка о давлении, производимом потоком неограничен-

21. Примеры на вихревое установившееся течение жидкости. Мы сказали в § 18, что плоское течение несжимаемой жидкости, совершающееся параллельно плоскости xy, будет установившимся, если ω_3 есть постоянная величина на линиях тока. Это условие, разумеется, будет удовлетворено, если ω_3 есть постоянная величина для всего течения. Рассмотрим здесь подобные течения. Эта задача, как заметил Томсон [1], имеет следующий практический смысл: заключив жидкую массу в цилиндрический сосуд, будем вращать его равномерно около оси, параллельной его образующей, с угловой скоростью ω_3 до тех пор, пока вся жидкость не начнет двигаться как одно твердое тело; потом сразу остановим сосуд; тогда по принципу сохранения вихрей все частицы жидкости будут продолжать вращаться со скоростью ω_3, и мы получим вышеупомянутое течение жидкости (оно скоро будет нарушено влиянием трения о стенки сосуда).

Решение задачи сводится к отысканию функции ψ, удовлетворяющей уравнению (4) при данном ω_3 внутри сосуда и обращающейся на его контуре в постоянную величину.

Мы удовлетворим первому условию, положив

$$\psi = \psi_1 - \frac{1}{2}\omega_3(x^2 + y^2), \tag{53}$$

где ψ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа; для удовлетворения второго условия надо будет выбрать ψ_1 так, чтобы на контуре сосуда

$$\psi = \frac{1}{2}\omega_3(x^2 + y^2) + \text{const}.$$

Этими условиями, как известно из принципа Дирикле, ψ_1 вполне определяется. Но удобно поступить иначе: не задавая

ной ширины на две плоские стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом, Журн. Русского физико-химического общества, 1881.

Мещерский, К вопросу о сопротивлении жидкостей, Журн. Русского физико-химического общества, 1887.

[1] Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics. V. III and IV, 1866.

наперед формы сосуда, принять за нее одну из замкнутых линий из семейства линий тока

$$\beta = \psi_1 - \frac{1}{2}\omega_3 (x^2 + y^2), \tag{54}$$

где β — параметр семейства. Возьмем некоторые примеры.

Мы удовлетворим уравнению Лапласа положением

$$\psi_1 = k(y^2 - x^2),$$

так что уравнение (54) можно написать в виде

$$x^2\left(\frac{\omega_3}{2} + k\right) + y^2\left(\frac{\omega_3}{2} - k\right) + \beta = 0.$$

При $2k < \omega_3$ и $\beta < 0$ будем иметь для линий тока семейство подобных концентрических эллипсов, один из которых может быть принят за контур сосуда.

Для второго примера сделаем положение

$$\psi_1 = k(3xy^2 - x^3),$$

которое, как легко увидеть, тоже удовлетворяет уравнению Лапласа, и определим y^2 из уравнения

$$\beta = k(3xy^2 - x^3) - \frac{1}{2}\omega_3 (x^2 + y^2).$$

Найдем:

$$y^2 = \frac{2kx^3 + \omega_3 x^2 + 2\beta}{6kx - \omega_3},$$

или, по разделении:

$$y^2 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{\frac{4a^3}{27} + \frac{\beta}{k}}{3x - a},$$

где

$$a = \frac{\omega_3}{2k}.$$

Если примем для контура основания нашего сосуда линию тока со значением

$$\beta = -\frac{4a^3}{27}k,$$

то найдем, что этот контур будет равносторонний треугольник, образованный тремя прямыми:

$$3x - a = 0,$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0,$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0.$$

Высота треугольника есть a, а сторона имеет длину

$$\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Движение твердого тела в беспредельной массе несжимаемой жидкости

§ 22. О сохранении импульсивной силы и пары. Прежде всего установим надлежащий взгляд на беспредельную массу жидкости. По нашему мнению, о подобной массе можно рассуждать только как о предельном случае конечной массы, которая или заключена в сосуд, или имеет свободную поверхность под внешним давлением. Для простоты будем принимать этот сосуд или эту свободную поверхность сферическими и будем предполагать, что радиус сферы устремляется к бесконечности. Допустим для большей общности, что в жидкость погружено несколько твердых или деформирующихся тел и что в начальный момент жидкость имеет невихревое движение и покоится в бесконечности. По принципу сохранения вихрей в случае существования потенциала сил, действующих на частицы жидкости, движение все время будет невихревое; докажем, что *все время жидкость будет покоиться в бесконечности.* Вообразим, что жидкость заключена в сферический сосуд конечного радиуса a и проведем из его центра сферу радиусом $b < a$ так, чтобы она охватывала все внутренние тела. По принципу Дирикле потенциальная функция скоростей F для пространства, заключенного между сферами a и b, будет вполне определена, если известна ее нормальная производная на сфере b. Эта последняя вполне определяется по движению тел. Положим, что она известна, и представим ее в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots, \qquad (1)$$

где S_i — сферическая функция порядка i. Известно, что сама функция F для рассматриваемого пространства может быть тоже выражена с помощью сферических функций:

$$F = C + \frac{M}{r} + \frac{M_1}{r^2} + \frac{M_2}{r^3} + \ldots \\ \ldots + N_1 r + N_2 r^2 + \ldots, \tag{2}$$

где M_i и N_i — сферические функции порядка i, а r — расстояние рассматриваемой точки от центра сфер. Так как на сфере a

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

то, подставляя сюда формулы (2), найдем:

$$iN_i a^{i-1} - \frac{M_i(i+1)}{a^{i+2}} = 0, \tag{4}$$

$$M = 0. \tag{5}$$

Далее, по формуле (1) найдем, что

$$iN_i b^{i-1} - \frac{M_i(i+1)}{b^{i+2}} = S_i, \tag{6}$$

$$S_0 = 0.$$

Из формул (4) и (6) имеем:

$$N_i = -\frac{S_i b^{i+2}}{i(a^{2i+1} - b^{2i+1})}, \\ M_i = -\frac{S_i b^{i+2}}{\left(1 - \frac{b^{2i+1}}{a^{2i+1}}\right)(i+1)}. \tag{7}$$

При $a = \infty$ получаем $N_i = 0$ и, следовательно,

$$F = C + \frac{M_1}{r^2} + \frac{M_2}{r^3} + \ldots, \tag{8}$$

что показывает нам (§ 12), что жидкость будет все время покоиться в бесконечности. Так как величина $4\pi M$ предста-

вляет количество жидкости, протекшей через все внутренние границы, то из уравнения (5) заключаем, что *беспредельная масса несжимаемой жидкости только тогда может быть заключена в бесконечно большом замкнутом сосуде, когда сумма объемов всех внутренних тел не изменяется.*

Предположим теперь, что жидкость ограничена сферой конечного радиуса a и на ее поверхности производится во всякий момент времени такое внешнее давление, что она сохраняет форму сферы. Это давление по формуле (11) пятой лекции будет

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] + \text{const}, \quad (9)$$

где F для всякого момента времени определяется по формулам (2) и (7). При этом M не будет нулем, так как в рассматриваемом случае уравнение (3) заменяется уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial r} = S_0 \frac{b^2}{a^2}.$$

Полагая $a = \infty$, найдем по предыдущему $N_i = 0$, вследствие чего функция F обращается в

$$F = C + \frac{M}{r} + \frac{M_1}{r^2} + \ldots, \quad (10)$$

а уравнение (9) дает

$$\frac{p}{\rho} = U + \text{const}.$$

Отсюда видно, что если на свободную поверхность бесконечно большой сферы будет производиться внешнее давление, равное гидростатическому, то жидкость все время движения будет покоиться в бесконечности.

Поясним теперь, что мы будем звать *импульсивной силой и парой*. Рассматривая количества движения масс, составляющих погруженные тела, как силы, заменим их одной силой N, проходящей через начало o координат x, y, z (фиг. 23), и парой G; назовем через N_1, N_2, N_3, G_1, G_2, G_3 компоненты по осям координат этой силы и момента этой пары; потом

сложим упомянутую силу и пару с силой P и парой H, которые бы получились, если бы на поверхности всех погруженных тел производилось нормальное давление Fp. Обозначая через P_1, P_2, P_3, H_1, H_2, H_3 компоненты этой последней силы и пары, найдем от сложения силу Q и пару момента K с компонентами:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= N_1 + P_1: \quad K_1 = G_1 + H_1; \\ Q_2 &= N_2 + P_2; \quad K_2 = G_2 + H_2; \\ Q_3 &= N_3 + P_3; \quad K_3 = G_3 + H_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эту силу Q и пару с моментом K мы и будем называть импульсивной силой и импульсивной парой.

Докажем, что *проекция импульсивной силы на ось ox равна сумме моментов количеств движения по оси ox всех масс, заключенных внутри прямого цилиндра, который охватывает все внутренние тела, имеет образующую, параллельную ox, и основания которого бесконечно удалены от погруженных тел.* Для этого следует только обнаружить, что P_1 есть сумма моментов по оси ox всей жидкости, заключенной в упомянутом цилиндре. Называя через α, β, γ углы, которые нормаль к поверхностям тел, направленная внутрь жидкости, образует с осями, напишем:

$$P_1 = -\rho \int\int F \cos\alpha \, d\sigma, \tag{12}$$

где интеграция распространяется на поверхности тел.

Преобразуем этот интеграл по формуле (5) третьей лекции, относя ее к пространству, ограниченному поверхностью цилиндра и поверхностью тел, и полагая

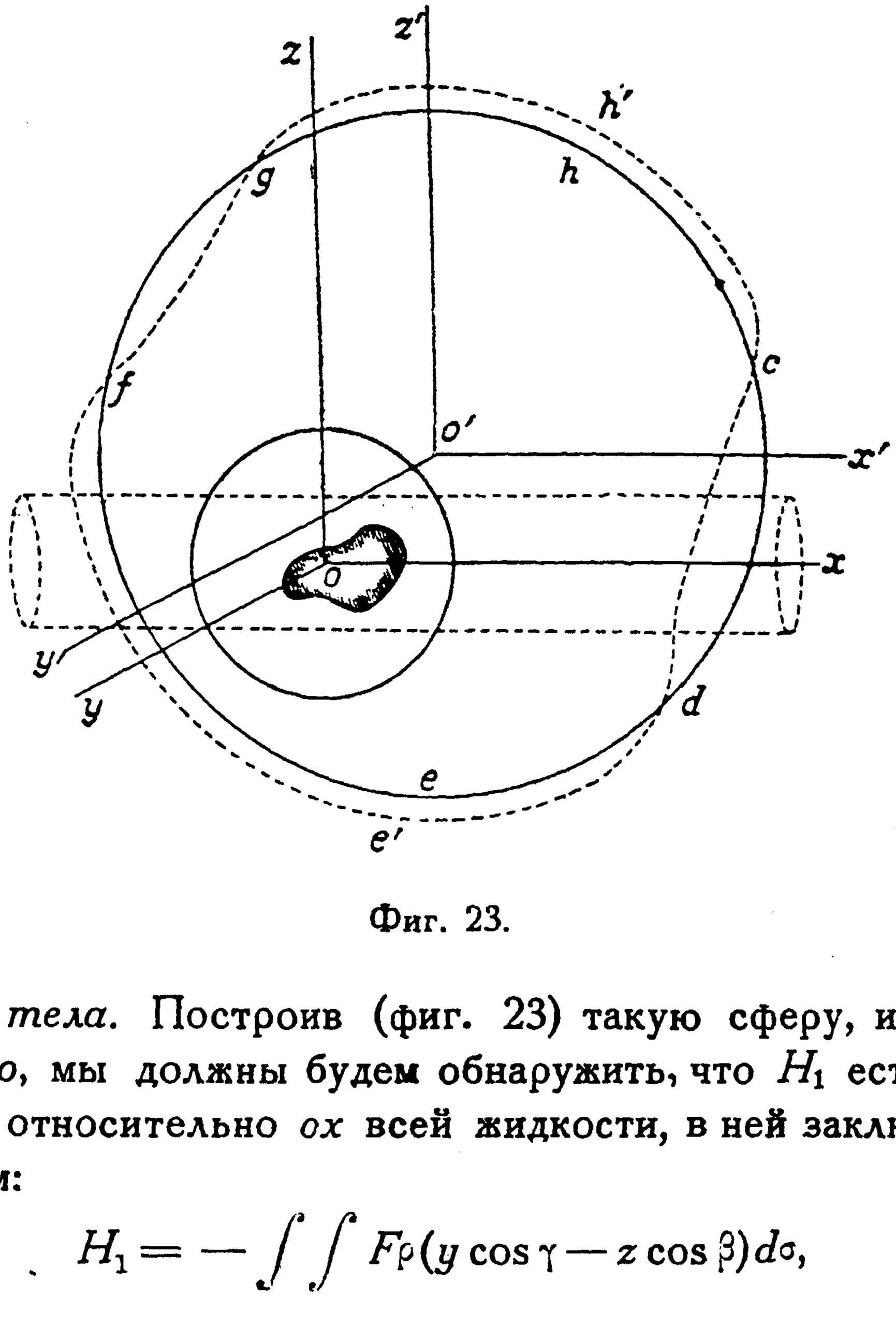
$$F = F\rho, \quad l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0;$$

найдем:

$$-\int\int F\rho \cos\alpha \, d\sigma = \int\int\int \rho \frac{\partial F}{\partial x} \, dx\, dy\, dz.$$

Здесь интеграл первой части может быть отнесен к поверхностям тел, так как на боковой поверхности цилиндра $\cos\alpha = 0$, на его бесконечно удаленных основаниях $F = C$, а $\cos\alpha$ на правом основании равен -1, а на левом $+1$. Же-

лаемое, таким образом, доказано. Что касается K_1, то легко обнаружить, что *проекция на ось ox момента импульсивной пары равна сумме моментов количеств движения относительно оси ox всех масс, заключенных в шаре, центр которого лежит на оси ox и который охватывает все вну-*



Фиг. 23.

тренние тела. Построив (фиг. 23) такую сферу, имеющую начало в *o*, мы должны будем обнаружить, что H_1 есть сумма моментов относительно *ox* всей жидкости, в ней заключенной. Мы имеем:

$$H_1 = -\int\int F\rho(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma, \qquad (13)$$

где интеграция распространяется на поверхности погруженных тел. Прилагаем формулу (5) третьей лекции к объему, ограниченному поверхностями тел и поверхностью сферы, положив в этой формуле

$$F = F\rho, \quad l = 0, \quad m = -z, \quad n = y;$$

получаем:

$$-\int\int F\rho(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma = \int\int\int \rho\left(y\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz,$$

где интеграл первой части может быть отнесен только к поверхностям тел, ибо на поверхности сферы

$$y : z = \cos\beta : \cos\gamma.$$

Из данного доказательства следует, что сумма моментов количеств движения относительно оси ox жидкости, заключенной между двумя сферами, проведенными так, что они охватывают все тела и имеют центры на оси ox, равна нулю. В этом, впрочем, легко убедиться самостоятельно. Разбив рассматриваемый объем на бесконечно тонкие кольца, имеющие центры на оси ox, мы найдем, что сумма моментов относительно ox жидкости, заключенной во всяком кольце, равна произведению его радиуса, плотности, площади перпендикулярного сечения и циркуляции скорости по оси кольца, а последний производитель есть нуль. Возьмем теперь (фиг. 23) точку o', имеющую координаты ξ, η, ζ, и примем ее за начало новых осей координат x', y', z', параллельных прежним. Заменяя по правилам статики все пары и силы, приложенные в точке o, парами и силами, приложенными в точке o', найдем, что силы не изменятся, моменты же пар получат известное изменение, так что вместо момента K мы получим момент K', компоненты которого на осях $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ будут:

$$\left.\begin{aligned} K_1' &= K_1 - (\eta Q_3 - \zeta Q_2); \\ K_2' &= K_2 - (\zeta Q_1 - \xi Q_3); \\ K_3' &= K_3 - (\xi Q_2 - \eta Q_1). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Проведем из точки o' как из центра сферу радиусом a, охватывающую все внутренние тела, и будем рассматривать содержимое в этой сфере как свободную систему, присоединив к ее поверхности соответствующие силы гидродинамического давления. Для такой системы можем написать, что сумма моментов всех действующих сил относительно оси $o'x'$ равна производной по времени от суммы моментов относительно той же оси количеств движения всех материальных точек системы. Сумма моментов сил, действующих на взятую нами систему, сложится из суммы моментов L_1' внешних сил, действующих на погруженные тела, и суммы моментов M_1' сил, имеющих силовую функцию U и действующих на частицы

жидкости, потому что силы гидродинамического давления, приложенные к поверхности сферы, пересекают ось $o'x'$ и не имеют относительно ее моментов.

Укажем простое значение M_1':

$$M_1' = \int\int\int \rho\left(y'\frac{dU}{dz'} - z'\frac{dU}{dy'}\right)dx'\,dy'\,dz',$$

где интеграция распространяется на объем, заключенный между поверхностями тел и поверхностью сферы. Прилагая к этому объему формулу (5) третьей лекции, положим в ней

$$F = \rho U, \quad l = 0, \quad m = -z', \quad n = y';$$

найдем:

$$-\int\int \rho U(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'\,dy'\,dz' = M_1',$$

где интеграл первой части можно считать отнесенным только к поверхности тел, потому что на поверхности сферы

$$\cos\gamma : \cos\beta = z' : y'.$$

Полагая, что функция U представляет непрерывную однозначную функцию также и внутри объемов тел, напишем формулу (5) третьей лекции для этих объемов, сделав в ней то же положение, как выше, и заметив, что углы нормали, направленной внутрь тел, имеют косинусы $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$; получим:

$$\int\int \rho U(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'\,dy'\,dz',$$

где тройная интеграция относится уже к объемам тел. Таким образом

$$M_1' = -\int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'\,dy'\,dz', \qquad (15)$$

т. е. *M_1' есть взятая с обратным знаком сумма моментов сил, которые бы действовали на жидкость, наполняющую объемы тел.* Это есть обобщение закона Архимеда.

Что касается бесконечно малого изменения во время dt количеств движения масс, ограниченных во время t проведенной радиусом a сферой $cdefgh$ (фиг. 23), то оно сложится из $d\zeta_1'$ и из разности суммы моментов количеств движения в объеме $cde'fgh'$ и в сфере $cdefgh$, где $cde'fgh'$ есть форма рассматриваемой массы жидкости во время $t+dt$. Эта последняя разность будет:

$$dt\int\int \rho\frac{\partial F}{\partial r}d\sigma\cdot\frac{\partial F}{r\cos\theta\,\partial\psi}\cdot r\cos\theta = dt\,\rho a^2\int\int\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial\psi}\cos\theta\,d\psi\,d\theta,$$

где θ и ψ — широта и долгота, считая за полярную ось $o'x'$.

