ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
(ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ)

П.А. ЖИЛИН

Оглавление

Предисловие **7**

1. Законы равновесия тел **10**
1.1. Воздействия: силы и моменты 11
1.2. Законы равновесия 15
1.3. Принцип рычага Архимеда 19
1.4. Центр масс. Центр тяжести твердого тела 21
1.5. Пример: как правильно повесить картину 25
1.5.1. Первый вариант подвеса картины 26
1.5.2. Второй вариант подвеса картины 27
1.6. Иллюстративные задачи 32
1.7. Равновесие нерастяжимой нити с закрепленными концами . . . 40
1.8. Балка с защемленными концами 48
1.9. Связь используемых терминов с традиционными 61

2. Кинематика: трансляционные движения **65**
2.1. Системы отсчета и системы координат 65
2.2. Кинематика точки. Скорость и ускорение 68
2.3. Частные случаи движения материальной точки 72
2.3.1. Прямолинейное движение 72
2.3.2. Равномерное движение по прямой 74
2.3.3. Колебательное движение частицы вдоль прямой 74
2.3.4. Движение частицы вдоль ортогональных прямых 75
2.3.5. Движение материальной точки по окружности 78
2.3.6. Равномерное движение частицы точки по спирали . . . 80
2.4. Траекторное описание движения точки 81
2.4.1. Движение частицы по окружности 83
2.4.2. Полет камня в поле силы тяжести 84
2.5. Движение спутника Земли по круговой орбите 87
2.6. Движение тела в центральном поле тяготения 89

3. Кинематика: спинорные движения 95
3.1. Абсолютно твердое тело 95
3.2. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела 99
3.3. Тензор поворота и вектор поворота 106
3.4. Вектор поворота 110
3.5. Вектор малого поворота 114
3.6. Неоднозначность суждений о векторе поворота 114
3.7. Плоские движения твердого тела 116
3.8. Теорема о представлении тензора поворота 119
3.9. Дифференцирование тензоров второго ранга 124
3.10. Угловая скорость 126
3.11. Тензор спина и вектор угловой скорости 127
3.12. Определение поворота по угловой скорости 132
3.13. Вращение вокруг фиксированной оси 135
3.14. Связь угловой скорости с вектором поворота 138
3.15. Угловая скорость композиции поворотов 142
3.16. Скорости и ускорения точек твердого тела 148
3.17. Качение цилиндра по плоскости 151
3.18. Качение конуса по конусу 154
3.18.1. Классическое решение 155
3.18.2. Альтернативное решение 155
3.18.3. Определение поворотов в классическом решении 160
3.19. Шарнир Гука 161
3.20. Сложное движение материальной точки 167
3.21. Сложные движения абсолютно твердого тела 170

4. Пространство, время, движения 173
4.1. Введение 174
4.2. Тела отсчета. Время. Системы отсчета 175
4.3. Инерциальные системы отсчета 178
4.4. Системы отсчета и системы координат 181
4.5. Трансляционные и спинорные движения 182

5. Тела и их динамические структуры 184
5.1. Тела-точки и их размерность 184
5.2. Тела и их динамические структуры 192
5.3. Классическая модель абсолютно твердого тела 198
5.4. Квазитвердое тело и его структуры 200
5.5. Тензоры инерции твердого тела и их свойства 207
5.6. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела 215

5.7. Вычисление тензоров инерции простейших тел 217
5.8. Группы симметрии. Принцип Кюри–Неймана 219
5.9. Тензоры инерции конкретных тел 226

6. Воздействия **231**
6.1. Основная аксиома механики 231
6.2. Силы и моменты 233
6.3. Мощность внешних воздействий 238

7. Первый закон динамики Эйлера **241**
7.1. Общая формулировка первого закона динамики 241
7.2. Теорема об изменении кинетической энергии 247
7.3. Ограниченная теорема об изменении механической энергии . . 249
7.4. Уравнение Мещерского. Движущаяся тележка под погрузкой . 251
7.5. Задача Кэйли о падающей цепочке 253
7.6. Поперечные колебания струны 254

8. Второй закон динамики Эйлера **263**
8.1. Общая формулировка второго закона динамики 263
8.2. Перманентные вращения твердого тела 266
8.3. Теорема об изменении момента количества движения 267
8.4. Иллюстрация неполноты механики Ньютона 269
8.5. Динамические уравнения Эйлера 273
8.6. Свободные вращения твердого тела 277
8.7. Движение твердого тела в центральном поле тяготения 278
8.8. Реакция в опоре свободно вращающегося тела 282
8.9. Быстровращающийся гироскоп 284

9. Уравнение баланса энергии **291**
9.1. Вводные замечания 291
9.2. Полная и внутренняя энергии 293
9.3. Общая формулировка уравнения баланса энергии 296
9.4. Материальная точка 301
9.4.1. Классическая материальная точка 301
9.4.2. Материальная точка, обладающая теплоемкостью 304
9.4.3. Материальная точка переменной массы 309
9.5. Система материальных точек 314
9.6. Система двух материальных точек 322
9.7. Механика и второй закон термодинамики 333

10. Принцип возможных перемещений **335**
10.1. Вводные замечания 335
10.2. Принцип Лагранжа 337
10.3. Общий принцип возможных перемещений 342
10.4. Модифицированный рычаг Архимеда 345

Библиографический список **349**

Предисловие

У большинства выпускников технических вузов складывается устойчивое мнение о том, что теоретическая механика — это давно законченная и уже закрытая глава науки, что в ней нет места для развития и новых открытий. Между тем, классическая механика в XX веке развивалась весьма интенсивно и претерпела существенные изменения. Главное изменение связано с переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся естественным развитием ньютоновой механики. При этом все, что было достигнуто ранее, полностью сохраняется и не требует никаких изменений. Основное отличие эйлеровой механики от ньютоновой механики заключается в более полном и последовательном учете спинорных движений. Уравнения баланса количества движения и кинетического момента становятся независимыми законами. Понятие силы сохраняется, но момент уже не полностью определяется силами, а является самостоятельной сущностью. В дополнение к классической эйлеровой механике в данном курсе добавлен еще один фундаментальный закон — уравнение баланса энергии. Соответственно, в рассмотрение введены такие понятия, как внутренняя энергия, температура, энтропия и химический потенциал. Все они вводятся на элементарных примерах чисто механических задач.

Цель, которую ставил перед собой автор, заключается в том, чтобы представить современную рациональную механику в том виде, как она создавалось и совершенствовалось на протяжении трех тысячелетий многими поколениями творцов, включая тех, кого не принято возводить в ранг великих. При этом автор стремился к предельной простоте изложения и тщательно избегал необязательной математической формализации. Под простотой понимается достаточно подробное изложение, но никак не упрощение фундаментальных понятий. Упрощенное изложение фундамента механики было бы оправданным, если бы в программах высшей школы был бы представлен полный курс рациональной механики. К сожалению, этого нет. Многочисленные спецкурсы по механике широко используют весьма непростые фундаментальные понятия механики в предположении, что эти понятия уже были введены ранее, что не соответствует действительности. В результате, многие важнейшие понятия остаются, по существу, чисто интуитивными представлениями с неясной областью применимости. В качестве общеизвестных примеров таких понятий

отметим понятия воздействий, энергии, температуры, энтропии. Более того, сложился устойчивый миф о том, что классическая механика базируется на трех законах Ньютона, хотя неполнота ньютоновой механики была указана Л. Эйлером еще в конце XVIII века. Более общая эйлерова механика с активным применением основных понятий термодинамики широко используется в научных исследованиях с конца XIX века, но до сих пор не отражена в существующих учебниках. Ограниченность ньютоновой механики ярко проявилась в ее неспособности дать полноценное описание явлений электромагнетизма, а в начале XX века к ним добавились явления, которые в настоящее время принято описывать в рамках квантовой физики. В настоящее время уже стало очевидным, что главной причиной ограниченности ньютоновой механики является игнорирование в ней спинорных движений, играющих главную роль в микромире. Поэтому переход механики на фундамент эйлеровой механики стал настоятельной необходимостью. В настоящее время фундамент механики существенно расширен и укреплен. В данном курсе автор видел свою задачу в том, чтобы представить этот укрепленный фундамент механики в максимально ясной форме. При этом важно было подчеркнуть эволюционный и преемственный характер развития основных идей механики.

При изложении механики существует трудно преодолимое искушение как можно скорее перейти к демонстрации уникальных возможностей механики при решении конкретных задач, составляющих золотой фонд механики, принося при этом в жертву ясное описание основных понятий и фундаментальных законов рациональной механики. Существующие книги и учебники по механике, как правило, делают свой выбор в пользу экскурсии по золотой кладовой механики. В результате и сложилось мнение о том, что с фундаментальной точки зрения механика является завершенной главой современной науки, которая неспособна описывать, например, явления микромира. Многочисленные конкретные приложения механики могут быть изложены в спецкурсах механики. Но ни в одном спецкурсе не обсуждаются понятия времени и пространства, понятия сил и моментов, общие формулировки фундаментальных законов, понятия энергии, температуры, энтропии, химического потенциала и т.д. В спецкурсах все эти понятия широко используются, но остаются непонятными подлинный смысл и происхождение этих понятий. Более того, нетрудно убедиться, что все перечисленные фундаментальные понятия остались за рамками уже устоявшихся наук: механики, физики, термодинамики. В настоящее время ситуация такова, что единственным курсом, в котором уместно и возможно вводить эти понятия, является курс “Теоретическая механика”, назначение которого служить введением в рациональную механику и рациональную физику. Конечно, можно попытаться в рамках курса “Теоретическая механика” на-

учить студентов методам решения практических задач. Добиться этого можно, но только в результате жертвы, а именно ценой отказа от обсуждения фундаментальных понятий, ибо на то и другое времени просто не хватает. Жертва велика, а каковы плоды? Они не столь значительны и, к тому же, стремительно обесцениваются. В современном мире компьютерных технологий многие традиционные методы решения практических задач необратимо девальвируются.

Данное учебное пособие является непосредственным продолжением книги автора “Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве” [18], в которой содержался материал первого семестра курса “Теоретическая механика”. В пособии излагается большая часть содержания второго семестра курса, посвященная обсуждению фундаментальных понятий механики. Однако в пособие вошли и некоторые вопросы, которые изучались в первом семестре. К ним относятся первые три главы данного пособия. В частности, законы равновесия тел изучались сразу после изложения векторного языка и преследовали две цели: первая — предварительное знакомство с понятиями сил и моментов и вторая — тренировка в работе с векторами. После этого в первом семестре вводились тензоры второго ранга и изучалась кинематика, т.е. вторая и третья главы данного пособия. Оставшиеся семь глав данного пособия включают обсуждение фундаментальных законов механики и по времени занимают примерно три четверти второго семестра. Заключительная часть второго семестра и весь третий семестр посвящены обсуждению конкретных разделов механики, т.е. обсуждению и применению наиболее употребительных моделей, используемых в механике. Эти вопросы остались за рамками данного пособия.

Автор многим обязан своему Учителю — Анатолию Исаковичу Лурье, под влиянием которого формировалось научное мировоззрение автора. Автор выражает благодарность профессору В.А. Пальмову за неизменную научную поддержку, в том числе и при работе над этим курсом. Автор благодарен академику РАН Н.Ф. Морозову, профессорам Д.А. Индейцеву и П.Е. Товстику за помощь, важность которой может оценить только сам автор.

Разумеется, ответственность за все неточности и другие недостатки данного курса механики полностью лежит на авторе.

Глава 1.

Законы равновесия тел

Последовательное изложение законов статики и введение воздействий опирается на фундаментальные законы механики и будет рассмотрено позднее. Однако исторически статика, т.е. учение о равновесии, была разработана независимо от законов динамики и в относительно завершенном виде была представлена в книге Вариньона "Новая механика" (1725). Учение Вариньона было позднее усовершенствовано и в настоящее время оно обрело почти каноническую форму в учебниках механики. Эта форма вполне достаточна для правильного решения практических задач. Тем не менее, принятую форму учения о равновесии трудно признать удовлетворительной в теоретическом отношении. Поэтому излагаемая ниже трактовка учения о равновесии сильно отличается от того, что представлено в традиционных учебниках. Это касается прежде всего списка базовых понятий. Ниже не используются такие термины, как главный вектор сил, точка приложения силы, равнодействующая системы сил, эквивалентные системы сил и целый ряд других терминов. Понятие силы как вектора ввел Саймон Стевин в 1580 г. Можно сказать иначе. Понятие вектора возникло из желания описать понятие силы. Именно тогда С. Стевин установил закон для сложения сил, который вошел в науку как правило параллелограмма для сложения векторов. Поэтому изложение статики непосредственно после введения понятия вектора — см. [18] — можно рассматривать и как первые приложения векторного языка в механике, и как начальное изучение понятия воздействий. При этом важно понять, что векторный язык изучен не тогда, когда усвоены основные операции с векторами, а тогда, когда изучающий научится описывать на векторном языке элементы окружающего его мира.

1.1. Воздействия: силы и моменты

В механике изучаются движение и равновесие материальных тел. Под телами, вообще говоря, понимаются материальные образования различной природы и строения. Например, в качестве тела может выступать объем газа или жидкости, заключенный внутри некоторой воображаемой замкнутой поверхности. Выделенную систему материальных точек также можно рассматривать как тело. Телами являются нити, стержни, твердые деформируемые тела, абсолютно твердые тела и многое другое. Однако в данной главе в качестве основного тела у нас будут фигурировать абсолютно твердые тела. Кроме того, в данной главе равновесие тела будет пониматься как состояние покоя в выбранной системе отсчета. Но если тело покоится, то всякое тело можно воспринимать как абсолютно твердое тело. Эту идею часто называют принципом замораживания.

Рассмотрим некоторое тело $\mathcal{A}$, в которое мы можем включить все, что пожелаем. Все остальные тела во вселенной назовем окружением тела $\mathcal{A}$ и обозначим символом $\mathcal{A}^e$. Центральной идеей в механике является представление о том, что влияние окружения $\mathcal{A}^e$ на само тело $\mathcal{A}$ можно моделировать заданием пары векторов: вектора силы и вектора момента. Силу, действующую со стороны окружения $\mathcal{A}^e$ на тело $\mathcal{A}$, будем обозначать символом $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$. К сожалению, принятое обозначение может ввести в заблуждение. В математике символ $\mathbf{F}(x, y)$ служит для обозначения векторной функции двух скалярных аргументов. Например, $\mathbf{F}(x, y) = \sin x\,\mathbf{m} + \cos y\,\mathbf{n}$. Если мы теперь запишем функцию $\mathbf{F}(x, y^2/x)$, то это означает следующее $\mathbf{F}(x, y^2/x) = \sin x\,\mathbf{m} + \cos(y^2/x)\,\mathbf{n}$. Эти стандартные в математике соглашения *не принимаются* в обозначении силы. Например, $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это сила, действующая со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, а $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ — это сила, действующая со стороны тела $\mathcal{C}$ на тело A. При этом тела $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ нельзя воспринимать как аргументы функции $\mathbf{F}$. В частности, сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ может не иметь ничего общего с силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. В механике сила является первичным понятием и не выражается в терминах других понятий. Отсюда не следует, что первичные понятия вообще не определяются. Это не так. Первичные понятия определяются как объекты с заданными свойствами, причем последние вводятся аксиоматически.

Силы наделяются следующими свойствами:

1. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является свободным полярным вектором и моделирует силовое воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.

2. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивна по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \varnothing \tag{1.1.1}$$

где символ “$\vee$” следует воспринимать как союз “и”.

Последнее равенство в (1.1.1) означает, что тела $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ не имеют общих частей. Иными словами, если тело $\mathcal{B}$ состоит из двух отделенных тел $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, то сила, действующая на тело $\mathcal{A}$ со стороны двух тел $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, равна сумме сил, действующих на тело $\mathcal{A}$ со стороны каждого из тел $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ в отдельности.

3. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ аддитивна по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D},\mathcal{B}), \quad \mathcal{A} = \mathcal{C}\vee\mathcal{D}, \quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D} = \varnothing. \tag{1.1.2}$$

Понятие силы хорошо знакомо из школьного курса физики. Понятие момента является значительно менее привычным и потому более сложным. К сожалению, в учебной литературе введение понятия момента является неполным и сопровождается многими неясностями.

Введение момента начинается с выбора опорной точки Q, которую можно выбирать совершенно произвольно, но она должна быть фиксирована (неподвижна) в системе отсчета. Например, в качестве опорной точки можно выбрать начало в системе отсчета. Далее необходимо выбрать еще одну точку P, называемую точкой приведения. Последняя может выбираться произвольно, но она должна быть жестко зафиксирована относительно рассматриваемого тела $\mathcal{A}$.

Определение: *моментом* $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$*, действующим со стороны тела* $\mathcal{B}$ *на тело* $\mathcal{A}$ *и вычисленным относительно опорной точки* Q*, называется свободный аксиальный вектор, выражаемый следующей конструкцией*

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}), \tag{1.1.3}$$

где вектор $\mathbf{R}_{\mathrm{Q}}$ *определяет положение опорной точки* Q*; вектор* $\mathbf{R}_{\mathrm{P}}$ *— определяет положение точки приведения; первое слагаемое в правой части (1.1.3) называется моментом силы* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$*; вектор* $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения* P*, но не зависит от выбора опорной точки* Q*.*

Полный момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, по определению, не зависит от выбора точки приведения. Отсюда следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^{S}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}} - \mathbf{R}_{\mathrm{S}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}). \tag{1.1.4}$$

Моменты наделяются следующими свойствами, вводимыми аксиоматически:

1. Момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ является свободным аксиальным вектором и моделирует моментное воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.

2. Момент $\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ аддитивен по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$

$$\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D}) = \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}) + \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{D}), \quad \mathcal{B}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}. \quad (1.1.5)$$

3. Момент $\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ аддитивен по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$

$$\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B}) = \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{C},\mathcal{B}) + \mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{D},\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}. \quad (1.1.6)$$

Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Особенно это относится к понятию момента. Необходимость введения моментов как самостоятельных сущностей была впервые осознана Л. Эйлером в 1771 г. Это означало принципиальную неполноту ньютоновой механики. К сожалению, стараниями Ж. Лагранжа фундаментальное открытие Л. Эйлера было предано забвению на более чем столетие. Независимые от сил моменты были вновь введены в механику только в начале XX-го столетия. Не вдаваясь в подробности этой драматической для механики истории, вернемся к обсуждению понятий сил и моментов. Трудность этих понятий заключается в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне определенные на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *— это реакция тела* $\mathcal{B}$ *на изменение положения тела* $\mathcal{A}$*;*

б) момент $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *— это реакция тела* $\mathcal{B}$ *на повороты тела* $\mathcal{A}$ *вокруг точки приведения* P.

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$; 2) мысленно “заморозить” тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое; 3) мысленно придавать всем точкам $\mathcal{A}$ всевозможные бесконечно малые смещения $\xi\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным смещениям тела $\mathcal{A}$, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление $\mathbf{e}_*$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует смещению тела $\mathcal{A}$ в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_*$ равна нулю.

Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точку приведения в теле отсчета и относительно тела $\mathcal{A}$, т.е. тело $\mathcal{A}$ и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P; 4) мысленно поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi\mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}|=1$. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным поворотам тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на вектор $\mathbf{e}_{**}$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_{**}$ равна нулю.

После всего сказанного выше выявляется некий недостаток введенной выше терминологии. А именно, вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ был назван моментом, действующим со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$. На самом деле моментом, реально действующим со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, является только собственно момент $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Например, пусть даны две материальные точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Пусть $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ есть сила, действующая со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$. Тогда $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, по определению, называется моментом, действующим со стороны материальной точки $\mathcal{B}$ на материальную точку $\mathcal{A}$. Но на материальную точку никакие моменты действовать не могут, поскольку материальная точка не реагирует на повороты. Так что $(\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ это просто момент силы, действующей на материальную точку $\mathcal{A}$. Отмеченное обстоятельство будет необходимо иметь в виду при написании мощности внешних воздействий.

Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

***Определение**: пара векторов $\left\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\ \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right\}$ называется воздействием тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.*

***Определение**: воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{t})$, что при любых движениях тела $\mathcal{A}$ воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ определяется заданием пары векторов*

$$\left\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\ (\mathbf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{t})-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right\},\qquad \left(\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\mathbf{0}\right), \tag{1.1.7}$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела $\mathcal{A}$. Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать явления, выходящие за рамки традиционно рассматриваемых в классической механике.

***Определение**: воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто моментным, если сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ равна нулю.*

Описанными выше свойствами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Эти постулаты не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

Примечание. *Аксиомы аддитивности в учебниках по теоретической механике часто подменяются так называемым "принципом независимости сил" или "Четвертым законом Ньютона". Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места. Иными словами, интенсивность воздействия тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ в общем случае зависит от присутствия третьего тела $\mathcal{C}$.*

Приведенное выше интуитивное понимание сил и моментов лежит в основе всей механики. Его нельзя формализовать, т.е. заменить некими математическими конструкциями. Этим механика отличается от чистой математики. Присутствие интуиции в механике, как и в любой другой науке, изучающей Природу, неустранимо в принципе. Впрочем, интуиция неустранима и в математике, если только добраться до ее логических оснований. Просто в механике, в отличие от математики, присутствие интуиции необходимо на всех уровнях: от логических оснований до сугубо прикладных вопросов. Знаменитое заявление Ж. Лагранжа в предисловии к "Аналитической механике" о том, что он преобразовал механику в раздел математики не соответствует действительному положению вещей и никогда не будет ему соответствовать.

1.2. Законы равновесия

Законы статики в механике были открыты более двух с половиной тысячелетий назад, но точная дата их открытия не известна. Установлено, что законы статики во вполне осознанной форме активно использовались Архимедом, которого можно назвать прародителем современной рациональной механики. Настоящее рождение рациональная механика получила в трудах Галилео Галилея. До Л. Эйлера статика и динамика, по существу, выступали как различные науки. Только после трудов Л. Эйлера было окончательно осознано, что природа воздействий в статике и динамике в точности одна и та же. Более того, стала окончательно ясной динамическая природа воздействий, т.е. сил и моментов. Законы статики являются чрезвычайно идеализированными частными случаями законов динамики. В Природе, как таковой, статика не существует. Следует обратить внимание на то, что в предыдущем пункте описание интуитивного восприятия воздействий опиралось на идею движений. Воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ есть реакция тела $\mathcal{B}$ на бесконечно малые движения тела $\mathcal{A}$. Именно по этой причине в последние десятилетия статику предпочитают излагать после формулировки фундаментальных законов. Статические расчеты полезны, поскольку позволяют относительно простыми средствами получить важные оценочные результаты. Но окончательные суждения можно получить только на основании динамических расчетов, которые несравнимо сложнее

статических расчетов. Данная книга следует старым традициям и содержит изложение статики до формулировки фундаментальных законов. Основанием для этого служит возможность тренировки в усвоении векторного языка на простых задачах механики. Кроме того, знание законов статики в их, так сказать, чистом виде является необходимым элементом любого технического образования. Сказанное справедливо даже несмотря на некоторую логическую уязвимость законов статики, которая, впрочем, совершенно не сказывается на получаемых результатах. Вместе с тем, рассмотрение целого ряда важных для учения о равновесии тел вопросов будет сделано только после изложения фундаментальных законов механики.

***Первый и второй законы статики**: если произвольное тело $\mathcal{A}$ находится в покое (в равновесии), то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ и момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующие на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$, равны нулю, т.е.*

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}. \quad (1.2.1)$$

Выполнение условий (1.2.1) не гарантирует, что тело $\mathcal{A}$ действительно будет находиться в покое. Оно может совершать движения относительно выбранной системы отсчета. Даже если тело $\mathcal{A}$ является абсолютно твердым телом, то и тогда оно может совершать так называемые движения по инерции, о чем будет сказано при формулировке основной аксиомы механики. В общем случае тела $\mathcal{A}$ эти движения могут иметь относительно сложный характер. Однако сейчас нас интересуют не движения. Мы видим глазами, что тело находится в покое. Тогда первый и второй закон статики (1.2.1) обязаны выполняться. Если законы статики не выполняются, то тело заведомо не может находиться в покое. При практическом использовании условий равновесия (1.2.1) целесообразно активно использовать свойства аддитивности воздействий.

Изучающему рациональную механику следует обратить внимание на следующие обстоятельства. Условия статики (1.2.1) записываются для тела $\mathcal{A}$ с учетом тел окружения $\mathcal{A}^e$. Однако тела сами по себе не фигурируют в уравнениях (1.2.1). Они входят в уравнения равновесия только через создаваемые ими силы и моменты. Это означает, что при написании уравнений равновесия мы должны мысленно отбросить все тела, за исключением самого тела $\mathcal{A}$, а тела окружения заменить силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ и моментом $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$. Эту замену тел создаваемыми ими воздействиями в литературе часто называют *принципом освобождаемости от связей*. Следует, однако, иметь в виду, что сама идея введения воздействий равносильна *принципу освобождаемости от связей*, ибо в механике не существует никаких сил и моментов, отличных от тех, которые моделируют воздействие тел. Иными словами, *принцип освобождаемости от связей* не вносит в механику ничего нового.

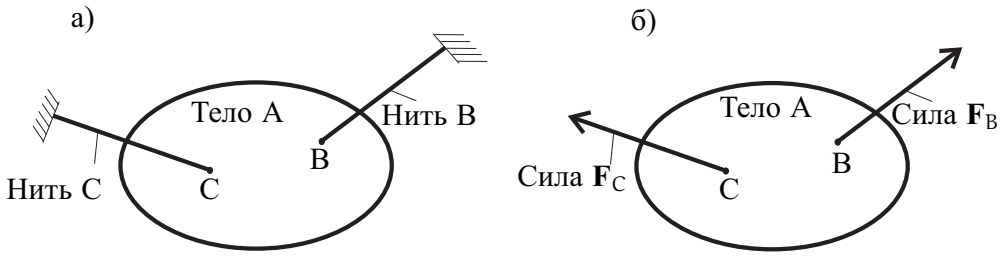

Рис. 1.1. Равновесие тела, растягиваемого нитями

***Пример**: дано абсолютно твердое тело $\mathcal{A}$, к точкам $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ которого прикреплены тонкие нити, создающие силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$; выяснить, при каких ограничениях на силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$ тело $\mathcal{A}$ находится в равновесии.*

***Решение.** На рис. 1.1,а показано тело с прикрепленными к нему нитями. На рис. 1.1,б нити отброшены, а их воздействие заменено силами. Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их прикрепления к телу $\mathcal{A}$. Таким образом, имеем $\mathcal{A}^e = \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$. Первый закон статики требует, чтобы сила $\mathbf{F}(\mathrm{A}, \mathrm{A}^e)$ обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство*

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \qquad (1.2.2)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \qquad (1.2.3)$$

где Q — выбранная опорная точка.

Для простоты опорную точку совместим с началом O в системе отсчета. При вычислении момента $\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P, не совпадающую с точкой закрепления нити B, то собственный момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг точки P, то нить $\mathcal{B}$ будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нуля. Если же в качестве точки приведения выбрать точку B, то собственно момент $\mathbf{L}^B(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \qquad (1.2.4)$$

Внешне выражение (1.2.4) не совпадает с (1.1.4), но оно легко преобразуется к виду (1.1.4). При этом легко убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ равнялся нулю. Это

означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения $\mathcal{A}^e$ на тело $\mathcal{A}$ не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (1.2.2) – (1.2.4), получаем

$$\mathbf{F}_\mathrm{B} = -\mathbf{F}_\mathrm{C}, \quad \mathbf{F}_\mathrm{B} = \lambda(\mathbf{R}_\mathrm{C} - \mathbf{R}_\mathrm{B}),$$

где величина λ остается произвольной.

Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно. Более того, понятие устойчивости положения равновесия можно ввести в рассмотрение только после изложения фундаментальных законов, что и будет сделано.

Как видим, в положении равновесия нити должны быть направлены вдоль прямой, проходящей через точки B *и* C. *На рис. 1.1 изображено положение, которое не является равновесным. Но для нахождения решения это не имело значения.*

О действии и противодействии. В заключение этого параграфа докажем одно полезное свойство сил и моментов, аналог которого известен из школьного курса физики под названием третьего закона Ньютона. Подчеркнем только, что здесь это свойство доказывается, а не постулируется.

Пусть дано тело $\mathcal{A}$, находящееся в равновесии, т.е. для него выполняются уравнения статики (1.2.1). Тело $\mathcal{A}$ представим как объединение двух тел $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Поскольку тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ также находятся в равновесии, то и для них должны выполняться условия статики (1.2.1). При этом следует учесть, что $\mathcal{B}^e = \mathcal{C} \vee \mathcal{A}^e$, $\mathcal{C}^e = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}^e$. Таким образом, имеем систему трех силовых уравнений

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}. \tag{1.2.5}$$

Складывая последние два уравнения в (1.2.5) и вычитая из получившегося равенства первое уравнение, получаем

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}. \tag{1.2.6}$$

Равенства (1.2.6) выражают словами, что действие равно противодействию, взятому с обратным знаком, а действие тела на самого себя равно нулю. Обратим внимание, что равенства (1.2.6) имеют смысл тогда и только тогда, когда сила выражается свободным вектором.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят к следующим равенствам

для моментов

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{B},\mathcal{C})+\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C},\mathcal{B})=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{B},\mathcal{C})=-\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C},\mathcal{B}) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{B},\mathcal{B})=\mathbf{0}. \quad (1.2.7)$$

Хотя законы статики чрезвычайно просты с формальной точки зрения, тем не менее их полное усвоение возможно только в результате настойчивой практики. Для этого необходимо самостоятельно рассмотреть несколько десятков различных задач. Небольшое число иллюстративных задач будет рассмотрено в следующем параграфе. При этом в рассмотрение будут введены некоторые важные для приложений понятия.

Упражнение. *Доказать, что если условия статики (1.2.1) выполняются для одной опорной точки, то они выполняются и для любой другой опорной точки.*

1.3. Принцип рычага Архимеда

В данном параграфе рассматривается самая знаменитая и принципиальная в теоретическом отношении задача механики.

Рассмотрим задачу статики для конструкции, изображенной на рис. 1.2.

Эта конструкция называется рычагом Архимеда. Рычаг использовался на практике задолго до Архимеда. Например, используя обычную садовую лопату, мы применяем рычаг Архимеда. Имя Архимеда присвоено принципу рычага потому, что именно Архимед выразил принцип рычага в строгой математической форме. В истории механики принцип рычага Архимеда сыграл огромную роль. Никто и никогда не сомневался в правильности принципа рычага. Неясным оставался вопрос, является ли принцип рычага следствием первого закона статики или это независимое утверждение. По существу речь шла о полноте ньютоновой механики. Если последняя полна, то должно существовать доказательство принципа рычага на основе постулатов ньютоновой механики. Было предложено много доказательств принципа рычага, но все они оказались некорректными. Л. Эйлер был первым кто заявил о необходимости дополнения постулатов ньютоновой механики и ввел в рассмотрение второй закон динамики, который в статическом случае сводится ко второму закону статики, т.е. ко второму уравнению системы (1.2.1). Так случилось, что важность и принципиальную значимость открытия Л. Эйлера осознал только Ж. Лагранж. Но он не захотел согласиться с этим от-

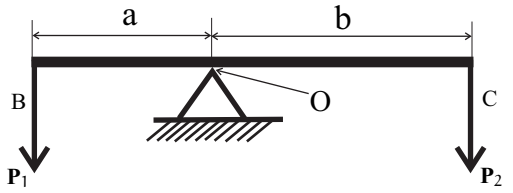

Рис. 1.2. Рычаг Архимеда

крытием. В 1788 г., т.е. через пять лет после ухода Л. Эйлера, выходит в свет “Аналитическая механика” Ж. Лагранжа. Практически все введение к этому трактату Ж. Лагранж посвящает разбору принципа рычага Архимеда. Это и понятно. Если принцип рычага можно доказать пользуясь только первым законом статики, т.е. первым уравнением в системе (1.2.1), то открытие Л. Эйлера можно считать несостоявшимся. Ж. Лагранж показывает несостоятельность предшествующих доказательств принципа рычага и предлагает свое собственное доказательство. В основу этого доказательства был положен так называемый принцип достаточного основания, который в настоящее время в рациональных науках не применяется. Если обратиться к рис. 1.2, то постулат, использованный Лагранжем, состоит в следующем. Он считает, что при выполнении условий $a = b$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ тело находится в равновесии, поскольку у него нет никаких оснований повернуться в ту или другую сторону. Это и есть принцип достаточного основания применительно к рассматриваемому случаю. Здесь, по существу, неявно использован второй закон статики, но не в форме второго равенства в системе (1.2.1), а посредством соображений симметрии. Значительно позднее, а именно в 1918 г., Э. Нетер показала эквивалентность соображений симметрии и фундаментальных законов. Поэтому фактически Ж. Лагранж при доказательстве принципа рычага использовал второй закон статики. Приняв вышеуказанный постулат, Ж. Лагранж весьма остроумными рассуждениями доказывает принцип рычага. Ошибка Ж. Лагранжа, приведшая к отрицанию моментов как самостоятельных сущностей, в сочетании со многими достоинствами трактата “Аналитическая механика”, обеспечившими ему необычайную популярность, дорого стоила механике и задержала ее развитие на много десятилетий. Если бы Дж. Максвелл был бы знаком с трудами позднего Эйлера, то, можно предположить, лицо современной теоретической физики было бы совершенно другим.

Вернемся, однако, к принципу рычага Архимеда. Принятие законов статики (1.2.1), делает задачу, указанную на рис.1.2, вполне элементарной. Действительно, примем в качестве тела $\mathcal{A}$ сам рычаг. Окружение $\mathcal{A}^e$ тела $\mathcal{A}$ состоит из трех тел: тела $\mathcal{B}$, создающего силу $\mathbf{P}_1$, тела $\mathcal{C}$, создающего силу $\mathbf{P}_2$ и тела $\mathcal{D}$, т.е. опоры. Запишем первый закон статики

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \qquad (1.3.1)$$

где $\mathbf{R}$ есть реакция в опоре, т.е. сила, действующая на рычаг со стороны опоры.

Пусть единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ являются ортами горизонтального и вертикального направлений. Тогда $\mathbf{P}_1 = -P_1\,\mathbf{j}$, $\mathbf{P}_2 = -P_2\,\mathbf{j}$. В результате, согласно уравнению (1.3.1) имеем $\mathbf{R} = (P_1 + P_2)\mathbf{j}$. Обратимся к уравнению моментов, т.е. ко второму из равенств (1.2.1). В качестве опорной точки выберем точку контакта рычага с опорой. Начало в системе отсчета также выберем в этой

точке. Тогда имеем

$$\mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{A}^{e}) = \mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{D}) = \mathbf{0}. \tag{1.3.2}$$

В данной задаче для всех трех тел $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ существуют такие точки приведения, что моменты, создаваемые этими телами, сводятся к моментам сил

$$\mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{B}) = -a\,\mathbf{i} \times \mathbf{P}_1 = aP_1\mathbf{i} \times \mathbf{j},$$

$$\mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{C}) = b\,\mathbf{i} \times \mathbf{P}_2 = -\,bP_2\mathbf{i} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{M}^{O}(\mathcal{A},\, \mathcal{D}) = \mathbf{0}.$$

Подставляя эти моменты во второй закон статики (1.3.2), получаем

$$a\,P_1 = b\,P_2. \tag{1.3.3}$$

Равенство (1.3.3) — это и есть знаменитый принцип рычага Архимеда. Именно об этом равенстве много десятилетий и даже столетий велась дискуссия. Все попытки доказать равенство (1.3.3) на основе только первого закона статики потерпели неудачу. Таким образом, открыв математическую форму принципа рычага, Архимед фактически открыл частную форму второго закона статики. Заметим, что Л. Эйлер открыл второй закон динамики (статики) в период с 1771 г. по 1776 г. при попытке разрешить совсем другую задачу, а именно задачу об изгибе тонкого стержня. На полную постановку задачи об изгибе стержня Л. Эйлеру понадобилось около сорока лет. Интересно, что в не вполне осознанной, но математически совершенно правильной, форме Л. Эйлер сформулировал второй закон динамики в 1758 г. при выводе уравнений движения абсолютно твердого тела. И только спустя еще пятнадцать лет он полностью осознал и значение второго закона динамики и неполноту ньютоновой механики. На этом примере видно, как тяжело даются человечеству фундаментальные открытия.

1.4. Центр масс. Центр тяжести твердого тела

Обратимся к рассмотрению важного для приложений понятия центра тяжести, которое хорошо известно из школьного курса физики.

Предварительно введем в рассмотрение важное понятие центра масс. Оно находит широкое применение в механике, но не вытекает ни из каких физических законов и вводится по определению.

Для системы материальных точек центр масс, по определению, вводится равенством

$$m\,\mathbf{R}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{R}_k, \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k, \tag{1.4.1}$$

где векторы $\mathbf{R}_k$ определяют положения материальных точек с массой m_k.

Для тел с распределенной массой предыдущее определение обобщается следующим образом. Все тело разбиваем на бесконечно малые области. Под бесконечно малой величиной будем иметь в виду очень малую по модулю величину. Именно так понимал бесконечно малую величину Л. Эйлер. За такие вольности Л. Эйлера очень жестко критиковали в XIX веке и первой половине XX века. Однако определение бесконечно малой, принятое в классическом математическом анализе, как величине, модуль которой меньше любого наперед заданного числа, мало пригодно в механике. В частности, такую величину нельзя изобразить на рисунке. Интуиция также не может работать с подобным определением бесконечно малой. Во второй половине XX века значительное развитие получил так называемый нестандартный математический анализ, в котором язык, используемый Л. Эйлером, был узаконен. Итак, все тело разбиваем на бесконечно малые части с массой $\mathrm{d}\, m$. Пусть вектор $\mathbf{R}$ определяет положение какой-либо внутренней точки этой бесконечно малой части тела. Тогда центр масс тела определяется интегралом по массе, т.е. суммой всех бесконечно малых частей

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \int\limits_{(m)} \mathbf{R}\mathrm{d}\, m, \quad m = \int\limits_{(m)} \mathrm{d}\, m. \tag{1.4.2}$$

Здесь мы обращаемся непосредственно к интуиции читателя. Те, кто знакомы с теорией меры и интегралом Стилтьеса, без труда переведут эти рассуждения в более строгое с математической точки зрения русло. Кроме того, они заметят, что выражение (1.4.1) следует из определения (1.4.2). Вместе с тем, следует иметь в виду, что интуитивные, пусть даже и не строгие, представления об интеграле не менее важны, чем строгие определения. Важность строгих подходов определяется тем, что они позволяют справиться с патологиями, которые не так уж и редки.

Введем в рассмотрение понятие центра тяжести. В отличие от понятия центра масс, которое можно ввести для всех тел и при всех условиях, понятие центра тяжести является весьма узким и относится к единственному случаю однородного поля тяготения Земли, которую считаем телом $\mathcal{E}$. Рассмотрим некоторое тело $\mathcal{A}$. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, действующая на тело $\mathcal{A}$ со стороны Земли, аддитивна по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$. Таким образом, имеем

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) = \int\limits_{(m)} \mathbf{F}(\mathrm{d}\, m, \mathcal{E}) = \int\limits_{(m)} \mathbf{g}\mathrm{d}\, m = m\,\mathbf{g}, \tag{1.4.3}$$

где постоянный вектор $\mathbf{g}$ называется вектором свободного ускорения и находится экспериментально, вектор силы $m\,\mathbf{g}$ называется весом тела $\mathcal{A}$. Разумеет-

ся, формула (1.4.3) справедлива только вблизи поверхности Земли. Задержимся немного на интуитивном восприятии силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. При интуитивном восприятии силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ как реакции тела $\mathcal{B}$ на всевозможные малые смещения тела $\mathcal{A}$ обычно не возникает проблем, если тела $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ находятся в контакте. Однако тело $\mathcal{A}$ не контактирует с Землей. Как в этом случае быть с интуитивным восприятием силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$? Возможны несколько ответов, но мы приведем только наиболее простой для начинающего изучать механику. Вообразим, что тело лежит на идеально гладкой горизонтальной поверхности. Попробуем его поднять. При этом контакт нарушается, тем не менее мы ощущаем, что Земля препятствует этому подъему посредством создания силы тяжести. Это означает, что сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ отлична от нулевой. Если теперь мы попробуем сдвигать тело вдоль горизонтальной поверхности, то в отсутствии трения мы сделаем это безо всякого сопротивления со стороны Земли. Это означает, что проекция силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ на любое горизонтальное направление равна нулю. Забежав вперед, обсудим интуитивное восприятие момента, создаваемого Землей. Обратимся к рис. 1.2.

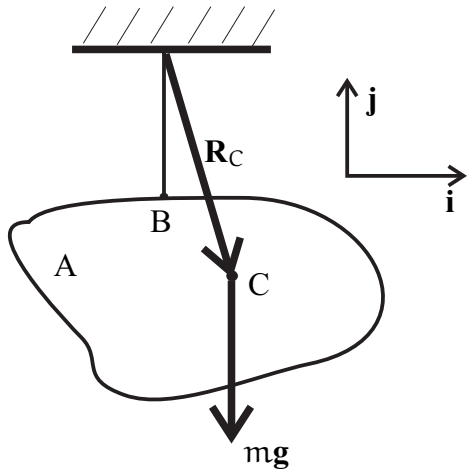

Рис. 1.3. Определение центра тяжести

Пусть на рычаг не действует никаких сил, кроме сил тяжести. С детства каждый человек знает, что если однородный рычаг опирается в одной точке на опору, то он в поле тяготения наклонится в ту сторону, где плечо рычага больше. Иными словами, рычаг повернется. Это и означает существование момента. Если теперь, мы начнем увеличивать короткое плечо рычага, уменьшая при этом длинное плечо, то наступит момент, когда бывшее короткое плечо станет длиннее бывшего длинного плеча, и рычаг повернется в другую сторону. Если же мы выберем точку контакта с опорой точно в середине рычага, то он никуда не повернется и будет находиться в безразличном равновесии. Это означает, что в этом случае на рычаг не действует никакого момента. Именно так устроены детские рычажные качели. Заканчивая это пояснение, отметим два обстоятельства. Первое. Не нужно пренебрегать столь простыми примерами. Интуицию следует развивать именно на них. С более сложными случаями тренированная интуиция справится сама. Второе. Интуитивное восприятие контактных взаимодействий только кажется проще. Если мы посмотрим на зону контакта через мощный микроскоп, то мы увидим, что никакого контакта на самом деле нет.

Обратимся к вычислению момента $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{E})$. Момент также аддитивен по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$. Будем считать, что тело $\mathcal{A}$ состоит из бесконечно малых тел с массой $\mathrm{d}\,\mathrm{m}$. Тогда для этих тел имеем

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathrm{d}\,\mathrm{m},\mathcal{E}) = (\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{F}(\mathrm{d}\,\mathrm{m},\mathcal{E}) = (\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{g}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$

где вектор $\mathbf{R}$ определяет положение какой-либо внутренней точки области тела с массой $\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Очевидно, что собственно момент в этом случае равен нулю, если тело с массой $\mathrm{d}\,\mathrm{m}$ рассматривать как материальную точку. Полный момент, действующий на тело $\mathcal{A}$ и создаваемый полем тяготения, вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \int\limits_{(\mathrm{m})}\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathrm{d}\,\mathrm{m},\mathcal{E}) = \int\limits_{(\mathrm{m})}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{g}\mathrm{d}\,\mathrm{m} = (\mathbf{R}_{\mathrm{C}}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathrm{m}\,\mathbf{g}. \quad (1.4.4)$$

Сравнивая это выражение с определением момента (1.1.3), видим, что при выборе точки приведения в центре масс собственно момент равен нулю. Иными словами, поле тяготения Земли создает чисто силовое воздействие на тело $\mathcal{A}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \mathrm{m}\,\mathbf{g}, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{C}}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathrm{m}\,\mathbf{g}. \quad (1.4.5)$$

Применительно к случаю поля силы тяжести центр инерции тела называют центром тяжести тела. Найдем положение равновесия абсолютно твердого тела в виде плоской фигуры с массой m, подвешенной на нерастяжимой нити, которую примем за тело $\mathcal{B}$. Нить закреплена одним концом в точке, которую примем за начало в системе отсчета, а другим концом прикреплена к телу $\mathcal{A}$ в точке B (рис. 1.3). Вычислим силу $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)$, действующую на тело $\mathcal{A}$ и запишем первый закон статики. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \mathbf{T} + \mathrm{m}\,\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = -\mathrm{m}\,\mathbf{g}$$

где вектор $\mathbf{T}$ есть сила, с которой нить, т.е. тело $\mathcal{B}$, действует на тело $\mathcal{A}$.

Момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ вычисляется стандартным образом

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{T} + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}). \quad (1.4.6)$$

Если в качестве точки приведения выбрать точку подвеса B, то собственно момент $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ равен нулю, поскольку нить не сопротивляется повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг точки подвеса. Запишем теперь второй закон статики

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \\ = (\mathbf{R}_{\mathrm{B}}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{T} + (\mathbf{R}_{\mathrm{C}}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathrm{m}\,\mathbf{g} = (\mathbf{R}_{\mathrm{C}}-\mathbf{R}_{\mathrm{B}})\times\mathrm{m}\,\mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.4.5) и выражением для силы $\mathbf{T}$. Из последнего равенства немедленно следует, что

$$\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B = \varepsilon l\mathbf{j}, \quad \varepsilon = 1, \quad \text{либо} \quad \varepsilon = -1, \tag{1.4.7}$$

где l есть расстояние от точки подвеса B до центра тяжести.

Равенство (1.4.7) не дает решения задачи, поскольку неизвестными являются два вектора $\mathbf{R}_B$ и $\mathbf{R}_C$. Здесь возможны два способа рассуждений. Первый основан на интуиции. Нить — это такой объект, который может передавать силу только сонаправленную с нитью и не может передавать поперечную нагрузку. Поскольку сила $\mathbf{T}$ направлена вертикально вверх, то и вектор $\mathbf{R}_B$ должен быть направлен либо вертикально вверх, либо вертикально вниз. Но вектор $\mathbf{R}_B$ не может быть направлен вертикально вверх, поскольку в этом случая сила $\mathbf{T}$ будет сжимать нить. Нить же не может работать на сжатие. Считая, что $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, получаем $\mathbf{T} = m\,g\mathbf{j}$. Следовательно, для вектора $\mathbf{R}_B$ имеем равенство $\mathbf{R}_B = -a\mathbf{j}$, где a есть расстояние от точки закрепления до точки подвеса. Второй способ рассуждений основан на применении первого и второго законов статики непосредственно к нити. Но и при этом подходе нужно использовать интуитивное утверждение о том, что нить не может выдерживать сжимающую нагрузку. Конечный результат для вектора $\mathbf{R}_B$, разумеется, будет тем же самым. Теперь уравнение (1.4.7) дает выражения для вектора $\mathbf{R}_C$

$$\mathbf{R}_C = -(a + \varepsilon l)\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C^{(1)} = -(a + l)\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_C^{(2)} = -(a - l)\mathbf{j}.$$

Итак, получили два положения равновесия. В первом случае центр масс находится ниже точки подвеса — это устойчивое положение равновесия. Во втором случае центр масс находится выше точки подвеса — неустойчивое положение равновесия, которое не реализуется в действительности.

1.5. Пример: как правильно повесить картину

Допустим, что нам необходимо повесить на стену картину так, чтобы она висела горизонтально. При этом необходимо, чтобы шнур, на котором подвешивается картина, не оборвался. Вес картины равен $P = mg$. Картина имеет прямоугольную форму.

Рекомендация: *Сначала следует обдумать задачу и попробовать решить ее самостоятельно. Если возникнут проблемы, то следует осознать, в чем они состоят, и сформулировать возникающие вопросы. Только после этого можно ознакомиться с изложенным ниже решением. Если данная рекомендация будет проигнорирована, то польза от знакомства с предложенным решением будет минимальна.*

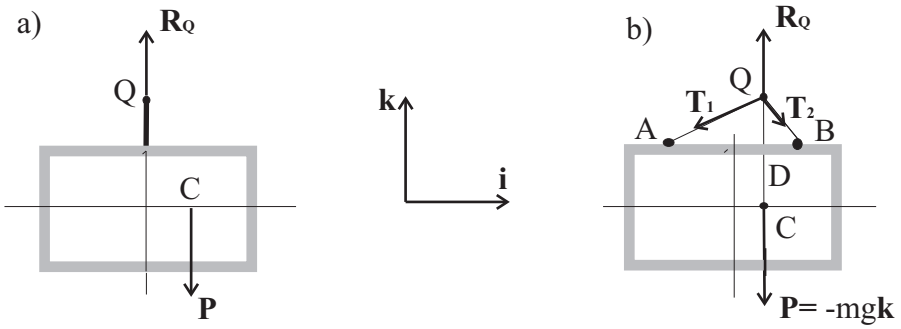

Рис. 1.4. Варианты подвеса картины

1.5.1. Первый вариант подвеса картины

На первый взгляд задача кажется чрезвычайно простой, и ее решение напрашивается само собой на основе здравого смысла. Сначала выбираем шнур, который должен выдерживать груз весом $P = mg$. Для большей надежности возьмем шнур, выдерживающий вес $2mg$. Шнур закрепим в середине верхней стороны картины, а другой его конец закрепим на стене в точке Q. Дело кончено. Картина повешена. Но почти наверняка результат нам не понравится, а картина будет висеть косо. Почему? Дело в том, что в силу разных причин центр тяжести картины C не будет расположен в центре картины, но будет несколько смещен в сторону — см. рис. 1.4a.

Составим уравнения статики для этого случая. Чтобы составить уравнения статики, нужно, прежде всего, освободиться от связей, а их действие заменить силами. В данном случае сила реакции $\mathbf{R}_Q$ возникает в точке закрепления Q на стене. Таким образом, на картину действует ее вес $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ есть орт вертикали, и реакция $\mathbf{R}_Q$. Теперь мы можем составить уравнения статики. Равенство нулю суммы всех сил, действующих на картину, дает уравнение

$$\mathbf{R}_Q + \mathbf{P} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}_Q = mg\mathbf{k}. \tag{1.5.1}$$

В дополнение к этому равенству мы должны составить уравнение моментов. Момент будем вычислять относительно точки Q. Тогда момент реакции $\mathbf{R}_Q$ равен нулю, а момент силы веса $\mathbf{P}$ равен

$$\mathbf{M}^Q = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = -mg\mathbf{r} \times \mathbf{k}, \tag{1.5.2}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий из точки Q в точку C. Для равновесия картины необходимо, чтобы момент (1.5.2) равнялся бы нулю.

$$-mg\mathbf{r} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \lambda\mathbf{k}, \tag{1.5.3}$$

где λ — произвольный скаляр. Отсюда следует, что центр тяжести C должен быть расположен точно на вертикали, проходящей через точку Q. На рис. 1.4a

это не так. Следовательно, в этом положении картина не будет находиться в равновесии. Ее центр тяжести опустится, а картина повернется так, чтобы точка C находилась точно под точкой Q. В результате, картина будет висеть косо. Этого можно избежать, если точку закрепления шнура на раме картины выбрать точно над центром тяжести. Практически это очень трудно, ибо точное положение центра тяжести нам заранее не известно.

1.5.2. Второй вариант подвеса картины

Лучше выбрать другой вариант подвеса картины — см. рис. 1.4b. Выберем на верхней стороне картины две точки A и B и концы шнура закрепим в этих точках. Ясно, что длина шнура должна быть больше, чем расстояние между точками A и B. Далее нужно подвесить картину так, чтобы она висела горизонтально. Этого нетрудно добиться практически. При этом точка подвеса Q окажется точно над центром тяжести. Казалось бы, задача решена. При этом условия статики, записанные для картины вместе со шнуром, дают

$$\mathbf{R}_{\mathrm{Q}} + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}} = -|\mathrm{QC}|\mathbf{k} \times (-\mathfrak{m}g\mathbf{k}) = \mathbf{0}.$$

Уравнение моментов выполнено тождественно, а уравнение сил позволяет найти реакцию

$$\mathbf{R}_{\mathrm{Q}} = -\mathbf{P} = \mathfrak{m}g\mathbf{k}.$$

Осталось решить небольшую проблему: как выбрать длину шнура. Ясно, что она должна быть больше, чем расстояние между точками A и B. Но насколько больше? Неискушенный в механике человек подумает, что это неважно: достаточно, чтобы длина шнура позволяла зацепить его за крюк. Вопрос о прочности шнура, вероятно, даже не придет ему в голову, поскольку шнур выбран так, что он выдерживает удвоенный вес картины. В результате такой человек совершит серьезную ошибку: шнур может разорваться.

Для обоснованного ответа на вопрос о прочности шнура необходимо вычислить силу натяжения в шнуре. Иными словами, необходимо найти силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, возникающие в шнуре — см. рис. 1.4b. До сих пор они не фигурировали в наших рассмотрениях. Это естественно, поскольку мы рассматривали тело, состоящее из картины и шнура. Для такого тела силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ были внутренними, в то время как в уравнения статики входят только внешние силы. Чтобы ввести эти силы в рассмотрение, мысленно отделим шнур от картины и рассмотрим два тела: шнур и картину в отдельности. При этом шнур рассматривается как бы замороженным в состоянии равновесия. Получили ситуацию, изображенную на рис. 1.5. На рис. 1.5a изображен шнур с действующими на него силами $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, которые моделируют воздействие картины на шнур. Кроме того, на

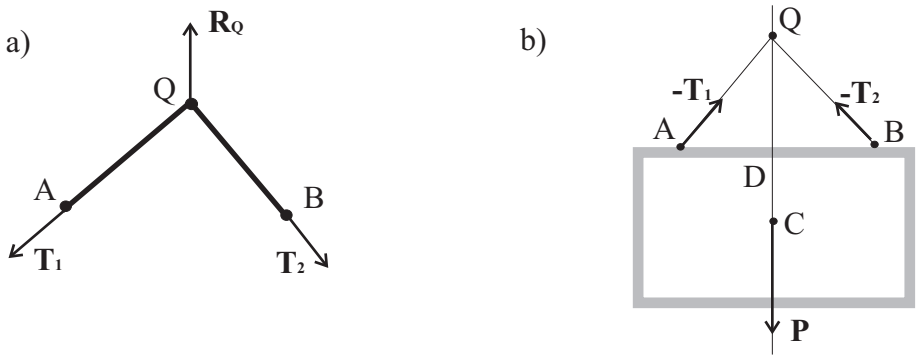

Рис. 1.5. Определение усилий в шнуре

шнур действует сила $\mathbf{R}_Q$, моделирующая воздействие крюка на шнур. На рис. 1.5b изображена картина, на которую действует сила веса $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}$ и силы $(-\mathbf{T}_1)$ и $(-\mathbf{T}_2)$, моделирующие воздействие шнура на картину. Знаки минус у этих векторов появились в силу третьего закона Ньютона: если картина действует на шнур силами $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, то шнур действует на картину силами $-\mathbf{T}_1$ и $-\mathbf{T}_2$. И шнур, и картина находятся в равновесии. Поэтому для них справедливы уравнения статики. Прежде, чем писать уравнения равновесия, заметим, что силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ направлены вдоль шнура и растягивают его. Это означает, что

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\lambda}{|QA|}\overrightarrow{QA}, \qquad \mathbf{T}_2 = \frac{\mu}{|QB|}\overrightarrow{QB}, \tag{1.5.4}$$

где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ суть силы натяжения шнура на участках QA и QB соответственно.

Уравнения статики для шнура, как это видно из рис. 1.5a, имеют вид

$$\mathbf{R}_Q + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{M}^Q \equiv \mathbf{0}. \tag{1.5.5}$$

Уравнения статики для картины (рис. 1.5b) имеют вид

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{T}_1) + (-\mathbf{T}_2) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{M}^C = \overrightarrow{CA} \times (-\mathbf{T}_1) + \overrightarrow{CB} \times (\mathbf{T}_2) = \mathbf{0}. \tag{1.5.6}$$

Здесь следует обратить внимание, что все силы и моменты всегда складываются. Знаки минус возникли только потому, что силы, действующие на картину, были обозначены через $(-\mathbf{T}_1)$ $(-\mathbf{T}_2)$. Если бы мы обозначили их без знаков минус, то минусы в силу 3–го закона Ньютона появились бы в уравнениях (1.5.5). Итак, мы имеем три неизвестных вектора $\mathbf{R}_Q$, $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ и три уравнения статики (1.5.5)–(1.5.6) для них. Кроме того, следует учитывать соотношения (1.5.4). Из (1.5.5) и (1.5.6) немедленно следует, что

$$\mathbf{R}_Q = -\mathbf{P} = mg\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_1 = -mg\mathbf{k} - \mathbf{T}_2. \tag{1.5.7}$$

Второе из этих равенств с учетом (1.5.4) принимает вид

$$\frac{\lambda}{|QA|}\overrightarrow{QA} = -mg\mathbf{k} - \frac{\mu}{|QB|}\overrightarrow{QB}. \tag{1.5.8}$$

У нас осталось неиспользованным уравнение моментов, т.е. второе уравнение системы (1.5.6). С учетом второго уравнения (1.5.7) оно может быть представлено в виде

$$\overrightarrow{CA} \times mg\mathbf{k} + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \times \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$$

или с учетом (1.5.4)

$$\overrightarrow{CA} \times mg\mathbf{k} + \frac{\mu}{|QB|}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}. \tag{1.5.9}$$

Получили векторное уравнение. Вообще говоря, векторное уравнение эквивалентно трем скалярным. Однако уравнение (1.5.9), как мы сейчас убедимся, эквивалентно всего одному скалярному уравнению, поскольку проекция (1.5.9) на любой вектор, лежащей в плоскости чертежа, дает тождество типа $0 = 0$. Чтобы преобразовать уравнение (1.5.9) к скалярной форме, нужно немного позаниматься геометрией. Имеем очевидные равенства

$$\overrightarrow{CA} = |CD|\mathbf{k} - |AD|\mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{CB} = |CD|\mathbf{k} + |DB|\mathbf{i},$$

$$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = -|AB|\mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{QB} = |DB|\mathbf{i} - |QD|\mathbf{k}.$$

Подставляя эти соотношения в (1.5.9), приходим к равенству

$$\left(\mu|QD|\frac{|AB|}{|QB|} - mg|AD|\right)\mathbf{i} \times \mathbf{k} = 0.$$

Здесь уже отчетливо видно, что (1.5.9) эквивалентно одному скалярному уравнению, из которого находим μ

$$\mu = \frac{|AD| \cdot |QB|}{|AB| \cdot |QD|}mg. \tag{1.5.10}$$

Проецируя уравнение (1.5.8) на орт $\mathbf{i}$, получаем

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{|QA| \cdot |DB|}{|AD| \cdot |QB|}. \tag{1.5.11}$$

Выражения (1.5.10) и (1.5.11) позволяют полностью проанализировать ситуацию. Введем обозначения

$$|QD| = h, \qquad |AB| = 2L, \qquad |AD| = L + x, \qquad |DB| = L - x,$$

$$|QB| = \sqrt{h^2 + (L - x)^2}, \qquad |QA| = \sqrt{h^2 + (L + x)^2}.$$

В этих обозначениях выражения (1.5.10) и (1.5.11) принимают вид

$$\mu = \frac{(L + x)\sqrt{h^2 + (L - x)^2}}{Lh} \frac{mg}{2}, \tag{1.5.12}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{1 + h^2/(L + x)^2}{1 + h^2/(L - x)^2}} = \begin{cases} > 1, & x > 0 \\ = 1, & x = 0 \\ < 1, & x < 0. \end{cases} \tag{1.5.13}$$

Здесь x — смещение центра тяжести картины по горизонтали от ее геометрического центра, h — стрела подъема шнура. Длина шнура l связана с введенными параметрами следующей формулой

$$l = |QA| + |QB| = \sqrt{h^2 + (L + x)^2} + \sqrt{h^2 + (L - x)^2}. \tag{1.5.14}$$

Из формул (1.5.13) видим, что натяжение больше в более длинной части шнура. Из формулы (1.5.12) видим, что натяжение зависит от длины шнура. Если $l \to 2L$, то из (1.5.14) следует, что $h \to 0$. При этом из (1.5.12) видим, что $\mu \to \infty$, т.е. натяжение в шнуре стремится к бесконечности при любом сколь угодно малом весе картины. Поэтому шнур просто разорвется. Изучающему полезно внимательно проанализировать выражения (1.5.12) и (1.5.13), в том числе, и с помощью компьютера. При этом удобно перейти к безмерным величинам

$$\mu_* = \frac{\mu}{mg}, \qquad \xi = \frac{x}{L}, \qquad \eta = \frac{h}{L}.$$

В этих обозначениях (1.5.12) принимает вид

$$\mu_* = \frac{(1 + \xi)\sqrt{\eta^2 + (1 - \xi)^2}}{2\eta}. \tag{1.5.15}$$

Ограничимся сейчас случаем $\xi = 0$, т.е. случаем, когда центр тяжести расположен в геометрическом центре картины.

Тогда

$$\mu_* = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{2\eta}. \tag{1.5.16}$$

Видим, что с ростом η безразмерное усилие μ_* монотонно убывает от значения $(+\infty)$ при $\eta = 0$ до $0,5$ при $\eta \to \infty$. Допустим теперь, что мы хотим, чтобы натяжение не превышало значения $\mu \leq 2mg$ или $\mu_* \leq 2$.

Полагая в (1.5.16) $\mu_* = 2$, получаем

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{\sqrt{15}}.$$

Следовательно, длина нити, согласно (1.5.14), должна удовлетворять неравенству

$$l \geq \frac{8L}{\sqrt{15}} = 2,066L. \tag{1.5.17}$$

Если мы хотим, чтобы усилие в шнуре не превосходило значения $\mu \leq mg$, то неравенство (1.5.17) заменяется на более сильное

$$l \geq \frac{4L}{\sqrt{3}} = 2,31L. \tag{1.5.18}$$

Если шнур выбран так, что он выдерживает нагрузку $2mg$, то при выполнении неравенства (1.5.18) можно быть уверенным, что картина не рухнет вниз.

Упражнение. Как правильно установить навесной шкаф?

Практически каждому приходилось сталкиваться с проблемой установки на стене навесного кухонного шкафа или навесной книжной полки. В заполненном состоянии это довольно тяжелые вещи. Если они будут недостаточно прочно закреплены на стене, то весьма нежелательные последствия легко предсказуемы. Обычная схема закрепления шкафа состоит в следующем. Шкаф подвешивается на петлях с помощью двух шурупов, ввинчиваемых в дюбели, которые, в свою очередь, вставляются в отверстия в стене. Шурупы должны быть подобраны так, чтобы выдержать вес заполненного шкафа. Часто встречающаяся ошибка заключается в следующем. После того, как шурупы ввинчены в стену, к ним подвешивается соответствующий груз. Если шурупы выдерживают заданный вес, то считается, что все в порядке и можно вешать шкаф. В результате возможность разбить всю посуду и вдобавок сломать сам шкаф оказывается весьма и весьма вероятной. Дело в том, что подвешенный груз создает только перерезывающую (поперечную) нагрузку на шуруп. Подвешенный шкаф будет создавать не только поперечную, но и продольную силу, действующую на шуруп. И эта сила, действующая вдоль оси шурупа, может просто вытянуть шуруп вместе с дюбелем из стены, и шкаф рухнет вниз. Поэтому испытания нужно проводить не только на срез, но и на вытягивания шурупа из стены. А для этого необходимо иметь представление о величине продольной силы, создаваемой конкретным шкафом. Именно это и является основной целью предлагаемого ниже упражнения.

Пусть дан навесной кухонный шкаф с размерами: высота — 70см., ширина — 80см., глубина — 33см. Шкаф закрепляется на вертикальной стене с помощью двух шурупов — см. рис. **??**.

Примем, что масса шкафа, заполненного посудой, равна 80кг. Таким образом, вес шкафа равен $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$. *Конечно, это многовато. Но лучше иметь запас прочности. Примем также, что центр масс* C *находится на оси, проходящей через геометрический центр лицевой плоскости шкафа, и расположен*

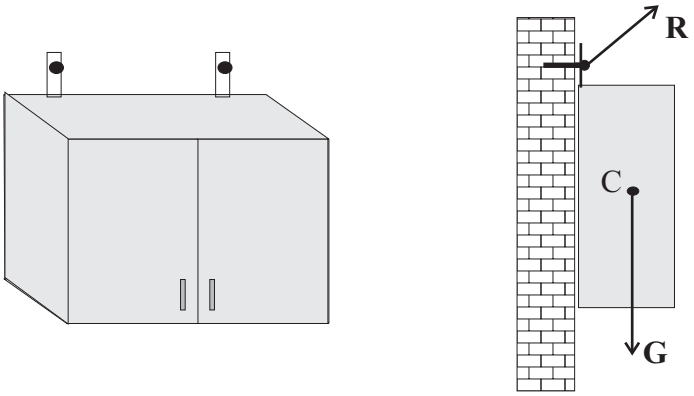

Рис. 1.6. Навесной кухонный шкаф

на расстоянии 25 см от стены. Вычислить силу, действующую на каждый шуруп. Особое внимание обратить на составляющую силы, которая вытягивает шуруп из стены.

1.6. Иллюстративные задачи

Задача 1: шарнирно опертая балка, нагруженная силой. Рассмотрим задачу, изображенную на рис. 1.7.

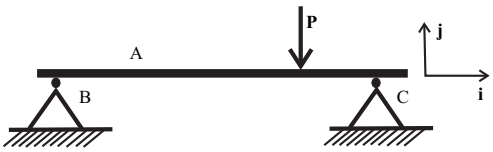

Рис. 1.7. Нагружение балки силой

В качестве тела $\mathcal{A}$ примем саму рассматриваемую балку. Левую опору, закрепленную от смещений, примем за тело $\mathcal{B}$. Эта опора препятствует смещениям балки, но не препятствует поворотам балки вокруг точки соединения балки с опорой. Правую опору балки примем за тело $\mathcal{C}$. Эта опора препятствует вертикальным смещениям правого торца балки, но не препятствует горизонтальным смещениям балки и поворотам балки вокруг точки соединения правого конца балки с правой опорой. Наконец, в качестве тела $\mathcal{P}$ будем считать некое устройство, воздействие которого на тело $\mathcal{A}$ сводится к силе $\mathbf{P}$. Запишем первый закон статики

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{e}}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{P}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) - \mathrm{P}\mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (1.6.1)$$

Поскольку правая опора $\mathcal{C}$ не препятствует смещению балки вдоль горизонтальной оси, то имеем ограничение

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \mathrm{F}_{\mathrm{C}}\mathbf{j}. \quad (1.6.2)$$

Уравнение (1.6.1) содержит два неизвестных вектора. Поэтому необходимо использовать дополнительное уравнение, роль которого исполняет второй

закон статики.

$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}) = \mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C}) + \mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{P}) = \mathbf{0}. \tag{1.6.3}$$

В качестве опорной точки Q выберем точку контакта левой опоры с балкой. С этой же точкой совместим начало в системе отсчета. Тогда имеем $\mathbf{R}_Q = \mathbf{0}$. Моменты необходимо вычислять по формуле (1.1.3). В рассматриваемой задаче для каждого из моментов[1], входящих в (1.6.3), точки приведения можно выбрать так, чтобы собственно моменты обращались в нулевые. Для момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ точку приведения выбираем на левой опоре. Для момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ точку приведения выбираем на правой опоре. Наконец, для момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{P})$ точку приведения выбираем в точке касания устройства, создающего силу $\mathbf{P}$, с балкой. В таком случае имеем выражения

$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = l\,\mathbf{i}\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = l\,F_C\,\mathbf{i}\times\mathbf{j},$$
$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{P}) = a\mathbf{i}\times(-P\,\mathbf{j}), \tag{1.6.4}$$

где l — расстояние между опорами, a — расстояние от левой опоры до “точки приложения” силы $\mathbf{P}$.

При вычислении момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ использовано уравнение (1.6.2). Подставляя выражения (1.6.4) в уравнение (1.6.3), получаем

$$l\,F_C = a\,P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = -\frac{l-a}{l}\,P\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \frac{a}{l}\,P\,\mathbf{j}.$$

Задача 2: балка, опирающаяся на гладкую опору.

Рассмотрим конструкцию, изображенную на рис. 1.8. Левый конец однородной балки длиной $2l$ шарнирно закреплен в точке O, которую совместим с началом в системе отсчета. Эту же точку O выберем в качестве опорной точки, т.е. $\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}_O = \mathbf{0}$. Балку считаем телом $\mathcal{A}$. Опору считаем телом $\mathcal{O}$. Угловую стенку, отстоящую от точки O на расстоянии a и имеющую высоту h, считаем телом $\mathcal{B}$. При этом выполнено неравенство $a^2 + h^2 < 4\,l^2$. Наконец, Землю обозначаем телом $\mathcal{E}$. Балку считаем идеально гладкой, т.е. трение между балкой и угловой стенкой пренебрегаем. Выпишем первый закон статики и воспользуемся аксиомой аддитивности

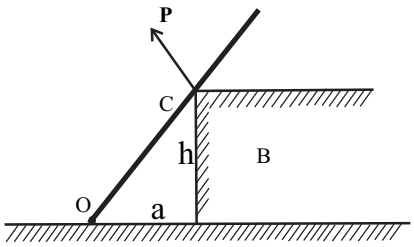

Рис. 1.8. Балка на гладкой опоре

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{O}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{O}) + \mathbf{P} - m g\,\mathbf{j} = \mathbf{0}, \tag{1.6.5}$$

где m есть масса балки. Пусть единичный вектор $\mathbf{e}$ направлен вдоль балки.

[1] За исключением момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e})$.

Поскольку балка идеально гладкая, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{P}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathsf{P}\,(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{e},$$

где вектор $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{e}$ есть вектор единичной нормали к балке, а P есть величина реакции угловой стенки.

Теперь первый закон статики (1.6.5) дает

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{O}) = m\mathrm{g}\,\mathbf{j} - \mathsf{P}\,(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{e}. \tag{1.6.6}$$

Осталось определить величину реакции P. С этой целью выпишем второй закон статики

$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{O}) + \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = \mathbf{0}. \tag{1.6.7}$$

Чтобы вычислить моменты, входящие в (1.6.7), нужно воспользоваться определением момента (1.1.3). Напомним, что точку приведения для каждого из этих моментов можно выбирать произвольно. Более того, в данной задаче точки приведения можно выбрать так, чтобы собственно моменты обращались в нулевые. Легко получаются выражения

$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{O}) = \mathbf{R}_{\mathrm{O}}\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{O}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{E}) = -m\mathrm{g}l\,\mathbf{e}\times\mathbf{j} = -\frac{m\mathrm{g}a l}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathsf{P}\sqrt{a^2+h^2}\mathbf{e}\times[(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{e}] = \mathsf{P}\sqrt{a^2+h^2}\;\mathbf{k},$$

где l — расстояние от точки O до центра масс C балки, $\sqrt{a^2+h^2}$ — расстояние от точки O до точки контакта балки с угловой стенкой, $\mathbf{k} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}$.

Подставляя эти равенства в (1.6.7), получаем уравнения для нахождения реакции P

$$\mathsf{P} = \frac{m\mathrm{g}a l}{a^2+h^2}.$$

Выражение (1.6.6) принимает вид

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{O}) = m\mathrm{g}\left[\left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2+h^2}}\frac{a^2}{a^2+h^2}\right)\mathbf{j} + \frac{l}{\sqrt{a^2+h^2}}\frac{ah}{a^2+h^2}\mathbf{i}\right]. \tag{1.6.8}$$

***Упражнение**: проанализировать выражение для реакции в опоре (1.6.8) и объяснить почему вертикальная составляющая реакции меняет знак при некоторых значениях параметров.*

Задача 3: консольная балка, нагруженная на конце.

Консольные балки часто встречаются на практике, поэтому умение вычислять силы и моменты в такого рода ситуациях оказывается необходимым. Рассмотрим простую задачу, представленную на рис. 1.9. В качестве тела $\mathcal{A}$

выбираем саму балку. В качестве тела $\mathcal{B}$ выбираем заделку на левом конце балки. Наконец, в качестве тела $\mathcal{C}$ выбираем подвешенный на левом торце балки груз на нити. Балку считаем невесомой. Первый закон статики в данном случае принимает вид

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) - \mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathbf{j}. \tag{1.6.9}$$

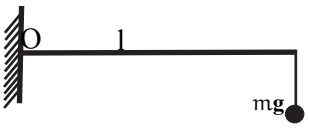

Рис. 1.9. Консольная балка

Таким образом, реакция в заделке определена. Чтобы определить момент, действующий в заделке, необходимо воспользоваться вторым законом статики

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \mathbf{0}. \tag{1.6.10}$$

Опорную точку Q выберем на левом торце балки и там же поместим начало в системе отсчета, т.е. $\mathbf{R}_{\mathrm{Q}} = \mathbf{0}$. Тогда получим

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{R}_{\mathrm{P}} \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

Нетрудно убедиться, что при любом выборе точки приведения P собственно момент $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отличен от нуля. Выберем точку приведения так, что $\mathbf{R}_{\mathrm{P}} = \mathbf{R}_{\mathrm{Q}} = \mathbf{0}$. Тогда имеем

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{L}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

Для момента $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ точку приведения выберем на правом торце балки. Тогда собственно момент $\mathbf{L}^{\mathrm{C}}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ будет равняться нулю. Получаем

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \mathbf{R}_{\mathrm{C}} \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \mathfrak{l}\mathbf{i} \times -(\mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathbf{j}) = -\mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathfrak{l}\,\mathbf{i} \times \mathbf{j}.$$

Используя последние два равенства и второй закон статики (1.6.10), получаем моментную реакцию в заделке

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathfrak{l}\,\mathbf{i} \times \mathbf{j}. \tag{1.6.11}$$

Задача решена. При этом видим, что воздействие заделки на балку, т.е. реакция заделки, выражается как силой, так моментом. Заметим, однако, что здесь момент выражается как момент силы, т.е. понятие, существовавшее в ньютоновой механике.

Задача 4: нагруженный элемент фермы.

Фермами называют стержневые системы, состоящие из большого числа прямолинейных стержней. Фермы часто встречаются на практике. На рис. 1.10 представлен типичный элемент фермы, состоящий всего из двух стержней, нагруженный горизонтальной силой $\mathrm{Q}\mathbf{i}$, приложенной в точке $\mathcal{O}$. Здесь мы пользуемся упрощенной терминологией, которая часто оказывается удобной.