На основании всего сказанного получим:

$$\frac{dK_1'}{dt}+\rho a^2\int\int\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial\psi}\cos\theta\,d\psi\,d\theta = L_1'+M_1'.$$

Второй член, входящий в эту формулу, не должен зависеть от радиуса a, потому что все остальные члены формулы от него не зависят. Поэтому мы можем определить величину рассматриваемого члена, приняв $a=\infty$, при этом $\frac{\partial F}{\partial r}$ будет по формуле (10) порядка a^{-2}, а $\frac{\partial F}{\partial\psi}$ будет порядка a^{-1}, так что второй член есть нуль. Таким образом

$$\frac{dK_1'}{dt} = L_1'+M_1'.$$

Подставим в эту формулу вместо K_1' его величину из формул (14) и заменим подобными же формулами L_1' и M_1'. Пусть все силы, действующие на тела, приводятся к одной силе R, действующей на точку o, и к одной паре момента L, которым по осям x, y, z соответствуют компоненты R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, а все взятые в обратную сторону силы действия на жидкости, которые бы наполняли объемы тел, приводятся к силе S и паре с моментом M, имеющим по этим осям компоненты S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3. Мы получим

$$\frac{dK_1}{dt}-\eta\frac{dQ_3}{dt}+\zeta\frac{dQ_2}{dt} = L_1+M_1-\eta(R_3+S_3)+\zeta(R_2+S_2).$$

Прибавляя к этим формулам еще две аналогичные и замечая, что ξ, η, ζ суть величины совершенно произвольные, получим шесть уравнений, которые будут удовлетворены во все время движения тел:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + S_1 &= \frac{dQ_1}{dt}; \\ R_2 + S_2 &= \frac{dQ_2}{dt}; \\ R_3 + S_3 &= \frac{dQ_3}{dt}; \\ L_1 + M_1 &= \frac{dK_1}{dt}; \\ L_2 + M_2 &= \frac{dK_2}{dt}; \\ L_3 + M_3 &= \frac{dK_3}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Эти уравнения показывают, что *сила и момент пары, получаемые из всех внешних сил, действующих на тела, и из сил, определяемых по обобщенному закону Архимеда, геометрически равны геометрическим производным импульсивной силы и момента импульсивной пары.*

Пользуясь уравнениями (16), мы можем теперь объяснить значение терминов „импульсивная сила“ и „пара“. Положим, что то движение, которое имеет жидкость и тела, получено из покоя в продолжение бесконечно малого промежутка времени τ действием на тела бесконечно больших сил. Написав для каждого момента времени в промежутке τ уравнения (16), умножим их на dt и возьмем от обеих частей их интегралы от 0 до τ; получим, отбрасывая бесконечно малые величины, что

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \int_0^\tau R_1\,dt, \\ K_1 &= \int_0^\tau L_1\,dt, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Таким образом Q и K имеют то же значение, которое в теории мгновенных сил дают импульсивной силе и моменту импульсивной пары.

Останавливаясь на предположении:

$$R_1 + S_1 = R_2 + S_2 = R_3 + S_3 = 0,$$

$$L_1 + M_1 = L_2 + M_2 = L_3 + M_3 = 0,$$

найдем из уравнений (15) и (16) теорему, которая может быть названа принципом сохранения импульсивной силы и пары [1]. *При отсутствии силы и пары, происходящих от сложения внешних сил, действующих на погруженные тела, и сил, определяемых по обобщенному закону Архимеда, импульсивная сила и пара остаются все время неизменными.*

Согласно теореме Пуансо мы можем заменить импульсивную пару и силу импульсивной парой и силой, направленной по оси пары. Прямая, по которой в этом случае направляется импульсивная сила, играет важную роль в теории движения твердого тела в жидкости. Мы будем ее называть *осью импульсивных сил.*

§ 23. О трех поверхностях второго порядка, управляющих движением твердого тела в беспредельной жидкости. Когда имеется только одно твердое тело, то функцию F абсолютного движения жидкости удобнее выражать относительно осей координат, неизменяемо соединенных с телом, так как при этом является возможность дать осям относительно тела самое выгодное положение. Пусть оси, соединенные с телом, в данный момент времени совпадают с неподвижными осями x, y, z предыдущего параграфа. Назовем через u, v, w компоненты поступательного, а ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты вращательного движения твердого тела по этим осям. Тогда на поверхности тела должно быть удовлетворено условие

$$\frac{dF}{dn} = (u + \omega_2 z - \omega_3 y)\cos\alpha + (v + \omega_3 x - \omega_1 z)\cos\beta + \\ + (w + \omega_1 y - \omega_2 x)\cos\gamma. \qquad (18)$$

---

[1] Данное нами доказательство этого принципа заимствовано у Томсона, On vortex motion, Philos. Trans. R. S. Edin., 1869.

Если положим

$$F = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w + \psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \psi_3 \omega_3, \tag{19}$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 однозначны, удовлетворяют уравнению Лапласа и имеют в бесконечности производные порядка a^{-3}, то для удовлетворения уравнения (18) надо, чтобы на поверхности тела

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dn} = \cos\alpha, \quad \frac{d\varphi_2}{dn} = \cos\beta, \quad \frac{d\varphi_3}{dn} = \cos\gamma, \\ &\frac{d\psi_1}{dn} = y\cos\gamma - z\cos\beta, \quad \frac{d\psi_2}{dn} = z\cos\alpha - x\cos\gamma, \\ &\frac{d\psi_3}{dn} = x\cos\beta - y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Зная F, определим по формулам (12) и (13) P_1 и H_1, которые на основании формул (20) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= -\rho \int\int F \frac{d\varphi_1}{dn}\, d\sigma, \\ H_1 &= -\rho \int\int F \frac{\psi_1}{dn}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Здесь интеграция распространяется только на поверхности тел; но мы можем вообразить, что она распространяется и на поверхность сферы бесконечного радиуса a, ибо на этой сфере подинтегральная функция будет порядка a^{-3}. При таком предположении вторые части формул (21) могут быть преобразованы по формуле Грина (§ 12) в объемные интегралы, распространенные на пространство, заключенное между телом и бесконечно удаленной сферой. Для сокращения введем обозначения:

$$(F, \varphi_1) = \int\int\int \rho \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Получим по формуле (19):

$$\left.\begin{aligned} = &\quad (\varphi_1, \varphi_1) + v\,(\varphi_2, \varphi_1) + w(\varphi_3, \varphi_1) + \\ &+ \omega_1(\psi_1, \varphi_1) + \omega_2(\psi_2, \varphi_1) + \omega_3(\psi_3, \varphi_1), \\ H_1 = &\; u(\varphi_1, \psi_1) + v\,(\varphi_2, \psi_1) + w\,(\varphi_3, \psi_1) + \\ &+ \omega_1(\psi_1, \varphi_1) + \omega_2(\psi_2, \psi_1) + \omega_3(\psi_3, \psi_1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эти формулы позволяют установить связь между компонентами векторов P и H и живой силой всей рассматриваемой жидкой массы. Называя последнюю через T_1, найдем:

$$\begin{aligned}
2T_1 = (F, F) = {} & (\varphi_1, \varphi_1)u^2 + (\varphi_2, \varphi_2)v^2 + (\varphi_3, \varphi_3)w^2 + \\
& + 2(\varphi_2, \varphi_3)vw + 2(\varphi_3, \varphi_1)wu + 2(\varphi_1, \varphi_2)uv + \\
& + (\psi_1, \psi_1)\omega_1^2 + (\psi_2, \psi_2)\omega_2^2 + (\psi_3, \psi_3)\omega_3^2 + \\
& + 2(\psi_2, \psi_3)\omega_2\omega_3 + 2(\psi_3, \psi_1)\omega_3\omega_1 + 2(\psi_1, \psi_2)\omega_1\omega_2 + \\
& + 2(\psi_1, \varphi_1)\omega_1 u + 2(\psi_2, \varphi_1)\omega_2 u + 2(\psi_3, \varphi_1)\omega_3 u + \\
& + 2(\psi_1, \varphi_2)\omega_1 v + 2(\psi_2, \varphi_2)\omega_2 v + 2(\psi_3, \varphi_2)\omega_3 v + \\
& + 2(\psi_1, \varphi_3)\omega_1 w + 2(\psi_2, \varphi_3)\omega_2 w + 2(\psi_3, \varphi_3)\omega_3 w. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial u}, \\ H_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial \omega_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Назовем через T_2 однородную функцию второго измерения относительно u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3, представляющую живую силу твердого тела, и припомним формулы динамики:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{dT_2}{du}, \\ G_1 &= \frac{dT_2}{d\omega_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Из уравнения (11) следует, что импульсивная сила и импульсивная пара выражаются с помощью живой силы $T = T_1 + T_2$ всей рассматриваемой системы формулами:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial T}{\partial u}, \\ K_1 &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Складывая вторую часть формулы (23) с выражением двойной живой силы твердого тела, найдем выражение вида:

$$2T = a_{1.1}u^2 + a_{2.2}v^2 + a_{3.3}w^2 + 2a_{2.3}vw + 2a_{3.1}wu + 2a_{1.2}uv +$$
$$+ b_{1.1}\omega_1^2 + b_{2.2}\omega_2^2 + b_{3.3}\omega_3^2 + 2b_{2.3}\omega_2\omega_3 + 2b_{3.1}\omega_3\omega_1 + 2b_{1.2}\omega_1\omega_2 +$$
$$+ 2c_{1.1}u\omega_1 + 2c_{1.2}u\omega_2 + 2c_{1.3}u\omega_3 +$$
$$+ 2c_{2.1}v\omega_1 + 2c_{2.2}v\omega_2 + 2c_{2.3}v\omega_3 +$$
$$+ 2c_{3.1}w\omega_1 + 2c_{3.2}w\omega_2 + 2c_{3.3}w\omega_3. \qquad (27)$$

Надлежащим выбором начала координат можно всегда достигнуть, чтобы в этой формуле коэфициенты при $u\omega_2$ и $v\omega_1$ и т. д. были одинаковы. Пусть ξ, η, ζ будут координаты относительно прежних осей начала новых осей, параллельных прежним. Тогда между скоростями u, v, w старого начала o и скоростями u', v', w' нового o' будет существовать связь:

$$u = u' - (\omega_2\zeta - \omega_3\eta),$$

$$v = v' - (\omega_3\xi - \omega_1\zeta),$$

$$w = w' - (\omega_1\eta - \omega_2\xi).$$

Подставив это в формулу (27) и допустив для простоты, что вследствие выбора первоначальных осей $a_{2.3} = a_{3.1} = a_{2.3} = 0$, найдем, что коэфициенты при $u'\omega_2$, $v'\omega_1$, ... примут вид:

$$c'_{1.2} = c_{1.2} - a_{1.1}\zeta,$$

$$c'_{2.1} = c_{2.1} + a_{2.2}\zeta,$$

. . . . . .

Эти формулы дают нам возможность выбрать ξ, η, ζ так, чтобы

$$c_{1.2}' = c_{2.1}', \quad c_{2.3}' = c_{3.2}', \quad c_{3.1}' = c_{1.3}'.$$

Для этого стоит только положить:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \frac{c_{1.2} - c_{2.1}}{a_{1.1} + a_{2.2}}, \\ \xi &= \frac{c_{2.3} - c_{3.2}}{a_{2.2} + a_{3.3}}, \\ \eta &= \frac{c_{3.1} - c_{1.3}}{a_{3.3} + a_{1.1}}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Точка, определенная этими уравнениями, играет важную роль в движении твердого тела в беспредельной жидкости; мы будем звать ее *центральной точкой*. Рассмотрим теперь в связи с формулой (27) три поверхности второго порядка, из которых первые две имеют место при всяких осях, последняя же может иметь значение только тогда, когда начало координат есть центральная точка. Эти поверхности пред-ставляются уравнениями:

$$a_{1.1}x^2 + a_{2.2}y^2 + a_{3.3}z^2 + 2a_{2.3}yz + 2a_{3.1}zx + 2a_{1.2}xy = f_1(x, y, z) = 1; \tag{29}$$

$$b_{1.1}x^2 + b_{2.2}y^2 + b_{3.3}z^2 + 2b_{2.3}yz + 2b_{3.1}zx + 2b_{1.2}xy = f_2(x, y, z) = 1; \tag{30}$$

$$c_{1.1}x^2 + c_{2.2}y^2 + c_{3.3}z^2 + 2c_{2.3}yz + 2c_{3.1}zx + 2c_{1.2}xy = f_3(x, y, z) = 1. \tag{31}$$

Первые две поверхности суть эллипсоиды, потому что первые их части представляют двойную живую силу при положении $u = x$, $v = y$, $w = z$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ и при положении $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = z$.

Разъясним значения этих поверхностей. Предположим, что наше твердое тело может иметь только поступательное движение в направлении радиуса-вектора r эллипсоида (29), и посмотрим, какой импульсивной силой Q следует подейство-

вать в этом направлении, чтобы тело получило скорость V. По формулам (26), (27) и (29)

$$Q = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{x}{r} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{y}{r} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{z}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{V}{r^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x + \frac{\partial f_1}{\partial y}y + \frac{\partial f_1}{\partial z}z\right) = \frac{V}{r^2}f_1(x, y, z) = \frac{V}{r^2}$$

или

$$Q = \mu V, \quad \mu = \frac{1}{r^2}. \tag{32}$$

Величину μ мы будем звать *измененной массой тела в направлении r*. Формулы (32) показывают, что эллипсоид (29) получается, если отложим на радиусах-векторах, проходящих через точку o, длины

$$r = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Мы будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом измененных масс*. То обстоятельство, что изменение начала координат не изменяет первые шесть членов формулы (27), показывает, что эллипсоид измененных масс один и тот же для всякой точки тела. Если направим оси координат по главным осям эллипсоида измененных масс, то уравнение (29) примет вид:

$$a_{1.1}x^2 + a_{2.2}y^2 + a_{3.3}z^2 = 1,$$

причем две из величин $a_{1.1}$, $a_{2.2}$, $a_{3.3}$ будут представлять наибольшую и наименьшую измененную массу.

Покажем, что *измененная масса во всяком направлении более массы тела*. Задавшись каким-нибудь направлением, возьмем его за направление оси ox в формуле (27) и заметим, что для этого направления

$$\mu = a_{1.1}$$

или, обращая внимание на формулу (23) и припоминая выражение для живой силы T_2,

$$\mu = M + (\varphi_1, \varphi_1), \tag{33}$$

где M — масса тела. Это равенство доказывает желаемое. Предположим теперь, что для тела, погруженного в жидкость, возможно только вращение около радиуса-вектора r' эллипсоида (30), и определим момент импульсивной пары K, плоскость которой перпендикулярна r' и которая сообщает телу угловую скорость ω. По формулам (26) и (27)

$$K = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{x}{r'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{y}{r'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{z}{r'} =$$

$$= \frac{\omega}{2r'^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x + \frac{\partial f_2}{\partial y}y + \frac{\partial f_2}{\partial z}z\right) = \frac{\omega}{r'^2}f_2(x, y, z) = \frac{\omega}{r'^2}$$

или

$$K = \nu\omega, \quad \nu = \frac{1}{r'^2}. \tag{34}$$

Величину ν мы будем называть *измененным моментом инерции относительно оси* r'. Формулы (34) показывают, что эллипсоид (30) получается, если отложим на радиусах-векторах, проходящих через точку o, длины

$$r' = \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Мы будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом измененных моментов инерции*. Этот эллипсоид будет изменяться с изменением начала координат. Но какую бы точку мы ни взяли за центр эллипсоида, всегда *измененный момент инерции относительно всякой оси более момента инерции тела относительно этой оси*. Действительно, если примем эту ось за ось ox, то по формуле (23) и по известному выражению живой силы твердого тела

$$\nu = b_{1.1} = J_1 + (\psi_1, \psi_1), \tag{35}$$

где J_1 — момент инерции тела около оси ox.

Переходим к рассмотрению поверхности (31), которая, как мы сказали, может иметь значение только для центральной точки и представляет некоторый эллипсоид или гиперболоид. Проведем некоторый радиус-вектор r'' этой поверхности и

предположим, что наше твердое тело может только вращаться около этого радиуса и скользить вдоль его. Если бы тело не было погружено в жидкость, то для сообщения ему одного вращения ω около упомянутой оси r'' нужно бы было подействовать только парой, ось которой можно принять направленной по r''; но в нашем случае, кроме импульсивной пары, момент которой определяется по формуле (34), следует еще употребить импульсивную силу Q, которая найдется, полагая $u = v = w = 0$ в формуле

$$Q = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{x}{r''} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{y}{r''} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{z}{r''},$$

т. е. будет

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\omega}{r''^2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}x + \frac{\partial f_3}{\partial y}y + \frac{\partial f_3}{\partial z}z\right) = \frac{\omega}{r''^2},$$

или

$$Q = \lambda\omega, \quad \lambda = \frac{1}{r''^2}. \tag{36}$$

Точно так же мы можем показать, что для сообщения нашему телу поступательного движения со скоростью V вдоль радиуса r'', кроме импульсивной силы, определяемой по формуле (32), надо еще употребить импульсивную пару, момент которой по направлению r'' будет

$$K = \lambda V. \tag{37}$$

Таким образом выясняется механическое значение поверхности (31) и множителя λ. Если эта поверхность есть гиперболоид, то по направлению асимптотического конуса $\lambda = 0$, и поступательное движение в этом направлении получается только от действия импульсивной силы.

Подобно тому как все влияние твердого тела в пустоте на его движение характеризуется его массой и центральным эллипсоидом инерции, все влияние твердого тела в жидкости на сообщаемое ему движение характеризуется тремя указанными поверхностями. Когда эти три поверхности даны и известны векторы V и ω, то весьма просто построить геометрически векторы Q и K. Определяем точки пересечения

A и C вектора V с поверхностями (29) и (31), а также — точки пересечения B и D вектора ω с поверхностями (30) и (31); проводим через точки A, B, C, D касательные плоскости к соответственным поверхностям второго порядка и опускаем на эти плоскости из o перпендикуляры oA', oB', oC', oD'; по направлению этих перпендикуляров откладываем векторы

$$\frac{V}{oA\cdot oA'},\quad \frac{\omega}{oB\cdot oB'},\quad \frac{V}{oC\cdot oC'},\quad \frac{\omega}{oD\cdot oD'}.$$

Складывая геометрически первый и четвертый векторы, найдем Q, а складывая второй и третий — найдем K.

Рассмотрим теперь частные случаи, при которых функция $2T$, а следовательно, и уравнения трех вышеупомянутых поверхностей упрощаются. Будем предполагать, что уравнение (27) отнесено к осям, имеющим начало в центральной точке, и рассмотрим особые положения тела относительно этих осей.

1. Тело симметрично [1] относительно плоскости xz. В этом предположении живая сила не должна изменяться при изменении v, ω_1 и ω_3 на $-v$, $-\omega_1$, $-\omega_3$, поэтому

$$\left.\begin{aligned} a_{1\cdot 2} = a_{2\cdot 3} = b_{1\cdot 2} = b_{2\cdot 3} = 0,\\ c_{1\cdot 1} = c_{2\cdot 2} = c_{3\cdot 3} = c_{1\cdot 3} = c_{3\cdot 1} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

2. Тело симметрично относительно плоскостей xz и yz. Здесь к условиям (38) прибавляются аналогичные условия для симметрии относительно плоскости yz, что дает еще

$$a_{1\cdot 3} = b_{1\cdot 3} = c_{2\cdot 3} = 0.$$

Вследствие этого живая сила получает вид:

$$2T = a_{1\cdot 1}u^2 + a_{2\cdot 2}v^2 + a_{3\cdot 3}w^2 + b_{1\cdot 1}\omega_1^2 + b_{2\cdot 2}\omega_2^2 + b_{3\cdot 3}\omega_3^2 + \\ + 2c_{1\cdot 2}(u\omega_2 + v\omega_1). \qquad (39)$$

3. Тело симметрично относительно всех трех плоскостей координат. Здесь прибавляется лишнее условие $c_{1\cdot 2} = 0$, так что

$$2T = a_{1\cdot 1}u^2 + a_{2\cdot 2}v^2 + a_{3\cdot 3}w^2 + b_{1\cdot 1}\omega_1^2 + b_{2\cdot 2}\omega_2^2 + b_{3\cdot 3}\omega_3^2. \qquad (40)$$

[1] Как по форме, так и по расположению масс.