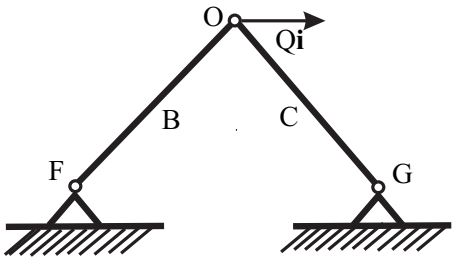

Рис. 1.10. Элемент фермы

Точнее было бы выразиться следующим образом. Воздействие на элемент фермы является чисто силовым, если в качестве точки приведения выбрать точку $\mathcal{O}$. Решение этой простой задачи включает использование полезного приема, когда уравнения статики приходится записывать не только для всего тела, но и для тел, составляющих рассматриваемое тело. В качестве тела $\mathcal{A}$ выбираем конструкцию из соединенных между собой стержней $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, длина которых одинакова и равна l. Шарнирное соединение $\mathcal{O}$ позволяет стержням $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ свободно поворачиваться относительно друг друга. Стержни шарнирно закреплены в точках $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, расстояние между которыми равно a. Начало системы отсчета разместим в точке $\mathcal{F}$. При вычислении моментов опорную точку выбираем также в точке $\mathcal{F}$ и в дальнейшем это обстоятельство не отмечаем. Кроме того, примем обозначение $\mathbf{R}_{\mathcal{O}} = l\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ есть единичный вектор, направленный вдоль левого стержня. Выпишем уравнения статики для тела $\mathcal{A}$, которые имеют вид

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) + Q\,\mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{1.6.12}$$

$$\mathbf{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = a\mathbf{i} \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) + l\,\mathbf{e} \times Q\,\mathbf{i} = \mathbf{i} \times (a\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) - lQ\,\mathbf{e}) = \mathbf{0}. \tag{1.6.13}$$

Получили два векторных уравнения (1.6.12) и (1.6.13) для двух неизвестных векторов $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ и $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G})$. Тем не менее, этих уравнений недостаточно, ибо уравнение (1.6.13) эквивалентно всего одному скалярному уравнению и не позволяет найти проекцию $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ на вектор $\mathbf{i}$. Однако уравнение (1.6.13) позволяет написать равенство

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) = \frac{lQ}{a}\,\mathbf{e} + \mu\,\mathbf{i},$$

где μ есть произвольный скаляр.

Чтобы полностью решить задачу, необходимо разделить все тело на отдельные элементы и уже для них выписать уравнения статики. Подобный прием встречается очень часто. Например, для деформируемых тел приходится записывать уравнения статики для бесконечно малых частей тела.

В данной задаче достаточно записать уравнения статики для стержня $\mathcal{B}$. При этом будем считать, что сила $Q\,\mathbf{i}$ приложена к стержню $\mathcal{C}$ бесконечно близко к точке $\mathcal{O}$.

Упражнение: *убедиться, что решение задачи не изменится, если силу* $Q\,\mathbf{i}$ *считать приложенной к кончику стержня* $\mathcal{B}$ *или к шарниру* $\mathcal{O}$.

Уравнения статики для стержня $\mathcal{B}$ имеют вид

$$\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{F}) + \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathbf{0}, \quad l\mathbf{e} \times \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{F}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \lambda\mathbf{e}.$$

С учетом вышеприведенных равенств уравнение (1.6.12) принимает вид

$$\left(\lambda + \frac{lQ}{a}\right)\mathbf{e} + (\lambda + Q)\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{lQ}{a}, \quad \mu = -Q.$$

Используя эти формулы окончательно получаем

$$\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{F}) = -\frac{lQ}{a}\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{G}) = \frac{lQ}{a}\,\mathbf{m}, \quad l\,\mathbf{m} = l\,\mathbf{e} - a\,\mathbf{i}, \tag{1.6.14}$$

где $\mathbf{m}$ есть единичный вектор, направленный вдоль стержня $\mathcal{C}$ к точке $\mathcal{O}$.

Нетрудно убедиться, что усилия в обоих стержнях направлены вдоль стержней. Собственно, именно это обстоятельство и является главным достоинством ферм, поскольку стержни хорошо работают на растяжение-сжатие. Проиллюстрируем сказанное на примере стержня $\mathcal{B}$.

Прежде всего, необходимо обратить внимание на то, что в уравнения статики для всего тела $\mathcal{A}$ входят только внешние воздействия, т.е. сила $Q\,\mathbf{i}$, а также реакции опор $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{F})$ и $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{G})$. Знание реакций, конечно, необходимо, но сами по себе они не позволяют судить о силах, передаваемых каждым из стержней. Чтобы найти силы, передаваемые стержнями, или, что то же самое, внутренние усилия в стержнях, будем поступать следующим образом. Мысленно разделим стержень $\mathcal{B}$ на две части $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ так, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$. Через s_1 обозначим расстояние от опоры $\mathcal{F}$ до конца стержня $\mathcal{B}_1$, т.е. s_1 — это длина стержня $\mathcal{B}_1$. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ моделирует силовое воздействие стержня $\mathcal{B}_2$ на стержень $\mathcal{B}_1$. Момент $\mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, вычисленный относительно опорной точки $\mathcal{F}$, моделирует моментное воздействие стержня $\mathcal{B}_2$ на стержень $\mathcal{B}_1$. Он вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = s_1\mathbf{e} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) + \mathbf{L}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2),$$

где в качестве точки приведения выбрана точка $s_1\mathbf{e}$.

Выпишем уравнения статики для стержня $\mathcal{B}_1$

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1^e) = \mathbf{F}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) + \mathbf{F}(\mathcal{B}_1,\mathcal{F}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^e) = \mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{F}) + \mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = s_1\mathbf{e} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) + \mathbf{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathbf{0}.$$

Во втором из этих равенств учтено, что $\mathbf{M}^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{F}) = \mathbf{0}$, поскольку опора $\mathcal{F}$ не создает моментного воздействия на стержень $\mathcal{B}_1$. Решая эту систему с учетом равенств (1.6.14), получаем для внутренних воздействий в стержне $\mathcal{B}$ следующие выражения

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \frac{lQ}{a}\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathbf{0}.$$

Итак, стержень $\mathcal{B}$ передает только продольное усилие, т.е. усилие, направленное вдоль стержня, и не передает момента. Аналогичные рассуждения с тем же результатом могут быть применены к стержню $\mathcal{C}$. В идеале ферма должна быть спроектирована так, чтобы в ее элементах, т.е. стержнях, возникали бы только продольные усилия. К сожалению, при проектировании реальной фермы проведенные нами рассуждения недостаточны. В этом легко убедиться, если проанализировать полученные выше выражения для внутренних усилий и реакций в опорах. Действительно, из выражений (1.6.14) следует, что при сколь-угодно малой силе Q модули реакций в опорах стремятся к бесконечности при $a \to \varepsilon$, $0 < \varepsilon << 1$. Иными словами, в этом случае элемент фермы разрушится при приложении сколь-угодно малой нагрузки, что, разумеется, не соответствует реальности. Причина кажущегося парадокса выявляется только при более тщательном анализе, который выходит за рамки возможностей данной главы. При решении задачи мы сделали единственное допущение. А именно, мы считали что стержни деформируются столь незначительно, что их можно считать абсолютно твердыми. Остальные рассуждения были строгими. Результат оказался абсурдным при малых a. В реальных фермах этот случай не встречается, но он дает основания для сомнений, которые при расчете ответственных конструкций, например мостов, недопустимы. Строгая постановка задачи включает в себя учет деформируемости стержней, причем все рассуждения необходимо вести в нелинейной постановке. Полученная таким образом задача допускает, как минимум, два решения, одно из которых практически совпадает с найденным выше. Далее необходимо исследовать устойчивость полученных решений. Решение, найденное выше, будет неустойчивым при малых значениях параметра a. Критическое значение a может быть найдено только в результате строгого анализа. Отметим, что при анализе этой задачи стандартные программы компьютерного моделирования окажутся беспомощными и разочаруют тех, кто возлагает слишком большие надежды на компьютер. Последний, разумеется, поможет в расчетах, но предварительный аналитический анализ задачи окажется необходимым элементом всего исследования.

Задача 5: элемент стержневой системы. Немного усложним рассмот-

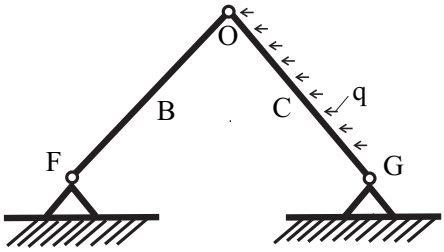

Рис. 1.11. Элемент фермы

ренную выше задачу и нагрузим правый стержень распределенной нагрузкой — см. рис. 1.11. Решение этой задачи почти не отличается от рассмотренной выше. В качестве тела $\mathcal{A}$, как и выше выбираем конструкцию из соединенных между собой стержней $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Кроме того, сохраняем все принятые выше обозначения. Стержень $\mathcal{C}$ нагружен постоянной горизонтальной нагрузкой интенсивности q. Начало системы отсчета разместим в точке $\mathcal{F}$. При вычислении моментов опорную точку выбираем в точке $\mathcal{F}$. Кроме того, примем обозначение $\mathbf{R}_O = l\mathbf{e} = a\mathbf{i} + l\mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$ есть единичный вектор, направленный из точки $\mathcal{G}$ в точку $\mathcal{O}$.

Выпишем уравнения статики для тела $\mathcal{A}$.

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) - ql\mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{1.6.15}$$

$$\mathbf{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = a\mathbf{i} \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) - \left(a\,\mathbf{i} + \frac{l}{2}\mathbf{m}\right) \times (ql)\mathbf{i} = \mathbf{i} \times \left[a\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) + \frac{ql^2}{2}\mathbf{m}\right] = \mathbf{0}.$$

Последнее равенство переписываем в виде

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) = -\frac{ql^2}{2a}\mathbf{m} + \mu\,\mathbf{i}, \tag{1.6.16}$$

где μ — произвольный скаляр.

Получили два векторных уравнения (1.6.15) и (1.6.16) для двух неизвестных векторов $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ и $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{G})$. Чтобы полностью решить задачу, достаточно дополнительно записать уравнения статики для стержня $\mathcal{B}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbf{0}, \quad l\mathbf{e} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) = \lambda\mathbf{e}.$$

Используя последнее выражение и равенство (1.6.16), уравнение (1.6.15) переписываем в виде

$$\left(\frac{\lambda\,a}{l} + \mu - ql\right)\mathbf{i} + \left(\lambda - \frac{ql^2}{2a}\right)\mathbf{m} = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{ql^2}{2a}, \quad \mu = \frac{ql}{2}.$$

Таким образом, для реакций в опорах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ получаем выражения

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \frac{ql^2}{2a}\mathbf{e}, \quad \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{G}) = -\frac{ql^2}{2a}\mathbf{m} + \frac{ql}{2}\mathbf{i}. \tag{1.6.17}$$

В отличие от предыдущей задачи здесь усилие в правом стержне уже не является постоянным. Чтобы найти закон изменения усилия в стержне $\mathcal{C}$, следует воспользоваться следующим приемом. Положение каждой точки стержня $\mathcal{C}$ будем задавать вектором

$$\mathbf{R}(s) = a\,\mathbf{i} + s\,\mathbf{m}, \quad 0 \le s \le l, \tag{1.6.18}$$

где s есть расстояние, отсчитываемое от точки $\mathcal{G}$ до рассматриваемой точки стержня. В качестве тела $\mathcal{C}_1$ рассмотрим часть стержня $\mathcal{C}$, заключенную между точкой $\mathcal{G}$ и точкой с координатой s. Оставшуюся часть стержня $\mathcal{C}$ обозначим символом $\mathcal{C}_2$. Таким образом, имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$. Выпишем два закона статики для тела $\mathcal{C}_1$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_1^e) = \mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{G}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) - qs\mathbf{i} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}^{\mathcal{G}}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_1^e) = s\mathbf{m}\times\mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) + \mathbf{L}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) - (s/2)\mathbf{m}\times(qs)\mathbf{i} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ и $\mathbf{L}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ суть сила и момент, с которыми тело $\mathcal{C}_2$ действует на тело $\mathcal{C}_1$, т.е. это сила и момент, действующие в сечении стержня $\mathcal{C}$ с координатой s.

Решая последние два уравнения, находим

$$\mathbf{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = q\left(s - \frac{l}{2}\right)\mathbf{i} + \frac{ql^2}{2a}\mathbf{m}, \quad \mathbf{L}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = -\frac{qs(s-l)}{2}\mathbf{m}\times\mathbf{i}.$$

Видим, что, в отличие от предыдущей задачи, стержень $\mathcal{C}$ передает не только силу, но и момент, причем сила не направлена вдоль стержня. Стержневые системы, в которых стержни работают не только на растяжение-сжатие, но и на изгиб, не принято называть фермами.

Читателю рекомендуется самостоятельно воспроизвести все рассуждения двух последних задач и тщательно обдумать возникающие в них различия.

1.7. Равновесие нерастяжимой нити с закрепленными концами

До сих пор законы статики применялись к абсолютно твердым телам. В этом пункте мы рассмотрим тела иного типа, которые могут менять свою форму при приложении нагрузки. Основное внимание здесь следует обратить на тот факт, что сами по себе законы статики неизменны, хотя форма

их реализации будет существенно другой. Ниже будет рассмотрена задача о равновесии гибкой нерастяжимой нити с закрепленными концами. Эта задача интересна во многих отношениях. Во-первых, она важна с практической точки. Например, известна проблема прочности проводов линий высоковольтных передач. В зимних условиях эти провода нередко покрываются льдом. Кроме того, на них часто действует ветровая нагрузка. В результате провода могут разорваться, что ведет к большим материальным затратам на ремонт. Можно привести много других примеров. Во-вторых, она важна с исторической и научной точки зрения. Впервые задача о равновесии нерастяжимой нити была рассмотрена Якобом Бернулли в конце XVII века. Я. Бернулли показал (1691), что уравнения равновесия нити выражаются посредством обыкновенных дифференциальных уравнений. Это были первые дифференциальные уравнения с обыкновенными производными в истории науки. Можно достаточно убедительно показать, что именно в механике зарождались почти все разделы математики. Поэтому именно механика являлась и является поставщиком объектов и идей для математики, но не наоборот, как это многие "механики", к сожалению, думают. Последнее обстоятельство и явилось одной из главных причин стагнации фундаментальных основ механики в последние полтора столетия, ибо путь от математики — есть путь в никуда. Математика есть язык для выражения физических идей, которые сами по себе лежат далеко за пределами математики.

Вернемся, однако, к задаче о равновесии нерастяжимой нити.

Рассмотрим тонкую нить (канат), закрепленную своими концами (рис. 1.12). Длина нити равна l, а расстояние между опорами равно $a < l$. Нить нагружена собственным весом. Требуется найти силу натяжения в нити и форму, которую она приобретает под действием сил тяжести. Начало в системе отсчета и опорную точку выберем на левом конце нити. Форму нити будем определять заданием вектора $\mathbf{R}(s)$, где параметр $s : 0 \le s \le l$ есть расстояние, отсчитываемое вдоль нити, от левого конца нити. Вектор $\mathbf{R}(s)$ заранее неизвестен и подлежит определению. Введем вектор единичной касательной $\mathbf{t}$ к кривой $\mathbf{R}(s)$

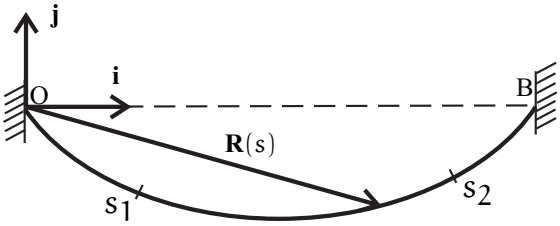

Рис. 1.12. Равновесная форма гибкой нити

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}, \quad |d\mathbf{R}| = ds \quad \Rightarrow \quad |t(s)| = 1. \tag{1.7.1}$$

Второе из уравнений (1.6.8) есть условие нерастяжимости нити. Нить будем считать однородной. Массу dm бесконечно малой части нити ds вычисляем по формуле $dm = \rho ds$, где $\rho = const$ называется погонной плотностью массы

(масса на единицу длины). В качестве тела $\mathcal{A}$ выберем часть нити, заключенную между точками s_1 и s_2 (рис. 1.12). На массу dm нити действует поле тяготения Земли, которое создает силу $\mathbf{F}(dm, \mathcal{E}) = dm\,\mathbf{g}$. Таким образом, полная сила, действующая на тело $\mathcal{A}$ со стороны Земли, вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) = \int_{(m)} \mathbf{F}(dm, \mathcal{E}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{g}\rho ds.$$

Силу, действующую на тело $\mathcal{A}$, со стороны нити, находящейся правее точки s_2, обозначим вектором $\mathbf{T}_{(t)}(s_2)$, где индекс (t) указывает, что вектор $\mathbf{T}_{(t)}(s_2)$ действует на площадку, ортогональную вектору единичной касательной $\mathbf{t}$, т.е. на площадку поперечного сечения нити. Этот вектор моделирует воздействие части нити, находящейся со стороны положительного направления $\mathbf{t}$. Так что индекс (t) несет смысловую нагрузку. Силу, действующую на тело $\mathcal{A}$, со стороны нити, находящейся левее точки s_1, обозначим вектором $\mathbf{T}_{(-t)}(s_1)$. Здесь индекс $(-t)$ указывает, что вектор $\mathbf{T}_{(-t)}(s_1)$ моделирует воздействие части нити, находящейся со стороны положительного направления вектора $(-\mathbf{t})$. Тогда первый закон статики можно записать в виде

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{g}\rho ds + \mathbf{T}_{(-t)}(s_1) + \mathbf{T}_{(t)}(s_2) = \mathbf{0}. \tag{1.7.2}$$

Равенство (1.7.2) следует немного преобразовать. Заметим, что оно справедливо при любом выборе точек s_1 и s_2. Поэтому сделаем в (1.7.2) предельный переход при $s_1 \to s+0$, $s_2 \to s-0$. Тогда интеграл в (1.7.2) устремится к нулю и первый закон статики принимает вид

$$\mathbf{T}_{(-t)}(s) + \mathbf{T}_{(t)}(s) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_{(-t)}(s) = -\mathbf{T}_{(t)}(s). \tag{1.7.3}$$

Это аналог третьего закона Ньютона о действии и противодействии. Введем обозначения

$$\mathbf{T}_{(t)}(s) \equiv \mathbf{T}(s), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_{(-t)}(s) = -\mathbf{T}(s).$$

В принятых обозначениях можем записать

$$\mathbf{T}_{(-t)}(s_1) + \mathbf{T}_{(t)}(s_2) = \mathbf{T}(s_2) - \mathbf{T}(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} ds.$$

Теперь первый закон статики (1.7.2) принимает вид

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \rho\mathbf{g}\right] ds = \mathbf{0}. \tag{1.7.4}$$

***Упражнение**: доказать, что интеграл (1.7.4) обращается в нуль при произвольном выборе пределов интегрирования тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение обращается в нуль.*

Таким образом, имеем локальную форму первого закона статики

$$\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0}. \tag{1.7.5}$$

Это и есть уравнение, полученное Я. Бернулли в 1691 г., в других, разумеется, обозначениях. С той поры миновало три столетия. Современная механика обрела совершенно другое лицо. Но уравнение (1.7.5) осталось и останется в будущем неизменным. То же самое можно сказать о многих других фундаментальных уравнениях механики. Способность рациональной механики получать уравнения, справедливые во все времена, является ее уникальным достоинством. Более того, уравнение (1.7.5) было выведено для тонкой гибкой нити. Но область его применимости много шире. Например, оно справедливо для тонкой струи воды, для резинового растяжимого шнура, для тонкого стержня, сопротивляющегося изгибу и т.д. При выводе (1.7.5) использовался только первый закон статики, который имеет неограниченную область применимости.

В отличие от рассмотренных ранее задач, при равновесии деформируемых тел силы подчиняются не алгебраическим, а дифференциальным уравнениям. Поэтому здесь уже не подходит рассуждение, основанное на подсчете числа неизвестных и числа уравнений. Если число независимых уравнений совпадает с числом входящих в них неизвестных, то последние, как правило, могут быть найдены. В данном случае мы имеем одно векторное уравнение (1.7.5) для одного неизвестного вектора $\mathbf{T}(s)$. Тем не менее, определить этот вектор мы не можем. Действительно, интегрируя уравнение (1.7.5), получаем

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_0 - \rho\mathbf{g}\,s, \quad \mathbf{T}_0 \equiv \mathbf{T}(0). \tag{1.7.6}$$

Отсюда видим, что вектор натяжения в нити определился с точностью до произвольного постоянного вектора $\mathbf{T}_0$. Чтобы определить этот вектор, необходимо знать так называемые краевые условия, т.е. значение вектора $\mathbf{T}(s)$ при $s = 0$ или $s = l$. В данном случае мы не знаем ни того, ни другого. Поэтому первого закона статики нам не достаточно, чтобы полностью решить задачу. Как же тогда Я. Бернулли сумел решить задачу? Ведь второй закон статики ему не был известен. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда выдающиеся личности могут обходиться без законов, довольствуясь своей интуицией и здравым смыслом. Так и Я. Бернулли использовал факт, который ниже будет доказан на основе второго закона статики. Аналогична ситуация с третьим законом Ньютона. В настоящее время это доказанная теорема, а отнюдь не аксиома, как это было у Ньютона. Подробнее об этом будет сказано в другом месте.

Итак, обратимся ко второму закону статики. Окружение тела $\mathcal{A}$ состоит из трех тел: Земли, т.е. тела $\mathcal{E}$, нити правее точки s_2 и нити левее точки s_1. Само тело является объединением бесконечно малых частей с массой $dm = \rho ds$. Вычислим момент, действующий на эту малую часть нити

$$\mathbf{M}^O(dm, \mathcal{E}) = \mathbf{R}(s) \times \mathbf{g} dm = \mathbf{R}(s) \times \mathbf{g} \rho ds.$$

Собственно момент здесь равен нулю, поскольку поворот частицы с массой dm вокруг самой себя в поле тяготения не вызывает сопротивления. Полный момент, действующий на тело $\mathcal{A}$ со стороны Земли, вычисляется как сумма

$$\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{E}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{R}(s) \times \mathbf{g} \rho ds. \tag{1.7.7}$$

Вычислим момент, действующий на тело $\mathcal{A}$ со стороны нити, находящейся правее точки s_2. Он равен

$$\mathbf{R}(s_2) \times \mathbf{T}_{(t)}(s_2) \equiv \mathbf{R}(s_2) \times \mathbf{T}(s_2).$$

Здесь собственно момент также равен нулю, поскольку нить, находящаяся правее точки s_2, не сопротивляется повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг точки s_2. Подчеркнем, что это очевидное с интуитивной точки зрения обстоятельство нельзя доказать формальными методами. Аналогичное выражение мы имеем для момента, действующего на тело $\mathcal{A}$ со стороны нити, находящейся левее точки s_1

$$\mathbf{R}(s_1) \times \mathbf{T}_{(-t)}(s_1) = -\mathbf{R}(s_1) \times \mathbf{T}(s_1).$$

Суммируя последние два момента, получаем

$$\mathbf{R}(s_1) \times \mathbf{T}_{(-t)}(s_1) + \mathbf{R}(s_2) \times \mathbf{T}_{(t)}(s_2) = \mathbf{R}(s_2) \times \mathbf{T}(s_2) - \mathbf{R}(s_1) \times \mathbf{T}(s_1) = \\ = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} [\mathbf{R}(s) \times \mathbf{T}(s)] \, ds \tag{1.7.8}$$

Суммируя моменты (1.7.7) и (1.7.8), записываем второй закон статики в следующем виде

$$\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \int_{s_1}^{s_2} \left[\mathbf{R}(s) \times \left(\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \rho \, \mathbf{g} \right) + \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \times \mathbf{T}(s) \right] ds = \mathbf{0}. \tag{1.7.9}$$

Учитывая первый закон статики (1.7.5) и произвольность выбора пределов интегрирования в (1.7.9), получаем локальную форму второго закона статики

$$\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \times \mathbf{T}(s) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(s) = \lambda(s) \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}, \tag{1.7.10}$$

где величина $\lambda(s)$ есть произвольная скалярная функция.

Иными словами, вектор усилия в нити должен быть направлен по касательной к нити. Так требует второй закон статики и именно это принял Я. Бернулли из интуитивных представлений в качестве допущения. Тем самым, он выполнил второй закон статики, не подозревая его существования. При $\lambda(s) > 0$ сила в нити является растягивающей. При $\lambda(s) < 0$ сила в нити является сжимающей. Понятно, что нить не сопротивляется сжатию и может работать только на растяжение, т.е. нас интересуют только положительные значения $\lambda(s)$. Тем не менее, это условие заранее не принимается и будет установлено в ходе решения задачи. Подставляя (1.7.10) в (1.7.6), получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\lambda(s)\,\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} = \mathbf{T}_0 - \rho\mathbf{g}s; \qquad \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(l) = a\,\mathbf{i}. \tag{1.7.11}$$

Последние два условия называются краевыми условиями. Они фиксируют тот факт, что концы нити закреплены, т.е. их положения заданы. Прежде, чем приступить к решению уравнения (1.7.11), его удобно немного преобразовать и привести к безразмерному виду. В координатном виде уравнение (1.7.11) записывается в виде

$$\lambda(s)\,\frac{dX(s)}{ds} = P, \quad \lambda(s)\,\frac{dY(s)}{ds} = Q + \rho\,g\,s;$$

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}, \quad \mathbf{T}_0 = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}, \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{j}. \tag{1.7.12}$$

Для упрощения дальнейших выкладок воспользуемся очевидным условием симметрии (рис. 1.12). Видим, что функция Y, т.е. вертикальная составляющая вектора $\mathbf{R}$, достигает своего минимума при $s = l/2$. Поэтому производная от функции Y по переменной s должна обращаться в нуль при $s = l/2$. Записывая второе из уравнений (1.7.12) в точке $s = l/2$, находим постоянную $Q = -\rho\,g\,l/2$. Можно было бы не использовать соображения симметрии, результат получился бы тем же самым. Введем новые переменные

$$X = \frac{l}{2}x, \quad Y = \frac{l}{2}y, \quad \lambda = \frac{\rho g l}{2}\mu, \quad \xi = \frac{2s}{l} - 1, \quad P = \frac{\rho g l}{2}p. \tag{1.7.13}$$

В новых переменных система (1.7.12) принимает вид

$$\mu\frac{dx}{d\xi} = p, \quad \mu\frac{dy}{d\xi} = \xi, \quad \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = 1; \qquad -1 < \xi < 1. \tag{1.7.14}$$

Третье уравнение в системе (1.7.14) есть условие нерастяжимости нити (1.7.1). Возведем в квадраты первое и второе уравнения в системе (1.7.14) и

сложим результаты. При этом учтем третье уравнение в системе (1.7.14). Тогда получим

$$\mu^2 = p^2 + \xi^2 \quad \Rightarrow \quad \mu = \varepsilon\sqrt{p^2+\xi^2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{1.7.15}$$

Теперь система (1.7.14) переписывается в виде

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{p}{\varepsilon\sqrt{p^2+\xi^2}}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi}{\varepsilon\sqrt{p^2+\xi^2}}, \qquad -1 < \xi < 1. \tag{1.7.16}$$

К системе (1.7.16) необходимо добавить краевые условия

$$x(-1) = 0, \quad x(1) = 2a/l, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{1.7.17}$$

Интегрируя уравнения (1.7.16), получаем

$$x(\xi) = \frac{p}{\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{p^2+\xi^2}+\xi}{c}, \quad y(\xi) = \frac{\sqrt{p^2+\xi^2}+d}{\varepsilon}.$$

В это решение вошли три неизвестные постоянные p, c, d. Кроме того, это решение содержит неопределенную величину ε. Для их определения и служат краевые условия. Постоянные c, d определяются по первому и третьему условиям в (1.7.17). При этом четвертое условие выполнено тождественно, что является следствием использованного ранее условия симметрии. После определения постоянных c и d решение принимает вид

$$x(\xi) = \frac{p}{\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{p^2+\xi^2}+\xi}{\sqrt{p^2+1}-1}, \quad y(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2+\xi^2}}{\varepsilon}.$$

Для нахождения постоянных p, ε осталось выполнить второе краевое условие в (1.7.17). Оно сводится к выполнению равенства

$$\frac{2a}{l} = \frac{p}{\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{p^2+1}+1}{\sqrt{p^2+1}-1}. \tag{1.7.18}$$

Получили трансцендентное уравнение для нахождения вещественной постоянной p, которое содержит параметр ε. Из уравнения (1.7.18) видим, что отношение p/ε всегда положительно. Поэтому $p/\varepsilon = |p/\varepsilon| = |p|$. При $\varepsilon = -1$ постоянная p и сила натяжения в нити λ отрицательны, как это видно из уравнений (1.7.13) и (1.7.15). При $\varepsilon = 1$ постоянная p и сила натяжения в нити λ положительны в соответствии с уравнениями (1.7.13) и (1.7.15). При обоих значениях параметра ε уравнение (1.7.18) можно переписать в виде

$$\nu z = \ln\frac{\sqrt{z^2+1}+z}{\sqrt{z^2+1}-z} \quad \Rightarrow \quad \exp(\nu z) = \left(\sqrt{z^2+1}+z\right)^2 \equiv f(z), \tag{1.7.19}$$

где

$$\nu = \frac{2a}{l}, \quad z = \frac{1}{|p|}.$$

Уравнение (1.7.19) можно преобразовать к более простому виду. Для этого сначала нужно сделать замену переменной $z \to -z$, а затем сложить получившееся уравнение с уравнением (1.7.19). В результате получим уравнение

$$\operatorname{ch} \nu z = 1 + 2z^2.$$

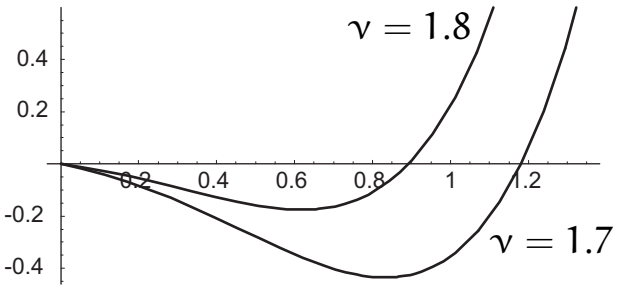

Рис. 1.13. Вычисление корней

Это уравнение удобно для приближенного аналитического определения неизвестной z, но мы будем обсуждать уравнение (1.7.19). И левая, и правая части уравнения (1.7.19) равны единице при $z = 0$, что соответствует бесконечно большой величине усилия в нити. Это физически не реализуемая ситуация, поскольку любая нить обладает конечной прочностью на разрыв. При больших z левая часть (1.7.19) больше, чем правая, поскольку экспонента растет быстрее любой степенной функции. Следовательно, уравнение (1.7.19) имеет решение, отличное от нулевого, только тогда, когда при малых z правая часть (1.7.19) растет быстрее, чем левая часть. О скорости роста этих функций при малых z можно судить по производной от этих функций в нуле. Значение производной от экспоненты в нуле равно ν. Значение производной от функции $f(z)$ в нуле равно 2. Поэтому уравнение (1.7.19) имеет решение только при выполнении условия $\nu < 2 \Rightarrow a < l$. К сожалению, корень уравнения (1.7.19) можно найти только численными методами. На рис. 1.13 представлен график функции $\exp \nu z - (\sqrt{z^2+1} + z)^2$ при различных значениях ν. Видим, что с увеличением ν величина z убывает, т.е. сила натяжения в нити растет.

Таким образом, в данной задаче имеется два решения. Одно решение соответствует значению параметра $\varepsilon = 1$ и описывает устойчивую равновесную конфигурацию нити. При этом стрела провисания нити, т.е. функция $y(\xi)$, направлена вниз, как это видно из выражения для $y(\xi)$. Второе решение соответствует значению параметра $\varepsilon = -1$ и описывает неустойчивую равновесную конфигурацию нити. При этом стрела прогиба нити направлена вверх. Для нити такая равновесная конфигурация нереализуема, но она возможна для арок, которые способны сопротивляться сжатию.

1.8. Балка с защемленными концами

В предыдущих пунктах рассматривались задачи, решение которых можно было построить используя только законы равновесия тел. Задачи подобного рода называются статически определимыми. Они часто встречаются на практике. Тем не менее, подавляющее большинство задач статики для своего решения требуют привлечения дополнительных законов, которые выражают наши интуитивные представления или экспериментальные закономерности. Эти дополнительные законы называются определяющими уравнениями и связывают воздействия с движениями, т.е. связывают силовые и кинематические характеристики. Следует отметить, что определяющие уравнения необходимы и при решении статически определимых задач, если желательно знать как изменяется конфигурация рассматриваемого тела в результате приложения к нему внешних воздействий. Простейшим и хорошо знакомым примером определяющего уравнения в механике является закон всемирного тяготения.

Определяющие уравнения будут обсуждаться после введения фундаментальных законов механики. Здесь же необходимо отметить, что определяющие уравнения не носят строго обязательного и фундаментального характера. Их можно, если в этом есть необходимость, изменять и уточнять. Но эти изменения и уточнения не должны противоречить фундаментальным законам, которые накладывают некоторые ограничения на конкретный вид определяющих уравнений. Представленную ниже задачу можно рассматривать как первое знакомство с определяющими уравнениями.

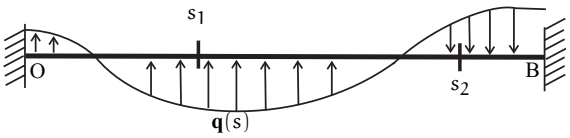

Рис. 1.14. Поперечный изгиб балки

Рассмотрим задачу об изгибе однородной балки с защемленными концами (рис. 1.14). Эта задача сыграла выдающуюся роль в становлении рациональной механики. Краткая историческая справка будет приведена в конце этого параграфа. Пусть изначально прямолинейная балка с прямоугольным поперечным сечением защемлена своими концами в абсолютно твердые стены. Следуя историческим традициям, при написании всех уравнений балку будем рассматривать как линию, проходящую через центры поперечных сечений. Эту линию принято называть упругой линией. Тот факт, что балка отлична от линии, мы вспомним позднее при формулировке определяющих уравнений. Положение каждой точки этой балки будем определять заданием вектора

$$\mathbf{r}(s) = s\,\mathbf{i}, \quad 0 \le s \le l, \tag{1.8.1}$$

где s — расстояние от левого конца балки до рассматриваемой точки, отсчитываемое вдоль упругой линии.

Упругую линию наделим массой, при этом массу бесконечно малой части линии $\mathrm{d}s$ будем определять по формуле $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}s$, где $\rho = \mathrm{const}$ есть масса на единицу длины упругой линии. Выясним, что нам дадут законы статики, если мы всю балку целиком будем рассматривать как тело $\mathcal{A}$. Левую стенку будем рассматривать как тело $\mathcal{O}$, а правую стенку будем считать телом $\mathcal{B}$. Пусть на единицу массы балки действует внешняя нагрузка $\mathbf{q}(s)$, создаваемая телом $\mathcal{Q}$, так что сила $\mathbf{F}(\mathrm{d}m, \mathcal{Q})$ вычисляется по формуле $\mathbf{F}(\mathrm{d}m, \mathcal{Q}) = \mathbf{q}(s)\rho \mathrm{d}s$. Полная сила, создаваемая телом $\mathcal{Q}$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) = \int_0^l \mathbf{q}\rho \mathrm{d}s.$$

Запишем первый закон статики

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \int_0^l \mathbf{q}\rho \mathrm{d}s = \mathbf{0}. \tag{1.8.2}$$

Уравнение (1.8.2) содержит два неизвестных вектора, выражающих реакции стенок. Их нельзя определить из одного уравнения. Поэтому необходимо для них выписать дополнительные уравнения. В предыдущих параграфах вопрос решался формулировкой второго закона статики, к которому мы сейчас и обратимся. Имеем

$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) + \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) = \mathbf{0}.$$

Здесь опорная точка и начало в системе отсчета выбраны на левом конце упругой линии. При вычислении момента $\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ точку приведения принимаем совпадающей с опорной точкой. При этом собственно момент оказывается отличным от нуля, поскольку стенка препятствует повороту балки. При вычислении момента $\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ точку приведения принимаем на правом конце балки. При этом собственно момент также оказывается отличным от нуля, поскольку и правая стенка препятствует повороту балки. При вычислении момента $\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ воспользуемся аксиомой аддитивности и запишем

$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) = \int_0^l \mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathbf{q}\rho \mathrm{d}s) = \int_0^l [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{q}(s)]\, \rho \mathrm{d}s.$$

Бесконечно малая часть $\mathrm{d}\mathcal{Q}$ тела $\mathcal{Q}$, создающая силу $\mathbf{q}(s)\rho \mathrm{d}s$, не препятствует повороту балки вокруг точки $\mathbf{r}(s)$. Поэтому собственно момент под знаком интеграла в вышеприведенном уравнении отсутствует.

Таким образом, второй закон статики принимает вид

$$\mathbf{L}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}) + l\mathbf{i} \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \int_0^l [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{q}(s)]\, \rho \mathrm{d}s = \mathbf{0}. \tag{1.8.3}$$

Получили еще одно векторное уравнение, но оно не упрощает ситуацию, поскольку в него вошли еще два неизвестных вектора $\mathbf{L}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{O})$ и $\mathbf{L}^{\mathrm{B}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, моделирующие моментные реакции стенок. Итак получили систему двух векторных уравнений, в которые вошли четыре неизвестных вектора. Такие системы называются недоопределенными и имеют бесконечное множество решений. Поэтому такого рода задачи называются статически неопределимыми. Природу статической неопределенности можно понять из следующих рассуждений. Представим себе, что вырезы в стенках выполнены с небольшими начальными погрешностями. Например, они сделаны на разной высоте. Вставив балку в один из вырезов, мы полностью задаем положение балки, рассматриваемой как абсолютно твердое тело, в пространстве. Чтобы балку вставить во второй вырез, ее придется слегка изогнуть. Деформации балки существенно влияют на усилия и моменты, возникающие в балке. Это означает, что форма изгиба балки оказывается важной. Но законы статики никак не связаны с какими-либо кинематическими характеристиками, поэтому силовые и моментные характеристики в балке не могут определяться только законами статики. Для сравнения рассмотрим задачу, представленную на рис. 1.7. Если опоры будут выполнены неточно, то балку все равно можно положить на опоры без того, чтобы ее деформировать. Задача оказывается статически определимой.

Итак, в статически неопределимых системах необходимо принимать во внимание деформации тел. В таких случаях от интегральных уравнений равновесия типа (1.8.2) и (1.8.3) необходимо переходить к локальным формулировкам. Упругую линию деформированной балки будем определять заданием вектора $\mathbf{R}(s)$, связанного с вектором $\mathbf{r}(s)$ соотношением

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{U}(s), \tag{1.8.4}$$

где вектор $\mathbf{U}(s)$ называется вектором перемещений, который переводит точку упругой линии с координатой s из начального (известного) положения $\mathbf{r}(s)$ в актуальное и заранее неизвестное положение $\mathbf{R}(s)$.

Вектор единичной касательной к деформированной упругой линии определяется равенством

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}s}\left[\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}s}\right|\right]^{-1}. \tag{1.8.5}$$

Далее мы будем рассматривать так называемую линейную теорию, в которой перемещения будут считаться бесконечно малыми. Поэтому они будут сохраняться только тогда, когда они будут главными членами в тех или иных выражениях. Предположение о малости перемещений, во-первых, хорошо выполняется для твердых тел и, во-вторых, совершенно не меняет существа проблемы. Для малых перемещений выражение (1.8.5) можно существенно

упростить

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\left[\left|\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\right|\right]^{-1} = \left[\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds}\right]\left[\left|\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds}\right|\right]^{-1} = \mathbf{i}. \qquad (1.8.6)$$

Вывод локальной формы первого закона статики дословно повторяет вывод, проведенный в предыдущем параграфе для нити. В качестве тела $\mathcal{A}$ выбираем часть упругой линии, заключенной между произвольно выбираемыми точками s_1 и s_2, причем $s_1 < s_2$. Тогда имеем

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{q}(s)\rho ds + \mathbf{T}_{(-t)}(s_1) + \mathbf{T}_{(t)}(s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \rho\mathbf{q}(s)\right] ds = \mathbf{0}.$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, получаем локальную форму первого закона

$$\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \rho\mathbf{q}(s) = \mathbf{0}, \qquad (1.8.7)$$

которое в точности повторяет уравнение (1.7.5), причем вектор усилий $\mathbf{T}(s)$ в балке имеет тот же смысл, что и в нити. Правда, он уже не будет направлен по касательной к деформированной упругой линии. Но на данном этапе рассуждений это ограничение не вводилось и для нити. Обратим внимание, что при выводе уравнения (1.8.7) предположение о малости перемещений не использовалось, т.е. оно верно и при больших перемещениях. Обратимся к выводу локальной формы второго закона статики. Здесь уже отличие от нити будет существенным. Преодолеть возникшую при этом проблему Я. Бернулли не сумел — см. конец этого параграфа. Момент, действующий на выделенную часть балки, т.е. на тело $\mathcal{A}$, вычисляется стандартным образом, причем второй закон статики записывается в виде

$$\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{R}(s_2) \times \mathbf{T}(s_2) + \mathbf{M}_{(t)}(s_2) - \mathbf{R}(s_1) \times \mathbf{T}(s_1) + \mathbf{M}_{(-t)}(s_1) + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{R}(s) \times \mathbf{q}(s)\rho ds = \mathbf{0}, \quad (1.8.8)$$

где вектор $\mathbf{M}_{(t)}(s_2)$ моделирует собственно момент, действующий на тело $\mathcal{A}$ со стороны части балки, находящейся правее точки s_2.

Вектор $\mathbf{M}_{(-t)}(s_1)$ моделирует собственно момент, действующий на тело $\mathcal{A}$ со стороны части балки, находящейся левее точки s_1. Именно наличие этих моментов отличает балку от нити и выражает собой тот факт, что балка, в отличие от нити, сопротивляется изгибу, т.е. поворотам поперечных сечений балки друг относительно друга. Переходя в равенстве (1.8.8) к пределу $s_1 \to s - 0$, $s_2 \to s + 0$, получаем

$$\mathbf{M}_{(-t)}(s) = -\mathbf{M}_{(t)}(s) \equiv -\mathbf{M}(s). \qquad (1.8.9)$$

Иными словами, для моментов также справедлив аналог третьего закона Ньютона, кратко выражаемого словами: действие равно противодействию. Еще раз обратим внимание на то, что в эйлеровой механике третий закон Ньютона не принимается в качестве аксиомы, а является следствием первого и второго законов статики (динамики). С учетом равенства (1.8.9) второй закон статики (1.8.8) можно переписать так

$$\mathbf{M}^{\mathrm{O}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \\ = \int_{s_1}^{s_2}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}(s)}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{T}(s)+\mathbf{R}(s)\times\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(s)}{\mathrm{d}s}+\rho\mathbf{q}(s)\right)\right]\mathrm{d}s=\mathbf{0}.$$

Принимая во внимание первый закон статики (1.8.7) и произвольность выбора точек s_1 и s_2, получаем локальную форму второго закона статики для тонкого стержня

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}(s)}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{T}(s)=\mathbf{0}. \tag{1.8.10}$$

Отметим три обстоятельства, связанных с уравнением (1.8.10). Первое. Оно справедливо при произвольных перемещениях, малость которых пока не принималась во внимание. Второе. Оно справедливо не только для прямолинейных балок, но правильно и для произвольного тонкого первоначально изогнутого стержня. Третье. В уравнении (1.8.10) отсутствует внешняя нагрузка. Это явилось следствием нашего допущения о том, что тело $\mathcal{Q}$ создает только внешнюю силу $\mathbf{q}$. Если бы мы учли, что тело $\mathcal{Q}$ может создавать и внешний собственно момент $\mathbf{L}(s)$, действующий на единицу массы стержня, то уравнение (1.8.10) приняло бы следующий вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}(s)}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{T}(s)+\rho\mathbf{L}(s)=\mathbf{0}. \tag{1.8.11}$$

В статике к уравнению (1.8.11) уже ничего нельзя добавить. Именно при выводе уравнения (1.8.10) в 1771 г. состоялось открытие второго закона динамики Леонардом Эйлером. Некоторые подробности, сопутствующие этому открытию, будут приведены в конце этого параграфа в исторической справке.

Следует обратить особое внимание на то, что при игнорировании собственно момента $\mathbf{M}(s)$ уравнение (1.8.10) для стержня, сопротивляющегося изгибу, переходит в уравнение (1.7.10) для нити, не сопротивляющейся изгибу. Равновесие нити можно рассмотреть не выходя за рамки ньютоновой механики. Рассмотрение равновесия стержня вывело нас за упомянутые рамки и ознаменовало собой рождение эйлеровой механики. Совершенно замечательным является то, насколько естественно произошел переход от ньютоновой механики к значительно более мощной эйлеровой механике. Видимо, именно эта естественность и простота не позволили ученым прошлого полностью осознать,

что произошло радикальное изменение фундамента механики. Печально, но многие ученые не сознают этого в должной мере и в настоящее время.

В начале этого параграфа была сформулирована совсем простая, на первый взгляд, задача об изгибе прямолинейного стержня, т.е. балки. При ее рассмотрении были получены уравнения (1.8.7) и (1.8.10), область применения которых оказалась значительно шире, хотя мы совершенно не стремились к этому. В этом проявляется сила и общность первого и второго законов статики. Уравнения (1.8.7) и (1.8.10) еще не позволяют нам найти векторы усилий $\mathbf{T}(s)$ и моментов $\mathbf{M}(s)$. Действительно, примем для простоты, что внешняя нагрузка, действующая на стержень, постоянна и направлена вертикально

$$\rho\,\mathbf{q}(s) = f\,\mathbf{j}, \quad f = \mathrm{const}. \tag{1.8.12}$$

При этом происходит плоский изгиб балки, т.е. имеют место разложения

$$\mathbf{U}(s) = u(s)\mathbf{t} + w(s)\mathbf{n}, \quad \mathbf{T}(s) = T(s)\mathbf{t} + N(s)\mathbf{n}, \quad \mathbf{M}(s) = M(s)\mathbf{t}\times\mathbf{n},$$

где единичные векторы $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ являются векторами касательной и нормали к деформированной упругой линии; функции $u(s)$ и $w(s)$ называются тангенциальным (продольным) и нормальным смещениями точек упругой линии; проекция $T(s)$ называется продольным (растягивающим) усилием в стержне; проекция $N(s)$ называется поперечным усилием в стержне или перерезывающей силой.

В нити перерезывающая сила отсутствует, т.е. нить не может, в отличие от балки, передавать поперечную силу. Функция $M(s)$ называется изгибающим моментом в стержне. В нити момент равен нулю, и потому нить не сопротивляется изгибу.

В линейной теории, т.е. при малых перемещениях, допустимо принять, что

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} = \mathbf{i}. \tag{1.8.13}$$

Так мы и будем считать с этого момента и до конца этого параграфа. В таком случае уравнения равновесия (1.8.7) и (1.8.10) удобно переписать в координатном виде

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(s) = T_0 = \mathrm{const}, \tag{1.8.14}$$

$$\frac{dN(s)}{ds} + f = 0, \quad \frac{dM(s)}{ds} + N(s) = 0. \tag{1.8.15}$$

К уравнениям (1.8.14) и (1.8.15) необходимо добавить краевые условия. Часть из них очевидна: вектор перемещений $\mathbf{U}(s)$ должен обращаться в нулевой вектор при $s = 0$ и $s = l$. Концы балки закреплены не только от смещений,

но запрещены также и повороты поперечных смещений балки. В простейшей теории балок принимается так называемая гипотеза плоских сечений, введенная Я. Бернулли. Эта гипотеза утверждает, что поперечные сечения балки, которые до деформации были ортогональны упругой линии, т.е. вектору $\mathbf{i}$, после деформации остаются ортогональными деформированной упругой линии, т.е. вектору единичной касательной t, определенному формулой (1.8.5). Значительно позднее, уже во второй половине XX века было теоретически доказано, что гипотеза Я. Бернулли для тонких стержней выполняется с очень высокой степенью точности. Впрочем, есть немало задач, в которых от этой гипотезы приходится отказываться. Для наших целей гипотеза плоских сечений вполне удовлетворительна. Принятие гипотезы плоских сечений позволяет отождествить повороты поперечных сечений балки с поворотами касательной к упругой линии при ее деформации. Это означает, что на концах балки при $s = 0$ и $s = l$ мы должны принять условия

$$\mathbf{t}(0) = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\left[\left|\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\right|\right]^{-1}\Bigg|_{s=0} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{t}(l) = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\left[\left|\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\right|\right]^{-1}\Bigg|_{s=l} = \mathbf{i}. \tag{1.8.16}$$

Здесь, конечно, нельзя использовать приближенные равенства (1.8.13). Условия (1.8.16) необходимо линеаризовать, сохранив в них только величины первого порядка малости по перемещениям. Покажем, как это делается на примере модуля, входящего в (1.8.16)

$$\left[\left|\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\right|\right]^{-1} = \left[\left|\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds}\right|\right]^{-1} \simeq \left[1 + \frac{du(s)}{ds}\right]^{-1} \simeq 1 - \frac{du(s)}{ds}.$$

С учетом этих формул имеем

$$\mathbf{t} = \left[\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds}\right]\left(1 - \frac{du(s)}{ds}\right) \simeq \mathbf{i} + \frac{dw(s)}{ds}\mathbf{j}. \tag{1.8.17}$$

Отсюда и из (1.8.16) видим, что на концах балки должна обращаться в нуль первая производная от нормального прогиба. Итак, получили следующие краевые условия

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \tag{1.8.18}$$

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(s)}{ds}\Big|_{s=0}, \quad w(l) = 0, \quad \frac{dw(s)}{ds}\Big|_{s=l}. \tag{1.8.19}$$

Теперь задача распалась на две независимых задачи: 1) задача о продольной деформации стержня, описывающаяся уравнениями (1.8.14) и (1.8.18); 2) задача об изгибе балки, описывающаяся уравнениями (1.8.15) и (1.8.19). Но

ни одна из этих задач пока что не может быть решена, поскольку в уравнения равновесия входят усилия и моменты, а краевые условия заданы для перемещений и поворотов. Никакой информации о связи этих переменных имеющиеся фундаментальные законы, т.е. законы статики, нам не доставляют. Мы вплотную приблизились к необходимости сформулировать дополнительные соотношения, которые и называются определяющими уравнениями. С физической точки зрения это отнюдь не тривиальная задача. Имеется в виду не математическая сложность написания определяющих уравнений, а их физическая содержательность. В самом деле, кажется ясным, что при заданной внешней нагрузке поведение балки из пластилиноподобного материала будет сильно отличаться от поведения стальной балки. В уравнениях равновесия информация о физических свойствах материала не содержится. Не содержится эта информация и в кинематических краевых условиях. Но где-то эта информация должна содержаться! В противном случае, все наши построения не имели бы никакой объективной ценности. Вот именно эту роль, роль носителя информации о свойствах материала балки, и играют определяющие уравнения. И совсем не случайно такого рода уравнения называются определяющими. Они действительно определяют характер поведения балки при действии внешней нагрузки. Определяющие уравнения пишутся на основе интуитивных соображений и экспериментальных фактов. Однако их нельзя писать произвольно. Существует теория определяющих уравнений, в которой обсуждаются ограничения, налагаемые на возможные представления определяющих уравнений. Об этом будет говориться позднее в главе, посвященной фундаментальным законам. Сейчас ограничимся простейшими утверждениями и ссылками на экспериментальные факты. Прежде всего примем, что балка выполнена из упругого материала. Грубо говоря, упругими называют материалы, которые при снятии нагрузки возвращаются к своей исходной форме. Математически это означает, что усилия и моменты в данной точке балки и в данный момент времени зависят только от деформаций в балке в этой же точке и в этот же момент времени. Иными словами, не имеет значения каким путем и в какой последовательности возникли деформации в упругой балке. Законы деформации упругих тел изучались и изучаются в течении многих столетий. Накоплена обширная информация об этих законах, которой мы и воспользуемся.

Начнем с задачи о продольных деформациях балки, т.е. с уравнений (1.8.14) и (1.8.18). В качестве определяющего уравнения примем экспериментальный закон Гука

$$T(s) = B\,\varepsilon, \quad \varepsilon \equiv \frac{du(s)}{ds}, \tag{1.8.20}$$

где ε есть продольная деформация стержня, т.е. относительное удлинение стержня.

Постоянный коэффициент пропорциональности B между продольным усилием и продольной деформацией называется жесткостью балки на растяжение. Обычно он выражается в виде формулы $B = E F$, где F есть площадь поперечного сечения балки, E есть так называемый модуль Юнга, характеризующий материал, из которого сделана балка. Значения модулей Юнга для разных материалов приводятся в справочниках. Например, для обычной стали он равен $E = 2.06 \cdot 10^7 \text{н/см}^2$. Подставляя определяющее уравнение (1.8.20) в уравнение равновесия (1.8.14), получаем

$$T_0 = B\,\frac{du(s)}{ds} \quad \Rightarrow \quad B\,u(s) = T_0\,s + a,$$

где a есть произвольная постоянная интегрирования.

Таким образом, продольное перемещение зависит от двух неопределенных постоянных, которые определяются из краевых условий (1.8.18) и в рассматриваемом случае равны нулю. Поэтому в данной задаче продольная сила в балке равна нулю. Это является следствием линеаризации основных уравнений и справедливо только для не слишком большой поперечной нагрузки. Если при действии поперечной нагрузки длина деформированной упругой линии заметно отличается (например, для стали на 0.1 процента) от длины недеформированной упругой линии, то в балке возникают значительные цепные усилия, и их необходимо учитывать, т.е. использовать нелинейную теорию.

Рассмотрим задачу изгиба балки, описывающуюся уравнениями (1.8.15) и (1.8.19). Интегрируя уравнения (1.8.15), получаем

$$N(s) = -f\,s - d_1, \quad M(s) = \frac{1}{2}\,f\,s^2 + d_1\,s + d_2, \tag{1.8.21}$$

где d_1, d_2 суть произвольные постоянные интегрирования.

Определить эти постоянные мы пока не можем, поскольку краевые условия (1.8.19) заданы для нормального перемещения. Вновь мы нуждаемся в определяющем уравнении, связывающим момент с кинематической характеристикой. Л. Эйлер предложил следующее определяющее уравнение для момента

$$M(s) = D\,k(s), \tag{1.8.22}$$

где $k(s)$ есть кривизна деформированной упругой линии, постоянный коэффициент D называется жесткостью балки на изгиб.

Обычно жесткость балки на изгиб выражается в виде формулы $D = E\,I$, где I называется моментом инерции поперечного сечения балки. Для прямоугольного поперечного сечения имеем $I = bh^3/12$, где b есть ширина поперечного сечения, а h — высота. Здесь нет нужды вдаваться в дальнейшие подробности, поскольку нас интересует только принципиальная сторона проблемы. В

линейной теории кривизна упругой линии легко вычисляется по нормальному прогибу балки. Действительно, как известно, кривизна упругой линии определяется как вторая производная от ее прогиба. В результате получаем

$$k(s) = -\frac{d^2w(s)}{ds^2} \quad \Rightarrow \quad M(s) = -D\,\frac{d^2w(s)}{ds^2}. \tag{1.8.23}$$

Подставляя (1.8.23) во второе из равенств (1.8.21), получаем дифференциальное уравнение для нормального прогиба балки

$$-D\,\frac{d^2w(s)}{ds^2} = \frac{1}{2}\,f\,s^2 + d_1\,s + d_2.$$

Интегрируя это уравнение, получаем выражение для нормального прогиба балки

$$-D\,w(s) = \frac{1}{24}\,f\,s^4 + \frac{1}{6}\,d_1\,s^3 + \frac{1}{2}\,d_2\,s^2 + d_3\,s + d_4.$$

В это выражение вошли четыре произвольных постоянных, которые находятся из краевых условий (1.8.19). Для постоянных интегрирования получаем следующие формулы

$$d_1 = -\frac{1}{2}\,f\,l, \quad d_2 = \frac{1}{12}\,f\,l^2, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0.$$

При этом окончательное выражение для нормального прогиба балки имеет вид

$$w(s) = -\frac{f}{24\,D}\,s^2\,(l-s)^2. \tag{1.8.24}$$

Зная прогиб, легко вычисляем момент и перерезывающую силу

$$M(s) = \frac{f}{24}\left[l^2 + 12\left(s - \frac{l}{2}\right)^2\right], \quad N(s) = f\,\left(\frac{l}{2} - s\right). \tag{1.8.25}$$

Задача об изгибе балки с защемленными концами полностью решена. При этом мы нашли не только распределение усилий и моментов в балке, но и форму изогнутой упругой линии. У изучающего может возникнуть вопрос: а зачем нам нужно знать усилия и моменты. Ответ простой. Мы не любим, когда рушатся здания, мосты, перекрытия стадионов и т.д. Нам нравится, когда все конструкции являются прочными. Если мы знаем усилия и моменты в балке, то мы можем вычислить предельные нагрузки, которые может выдержать балка без разрушения и, тем самым, рассчитать ее прочность. Правда, для этого нужно знать еще кое-что из науки о прочности, но усилия и моменты в любом случае знать необходимо.

Историческая справка. В 1673 г. Гастон Пардис (1636-1673) сформулировал так называемый принцип затвердевания. Он относится к гибким нитям (подвесным мостам, цепным линиям и т.д.) и утверждает, что форма любой выделенной части нити не изменится, если отброшенную часть нити заменить подходящими силами, приложенными к концам выделенной части нити и направленными вдоль касательных к нити в концевых точках. Именно в такой форме принцип затвердевания был использован Якобом Бернулли (1654-1705) в его исследованиях по гибким нитям. В 1691 г. Я. Бернулли выводит уравнения равновесия гибких нитей при действии произвольной распределенной нагрузки:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 - \int_0^s F_x\,ds; \quad T\frac{dy}{ds} = -\int_0^s F_y\,ds, \tag{1.8.26}$$

где T — продольное усилие; F_x, F_y — внешние погонные усилия; s — длина нити.

В 1660 г. Роберт Гук (1635-1703) открыл (опубликовал в 1676 г.) свой знаменитый закон упругости. В 1680 г. этот закон был независимо установлен Э. Мариоттом (1620-1684), который применил его к исследованию задачи Г. Галилея об изгибе призмы. В отличие от Галилея, считавшего, что поперечное сечение призмы поворачивается вокруг своего нижнего основания, Мариотт правильно расположил ось вращения, но допустил ошибку при вычислении жесткости на изгиб. В 1694 г. Я. Бернулли также обратился к решению задачи Галилея и при этом получил следующее уравнение

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad \left(\frac{1}{R} = -\frac{d^2w}{ds^2}\right), \tag{1.8.27}$$

где R — радиус кривизны; M — момент.

Это соотношение принято считать формулой изгиба Бернулли–Эйлера. Заметим, что формула (1.8.27) внешне полностью совпадает с выражением (1.8.22), но их содержание существенно различается. Как указывалось выше, во времена Я. Бернулли было известно только понятие момента силы, но понятие собственно момента отсутствовало. Я. Бернулли рассматривал только такие задачи, в которых момент определялся как момент силы. Примером такой задачи является рассмотренная выше задача о консольной балке, нагруженной на конце. В этой задаче реактивный момент в заделке выражался формулой (1.6.11) как момент силы, приложенной к концу балки. Я. Бернулли умел решать задачи такого рода, но не знал, как подойти к задаче о балке, защемленной с двух концов. Определяющее уравнение (1.8.22), предложенное Л. Эйлером, относится к собственно моментам, которые иногда сводятся к понятию момента силы, а иногда — не сводятся.

При выводе (1.8.27) Я. Бернулли использовал закон Гука и, кроме того, две гипотезы: “1) сечения, плоские и перпендикулярные к ребрам призмы до ее изгиба, остаются и после изгиба также плоскими и нормальными к этим ребрам и волокнам или продольным элементам, которые становятся криволинейными; 2) волокна, одни растянутые, другие укороченные, сопротивляются независимо, как будто бы они представляли собой малые изолированные призмы, не оказывающие друг на друга никакого действия”. Здесь приведена формулировка этих гипотез в трактовке Б. де Сен-Венана, представленная на стр. 385-386 книги [64]. Сен-Венан считал их ошибочными[2].

Уравнение (1.8.27) сохраняет свое значение и в наши дни, хотя его уже и не называют более уравнением изгиба. Дело в том, что (1.8.27) возможно трактовать двояко. Во-первых, можно считать, что момент M в нем задан, тогда по (1.8.27) можно найти прогиб балки. Так и поступали Я. Бернулли, Л. Эйлер и другие. Именно в этом смысле (1.8.27) и называют уравнением изгиба. Во-вторых, уравнение (1.8.27) можно трактовать как определяющее соотношение (аналог закона Гука). Такова современная точка зрения, отражающая позицию Л. Эйлера.

Я. Бернулли отчетливо сознавал недостаточность уравнения (1.8.27) для создания полной теории изгиба балки и до конца своей жизни не прекращал попыток вывести уравнения равновесия балки при действии поперечной нагрузки. Причем, эти уравнения должны были бы быть вполне аналогичными уравнения (1.8.26), т.е. не зависящими от свойств материала балки. Для этой цели Я. Бернулли использовал остроумную модель изгиба балки, сводящую изгиб к продольному растяжению пружины. Попытки Я. Бернулли были неудачны. Причина неудач была установлена значительно позднее Л. Эйлером. Учеником Я. Бернулли был его младший брат Иоганн Бернулли (1667-1748), внесший большой вклад в математику и механику. Кроме того, достижением И. Бернулли было то, что он воспитал двух великих учеников: своего сына Даниила Бернулли (1700-1784) и Л. Эйлера (1707-1783). В мемуаре [77], изданном в 1744 г., Л. Эйлер рассматривал балку (здесь же он обобщил уравнение Бернулли (1.8.27) на плоский первоначально изогнутый стержень)

$$M = D\left(\frac{1}{R_*(s)} - \frac{1}{R(s)}\right) = -D\left[\frac{d^2 w}{d\,s^2} + \frac{w}{R^2(s)} + \nu\,\frac{d}{d\,s}\left(\frac{1}{R(s)}\right)\right], \quad (1.8.28)$$

[2]В мемуаре [64] Сен-Венан дает формулировку гипотез Я. Бернулли и далее излагает их критику, которая, конечно, является правильной, но только с уровня знаний XIX века. С позиций конца XVII века гипотеза Я. Бернулли вовсе не является гипотезой. Это теоремы, которые легко доказываются при отсутствии напряжений сдвига. Последние еще не были открыты. Поэтому критику “гипотез” Я. Бернулли, по нашему мнению, следовало излагать не как ошибку Я. Бернулли, а как-то иначе. К сожалению, трактовка Сен-Венана попала во многие руководства по теории упругости.

где R и R_* — радиусы кривизны стержня до и после деформации; $w(s)$ и $v(s)$ — нормальный и тангенциальный прогибы, как материальную линию, имеющую бесконечно малое поперечное сечение.

При этом он считал возможным применять к этой линии все известные законы механики. Здесь же [77] на с. 492-498 Л. Эйлер рассматривает вопрос “Определение абсолютной упругости посредством опытов”. Абсолютной упругостью Л. Эйлер называет жесткость балки на изгиб. Хотя при написании функционала Л. Эйлер считает балку именно линией, в этом пункте он считает, что поперечное сечение балки имеет конечные размеры и устанавливает зависимость жесткости на изгиб от природы материала (модуля упругости Юнга) и размеров поперечного сечения. Конечный результат Л. Эйлера оказался ошибочным: он повторил ошибку Галилея. Для нас интересен именно способ рассуждений Л. Эйлера, а не конечный результат. Л. Эйлер продолжил труды Я. Бернулли по выводу уравнений равновесия при изгибе балок. При этом ему пришлось сделать два открытия. Первое открытие: необходимость введения перерезывающих усилий (касательных напряжений). В отличие от нити, в балке вектор усилия не обязательно направлен по касательной к упругой линии. Второе открытие: установление независимости уравнений баланса сил и моментов. Именно этих фундаментальных открытий и недоставало Я. Бернулли для вывода уравнений изгиба балки. Строго говоря, понятие напряжений сдвига впервые было введено А. Параном (1666-1716) в 1713 г., но его работа осталась незамеченной и, очевидно, неизвестной Л. Эйлеру, ибо он нигде на нее не ссылается. Здесь следует указать, что Л. Эйлер был первым, кто ввел в употребление ссылки на достижения предшественников. До него такие ссылки носили только негативно-критический характер. Честь второго открытия, фиксирующего один из двух важнейших принципов механики, целиком принадлежит Л. Эйлеру. В современных терминах, впрочем, мало отличающихся от использованных Л. Эйлером, эйлеровы законы динамики будут сформулированы в главе, посвященной фундаментальным законам механики. Применительно к системам взаимодействующих материальных точек эти законы могут быть выведены из законов Ньютона, но Эйлер формулирует их как независимые постулаты, применимые к любой механической системе, а не только к системе материальных точек. При этом законы Ньютона следуют из законов Л. Эйлера, но обратное не имеет места. Используя эти законы, Эйлер приходит в 1771 г. к уравнениям равновесия плоского изогнутого стержня

$$\frac{dT}{ds} + \frac{N}{R(s)} + F_1 = 0\,, \quad \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R(s)} + F_n = 0\,, \quad \frac{dM}{ds} - N = 0, \qquad (1.8.29)$$

где T, N — растягивающее и перерезывающее усилия; M — изгибающий момент.

Кроме уравнений (1.8.29) Л. Эйлер предложил обобщение третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия. В современной записи оно выглядит так

$$\mathbf{T}_{(\nu)} + \mathbf{T}_{(-\nu)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_{(\nu)} = \boldsymbol{\nu}\,\mathsf{T} + \mathbf{n}\,\mathsf{N}, \tag{1.8.30}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{n}$ — векторы единичных касательной и нормали к материальной линии; причем $\mathbf{T}_{(\nu)}$ характеризует воздействие в данном сечении части стержня, находящегося со стороны положительного направления касательной $\boldsymbol{\nu}$ на оставшуюся часть стержня.

Аналогичное (1.8.30) равенство имеет место и для момента $\mathbf{M}$.

Уравнения (1.8.29) и (1.8.30) сохранились неизменными до наших дней.

Итоги исследованиям по теории стержней подвел Шарль Кулон (1736-1806) в своей небольшой работе, выпущенной в 1773 г. В этой работе Ш. Кулон исправил ошибки своих предшественников и дал правильную формулу для жесткости балки на изгиб.

1.9. Связь используемых терминов с традиционными

Основные положения и законы статики формировались в течение многих столетий. Движущей силой развития механики и, в частности, статики была необходимость решения насущных практических задач. На каждом этапе своего развития механика успешно решала свою главную задачу — разработку методов решения новых задач, непрестанно возникающих в технике и строительстве. Методы решения практических задач изобретались учеными в отсутствии важнейших понятий. Поэтому в механику вводились положения, роль которых в логическом фундаменте механики было трудно оценить. Классическим примером здесь является принцип рычага Архимеда. Он широко применялся, на основе этого принципа действуют многие машины и приборы. Никто не сомневался в его правильности. Но какова его роль в логическом фундаменте механики? В течение многих столетий это оставалось тайной. Пытаясь ясно определить понятие силы, С. Стевин вводит в 1580 г. понятие вектора, которое постепенно нашло широкое применение в механике. Но незамкнутость логических основ, выражающаяся, в частности, в отсутствии явной формулировки второго закона динамики Л. Эйлера, привела к тому, что пришлось вводить различные понятия вектора. Стали различать приложенные, скользящие и свободные векторы [74]. Благодаря этому различению удалось предложить методы, позволяющие с успехом преодолевать трудности при решении возникающих задач. Но, конечно, возникали логические проблемы. Например, сила стала считаться приложенным вектором, т.е. сила характеризовалась модулем, направлением в пространстве и точкой приложения.

Строго говоря, в таком случае нельзя использовать правило параллелограмма для сложения сил, приложенных в разных точках. Поэтому было предложено правило переноса точки приложения силы, при этом пришлось добавлять некий момент силы. Понятия силы и момента причудливо смешались. Открытие явной формы второго фундаментального закона динамики радикально изменило ситуацию, особенно в логическом отношении. Появилась возможность резко укрепить логический фундамент механики, но почти два столетия ученые проходили мимо этой возможности. Почему? Ответ очевиден. Имелось огромное количество важных задач, которые требовали немедленного решения. Разработанные методы позволяли их решать. Поэтому вылавливание логических несоответствий считалось никому не нужным эстетством, которое многих действующих исследователей, решающих конкретные проблемы, просто раздражало. Действительно серьезные проблемы, которые было невозможно решить в рамках ньютоновой механики, возникли только в конце XIX века, когда началось интенсивное внедрение в микромир, в котором главную роль исполняет именно второй закон динамики и сопутствующие ему понятия момента и спинорных движений. Не имея в то время возможности полноценно описывать электричество, магнетизм и ряд других явлений, механика устраняется от обсуждения этих вопросов и освобождает место лидера, которое перешло к релятивистской и квантовой физике. Механика постепенно теряла статус фундаментальной науки, хотя и сохраняла ведущие позиции в решении прикладных задач. Чтобы вернуть себе статус фундаментальной науки механике необходимо решительно перейти на фундамент эйлеровой механики, которая допускает неограниченные возможности дальнейшего развития. После этого механика должна со своих позиций попытаться объяснить огромное количество фактов, установленных современной экспериментальной физикой.

Столь долгое вступление понадобилось автору, чтобы объяснить причины такого ответственного решения, как частичный отказ от традиционного изложения статики, включая устоявшиеся термины и привычные теоремы. Чтобы смягчить последствия этого перехода далее приводятся традиционные термины и их связь с используемыми в данной книге. Ниже традиционные термины [35] выделены полужирным курсивом.

Главный вектор системы сил, действующих на тело $\mathcal{A}$, — это сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующая на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.

Момент в учебниках теоретической механики вводится только как момент силы. Определение момента, даваемое выражением (1.1.3), в литературе отсутствует. Но определение (1.1.3) переходит в традиционное определение момента силы, если существует такая точка приведения, при выборе которой собственно момент отсутствует.

Главный момент системы сил — это момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e))$ при условии, что тела, составляющие окружение тела $\mathcal{A}$, создают чисто силовые воздействия. Роль, которую играет главный момент системы сил в традиционном изложении, в эйлеровой механике исполняет момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e))$.

Сходящаяся система сил. Этот термин связан с принятием концепции силы как приложенного вектора. В эйлеровой механике сила — это свободный вектор, поэтому отпадает необходимость во введении понятия сходящейся системы сил.

Равнодействующая сходящейся системы сил. В эйлеровой механике этот термин не нужен.

Эквивалентные системы сил. Две системы сил называются эквивалентными, если их главные векторы сил и главные моменты совпадают. Если считать, что силы и моменты создаются другими телами (моделируют присутствие других тел), то речь должна идти о двух разных окружениях тела $\mathcal{A}$, создающих одинаковые воздействия на тело $\mathcal{A}$. Ситуации такого рода слишком экзотичны с прикладной точки зрения, чтобы для них вводить специальный термин.

Пара. Парой или, более точно, парой сил называют систему двух равных по величине сил, имеющих параллельные линии действия, но направленных в разные стороны. Это понятие подразумевает концепцию силы как приложенного вектора и потому не применяется в эйлеровой механике.

Теорема Пуансо. Формулировка этой теоремы звучит следующим образом [41]: *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна системе, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке* O *тела (центре приведения) и равной главному вектору* $\mathbf{R}$ *данной системы сил, и одной пары, момент которой равен главному моменту* $\mathbf{M}_{\mathrm{O}}$ *всех сил относительно точки* O. В эйлеровой механике теорема Пуансо не нужна, поскольку все, что она может дать, намного перекрывается самой концепцией воздействий. Примерно то же самое можно сказать о ряде других теорем статики, представленных в разных книгах.

Принцип возможных (виртуальных) перемещений. Этот принцип широко применяется при решении задач статики. Позднее будет показано, что корректная форма принципа возможных перемещений является просто частной формой записи третьего фундаментального закона механики, т.е. уравнения баланса энергии. При этом принцип возможных перемещений в общем случае не может заменить собой третий фундаментальный закон. Поэтому нет нужды вводить дополнительный принцип, имеющий к тому же весьма узкую область применимости. В учебниках механики принцип возможных перемещений излагается в весьма ограничительной формулировке, которая во многих задачах статики неприменима. В частности, определение ***идеальных связей***

плохо согласуется с принятым в современной механике понятием идеальных процессов, т.е. процессов, протекающих без потерь энергии.

Существуют и другие менее распространенные термины, но их обсуждение представляет интерес только для специалистов-профессионалов.

Глава 2.

Кинематика: трансляционные движения

Непосредственное наблюдение показывает, что все предметы окружающего нас мира находятся в непрестанном движении. Чередование дней и ночей обусловлено суточным вращением Земли, а смена времен года объясняется движением Земли вокруг Солнца. Летают птицы и самолеты. Беспорядочно мечутся молекулы воздуха, которым мы дышим. Даже предметы, которые нам кажутся неподвижными, например, дома, на самом деле движутся в космическом пространстве по весьма замысловатым траекториям, как это хорошо понимали древние философы. На бытовом уровне представление о движении присуще всем людям и не связано с уровнем их образования. Однако в рациональной науке интуитивное представление о движении тел необходимо выразить на строгом математическом языке, что уже требует определенной подготовки. При этом описание движений является чисто геометрической проблемой и может быть выполнено относительно любой системы отсчета. Поэтому в кинематике никакие физические принципы не используются. Построение собственно механики начинается с введения инерциальной системы отсчета.