4. Данное тело есть тело вращения относительно оси oz. В этом случае живая сила должна иметь вид формулы (39); кроме того, она должна обладать тем свойством, что она не изменяется при повороте векторов ω и V около оси oz на $\frac{\pi}{2}$, т. е. при замене ω_1, ω_2, u, v на ω_2, $-\omega_1$, v, $-u$. Это положение требует, чтобы

$$a_{1.1} = a_{2.2},\ b_{1.1} = b_{2.2},\ c_{1.2} = 0.$$

Живая сила при этом принимает вид:

$$2T = a_{1.1}(u^2 + v^2) + a_{3.3}w^2 + b_{1.1}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_{3.3}\omega_3^2. \quad (41)$$

5. Тело обладает тем свойством, что, будучи повернуто около оси oz на π, не изменяет своего внешнего вида (примером может служить пароходный винт с двумя лопастями). Выражение $2T$ не должно изменяться от поворота на π около оси oz векторов ω и V, т. е. от замены u, v, ω_1, ω_2 на $-u$, $-v$, $-\omega_1$, $-\omega_2$. Это дает

$$a_{1.3} = a_{2.3} = b_{1.3} = b_{2.3} = 0,$$

$$c_{1.3} = c_{3.1} = c_{2.3} = c_{3.2} = 0,$$

так что

$$2T = a_{1.1}u^2 + a_{2.2}v^2 + a_{3.3}w^2 + 2a_{1.2}uv +$$
$$+ b_{1.1}\omega_1^2 + b_{2.2}\omega_2^2 + b_{3.3}\omega_3^2 + 2b_{1.2}\omega_1\omega_2 +$$
$$+ 2c_{1.1}u\omega_1 + 2c_{2.2}v\omega_2 + 2c_{3.3}w\omega_3 + 2c_{1.2}(u\omega_2 + v\omega_1). \quad (42)$$

6. Если тело, имея свойство, указанное в случае (5), обладает еще тем свойством, что не изменяет вида при повороте относительно оси oz на $\frac{\pi}{2}$ (пароходный винт с четырьмя лопастями), то, рассуждая как в случае (4), найдем

$$a_{1.1} = a_{2.2},\ b_{1.1} = b_{2.2};$$

$$a_{1.2} = b_{1.2} = 0;$$

$$c_{1.1} = c_{2.2},\ c_{1.2} = 0,$$

откуда

$$2T = a_{1.1}(u^2 + v^2) + a_{3.3}w^2 + b_{1.1}(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + b_{3.3}\omega_3{}^2 + \\ + 2c_{1.1}(u\omega_1 + v\omega_2) + 2c_{3.3}w\omega_3. \qquad (43)$$

Сравнивая этот последний случай с (4), видим, что в обоих случаях эллипсоиды измененных масс и моментов инерции суть эллипсоиды вращения около оси oz, но между обоими этими случаями есть существенное различие. В случае (4) всякая импульсивная сила, действуя на центральную точку, сообщает телу только поступательное движение, а всякая импульсивная пара — только вращательное движение (если бы $a_{1.1} = a_{3.3}$, то этот случай вполне был бы схож с движением тела вращения в пустоте); между тем в случае (6) от действия одной импульсивной силы или одной импульсивной пары получается поступательное и вращательное движение.

Если, например, мы имеем импульсивную пару K, момент которой направлен по oz, то тело начнет двигаться по направлению этой оси и вращаться около нее со скоростями w и ω_3, определяемыми из уравнений:

$$0 = a_{3.3}w + c_{3.3}\omega_3,$$

$$K = b_{3.3}\omega_3 + c_{3.3}w.$$

Отсюда

$$w = \frac{Kc_{3.3}}{c_{3.3}{}^2 - b_{3.3}a_{3.3}}, \quad \omega_3 = \frac{Ka_{3.3}}{a_{3.3}b_{3.3} - c_{3.3}{}^2}. \qquad 44)$$

Таким образом объясняется, отчего от действия пары пароходный винт получает, кроме вращения, еще поступательное движение.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим для примера изменение массы и моментов инерции в теле, имеющем форму шара или эллипсоида. В случае шара, разумеется, может быть речь только об изменении массы, которое для всех направлений одинаково. По формуле (33) масса прирастет на

$$(\varphi_1, \varphi_1) = -\rho \int\int \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dn} d\sigma = -\rho \int\int \varphi_1 \cos\alpha \, d\sigma. \qquad (45)$$

На основании формулы (16) четвертой лекции мы должны в случае шара положить

$$\varphi_1 = -\frac{b^3}{2}\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

где b — радиус шара; получаем:

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{b}{2}\rho\int\int\cos^2\alpha\, d\sigma = \pi b^3\rho\int_0^\pi\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3}\pi b^3\rho,$$

и, следовательно,

$$\mu = M + \frac{2}{3}\pi b^3\rho. \tag{46}$$

Таким образом *динамический эффект жидкости, в которую погружен шар, состоит в том, что масса шара увеличивается наполовину массы вытесненной им жидкости.*

Переходим к эллипсоиду. Направив оси координат по его осям, представим уравнение эллипсоида в виде

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{y^2}{1+\varepsilon'^2} + z^2 = c^2,$$

где c — наименьшая полуось эллипсоида. Так как вследствие симметрии рассматриваемого тела относительно осей координат (случай 3) эллипсоиды измененных масс и измененных моментов инерции имеют оси, направленные по осям координат, то нам достаточно определить измененные массы и измененные моменты инерции только для радиусов-векторов, идущих по этим осям. На основании формулы (42) шестой лекции мы должны подставить в формулу (45)

$$\varphi_1 = -\frac{Ax}{4\pi - A},$$

так что

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{A\rho}{4\pi - A}\int\int x\cos\alpha\, d\sigma.$$

Прилагаем сюда формулу (5) третьей лекции, считая в ней

$$F = x,\ I = 0,\ m = 0,\ n = 0$$

и относя ее к объему эллипсоида:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{A\rho}{4\pi - A} \int\int\int dx\, dy\, dz = \frac{A}{4\pi - A} \rho U,$$

где U — объем эллипсоида. Так же найдем (φ_2, φ_2) и (φ_3, φ_3), так что все три измененные массы будут:

$$\left.\begin{aligned} a_{1\cdot 1} &= M + \frac{A}{4\pi - A} \rho U, \\ a_{2\cdot 2} &= M + \frac{B}{4\pi - B} \rho U, \\ a_{3\cdot 3} &= M + \frac{C}{4\pi - C} \rho U. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Сюда следует прибавить формулы из теории притяжения:

$$\left.\begin{aligned} A &= q \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \varepsilon^2 u^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \varepsilon'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ B &= q \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \varepsilon^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= q \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \varepsilon^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где

$$q = 4\pi (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если данный эллипсоид есть эллипсоид вращения около малой оси, то

$$\left.\begin{aligned} A = B &= 2\pi \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon \right), \\ C &= 4\pi \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon \right). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Приложим эти формулы к случаю бесконечно тонкого диска, в который обращается наш эллипсоид при $\varepsilon = \infty$. Раз-

лагаем вторые части формулы (49) по нисходящим степеням ε и ограничиваемся членами порядка ε^{-1}:

$$A = B = \frac{\pi^2}{\varepsilon}, \qquad C = 4\pi - \frac{2\pi^2}{\varepsilon}. \tag{50}$$

Подстановка этих формул в уравнения (47) дает:

$$a_{1.1} = a_{2.2} = M, \; a_{3.3} = M + \frac{2}{3}\, a^3 \rho, \tag{51}$$

где a — радиус диска.

Таким образом, несмотря на бесконечно малый объем жидкости, вытесняемой бесконечно тонким диском, кажущееся приращение его массы для движения, перпендикулярного плоскости диска, есть конечная величина, пропорциональная кубу радиуса диска. Для определения измененных моментов инерции погруженного в беспредельную жидкость эллипсоида мы должны предварительно определить ψ_1, ψ_2, ψ_3. Легко усмотреть, что выражение

$$\psi_1 = k(yZ - zY), \tag{52}$$

где Z и Y — компоненты по осям координат силы притяжения эллипсоидом внешней точки (произведение коэфициента притяжения на плотность берем равным единице), удовлетворяет уравнению Лапласа; с другой стороны, оно обращается в бесконечности в величину порядка a^{-2}; на поверхности же тела имеем по известной теореме из теории притяжения

$$\frac{dY}{dn} + \frac{dY}{dn'} = 4\pi \cos\beta,$$

$$\frac{dZ}{dn} + \frac{dZ}{dn'} = 4\pi \cos\gamma,$$

где dn — элемент нормали, направленной внутрь жидкости, а dn' — элемент нормали, направленной внутрь эллипсоида. Так как при составлении производных по dn' нужно брать

$$Y = -By, \; Z = -Cz,$$

то

$$\frac{dY}{dn} = (4\pi - B)\cos\beta,$$

$$\frac{dZ}{dn} = (4\pi - C)\cos\gamma,$$

и по формуле (52)

$$\frac{d\psi_1}{dn} = k[(4\pi - C + B)\, y\cos\gamma - (4\pi - B + C)\, z\cos\beta].$$

Подставляя в четвертое из уравнений (20) и замечая, что для эллипсоида

$$y : z = \cos\beta(1 + \varepsilon'^2) : \cos\gamma,$$

имеем для определения k уравнение:

$$k[(4\pi - C + B)(1 + \varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)] = \varepsilon'^2,$$

откуда

$$k = \frac{\varepsilon'^2}{(4\pi - C + B)(1 + \varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)}. \qquad (53)$$

Формулы (52) и (53) определяют ψ_1; подобным же образом найдем ψ_2 и ψ_3. Теперь мы можем составить величину

$$(\psi_1, \psi_1) = -\rho\int\int \psi_1 (y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma =$$

$$= k\rho(C - B)\int\int yz\,(y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma.$$

Пользуясь формулой (5) третьей лекции, в которой возьмем

$$F = yz,\ l = 0,\ m = -z,\ n = y$$

и которую отнесем к объему эллипсоида, напишем, что

$$(\psi_1, \psi_1) = k\rho(C - B)\int\int\int (y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{5} k(C - B)\rho U(b^2 - c^2)$$

или, подставляя величину k,

$$(\psi_1, \psi_1) = \frac{c^2\varepsilon'^4(C-B)}{5[(4\pi-C+B)(1+\varepsilon'^2)-(4\pi-B+C)]}U\rho.$$

Подобным же образом найдем (ψ_2, ψ_2) и (ψ_3, ψ_3), так что, обозначая через J_1, J_2, J_3 моменты инерции эллипсоида относительно его главных осей, найдем по формуле (35):

$$\left.\begin{aligned} b_{1\cdot1} &= J_1 + \frac{1}{5}\frac{c^2\varepsilon'^4(C-B)U\rho}{(4\pi-C+B)(1+\varepsilon'^2)-(4\pi-B+C)}, \\ b_{2\cdot2} &= J_2 + \frac{1}{5}\frac{c^2\varepsilon^4(C-A)U\rho}{(4\pi-C+A)(1+\varepsilon^2)-(4\pi-A+C)}, \\ b_{3\cdot3} &= J_3 + \frac{1}{5}\frac{c^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2(B-A)U\rho}{(4\pi-B+A)(1+\varepsilon^2)-(4\pi-A+B)(1+\varepsilon'^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Приложим эти формулы к бесконечно тонкому диску. Для этого подставим вместо A, B и C их величины из формул (50); получим:

$$b_{1\cdot1} = b_{2\cdot2} = J_1 + \frac{16}{45}a^5\rho, \quad b_{3\cdot3} = J_3, \quad (55)$$

где a — радиус диска.

Мы видим, что изменение момента инерции диска относительно его диаметра есть тоже конечная величина, пропорциональная пятой степени диаметра диска.

§ 24. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости и их интеграция. Мы теперь будем рассматривать три системы осей координат: подвижные оси x, y, z, неизменяемо соединенные с телом, неподвижные оси x', y', z', которые в момент времени t совпадают с подвижными, и оси x'', y'', z'', начало которых всегда совпадает с началом подвижных осей, но которые остаются параллельными неподвижным осям. Так как все три системы осей в момент времени t совпадают, то компоненты всякого вектора в этот момент относительно каждой системы одинаковы; но это не имеет места относительно производных от компонентов по времени. Будем приписывать величинам, относящимся ко вторым

и третьим осям, значки (′) и (″) и напишем для времени t формулы (16) в виде:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + S_1 &= \frac{dQ_1''}{dt}, \\ R_2 + S_2 &= \frac{dQ_2''}{dt}, \\ R_3 + S_3 &= \frac{dQ_3''}{dt}, \\ L_1 + M_1 &= \frac{dK_1'}{dt}, \\ L_2 + M_2 &= \frac{dK_2'}{dt}, \\ L_3 + M_3 &= \frac{dK_3'}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Вообразив точку A, помещенную в конце вектора Q, начало которого лежит в начале подвижных осей, заметим, что

$$\frac{dQ_1''}{dt}, \quad \frac{dQ_2''}{dt}, \quad \frac{dQ_3''}{dt}$$

суть проекции на оси x'', y'', z'' скорости точки A относительно этих осей, которая слагается по правилу параллелограма из скорости точки A относительно осей x, y, z и скорости влечения точки A вследствие вращения этих осей. На основании этого замечания имеем для момента t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_1''}{dt} &= \frac{dQ_1}{dt} + \omega_2 Q_3 - \omega_3 Q_2, \\ \frac{dQ_2''}{dt} &= \frac{dQ_2}{dt} + \omega_3 Q_1 - \omega_1 Q_3, \\ \frac{dQ_3''}{dt} &= \frac{dQ_3}{dt} + \omega_1 Q_2 - \omega_2 Q_1. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Далее по прошествии бесконечно малого времени τ по формулам, аналогичным формуле (14), имеем:

$$K_1' = K_1'' + Q_3 v\tau - Q_2 w\tau,$$
$$K_2' = K_2'' + Q_1 w\tau - Q_3 u\tau,$$
$$K_3' = K_3'' + Q_2 u\tau - Q_1 v\tau.$$

Беря отсюда производные по времени, мы получим во второй части производные

$$\frac{dK_1''}{dt}, \quad \frac{dK_2''}{dt}, \quad \frac{dK_3''}{dt},$$

которые следует определить по формулам, аналогичным (57). Таким образом получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_1'}{dt} &= \frac{dK_1}{dt} + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 + Q_3 v - Q_2 w, \\ \frac{dK_2'}{dt} &= \frac{dK_2}{dt} + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 + Q_1 w - Q_3 u, \\ \frac{dK_3'}{dt} &= \frac{dK_3}{dt} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + Q_2 u - Q_1 v. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Подставляя уравнения (57) и (58) в (56), получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + S_1 &= \frac{dQ_1}{dt} + \omega_2 Q_3 - \omega_3 Q_2, \\ R_2 + S_2 &= \frac{dQ_2}{dt} + \omega_3 Q_1 - \omega_1 Q_3, \\ R_3 + S_3 &= \frac{dQ_3}{dt} + \omega_1 Q_2 - \omega_2 Q_1; \\ L_1 + M_1 &= \frac{dK_1}{dt} + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 + vQ_3 - wQ_2, \\ L_2 + M_2 &= \frac{dK_2}{dt} + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 + wQ_1 - uQ_3, \\ L_3 + M_3 &= \frac{dK_3}{dt} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + uQ_2 - vQ_1. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Так как эти уравнения содержат только величины, относящиеся к подвижным осям, то их и можно принять за ди-

ференциальные уравнения движения твердого тела, выраженные относительно этих осей. Определив из них u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 как функции времени, мы уже легко можем найти положение подвижных осей относительно неподвижных во всякое время. Мы рассмотрим здесь только задачу о движении твердого тела в жидкости по инерции, т. е. только тот случай, когда

$$R_1 + S_1 = R_2 + S_2 = R_3 + S_3 = \\ = L_1 + M_1 = L_2 + M_2 = L_3 + M_3 = 0.$$

Уравнения (59) обращаются при этом в следующие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= Q_2\omega_3 - Q_3\omega_2, \\ \frac{dQ_2}{dt} &= Q_3\omega_1 - Q_1\omega_3, \\ \frac{dQ_3}{dt} &= Q_1\omega_2 - Q_2\omega_1; \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= Q_2 w - Q_3 v + K_2\omega_3 - K_3\omega_2, \\ \frac{dK_2}{dt} &= Q_3 u - Q_1 w + K_3\omega_1 - K_1\omega_3, \\ \frac{dK_3}{dt} &= Q_1 v - Q_2 u + K_1\omega_2 - K_2\omega_1, \end{aligned}\right\} \qquad (60')$$

где вместо Q_1, Q_2, Q_3 K_1, K_2, K_3 надо подставить величины, данные формулами (26) и (27). Мы можем сейчас же получить три интеграла этих уравнений. Умножаем первые три уравнения (60) на Q_1, Q_2, Q_3, складываем их и интегрируем полученное уравнение; потом умножаем все шесть уравнений соответственно на K_1, K_2, K_3, Q_1, Q_2, Q_3, складываем и интегрируем; получаем:

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \text{const}, \qquad (61)$$

$$K_1Q_1 + K_2Q_2 + K_3Q_3 = \text{const}. \qquad (62)$$

Эти два интеграла являются следствием принципа сохранения импульсивной силы и пары. Первый интеграл показывает, что импульсивная сила Q постоянна по величине, а вто-

рой,—что проекция момента импульсивной пары на направление импульсивной силы постоянна.

Для получения третьего интеграла умножаем наши шесть уравнений (60) соответственно на u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 и, сложив их, преобразуем результат по формулам (26):

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) v + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) w + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) \omega_1 +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right) \omega_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) \omega_3 = \frac{d(2T)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} -$$

$$- \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{d\omega_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{dT}{dt}.$$

Отсюда получаем интеграл живых сил:

$$T = \text{const.} \tag{63}$$

Дальнейшая же интеграция уравнений (60) при произвольной форме тела и произвольных начальных данных до сих пор еще не осуществлена, и окончательное решение задачи о движении твердого тела в жидкости известно только в некоторых частных случаях. Во-первых, разобраны случаи установившегося движения (установившегося относительно подвижных осей, т. е. когда u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 постоянны), во-вторых, дано полное решение задачи в предположении, что тело приведено в движение с помощью импульсивной пары [1] и, в-третьих, вполне решена задача о движении в жидкости тела вращения [2].

Обращаясь к случаю установившегося движения, посмотрим прежде, не может ли тело иметь поступательное равномерно-прямолинейное движение. Положив в формулах (60) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ и приняв в них u, v, w, Q_1, Q_2, Q_3, K_1, K_2, K_3 постоянными, мы удовлетворим им, если

$$\frac{u}{Q_1} = \frac{v}{Q_2} = \frac{w}{Q_3}. \tag{64}$$

---

[1] Это решение дано Ламбом, см. Einleitung in die Hydrodynamik, § 114.

[2] Общее решение дано Кирхгоффом в Borchardt's Journal, Bd. 71; подробности же были разработаны Körcke в Math. Annalen, Bd. 12, и Schülke в Grunert's Archiv, 68 Teil, 1882.