2.1. Системы отсчета и системы координат

Движение какого бы то ни было тела можно наблюдать только относительно каких-то других тел. В качестве тела отсчета в физике принято использовать некую воображаемую конструкцию, описанную в первой главе под названием системы отсчета. Можно ввести сколь угодно много различных систем отсчета, движущихся относительно друг друга произвольным образом. Таким образом, каждая система отсчета обладает своим собственным движением. Когда мы наблюдаем движение какого-либо тела относительно выбранной системы отсчета, то должны помнить,что наблюдаемое движение не носит абсолютного характера, а развивается на фоне движущейся системы отсчета, собственное

движение которой принципиально непознаваемо. Движение одного и того же тела, наблюдаемое относительно разных систем отсчета, будет описываться в этих системах отсчета по разному. Чтобы наблюдать движение тела относительно выбранного тела отсчета, все точки тела отсчета должны быть как-то помечены. Только в этом случае можно заметить, что рассматриваемое материальное тело перемещается из одной точки тела отсчета в другую. Чтобы пометить все точки тела отсчета используются системы координат, взаимно однозначно сопоставляющие каждой точке тела отсчета тройку чисел $y^i\,(i = 1,2,3)$. Например, точке A тела отсчета отвечает тройка чисел y^i_A. Другой точке тела отсчета B отвечает другая тройка чисел y^i_B. Обычно система координат выбирается так, что точкам тела отсчета отвечают неизменные во времени тройки чисел y^k. В таком случае говорят, что выбранная система координат неподвижна относительно тела отсчета. Можно использовать и подвижные системы координат. При этом одной и той же точке A тела отсчета в разные моменты времени будут отвечать разные тройки чисел $y^k(t)$ такие, что в каждый момент времени t соответствие между точками тела отсчета и тройками чисел $y^k(t)$ является взаимно однозначным. Поясним сказанное примерами. Простейшей координатной системой в данном теле отсчета является декартова система координат x, y, z. Она строится так. Выберем произвольную точку тела отсчета O, которую примем за начало декартовой системы координат. В этой точке построим тройку ортонормированных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Тогда радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad -\infty < x, y, z < \infty \tag{2.1.1}$$

будет определять точку тела отсчета, помеченную координатами x, y, z. Когда координаты x, y, z принимают все допустимые значения, конец радиус-вектора пробегает все точки тела отсчета. Система координат x, y, z неподвижна относительно тела отсчета. Можно использовать подвижную декартову систему координат x', y', z'. Например, такую

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2.1.2}$$

Начало этой подвижной системы координат ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$) движется относительно тела отсчета вдоль оси x со скоростью v. Неподвижная точка тела отсчета A в подвижной системе координат будет определяться переменными во времени координатами x', y', z'. Пусть, например, точка A имеет координаты $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$. Тогда в подвижной системе ее координаты определяются выражениями

$$x' = 2 - vt, \quad y' = 4, \quad z' = 5,$$

т.е. эти координаты неподвижной точки тела отсчета меняются во времени.

Могут быть системы координат, меняющиеся во времени более сложным образом. Например, пульсирующая система координат

$$x' = (1 - e_1 \cos \omega t)x, \quad y' = (1 - e_2 \cos \omega t)y, \quad z' = (1 - e_3 \cos \omega t)z, \quad (2.1.3)$$

где $e_k : 0 < e_k < 1$ — постоянные числа; ω — частота пульсации.

Начало системы координат (2.1.3) совпадает с началом в системе координат x, y, z и неподвижно в теле отсчета. Но, например, точка с координатами $x = y = z = 1$ имеет переменные во времени координаты

$$x' = 1 - e_1 \cos \omega t, \quad y' = 1 - e_2 \cos \omega t, \quad z' = 1 - e_3 \cos \omega t.$$

Наоборот, фиксированным координатам подвижной системы координат отвечают различные точки тела отсчета. Например, координатам $x' = y' = z' = 1$ отвечает множество точек тела отсчета с координатами

$$x = \frac{1}{1 - e_1 \cos \omega t}, \quad y = \frac{1}{1 - e_2 \cos \omega t}, \quad z = \frac{1}{1 - e_3 \cos \omega t}.$$

Здесь разным моментам времени отвечают разные точки системы отсчета. При $t = 0$ точке с координатами $x' = y' = z' = 1$ отвечает точка тела отсчета с координатами

$$x = 1/(1 - e_1), \quad y = 1/(1 - e_2), \quad z = 1/(1 - e_3).$$

Но при $\omega t = \pi/2$ точке с координатами $x' = y' = z' = 1$ отвечает уже другая точка тела отсчета с координатами $x = y = z = 1$. Наряду с декартовыми системами координат могут использоваться и другие системы координат. Чаще других используются цилиндрические и сферические системы координат.

Важно запомнить: *многие физические или геометрические характеристики зависят от выбора системы отсчета, но ни одна из них не зависит от выбора системы координат.*

Конечно, координатное описание того или иного факта будет различным в разных системах координат. Однако векторное (или тензорное) описание того же самого факта имеет инвариантный, т.е. независимый от выбора системы координат, вид. В данной книге системы координат практически использоваться не будут. Задачи будут рассматриваться непосредственно в векторном (или тензорном) виде. Таким образом, без использования координатных систем вполне можно обойтись. Однако исключить из рассмотрения системы отсчета, включая отсчетную систему координат, невозможно. Без системы отсчета практически все понятия, используемые в физике, теряют смысл.

2.2. Кинематика точки. Скорость и ускорение

Вообразим, что имеется некое тело T, движущееся относительно выбранной системы отсчета. Разные точки тела T совершают движения, которые могут достаточно сильно различаться между собой. В процессе движения тело T может деформироваться и менять свою форму. Чтобы полностью описать движение тела T, необходимо описать движение каждой точки этого тела. Поэтому, прежде всего мы должны научиться описывать движение одной точки тела. Полностью движение тела T будет определено, если мы будем знать описание движений всех его точек. Конечно, мы можем вообразить тело T настолько малым, что все оно может рассматриваться как точка. Ниже мы будем говорить просто о точке, не указывая отдельно является ли она просто выбранной точкой тела T или само тело T сводится к точке. Обратим внимание на то, что термин точка у нас несколько перегружен. В предыдущем параграфе мы говорили о точках системы отсчета. Здесь мы говорим о точках тела. Смешивать эти точки категорически нельзя. Есть система отсчета со всеми ее точками и есть тела со всеми своими точками. Точки тела движутся относительно точек системы отсчета. Чтобы различить эти две категории точек, мы будем использовать термин материальная точка для обозначения точек тела. При этом материальная точка может и не иметь выраженных атрибутов материальности. Например, тело T может быть солнечным зайчиком, тогда материальная точка — это помеченная точка на этом зайчике.

Итак, рассмотрим материальную точку A. В данный момент времени t точка A занимает определенное положение в выбранной системе отсчета. Это положение определяется радиус-вектором $\mathbf{R}_A(t)$, который в дальнейшем будем называть *вектором положения* точки A. Напомним, что радиус-вектор $\mathbf{R}_A(t)$ — это вектор, выходящий из начала в системе отсчета и заканчивающийся в той точке системы отсчета, в которой в данный момент времени находится материальная точка A. При движении материальной точки ее положение в системе отсчета меняется. Поэтому меняется во времени и вектор положения $\mathbf{R}_A(t)$ точки A. С течением времени конец вектора положения $\mathbf{R}_A(t)$ прочертит в системе отсчета некоторую кривую, которая называется траекторией точки A. Хорошее представление о траектории имеет каждый, кто наблюдал след, оставляемый в небе реактивным самолетом.

Важной характеристикой движения является интенсивность изменения положения точки. Эта характеристика называется скоростью. На бытовом уровне это понятие хорошо знакомо всем людям. По представлениям большинства людей скорость это то, что измеряется спидометром автомобиля или другого транспортного средства, т.е. скорость — это расстояние, пройденное в единицу времени. Такое представление о скорости, конечно, правильно, но толь-

ко до некоторой степени. Профессиональные автогонщики, например, имеют несколько иное представление о скорости. Они хорошо знают, что важна и величина, и направление скорости. Более того, именно изменение направления движения требует от них наибольшего внимания и мастерства. На прямой, как стрела, трассе даже гонщики невысокого класса без труда достигнут максимальной скорости. Но по трассе с большим числом поворотов только истинные мастера могут поддерживать максимальную для данной трассы и данной машины скорость. Тот, кто не поленится обдумать все сказанное, с неизбежностью поймет, что скорость характеризуется не только числом, выражающим пройденное в единицу времени расстояние, но и направлением. А мы уже знаем, что объекты, полностью определяемые заданием одного числа и направления в пространстве (т.е. в системе отсчета) называются векторами. Таким образом скорость точки A — это вектор, характеризующий интенсивность изменения положения точки A в выбранной системе отсчета. Формально вектор скорости $\mathbf{V}_A$ точки A вводится как предел следующего отношения

$$\mathbf{V}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}_A(t + \Delta t) - \mathbf{R}_A(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_A(t)}{dt}. \tag{2.2.1}$$

Скорость $\mathbf{V}_A(t)$ в каждый момент времени t может быть вычислена по (2.2.1), если нам известен вектор положения $\mathbf{R}_A(t)$ не только в данный момент времени t, но и в близкие к t моменты времени $t + \Delta t$, где Δt — некоторая последовательность малых интервалов. Практически (экспериментально) мы, конечно, не состоянии точно вычислить предел (2.2.1). Однако в этом и нет особой необходимости. Например, для автомобиля вполне удовлетворительные результаты дадут приближенные (средние) значения скорости

$$\mathbf{V}_{cp}(t) = \frac{\mathbf{R}(t + 5c) - \mathbf{R}(t)}{5c}.$$

Разумеется, это значение вектора скорости нас устроит, если мы хотим знать изменение скорости автомобиля на достаточно большом интервале времени, например, на протяжении одного часа. Если же мы хотим знать скорость спринтера при прохождении им дистанции 100 метров, то удовлетворительными будут, например, следующие измерения

$$\mathbf{V}_{cp}(t) = \frac{\mathbf{R}(t + 0,2c) - \mathbf{R}(t)}{0,2c}, \quad 0 \le t \le 15 \text{ с}.$$

Чисто теоретически вектор положения задается как известная функция времени. В этом случае теоретически точное значение скорости находится без всякого труда по (2.2.1). Пусть, например, нам дано, что

$$\mathbf{R}_A(t) = vt\ \mathbf{m} + a\cos\omega t\,\mathbf{n}, \tag{2.2.2}$$

где ν, a, ω заданные числа, имеющие физическую размерность $[\nu] = $ м/с, $[t] = $ с, $[a] = $ м, $[\omega] = $ рад/с, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ заданные единичные векторы.

Тогда для скорости $\mathbf{V}_A(t)$ имеем

$$\mathbf{V}_A(t) = \frac{d\,\mathbf{R}_A(t)}{dt} = \nu\ \mathbf{m} - a\omega \sin \omega t\ \mathbf{n}. \tag{2.2.3}$$

В этом выражении нам все известно, и мы в состоянии найти вектор $\mathbf{V}_A(t)$ в любой интересующий нас момент времени. Спидометр у автомобиля измеряет модуль вектора скорости, который вычисляется стандартным образом. Например, для вектора скорости (2.2.3) имеем

$$V_A = \sqrt{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{V}_A} = \sqrt{\nu^2 - 2\nu a \sin \omega t\, \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + a^2\omega^2 \sin^2 \omega t}.$$

Направление вектора скорости можно определить экспериментально. Для этого нужны специальные приборы, называемые гироскопами, которые на автомобилях не ставятся, но на самолетах они есть. Простые наблюдения показывают, что мы не чувствуем величины скорости. Например, наши ощущения одинаковы, когда мы едем с постоянной скоростью 60 км/ч на автомобиле или летим с постоянной скоростью 800 км/ч на самолете. Так будет, если мы беседуем со спутником и не наблюдаем за тем, что происходит снаружи автомобиля или самолета. Если же наблюдаем, то наши ощущения окажутся совершенно неправильными. Мы решим, что скорость автомобиля значительно выше, чем у самолета, ибо мы видим как быстро мелькают деревья за окном автомобиля и как медленно проплывает Земля под самолетом. В противоположность сказанному, наблюдения показывают, что всякие изменения скорости как по модулю, так и по направлению мы ощущаем вполне отчетливо. Например, при торможении автомобиля направление вектора скорости практически не меняется, но модуль вектора скорости меняется весьма сильно. Эффект торможения всем знаком. *Движение с постоянной по модулю скоростью называется равномерным*[1]. При этом направление вектора скорости может меняться. Если же при равномерном движении меняется направление вектора скорости, то такие изменения мы также отчетливо ощущаем, например, при езде на автомобиле со скоростью 60 км/ч по извилистой дороге.

Таким образом, наблюдение показывает, что важной характеристикой движения является интенсивность изменения вектора скорости или *ускорение*.

[1]Часто равномерным называют движение с постоянным вектором скорости. Мы предпочитаем данное выше определение равномерности движения, ибо на интуитивном уровне понятие равномерности никак не связано с понятием направления. Кроме того, принцип инерции гласит: движение изолированной материальной точки прямолинейно и равномерно, а не просто равномерно. Более того, понятия прямолинейности и равномерности используются независимо друг от друга при введении инерциального тела отсчета и определения равномерного хода времени.

Ускорение точки A является векторной величиной и определяется следующим образом

$$\mathbf{W}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{V}_A(t+\Delta t) - \mathbf{V}_A(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{d^2\,\mathbf{R}_A(t)}{dt^2}. \tag{2.2.4}$$

Например, для движения (2.2.2) вектор ускорения определяется выражением

$$\mathbf{W}_A(t) = -a\omega^2 \cos \omega t\, \mathbf{n}. \tag{2.2.5}$$

В данном примере ускорение направлено вдоль прямой, натянутой на вектор $\mathbf{n}$, но меняется по модулю. Впрочем, направление вектора ускорения также меняется: в одни моменты ускорение направлено вдоль $\mathbf{n}$, а в другие моменты времени оно имеет противоположное направление. *Движение с постоянным по модулю ускорением называется равноускоренным.* Примером равноускоренного движения является падение камня на Землю с высоты h. Опыты такого рода проводил Галилео Галилей. В опытах Галилея различные тела бросались с высоты h с нулевой начальной скоростью. Галилей установил, что движение (в вакууме) всех тел, независимо от их веса и формы, определялось вектором

$$\mathbf{R}_A(t) = (h - \frac{1}{2} g t^2)\, \mathbf{k}, \tag{2.2.6}$$

где g — постоянная величина; $\mathbf{k}$ — единичный вектор, ортогональный поверхности Земли и направленный вверх.

Разумеется, в (2.2.6) использованы современные обозначения: во времена Галилея понятия вектора еще не существовало, да и сама формула (2.2.6) представлялась совершенно иначе. По (2.2.6) находим

$$\mathbf{V}_A(t) = -gt\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{W}_A(t) = -g\,\mathbf{k}. \tag{2.2.7}$$

Здесь мы имеем типичный пример равноускоренного движения

$$|\,\mathbf{W}_A(t)| = g = \text{const},$$

причем величина g называется ускорением свободного падения. Можно считать, что $g = 9,82$ м/с^2.

Важное замечание. *У читателя не должно сложиться ложного впечатления, что механика является описательной наукой, т.е. наукой, в которой описывается то, что уже известно. В кинематике мы действительно рассматриваем движение, как данное нам заранее. Но на самом деле одной из основных задач механики является определение движений тел при действии неких причин, которые изучаются и вводятся в рассмотрение в механике. Поэтому в дальнейшем сам ход рассуждений изменится и будет выглядеть*

примерно следующим образом. Мы знаем, что тело-точка A *существует и потому занимает некое положение в пространстве (системе отсчета). Будем характеризовать это положение радиус-вектором* $\mathbf{R}_A(t)$, *который мы заранее не знаем, но он существует. Далее, мы знаем, что скорость и ускорение тела-точки выражаются формулами*

$$\mathbf{V}_A(t) = \frac{d\,\mathbf{R}_A(t)}{dt}, \quad \mathbf{W}_A(t) = \frac{d^2\,\mathbf{R}_A(t)}{dt^2}. \tag{2.2.8}$$

После этого на основе неких физических законов, которые устанавливаются в механике, составляется выражение вида

$$\mathbf{W}_A(t) + \mathbf{F}(\,\mathbf{V}_A,\,\mathbf{R}_A) = \mathbf{0}. \tag{2.2.9}$$

Исключая отсюда скорость и ускорение с помощью (2.2.8), получаем так называемое уравнение движения

$$\frac{d^2\,\mathbf{R}_A}{dt^2} + \mathbf{F}\left(\frac{d\,\mathbf{R}_A}{dt},\ \mathbf{R}_A\right) = 0, \tag{2.2.10}$$

в котором вектор положения $\mathbf{R}_A$ *считается неизвестным. Выражение (2.2.10) является дифференциальным уравнением и существуют методы решения таких уравнений. Вектор положения* $\mathbf{R}_A(t)$ *находится в результате решения уравнения (2.2.10) — в этом и состоит основная задача механики, причем важнейшей частью этой задачи является вывод уравнения движения типа (2.2.10). В кинематике мы просто изучаем движения и способы их описания.*

2.3. Частные случаи движения материальной точки

2.3.1. Прямолинейное движение

Прямолинейным называют движение материальной точки вдоль одной прямой. Пусть в некоторый момент времени, например, $t = 0$ точка занимала положение, определяемое вектором положения $\mathbf{R}_0$. Пусть мы знаем, что она движется вдоль прямой, направление которой задается единичным вектором $\mathbf{e}$. Уравнение прямой, проходящей через точку $\mathbf{R}_0$ в направлении вектора $\mathbf{e}$ имеет вид

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{R}_0 + s\ \mathbf{e}, \quad -\infty < s < \infty. \tag{2.3.1}$$

Когда параметр s пробегает все допустимые значения из неограниченного интервала $-\infty < s < \infty$, конец радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ опишет прямую линию, проходящую через точку $\mathbf{R}_0$. Параметр s имеет размерность длины и выражает расстояние от точки $\mathbf{R}_0$ до точки определяемой значением параметра s.

Например, значению параметра $s = 5$ м отвечает точка, отстоящая от точки $\mathbf{R}_0$ ($s = 0$) на 5 м в положительном направлении вектора $\mathbf{e}$. Значению параметра $s = -3$ м отвечает точка, отстоящая от $\mathbf{R}_0$ на расстояние 3 м в направлении, противоположном $\mathbf{e}$. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Вектор $\mathbf{e}$, как и вообще любой вектор (кроме радиус-вектора), не имеет определенного положения в системе отсчета и единственного образа. Фактически вектору $\mathbf{e}$ отвечает бесконечно много образов (направленных отрезков) в системе отсчета, и все они равноправны и образуют, как принято говорить в математике, класс эквивалентности. Вектор

$$s\,\mathbf{e}, \quad -\infty < s < \infty. \tag{2.3.2}$$

определяет прямую, натянутую на вектор $\mathbf{e}$. В соответствии со сказанным выше, вектор $s\,\mathbf{e}$ определяет не одну прямую, а бесконечное семейство параллельных прямых. Когда мы говорим о движении материальной точки вдоль прямой, то, разумеется, речь идет не о семействе прямых, а об одной единственной прямой в системе отсчета. Чтобы выделить эту единственную прямую, необходимо указать положение какой-либо точки этой прямой в системе отсчета. Точку на прямой можно определить заданием ее вектора положения или, что то же самое, ее радиус-вектора. Важное отличие радиус-вектора от вектора именно в том и состоит, что радиус-вектору отвечает единственный направленный отрезок, идущий из начала системы отсчета в рассматриваемую точку системы отсчета. В выражении (2.3.1), в отличие от выражения (2.3.2), зафиксирована единственная прямая, проходящая через точку тела отсчета, определяемую вектором положения $\mathbf{R}_0$. Итак, мы определили прямую, вдоль которой движется материальная точка. Чтобы полностью определить прямолинейное движение материальной точки, мы должны указать закон ее движения вдоль рассматриваемой прямой, т.е. указать ее положения на прямой в любой момент времени. Пусть s_A означает ту координату s прямой, в которой в данный момент времени t находится материальная точка A. Тогда задание ее движения сводится к заданию функции

$$s_A = f(t). \tag{2.3.3}$$

В векторной форме закон движения имеет следующий вид, получаемый по (2.3.1) и (2.3.3)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + f(t)\,\mathbf{e}. \tag{2.3.4}$$

Если функция $f(t)$ задана, то движение материальной точки полностью определено. Векторы скорости и ускорения находятся по (2.3.4) и имеют вид

$$\mathbf{V}_A(t) = \dot{f}(t)\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A(t) = \ddot{f}(t)\,\mathbf{e}, \tag{2.3.5}$$

где использованы стандартные обозначения для производных по времени

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt}, \quad \ddot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt}, \tag{2.3.6}$$

а ψ — любая встречающаяся функция: скалярная, векторная или тензорная.

Рассмотрим конкретные случаи задания закона движения (2.3.4).

2.3.2. Равномерное движение по прямой

Это движение определяется заданием следующего вектора положения частицы

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + v\,t\,\mathbf{e}, \quad f(t) = v\,t, \tag{2.3.7}$$

где v — постоянная величина, имеющая размерность скорости $[v]$=м/сек. Скорость и ускорение вычисляются по (2.3.5) и (2.3.7).

$$\mathbf{V}_A(t) = v\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A(t) = 0. \tag{2.3.8}$$

Отсюда видим, что v есть величина скорости. В отличие от модуля скорости, величина скорости может иметь любой знак. Если $v > 0$, то материальная точка движется в положительном направлении вдоль прямой, т.е. в сторону возрастания координаты s. Если $v < 0$, то материальная точка движется в сторону убывания координаты s. Напомним, что $-5 < -3$. Например, спидометр показывает 15 км/ч. При этом автомобиль может двигаться как вперед $v = +15$ км/ч, так и назад $v = -15$ км/ч. По (2.3.8) мы видим, что *при прямолинейном равномерном движении материальной точки, ее ускорение равно нулю.* Данное утверждение справедливо только для прямолинейного движения. Равномерное движение по кривой траектории всегда имеет отличное от нулевого ускорение. Выше упоминалось, что наши ощущения не фиксируют величины скорости прямолинейного равномерного движения. При этом мы допустили существенную недомолвку. Дело в том, что это верно только в так называемых инерциальных системах отсчета, о которых речь пойдет позднее при формулировке фундаментальных законов механики. В общем случае, равномерное прямолинейное движение относительно, например, “вращающейся” системы отсчета воспринимается нашими ощущениями вполне отчетливо.

2.3.3. Колебательное движение частицы вдоль прямой

Примем закон движения (2.3.3) в следующем виде

$$f(t) = a\cos\omega t, \tag{2.3.9}$$

где a, ω — постоянные, имеющие размерности: $[a] =$ м, $[\omega] =$ рад/с, причем $a > 0$ называется амплитудой колебания, а ω называется частотой колебания.

В векторной форме закон движения записывается в виде

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a\cos\omega t\,\mathbf{e}. \tag{2.3.10}$$

При этом движении материальная точка совершает колебательное движение около точки $s = 0$ или, что то же самое, точки $\mathbf{R}_0$. Векторы скорости и ускорения даются выражениями

$$\mathbf{V}_A = -a\omega\sin\omega t\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{e}. \tag{2.3.11}$$

Здесь и скорость, и ускорение имеют переменные во времени модули и направления: они направлены либо по $\mathbf{e}$, либо по $(-\mathbf{e})$.

2.3.4. Движение частицы вдоль ортогональных прямых

Пусть дано два семейства прямых, определяемых векторами

$$x\,\mathbf{m}, \quad y\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1. \tag{2.3.12}$$

где $-\infty < x, y < \infty$. Фактически эти прямые выделяют семейство параллельных плоскостей, натянутых на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Пусть материальная точка совершает движение в плоскости, содержащую точку $\mathbf{R}_0$. Тогда векторное уравнение этой плоскости имеет вид

$$\mathbf{R}(x, y) = \mathbf{R}_0 + x\,\mathbf{m} + y\,\mathbf{n}. \tag{2.3.13}$$

Когда координаты x, y (имеющие размерность длины) пробегают все допустимые значения, конец радиус-вектора $\mathbf{R}(x, y)$ заметает всю рассматриваемую плоскость. Чтобы задать движение материальной точки вдоль данной плоскости, необходимо задать ее координаты как функции времени

$$x_A = f(t), \quad y_A = g(t), \tag{2.3.14}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ суть заданные функции времени, x_A и y_A — координаты той точки плоскости (2.3.14), в которой в данный момент времени находится точка A.

В векторной форме закон движения (2.3.14) имеет вид

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + f(t)\,\mathbf{m} + g(t)\,\mathbf{n}. \tag{2.3.15}$$

По (2.3.15) легко вычислить скорость и ускорение точки A.

$$\mathbf{V}_A = \dot{f}(t)\,\mathbf{m} + \dot{g}(t)\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{W}_A = \ddot{f}(t)\,\mathbf{m} + \ddot{g}(t)\,\mathbf{n}. \tag{2.3.16}$$

Модули скорости и ускорения даются стандартными выражениями

$$V_A = \sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}, \quad W_A = \sqrt{\ddot{f}^2 + \ddot{g}^2}.$$

Чтобы конкретизировать проводимые рассуждения, рассмотрим частный случай движения

$$x_A = a\cos\omega t, \quad y_A = b\sin\omega t, \tag{2.3.17}$$

где a, b, ω постоянные числа, имеющие физическую размерность $[a] = [b]$=м, $[\omega]$= рад/с. При движении (2.3.17) материальная точка участвует в двух колебательных движениях. Одно из них происходит с амплитудой a и частотой ω вдоль прямой, натянутой на вектор $\mathbf{m}$. Второе колебание с амплитудой b и частотой ω происходит вдоль прямой, натянутой на вектор $\mathbf{n}$. В векторной форме закон движения имеет вид (2.3.15) при условии (2.3.17)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a\cos\omega t\ \mathbf{m} + b\sin\omega t\,\mathbf{n}. \tag{2.3.18}$$

При изменении времени конец радиус-вектора $\mathbf{R}_A(t)$ опишет некую кривую в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Эта кривая называется траекторией материальной точки A. Важно осознать, что траектория представляет собой кривую, не зависящую от времени. Иными словами, чтобы получить уравнение траектории, необходимо исключить из (2.3.18) время. В случае (2.3.17) или (2.3.18) это можно сделать аналитически. Действительно, по (2.3.17) имеем

$$\left(\frac{x_A}{a}\right)^2 = \cos^2\omega t, \quad \left(\frac{y_A}{b}\right)^2 = \sin^2\omega t.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1. \tag{2.3.19}$$

Видим, что координаты материальной точки A должны удовлетворять уравнению (2.3.19), которое определяет хорошо известную из аналитической геометрии кривую, являющуюся эллипсом с полуосями a и b. Радиус-вектор (2.3.18) дает нам информацию о положении материальной точки A в каждый момент времени, но увидеть из этого выражения по какой траектории движется эта материальная точка можно только отметив ряд последовательных положений точки. Выражение (2.3.19), напротив, дает хорошее представление о траектории, по которой движется точка, но ничего не говорит о том, в какой именно точке траектории находится материальная точка в данный момент времени. Чтобы совместить представления (2.3.18) и (2.3.19), нужно, прежде всего, дать более удобное описание траектории, которое в явном виде содержало бы возможность фиксации точки траектории. Можно было бы, конечно,

разрешить уравнение (2.3.19) относительно одной из координат. Например, мы можем написать

$$y_A = \pm b\sqrt{1 - \frac{x_A^2}{a^2}}. \tag{2.3.20}$$

Это не слишком удобно. Во-первых, нужно думать о том, какой знак и в каких ситуациях нужно выбирать. Во-вторых, непонятно почему мы выразили y_A как функцию x_A, а не наоборот. В уравнение (2.3.19) обе координаты входят равноправно и нет оснований предпочесть одну из них другой. Поэтому, как правило, представления типа (2.3.20) не используются. Будем рассуждать так. Две переменные x_A и y_A связаны уравнением (2.3.19). Это означает, что фактически только одна из этих переменных может меняться независимо. Можно сказать иначе. Существует некий параметр (который, конечно, можно вводить разными способами) такой, что уравнение (2.3.19) будет выполняться при любом значении этого параметра. Примем, например, следующее представление

$$x_A = a\cos\theta, \quad y_A = b\sin\theta, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{2.3.21}$$

При любом значении θ уравнение (2.3.19) выполнено. Смысл параметра θ также ясен. Действительно, пусть φ — это угол составляемый вектором

$$\mathbf{r} = a\cos\theta\ \mathbf{m} + b\sin\theta\ \mathbf{n}$$

с вектором $\mathbf{m}$. Тогда параметр θ связан с углом φ равенством

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi.$$

Радиус-вектор

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_0 + a\cos\theta\,\mathbf{m} + b\sin\theta\ \mathbf{n} \tag{2.3.22}$$

при заданном значении θ однозначно определяет точку на траектории, а при разных значениях θ радиус-вектор (2.3.22) определяет траекторию материальной точки. Осталось только задать движение материальной точки A вдоль траектории. Закон движения в данном случае очевиден

$$\theta_A = \omega t. \tag{2.3.23}$$

Для другого движения материальной точки по эллиптической орбите закон движения отличается от (2.3.23) и в общем случае имеет вид

$$\theta_A = f(t). \tag{2.3.24}$$

При этом уравнение орбиты (эллипса) определялось бы тем же выражением (2.3.22). Если подставить (2.3.23) в (2.3.22), то придем к закону движения

(2.3.18). Может показаться, что в разбиении закона движения (2.3.18) на два представления (2.3.22) и (2.3.23) нет никакой пользы. Однако это не так. Выражение для траектории (2.3.22) дает нам глобальную характеристику движения, закон движения (2.3.24) представляет собой локальную характеристику. В качестве иллюстрации можно вспомнить стратегию подготовки автогонщика к соревнованиям. Прежде всего, он знакомится с трассой по карте, т.е. он изучает траекторию (линия трассы на карте — это и есть траектория) будущей гонки. По виду траектории автогонщик определяет для себя ориентировочный закон движения (вида (2.3.24)) по трассе, и устанавливает, где он может ехать быстрее, а где нужно снизить скорость. Общее изложение траекторного описания движения будет приведено в следующем параграфе. Здесь мы просто ограничиваемся вычислением векторов скорости и ускорения по (2.3.18):

$$\mathbf{V}_A(t) = \omega(-a\sin\omega t\,\mathbf{m} + b\cos\omega t\mathbf{n}),$$

$$V_A = |\mathbf{V}_A| = \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t},$$

$$\mathbf{W}_A(t) = -\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{m} + b\sin\omega t\,\mathbf{n}),$$

$$W_A(t) = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t}. \qquad (2.3.25)$$

Видим, что рассматриваемое движение не является ни равномерным, ни равноускоренным. Однако оно становится таковым при движении по окружности, когда $a = b$. Этот случай движения целесообразно рассмотреть отдельно. В заключение обратим еще раз внимание на то, что суперпозиция двух колебательных движений вдоль ортогональных направлений приводит к движению по эллиптической орбите, которое внешне мало напоминает колебательное движение.

2.3.5. Движение материальной точки по окружности

Одним из наиболее часто встречающихся видов движения материальной точки является движение по окружности. Поэтому рассмотрим его подробнее. Пусть движение происходит по окружности с центром в точке $\mathbf{R}_0$. Окружность расположена в плоскости, натянутой на единичные ортогональные между собой векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Тогда уравнение этой окружности имеет вид

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}_0 + a\,\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \cos\varphi\ \mathbf{m} + \sin\varphi\ \mathbf{n}, \qquad (2.3.26)$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, a — радиус окружности.

Вектор $a\,\mathbf{e}_r$ идет из точки $\mathbf{R}_0$ в точку окружности с координатой φ, которая есть угол между вектором $a\,\mathbf{e}_r$ и вектором $\mathbf{m}$ (рис. 2.1).

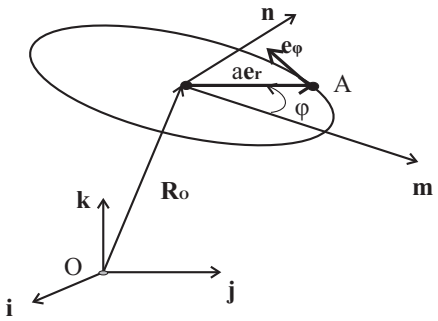

Рис. 2.1. Движение точки по окружности

Закон движения материальной точки A зададим в виде

$$\varphi_A(t) = f(t). \tag{2.3.27}$$

Таким образом, в векторной форме закон движения имеет вид

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a\ \mathbf{e}_r(\varphi_A(t)). \tag{2.3.28}$$

Вектор скорости определяется выражением

$$\mathbf{V}_A(t) = \dot{\mathbf{R}}_A = a\dot{\varphi}(t)\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A) = v_A\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi_A),$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{d\,\mathbf{e}_r}{d\varphi} = -\sin\varphi\ \mathbf{m} + \cos\varphi\ \mathbf{n}. \tag{2.3.29}$$

Единичный вектор $\mathbf{e}_\varphi$ ортогонален вектору $\mathbf{e}_r$ и направлен по касательной к окружности. Величина скорости $v_A(t)$ и ее модуль $V_A = |v_A|$ находятся по формулам

$$v_A(t) = a\dot{\varphi}(t), \quad V_A = a|\dot{\varphi}_A(t)|.$$

Движение по окружности называется равномерным, если

$$\dot{\varphi}_A(t) = \omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \omega t. \tag{2.3.30}$$

Здесь принято, что при $t = 0$ материальная точка находилась в положении

$$\mathbf{R}_A(0) = \mathbf{R}_0 + a\,\mathbf{m}.$$

Нетрудно вычислить и вектор ускорения

$$\mathbf{W}_A = \dot{\mathbf{V}}_A = \ddot{\mathbf{R}}_A = \dot{v}_A\ \mathbf{e}_\varphi - v_A\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi_A) = \dot{\varphi}_A\frac{d\,\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = -\dot{\varphi}_A\,\mathbf{e}_r(\varphi_A).$$

Таким образом, вектор ускорения записывается в виде

$$\mathbf{W}_A = \dot{v}_A\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A) - \frac{v_A^2}{a}\ \mathbf{e}_r(\varphi_A). \tag{2.3.31}$$

Первое слагаемое в этом выражении называется тангенциальным ускорением. При равномерном движении оно равно нулю. Второе слагаемое

$$(-v_A^2/a)\mathbf{e}_r(\varphi_A)$$

называется нормальным ускорением, оно направлено по радиусу к центру окружности. Поэтому иногда его называют центростремительным ускорением. Модуль вектора ускорения равен

$$W_A = \sqrt{\dot{v}_A^2 + v_A^4/a^2}.$$

Если движение по окружности является равномерным ($\dot{v}_A = 0$), то оно одновременно является и равноускоренным: $W_A = v_A^2/a = a\omega^2 = \text{const}$.

2.3.6. Равномерное движение частицы точки по спирали

Равномерное движение материальной точки по окружности было рассмотрено выше и определялось выражениями (2.3.28) и (2.3.30)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a\mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad \varphi_A = \omega t. \tag{2.3.32}$$

Движение материальной точки по спирали получается из движения (2.3.32) добавлением к нему равномерного движения вдоль прямой, ортогональной плоскости окружности, т.е. прямой, натянутой на вектор $\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$. Координату на этой прямой обозначим через z. Тогда

$$\dot{z}_A(t) = v_z = \text{const} \quad \Rightarrow \quad z_A = v_z t. \tag{2.3.33}$$

Таким образом, равномерное движение по спирали определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + v_z t\mathbf{k} + a\mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad \varphi_A = \omega t. \tag{2.3.34}$$

Вектор скорости имеет вид

$$\mathbf{v}_A(t) = v_z\mathbf{k} + a\omega\mathbf{e}_\varphi(\varphi_A), \quad v_A = \sqrt{v_z^2 + a^2\omega^2}. \tag{2.3.35}$$

Вектор ускорения дается выражением

$$\mathbf{W}_A = -a\omega^2\mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad W_A = a\omega^2. \tag{2.3.36}$$

В данном случае движение происходит по спирали, навитой с равномерным шагом на цилиндрическую поверхность радиуса a с осью, натянутой на вектор $\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$. Ускорение (2.3.36) называется осестремительным, поскольку оно направлено к оси цилиндра.

Упражнение. *Вычислить тангенциальное и нормальное ускорения для движения (2.3.34) материальной точки по спирали.*

2.4. Траекторное описание движения точки

Всякая материальная точка A занимает некоторое положение, определяемое радиус-вектором $\mathbf{R}_A$, в пространстве (системе отсчета). Если это положение не меняется во времени, то говорят, что материальная точка покоится относительно выбранной системы отсчета. Движением материальной точки называется изменение ее положения с течением времени. Таким образом, движение определяется заданием векторной функции скалярного аргумента $\mathbf{R}_A(t)$. Совокупность положений материальной точки в разные моменты времени называется траекторией. Геометрическим образом траектории является некая кривая в системе отсчета. Выберем на этой кривой какую-либо точку и будем называть ее точкой отсчета или началом. Введем в рассмотрение координату s, отсчитываемую вдоль кривой. Точке отсчета припишем значение координаты $s = 0$. Ориентируем эту кривую-траекторию, т.е. выберем одно из двух возможных направлений на кривой в качестве положительного, например, слева направо. Тогда точкам, лежащим правее точки $s = 0$, будут приписаны положительные значения координаты s, а точкам, лежащим левее координаты $s = 0$, приписываются отрицательные значения координаты s. Таким образом, все значения координаты s лежат в интервале $-a \le s \le b$, где a и b положительные числа, которые могут принимать и бесконечные значения. Координата s имеет размерность длины. Координате $s = 5$ м соответствует точка, лежащая "правее" начала $s = 0$ и отстоящая от нее на расстояние 5 м, отсчитываемое вдоль кривой. Итак, траектория — это кривая в пространстве, определяемая параметрическим уравнением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(s), \quad -a \le s \le b. \tag{2.4.1}$$

Вектор единичной касательной $\mathbf{t}(s)$ к этой кривой находится по формуле

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{R}'(s), \quad (\ )' \equiv d/ds. \tag{2.4.2}$$

Модуль $\mathbf{t}(s)$ равен единице в силу очевидного равенства $|d\mathbf{R}| = |ds|$. О кривизне кривой можно судить по изменению направления касательного вектора

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{R(s)}\mathbf{n}(s), \quad |\mathbf{n}(s)| = 1. \tag{2.4.3}$$

Ортогональность векторов $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ следует из тождества

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0.$$

Вообще говоря, любой вектор, ортогональный к вектору касательной $\mathbf{t}$, называется нормалью к кривой. Поэтому в каждой точке кривой существует несчетное множество нормалей. Вектор $\mathbf{n}(s)$, введенный согласно (2.4.3)

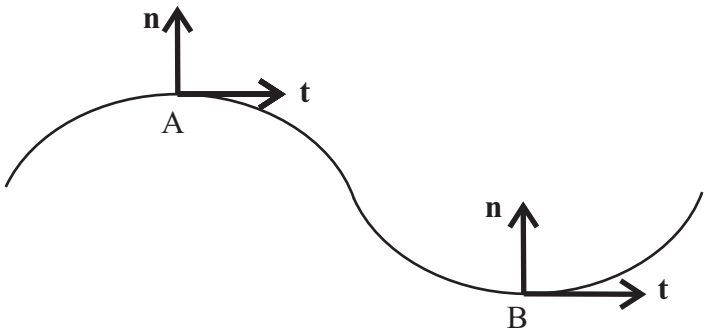

Рис. 2.2. Кривизна кривой

единственным образом, называется главной нормалью к кривой $\mathbf{R}(s)$. Обратим внимание, что в (2.4.3) вектор $\mathbf{n}$ определен только с точностью до выбора положительного направления $\mathbf{n}$. Это направление в какой-либо точке кривой может быть выбрано произвольно. Но, сделав этот выбор в одной точке, во всех остальных точках этот выбор уже диктуется соображениями непрерывности. Итак, считаем, что $\mathbf{n}$ есть непрерывная функция параметра s. После того, как выбор положительного направления вектора осуществлен, знак скаляра $R^{-1}(s)$, называемого кривизной кривой в точке с координатой s, определяется однозначно. Кривизна кривой положительна, если нормаль направлена в сторону выпуклости кривой, и отрицательна в противоположном случае (рис. 2.2), где кривизна в точке A положительна, а кривизна в точке B отрицательна. Величина $R(s)$ называется радиусом кривизны кривой, она имеет размерность длины и может иметь любой знак. Сказанного о кривых нам вполне достаточно, чтобы дать полное траекторное описание движения. Желающие получить дополнительные сведения о кривых могут обратиться к многочисленным книгам по дифференциальной геометрии — см., например, [49].

Итак, траектория движения материальной точки определяется заданием уравнения (2.4.1). Как видим, время вообще не входит в это уравнение, т.е. движение материальной точки уравнением траектории еще не определено. Для этого нам нужно задать закон движения точки A вдоль траектории, т.е. нам нужно задать координату s_A как функцию времени

$$s_A(t) = f(t). \tag{2.4.4}$$

Обычно этот закон записывают в упрощенной форме $s(t)$, т.е. опуская индекс A и имея в виду, что s — это координата точки A на траектории. В векторной форме закон движения объединяет уравнение траектории (2.4.1) и закон движения вдоль траектории (2.4.4)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}(s_A(t)). \tag{2.4.5}$$

Вычисляя по (2.4.5) скорость, получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \dot{s}_A(t)\mathbf{t}(s_A(t)), \tag{2.4.6}$$

где $\mathbf{t}(s_A)$ — единичная касательная к кривой в точке с координатой s_A. Из (2.4.6) видим, что вектор скорости направлен по касательной к траектории. По (2.4.6) мы можем вычислить вектор ускорения

$$\mathbf{W}_A(t) = \ddot{s}_A(t)\mathbf{t}(s_A(t)) + \frac{\dot{s}_A^2(t)}{R(s_A)}\mathbf{n}(s_A). \tag{2.4.7}$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.4.3). Первое слагаемое в правой части (2.4.7) называется тангенциальным ускорением, а второе — нормальным ускорением. Из (2.4.7) видим, что если траектория имеет кривизну, то ускорение точки A отлично от нуля. В частности при равномерном движении точки A по траектории ($\dot{s}_A = \text{const}, \quad \ddot{s}_A = 0$), ускорение точки A отлично от нуля.

2.4.1. Движение частицы по окружности

Это движение уже было описано выше и задавалось выражением (2.3.26)

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}_0 + a(\cos\varphi_A\mathbf{m} + \sin\varphi_A\mathbf{n}), \quad \varphi_A = f(t). \tag{2.4.8}$$

Здесь параметрическое уравнение траектории задано в функции параметра φ — угловой координаты. Чтобы задать уравнение в зависимости от дуговой координаты s, необходимо воспользоваться выражением

$$d\mathbf{R} = \mathbf{t}(s)ds. \tag{2.4.9}$$

С другой стороны, по (2.4.8) имеем

$$d\mathbf{R} = a(-\sin\varphi\,\mathbf{m} + \cos\varphi\,\mathbf{n})d\varphi = \mathbf{t}a\,d\varphi. \tag{2.4.10}$$

Здесь вектор единичной касательной определяется выражением

$$\mathbf{t} = -\sin\varphi\,\mathbf{m} + \cos\varphi\,\mathbf{n}.$$

Сравнивая (2.4.9) и (2.4.10), получаем, что $ds = a\,d\varphi$ или $s = a\varphi$. В данном случае результат был очевиден заранее. Действительно, длина дуги окружности s связана с угловой координатой φ соотношением $s = a\varphi$, как это известно из школьного курса математики. Однако показанный здесь путь нахождения дуговой координаты s верен всегда, но далеко не всегда ведет к столь очевидному результату. Дальнейшее описание можно не приводить, поскольку оно следует из выражения (2.4.8) при замене $\varphi = s/a$.

2.4.2. Полет камня в поле силы тяжести

Рассмотрим задачу о прицельном метании камня. Обратим внимание, что эту задачу на интуитивном уровне умеет решать большинство мальчишек, которые ловко, но не всегда с благими намерениями, поражают выбранные цели. Здесь мы хотим рассмотреть эту задачу на интеллектуальном уровне, что в состоянии выполнить только те, кто получил соответствующее образование. При этом, забегая далеко вперед, мы воспользуемся известным из школьного курса физики вторым законом Ньютона:

$$\text{Масса} \times \text{Ускорение} = \text{Сила}.$$

Понятия массы и силы также считаем (позднее эти понятия будут введены по возможности строго) интуитивно понятными из школьного курса физики. Поскольку камень бросается на малое расстояние, то Земля может считаться плоской, что совершенно недопустимо, например, при запуске баллистической ракеты на расстояние порядка 10 тысяч километров. Впрочем, полет ракеты имеет мало общего с полетом камня, поскольку ракета имеет собственные двигатели. Горизонтальное направление будем задавать единичным вектором $\mathbf{n}$. Натянем на этот вектор прямую, расстояние вдоль которой будем задавать координатой x. Значению $x = 0$ отвечает точка, из которой бросается камень в положительном направлении $\mathbf{n}$. Вертикальное направление будем задавать единичным вектором $\mathbf{k}$, направленным вверх. На этот вектор натянем прямую, расстояние вдоль которой будем определять посредством координаты y. Точка $y = 0$ соответствует условно плоской поверхности Земли. Векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ ортогональны между собой. Таким образом, положение камня в полете определяется радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{n} + y(t)\mathbf{k}. \tag{2.4.11}$$

Его скорость и ускорение определяются выражениями

$$\mathbf{V}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{n} + \dot{y}(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{W}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{n} + \ddot{y}(t)\mathbf{k} \tag{2.4.12}$$

соответственно. В полете на камень действует сила тяготения Земли, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k},$$

где m и g суть масса камня и ускорение свободного падения. Знак минус в выражении для силы показывает, что сила направлена вертикально вниз. Кроме силы тяжести на камень в полете действует сила трения камня о воздух, но влиянием силы трения мы, простоты ради, пренебрежем. Запишем теперь второй закон Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{R}}(t) = -mg\,\mathbf{k}. \tag{2.4.13}$$

Здесь нам дан не сам закон движения камня, а только уравнение, которому он удовлетворяет. Чтобы найти закон движения, нам необходимо решить уравнение (2.4.13), которое выражено в дифференциальной форме. В таких случаях говорят, что необходимо проинтегрировать уравнение (2.4.13). Вообще говоря, нахождение решений дифференциальных уравнений представляет собой довольно сложную математическую проблему, но в данном случае уравнение (2.4.13) является очень простым и без труда интегрируется. Для этого достаточно знать, что производная от постоянного вектора равна нулю.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}(t) = \text{const}. \tag{2.4.14}$$

Перепишем уравнение (2.4.13) в эквивалентном виде

$$m\left[\dot{\mathbf{R}}(t) + gt\mathbf{k}\right]^{\cdot} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}(t) + gt\mathbf{k} = \mathbf{a} = \text{const}, \tag{2.4.15}$$

где постоянный вектор $\mathbf{a}$ может быть любым.

Здесь мы сталкиваемся с важнейшей особенностью, возникающей при отыскании решений дифференциальных уравнений. А именно, само по себе дифференциальное уравнение (2.4.13) не позволяет найти однозначного решения. Удивляться этому не приходится. В самом деле, уравнение (2.4.13) определяет изменение скорости камня в процессе полета. Однако любой мальчишка знает, что при прицельном метании многое определяется тем, как именно он кинет камень, и какую скорость (по величине и по направлению) он сообщит этому камню. На языке математики подобного рода информация называется начальными условиями. В уравнении (2.4.13) эта информация не содержится. Таким образом, чтобы найти однозначное решение задачи, необходимо знать не только закон (в данном случае второй закон Ньютона (2.4.13)), управляющий поведением камня в полете, но и начальные условия. Возможность выполнения начальных условий обеспечивается появлением в решении дифференциального уравнения неких произвольных элементов, называемых произвольными постоянными интегрирования. В решении (2.4.15) роль произвольной постоянной интегрирования играет постоянный вектор $\mathbf{a}$. Обратим внимание, что в левой части (2.4.15) стоит функция времени, а в правой его части стоит постоянный вектор. Смысл последнего обнаруживается, если записать решение (2.4.15) в начальный момент времени $t = 0$, т.е. в момент времени, когда камень покидает руку бросающего. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{V}_0, \tag{2.4.16}$$

где вектор $\mathbf{V}_0$ есть начальная скорость камня.

Теперь решение (2.4.15) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{R}}(t) + gt\mathbf{k} = \mathbf{V}_0. \tag{2.4.17}$$

Вновь получили дифференциальное уравнение, но уже более низкого порядка. В отличие от (2.4.13) в это уравнение входит только первая производная от радиус-вектора. При этом в (2.4.17) уже содержится информация о начальных условиях, т.к. в него входит начальная скорость камня. Уравнение (2.4.17) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left[\mathbf{R}(t) + \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} - \mathbf{V}_0 t\right]^{\cdot} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) + \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} - \mathbf{V}_0 t = \mathbf{b}, \tag{2.4.18}$$

где $\mathbf{b}$ есть произвольный постоянный вектор.

Для определения этого вектора необходимо вновь использовать начальные условия. А именно, нам необходимо знать начальное положение камня. Из (2.4.18) мы видим, что $\mathbf{b} = \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$, поскольку место вылета камня мы приняли за начало отсчета. Теперь (2.4.18) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k}. \tag{2.4.19}$$

Это выражение полностью описывает полет камня. Впрочем, необходимо иметь в виду, что решение (2.4.19) справедливо на ограниченном интервале времени. В самом деле, все знают, что полет прекращается, когда камень упадет на землю или даже раньше, если камень упадет, например, на балкон дома.

Упражнение. *Формально говоря, в выражении (2.4.19) содержится вся необходимая информация. Поэтому может показаться, что задача полностью решена. Это иллюзия. На самом деле, если иметь в виду какие-либо полезные цели, решение задачи с получением (2.4.19) только начинается. Начинающему весьма полезно, на основе (2.4.19), проанализировать ситуацию применительно к стрельбе из дальнобойного орудия и найти ответы на следующие вопросы. Каковы время полета снаряда и дальность его полета? Что определяет дальность полета? Понятно, что масса снаряда должна влиять на дальность его полета. Тогда почему в (2.4.19) не входит масса снаряда? Как поразить цель с заданными координатами? Полезно придумать дополнительные вопросы. Цель этого упражнения состоит не в том, чтобы тренироваться в вычислениях, а в том, чтобы читатель убедился, что его интуиция (здравый смысл) и математические вычисления находятся в полном согласии между собой.*

Вернемся к траекторному описанию движения. Представим вектор $\mathbf{V}_0$ в виде разложения

$$\mathbf{V}_0 = V_n\mathbf{n} + V_k\mathbf{k}.$$

Тогда вместо (2.4.19) будем иметь

$$\mathbf{R}(t) = V_n t\mathbf{n} + (V_k t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}.$$

Сравнивая это выражение с (2.4.11), получаем

$$x(t) = V_n t, \quad y(t) = V_k t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2.4.20}$$

Исключая отсюда время с помощью первого уравнения, получаем

$$y = x\left(\frac{V_k}{V_n} - \frac{1}{2}\frac{gx}{V_n^2}\right). \tag{2.4.21}$$

Подставляя это выражение в (2.4.11), получаем

$$\mathbf{R}(x) = x\mathbf{n} + x\left(\frac{V_k}{V_n} - \frac{1}{2}\frac{gx}{V_n^2}\right)\mathbf{k}. \tag{2.4.22}$$

Уравнение (2.4.22) определяет траекторию, но определяет ее не через параметр s, т.е. длину дуги траектории, а посредством координаты x.

2.5. Движение спутника Земли по круговой орбите

Рассмотрим задачу о движении спутника Земли по круговой орбите. Наше рассмотрение будет в высшей степени схематичным, поскольку мы просто изучаем различные типы движения, а не решаем реальные задачи. Запуск спутника осуществляется следующим образом. Спутник устанавливается на баллистической ракете–носителе, которая стартует с Земли и на расчетной высоте отстреливает спутник с заданной скоростью $\mathbf{V_0}$. Далее спутник движется по инерции в поле тяготения Земли. Траектория этого движения определяется начальными условиями, т.е. положением и скоростью спутника в момент отделения спутника от ракеты–носителя. В процессе движения на спутник действует только сила тяготения Земли.

Введем обозначения: m — масса спутника, M — масса Земли, R_g — радиус Земли, H — высота, на которой спутник отделяется от ракеты. В полете на спутник действует сила, определяемая по закону всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{R^3}\mathbf{R}, \tag{2.5.1}$$

где G — универсальная гравитационная постоянная; R — расстояние от центра Земли до спутника. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -G\frac{mM}{R^3}\mathbf{R}. \tag{2.5.2}$$

Получили нелинейное уравнение для определения вектора $\mathbf{R}(t)$, определяющего положение спутника относительно центра Земли, которую считаем

неподвижной. Принимаем, что спутник движется по плоской орбите, которая, очевидно, лежит в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{V_0}$. Введем в этой плоскости единичные ортогональные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ такие, что

$$\mathbf{R_0} = r_0\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = 0. \tag{2.5.3}$$

Поскольку мы считаем, что спутник движется по круговой орбите, то для вектора положения $\mathbf{R}(t)$ имеем

$$\mathbf{R}(t) = r(\cos\varphi(t)\mathbf{n} + \sin\varphi(t)\mathbf{m}), \tag{2.5.4}$$

где $r = \text{const}$. Угол $\varphi(t)$ определяет положение спутника на орбите. Скорость и ускорение спутника вычисляются по формулам

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = r\dot\varphi(-\sin\varphi(t)\mathbf{n} + \cos\varphi(t)\mathbf{m}), \tag{2.5.5}$$

$$\mathbf{W} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -r\dot\varphi^2(\cos\varphi\mathbf{n} + \sin\varphi\mathbf{m}) + r\ddot\varphi(-\sin\varphi\mathbf{n} + \cos\varphi\mathbf{m}).$$

Подставляя (2.5.4) и (2.5.5) в уравнение (2.5.2), получаем

$$-r\dot\varphi^2(\cos\varphi\mathbf{n} + \sin\varphi\mathbf{m}) + r\ddot\varphi(-\sin\varphi\mathbf{n} + \cos\varphi\mathbf{m}) = -G\frac{M}{r^2}(\cos\varphi\mathbf{n} + \sin\varphi\mathbf{m}). \tag{2.5.6}$$

Заметим теперь, что векторы

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{n} + \sin\varphi\mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{n} + \cos\varphi\mathbf{m} \tag{2.5.7}$$

имеют единичную длину и ортогональны между собой. Умножая обе части уравнения (2.5.6) скалярно на второй из векторов (2.5.7), получаем, что

$$\ddot\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot\varphi = \omega = \text{const} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \omega t + \alpha. \tag{2.5.8}$$

Если считать, что при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, то $\alpha = 0$. Теперь уравнение (2.5.6) дает

$$\dot\varphi^2 = \omega^2 = \frac{GM}{r^3} \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r}}. \tag{2.5.9}$$

Таким образом, все параметры движения найдены и вектор положения имеет вид

$$\mathbf{R}(t) = r(\cos\omega t\mathbf{n} + \sin\omega t\mathbf{m}). \tag{2.5.10}$$

Обратим внимание, что мы не использовали начальное условие по скорости. Это означает, что начальную скорость нельзя задавать произвольно, если мы хотим, чтобы спутник двигался по круговой орбите. Согласно (2.5.10) имеем

$$\mathbf{V}(t) = r\omega(-\sin\omega t\mathbf{n} + \cos\omega t\mathbf{m}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V}(0) = r\omega\mathbf{m}. \tag{2.5.11}$$

Таким образом, для движения спутника по круговой орбите начальная скорость должна быть направлена строго ортогонально вектору начального положения $\mathbf{R}(0)$ и, кроме того, она должна иметь строго определенную величину, определяемую выражением (2.5.11). Если модуль начальной скорости будет меньше этого значения, то спутник будет двигаться по орбите, спускающейся к Земле, и, в конце концов, спутник упадет на Землю. Если начальная скорость будет больше найденного значения (2.5.11), то спутник будет двигаться по эллиптической орбите или даже вообще покинет область притяжения Земли. Этот случай мы рассмотрим в следующем пункте. Минимальная скорость, при которой тело может стать спутником Земли, называется первой космической скоростью. Эта скорость зависит от высоты над уровнем Земли. Согласно (2.5.11) имеем

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_g + H}}. \tag{2.5.12}$$

Вычислим силу тяготения (2.5.1) на высоте H

$$F = -m\frac{GM}{(R_g + H)^2}.$$

Величина

$$g = GM/R_g^2 = 9,82 \text{ м/с}^2$$

называется ускорением свободного падения на уровне поверхности Земли. Поэтому выражение (2.5.12) можно переписать в виде

$$V_0 = \sqrt{\frac{gR_g^2}{R_g + H}} = \sqrt{gR_g}\frac{1}{(1 + H/R_g)^{1/2}}. \tag{2.5.13}$$

Чем больше H, тем меньше величина скорости, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно стало спутником Земли. Скорость

$$V_1 = \sqrt{gR_g} \simeq 7,9 \text{ км/с} \tag{2.5.14}$$

называется первой космической скоростью. При вычислениях на основе формулы (2.5.14) принято, что $R_g = 6400$ км.

2.6. Движение тела в центральном поле тяготения

Выше мы рассмотрели движение спутника Земли по круговой орбите. Там мы видели, что такое движение возможно только при жестком ограничении на величину и направление начальной скорости. Теперь мы откажемся от этого

ограничения и рассмотрим более общую ситуацию. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Задача сводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3}\mathbf{R} \tag{2.6.1}$$

при начальных условиях

$$t = 0: \quad \mathbf{R}(0) = (R_g + H)\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{V}_0. \tag{2.6.2}$$

Сначала покажем, что векторы положения $\mathbf{R}(t)$, удовлетворяющие уравнению (2.6.1), при всех t лежат в одной и той же плоскости. Для этого векторно умножим обе части уравнения (2.6.1) на вектор $\mathbf{R}(t)$. В результате получим

$$\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \tag{2.6.3}$$

Если вектор $\mathbf{L}$ умножить на массу тела, то он будет определять момент количества движения, но это понятие будет введено только в следующей главе. Таким образом, мы видим, что вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}(t)$ всегда лежат в одной и той же плоскости, нормаль к которой совпадает с постоянным вектором $\mathbf{L}$. В самом деле, умножая (2.6.3) скалярно на $\mathbf{R}(t)$, получаем

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{L} = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{R}(t)$ лежит в плоскости, ортогональной $\mathbf{L}$. Легко видеть, что эта плоскость натянута на векторы $\mathbf{R}(0)$ и $\mathbf{V}_0$. Если векторы $\mathbf{R}(0)$ и $\mathbf{V}_0$ не лежат на одной прямой, то эта плоскость находится однозначно. Выберем в этой плоскости пару единичных ортогональных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ таких, что

$$\mathbf{R}_0 = R(0)\mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Введем в рассмотрение единичные векторы

$$\mathbf{e_r} = \cos\varphi\mathbf{n} + \sin\varphi\mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{n} + \cos\varphi\mathbf{m}. \tag{2.6.4}$$

Видим, что они ортогональны между собой. Смысл векторов $\mathbf{e_r}$ и $\mathbf{e}_\varphi$ хорошо знаком тем, кто уже изучил полярную (цилиндрическую) систему координат; но сейчас мы будем использовать их совершенно формально. Вектор $\mathbf{R}(t)$, определяющий положение тела относительно Земли, будем искать в виде

$$\mathbf{R}(t) = R(t)(\cos\varphi(t)\mathbf{n} + \sin\varphi(t)\mathbf{m}) = R(t)\mathbf{e_r}(t). \tag{2.6.5}$$

Векторы скорости и ускорения находятся по выражениям

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{R}(t)\mathbf{e_r}(t) + R(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi, \tag{2.6.6}$$

$$\mathbf{W}(t) = \ddot{\mathbf{R}}(t) = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)\mathbf{e_r} + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (2.6.1), получаем

$$(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)\mathbf{e_r} + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi = -\frac{GM}{R^2}\mathbf{e_r}. \tag{2.6.7}$$

Это уравнение эквивалентно двум скалярным

$$\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{R^2}, \tag{2.6.8}$$

$$R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} = 0. \tag{2.6.9}$$

Система (2.6.8) — (2.6.9) относительно легко интегрируется. При этом следует различать два случая

$$1)\ \dot{\varphi} = 0, \quad 2)\ \dot{\varphi} \neq 0. \tag{2.6.10}$$

В первом случае мы имеем радиальное движение тела

$$\mathbf{R}(t) = R(t)\mathbf{m} = R(t)\mathbf{e_r}(0). \tag{2.6.11}$$

Это движение возможно только в том случае, если начальная скорость $\mathbf{V_0}$ также была направлена строго вдоль радиуса. Уравнение (2.6.8) при $\dot{\varphi} = 0$ принимает вид

$$\ddot{R} + \frac{GM}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{R} + g\frac{R_g^2}{R^2} = 0,$$

где использованы обозначения предыдущего пункта.

После умножения последнего уравнения на $\dot{R}$ оно приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{R}^2 - gR_g\frac{R_g}{R}\right] = 0.$$

Откуда следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, не зависит от времени, т.е. имеем интеграл движения

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - g\frac{R_g}{R} = A. \tag{2.6.12}$$

Для нахождения A используем начальные условия (2.6.2), где начальная скорость $\mathbf{V}_0$ направлена по вектору $\mathbf{e}_r(0)$

$$\mathbf{V}_0 = V_0\mathbf{e}_r(0). \tag{2.6.13}$$

Тогда для A получаем выражение

$$\frac{1}{2}V_0^2 - V_1^2\frac{R_g}{R_g + H} = A,$$

где через V_1 обозначена первая космическая скорость, введенная в предыдущем пункте.

Теперь выражение (2.6.12) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = V_0^2 - \frac{2R_g}{R_g + H}V_1^2 + V_1^2\frac{2R_g}{R}. \tag{2.6.14}$$

Дальнейший анализ зависит от знака начальной скорости. Если $V_0 < 0$, т.е. телу была сообщена скорость по направлению к Земле, то при малых t величина $\dot{R}(t) < 0$, т.е. расстояние тела от центра Земли уменьшается, а тело падает на Землю. При этом ничего интересного не происходит. Если же $V_0 > 0$, т.е. телу сообщена начальная скорость по направлению от Земли, то возможны варианты. Если

$$V_0^2 \geq \frac{2R_g}{R_g + H}V_1^2, \tag{2.6.15}$$

то по (2.6.14) видим, что $\dot{R} > 0$, т.е. расстояние тела от Земли будет монотонно возрастать до бесконечности, а тело навсегда покинет область притяжения Земли. Минимальное значение скорости, при котором это возможно, называется второй космической скоростью. На поверхности Земли, т.е. при $H = 0$, она равна

$$V_2 = \sqrt{2}V_1 \simeq 11,2 \text{ км/с}.$$

Если же неравенство (2.6.15) нарушено, т.е. начальная скорость меньше V_2, то наступит момент, когда производная $\dot{R}$ обратится в нуль, а далее станет отрицательной, т.е. тело начнет падать на Землю. Рассмотрим случай, когда $\dot{\varphi} \neq 0$. Он немного сложнее рассмотренного. В этом случае $R\dot{\varphi} \neq 0$, и мы можем переписать уравнение (2.6.9), разделив его на $R\dot{\varphi}$. Тогда получим

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2\frac{\dot{R}}{R} = \frac{d}{dt}\left[\ln\dot{\varphi} + 2\ln R\right] = \frac{d}{dt}\ln R^2\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^2(t)\dot{\varphi}(t) = C = \text{const}. \tag{2.6.16}$$

Найденный интеграл называется интегралом площадей и выражает собой один из законов Кеплера. Постоянная C в (2.6.16) находится по начальным условиям

$$C = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0)(R_g + H). \tag{2.6.17}$$

Исключая $\dot{\varphi}(t)$ с помощью интеграла (2.6.16) из уравнения (2.6.8), получаем уравнение для нахождения расстояния $R(t)$

$$\ddot{R} - \frac{C^2}{R^3} + g\frac{R_g^2}{R^2} = 0. \tag{2.6.18}$$

Умножая это уравнение на $\dot{R}$, приводим его к полной производной

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{R^2} - g\frac{R_g^2}{R}\right] = 0.$$

Отсюда после несложных преобразований следует интеграл

$$\dot{R}^2(t) = V_0^2 + 2V_1^2\left(\frac{R_g}{R(t)} - \frac{R_g}{R_g + H}\right) - (\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0))^2\left(\frac{R_g + H}{R(t)}\right)^2. \qquad (2.6.19)$$

Анализ этого уравнения относительно сложен. В принципе, оно полностью интегрируется и его решение можно найти во многих книгах по механике. Но нас сейчас интересует не явное интегрирование уравнения (2.6.19), а характер траектории движения тела в зависимости от значения начальной скорости. Для ответа на этот вопрос достаточно проанализировать правую часть уравнения (2.6.19). Ясно, что функция $R(t)$ должна быть такой, чтобы правая часть (2.6.19) была бы неотрицательной и, кроме того, $R(t) \geq R_g$. Допустим, что правая часть (2.6.19) строго положительна. Тогда производная $\dot{R}(t)$ знакопостоянна и функция $R(t)$ либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает. В первом случае тело упадет на Землю, а во втором случае оно покинет область притяжения Земли. В обоих случаях тело не может быть спутником Земли. Наиболее интересен случай, когда при некоторых значениях $\mathbf{R}(t)$ правая часть (2.6.19) обращается в нуль. При этом также возможны варианты. При анализе этих вариантов изучающий должен обратить внимание на то, что для полного понимания существа вопроса совсем не обязательно находить точное решение уравнения (2.6.19). Более того, для этого вполне достаточно знаний, полученных в школе, поскольку все сводится к анализу квадратного уравнения. Перепишем уравнение (2.6.19) в эквивалентной форме

$$\dot{R}^2(t) = -V_\varphi^2(1+\alpha)^2[x^2 - ax + b], \quad 0 \leq x = \frac{R_g}{R(t)} \leq 1, \qquad (2.6.20)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \frac{H}{R_g}, \quad V_\varphi = V_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0) \neq 0, \quad a = \frac{2V_1^2}{V_\varphi^2(1+\alpha)^2}, \quad b = \frac{2V_1^2 - (1+\alpha)V_0^2}{V_\varphi^2(1+\alpha)^3}. \qquad (2.6.21)$$

Из (2.6.20) следует, что

$$f(x) \equiv x^2 - ax + b \leq 0. \qquad (2.6.22)$$

Если левая часть этого уравнения при $0 \leq x \leq 1$ строго меньше нуля, то тело либо падает на Землю, либо улетает на бесконечность. В обоих случаях

тело не может быть спутником Земли. Необходимыми и достаточными условиями строгой отрицательности первой части неравенства (2.6.22) являются три неравенства

$$b < 0, \quad 1 - a + b < 0, \quad b - a^2/4 < 0. \tag{2.6.23}$$

Первые два неравенства суть условия отрицательности функции $f(x)$ на концах интервала $x = 0$ и $x = 1$. Последнее неравенство определяет отрицательность максимального значения функции $f(x)$ в точке $x = a/2$, при условии, что

$$\frac{a}{2} = \frac{V_1^2}{V_\varphi^2(1+\alpha)^2} < 1.$$

Если это условие нарушено, то последнее неравенство в (2.6.23) следует отбросить. Обсуждаемые неравенства налагают ограничения на начальные значения V_0^2, V_φ^2 и H. Теперь следует рассмотреть случай, когда $f(x)$ на интервале $0 \leq x \leq 1$ может обращаться в нуль. Для этого достаточно найти корни уравнения $f(x) = 0$. Они определяются выражениями

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \tag{2.6.24}$$

Корни существуют при условии, что

$$\frac{a^2}{4} > b. \tag{2.6.25}$$

Отдельно следует изучить случай кратного корня. Для того, чтобы тело могло стать спутником Земли, необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к неравенству (2.6.25) выполнялось неравенство

$$0 \leq \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \leq 1. \tag{2.6.26}$$

При выполнении неравенств (2.6.25) и (2.6.26) тело будет двигаться по эллиптической орбите вокруг Земли. Дальнейший анализ проводить не будем, ибо любознательный читатель сделает его самостоятельно, а всем остальным он неинтересен.

Глава 3.

Кинематика: спинорные движения

3.1. Абсолютно твердое тело

Ранее были рассмотрены описания движений материальных точек. При этом считалось, что движение материальной точки вполне определено, если известно ее положение, скорость и ускорение. В дальнейшем это описание будет дополнено введением спинорных движений тел-точек. Однако для этого необходимо изучить само понятие спинорного движения, которое значительно сложнее по своей природе, нежели обычное (трансляционное) движение, и которое значительно труднее для интуитивного восприятия. Поэтому начинать изучение спинорного движения лучше всего на примере интуитивно ясных моделей. Одной из таких моделей, имеющей к тому же большое практическое значение, является модель абсолютно твердого тела. Всякое макротело можно представлять себе как множество микрочастиц или материальных точек. Макротело может включать произвольное, вплоть до бесконечного, число материальных точек. Рассмотрим какую-либо точку A макротела. Ее движение характеризуется радиус-вектором

$$\mathbf{R}_A(t), \qquad A \text{ — любая точка тела.} \tag{3.1.1}$$

Здесь индекс A можно рассматривать как имя рассматриваемой точки. Будем считать, что этот индекс пробегает все имена точек, составляющих макротело. Таким образом, (3.1.1) это не один какой-то радиус-вектор, а множество различных радиусов-векторов, каждый из которых задает движение определяемой им точки. Иными словами, (3.1.1) содержит столько радиус-векторов, сколько частиц содержится в рассматриваемом макротеле. В общем случае этих частиц может быть бесконечно много. Поэтому описание движения макротела общего вида является бесконечномерным со всеми вытекающими отсюда последствиями. Ситуация резко упрощается, если рассматриваемое макротело можно считать абсолютно твердым.

Определение. *Макротело называется абсолютно твердым, если расстояния между точками этого тела остаются неизменными при всех возможных движениях макротела.*

Если условие, указанное в определении абсолютно твердого тела, не выполняется, то такое макротело называют деформируемым. Разумеется, абсолютно твердое тело это только модель, в реальности все тела являются деформируемыми. Однако во многих случаях деформируемостью тела можно пренебречь. Следует, впрочем, отметить, что важны не только свойства тела, но и условия рассматриваемой задачи. Одно и то же тело в одних задачах можно считать абсолютно твердым, а в других задачах подобная идеализация неприемлема. Тем не менее, изучение идеализированных моделей является необходимым шагом на пути изучения механики. Принятое выше определение абсолютно твердого тела в математической форме можно выразить следующим образом

$$|\mathbf{R}_A(t_1) - \mathbf{R}_B(t_1)| = |\mathbf{R}_A(t_2) - \mathbf{R}_B(t_2)|, \tag{3.1.2}$$

где A и B — две любые произвольно выбранные точки абсолютно твердого тела, а t_1 и t_2 два произвольно выбранных момента времени.

Из (3.1.2) немедленно вытекает, что не только длины векторов $\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$ остаются неизменными в процессе движения, но и углы между векторами $\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_A$ не меняются при движениях абсолютно твердого тела

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}_B(t_1) - \mathbf{R}_A(t_1)) \cdot (\mathbf{R}_C(t_1) - \mathbf{R}_A(t_1)) = \\ = (\mathbf{R}_B(t_2) - \mathbf{R}_A(t_2)) \cdot (\mathbf{R}_C(t_2) - \mathbf{R}_A(t_2))\,.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Упражнение. *Используя только определение (3.1.2), доказать равенство (3.1.3).*

Кажется поистине удивительным, как много нетривиальных следствий можно извлечь из единственного равенства (3.1.2). Этим следствиям будет посвящена вся оставшаяся часть данной главы. Прежде, чем обращаться к ним, нам необходимо ввести пару вспомогательных понятий-образов.

Начнем с понятия материального вектора. Это понятие не используется в литературе, но оно весьма полезно для правильного интуитивного восприятия движения абсолютно твердого тела. Выберем в теле две произвольные точки A и B и соединим их стрелкой. В результате получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, состоящий из точек тела и как бы вмороженный в это тело. Объект $\overrightarrow{AB}$ будем называть материальным вектором, который является чисто физическим объектом. При движениях тела этот материальный вектор перемещается вместе с телом, не претерпевая при этом никаких изменений относительно самого тела. Следует сразу же подчеркнуть, что ни в какие математические формулы материальный вектор сам по себе не входит и не может входить, ибо он

определен в теле, а математика имеет дело с объектами, заданными в системе отсчета. Связь между материальными векторами и их математическими образами дается следующими отношениями.

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{R}_{AB}(t) \equiv \mathbf{R}_B(t) - \mathbf{R}_A(t). \tag{3.1.4}$$

Таким образом, истинный вектор $\mathbf{R}_{AB}(t)$ — это как бы образ (отпечаток), оставляемый материальным вектором $\overrightarrow{AB}$ в системе отсчета в данный момент времени. Если тело движется, то вместе с ним движется и материальный вектор $\overrightarrow{AB}$. Последний не меняется, но его образ в системе отсчета меняется во времени. Именно посредством своего математического образа материальный вектор входит во все математические формулы. Заметим, что всякому материальному вектору можно поставить в соответствие его математический образ, т.е. истинный вектор. Но далеко не всякий истинный вектор имеет свой материальный прообраз. Например, не имеют материальных прообразов векторы силы, момента, скорости и многие другие. Тем не менее, необходимо научиться воспринимать и такие математические объекты на интуитивном уровне. Материальный вектор $\overrightarrow{AB}$ описывает ориентацию твердого тела относительно системы отсчета только с точностью до поворота тела вокруг материальной оси, натянутой на вектор $\overrightarrow{AB}$. Чтобы устранить эту неоднозначность, введем в рассмотрение объект, который будем называть двойным материальным вектором и обозначаться $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. Выберем в теле три произвольных точки A, B, C, не лежащих на одной прямой. Введем в рассмотрение пару материальных векторов. Эту пару можно ввести различными способами. Например, можно ввести пару $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Можно ввести пару $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Важно только, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не лежали на одной прямой. В таком случае задание любой из этих пар векторов полностью фиксирует ориентацию тела в системе отсчета.