Для истолкования смысла этой пропорции назовем через x, y, z координаты точки, в которой вектор V пересекает эллипсоид измененных масс, и представим на основании формулы (29) эту пропорцию в виде:

$$x : \frac{\partial f_1}{\partial x} = y : \frac{\partial f_1}{\partial y} = z : \frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что *для всякого твердого тела, погруженного в жидкость, существуют только три направления, по которым оно вследствие инерции может двигаться поступательным прямолинейно-равномерным движением, и эти направления суть направления осей эллипсоида измененных масс.* При этом, если рассматриваемое тело симметрично относительно трех плоскостей координат, т. е. его живая сила выражается формулой (40), то легко решить вопрос о том, которые из этих трех поступательных движений будут устойчивы. Пусть тело движется поступательно по направлению ox со скоростью c. Предположив, что оно подвергнулось некоторому бесконечно малому возмущению, будем считать величины v, w, ω_1, ω_2, ω_3 бесконечно малыми и полагать $u = c + u'$, где u' бесконечно мало. По формулам (60) и (40) получим:

$$a_{1\cdot1}\frac{du'}{dt} = 0, \quad a_{2\cdot2}\frac{dv}{dt} = -a_{1\cdot1}c\omega_3, \quad a_{3\cdot3}\frac{dw}{dt} = a_{1\cdot1}c\omega_2,$$

$$b_{1\cdot1}\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad b_{2\cdot2}\frac{d\omega_2}{dt} = cw(a_{3\cdot3} - a_{1\cdot1}),$$

$$b_{3\cdot3}\frac{d\omega_3}{dt} = cv(a_{1\cdot1} - a_{2\cdot2}).$$

Отсюда

$$a_{2\cdot2}\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{a_{1\cdot1}}{b_{3\cdot3}}(a_{2\cdot2} - a_{1\cdot1})c^2v,$$

(65)

$$a_{3\cdot3}\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{a_{1\cdot1}}{b_{2\cdot2}}(a_{3\cdot3} - a_{1\cdot1})c^2w.$$

Эти уравнения показывают, что *прочно только то поступательное движение, которое совершается по направлению оси, соответствующей наибольшей измененной массе.*

Если все точки поверхности, представленной уравне-

нием (31), удаляются в бесконечность, т. е. $c_{1.1} = c_{2.2} = \ldots = 0$, то для тела возможны по инерции три равномерные вращения около осей эллипсоида измененных моментов инерции, построенного для центральной точки, ибо уравнения (60) удовлетворяются при постоянных ω_1, ω_2, ω_3, K_1, K_2, K_3 и при $u = v = w = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, если

$$\frac{\omega_1}{K_1} = \frac{\omega_2}{K_2} = \frac{\omega_3}{K_3}; \tag{66}$$

эта же последняя пропорция может быть представлена в виде:

$$x : \frac{\partial f_2}{\partial x} = y : \frac{\partial f_2}{\partial y} = z : \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

где x, y, z — координаты точки, в которой вектор ω пересекает эллипсоид, выраженный уравнением (30).

Общий случай установившегося движения будет винтовое движение тела, которое найдется, приравнивая вторые части формул (60) нулю. Из полученных таким образом шести уравнений будут независимы только четыре, так как, умножив первые три на ω_1, ω_2, ω_3 и сложив, получаем $0 = 0$, и то же самое получаем, умножив все шесть уравнений соответственно на u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 и сложив. Четырем независимым уравнениям мы можем удовлетворить множеством значений u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3, а складывая найденные поступательные и вращательные движения, мы получим винтовые установившиеся движения. Легко увидеть, что все полученные нами шесть уравнений будут удовлетворены, если

$$\frac{\omega_1}{Q_1} = \frac{\omega_2}{Q_2} = \frac{\omega_3}{Q_3} = \frac{u}{K_1 - \lambda Q_1} = \frac{v}{K_2 - \lambda Q_2} = \frac{w}{K_3 - \lambda Q_3}, \tag{67}$$

где λ — произвольная величина. Равенство первых трех отношений пропорции показывает, что мгновенная ось вращения должна быть направлена по импульсивной силе Q; равенство последних трех показывает, что момент импульсивной пары разлагается на два вектора, из которых один направлен по оси вращени другой — по вектору V; наконец, равенство между собой тех и других отношений показывает, что компо-

нент момента импульсивной пары по направлению вектора V относится к Q так, как V относится к ω. На основании способа сложения поступательного и вращательного движений в одно винтовое и правила замены силы и пары силой и парой, ось которой направлена по силе, следует, что при указанных условиях мы получим винтовое движение, *ось вращения и скольжения* которого совпадает с *осью импульсивных сил*. Из сказанного в § 18 ясно, что такое движение тела будет установившимся.

Условия (67) неприложимы в случае $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, но при этом, как явствует из формул (60), мы удовлетворим условию установившегося движения формулой (66). Легко показать, что эта формула дает нам три установившиеся винтовые движения, совершающиеся около взаимно перпендикулярных непересекающихся винтовых осей. Поместив начало координат в центральной точке, направим оси по главным осям эллипсоида измененных масс. Из условия равенства нулю компонентов момента импульсивной пары определяем компоненты скорости поступательного движения:

$$u = -\frac{1}{a_{1.1}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_1}, \quad v = -\frac{1}{a_{2.2}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_2}, \tag{68}$$

$$w = -\frac{1}{a_{3.3}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_3}.$$

Подставляем отсюда u, v, w во вторые формулы (26):

$$K_1 = \frac{\partial f_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_1} - \left[\frac{c_{1.1}}{a_{1.1}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{2.1}}{a_{2.2}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_2} + \frac{c_{3.1}}{a_{3.3}} \frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial\omega_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_{1.1}} \frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1^2} \frac{\partial f_3}{\partial\omega_1} + \frac{1}{a_{2.2}} \frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \frac{\partial f_3}{\partial\omega_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_{3.3}} \frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1\partial\omega_3} \frac{\partial f_3}{\partial\omega_3}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\omega_1} \left\{ f_2 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{a_{1.1}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_1}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{a_{2.2}} \left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_2}\right)^2 + \frac{1}{a_{3.3}} \left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_3}\right)^2\right]\right\}.$$

Приняв для сокращения письма

$$\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f_2 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{a_{1.1}}\left(\frac{\partial f_3}{d\omega_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_{2.2}}\left(\frac{\partial f_3}{d\omega_2}\right)^2 + \frac{1}{a_{3.3}}\left(\frac{df_3}{d\omega_3}\right)^2\right], \tag{69}$$

получим:

$$K_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_1}, \quad K_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}, \quad K_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_3}. \tag{70}$$

Построим поверхность

$$\psi(x, y, z) = 1 \tag{71}$$

и, назвав через x, y, z координаты точки ее пересечения с вектором ω, представим формулу (66) в виде:

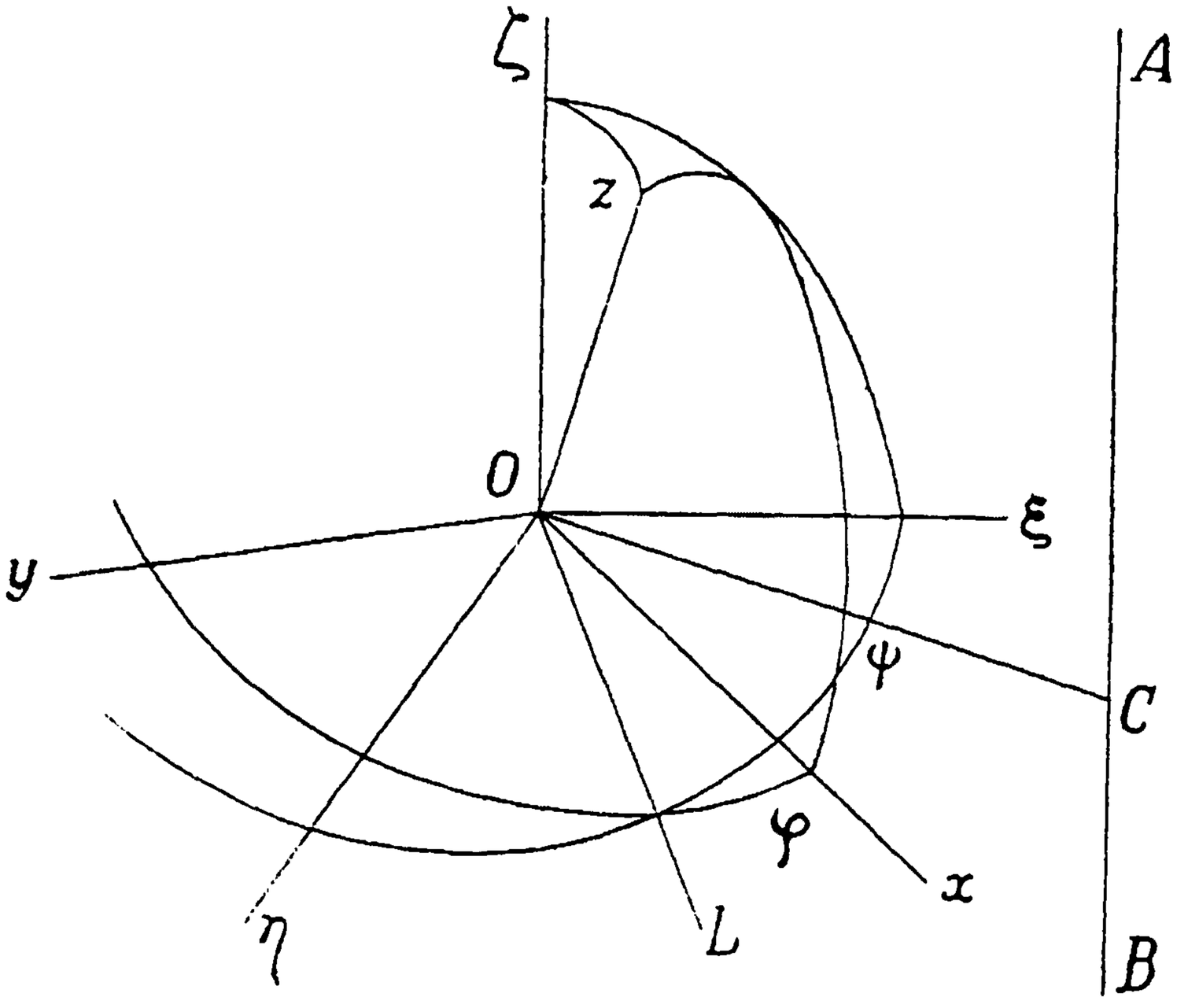
$$x : \frac{\partial\psi}{\partial x.} = y : \frac{\partial\psi}{\partial y} = z : \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Отсюда заключаем, что вектор ω должен быть направлен по одной из главных осей поверхности (71). Присоединив к вращению ω поступательное движение со скоростью, определенной по формулам (68), мы получаем три винтовые движения, совершающиеся относительно осей вращения и скольжения, параллельных осям поверхности (71).

Переходим к неустановившимся движениям твердого тела, погруженного в жидкость. Если одна точка тела неподвижна, то его движение определится по трем последним уравнениям (60′), приняв за начало координат неподвижную точку. Если для удобства направим оси координат по главным осям эллипсоида измененных моментов инерции, то найдем вследствие $u = v = w = 0$:

$$\left.\begin{aligned} b_{1.1}\frac{d\omega_1}{dt} &= \omega_2\omega_3(b_{2.2} - b_{3.3}), \\ b_{2.2}\frac{d\omega_2}{dt} &= \omega_3\omega_1(b_{3.3} - b_{1.1}), \\ b_{3.3}\frac{d\omega_3}{dt} &= \omega_1\omega_2(b_{1.1} - b_{2.2}). \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Так как эти уравнения одинаковы с уравнениями Эйлера для движения в пустоте твердого тела, имеющего неподвижную точку, то замечаем, что *весь эффект жидкости на движение тела, имеющего неподвижную точку, состоит в изменении его эллипсоида инерции* [1]. Так же просто решается задача о движении свободного тела в жидкости, когда оно получило свое движение только от импульсивной пары.



Фиг. 24.

Поместив начало координат в центральной точке и направив оси по главным осям поверхности (71), пишем три последние уравнения (60), приняв в них $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ и заменив K_1, K_2, K_3 по формулам (70):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega_1}\right) &= \omega_3\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2} - \omega_2\frac{\partial\psi}{\partial\omega_3}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}\right) &= \omega_1\frac{\partial\psi}{\partial\omega_3} - \omega_3\frac{\partial\psi}{\partial\omega_1}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega_3}\right) &= \omega\ \ \frac{\partial\psi}{\partial\omega_1} - \omega_1\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

[1] Мы можем получить этот эффект, присоединив к данному телу некоторое добавочное твердое тело, которое назовем *эквивалентным телом*. Эквивалентное тело может иметь моменты инерции, значительно превосходящие моменты инерции массы жидкости, наполняющей объем тела (как было показано в конце § 23). Этим отличается рассматриваемая задача от задачи о движении твердого тела, содержащего внутри себя жидкость, где момент инерции эквивалентного тела относительно всякой оси менее момента инерции заключенной жидкости. См. сочинение автора „О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельной жидкостью“, § 9, Журн. Русского физико-химического общества, 1885.

Это тоже формулы, аналогичные формулам Эйлера. Роль эллипсоида инерции играет здесь поверхность (71), которая, вообще говоря, может быть и не эллипсоидом. Когда вращательное движение тела будет найдено, то поступательное определится из формул (68).

Переходим к задаче о движении тела вращения. Представив живую силу формулой (41), увидим, что вторая часть шестого из уравнений (60) обращается в нуль, так что к трем найденным интегралам присоединяется еще интеграл

$$K_3 = \text{const}$$

или

$$\omega_3 = \text{const}. \tag{74}$$

Дальнейшую интеграцию формул (60) производить нет нужды, потому что, пользуясь четырьмя найденными интегралами и принципом сохранения импульсивной силы и пары, можно определить параметры, характеризующие положение тела в пространстве во всякое время.

Вообразим оси координат ξ, η, ζ, имеющие так же, как и оси x, y, z, начало в центральной точке, и предположим, что эти оси остаются при передвижении тела сами себе параллельными; причем ось $o\zeta$ параллельна оси импульсивных сил (т. е. по ней направляется вектор Q). Пусть (фиг. 24) θ, φ и ψ будут три эйлеровы угла, определяющие положение осей x, y, z относительно осей ξ, η, ζ, где θ есть угол между $o\zeta$ и oz, φ — угол между ox и прямой oL, по которой плоскость xoy пересекает $\xi o\eta$, ψ — угол между oL и $o\xi$. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= a_{1.1}u = -Q\sin\varphi\sin\theta, \\ Q_2 &= a_{1.1}v = Q\cos\varphi\sin\theta, \\ Q_3 &= a_{3.3}w = Q\cos\theta; \\ \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta, \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\omega_3 = -\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta. \tag{76}$$

Определяем отсюда u, v, w, ω_1, ω_2 и подставляем в формулы (63) и (62):

$$b_{1.1}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\sin^2\theta\right]+b_{3.3}\,\omega_3{}^2+\frac{1}{a_{1.1}}\,Q^2\sin^2\theta+$$

$$+\frac{1}{a_{3.3}}Q^2\cos^2\theta=\text{const}, \qquad (77)$$

$$b_{1.1}Q\,\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta+b_{3.3}\omega_3\cos\theta=\text{const}. \qquad (78)$$

Подставляя величину $\frac{d\psi}{dt}$, определенную из уравнения (78), в уравнение (77), мы определим t квадратурой через θ, потом из (78) и (76) выразим квадратурами через θ параметры ψ и φ. После этого надо будет перейти к определению места точки o. Опускаем из нее перпендикуляр oC на ось AB импульсивных сил и называем длину этого перпендикуляра через r, а угол его с oL — через ϑ. Из чертежа находим:

$$\cos(xoC)=\cos\vartheta\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(yoC)=\cos\vartheta\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(zoC)=\sin\vartheta\sin\theta.$$

Так как все импульсивные силы приводятся к силе Q, направленной по AB, и к паре, ось которой есть AB, то проекция момента K на oC должна быть нулем:

$$b_{1.1}\omega_1(\cos\vartheta\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi\cos\theta)+$$
$$+b_{1.1}\omega_2(\cos\vartheta\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi\cos\theta)+$$
$$+b_{3.3}\omega_3\sin\vartheta\sin\theta=0,$$

или по (75)

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\vartheta-\frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\sin\theta\cos\theta+\frac{b_{3.3}}{b_{1.1}}\omega_3\sin\vartheta\sin\theta=0. \qquad (79)$$

Отсюда, зная θ и ψ, определим ϑ:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\theta-\dfrac{b_{3.3}}{b_{1.1}}\omega_3\sin\theta}. \qquad (80)$$

Теперь надо определить r. Для этого проводим из o прямую oD, перпендикулярную $o\zeta$ и oC, и замечаем, что она образует с осями x, y, z углы:

$$\cos(xoD) = \sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(yoD) = \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(zoD) = -\cos\vartheta\sin\theta.$$

Пользуясь этими формулами, составляем проекцию K на oD и замечаем, что эта проекция должна быть равна $-Qr$:

$$-Qr = b_{1.1}\omega_2(\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\theta) +$$
$$+ b_{1.1}\omega_2(\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\theta) - b_{3.3}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta =$$
$$= b_{1.1}\left(\sin\vartheta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\sin\theta\cos\vartheta\right) - b_{3.3}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta.$$

Отсюда имеем:

$$r = \frac{b_{3.3}}{Q}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta - \frac{b_{1.1}}{Q}\left(\sin\vartheta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\sin\theta\cos\vartheta\right) \quad (81)$$

или по формуле (79)

$$r = -\frac{b_{1.1}}{Q}\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\sin\vartheta}. \quad (82)$$

Остается определить расстояние h центральной точки от некоторой неподвижной плоскости, перпендикулярной к оси импульсивных сил. Производная от этого расстояния по времени будет проекция скорости V на ось $o\zeta$. Вследствие этого по формулам (75) находим:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{a_{1.1}}(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta) + \frac{Q}{a_{3.3}}\cos^2\theta$$

или

$$\frac{dh}{dt} = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{1.1}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{3.3}}\right). \quad (83)$$

Формулы (80), (82) и (83), из которых только последняя требует интеграции, определяют положение центральной точки. Остановимся на двух частных случаях. Во-первых, рассмотрим движение тела вращения, когда $\omega_3 = 0$ и в уравнении (78)

постоянное есть нуль. Тогда $\frac{d\psi}{dt} = 0$ и по (80) имеем $\operatorname{tg}\vartheta = \infty$, т. е. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Ось вращения при этом случае будет все время оставаться в неподвижной плоскости, проходящей через ось импульсивных сил AB. Колебание оси вращения в этой плоскости будет дано формулой (77), из которой

$$dt = \frac{d2\theta}{\sqrt{\text{const} - 2\,\frac{a_{1\cdot1} - a_{3\cdot3}}{b_{1\cdot1}a_{1\cdot1}a_{3\cdot3}}\,Q^2\cos 2\theta}}. \qquad (84)$$

Эта формула показывает, что угол 2θ будет изменяться по закону маятника; при этом с изменением скорости колебания будет изменяться расстояние r, определяясь формулой

$$r = -\frac{b_{1\cdot1}}{Q}\,\frac{d\theta}{dt},$$

величина же h выразится квадратурой по формуле (83).

Во-вторых, сделаем предположение, что θ и $\frac{d\psi}{dt}$ постоянны. Обе эти величины найдутся из формул (77) и (78). Далее из формулы (80) найдем $\vartheta = 0$; что же касается r, то его нельзя определить по формуле (82), так как она получает неопределенный вид, а следует определить из уравнения (81), которое дает:

$$r = \frac{b_{3\cdot3}\omega_3}{Q}\sin\theta;$$

наконец, величина h по формуле (83) будет:

$$h = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{1\cdot1}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{3\cdot3}}\right)t + \text{const.}$$

Так как ось нашего тела вращения перпендикулярна все время к oC, величины r и θ постоянны, а величины ψ и h изменяются пропорционально времени, то эта ось будет иметь относительно оси AC импульсивных сил равномерное винтовое движение; тело же, кроме этого, будет еще вращаться около своей оси вращения с угловой скоростью ω_3.