Замечание. *Термин "ориентация" используется в данной книге в двух совершенно различных смыслах. Ранее речь шла об ориентации системы отсчета и различались правоориентированные и левоориентированные системы отсчета. Встречается также термин ориентированная кривая. Здесь термином "ориентация" обозначается выбор одной реализации из двух равноправных возможностей. Например, ориентировать кривую — это значит выбрать из двух возможных направлений на кривой то. которое принимается положительным. Использование термина "ориентация" в указанном смысле общепринято в математической литературе. В технике термин "ориентация" используется в другом смысле. Видимо, всем ясен смысл утверждений: ориентировать солнечные батареи спутника на Солнце или ориентировать зеркало телескопа. Здесь речь идет о фиксации угловых положений тела.*

Иными словами, задание ориентации тела в пространстве (системе отсчета) означает фиксацию угловых координат тела по отношению к выбранному трехграннику осей. При этом не имеет значения в каком месте системы отсчета находится тело. Выше, говоря о задании ориентации тела в системе отсчета, мы использовали термин "ориентация" именно в этом, втором смысле. В механике и математика, и техника тесно переплетаются. Отсюда и возможность появления несогласованности в терминологии. К этому нужно быть готовым. К счастью, подобная несогласованность в терминах — явление относительно редкое.

Вернемся к описанию задания ориентации тела. Мы видим, что задание одного материального вектора позволяет судить об ориентации тела только с точностью до поворота этого тела вокруг материального вектора. Чтобы избежать этой неоднозначности, в рассмотрение вводится еще один материальный вектор, не коллинеарный первому. Назначение этого второго вектора состоит в том, чтобы наблюдать поворот тела вокруг первого материального вектора. В данной книге в качестве пары материальных векторов выбрана пара $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Жесткая конструкция, состоящая из $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, будет называться двойным материальным вектором. Вектор $\overrightarrow{AB}$ в этой паре будет называться базой двойного материального вектора. Вектор $\overrightarrow{BC}$ в этой паре будет называться кросс-вектором двойного материального вектора. Читателю полезно немного поупражняться. Возьмите два одинаковых кубика и перенумеруйте их грани. Затем на одноименных гранях нарисуйте одинаковые двойные векторы. В результате вы получите два одинаковых экземпляра тела. Убедитесь, что если двойные векторы этих тел одинаково ориентированы в системе отсчета, то и сами тела одинаково ориентированы в системе отсчета, хотя они могут быть расположены в разных областях системы отсчета. Истинно говорят, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (или прочитать). Двойной материальный вектор, сам по себе, конечно, не входит ни в одну математическую формулу и ни в одно уравнение. Формальные описания имеют дело с двойными векторами, заданными в системе отсчета. Например, в момент времени t пара материальных векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ совпадает с парой истинных векторов $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{a}(t), \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{b}(t).$$

Именно пара векторов $(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$, заданная в системе отсчета, и является математическим образом двойного материального вектора.

3.2. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

Движение какого-либо тела определяется заданием движений всех частиц (точек), составляющих тело. В общем случае тело состоит из бесконечного набора точек. Поэтому описание его движения бесконечномерно, т.е. требует задания бесконечного набора векторов, зависящих от времени, определяющих положение всех точек тела. Для абсолютно твердого тела ситуация упрощается. Оказывается, что движение любой точки абсолютно твердого тела полностью определено, если известно движение какой-либо одной произвольно выбираемой точки Q тела, называемой полюсом, и, кроме того, определен некий тензор второго ранга $\mathbf{P}(t)$, называемый тензором поворота.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, движущееся относительно выбранной системы отсчета. Движение абсолютно твердого тела сводится к трансляциям и поворотам относительно системы отсчета. Выберем в теле какую-нибудь точку Q, которую будем называть полюсом. Выберем еще три точки в теле A_1, A_2, A_3. Выбор этих точек также произволен , но удовлетворяет ограничению: четыре точки Q, A_1, A_2, A_3 не должны лежать в одной плоскости. Выбранным точкам отвечают три материальных вектора $\overrightarrow{QA_1}$, $\overrightarrow{QA_2}$ и $\overrightarrow{QA_3}$, которые, очевидно, не лежат в одной плоскости. Выберем теперь какое-либо положение абсолютно твердого тела в системе отсчета. В этом положении полюс Q тела определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{r}_Q$. Ориентация тела в выбранном положении определяется заданием тройки векторов $\mathbf{e}_m$ такой, что

$$\overrightarrow{QA_1} \sim \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{QA_2} \sim \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{QA_3} \sim \mathbf{e}_3. \tag{3.2.1}$$

Определение. *Положение тела, фиксируемое заданием четверки векторов*

$$\mathbf{r}_Q, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3, \tag{3.2.2}$$

называется отсчетным.

Положение любой точки S тела в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_Q + x_S^m \mathbf{e}_m \equiv \mathbf{r}_Q + \sum_{m=1}^{3} x_S^m \mathbf{e}_m, \tag{3.2.3}$$

где числа x^1, x^2, x^3 называются материальными координатами.

Точке A_1 отвечают координаты $x^1 = 1$, $x^2 = x^3 = 0$. Точке A_2 соответствуют координаты $x^1 = 0$, $x^2 = 1$, $x^3 = 0$. Точке A_3 соответствуют координаты $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 1$. Координаты x^m позволяют идентифицировать все точки абсолютно твердого тела. Отсчетное положение абсолютно твердого

тела может выбираться совершенно произвольно, причем выбор диктуется соображениями удобства и зависит от рассматриваемой задачи. Заметим, что в реальном движении положение рассматриваемого тела может никогда не совпадать с отсчетным положением.

Определение. *Положение тела в данный момент времени называется актуальным.*

Чтобы задать актуальное положение тела, мы должны задать радиус-вектор $\mathbf{R}_Q(t)$, определяющий положение полюса Q в данный момент времени t, а также тройку векторов $\mathcal{E}_m$ такую, что

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathcal{E}_1(t), \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathcal{E}_2(t), \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathcal{E}_3(t).$$

Таким образом, актуальное положение определяется заданием четверки векторов

$$\mathbf{R}_Q(t), \quad \mathcal{E}_1(t), \quad \mathcal{E}_2(t), \quad \mathcal{E}_3(t). \tag{3.2.4}$$

Актуальное положение произвольной точки S находится по формуле

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + X_S^m \mathcal{E}_m(t), \tag{3.2.5}$$

где X_S^m — координаты точки S тела относительно базиса $\mathcal{E}_m(t)$.

Теорема. *Актуальное положение произвольной точки S абсолютно твердого тела полностью определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{R}_Q(t)$ и собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$ и вычисляется с помощью уравнения*

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \tag{3.2.6}$$

где тензор 2-го ранга $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P} = +1 \tag{3.2.7}$$

и не зависит от выбора ни полюса Q , ни точки S, ни каких бы то ни было других точек абсолютно твердого тела.

Доказательство. Впервые изучающий предмет вполне может просто твердо запомнить уравнение (3.2.6). Оно носит название основного уравнения кинематики абсолютно твердого тела. Нижеследующее доказательство следует подробно изучить, а еще лучше самостоятельно проделать, только если в этом возникнет необходимость. При этом важно обратить внимание на два обстоятельства. Первое. Входящие в уравнение (3.2.6) радиус-вектор $\mathbf{R}_Q(t)$ и тензор $\mathbf{P}(t)$ являются характеристиками движения абсолютно твердого тела и никак не связаны с какими бы то ни было особенностями строения абсолютно твердого тела. При этом вектор $\mathbf{R}_Q(t)$ характеризует трансляционное движение абсолютно твердого тела, а тензор $\mathbf{P}(t)$ описывает спинорное (вращательное)

движение абсолютно твердого тела. В дальнейшем тензор $\mathbf{P}(t)$ будем называть тензором поворота. Второе обстоятельство связано со способом введения тензора поворота. Следует обратить внимание, что тензор поворота вводится не для удобства описания (можно вводить, а можно не вводить), но вводится по необходимости. Иными словами, повороты тела описываются тензором второго ранга, и с этим ничего нельзя поделать. Поэтому трудно согласиться с распространенным мнением о том, что теоретическую механику для студентов младших курсов следует излагать без применения тензорного языка. Можно, конечно, замаскировать тензор поворота разного рода матрицами, но ничего, кроме внесения неясности в трактовки, это не меняет.

Обратимся непосредственно к доказательству уравнения (3.2.6). Для этого, по существу, нам нужно доказать всего два факта

$$1)\ x_S^m = X_S^m, \quad \forall S; \quad 2)\ \mathcal{E}_m(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{e}_m. \tag{3.2.8}$$

Оба эти факта совершенно очевидны, т.е. видны очам. Поэтому речь идет о сугубо формальном доказательстве, опирающимся исключительно на определение абсолютно твердого тела (3.1.2). Векторы

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q \tag{3.2.9}$$

линейно независимы и потому могут быть использованы в качестве базиса. Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу g_{mn} и обратную к ней матрицу g^{mn}

$$\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_n = g_{mn}, \quad g_{mn}g^{np} = \delta_m^p. \tag{3.2.10}$$

Зная матрицу g^{np}, можно ввести в рассмотрение векторы взаимного базиса $\mathbf{e}^m$

$$\mathbf{e}^m = g^{mn}\,\mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n = g_{mn}\,\mathbf{e}^m. \tag{3.2.11}$$

Из равенства (3.2.3) следует

$$x_S^m = (\,\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)\cdot\mathbf{e}^m \tag{3.2.12}$$

Все сказанное относилось к отсчетному положению тела. Обратимся к рассмотрению актуального положения тела. Подчеркнем, что и актуальное, и отсчетное положение тела рассматривается в одной и той же системе отсчета. Векторы

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathbf{R}_{A_m}(t) - \mathbf{R}_Q(t) \tag{3.2.13}$$

удовлетворяют условиям

$$\mathcal{E}_m\cdot\mathcal{E}_n = (\,\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q)\cdot(\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) = (\mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q)\cdot(\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = (\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_n) = g_{mn}, \tag{3.2.14}$$

которые немедленно следуют из (3.1.3). Поэтому для взаимных векторов $\mathcal{E}^m$ имеем

$$\mathcal{E}^m(t) = g^{mn}\mathcal{E}_n(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_n = g_{nm}\mathcal{E}^m. \tag{3.2.15}$$

Из равенства (3.2.5) следует

$$X_S^m = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q)\cdot\mathcal{E}^m = g^{mn}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q)\cdot\mathcal{E}_n == g^{mn}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q)\cdot(\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) =$$

$$g^{mn}(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)\cdot(\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = g^{mn}(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)\cdot\mathbf{e}_n = (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)\cdot\mathbf{e}^m = x_S^m. \tag{3.2.16}$$

Здесь также использовано равенство (3.1.3). Теперь равенство (3.2.5) может быть переписано в виде

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + x_S^m\mathcal{E}_m(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathcal{E}_m(t)[\mathbf{e}^m\cdot(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)] =$$
$$= \mathbf{R}_Q(t) + (\mathcal{E}_m(t)\otimes\mathbf{e}^m)\cdot(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q).$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t)\cdot(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \tag{3.2.17}$$

где

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{E}_m(t)\otimes\mathbf{e}^m = g^{mn}(\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q)\otimes(\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q). \tag{3.2.18}$$

Итак, мы ввели в рассмотрение некий объект $\mathbf{P}(t)$, являющийся совокупностью диад. Подобные объекты называются тензорами второго ранга, т.е. $\mathbf{P}(t)$ есть тензор второго ранга. Равенство (3.2.17) внешне совпадает с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (3.2.6). Однако в теореме утверждается нечто большее, нежели в (3.2.17). Во-первых, тензор $\mathbf{P}(t)$ должен удовлетворять условиям (3.2.7). Во-вторых, тензор $\mathbf{P}(t)$ не должен зависеть от выбора точек Q, A_1, A_2, A_3 в абсолютно твердом теле. Ни первого, ни второго мы еще не доказали. Докажем сначала, что $\mathbf{P}(t)$, определенный равенством (3.2.18), есть ортогональный тензор. Заметим, что

$$\mathbf{P} = \mathcal{E}_m\otimes\mathbf{e}^m = g^{mn}\mathcal{E}_m\otimes\mathbf{e}_n = \mathcal{E}^n\otimes\mathbf{e}_n = \mathcal{E}^m\otimes\mathbf{e}_m. \tag{3.2.19}$$

Здесь мы использовали равенства (3.2.11) и (3.2.15). Итак,

$$\mathbf{P} = \mathcal{E}_m\otimes\mathbf{e}^m = \mathcal{E}^m\otimes\mathbf{e}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{e}^m\otimes\mathcal{E}_m = \mathbf{e}_m\otimes\mathcal{E}^m. \tag{3.2.20}$$

Операция транспонирования тензора и другие простейшие операции с тензорами второго ранга описаны в [18]. Напомним также, что для любой тройки линейно независимых векторов $\mathbf{a}_m$ справедливо тождество

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}^m\otimes\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m\otimes\mathbf{a}^m,$$

где $\mathbf{E}$ - единичный тензор 2-го ранга. Следовательно, для троек $\mathbf{e}_m$ и $\mathcal{E}_m$ имеем

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}^m = \mathcal{E}^m \otimes \mathcal{E}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m.$$

Теперь находим

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = (\mathcal{E}_m \otimes \mathbf{e}^m) \cdot (\mathbf{e}_n \otimes \mathcal{E}^n) = \delta^m_n \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}^n = \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}^m = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{e}^m \otimes \mathcal{E}_m) \cdot (\mathcal{E}^n \otimes \mathbf{e}_n) = \delta^n_m \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{E}.$$

Таким образом, тензор $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}. \tag{3.2.21}$$

Тензоры, удовлетворяющие этому условию, называются *ортогональными*. Кроме того, из (3.2.21) следует

$$\det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T) = \det \mathbf{P} \det \mathbf{P}^T = (\det \mathbf{P})^2 = \det \mathbf{E} = 1. \tag{3.2.22}$$

Понятие определителя тензора второго ранга введено в [18]. Из последнего равенства вытекает, что

$$\det \mathbf{P}(t) = \pm 1. \tag{3.2.23}$$

Дифференцируя равенство (3.2.22) по времени, получаем

$$2 \det \mathbf{P} (\det \mathbf{P})^{\cdot} = 0 \Rightarrow (\det \mathbf{P})^{\cdot} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{P} = \text{const}. \tag{3.2.24}$$

Заметим, что из (3.2.23) это равенство не вытекает, поскольку, в принципе, знаки в (3.2.23) могут меняться с течением времени. Однако (3.2.24) показывает, что это невозможно. Если в какой-то момент времени $\det \mathbf{P} = +1$, то он будет равен этому значению во все другие моменты времени. Тензор $\mathbf{P}(t)$ согласно (3.2.20) зависит от отсчетного и актуального положений тела. Рассмотрим его в момент времени $t = \tau$, когда актуальное и отсчетное положения совпадали. Тогда

$$\mathcal{E}_m(\tau) = \mathbf{e}_m, \quad \mathcal{E}^m(\tau) = \mathbf{e}^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\tau) = 1.$$

Следовательно, при всех t имеем

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(t) = +1. \tag{3.2.25}$$

Ортогональные тензоры, определитель которых равен (+1), называются собственно ортогональными тензорами или тензорами поворота. Итак, тензор $\mathbf{P}(t)$, входящий в (3.2.17), является тензором поворота, что и утверждается в условии теоремы. Осталось доказать, что этот тензор не зависит от выбора точек Q, A_1, A_2, A_3 в абсолютно твердом теле. Вообще говоря, из определения

тензора поворота (3.2.18) это обстоятельство формально не очевидно, поскольку точки Q и A_m в нем присутствуют в явном виде. Покажем теперь, что $\mathbf{P}(t)$ не зависит от выбора точек A_k теле. С этой целью выберем какие-либо другие три точки $A_{k'}$ такие, что точки $Q, A_{k'}$ не лежат в одной плоскости. В точности повторяя все рассуждения, ведущие к представлению (3.2.19), вводим в рассмотрение тензор

$$\mathbf{P}'(t) = \mathcal{E}_{m'} \otimes \mathbf{e}^{m'} = \mathcal{E}^{m'} \otimes \mathbf{e}_{m'}, \tag{3.2.26}$$

где

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \mathbf{e}_{m'} = \mathbf{r}_{A_{m'}} - \mathbf{r}_Q$$

в отсчетном положении и

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \mathcal{E}_{m'} = \mathbf{R}_{A_{m'}} - \mathbf{R}_Q$$

в актуальном положении. Векторы $\mathbf{e}_{m'}$ можно разложить по векторам $\mathbf{e}_m$

$$\mathbf{e}_{m'} = h^n_{m'}\,\mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{m'} = h^{m'}_n\,\mathbf{e}^n, \quad h^n_{m'} = \mathbf{e}_{m'}\cdot\mathbf{e}^n, \quad h^{m'}_n = \mathbf{e}^{m'}\cdot\mathbf{e}_n, \tag{3.2.27}$$

где матрицы $h^n_{m'}$ и $h^{m'}_n$ взаимно обратны

$$h^n_{m'}h^{m'}_p = \delta^n_p, \quad h^n_{m'}h^{p'}_n = \delta^p_m.$$

Упражнение. *Доказать формулы*

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^{m'}\cdot\mathcal{E}_n = \mathbf{e}^{m'}\cdot\mathbf{e}_n = h^{m'}_n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}^{m'} = h^{m'}_n\mathcal{E}^n, \\ &\mathcal{E}_{m'}\cdot\mathcal{E}^n = \mathbf{e}_{m'}\cdot\mathbf{e}^n = h^n_{m'} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{m'} = h^n_{m'}\mathcal{E}_n. \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Перепишем теперь (3.2.26) в следующем виде

$$\mathbf{P}' = \mathcal{E}_{m'}\otimes\mathbf{e}^{m'} = h^{m'}_n\mathcal{E}_{m'}\otimes\mathbf{e}^n = \mathcal{E}_n\otimes\mathbf{e}^n = \mathbf{P}.$$

Здесь мы сначала воспользовались (3.2.27), а затем формулами (3.2.28). При этом мы убедились, что тензор $\mathbf{P}$, построенный с помощью точек Q, A_k совпадает с тензором $\mathbf{P}'$, построенном с помощью точек $Q, A_{k'}$. Поскольку выбор точек A_k и $A_{m'}$ был совершенно произволен, то тензор $\mathbf{P}$ не зависит от выбора этих точек. Осталось показать, что тензор $\mathbf{P}(t)$ не зависит от полюса Q в теле. С этой целью запишем равенство (3.2.17) для двух точек A и B

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(t) &= \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t,Q)\cdot(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q), \\ \mathbf{R}_B(t) &= \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t,Q)\cdot(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_Q), \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

где тензор $\mathbf{P}$ может, в принципе, зависеть от выбора полюса Q, что и указано в (3.2.29) явно.

Вычитая в (3.2.29) из первого равенства второе, получаем

$$\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_B(t) = \mathbf{P}(t, Q) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B).$$

Левая часть этого равенства не зависит от точки Q. Следовательно, и правая часть не зависит от точки Q. А это означает, что тензор $\mathbf{P}(t)$ не зависит от выбора точки Q. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью доказана. Доказательство, хотя и длинное, но вполне элементарное. После того, как читатель убедился, что теорема и в самом деле правильна, он вполне может забыть о доказательстве и наслаждаться основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (3.2.6), извлекая из него массу полезнейших результатов.

Обсудим некоторые свойства движения абсолютно твердого тела, вытекающие из основной теоремы кинематики (3.2.6). Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ описывает поворот тела из отсчетной ориентации в актуальную. Если актуальная ориентация тела совпадает с отсчетной (независимо от положения тела в системе отсчета), то тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ равен единичному тензору $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Если при движении тела его ориентация в пространстве не меняется, то $\mathbf{P}(t) = \mathbf{E}$ при всех t. При таком движении из (3.2.6) следует, что все точки тела испытывают одинаковые смещения, определяемые вектором перемещения $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}_S(t) - \mathbf{r}_S = \mathbf{R}_Q(t) - \mathbf{r}_Q. \tag{3.2.30}$$

Напомним, что S — это любая интересующая нас точка тела. Движение (3.2.30) называют плоско–параллельным. В этом движении все точки тела движутся по сколь-угодно сложным траекториям, но все эти траектории одинаковы и могут быть совмещены друг с другом жестким переносом. При этом все материальные отрезки в теле перемещаются оставаясь параллельными своим положениям во все моменты времени. Иными словами, ориентация тела при плоско–параллельном движении не меняется. Плоско–параллельное движение есть типичный пример трансляционного движения в чистом виде, когда все точки твердого тела меняют свои положения в пространстве. Полное движение тела, как показывает (3.2.6), есть композиция трансляционного и спинорного движений. При последнем полюс Q тела не меняет своего положения в пространстве, но само тело поворачивается вокруг полюса, меняя свою ориентацию в пространстве. Все сказанное является совершенно очевидным. Тем не менее, основная теорема кинематики не является ни самоочевидной, ни тривиальной. В самом деле, совсем не очевидно, что этот способ описания не зависит от выбора полюса в теле. Могло бы случиться и так, что при изменении выбора полюса у нас менялся бы и поворот (т.е. менялся бы тензор поворота) тела вокруг этого нового полюса. Однако теорема утверждает, что это не так, а тензор поворота не зависит от выбора полюса.

3.3. Тензор поворота и вектор поворота

Тензор поворота является характеристикой спинорного (вращательного) движения тела и может изучаться как вполне самостоятельный объект, не связанный с абсолютно твердым телом. Сейчас читателю полезно вернуться к тем параграфам книги [18], которые посвящены ортогональным тензорам и тензорам поворота. Ниже будут сообщены некоторые дополнительные сведения. В книге [18] была доказана теорема Эйлера, утверждающая, что любой поворот может быть реализован как поворот вокруг оси, натянутой на некоторый единичный вектор $\mathbf{m}$, на некоторый угол θ. В математической форме теорема Эйлера выражалась так

$$\mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}) = (1-\cos\theta)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}, \quad -\pi<\theta<\pi. \quad (3.3.1)$$

Стандартное для данной книги обозначение $Q(\theta\,\mathbf{m})$ означает поворот на угол θ вокруг оси $\mathbf{m}$. Обратим внимание, что ось поворота не привязана к каким-либо точкам тела или точкам системы отсчета. Фактически осью поворота является любая прямая из семейства параллельных прямых, натянутых на вектор $\mathbf{m}$. На первый взгляд это обстоятельство кажется странным. В самом деле, если, например, цилиндр вращается вокруг собственной оси, то именно ось цилиндра и хотелось бы считать осью поворота, а вовсе не произвольную прямую, параллельную оси цилиндра. Тем не менее, определение оси поворота как семейства параллельных прямых, не только оправдано, но и необходимо. Представим себе, что мы рассматриваем вращение цилиндра в двух инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. В одной системе отсчета ось цилиндра покоится и ее естественно назвать осью поворота. В другой же системе отсчета ось цилиндра движется и в разные моменты времени совпадает с разными прямыми в системе отсчета. Поворот цилиндра абсолютен и одинаков во всех инерциальных системах отсчета, поэтому и характеристики поворота не должны зависеть от выбора инерциальной системы. Если читатель тщательно обдумает все сказанное, то он поймет, что только данное выше определение оси поворота является допустимым и совместимым с принципом независимости от выбора системы отсчета.

Достоинством представления (3.3.1) является то, что оно содержит все необходимые величины в явном виде. Использование тензора поворота начнем с двух простых иллюстраций.

Задача. *Повернуть вектор* $\mathbf{d} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$*, где* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *— ортонормированная тройка векторов, вокруг вектора* $2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ *на угол* $\pi/3$.

Решение. *В данной задаче нам задана ось поворота — это прямая, натя-*

нутая на единичный вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}). \tag{3.3.2}$$

Дан угол поворота

$$\theta = \pi/3, \quad \cos\theta = 1/2, \quad \sin\theta = \sqrt{3}/2. \tag{3.3.3}$$

Следовательно, тензор поворота (3.3.1) имеет вид

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\pi}{3}\,\mathbf{m}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

Тензор поворота потому и имеет такое название, что при действии на вектор $\mathbf{d}$ *он поворачивает его заданным образом. Таким образом, повернутый вектор* $\mathbf{d}$ *— это вектор* $\mathbf{d}'$*, определяемый формулой*

$$\mathbf{d}' = \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{3}\,\mathbf{m}\right) \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{d} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d})\,\mathbf{m}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{m} \times \mathbf{d}. \tag{3.3.4}$$

Вычисляя скалярное и векторное произведения, входящие в (3.3.4), получаем

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} = (2a + 3b + 4c)/\sqrt{29},$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{d} = -\left[(4b - 3c)\,\mathbf{i} + (2c - 4a)\mathbf{j} + (3a - 2b)\,\mathbf{k}\right]/\sqrt{29}.$$

Подставляя эти выражения в (3.3.4) и собирая члены при одинаковых ортах, получаем

$$\mathbf{d}' = d_1\,\mathbf{i} + d_2\,\mathbf{j} + d_3\,\mathbf{k},$$

где

$$d_1 = \frac{1}{2}[a + \frac{2}{29}(2a + 3b + 4c)] - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{29}}(4b - 3c),$$

$$d_2 = \frac{1}{2}[b + \frac{3}{29}(2a + 3b + 4c)] - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{29}}(2c - 4a),$$

$$d_3 = \frac{1}{2}[c + \frac{4}{29}(2a + 3b + 4c)] - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{29}}(3a - 2b).$$

Как видим, операция поворота вектора $\mathbf{d}$ *привела к относительно громоздким выражениям для координат повернутого вектора, но все вычисления при этом носили стандартный характер и легко проверяемы.*

Упражнение. *Построить решение данной задачи каким-либо способом (их много), не использующими тензора поворота. Сравнить оба подхода с точки зрения простоты и надежности получения конечного результата.*

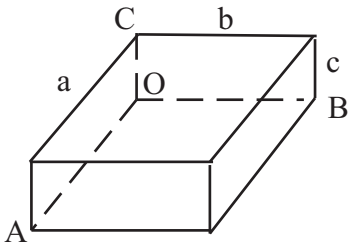

Рис. 3.1. Твердое тело в виде параллелепипеда

Конечно, полученные выше формулы для координат повернутого вектора $\mathbf{d}'$ не радуют глаз. Поэтому важно запомнить, что, как правило, при решении задач вычисления, проведенные выше, делать не нужно, а работать следует с повернутым вектором в виде $\mathbf{d}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}$. При этом можно будет пользоваться тождествами типа

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

и рядом других тождеств. После некоторой тренировки читатель сможет в полной мере оценить все достоинства использования тензора поворота.

Рассмотрим еще одну небольшую иллюстрацию к основной теореме кинематики абсолютно твердого тела.

Задача. *Пусть дано твердое тело в виде параллелепипеда со сторонами* a, b, c *(рис. 3.1). Будем считать, что в отсчетном положении вершина* O *параллелепипеда совпадает с началом декартовой системы координат с ортами* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. *Введем материальные векторы* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, *совпадающие с ребрами параллелепипеда. Тогда в отсчетном положении имеем*

$$\overrightarrow{OA} \sim a\,\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} \sim b\,\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OC} \sim c\,\mathbf{k}. \tag{3.3.5}$$

Вершину O *параллелепипеда примем в качестве полюса. Тогда в отсчетном положении радиус-вектор* $\mathbf{r}_0 = 0$. *Положение любой точки* D *параллелепипеда в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора*

$$\mathbf{r}_D = x a\,\mathbf{i} + y b\,\mathbf{j} + z c\,\mathbf{k}, \quad 0 \le x, y, z \le 1, \tag{3.3.6}$$

где числа x, y, z *могут быть названы координатами точки* D. *Пусть теперь параллелепипед перемещается относительно системы отсчета так, что его вершина* O *занимает положение*

$$\mathbf{R}_0 = l\,\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1,$$

где $\mathbf{e}$ *— единичный вектор. Кроме того параллелепипед поворачивается вокруг оси, натянутой на единичный вектор* $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \tag{3.3.7}$$

на угол $\theta = \pi/6$, $\sin\theta = 1/2$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$. *При таком движении материальные векторы* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, *(ребра параллелепипеда) займут следующие положения в системе отсчета*

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_O, \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O, \quad \overrightarrow{OC} \sim \mathbf{R}_C - \mathbf{R}_O. \tag{3.3.8}$$

Векторы, стоящие в правых частях этих отношений, могут быть вычислены по основному уравнению кинематики (3.2.6)

$$\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q}\cdot a\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q}\cdot b\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_C - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q}\cdot c\,\mathbf{k}, \tag{3.3.9}$$

где тензор поворота определен выражением

$$\mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{6}\mathbf{m}\right) = \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{E}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}). \tag{3.3.10}$$

Если мы хотим найти положение любой точки параллелепипеда, то мы должны воспользоваться уравнением (3.2.6) и вектором (3.3.6). В результате получим

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_O + \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{6}\mathbf{m}\right)\cdot(\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_O)$$

или с учетом значений векторов $\mathbf{R}_O$, $\mathbf{r}_D$, $\mathbf{r}_O$

$$\mathbf{R}_D = l\,\mathbf{e} + \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{6}\mathbf{m}\right)\cdot(x a\,\mathbf{i} + y b\,\mathbf{j} + z c\,\mathbf{k}). \tag{3.3.11}$$

При $x = 1, y = z = 0$ *получаем положение вершины* A, *при* $y = 1, x = z = 0$ *имеем положение вершины* B, *при* $z = 1, x = y = 0$ *имеем положение вершины* C. *Координаты* $x = y = z = 1/2$ *в (3.3.11) определяют положение центральной точки параллелепипеда. Вычислим векторы*

$$\mathbf{i}' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{i} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{2-\sqrt{3}}{4}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{j} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{k} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\mathbf{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{2+\sqrt{3}}{4}\mathbf{k}.$$

Теперь (3.3.11) принимает вид

$$\mathbf{R}_D = l\,\mathbf{e} + x a\,\mathbf{i}' + y b\,\mathbf{j}' + z c\,\mathbf{k}'.$$

Впервые изучающему предмет настоятельно рекомендуется повторить все вычисления самостоятельно и убедиться в правильности своего понимания всех используемых формул.

3.4. Вектор поворота

Тензор поворота, записанный в форме (3.3.1), не имеет каких-либо ограничений и может применяться всегда, т.е. описание поворотов с помощью тензора второго ранга является наиболее общим. Тем не менее, интуитивным образом поворота является не тензор второго ранга, а некий спин-вектор. В самом деле, чтобы задать поворот в его, так сказать, чистом виде, мы должны задать ось в пространстве (системе отсчета), направление и величину поворота, т.е. задать так называемый спин-вектор [18]. Спин-вектору по стандартным правилам можно сопоставить аксиальный вектор, называемый вектором поворота. Итак, вектором поворота уместно назвать вектор

$$\boldsymbol{\theta} = \theta\,\mathbf{m}, \quad |\,\mathbf{m}| = 1, \tag{3.4.1}$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет ось поворота, а величина θ задает угол поворота в радианах. Если поворот происходит против часовой стрелки при взгляде с конца $\mathbf{m}$, то в правоориентированной системе отсчета $\theta > 0$, но в левоориентированной системе отсчета этот же поворот считается отрицательным $\theta < 0$. Поскольку поворот выражает реальное явление, то наличие двух способов его описания возможно только при условии, что эти два способа связаны взаимно однозначным образом. Иными словами, тензор поворота может быть выражен через вектор поворота и, наоборот, вектор поворота может быть вычислен по тензору поворота. Проще всего решается первая задача. В самом деле, принимая во внимание определение вектора поворота (3.4.1), выражение (3.3.1) переписываем в следующем эквивалентном виде

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E} + \cos\theta\,\mathbf{E}. \tag{3.4.2}$$

Хотя выражение (3.4.2) эквивалентно (3.3.1), тем не менее оно выявляет одно важное свойство. А именно, в (3.3.1) θ есть угол поворота и может иметь любой знак. Аналогично может восприниматься величина θ в (3.4.2). Однако здесь она может восприниматься иначе. Заметим, что справедливы тождества

$$|\boldsymbol{\theta}| = |\theta|, \quad \cos\theta = \cos|\theta| = \cos|\boldsymbol{\theta}|, \quad \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|}. \tag{3.4.3}$$

Поэтому в (3.4.2) величину θ можно рассматривать как модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Отсюда следует, что тензор поворота действительно выражается только через вектор поворота без дополнительных разговоров, необходимых при использовании (3.3.1), где θ нельзя отождествить с модулем вектора поворота. Выражение (3.4.2) удобно записать в другой форме. Введем в рассмотрение кососимметричный тензор

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}, \tag{3.4.4}$$

который будем называть логарифмическим тензором поворота. Смысл этого названия будет понятен немного ниже. Кроме того, имеем тождество

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2\, \mathbf{E}. \tag{3.4.5}$$

Используя (3.4.4) и (3.4.5), выражение (3.4.2) переписываем в виде

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{R} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R}^2. \tag{3.4.6}$$

Представлением (3.4.6) тензор поворота определен как функция логарифмического тензора поворота, причем θ можно выразить через норму тензора $\mathbf{R}$. Действительно, нормой тензора $\mathbf{A}$ называется величина

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{A}^{\mathsf{T}}} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\mathsf{T}})}.$$

Для логарифмического тензора поворота $\mathbf{R}$ имеем

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\mathbf{R}\cdot\,\mathbf{R}^{\mathsf{T}})} = \sqrt{-\mathrm{tr}\,\mathbf{R}^2} = \sqrt{2\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}} = \sqrt{2}\theta.$$

Кстати, обратим внимание, что норма тензора поворота

$$\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}\cdot\,\mathbf{Q}^{\mathsf{T}})} = \sqrt{\mathrm{tr}\;\mathbf{E}} = \sqrt{3}$$

всегда одинакова и никак не характеризует величину поворота. Выражение (3.4.6) в приложениях часто бывает удобнее, нежели (3.3.1) или (3.4.2). Оно любопытно еще как пример тензорной функции тензорного аргумента. Функцию (3.4.6) можно записать в другом и, в некотором смысле, более знакомом виде. Хорошо известна скалярная функция скалярного аргумента

$$\exp x \equiv e^x, \quad e = 2,71828. \tag{3.4.7}$$

Скалярную экспоненту $\exp x$ можно определять разными способами. Один из наиболее распространенных способов состоит в том, чтобы определить ее с помощью ряда

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k. \tag{3.4.8}$$

Известно, что этот ряд имеет бесконечный радиус сходимости и абсолютно сходится вместе со всеми своими производными. Функцию (3.4.8) легко обобщить на тензорный случай. Пусть дан тензор второго ранга $\mathbf{A}$. Определим тензорную экспоненту

$$\exp\,\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathbf{A}^k, \tag{3.4.9}$$

где степень тензора определяется как

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \ \ldots$$

Ряд, стоящий в правой части (3.4.9) и называемый тензорной экспонентой, сходится для любых тензоров $\mathbf{A}$. Спецификой тензорных рядов типа (3.4.9) является то, что они всегда могут быть сведены к виду

$$\exp\mathbf{A} = \varphi_0\,\mathbf{E} + \varphi_1\,\mathbf{A} + \varphi_2\,\mathbf{A}^2,$$

где φ_0, φ_1, φ_2 — суть некие скалярные функции инвариантов тензора $\mathbf{A}$.

Сказанное немедленно вытекает из последовательного исключения степеней тензора $\mathbf{A}$ выше второй с помощью тождества Кэли-Гамильтона (см. [18]). Несмотря на полное сходство определений (3.4.8) и (3.4.9), тензорная экспонента не похожа на свой скалярный аналог. Например, для скалярной экспоненты имеем

$$\exp(x+y) = \exp x\,\exp y.$$

Это равенство справедливо только потому, что произведение скаляров коммутативно $xy = yx$. Для тензорных экспонент это свойство уже не справедливо

$$\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B} \neq \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}). \tag{3.4.10}$$

Отмеченное обстоятельство легко понять. Слева стоит произведение двух тензоров второго ранга $\exp\mathbf{A}$ и $\exp\mathbf{B}$. Произведение тензоров в общем случае не коммутативно, т.е.

$$\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B} \neq \exp\mathbf{B}\cdot\exp\mathbf{A}.$$

В правой части (3.4.10) стоит тензор $\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, причем $\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{B}+\mathbf{A})$, т.к. сложение тензоров коммутативно. Поэтому в общем случае неравенство (3.4.10) обязано иметь место.

Упражнение. *Используя определение тензорной экспоненты (3.4.9) доказать, что*

а) $\mathbf{A}\cdot(\exp\mathbf{A}) = (\exp\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}$,

б) $\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B} = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, *если* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Теорема. *Тензор поворота является тензорной экспонентой от логарифмического тензора поворота*

$$\mathbf{Q}(\theta) = \exp\mathbf{R} = \exp(\theta\times\mathbf{E}). \tag{3.4.11}$$

Доказательство. *По определению тензорной экспоненты (3.4.9) имеем*

$$\exp\mathbf{R} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{R}^k = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\mathbf{R}^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\mathbf{R}^{2k}. \tag{3.4.12}$$

Здесь мы отдельно выделили суммирование по нечетным и четным степеням $\mathbf{R}$. *Вычислим теперь степени* $\mathbf{R}^m$, *при этом учтем очевидное равенство*

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \tag{3.4.13}$$

Упражнение. *Доказать формулы*

$$\mathbf{R}^{2k+1} = (-\theta^2)^k\,\mathbf{R}, \qquad k = 0,1,2,\ldots;$$
$$\mathbf{R}^{2k} = (-\theta^2)^{k-1}\mathbf{R}^2, \qquad k = 1,2,3,\ldots. \tag{3.4.14}$$

Подставляя (3.4.14) в (3.4.12), получаем

$$\exp\mathbf{R} = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!}\,\mathbf{R} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!}\,\mathbf{R}^2.$$

Учтем теперь известные разложения в степенные ряды

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!}, \qquad \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!}. \tag{3.4.15}$$

Подставляя эти ряды в предыдущее равенство, получаем

$$\exp\mathbf{R} = \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{R} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R}^2. \tag{3.4.16}$$

Сравнивая (3.4.16) и (3.4.6), приходим к утверждению (3.4.11). Доказательство завершено.