§ 25. Случай многозначности потенциальной функции скоростей. Когда пространство, ограниченное поверхностью тела и бесконечно удаленной сферой многосвязно, то потенциальная функция скоростей (§ 11) может быть многозначна, при этом циркуляции скорости по всем главным контурам во все время движения тела не должны изменяться (§ 16). Положим для простоты, что пространство двусвязно и что циркуляция скорости по главному контуру есть k; тогда для составления потенциала скоростей мы должны будем к функции F, определенной в § 23, прибавить функцию χ, которая во всем рассматриваемом пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа, на поверхности тела дает

$$\frac{d\chi}{dn} = 0, \tag{85}$$

в бесконечности обращается в постоянную величину, а с двух сторон перегородки, делающей наше пространство односвязным, имеет значения, разнящиеся на величину k. Таким образом потенциальная функция скоростей будет

$$F + \chi,$$

где χ не зависит от u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 и обращается в нуль при $k = 0$.

Вследствие прибавления к функции F функции χ компоненты импульсивной силы и момента импульсивной пары будут слагаться из величин, данных формулами (26), и величин

$$\left.\begin{aligned} P_1' &= -\int\int \chi \cos\alpha \, d\sigma, \\ H_1' &= -\int\int \chi (y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

где интеграция распространяется на поверхность тела. Что касается живой силы жидкости, то она слагается из живой силы движения, определенного функцией F, и живой силы движения, определенного функцией χ. Действительно,

$$(F + \chi,\ F + \chi) = (F,\ F) + (\chi,\ \chi) + 2(F,\ \chi).$$

Но по теореме Грина

$$(F, \chi) = -\rho \int\int F \frac{d\chi}{dn} d\sigma,$$

где интеграция распространяется на поверхность тела, поверхности обеих сторон перегородки и на поверхность бесконечно удаленной сферы. Интеграл, взятый по поверхности тела, обращается в нуль по формуле (85); оба интеграла, взятые по той и другой стороне перегородки, взаимно уничтожаются, так как для них $\frac{d\chi}{dn}$ имеет равные величины, но различные знаки; наконец, на бесконечно удаленной сфере F постоянно и

$$F \int\int \frac{d\chi}{dn} d\sigma = 0.$$

Таким образом

$$(F, \chi) = 0$$

и

$$(F+\chi, F+\chi) = (F, F) + (\chi, \chi).$$

Второе слагаемое в выражении живой силы жидкости не зависит от движения тела и имеет вид ck^2, где c — положительная постоянная величина.

Обращаясь затем к уравнениям (60), мы должны будем подставить в них

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial T}{\partial u} + P_1', \\ K_1 &= \frac{\partial T}{\omega \omega_1} + H_1', \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

и так как

$$\frac{dP_1'}{dt} = \frac{dH_1'}{dt} = \dots = 0,$$

то эта подстановка повлияет только на вторые части уравнений. Полученные таким образом уравнения будут удовлетворены при $u = v = w = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Это показывает нам, что жидкость, текущая с многозначным потенциалом скоростей сквозь отверстия в теле, не стремится привести его в дви-

жение. Так как первые части уравнений (60) остаются без перемены, то интеграл (63) показывает постоянство живой силы тела и жидкости в движении, определенном функцией F; в интегралах же (61) и (62) надо сделать подстановку (87).

Рассмотрим движение круглого кольца. Вообразим, что оно сначала неподвижно и жидкость течет сквозь него с многозначным потенциалом скоростей; потом кольцо приведено в движение и предоставлено инерции.

На основании формулы (40) и того обстоятельства, что поверхности $\chi = \text{const}$ будут поверхности вращения около оси кольца, симметричные относительно его экватора, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = a_{1.1}u, \quad Q_2 = a_{1.1}v, \quad Q_3 = a_{3.3}w + P_3'; \\ &K_1 = b_{1.1}\omega_1, \quad K_2 = b_{1.1}\omega_2, \quad K_3 = b_{3.3}\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Внеся эти формулы в уравнения (75), найдем, что рассматриваемое движение окончательно определяется по формулам (77), (78), (80), (82) и формуле

$$\frac{dh}{dt} = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{1.1}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{3.3}}\right) - \frac{P_3'}{a_{3.3}}\cos\theta. \tag{89}$$

Но таким образом нельзя исследовать движения в случае $Q = 0$, ибо тогда нет оси импульсивных сил. В этом случае надо прямо пользоваться уравнениями (60). Мы удовлетворяем, например, этим уравнениям, положив

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = K_2 = K_3 = 0, \quad K_1 = \text{const},$$

что имеет на основании формул (88) место при

$$u = v = \omega_2 = \omega_3 = 0, \qquad w = -\frac{P_3'}{a_{3.3}}, \quad \omega_1 = \text{const}.$$

Складывая поступательное движение по направлению оси oz с вращением около оси ox, получим вращение около параллельной оси, лежащей в плоскости xy на расстоянии

$$\frac{P_3'}{a_{3.3}\omega_1}$$

от оси ox. *Все движение приводится, таким образом, к равномерному вращению кольца около оси, лежащей в плоскости его экватора.*

ЛЕКЦИЯ VIII

О кажущемся взаимодействии тел, находящихся в беспредельной массе движущейся жидкости

§ 26. Движение в беспредельной массе несжимаемой жидкости двух твердых шаров. В предыдущей лекции мы исследовали движение твердого тела в беспредельной жидкости, не прибегая к определению сил гидродинамического давления жидкости на поверхность тела, потому что хотели познакомить читателя с импульсивной силой и парой, которые играют такую важную роль в задаче о движении одного тела; теперь же мы будем следовать общему приему, т. е. будем определять потенциальную функцию скоростей F, удовлетворяющую уравнению Лапласа, обращающуюся в бесконечности в постоянную величину и имеющую на поверхности тел данную нормальную производную; потом, найдя гидродинамическое давление по формуле

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] + \text{const}, \quad (1)$$

будем определять силы и пары, происходящие от его действия на поверхности тел.

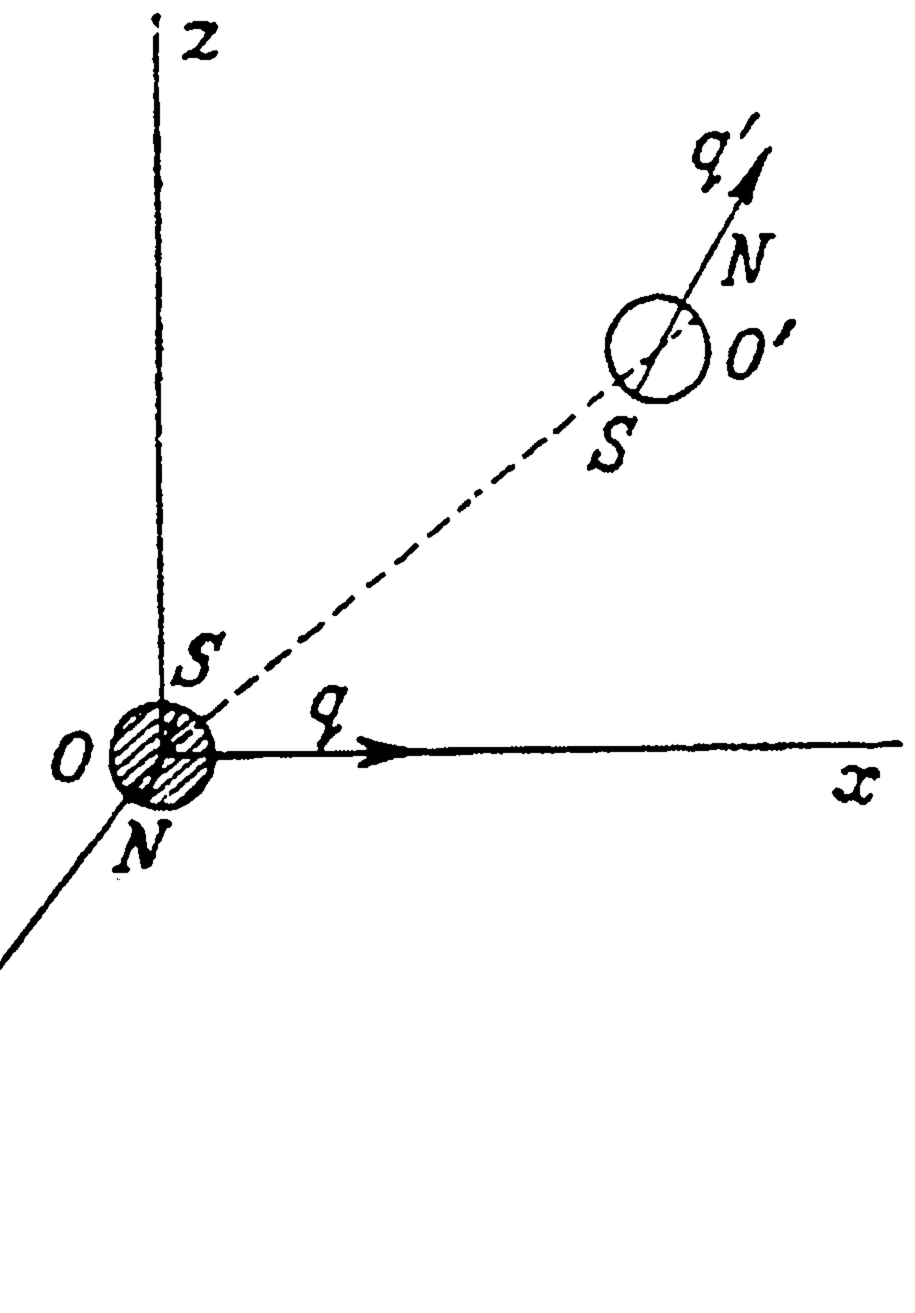
Начнем с изложения приближенного решения интересной задачи о движении в жидкости двух шаров [1]. Пусть a и b будут радиусы шаров, c — расстояние их центров o и o', а q и q' — их скорости. Примем c весьма большим сравнительно с a и b и будем при решении задачи ограничиваться членами порядка c^{-4}.

---

[1] Точное решение см. у Неймана, Hydrodynamische Untersuchungen, S. 194, Leipzig, 1883.

Возьмем (фиг. 25) начало осей координат в центре o и направим ось ox по скорости q. Если F_1 будет потенциальная функция скоростей в предположении, что второй шар имеет скорость q', а первый неподвижен, и F_2 — потенциальная функция скоростей в предположении, что первый шар имеет скорость q, а второй — неподвижен, то

$$F = F_1 + F_2.$$



Фиг. 25.

Назовем через α, β, γ углы скорости q' с осями координат и, разложив ее на три компонента, составим по формуле (16) третьей лекции потенциальную функцию скорости F_1', которая имела бы место, если бы первого шара не было:

$$F_1' = \frac{b^3 q'}{2}\left[\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)\right],$$

где r' — расстояние точки (x, y, z) от o'. Называя через ξ, η, ζ координаты точки o' и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

представим полученную формулу в виде:

$$F_1' = -\frac{b^3 q'}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\gamma\right];$$

или, введя для сокращения письма обозначение

$$\frac{d}{dn} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

в виде:

$$F_1' = -\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{b^3 q'}{2}. \tag{2}$$

Относя эту функцию к точке, весьма близкой к поверхности шара o, сделаем разложение:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{c} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right)x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right)y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)z +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r'}\right)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\left(\frac{1}{r'}\right)y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r'}\right)z^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r'}\right)xy + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)xz + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)yz + \ldots$$

Все вошедшие сюда производные надо взять при $x = y = z = 0$. Легко усмотреть, что вследствие

$$c = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

имеем при $x = y = z = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{c}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{c}\right), \ldots$$

Внося эти величины и переходя к полярным координатам, т. е. полагая, что

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta\cos\psi,$$

$$z = r\sin\theta\sin\psi,$$

найдем:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{c} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{c}\right) r\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{c}\right) r\sin\theta\cos\psi -$$
$$- \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{c}\right) r\sin\theta\,\sin\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\cos^2\theta +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\sin^2\theta\sin^2\psi +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\cos\theta\sin\theta\cos\psi +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\cos\theta\sin\theta\sin\psi +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}\left(\frac{1}{c}\right) r^2\sin^2\dot{\theta}\cos\psi\sin\psi + \ldots \qquad (3)$$

Подставляем это выражение в формулу (2):

$$F_1' = -\frac{b^3q'}{2}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\cos\theta +$$
$$+ \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\sin\theta\cos\psi +$$
$$+ \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\sin\theta\sin\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos^2\theta -$$
$$- \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\cos^2\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\sin^2\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos\theta\sin\theta\cos\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos\theta\sin\theta\sin\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi + \ldots \qquad (4)$$

Такова была бы потенциальная функция скоростей, если бы не было первого шара. Предположив, что этот шар имеется

и что он неподвижен, прибавим к F_1' некоторую новую функцию F_1'', удовлетворяющую уравнению Лапласа, обращающуюся в бесконечности в постоянную величину и дающую при $r = a$

$$\frac{d}{dr}(F_1' + F_1'') = 0. \tag{5}$$

Легко усмотреть, что этим свойством обладает функция:

$$F_1'' = \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta}{r^2} +$$
$$+ \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin\theta\cos\psi}{r^2} +$$
$$+ \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin\theta\sin\psi}{r^2} -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\cos^2\theta}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\,\sin^2\psi}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3} -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left[\frac{1}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3} -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi}{r^3} + \ldots \tag{6}$$

Действительно, она обращается в бесконечности в нуль и удовлетворяет на поверхности первой сферы условию (5); кроме того, она удовлетворяет и уравнению Лапласа, так как

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^3} = \frac{1}{ra^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$
. . . . . .

Через прибавление F_1'' к F_1' мы удовлетворяем условию при поверхности первого шара в предположении его неподвижности, а нарушаем этим нормальные условия при поверхности второго шара; но это нарушение не должно быть принято во внимание при условленной степени точности, так как от функции F_1'' при поверхности второго шара получаются скорости порядка c^{-6}. Таким образом мы можем принять

$$F_1 = F_1' + F_1'',$$

что по формулам (4) и (6) обращается при $r = a$ в

$$\begin{aligned}
F_1 = &-\frac{b^3 q'}{2}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{3}{4}ab^3q'\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta + \\
&+\frac{3}{4}ab^3q'\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi + \\
&+\frac{3}{4}ab^3q'\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\sin\psi - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\cos^2\theta\right) - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\sin^2\theta\cos^2\psi\right) - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\sin^2\theta\,\sin^2\psi\right) - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{d^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta\sin\theta\cos\psi - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta\sin\theta\sin\psi - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi + \ldots \qquad (7)
\end{aligned}$$

Что касается значения функции F_2 при поверхности первого шара, то мы можем просто принять

$$F_2 = -\frac{qa^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{q}{2}a\cos\theta, \qquad (8)$$

так как из предыдущего следует, что влияние второго шара введет в значение функции F_2 при поверхности первого шара члены порядка c^{-5}.

Переходим теперь к определению гидродинамического давления p. Предположим, что наши оси x, y, z соединены неизменно с первым шаром и двигаются с ним, оставаясь сами себе параллельными. Если для простоты допустим, что движение обоих шаров прямолинейно, то потенциальная функция скоростей жидкости в ее относительном движении на осях x, y, z будет

$$F = F_1 + F_2 - qx. \tag{9}$$

По теореме Кориолиса мы можем в нашей задаче об относительном движении определять p по формуле (1), если прибавим к точкам жидкости силы, имеющие силовую функцию

$$U = -\frac{dq}{dt}\,x. \tag{10}$$

Частная производная по времени от функции (9) будет:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(q' \cos\alpha - q) + \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\,q' \cos\beta + \frac{\partial F_1}{\partial \zeta}\,q' \cos\gamma +$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial q'}\,\frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q}\,\frac{dq}{dt} - x\,\frac{dq}{dt}. \tag{11}$$

Подставляя формулы (11), (10), (9) и (8) в формулу (1), напишем ее так:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} + \frac{1}{2}\,a\cos\theta\,\frac{dq}{dt} -$$
$$- \frac{3}{4}\,ab^3\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\right\}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\sin\psi\,\frac{dq'}{dt} -$$
$$- \frac{3}{4}\,ab^3q'^2\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\right\}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\sin\theta\sin\psi\right] +$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial \xi}\,q - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - q\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Мы не пишем здесь членов порядка c^{-4} при множителе $\frac{dq'}{dt}$, потому что имеются с этим множителем члены порядка c^{-3}. Так как

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{a^3 q}{2}\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{3a^2 q}{2}\,\frac{xy}{r^5},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{3a^3 q}{2}\,\frac{xz}{r^5},$$

то равнодействующая сил давления жидкости на первый шар, происходящая от присутствия в формуле (12) членов

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-q\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right],$$

есть нуль, как это было показано в седьмой лекции; далее, от удвоенных произведений в формуле (12) остается только $(r=a)$ член

$$\frac{3}{2}q\,\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

ибо на поверхности первой сферы

$$-3a^3 q\,\frac{x}{r^5}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}x+\frac{\partial F_1}{\partial y}y+\frac{\partial F_1}{\partial z}z\right)=0.$$

Что касается сил давления, происходящих от присутствия в формуле (12) членов

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2\right],$$

то ими можно пренебречь, ибо эти члены порядка c^{-6}.

Докажем теперь, что силы, происходящие от члена

$$\frac{3}{2}q\,\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

уничтожаются силами, происходящими от члена

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi}q. \tag{13}$$

Для этого заметим сначала, что вследствие равенства нулю на первой сфере нормальной производной от F_1 производная $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ является проекцией на ось скорости $\frac{\partial F}{a\partial\theta}$, так что

$$\frac{3}{2}q\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{3}{2}q\frac{\partial F_1}{a\partial\theta}\sin\theta. \tag{14}$$

Потом, подставив в выражения (13) и (14) величину F_1 из формулы (7), умножаем полученное на $-a^2\cos\theta\sin\theta\,d\psi\,d\theta$ и берем интегралы по всей первой сфере. При этом не равны нулю будут только те интегралы, в которые войдут $\cos\theta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ в четных степенях. Вследствие этого от выражения (13) получаем составляющую по оси ox:

$$-\frac{3}{4}a^3b^3q'q\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\pi a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right];$$

а от выражения (14) находим по оси ox силу:

$$\frac{5}{4}a^3b^3qq'\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta -\right.$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta -$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta\right\}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi = \pi, \qquad \int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right],$$

то последняя сила приводится к

$$\pi a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]$$

и сокращается с вышенайденной силой.

Для определения компонентов сил давления по оси oy умножаем выражения (13) и (14) на $-a^2 \cos\psi \sin^2\theta\, d\psi\, d\theta$ и совершаем интеграции по поверхности первой сферы. При этом от выражений (13) и (14) получается только по одному члену, содержащему $\cos\theta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ в четных степенях. Именно, от (13) имеем:

$$-\frac{3}{4} a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] \int_0^{2\pi} \cos^2\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= -\pi a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right],$$

а от (14):

$$-\frac{5}{4} a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] \int_0^{2\pi} \cos^2\psi\, d\psi \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{5}{4} a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] \pi \left[\frac{4}{15} - \frac{16}{15}\right] =$$

$$= \pi a^3 b^3 qq' \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right].$$

Подобным же образом докажем, что и составляющие силы по оси oz, происходящие от присутствия в выражении давления членов (13) и (14), взаимно уничтожаются.

После этого замечания на основании формулы (12) получим следующие простые выражения сил P, Q, R, с которыми жидкость действует на первый шар:

$$\left.\begin{aligned}
P &= -\frac{2\pi a^3}{3}\rho\frac{dq}{dt} + \pi\rho a^3 b^3 \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt} + \\
&\quad + \pi\rho a^3 b^3 q'^2 \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right], \\
Q &= \pi\rho a^3 b^3 \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt} + \\
&\quad + \pi\rho a^3 b^3 q' \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right], \\
R &= \pi\rho a^3 b^3 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt} + \\
&\quad + \pi\rho a^3 b^3 q'^2 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Эти формулы показывают, что в случае равномерного движения на первый шар действует сила порядка c^{-4}, имеющая силовую функцию

$$S = -\pi\rho a^3 b^3 q'^2 \frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{1}{c}\right). \quad (16)$$

Мы берем в этой функции знак —, потому что производные по координатам точки o' равны отрицательным производным по координатам точки o. Эта силовая функция есть та, которая выражает действие на бесконечно малый магнит, помещенный в точке o, бесконечно малого магнита, помещенного в точке o'. Оба магнита, как это показано на фиг. 25, имеют оси, параллельные q'; при этом магнит o обращается в сторону q' южным полюсом, а магнит o' — северным. Отсюда следует, что *два шара, движущиеся равномерно по линии, соединяющей их центры, отталкиваются, а движущиеся перпендикулярно к этой линии — притягиваются.* Так как действие на данный шар зависит только от движения другого шара, то в рассматриваемой задаче действие не равно противодействию. Если $a = b$ и скорости q и q' равны и симметрично расположены относительно плоскости, проведенной через середину прямой oo' перпендикулярно к ней, то эта плоскость является поверхностью тока и может быть принята

за неподвижную стенку. Вследствие этого влияние стенки таково, как будто на данный движущийся шар действует другой движущийся шар, представляющий его зеркальное изображение в стенке. Отсюда на основании сказанного выше следует, что *шар, идущий равномерно по перпендикулярному направлению к стенке, ею отталкивается, а идущий параллельно стенке — ею притягивается.* Вероятно, в этом обстоятельстве заключается причина рикошета.

Обращаясь к предположению, что скорости q и q' изменяются со временем, видим, что изменение q вызывает только силу инерции, которая должна быть соединена с силой инерции от массы шара o через увеличение этой массы на половину массы вытесненной воды. Производная же скорости второго шара влияет на первый шар силой порядка c^{-3}. Эта сила равна силе действия бесконечно малого магнита, помещенного в o', на единицу магнитной массы (южный магнитизм), помещенной в o. Ось магнита направлена по ускорению $\frac{dq'}{dt}$ южным полюсом, а магнитный момент равен

$$\pi\rho a^3 b^3 \frac{dq'}{dt}.$$

Таким образом *шар, идущий по направлению радиуса от другого шара ускоренным движением, притягивает его, а шар, идущий от него замедленным движением, отталкивает его.*

Рассматривая в случае переменного движения шара неподвижную плоскую стену и заменяя ее действие действием изображения, мы придем к заключению, что *присутствие стены производит кажущееся изменение массы шара, различное в различных направлениях и выражаемое некоторым эллипсоидом измененных масс.* Определим этот эллипсоид. Возьмем начало осей x, y, z в центре шара и направим ось ox перпендикулярно стене, расстояние до которой пусть будет $\frac{c}{2}$; тогда расстояние до изображения o' будет c. Если α, β, γ суть углы с осями ускорения $\frac{dq}{dt}$, то углы ускоре-

ния $\frac{dq'}{dt}$ изображения будут $180° - \alpha, \beta, \gamma$. Вследствие этого мы должны взять

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\gamma.$$

Так как координаты изображения суть: $\xi = c$, $\eta = \zeta = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{2}{c^3}\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c^3}\cos\beta,$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c^3}\cos\gamma.$$

Подставляем это в формулы (15), в которых предполагаем, что $\frac{dq}{dt}$ образует с осями углы α, β, γ, и отбрасываем члены порядка c^{-4}:

$$P = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\alpha,$$

$$Q = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\beta,$$

$$R = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\gamma.$$

Отсюда следует, что эллипсоид измененных масс имеет на наших осях следующее уравнение:

$$\left(M + \frac{2}{3}\pi a^3\rho + \frac{2\pi a^6\rho}{c^3}\right)x^2 + \left(M + \frac{2}{3}\pi a^3\rho + \frac{\pi a^6\rho}{c^3}\right)y^2 +$$

$$+ \left(M + \frac{2}{3}\pi a^3\rho + \frac{\pi a^6\rho}{c^3}\right)z^2 = 1. \qquad (17)$$

Мы видим, что *приращение массы от влияния стены по направлению, перпендикулярному стене, вдвое более приращения массы по направлению, параллельному стене.*

§ 27. Пульсирующие шары Биеркнеса. Биеркнес сделал подробные теоретические и опытные исследования над определением кажущегося взаимодействия пульсирующих шаров [1].

Мы рассмотрим здесь только простейший случай, когда центры o и o' двух шаров неподвижны и их расстояние $oo' = c$ весьма велико сравнительно с радиусами шаров a и b во всякое время. Назовем через q и q' производные от a и b по времени, r и r' — расстояние точки жидкости от o и o' и через θ — угол r с oo'. Начало координат примем в центре первого шара и ось ox направим по oo'. По предыдущему представим потенциальную функцию скоростей в виде:

$$F = F_1 + F_2, \tag{18}$$

где F_1 — потенциальная функция скоростей при неизменяемости первого, а F_2 — при неизменяемости второго шара. При решении нашей задачи мы будем ограничиваться членами порядка c^{-2}. Если бы не было первого шара, то потенциальная функция скоростей была бы

$$F_1' = -\frac{q' b^2}{r'}.$$

Разлагаем ее в ряд для точек, весьма близких к поверхности первого шара:

$$F_1' = -q' b^2 (c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{q' b^2}{c} - \frac{q' b^2}{c^2} r\cos\theta + \ldots \tag{19}$$

Для того чтобы нормальные скорости на поверхности первого шара были равны нулю, прибавим к F_1' функцию

$$F_1'' = \frac{-q' b^2 a^3}{2c^2} \frac{\cos\theta}{r^2} + \ldots, \tag{20}$$

---

[1] Bjerknes, Vorläufige Mitteilungen über die Druckkräfte, die entstehen wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations- und Contraktions Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen. Videnskabselsk, Forhandtl. Christiania, 1875. Извлечение из этой работы см. в Repertorium für reine und angewandte Mathematik, p. 264, 1876.

Другая работа Биеркнеса на ту же тему напечатана в Göttingen Nachrichten, 1876.

которая удовлетворяет уравнению Лапласа и дает при $r = a$

$$\frac{\partial}{\partial r}(F_1' + F_2'') = 0.$$

Так как скорости на поверхности второго шара от функции скоростей F_1'' будут порядка c^{-3}, то при нашем приближении можно принять

$$F_1 = F_1' + F_1''. \tag{21}$$

Что касается F_2, то при поверхности первого шара можно в принятом приближении принять

$$F_2 = -\frac{qa^2}{r}. \tag{22}$$

Таким образом при поверхности первого шара получаем

$$F = -\frac{qa^2}{r} - \frac{q'b^2}{c} - \frac{q'b^2}{c^2} r\cos\theta - \frac{q'b^2a^3}{2c^2}\frac{\cos\theta}{r^2} + \ldots \tag{23}$$

Обозначаем объемы первого и второго шара через m и m_1, а производные от объемов по времени через m' и m_1', так что

$$m' = 4\pi a^2 q, \qquad m_1' = 4\pi b^2 q',$$

и представляем формулу (23) в таком виде:

$$F = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{m'}{r} - \frac{m_1'}{c} - \frac{m_1' r\cos\theta}{c^2} - \frac{a^3 m_1'\cos\theta}{2c^2 r^2}\right). \tag{24}$$

Составляем производную от этой функции по времени для данной точки пространства, имеющей радиус $r = a$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi a}\frac{dm'}{dt} - \frac{1}{4\pi c}\frac{dm_1'}{dt} -$$

$$-\frac{3}{8\pi c^2}\left(a\frac{dm_1'}{dt} + m_1'\frac{da}{dt}\right)\cos\theta.$$

Но

$$\frac{da}{dt} = q = \frac{m'}{4\pi a^2}, \qquad a = \frac{3m}{4\pi a^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi a}\frac{dm'}{dt} - \frac{1}{4\pi c}\frac{dm_1'}{dt} - \cdots$$

$$-\frac{3}{32\pi^2 c^2 a^2}\left(3m\frac{dm_1'}{dt} + m'm_1'\right)$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a}\frac{dm'}{dt} + \frac{1}{c}\frac{dm_1'}{dt}\right) -$$

$$-\frac{3}{32\pi^2 c^2 a^2}\left[3\frac{d}{dt}(mm_1') - 2m'm_1'\right]\cos\theta. \qquad (25)$$

Далее по формуле (24) при $r = a$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = q,$$

$$\frac{\partial F}{a\partial\theta} = \frac{3}{8\pi c^2} m_1' \sin\theta;$$

отсюда видно, что V^2 будет зависеть только от $\sin^2\theta$ и не повлияет на равнодействующую гидродинамического давления. Эта равнодействующая найдется по формулам (1) и (25) и будет с точностью до членов порядка c^{-2}:

$$P = -\frac{3}{8\pi c^2}(mm_1') + \frac{m'm_1'}{4\pi c^2}. \qquad (26)$$

Если допустим, что шары имеют одновременные гармонические колебания в одной фазе или разнящиеся на половину волны, то надо принять

$$m' = k\sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad m_1' = k_1\sin\frac{2\pi}{T}t$$

или

$$m' = k\sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad m_1' = k_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right).$$

Делая такие подстановки в формулу (26) и определяя среднюю силу за время, кратное от T, найдем:

$$P = \pm\frac{kk_1}{8\pi c^2}. \qquad (27)$$

Эта формула приводит нас к следующему интересному результату: *два одновременно пульсирующие шара притягиваются по закону Ньютона, если колеблются в одинаковых фазах, и отталкиваются по этому закону, если колеблются в противоположных фазах.*

Эти лекции были напечатаны в „Ученых записках Московского университета", вып. 7, 1887. Второе издание было напечатано в Трудах Центрального аэрогидродинамического института, вып. 40, 1929. *Прим. ред.*

LECTURES ON HYDRODYNAMICS

The Lectures on Hydrodynamics have been given by N. E. Joukovsky at Moscow University during the first term 1886 and have been then published in the „Scientific Papers of the Moscow University“ for the same year.

The subject matter of the Lectures is seen from the detailed table of contents at the end.

Here will be painted out only certain particular features introduced by N. E. Joukovsky in the treatement of hydrodynamics.

In the Lectures is given a detailed discussion of kinematics of a fluid particle, based on works of both foreign authors (Cauchy, Kirchhoff, Helmholtz, Thomson and Tait) and Joukovsky's own.

Considering the deformation of a particle, N. E. Joukovsky introduces several notions giving a clear geometrical conception of the strain.

Much attention is given to the subject of „critical points“, i. e. of points at which the velocity is zero, the stream-lines crossing one another or taking the form of elementary closed contours.

N. E. Joukovsky does not confine himself to the analytical treatement of his subjendt, always trying to embody his deductions in geometrical forms. In treating on the motion of a solid trough an unlimited fluid he introduces into discussion three surfaces directing the motion of a solid in a fluid. These surfaces characterize the motion of the solid as the mass and the central ellipsoid of inertia characterize the motion of a solid in vacuum.

In the proof of a number of theoremes and in the solutions of individual problems N. E. Joukovsky often introduces considerable simplifications. Thus a simplified method is used in the solution of the problem of the mutual inflyence of two spheres moving in a fluid and of the problem of Bjerknes pulsating spheres.

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ БИЕРКНЕСА О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ИЛИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ТЕЛА ВНУТРИ ЖИДКОЙ МАССЫ

§ 1. Постановка задачи. Интересная задача Биеркнеса [1] о гидродинамических взаимодействиях пульсирующих или осциллирующих шариков, погруженных в беспредельную массу несжимаемой жидкости, может быть обобщена предположением, что колебательное движение жидкости, оказывающей давление на рассматриваемый пульсирующий или осциллирующий шарик, вызывается не колебанием или пульсациями других шариков, а совершается по какому-нибудь данному закону.

Трудность решения задачи в предположении, что радиус шарика весьма мал сравнительно с расстоянием его центра от всех границ жидкости, при нашем обобщении нисколько не увеличивается. Напротив того, анализ явлений Биеркнеса является по нашему методу значительно проще обыкновенно предлагаемых исследований этих явлений.

§ 2. Основные определения. Предположим, что нормальная скорость на всех границах жидкой массы выражается некоторыми функциями координат, умноженными на одну и ту же периодическую функцию времени $f(t)$. При этом потенциал скоростей при отсутствии шарика будет иметь вид:

$$F_1 = \varphi(x,\ y,\ z)\, f(t), \tag{1}$$

---

[1] Bjerknes, Vorläufige Mittheilungen über die Kräfte, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations und Contractions-Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen. Извлечение из этой работы, напечатанной по-шведски, см. Repertorium fur reine und angewandte Mathematik, S. 264, 1876.

где $\varphi(x, y, z)$ есть функция прямоугольных координат x, y, z, удовлетворяющая везде внутри жидкости уравнению Лапласа

$$\Delta_2 \varphi = 0$$

и всем условиям на границах при $f(t) = 1$.

Будем называть *скоростью тока* вектор

$$w = \frac{d\varphi}{dn} f(t), \tag{2}$$

представляющий скорость жидкости в той ее точке, в которой поместится центр наблюдаемого шарика. Этот вектор при $f(t) > 0$ направлен по элементу нормали dn поверхности

$$\varphi = \text{const}$$

в ту сторону, в которую φ возрастает. В случае $f(t) < 0$ вектор w направлен противоположно элементу dn. Аналогично будем называть *ускорением потока* в данной точке вектор

$$w' = \frac{d\varphi}{dn} f'(t), \tag{3}$$

направление которого совпадает с направлением элемента dn или противоположно ему, смотря по тому, положительна или отрицательна производная $f(t)$.

Рядом с потоком жидкости, определяемым потенциалом скоростей (1), мы будем рассматривать воображаемое движение жидкости с потенциалом скоростей

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t),$$

которое будем называть *производным потоком*, сопряженным с направлением Ox. Обозначим через dn' элемент нормали поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const},$$

взятый в ту сторону, в которую $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ возрастает.

Векторы

$$l = \frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) f(t),$$
$$l' = \frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) f'(t) \qquad (4)$$

мы будем называть *скоростью и ускорением производного потока*. Эти векторы в случае положительного значения вторых частей формулы (4) будут направлены по dn', а в случае отрицательного — в обратную сторону.

Введение в жидкую массу пульсирующего или осциллирующего шарика радиуса a обращает потенциал скоростей в

$$F = F_1 + F_2. \qquad (5)$$

Функция F_2 везде внутри жидкости удовлетворяет условию

$$\Delta_2 F_2 = 0;$$

на расстоянии от центра шара, значительно превосходящем a, производные функции F_2 по координатам суть нули; на поверхности же шарика производная этой функции по радиусу, идущему от центра шарика, равна сумме следующих трех слагаемых:

1) скорости $\frac{da}{dt}$, происходящей от пульсации шарика;

2) проекции на радиус шарика скорости u осцилляции центра шарика;

3) взятой с обратным знаком проекции на радиус шарика скорости потока w.

Если назовем через θ и ψ углы радиуса r, идущего от центра шарика к рассматриваемой частице жидкости, с направлением векторов w и u, то найдем, что на поверхности

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = \frac{da}{dt} - w\cos\theta + u\cos\psi.$$

Всем указанным условиям удовлетворяет функция:

$$F_2 = -\frac{a^2}{r}\frac{da}{dt} + \frac{a^3}{2r^2} w\cos\theta - \frac{a^3}{2r^2} u\cos\psi. \qquad (6)$$

Имея в виду рассматривать точки жидкости, весьма близкие к поверхности шарика, заменяем формулу (1) на следующую:

$$F_1 = \varphi_0 f(t) + wr\cos\theta, \qquad (1')$$

где φ_0 есть значение φ в центре шарика.

Подставляем формулы (6) и (1′) в формулу (5):

$$F = \varphi_0 f(t) - \frac{a^2}{r}\frac{da}{dt} + \left(\frac{a^3}{2r^2} + r\right) w\cos\theta - \frac{a^3}{2r^2} u\cos\psi. \qquad (7)$$

Пользуясь этими выражениями потенциала скоростей и обыкновенной формулой гидродинамического давления:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{dF}{dt} - \frac{V^2}{2}, \qquad (8)$$

где V есть скорость жидкости в рассматриваемой точке, определим равнодействующую силу P гидродинамических давлений на всю поверхность шарика. При этом легко показать, что член

$$-\frac{V^2}{2}$$

в формуле (8) не будет иметь влияния на величину P всякий раз, как $u = 0$ или $\frac{da}{dt} = 0$.

Действительно, в первом предположении формула (7) показывает, что скорость V будет слагаться из скорости

$$-\frac{3}{2} w\sin\theta, \qquad (9)$$

направленной по меридиану, имеющему осью вектор w, и из скорости $\frac{da}{dt}$, перпендикулярной к поверхности шарика. Составная скорость V этих двух скоростей будет иметь одну и ту же величину для двух диаметрально противоположных (θ и $\theta + \pi$) элементов поверхности шарика; вследствие этого части гидродинамического давления, зависящие от присутствия в формуле (8) последнего члена, взаимно уравновесятся.

Во втором предположении находим по формуле (7), что скорость V в каждой точке поверхности шарика будет слагаться геометрически из вышеупомянутой поверхностной скорости (9), из поверхностной скорости

$$\frac{1}{2}\, u \sin \psi,$$

направленной по меридианам, имеющим осью вектор u, и из нормальной скорости

$$u \cos \psi.$$

Составные скорости V из этих трех скоростей для двух диаметрально противоположных элементов поверхности шарика (θ, ψ и $\theta + \pi$, $\psi + \pi$) будут равны по величине, и части давления жидкости, зависящие от квадрата скорости, на этих элементах взаимно уравновесятся.

Таким образом в рассматриваемых случаях сила P определится, как равнодействующая всех сил давления

$$-\rho \frac{dF}{dt}\, d\sigma, \qquad 10)$$

приложенных ко всем элементам $d\sigma$ поверхности шарика. Это обстоятельство позволяет рассматривать силу P в общем случае как геометрическую сумму сил давления на шарик, имеющих место в различных частных случаях, рассмотрением которых мы теперь займемся.

§ 3. Неподвижный шарик в изменяющемся потоке жидкости.

Предполагаем в формуле (7)

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad u = 0$$

и составляем величину силы P, которая будет направлена по w':

$$P = \frac{3}{2}\, w' a \rho \int\int \cos^2 \theta \, d\sigma,$$

где интеграция распространяется на все элементы $d\sigma$ поверхности шарика. Так как

$$\int\int \cos^2\theta\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi a^2,$$

то, называя через

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

вытесненную шариком массу жидкости, найдем:

$$P = \frac{3}{2} m w'. \tag{11}$$

Отсюда следует, что *сила действия изменяющегося потока жидкости на неподвижный неизменяющийся шарик направлена по ускорению потока и равна трем вторым массы вытесненной жидкости, умноженной на ускорение потока.*

§ 4. Изменяющийся шарик в перманентном потоке жидкости. Принимаем в формуле (7)

$$u = 0,\ w' = 0$$

и составляем величину силы P, которая будет направлена по w:

$$P = \frac{w}{2a^2}\rho\frac{da^3}{dt}\int\int \cos^2\theta\, d\sigma = \frac{w}{2}\rho\frac{4}{3}\pi\frac{da^3}{dt}.$$

Положив

$$\frac{4}{3}\pi\frac{da^3}{dt}\rho = \frac{dm}{dt} = m',$$

напишем найденную силу в таком виде:

$$P = \frac{1}{2} m' w. \tag{12}$$

Отсюда следует, что *сила действия перманентного потока жидкости на изменяющийся шарик с неподвижным центром направлена по скорости потока и равна половине*

этой скорости, умноженной на производную по времени от массы вытесненной жидкости [1].

§ 5. Неизменяемый шарик, движущийся равномерно и прямолинейно в перманентном потоке жидкости [1].

Принимаем

$$\frac{da}{dt} = 0, \; f(t) = k,$$

где k — некоторая постоянная величина, и допускаем, что движение шарика совершается по оси Qx с постоянной скоростью u, так что расстояние ξ центра шарика от начала координат выражается формулой

$$\xi = ut.$$

Формула (7) в нашем случае может быть написана так:

$$F = k\varphi + \frac{a^3 w \cos\theta}{2r^2} - \frac{a^3 u \cos\psi}{2r^2}, \tag{13}$$

где $k\varphi$ — потенциал скоростей до погружения шарика.

Составляем производную $\frac{dF}{dt}$ для определенной точки пространства, находящейся весьма близко от поверхности шарика:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{a^3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] - \frac{a^3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right]. \tag{14}$$

Мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] = k\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{x-\xi}{r^3} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{y}{r^3} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{z}{r^3}\right],$$

причем функции, заключенные в круглых скобках, берутся для центра шарика, т. е. при $x = \xi$, $y = 0$, $z = 0$. Раскрываем производную по времени, замечая, что со временем изменяется только ξ, и обращая внимание на формулу

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2},$$

[1] Перманентность потока нарушается только самим шариком и не имеет места вблизи его.

получаем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right]=\frac{ku}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{x-\xi}{r}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{y}{r}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)\frac{z}{r}\right\}-$$

$$-\frac{ku}{r^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{3}{r^4}uw\cos\theta\,(x-\xi)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right]=\frac{ul\cos\chi}{r^2}-\frac{ku}{r^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{3}{r^3}uw\cos\theta\cos\psi, \qquad (15)$$

где χ есть угол между скоростью l производного потока и радиусом r.

Другая производная, входящая в формулу (14), будет:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{u(x-\xi)}{r^3}\right]=-\frac{u^2}{r^3}+\frac{3u^2(x-\xi)^2}{r^5}=$$

$$=-\frac{u^2}{r^3}+\frac{3u^2}{r^3}\cos^2\psi. \qquad (16)$$

Подстановка найденных величин (15) и (16) в формулу (14) дает нам для точек, близких к поверхности шарика:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{a}{2}ul\cos\chi-\frac{ku}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{3}{2}uw\cos\theta\cos\psi+$$

$$+\frac{u^2}{2}-\frac{3}{2}u^2\cos^2\psi. \qquad (17)$$

Легко видеть, что при составлении силы P [см. выражение (10)] только первый член формулы (17) будет иметь значение, так как гидродинамические давления, происходящие от влияния всех остальных членов, будут для диаметрально противоположных элементов шарика [θ, ψ и $\theta+\pi$, $\psi+\pi$] попарно взаимно уничтожаться. Мы получим вследствие этого силу P, направленную по элементу нормали dn' и имеющую величину:

$$P=\frac{m}{2}lu. \qquad (18)$$

Таким образом *сила гидродинамического действия перманентного потока на движущийся в жидкости прямолинейно и равномерно неизменный шарик направлена по скорости производного потока, сопряженного с направлением движения шарика, и равна произведению половины массы вытесненной шариком жидкости на скорость шарика и скорость производного потока.*

§ 6. Неизменяемый шарик, движущийся с некоторым ускорением в жидкости, покоящейся в бесконечности.

В этом случае в формуле (13) надо положить

$$\varphi = \text{const}, \quad w = 0$$

и взять

$$F = \text{const} - \frac{a^3}{2r^2} u \cos\psi. \tag{19}$$

Если ξ, η, ζ будут изменяющиеся со временем координаты центра шарика, то

$$u\cos\psi = \frac{d\xi}{dt}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d\eta}{dt}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{z-\zeta}{r},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{z-\zeta}{r}\right\} -$$

$$-\frac{1}{r^3}\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\} +$$

$$+\frac{3}{r^3}\left\{\frac{d\xi}{dt}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d\eta}{dt}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{z-\zeta}{r}\right\}^2.$$

Отсюда следует, что для точек, близких к поверхности шарика, надо положить

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{a}{2} j\cos\mu + \frac{u^2}{2} - \frac{3}{2}u^2\cos^2\psi, \tag{20}$$

где j представляет ускорение центра шарика, а μ есть угол между этим ускорением и радиусом r. Понятно, что второй и третий члены формулы (20) не оказывают влияния на силу P, так как происходящие от этих членов давления уничтожаются в диаметрально противоположных элементах поверхности шарика (θ и $\pi + \theta$).

Вся сила P будет зависеть только от первого члена в формуле (20) и будет иметь величину

$$P = -\frac{m}{2} j. \tag{21}$$

Здесь знак (—) показывает, что сила P направлена в противоположную сторону ускорению j.

Таким образом видим, что *гидродинамическое давление на неизменный шарик, движущийся ускоренно в покоящейся в бесконечности жидкости, направлено в сторону, противоположную полному ускорению, и равно произведению половины массы вытесненной жидкости на это полное ускорение.*

§ 7. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость пульсирующий шарик.

Мы подготовили теперь все необходимое для решения двух основных задач, представляющихся в явлениях Биеркнеса. Первая задача заключается в определении силы гидродинамического давления на пульсирующий периодически шарик, погруженный в массу жидкости, которая колеблется периодически, причем период колебания жидкости одинаков с периодом пульсации шарика. Решим эту первую задачу.

Сила P в этом случае будет слагаться из сил, данных формулами (11) и (12), так что

$$P = \frac{3}{2} mw' + \frac{1}{2} m'w.$$

Эта сила при положительном знаке второй части формулы направлена в сторону элемента нормали dn, а при отрицательном — в противоположную сторону.

Преобразуем написанную нами формулу таким образом:

$$P = mw' + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} mw\right\}. \tag{22}$$

Если периоды изменения функций времени $f(t)$ и m очень малы, то эффект гидродинамического действия на шарик выражается средней силой $[P]$, которую мы определим за большой промежуток времени T. При вычислении этой средней

силы последний член формулы (22) пропадает, и мы получаем

$$[P] = \frac{1}{T}\int_0^T mw'\,dt. \tag{23}$$

Эта формула объясняет нам, вследствие какой причины развивается средняя сила $[P]$, производящая гидродинамический эффект в рассматриваемом явлении. Если бы масса m не изменялась, то шарик получал бы от действия изменяющегося потока одинаковые импульсы, направленные по элементу нормали dn и в обратную сторону, так что средняя сила давления была бы нулем; но когда масса m изменяется и имеет бо́льшую величину при w' положительном и меньшую — при w' отрицательном, то получается средняя положительная сила $[P]$; равным образом и наоборот.

Предполагая, что

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

$$m = m_0 - \frac{m'_0}{\omega}\cos(\omega t + \beta),$$

$$m' = m_0' \sin(\omega t + \beta),$$

получаем:

$$mw' = \frac{d\varphi}{dn} m_0\omega\cos(\omega t) - m_0'\frac{d\varphi}{dn}\cos\omega t\cos(\omega t + \beta) =$$

$$= \frac{d\varphi}{dn} m_0\omega\cos(\omega t) + \frac{m_0'}{2}\frac{d\varphi}{dn}\sin\beta\sin(2\omega t) -$$

$$- \frac{m_0'}{2}\frac{d\varphi}{dn}\cos\beta\cos(\omega t) - \frac{m_0'}{2}\frac{d\varphi}{dn}\cos\beta.$$

Подставляем это выражение в формулу (23):

$$[P] = -\frac{1}{2} m_0'\frac{d\varphi}{dn}\cos\beta. \tag{24}$$

Это приводит нас к теореме I.

Теорема I. *Средняя сила гидродинамического давления периодически изменяющегося потока жидкости на погружен-*

ный в жидкость шарик, пульсирующий с периодом колебания потока, направлена обратно элементу нормали dn и равна половине произведения наибольшей скорости изменения массы вытесненной шариком жидкости и наибольшей скорости потока на косинус разности фаз колебаний жидкости и пульсаций шарика.

Если формула (24) дает знак (+), то сила $[P]$ направлена по dn, в противном случае она направлена в прямо противоположную сторону.

Когда колебание жидкости вызывается тем, что тело M произвольной формы (или группа тел) периодически расширяется или сжимается одновременно с погруженным в жидкость на большом расстоянии от тела шариком, тогда, проведя из центра тяжести объема тела сферу радиусом R, равным расстоянию от этого центра до центра шарика, будем иметь по теореме Грина:

$$4\pi R^2 \rho \frac{d\varphi}{dR} = M_0',$$

где M_0' — наибольшее секундное количество жидкости, выталкиваемое пульсирующим телом M.

Так как на большом расстоянии от тела M скорости потока жидкости можно считать направленными к центру тяжести объема этого тела и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{d\varphi}{dn},$$

то формуле (24) в рассматриваемом случае можно дать вид:

$$[P] = -\frac{1}{8\pi R^2 \rho} m_0' M_0' \cos\beta. \qquad (25)$$

При знаке (+) во второй части эта формула дает нам притягательную силу, а при знаке (—) отталкивательную (элемент dn направлен от тела M).

Мы видим, что при одинаковых пульсациях ($\beta = 0$) будет иметь место притягательная сила, при противоположных ($\beta = \pi$) пульсациях сила будет отталкивательная, а при пульсациях, разнящихся на четверть волны $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$, не будет

получаться никакой силы гидродинамического взаимодействия между пульсирующими телами.

§ 8. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость осциллирующий шарик. Вторая задача Биеркнеса заключается в определении силы гидродинамического давления на осциллирующий периодически шарик, погруженный в массу жидкости, которая колеблется периодически, причем период колебания жидкости одинаков с периодом колебания шарика.

Сила P в этом случае будет слагаться из сил, данных формулами (11), (18), (21), и явится следующей геометрической суммой:

$$\overline{P} = \frac{3}{2} m (\overline{w'} + \overline{l'\xi}) + \frac{1}{2} \overline{ml\xi'} - \frac{1}{2} \overline{m\xi''}. \qquad (26)$$

Двучлен, стоящий во второй части в скобках, представляет ускорение потока, взятое для точки на оси Ox на малом расстоянии ξ от начала O. Это ускорение слагается геометрически из ускорения w' потока в точке O и из приращения $l'\xi$ этого ускорения, происходящего вследствие перемещения центра шарика на ξ по оси Ox. Вектор, соответствующий первому слагающему, направлен по dn, а вектор, соответствующий второму, — по dn'.

Определяя по формуле (26) среднюю силу $[P]$, увидим, что на нее будут иметь влияние только векторы, направленные по dn', так как только они содержат в себе произведение функций времени одного периода.

Получаем в направлении dn' силу

$$[P] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{3}{2} ml'\xi + \frac{1}{2} ml\xi' \right) dt.$$

Так как

$$\frac{3}{2} ml'\xi + \frac{1}{2} ml\xi' = ml'\xi + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(ml\xi),$$

то

$$[P] = \frac{m}{T_0} \int_0^T l'\xi dt. \qquad (27)$$

Принимая теперь

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

$$\xi = -\frac{\xi_0'}{\omega}\cos(\omega t + \beta),$$

$$\xi' = \xi_0' \sin(\omega t + \beta),$$

найдем:

$$l'\xi = -\frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\xi'_0 \cos\omega t \cos(\omega t + \beta) =$$

$$= \frac{\xi'_0}{2}\frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\sin(2\omega t)\sin\beta - \frac{\xi_0'}{2}\frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos(2\omega t)\cos\beta -$$

$$-\frac{\xi_0'}{2}\frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos\beta.$$

Подстановка этого выражения в формулу (27) приводит нас к следующей величине средней силы:

$$[P] = -\frac{m}{2}\frac{d}{dn'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\xi_0'\cos\beta. \qquad (28)$$

Если вторая часть этой формулы положительна, то сила направлена по элементу нормали dn', в противном случае она направлена в противоположную сторону.

Полученный результат может быть выражен теоремой II.

Теорема II. *Средняя сила гидродинамического давления периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость осциллирующий шарик направлена обратно элементу нормали dn' и равна произведению половины массы жидкости, вытесненной шариком, на наибольшую скорость шарика, на наибольшую скорость производного потока и на косинус угла, выражающего разность фаз колебания шарика и потока.*

Рассмотрим для примера поток жидкости, вызываемый осцилляциями по направлению оси Ox некоторого шара M радиуса b (b может быть велик сравнительно с a). При этом

$$\varphi = -\frac{\xi_1' b^3 x}{2R^3},$$

где R есть расстояние точки жидкости от начала координат, взятого в центре шара M.

Для производного потока мы должны взять:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\xi_1' b^3}{2}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5}\right) = -\frac{\xi_1' b^3}{2R^3}(1 - 3\cos^2\alpha), \qquad (29)$$

где α — угол радиуса R с осью Ox.

Составим уравнения линий тока рассматриваемого производного потока. Для этого определяем скорости:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= f(t)\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{3\xi_1' b^3}{2R^4}(1 - 3\cos^2\alpha)f(t), \\ \frac{Rd\alpha}{dt} &= f(t)\frac{\partial}{R\partial\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\frac{3\xi_1' b^3}{R^4}\cos\alpha\sin\alpha f(t); \end{aligned} \qquad (30)$$

потом составляем дифференциальное уравнение:

$$\frac{2dR}{R} = -\frac{1 - 3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}d\alpha + \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.$$

Совершая интеграцию, получаем:

$$R^2 = \lambda\sin^2\alpha\cos\alpha, \qquad (31)$$

где λ — произвольное постоянное. Линии тока, представленные этим уравнением, изображены на фиг. 1, причем направление нормали dn' обозначено стрелкой. Абсолютная величина наибольшей скорости производного потока найдется по формуле (30).

Рассмотрим три положения осциллирующего шарика: в точке m на оси Ox, в точке m_1 на оси Oy и в точке m_2 наибольшего значения R на линии тока [формула (31)]. Это последнее положение определяется углом

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}. \qquad (32)$$

В первом положении определяем наибольшую скорость производного потока по первой формуле (30) и получаем по формуле (28):

$$[P] = -\frac{3}{2}\frac{b^3 m}{R^4}\xi_1'\xi_0'\cos\beta = -\frac{9}{8\pi\rho}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0'\cos\beta. \qquad (33)$$

Во втором положении по тем же формулам находим:

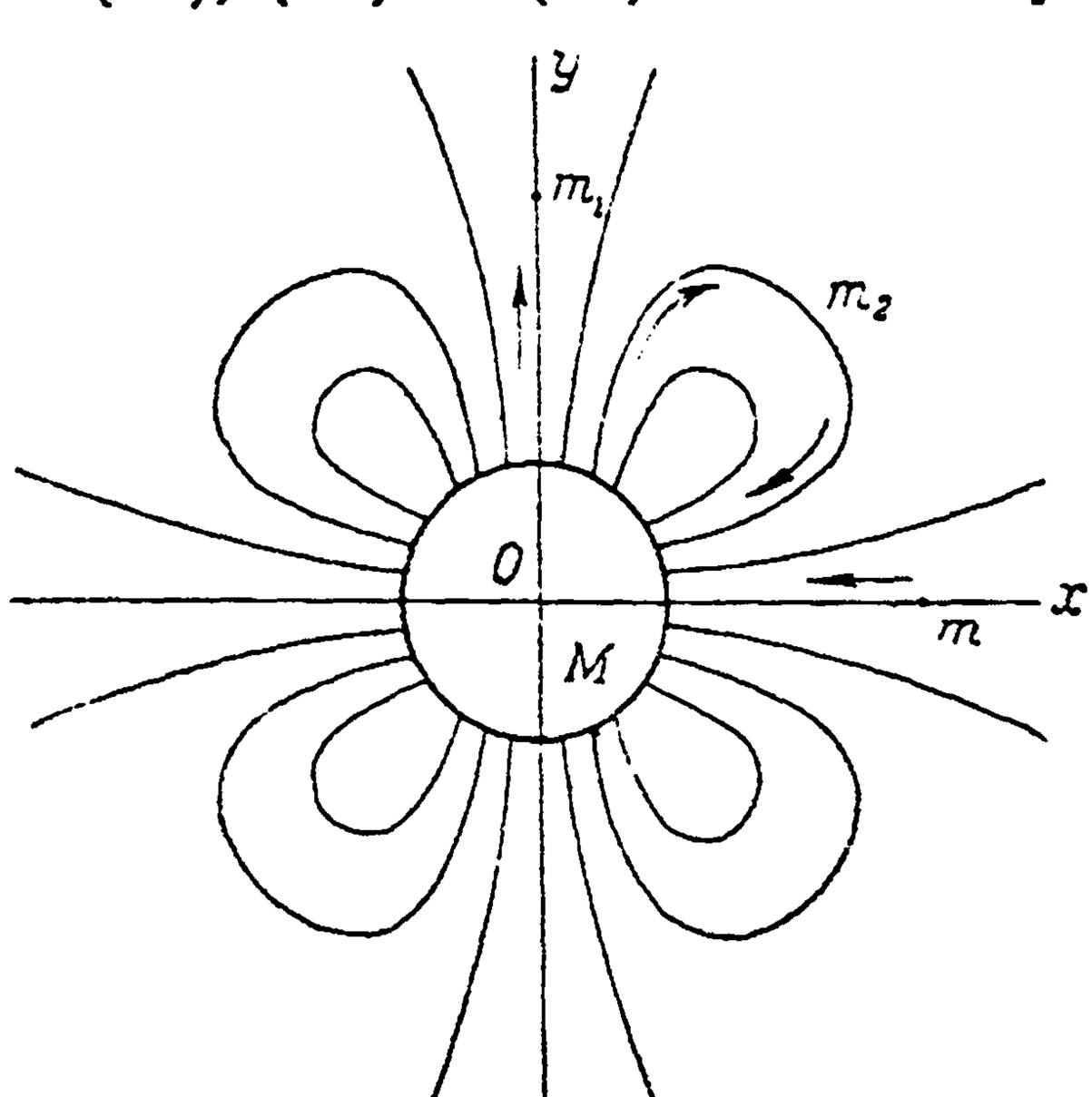
$$[P] = -\frac{3}{4}\frac{b^3 m}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta = -\frac{9}{16\pi\rho}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta . \qquad (34)$$

Наконец, для определения силы $[P]$ в третьем положении мы должны воспользоваться второй формулой (30) и формулой (32), что дает нам:

$$[P] = -\frac{b^3 m}{2R^4}\sqrt{2}\,\xi_1'\xi_0' \cos\beta = -\frac{3\sqrt{2}}{16}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta . \qquad (35)$$

При одинаковых осцилляциях обоих шаров ($\beta = 0$) получаем во вторых частях формул (33), (34) и (35) знак минус. Это показывает нам, что сила $[P]$ имеет направление, обратное тому, которое указано на фиг. 1 стрелками.

При различных колебаниях ($\beta = \pi$) имеем во второй части упомянутых формул знак плюс, что дает нам направление силы $[P]$ по проведенным стрелкам на фиг. 1.



Фиг. 1.

Легко заметить, что на основании сказанного одинаково осциллирующие по направлению Ox шары взаимодействуют обратно магнитам, параллельным этой оси и направленным одноименными полюсами в одну сторону, а разно осциллирующие — взаимодействуют обратно магнитам, направленным в одну сторону различными полюсами. Таким образом здесь так же, как в предыдущем параграфе, оправдывается известное правило Биеркнеса о противоаналогиях между магнитными и гидродинамическими взаимодействиями.

§ 9. Действие колеблющегося потока жидкости на погруженный в жидкости маятник. Данные нами формулы позволяют решить вопрос о действии колеблющегося по-

тока на малый шарик массы M, удерживаемый силой $k\xi$, пропорциональной отклонению ξ шарика от некоторого центра. Мы принимаем для простоты, что скорости всех точек потока равны между собою и параллельны оси Ox, так что $l = 0$.

На шарик нашего маятника, кроме силы $k\xi$, направленной по оси Ox к центру O, будут действовать силы, выраженные формулами (11) и (21), а также сила

$$\mu\left[\frac{d\xi}{dt} - w\right],$$

происходящая от вязкости жидкости, которую мы считаем пропорциональной скорости шарика относительно потока. Диференциальное уравнение движения нашего маятника будет [1]:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi - \mu\left[\frac{d\xi}{dt} - w\right] + \frac{3}{2}mw' - \frac{1}{2}m\frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad (36)$$

Полагая здесь, что

$$w = \sin(\omega t)\frac{d\varphi}{dn},\ w' = \omega\cos(\omega t)\frac{d\varphi}{dn},$$

найдем из уравнения (36):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2\mu}{2M+m}\frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{2M+m}\xi = \frac{3m\omega\cos\omega t + 2\mu\sin\omega t}{2M+m}\frac{d\varphi}{dn}.$$

Сделаем положения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2k}{2M+m} = \nu^2,\ \frac{d\varphi}{dn}\ \frac{2\mu}{2M+m} = 2\lambda\frac{d\varphi}{dn} = H\cos\beta,\\ &\frac{d\varphi}{dn}\ \frac{3m\omega}{2M+m}H\sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Эти положения позволяют написать наше диференциальное уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\xi}{dt} + \nu^2\xi = H\sin(\omega t + \beta). \qquad (38)$$

---

[1] Мы пренебрегаем членами, зависящими от произведения компонентов скорости, и потому можем складывать силу от трения с раньше найденными силами.

Один из частных интегралов этого уравнения найдем, положив

$$\xi = A\cos(\omega t + \beta) + B\sin(\omega t + \beta)$$

и определив A и B из условий:

$$(\nu^2 - \omega^2)A + 2\lambda\omega B = 0, \quad -2\lambda\omega A + (\nu^2 - \omega^2)B = H.$$

Получаем отсюда:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{2\lambda H\omega}{(\nu^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2} = -h\cos\beta', \\ B &= \frac{(\nu^2-\omega^2)H}{(\nu^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2} = h\sin\beta', \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$h = \frac{H}{\sqrt{(\nu^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}} = \frac{d\varphi}{dn}\sqrt{\frac{4\lambda^2+\left(\frac{3m}{2M+m}\right)^2\omega^2}{(\nu^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}, \tag{40}$$

так что частный интеграл будет иметь вид:

$$\xi = -h\cos(\omega t + \beta + \beta'). \tag{41}$$

Общий интеграл уравнения (38) будет равен сумме общего интеграла соответственного уравнения без последней части и найденного частного интеграла (41). Общий интеграл уравнения без последней части будет с возрастанием времени стремиться к нулю, так что все движение по прошествии некоторого времени изобразится формулой (41). Посмотрим, какова будет разность фаз $\beta + \beta'$ между колебаниями потока и колебаниями маятника.

По формулам (39) и (37) имеем:

$$\cos(\beta+\beta') = \frac{\omega\left[4\lambda^2 - \frac{3m}{2M+m}(\nu^2-\omega^2)\right]}{h[(\nu^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2]}\frac{d\varphi}{dn}. \tag{42}$$

Отсюда следует, что разность фаз $\beta + \beta'$ будет менее или более $\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, будем ли мы иметь неравенство:

$$\omega^2 - (\nu^2 - \lambda^2) > \lambda^2\left(-4\frac{2M+m}{3m} + 1\right), \tag{43}$$

или неравенство с обратным знаком.

Так как период колебания потока есть $\frac{2\pi}{\omega}$, а период колебания маятника в жидкости, покоящейся в бесконечности, есть

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\nu^2 - \lambda^2}},$$

то неравенство (43) показывает, что *при малом* λ *разность фаз будет более* $\frac{\pi}{2}$, *если поток колеблется медленнее маятника, и менее* $\frac{\pi}{2}$, *если поток колеблется быстрее маятника.*

При некоторой скорости колебания потока, близкой к скорости маятника, разность фаз проходит через $\frac{\pi}{2}$, а h получает весьма большую величину, как это видно из формулы (40), в которой ν будет близко к ω и знаменатель очень мал.

Мы предположили, что скорости потока равны между собой и направлены параллельно оси Ox; но изложенный нами анализ колебания маятника может быть приложен приближенно и в том случае, когда l есть малая величина сравнительно с w, ибо тогда при определении колебания маятника мы можем пренебрегать силой, данной формулой (18). Когда же надо будет определить среднюю силу $[P]$ гидродинамического давления, стремящуюся сдвинуть точку опоры маятника, тогда мы можем прибегнуть к формуле (28), подставляя в нее

$$\xi_0' = h\omega.$$

Сказанное в этом параграфе может служить к объяснению явлений колебаний маятников, имеющихся в коллекции приборов Бйеркнеса[1], и находится в согласии с интересными наблюдениями, произведенными П. Н. Лебедевым в физической лаборатории Московского университета в 1895 г.

Статья напечатана в первый раз в „Трудах Отд. физических наук Общества любителей естествознания“, т. VIII, вып. 2, 1896 г. Второе издание помещено в Трудах Аэро-гидродинамического института, вып. 95, 1931. *Прим. ред.*

---

[1] Preiskourant über hydrodynamische Apparate von C. Bjerknes, Mechaniker Andersen, Christiania, 1885.

A GENERALIZATION OF BJERKNES'S PROBLEM OF HYDRODYNAMICAL FORCES ACTING UPON PULSATING AND UPON OSCILLATING BODIES WITHIN A FLUID

Prof. Joukowsky's generalization of Bjerknes's problem consists in that the vibratory motion of the fluid exerting a pressure on the pulsating, or oscillating sphere is not the result of the oscillations or pulsations of other spheres, but it performed according to a given law; viz, it is assumed that the velocity potential in the absence of the sphere is of the form:

$$F_1 = \varphi(x, y, z) f(t),$$

where $\varphi(x, y, z)$ satisfies Laplace's equation.

Prof. Joukowsky terms the velocity of flow at a point the vector $w = \frac{d\varphi}{dn} f(t)$, where dn is an element of the normal to he surface $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ the acceleration — the vector $w' = \frac{d\varphi}{dn} f'(t)$; the derived flow — the imaginary motion of the fluid with the velocity potential $\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t)$; the vectors (4) and (5) are the velocity and the acceleration of the derived flow.

The introduction into the fluid moving with a velocity potential F_1 of a pulsating sphere of radius a reduces the velocity potential to $F = F_1 + F_2$, F_2 being determined by formula (6), in which θ and ψ are correspondingly the angles between the radius r, drawn from the centre of the sphere to the fluid particle considered, and the direction of the vector w and between the same radius and the velocity u of the sphere.

The term $\frac{V^2}{2}$ in formula (8) does not affect the resultant of

the pressure P every time when either $u = 0$, or $\frac{da}{dt} = 0$.

Owing to this, in the cases indicated, the pressure will be compounded of several pressures, each of which depending upon but one term in the formula (7). By making use of this fact prof. Joukowsky, after determining the pressure for the particular cases when $\frac{da}{dt} = 0$, $u = 0$ (formula 11, § 3); $u = 0$, $w = 0$ (formula 12, § 4); $\frac{da}{dt} = 0$, $f(t) = k$ (formula 13, § 5); $\frac{da}{dt} = 0$, $w = 0$, $\varphi = \text{const}$ (formula 21, § 6), solves the two principal problems of Bjerknes, viz.:

1. To determine the action of a periodically varying flow of a fluid on an immersed sphere pulsating with a period equal to that of the period of the flow.

2. To determine the action of a periodically varying flow of a fluid on a oscillating sphere immersed in the flow.

In the case 1 the mean pressure $[P]$ is given by formula (24) in which m_0' denotes the rate of variation of the mass of fluid displaced by the sphere, and β is the phase difference of the flow and of the pulsating sphere.

In the case 2 the mean pressure $[P]$ is determined by formula (28), where ξ_0' — the maximum velocity of the sphere $\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ — the velocity of a flow conjugate with the direction of oscillations of the sphere, β — the phase difference.

This last result is applied by prof. Joukovsky:

1. To the case when the flow of fluid in which is immersed the oscillating sphere is produced by oscillations of another sphere of radius b, the derived flow being of the form represented in fig. 1.

2. To the study of oscillations of a pendulum immersed in a periodically varying flow.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции 5

Кинематика жидкого тела

Введение 7

Глава I. **О движении бесконечно малой частицы жидкости** . 14

Глава II. **Исследование течения жидкости** . 78

Глава III. **Сложение и разложение течений жидкости** 115

Глава IV. **Об ускорениях точек движущейся жидкости** 122

Резюме 145

Лекции по гидродинамике

Введение 149

Лекция I. **О движении частицы жидкости**

§ 1. Разложение движения частицы жидкости . . 157

§ 2. Коэфициенты линейного расширения радиусов-векторов частицы жидкости. Оси деформации 160

§ 3. Коэфициент кубического расширения . . 163

§ 4. Девиация радиусов-векторов в плоскости. Скошение прямых углов . 164

§ 5. Конусы девиаций. Скошение перпендикуляра к плоскости . . . 166

§ 6. О радиусах в плоскостях частицы жидкости, не изменяющих своего направления . 169

§ 7. Изменение объема частицы жидкости за конечный промежуток времени 172

Лекция II. **Исследование течения жидкости**

§ 8. Линии и поверхности токов. Теорема Клебша и ее приложения . . 174

§ 9. Критические точки . . 181

§ 10. Вихревые нити. Теорема Стокса. Условие существования поверхностей, ортогональных к линиям тока 185

Лекция III. **Невихревое течение несжимаемой жидкости.**

§ 11. Свойства потенциала скоростей невихревого течения несжимаемой жидкости. Принцип Дирикле. Случай многосвязного пространства 191

§ 12. Теорема Грина. Беспредельная жидкая масса 197

Лекция IV. **Электрогидродинамические аналогии**

§ 13. Теорема Бельтрами . 209
§ 14. Жидкие массы, соприкасающиеся по поверхностям раздела . 218

Лекция V. **Уравнения гидродинамики и их интегралы**

§ 15. Уравнения гидродинамики в форме Эйлера и Лагранжа. Формулы Бернулли и Лагранжа 221
§ 16. Теорема Томсона. Принцип сохранения вихрей 229
§ 17. Об определенности уравнений гидродинамики 232

Лекция VI. **Об установившемся течении жидкости**

§ 18. Признак установившегося движения . . 238
§ 19. Истечение жидкости из сосудов 243
§ 20. Неподвижные твердые тела в бесконечном потоке жидкости 254
§ 21. Примеры на вихревое установившееся течение жидкости 270

Лекция VII. **Движение твердого тела в безпредельной массе несжимаемой жидкости**

§ 22. О сохранении импульсивной силы и пары 273
§ 23. О трех поверхностях второго порядка, управляющих движением твердого тела в беспредельной жидкости 282
§ 24. Диференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости и их интеграция . 297
§ 25. Случай многозначности потенциальной функции скоростей . 311

Лекция VIII. **О кажущемся взаимодействии тел, находящихся в безпредельной массе движущейся жидкости**

§ 26. Движение в безпредельной массе несжимаемой жидкости двух твердых шаров . . . 314
§ 27. Пульсирующие шары Биеркнеса 327
Резюме 331

Обобщение задачи Биеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы

§ 1. Постановка задачи . . 332
§ 2. Основные определения 332
§ 3. Неподвижный шарик в изменяющемся потоке жидкости . . . 336
§ 4. Изменяющийся шарик в перманентном потоке жидкости 337
§ 5. Неизменяемый шарик, движущийся равномерно и прямолинейно в перманентном потоке жидкости 338
6. Неизменяемый шарик, движущийся с некото-

рым ускорением в жидкости, покоящейся в бесконечности 340
§ 7. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость пульсирующий шарик . . 341
§ 8. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость осциллирующий шарик 344
§ 9. Действие колеблющегося потока жидкости на погруженный в жидкости маятник 347
Резюме 351

CONTENTS

Editorial Note 5

Kinematics of fluid bodies

Preface 7

Chapter I. **On the motion of an infinitesimal particle of fluid** 14

Chapter II. **Investigation of fluid motions** . 78

Chapter III. **Composition and resolution of fluid motions** . 115

Chapter IV. **Accelerations of particles of a moving fluid** . 122

Summary 145

Lectures on hydrodynamics

Preface 149

Lecture I. **On the motion of a particle of fluid**

§ 1. Resolution of motion of a particle 157

§ 2. Coefficients of extension of radii vectors of a particle. Axes on strain . . 160

§ 3. Cubical dilatation . . . 163

§ 4. Deviation of radii vectors in a plane. Alteration of right angles 164

§ 5. Deviation cones. Slanting of the perpendicular to a plane 166

§ 6. Radii and planes of constant direction 169

§ 7. Change of volume of a particle during a finite interval of time 172

Lecture II. **Analysis of motion of a fluid**

§ 8. Lines of flow and surfaces of flow (Clebsch's theorem and its applications) 174

§ 9. Critical points 181

§ 10. Vortex filaments. Stocke's theorem. Condition for the existence of surfaces orthogonal to lines of flow 185

Lecture III. **Irrotational motion of an incompressible fluid**

§ 11. Properties of the velocity potential of an irrotatinal motion of an incompressible fluid. Dirichlet's principle. The case of a multiply — connected space 191

§ 12. Green's theorem. Unlimited fluid medium . . . 197

Lecture IV. **Electro-magnetic analogies**

§ 13. Beltrami's theorem . . . 209

§ 14. The case of a fluid, having a surface of discontinuity of velocities . . 213

Lecture V. **Equations of hydrodynamics and their integrals**

§ 15. Equations of hydrodynamics in Euler's form and in Lagrange's form. Bernoulli's formula and Lagrange's formula . . 221

§ 16. Thomson's theorem. Principle of conservation of vortices 229

§ 17. On a determinateness of solutions of hydrodynamics equations 232

Lecture VI. **On the steady motion of a fluid**

§ 18. Conditions of steady motion 238

§ 19. Efflux from vessels . . 243

§ 20. Stationary solids in an infinite stream 254

§ 21. Examples of steady vortex motion of a fluid . . 270

Lecture VII. **Motion of solids through unlimited mass of incompressible fluid**

§ 22. On the conservation of the impulsive force and couple 273

§ 23. The three surfaces of the second order determining the motion of a solid immersed in an infinite mass of fluid . . . 282

§ 24. Differential equations of motion of a solid in a fluid and their integration 297

§ 25. Case of many-valued velocity-potential function 311

Lecture VIII. **On the mutual influence of bodies in an unlimited mass of moving fluid**

§ 26. Motion of two solid spheres in an infinit mass of incompressible fluid 314

§ 27. Bjerkne's pulsating spheres 327

Summary 331

Generalization of Bjerkne's problem of hydrodynamical forces acting upon pulsating and upon oscillating bodies within a fluid . . . 332

Summary 351

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЛНОГО СОБРАНИЯ СОЧИНЕНИЙ проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

В ДЕСЯТИ ТОМАХ И ПЯТИ ВЫПУСКАХ

Том I. **Общая механика**

Первый том, посвященный главным образом теоретической механике, содержит статьи по статике, кинематике и динамике. Здесь помещены: докторская диссертация Н. Е. Жуковского о прочности движения, посвященная вопросу, имеющему в настоящее время, в особенности в авиации, весьма актуальное значение; много статей по динамике твердого тела, главным образом, динамике вращательного движения около неподвижной точки (случаи Ковалевской, Гесса и др.). В конце тома помещены мелкие статьи популярного и педагогического характера.

Том II. **Гидродинамика**

Во втором томе помещена магистерская диссертация Н. Е. Жуковского „Кинематика жидкого тела“ и „Лекции по гидродинамике“, специальный курс, читанный Н. Е. в Университете. Сюда добавлена статья „Обобщение задачи Бьеркнеса“, развивающая тему, затронутую в конце лекций.

Том III. **Гидродинамика**

В третьем томе помещены статьи, касающиеся частных задач гидродинамики. Среди них следует отметить большую классическую работу „О движении твердых тел с полостями, наполненными жидкостью“, и целый ряд статей, имеющих важное практическое значение, посвященных плоской задаче.

Том IV. **Волны. Вязкость. Реакция жидкости**

Четвертый том содержит статьи, имеющие значение в кораблестроении: о качании корабля на волнах, о волновом сопротивлении, о построении реактивных судов; во второй половине тома помещены статьи, в которых рассматривается движение вязкой жидкости; среди них следует отметить имеющие особенно важное практическое значение статьи, посвященные гидродинамической теории смазки.

Том V. **Вихри. Теория крыла. Авиация**

В пятом томе помещены статьи по теории крыла аэроплана: в „Geometrische Untersuchungen“ и „О типах Антуаннет“ подробно изучены профили Антуаннет и так называемый профиль Жуковского, а в классическом мемуаре „О присоединенных вихрях“ впервые доказывается теорема, которая в настоящее время носит название теоремы Н. Е. Жуковского. Во второй половине тома находятся статьи, послужившие основанием теории авиации и динамике аэроплана.

Том VI. **Винты. Ветряки. Вентиляторы. Аэродинамическая труба**

Том шестой включает статьи, в которых Н. Е. Жуковский развивает свою вихревую теорию гребного винта и находящуюся с ней в связи теорию ветряных мельниц и вентиляторов, основанную на изучении того влияния, которое оказывают на элементы, характеризующие действие винта, сбегающие с его лопастей вихри.

Том VII. **Гидравлика**

В седьмом томе помещены статьи, имеющие важное значение в вопросах водоснабжения. Здесь находятся такие классические работы, как исследования движения подпочвенных вод, с просачиванием воды через плотины, и большой труд о гидравлическом ударе.

Том VIII. **Теория упругости. Железные дороги. Автомобили**

В восьмом томе находятся статьи, в которых рассматриваются вопросы теории упругости, сопротивления материалов, устойчивости стержневых сооружений. Во второй половине тома помещены статьи по железнодорожному делу: о прочности сцепки вагонов и о качании паровоза.

Том IX. **Математика. Астрономия. Речи. Доклады. Характеристики и биографии**

Девятый том — сборный. В нем помещены статьи различного характера: статьи по математике, по астрономии, математической физике; биографии и характеристики работ различных математиков; доклады и публичные речи Н. Е. Жуковского.

Том X. **Неизданные сочинения Н. Е. Жуковского**

В десятом томе предполагается поместить посмертные работы Н. Е. Жуковского, ранее нигде не печатавшиеся, которые в настоящее время обрабатываются редакционной коллегией.

Курсы лекций

Выпуск 1. **Теоретическая и аналитическая механика. Гидромеханика**
Выпуск 2. **Прикладная механика**
Выпуск 3. **Теоретические основы воздухоплавания, ч. I и II**
Выпуск 4. **Специальные курсы теоретической механики**
Выпуск 5. **Теория регулирования хода машин**

Редактор Ф. С. Шаховской.
Техн. редактор А. Н. Саварин.
Сдано в набор 4/I 1935 г.
Подписано к печати 14/VII 1935 г.
Изд. № 10. Инд. 20-5-4. Тираж 3000. Колич. печ. листов 22½. Колич. печ. знаков в листе 50400. Формат бумаги 62×94¼16. Уполн. Главлита В—104012.
Зак. № 16.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

Исправления и опечатки

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*	*По чьей вине*
25	1 сверху	(6)	(7)	Редакционная коллегия
60	8 снизу	$dx\,(e_2y + rx) +$	$dx\,(e_2y + rx) =$	1-й корр.
164	6	σ_2	σ_3	Редакционная коллегия