Таким образом, поворот может быть описан как тензором второго ранга, так и вектором поворота. Если мы имеем вектор $\mathbf{a}$, то повернутый вектор $\mathbf{a}'$ можно представить в эквивалентных формах

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}). \tag{3.4.17}$$

Во многих случаях удобнее пользоваться тензором поворота, но в дальнейшем мы убедимся, что имеются случаи, когда использование вектора поворота оказывается необходимым.

В заключение этого пункта отметим, что в литературе [37] иногда используется так называемый вектор конечного поворота Родрига

$$\boldsymbol{\psi} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{m}. \tag{3.4.18}$$

Здесь смысл θ и $\mathbf{m}$ тот же, что и в (3.4.1).

Упражнение. *Доказать представления*

$$\left(1+\frac{\psi^2}{4}\right)\mathbf{P} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}\otimes\boldsymbol{\psi} + \left(1-\frac{\psi^2}{4}\right)\mathbf{E} + \boldsymbol{\psi}\times\mathbf{E}, \quad \psi^2 = 4\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.4.19}$$

3.5. Вектор малого поворота

В приложениях часто можно считать, что модуль вектора поворота мал

$$|\theta| = |\theta| << 1. \tag{3.5.1}$$

В этих случаях говорят о малых поворотах. При этом норма логарифмического тензора поворота также мала

$$\| \mathbf{R}\|^2 = \mathrm{tr}\, \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{tr}\, \theta \times \mathbf{E} \times \theta = 2\theta^2 << 1. \tag{3.5.2}$$

В разложении (3.4.12) можно отбросить все степени $\mathbf{R}$ выше первой. Тогда получим

$$\mathbf{Q} \simeq \mathbf{E} + \mathbf{R} = \mathbf{E} + \theta \times \mathbf{E}. \tag{3.5.3}$$

Тензор (3.5.3) называется тензором малого поворота. Повернутый вектор $\mathbf{a}'$ в таком случае вычисляется по простой формуле

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \simeq \mathbf{a} + \theta \times \mathbf{a}. \tag{3.5.4}$$

В некоторых случаях удобно квадратичное приближение

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{E} + \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{R}^2 + 0(\theta^3). \tag{3.5.5}$$

Повернутый вектор находится по формуле

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \theta \times \mathbf{a} + \frac{1}{2}\theta \times (\theta \times \mathbf{a}). \tag{3.5.6}$$

Эта формула может с успехом применяться для малых, но не бесконечно малых поворотов. Для малых поворотов вектор конечного поворота (3.4.18) отличается от вектора поворота (3.4.1) только членами третьего порядка малости

$$\psi = \theta + 0(\theta^3).$$

3.6. Неоднозначность суждений о векторе поворота

У вектора поворота удивительная и странная судьба. В литературе многие годы сосуществуют противоположные точки зрения на это понятие. Например, в книге А.И.Лурье [37] вводится вектор поворота Родрига и с ним работают как с обычным вектором. Существование вектора поворота устанавливается теоремой Эйлера, которая доказывается во всех учебниках по механике. Тем не менее, существует и другая точка зрения, согласно которой вектор поворота, будучи направленным отрезком, не является настоящим вектором. Это мнение

воспроизводится во многих работах, например в относительно недавней статье [81]. Эту точку зрения мы изложим в трактовке популярного учебника физики [24] (см. с. 39, а затем с. 47–48). Далее следует цитата.

“Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовое значение, но и направление (с. 39). . . . Не все величины, которые имеют числовое значение и направление, обязательно являются векторами. Например, повороту твердого тела вокруг определенной оси, неподвижной в пространстве, можно приписать как числовое значение (величина угла поворота), так и направление (направление оси). Однако два таких поворота не складываются согласно закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми. Это легко видеть, когда две оси перпендикулярны друг к другу, а оба угла поворота равны по $\pi/2$ каждый. Представим себе какой-либо предмет, например книгу (рис. 3.2,a). Поворот

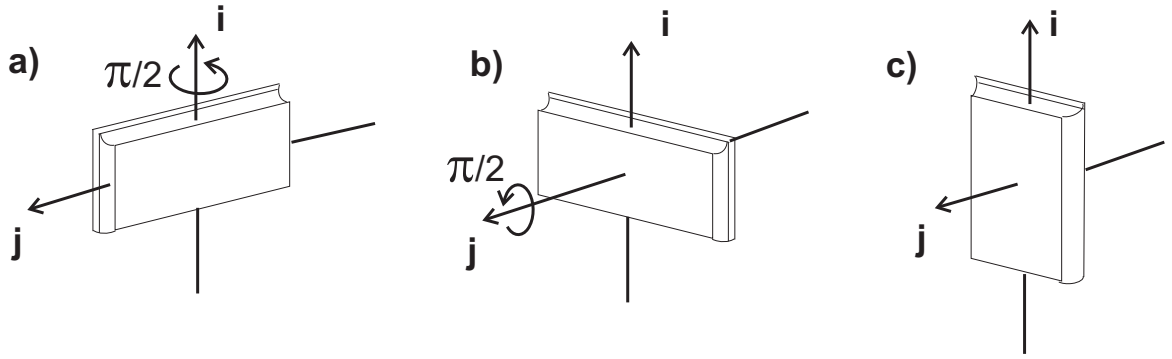

Рис. 3.2. Первая последовательность поворотов

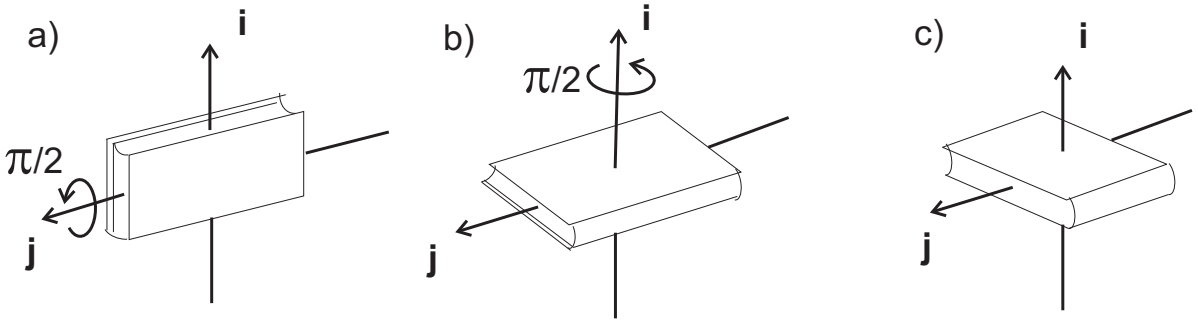

Рис. 3.3. Вторая последовательность поворотов

(1) переводит ее в положение, показанное на рис.3.2,b, а последующий поворот (2) вокруг другой оси — в положение на рис. 3.2,c. Однако если вернуть предмет в первоначальное положение и сначала произвести поворот (2), а затем поворот (1), то в конце концов этот предмет окажется в положении,

показанном на рис. 3.3,c. Ориентация предмета на рис. 3.3,c отличается от его ориентации на рис. 3.2,c. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон коммутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением."

Интересно, что же все-таки называется вектором? Из приведенной цитаты автор этого так и не понял. Приведенное выше доказательство, разумеется, является ошибочным, и читателю будет полезно выявить конкретную ошибку (вообще-то их несколько) в данном рассуждении. В качестве наводящего соображения рассмотрим сходное, но более простое рассуждение. Пусть векторы $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$ суть векторы смещения материальной точки. Тогда суммарное смещение точки есть вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Здесь все нормально: сумма двух смещений есть результирующее смещение. Вспомним теперь понятие направляющего орта вектора $\mathbf{a}$: $\widehat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\,\mathbf{a}|$. Легко видеть, что $\widehat{\mathbf{u}} \neq \widehat{\mathbf{u}}_1 + \widehat{\mathbf{u}}_2$. Отсюда, следуя логике цитированного выше рассуждения, заключаем, что орт вектора не является вектором, поскольку сумма ортов исходных векторов не является ортом результирующего вектора. Надеемся, что читатель не согласится с таким выводом. Основную ошибку читатель обнаружит, когда ознакомится с формулами сложения векторов поворота (3.8.15) – (3.8.16).

3.7. Плоские движения твердого тела

Представление тензора поворота в форме (3.3.1) оказывается удобным в тех случаях, когда ось поворота, т.е. вектор $\mathbf{m}$, заранее известна и фиксирована во времени. Этот простейший случай имеет место, например, при плоских движениях твердого тела. Плоским называют такое движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, ортогональных заданному единичному вектору $\mathbf{m}$. При этом очевидно, что тело может поворачиваться только вокруг вектора $\mathbf{m}$. Рассмотрим два простых примера применения основной теоремы кинематики твердого тела.

Пример 1: плоское движение твердого стержня. Рассмотрим стержень длины l, совершающий движение, при котором стержень во все моменты времени остается в одной и той же плоскости. Последнюю совместим с плоскостью чертежа (рис. 3.4). В качестве отсчетного положения стержня выбираем положение, при котором стержень расположен горизонтально. Материальный вектор $\overrightarrow{AB}$ совпадает с вектором $\mathbf{e}$. Фактически стержень, возможно, никогда не занимал этого положения, но повороты и перемещения стержня будем отсчитывать именно от этого положения, занимаемого стержнем в условный момент времени τ. В этот момент времени положение конца стержня A за-

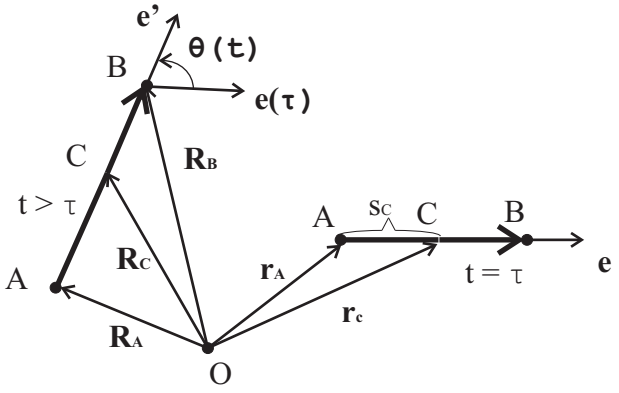

Рис. 3.4. Плоское движение стержня

дается вектором положения $\mathbf{r}_A$. Тогда в этот же момент времени положение любой точки C, отстоящей от A на расстояние s_C определяется вектором

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + s_c\,\mathbf{e}, \qquad 0 \le s_c \le l, \quad |\mathbf{e}| = 1. \tag{3.7.1}$$

При изменении параметра s_c от 0 до l конец вектора $\mathbf{r}_C$ пробегает все точки стержня. В актуальный (текущий) момент времени t положение точки A стержня задается вектором $\mathbf{R}_A(t)$. Материальный вектор $\overrightarrow{AB}$ в этот момент времени совпадает с вектором $\mathbf{e}'(t)$. Поэтому для любой точки C в момент времени t можем записать

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + s_c\,\mathbf{e}'(t), \quad |\mathbf{e}'(t)| = 1, \tag{3.7.2}$$

где значение s_c то же самое, что и в (3.7.1).

Векторы $\mathbf{e}'(t)$ и $\mathbf{e}(\tau)$ имеют одинаковые длины, но у них разные направления. Напомним, что два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются равными, если у них одинаковые длины и одинаковые направления. Так что вектор $\mathbf{e}(\tau)$, изображенный на рис. 3.4 исходящим из точки B, и вектор $\mathbf{e}(\tau)$, изображенный на рис. 3.4 исходящим из точки A, — это один и тот же вектор: вектор — это класс эквивалентности, т.е. множество всех векторов, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление в системе отсчета. В этом смысле вектор положения, например, $\mathbf{R}_A$ не является настоящим вектором, поэтому его и называют радиус-вектором. В механике радиус-вектор и некоторые, схожие с ним по смыслу, другие векторы положения являются исключениями, которым присвоены наименования векторов, но настоящими (свободными) векторами они не являются. Чтобы совместить векторы $\mathbf{e}'(t)$ и $\mathbf{e}(\tau)$ достаточно повернуть вектор $\mathbf{e}'(t)$ на угол $\theta(t)$ вокруг единичного вектора $\mathbf{m}$, ортогонального плоскости чертежа и направленного так, чтобы поворот вокруг $\mathbf{m}$ происходил против часовой стрелки, если смотреть с конца $\mathbf{m}$. Как мы уже знаем, поворот

любого вектора осуществляется тензором поворота $\mathbf{P}(t)$. При плоском движении тела тензор поворота определить очень легко, так как заранее известен вектор, вокруг которого происходят повороты. В данном случае это вектор $\mathbf{m}$, а тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ имеет вид (3.3.1), причем угол поворота $\theta(t)$ показан на рис. 3.4. Итак, для вектора $\mathbf{e}'(t)$ имеем формулу

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}(\tau), \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}. \tag{3.7.3}$$

С учетом (3.7.1), выражению (3.7.2) можно придать вид

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot [s_c\, \mathbf{e}]. \tag{3.7.4}$$

Исключая отсюда $s_c\, \mathbf{e}$ с помощью (3.7.1) окончательно получаем

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A), \tag{3.7.5}$$

т.е. пришли к основному уравнению кинематики абсолютно твердого тела, причем точка A играет роль полюса. Можно представить себе, что точка C перемещается по стержню так, что ее координата s_C является заданной (или подлежащей определению) функцией времени $s_C = f(t)$. Тогда вместо (3.7.4) мы должны написать

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot [f(t)\, \mathbf{e}]. \tag{3.7.6}$$

Например, если точка C бегает от одного конца стержня до другого и обратно по гармоническому закону, то для $f(t)$ имеем

$$f(t) = \frac{l}{2}[1 - \cos(\omega t + \alpha)], \qquad 0 \le f(t) \le l. \tag{3.7.7}$$

Подставляя в (3.7.6) представление тензора поворота (3.3.1) и производя скалярное умножение, получаем

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + f(t)[\cos\theta(t)\, \mathbf{e} + \sin\theta(t)\, \mathbf{m} \times \mathbf{e}]. \tag{3.7.8}$$

Выражением (3.7.8) задается наиболее общий вид движения, которое может совершать точка C, движущаяся по стержню по закону $f(t)$ и одновременно движущаяся вместе со стержнем в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{m}$.

Пример 2: Движение точки по вращающемуся вокруг своей оси диску. В качестве полюса выбираем центр диска O. Тогда, согласно основной теореме кинематики, имеем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{r}_A = \mathbf{R}_A(\tau), \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}, \tag{3.7.9}$$

где $\mathbf{r}_A$ определяет точку A диска в отсчетном положении.

Положение точки A на диске можно определить заданием полярных координат ρ, φ

$$\mathbf{r}_A = \rho(\cos\varphi\ \mathbf{i} + \sin\varphi\ \mathbf{j}). \tag{3.7.10}$$

Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ в данном случае задается выражением

$$\mathbf{P}(t) = (1 - \cos\theta(t))\ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\theta(t)\,\mathbf{E} + \sin\theta(t)\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \tag{3.7.11}$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\theta(t)$ — угол поворота диска.

Подставляя эти выражения в (3.7.9) и производя скалярные произведения, получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \rho[\cos(\varphi + \theta(t))\ \mathbf{i} + \sin(\varphi + \theta(t))\ \mathbf{j}]. \tag{3.7.12}$$

Здесь ρ и φ полярные координаты точки A, которая пока что считается неподвижной относительно диска, так что ρ и φ в (3.7.12) не зависят от времени. Если точка A движется относительно диска, то закон ее движения можно задать в виде

$$\rho = f(t), \quad \varphi = \psi(t). \tag{3.7.13}$$

Тогда для движущейся относительно диска точки A получаем выражение

$$\mathbf{R}_A(t) = f(t)[\cos(\psi(t) + \theta(t))\mathbf{i} + \sin(\psi(t) + \theta(t))\ \mathbf{j}]. \tag{3.7.14}$$

Здесь величины (3.7.13) задают движение точки A относительно диска, функция $\theta(t)$ задает закон вращения самого диска. Вектор положения $\mathbf{R}_A(t)$ определяет положение точки A относительно выбранной системы отсчета.

3.8. Теорема о представлении тензора поворота

Читатель уже обратил внимание на резкое повышение сложности описания движения при переходе от трансляционных движений, определяемых заданием вектора положения $\mathbf{R}_A(t)$, к спинорным движениям, определяемым заданием тензора поворота $\mathbf{P}(t)$. В самом деле, для трансляционных движений достаточно задать всего три вектора

$$\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{W}(t) = \ddot{\mathbf{R}}(t),$$

причем любые два из этих векторов легко находятся по третьему. Например, если задан вектор скорости, то ускорение находится однократным дифференцированием, а вектор положения — однократным интегрированием. Что касается описания самого трансляционного движения, то здесь и говорить особо не о чем — все определяется вектором $\mathbf{R}(t)$. При описании спинорных движений, определяемых собственно ортогональным тензором, ситуация намного

сложнее. Тензор поворота допускает множество различных представлений. В настоящее время описание поворотов еще не стало каноническим. В разных задачах используют различные описания, в том числе и такие, которые в данной книге мы даже не упоминаем. А, например, в современной физике спинорные движения вообще не рассматриваются, хотя некоторые характеристики спинорного движения все-таки вводятся без упоминания самого спинорного движения. Между тем, спинорные движения играют значительно более важную роль в Природе, нежели трансляционные движения. К обсуждению этих вопросов мы еще неоднократно будем возвращаться в дальнейшем. Здесь же мы обращаем внимание читателя на то, что истратив немало места на описание поворотов, мы еще даже не ввели понятие угловой скорости. Более того, сейчас мы хотим еще продолжить изучение тензора поворота и доказать одну важную для приложений теорему, частные случаи которой известны уже много лет, но общая формулировка была предложена только в [21].

Согласно теореме Эйлера (3.3.1), любой поворот может быть осуществлен как один поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол. Казалось бы, теорема Эйлера полностью решает все проблемы. Но это не так. Фактически теорема Эйлера указывает эффективный способ решения только таких задач, в которых ось поворота фиксирована во времени. Однако в большинстве случаев ось поворота меняется во времени, что резко усложняет все построения. Один из возможных способов преодоления возникающих здесь затруднений был указан еще Л. Эйлером и заключался в представлении полного поворота в виде композиции трех поворотов вокруг заданных осей. Позднее появились и другие представления, но представление поворота через введенные Л. Эйлером углы является наиболее популярным и считается, хотя и без должных оснований, наиболее удобным для приложений. Сейчас мы докажем теорему, которая не только включает в себя все известные представления и добавляет к ним новые, но и дает новую интерпретацию уже известных представлений.

Теорема. *Любой поворот* $\mathbf{Q}(\theta)$ *может быть осуществлен в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых и фиксированных во времени осей* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{n}$

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi(t)\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(t)\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\,\mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}/|\,\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \qquad (3.8.1)$$

где углы $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ *и* $\varphi(t)$ *называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно.*

Если $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, *то углы* ψ, ϑ *и* φ *называются углами Эйлера, а вектор* $\mathbf{e}$ *выбирается произвольно, но должен быть ортогонален* $\mathbf{n}$.

Доказательство. *Выделим в теле двойной материальный вектор* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. *Пусть* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{n}$ *суть два произвольно выбранных единичных векто-*

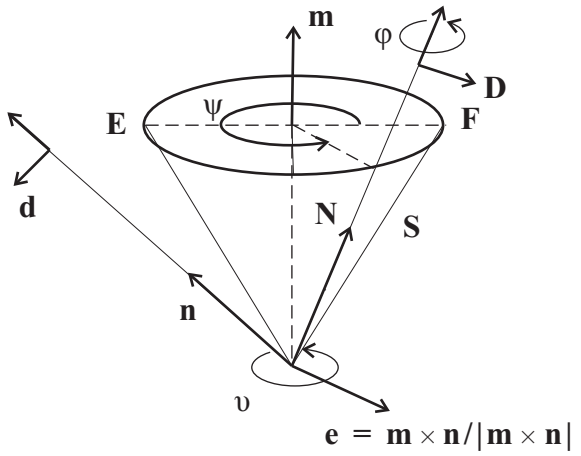

Рис. 3.5. Представление тензора поворота

ра. Натянем на них плоскость (рис. 3.5), которую совместим с плоскостью рисунка.

Пусть в отсчетном положении база $\overrightarrow{AB}$ *двойного материального вектора* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *совпадает с вектором* **n**. *Это не налагает никаких ограничений на выбор* **n**, *поскольку выбор двойного материального вектора в теле также произволен. Тогда в отсчетном положении имеем*

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{n}, \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{d}. \tag{3.8.2}$$

Пусть в актуальном положении, т.е. в положении в данный момент времени t, *имеем соответствие*

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{N}, \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{D}.$$

*Напомним, что двойные векторы (***n**, **d***) и (***N**, **D***), заданные, разумеется, в системе отсчета, образуют жесткие конструкции и могут быть совмещены друг с другом поворотом.*

Итак, выполняем следующие шаги. Первый. Произвольно выбираем векторы **m** *и* **n** *(рис. 3.5). Второй шаг можно выполнить двумя способами. Во-первых, можно выбрать по желанию отсчетное положение тела, а затем выбрать в теле двойной материальный вектор* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *так, чтобы его база* $\overrightarrow{AB}$ *совпадала бы с вектором* **n**. *При втором способе мы сначала произвольно выбираем в теле двойной материальный вектор, а затем выбираем отсчетное положение тела так, чтобы база двойного вектора совпала бы с вектором* **n**. *Ниже мы придерживаемся первого способа выполнения второго шага. Третий шаг. В актуальном положении тела отмечаем двойной вектор (* **N**, **D***), с которым совпадает двойной материальный вектор* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *в момент времени* t. *Наша задача состоит в том, чтобы поворотами вокруг*

векторов $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}$ *двойной материальный вектор* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *из положения, отмеченного двойным вектором* $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$*, перевести тело в положение, где двойной материальный вектор* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *совпадает с двойным вектором* $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$*. Для этого предварительно мысленно образуем коническую поверхность* S*, получающуюся вращением вектора* $\mathbf{N}$ *вокруг вектора* $\mathbf{m}$ *(рис. 3.5).*

Искомый поворот тела осуществляем в виде последовательности трех поворотов. Первый поворот производим на угол ϑ *вокруг вектора* $\mathbf{e}$ *так, чтобы база* $\overrightarrow{AB}$ *оказалась на конической поверхности* S*. Этот поворот задается тензором*

$$\mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}) = (1 - \cos\vartheta)\,\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \cos\vartheta\,\mathbf{E} + \sin\vartheta\,\mathbf{e}\times\mathbf{E}. \tag{3.8.3}$$

В результате $\overrightarrow{AB}$ *совпадет с вектором*

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{n}. \tag{3.8.4}$$

Второй поворот производим вокруг вектора $\mathbf{m}$*. В результате вектор* $\overrightarrow{AB}$ *скользит по конической поверхности* S*. После поворота на угол* ψ *вектор* $\overrightarrow{AB}$ *совпадает с вектором* $\mathbf{N}$*. Этот поворот определяется тензором*

$$\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) = (1 - \cos\psi)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\psi\,\mathbf{E} + \sin\psi\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}. \tag{3.8.5}$$

При этом имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{n}. \tag{3.8.6}$$

После поворота (3.8.5) база $\overrightarrow{AB}$ *двойного материального вектора* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *совпадает с вектором* $\mathbf{N}$*. Однако кросс-вектор* $\overrightarrow{BC}$ *при этом не будет совпадать с кросс-вектором* $\mathbf{D}$*. Поэтому необходим еще один поворот вокруг прямой, натянутой на* $\mathbf{N}$*. Этот поворот дается тензором*

$$\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{N}) = (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} + \cos\varphi\,\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{N}\times\mathbf{E}. \tag{3.8.7}$$

Таким образом, в результате трех поворотов (3.8.3), (3.8.5) и (3.8.7) двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ *из отсчетного положения* $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$ *перешел в актуальное положение* $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$*. Тем самым и само тело перешло из отсчетного положения в актуальное. Полный тензор поворота есть композиция описанных выше трех поворотов*

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{N})\cdot\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}). \tag{3.8.8}$$

По существу теорема доказана, но представление (3.8.8) пока не совпадает с утверждением теоремы (3.8.1). Осталось вспомнить тождество [18]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{S}\cdot\theta) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{Q}(\theta)\cdot\mathbf{S}^{\mathsf{T}}, \quad \forall\,\mathbf{S}:\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}. \tag{3.8.9}$$

Согласно (3.8.6) имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}). \tag{3.8.10}$$

Используя тождество (3.8.9) и равенство (3.8.10), получаем

$$\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{N}) = \mathbf{Q}(\mathbf{S} \cdot \varphi\,\mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}^{\mathsf{T}} = \\ = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\psi\,\mathbf{m}).$$

Подставляя это выражение в (3.8.8), приходим к утверждению теоремы (3.8.1). Доказательство завершено.

В литературе известно много частных случаев представления (3.8.1). Например, при $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ и векторе $\mathbf{e}$ таком, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = 0$, получаем известное представление, введенное еще Л. Эйлером в других, разумеется, терминах и представлениях. Тензор поворота, представленный через углы Эйлера, имеет вид

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{m}). \tag{3.8.11}$$

Здесь сначала производится поворот вокруг $\mathbf{m}$ на угол собственного вращения φ, затем вокруг $\mathbf{e}$ на угол нутации ϑ и, наконец, поворот вокруг того же вектора $\mathbf{m}$ на угол прецессии ψ. Обратим внимание, что все эти повороты производятся вокруг неизменных во времени векторов. В классическом представлении поворота через углы Эйлера повороты производятся в обратном порядке. При этом повороты производятся уже вокруг переменных во времени осей. Для того, чтобы получить это представление, достаточно умножить (3.8.11) справа на единичный тензор, записанный в следующем виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}).$$

Умножая (3.8.11) на этот тензор справа и перегруппировывая сомножители, получаем

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{m}'') \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\ \mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}), \tag{3.8.12}$$

где использовано тождество (3.8.9) и

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}. \tag{3.8.13}$$

Выражение (3.8.12) дает нам классическое представление тензора через углы Эйлера. Следует, впрочем, указать, что углами Эйлера в литературе часто называют разные величины. Поэтому необходимо быть внимательным, чтобы избежать недоразумений. Возможные недоразумения связаны, в частности, с тем, что представления типа (3.8.12) в литературе не используются, а заменяются их матричными аналогами, в которых векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{e}$ в явном виде не

фигурируют. При этом выбор этих векторов осуществляется в разных книгах по разному, что и приводит к изменению смысла углов Эйлера. Как видим, в классическом представлении повороты производятся в обратном порядке и вокруг вращающихся векторов $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{m}''$. В дальнейшем мы убедимся, что представление (3.8.11) значительно удобнее, нежели (3.8.12).

В заключение этого пункта предлагаем следующее

Упражнение. *Пусть дана композиция поворотов*

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}). \tag{3.8.14}$$

Показать, что вектор суммарного поворота θ *связан с векторами составляющих поворотов* $\boldsymbol{\varphi}$ *и* $\boldsymbol{\psi}$ *следующими малопривлекательными формулами*

$$1 + 2\cos\theta = \cos\varphi + \cos\psi + \cos\varphi\cos\psi - \\ - 2\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\sin\psi}{\psi}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi} + \frac{(1-\cos\varphi)}{\varphi^2}\cdot\frac{(1-\cos\psi)}{\psi^2}(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi})^2, \tag{3.8.15}$$

$$2\frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}(1+\cos\psi) - \frac{(1-\cos\varphi)}{\varphi^2}\frac{\sin\psi}{\psi}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi}\right)\boldsymbol{\varphi} + \\ + \left(\frac{\sin\psi}{\psi}(1+\cos\varphi) - \frac{(1-\cos\psi)}{\psi^2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi}\right)\boldsymbol{\psi} + \\ + \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\sin\psi}{\psi} - \frac{(1-\cos\varphi)}{\varphi^2}\frac{(1-\cos\psi)}{\psi^2}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi}\right)\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\psi}, \tag{3.8.16}$$

где $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$, $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|$, $\psi = |\boldsymbol{\psi}|$.

Напомним, что

$$\theta = |\boldsymbol{\theta}| < \pi, \quad \varphi = |\boldsymbol{\varphi}| < \pi, \quad \psi = |\boldsymbol{\psi}| < \pi. \tag{3.8.17}$$

В принципе, от ограничения (3.8.17) можно отказаться, если повороты происходят вокруг совпадающих и фиксированных во времени осей.

3.9. Дифференцирование тензоров второго ранга

Выше был введен в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Поворот тела происходит во времени, поэтому время является аргументом тензора поворота. Чтобы ввести такое понятие, как угловая скорость, которая характеризует скорость изменения ориентации тела, необходимо научиться дифференцировать тензоры второго ранга по времени. Эта операция сводится к операции дифференцирования вектора.

Известно, что любой тензор второго ранга $\mathbf{A}(t)$ может рассматриваться как совокупность конечного числа диад

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t) \otimes \mathbf{d}(t) + \dots .$$

Операция дифференцирования линейна. Поэтому имеем

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(t) \otimes \mathbf{d}(t)] + \dots$$

Чтобы продифференцировать тензор оказывается достаточным научиться дифференцировать диады. По определению производной имеем

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}[\mathbf{a}(t + \triangle t) \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)]. \qquad (3.9.1)$$

Правую часть (3.9.1) следует записать иначе, прибавив и отняв одну и ту же диаду

$$\mathbf{a}(t + \triangle t) \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) + \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)$$
$$= [\mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t)] \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) + \mathbf{a}(t) \otimes [\mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{b}(t)].$$

Подставляя это выражение в (3.9.1) и вспоминая определение производной от вектора, получаем

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}\{[\mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t)] \otimes \mathbf{b}(t + \triangle t) + \mathbf{a}(t) \otimes [\mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{b}(t)]\} =$$
$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t)}{\triangle t} \otimes \lim_{\triangle t \to 0} \mathbf{b}(t + \triangle t) + \mathbf{a}(t) \otimes \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{b}(t + \triangle t) - \mathbf{b}(t)}{\triangle t} =$$
$$= \frac{d\,\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\,\mathbf{b}(t)}{t}.$$

Итак, дифференцирование диады осуществляется с помощью обычного правила Лейбница дифференцирования произведения

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \frac{d\,\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\,\mathbf{b}(t)}{dt}. \qquad (3.9.2)$$

В дальнейшем, как и раньше, дифференцирование по времени будем обозначать точкой

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{c} \otimes \dot{\mathbf{d}} + \dots . \qquad (3.9.3)$$

Упражнение. *Доказать, что для любых тензоров второго ранга справедливы формулы*

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\cdot} = \dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\cdot} = (\dot{\mathbf{A}})^{\mathsf{T}}. \tag{3.9.4}$$

Как видим, правила дифференцирования тензоров второго ранга вполне стандартны. Единственное, о чем следует помнить, это о некоммутативности произведения тензоров.

3.10. Угловая скорость

При описании трансляционных движений понятие скорости не вызывает никаких затруднений. Оно кажется совершенно естественным с интуитивной точки зрения, а его формальное определение представляется единственно возможным. Запишем это определение в удобной для нас форме. С этой целью введем в рассмотрение вектор перемещения $\mathbf{u}(t)$ материальной точки. Пусть какое-то положение точки, определяемое вектором $\mathbf{r}$, выбрано в качестве отсчетного. Тогда вектор перемещения $\mathbf{u}$ вводится следующим образом

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(t).$$

Вектор скорости определяется как производная

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t). \tag{3.10.1}$$

Видимо, можно придумать какие-то другие определения скорости трансляционного движения, но никакой нужды в этом не возникает.

К сожалению, аналогичная ясность и определенность для скорости спинорного движения (угловой скорости) вряд ли достижима. На первый взгляд, это кажется странным. В самом деле, относительно полным аналогом вектора перемещений при трансляционных движениях является вектор поворота при спинорных движениях. Поэтому естественным кажется следующее определение вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}_* = \frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t). \tag{3.10.2}$$

Это определение формально аналогично определению (3.10.1). Определение (3.10.2) вполне может быть выбрано в качестве основного для угловой скорости. Тем не менее, в литературе оно практически не используется и, кроме того, не очень удобно. Ниже будет показано, что не менее естественными являются следующие два определения угловой скорости

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{P}(t) \tag{3.10.3}$$

или

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \tag{3.10.4}$$

Важно подчеркнуть, что все три вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, будучи различными, вполне допустимы в качестве исходных определений угловой скорости, ибо между этими векторами существует взаимно однозначное соответствие. В общем случае, как будет показано ниже, это соответствие выражается относительно сложными формулами. Однако в простейшем случае, когда повороты происходят вокруг фиксированной во времени оси, все три вектора угловой скорости тождественно совпадают. Впрочем, и в общем случае существует способ описания поворотов, когда все три вектора угловой скорости совпадают, но совпадают только в данный момент времени, оставаясь различными в любой другой момент времени. При таком описании в качестве отсчетного положения выбирается актуальное положение тела, т.е. тензор поворота строится в следующем виде

$$\mathbf{P}(\tau - t), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \tag{3.10.5}$$

Определение угловой скорости (3.10.2) заменяется на следующее

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left[\frac{d\theta(\tau - t)}{d\tau}\right]_{\tau=t}, \quad \theta(0) = \mathbf{0}, \tag{3.10.6}$$

где t есть данный момент времени, который считается фиксированным, а τ есть текущее время.

Аналогично можно изменить определения (3.10.3) и (3.10.4). При этом все три определения приведут к одному и тому же вектору угловой скорости. По существу, именно определение (3.10.6) принимается, но никогда не используется при решении задач, в большинстве книг и учебников. В данной книге описание поворотов в форме (3.10.5) и определение угловой скорости (3.10.6) использоваться не будут и потому их дальнейшее обсуждение опускается. Заметим только, что получаемые ниже результаты будут отличаться от приводимых в учебниках, но их можно согласовывать посредством перехода к описанию (3.10.5), (3.10.6).

После этих предварительных замечаний, показывающих, что природа понятия угловой скорости является не столь простой, обратимся к последовательному описанию угловой скорости и других характеристик спинорного движения.

3.11. Тензор спина и вектор угловой скорости

Основной теоремой кинематики введен в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P}(t)$, посредством которого выражался поворот твердого тела. Вместе с тем,

тензор $\mathbf{P}(t)$ не привязан ни к каким точкам твердого тела и живет вполне самостоятельной жизнью, поэтому и изучать его можно совершенно независимо от твердого тела. По определению тензор поворота удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\cdot\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)=\mathbf{E},\quad \mathbf{P}(\tau)=\mathbf{E}. \tag{3.11.1}$$

Продифференцируем тождество (3.11.1) по времени и учтем, что $\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{0}$, т.к. $\mathbf{E}$ — постоянный тензор.

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)+\mathbf{P}(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}^{\mathsf{T}}(t)=\mathbf{0}. \tag{3.11.2}$$

Введем в рассмотрение тензор $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}(t)=\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \tag{3.11.3}$$

и назовем его левым тензором спина или просто тензором спина. Подставляя (3.11.3) в (3.11.2), получаем

$$\mathbf{S}(t)+\mathbf{S}^{\mathsf{T}}(t)=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{S}^{\mathsf{T}}(t)=-\mathbf{S}(t). \tag{3.11.4}$$

Итак, тензор спина $\mathbf{S}(t)$ кососимметричен. Известно [18], что любой кососимметричный тензор, в том числе и тензор спина $\mathbf{S}(t)$, может быть представлен через сопутствующий вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$\mathbf{S}(t)=\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{E}=\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}(t). \tag{3.11.5}$$

Определение: *вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, сопутствующий левому тензору спина $\mathbf{S}(t)$, называется вектором левой угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(t)$.*

В дальнейшем эпитет “левый” у угловой скорости будет опускаться, т.е. термины *вектор левой угловой скорости* и *вектор угловой скорости* будут рассматриваться как равнозначные. Кроме того, вместо длинного термина *вектор угловой скорости, отвечающей тензору поворота* $\mathbf{P}(t)$, мы будем использовать более короткий термин — *угловая скорость поворота* $\mathbf{P}(t)$. Наряду с тензором $\mathbf{S}(t)$ можно ввести еще один кососимметричный тензор

$$\mathbf{S}_{\text{r}}=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}(t). \tag{3.11.6}$$

Упражнение. *Доказать, что $\mathbf{S}_{\text{r}}(t)$ кососимметричен.*

Определение: *тензор $\mathbf{S}_{\text{r}}(t)$ называется правым тензором спина. Здесь уже эпитет “правый” должен всегда присутствовать.*

Упражнение. *Показать, что левый и правый тензоры спина связаны соотношением*

$$\mathbf{S}(t)=\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{S}_{\text{r}}(t)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t). \tag{3.11.7}$$

Определение: *вектор* $\boldsymbol{\Omega}(t)$*, сопутствующий правому тензору спина, называется вектором правой угловой скорости, отвечающей тензору поворота* $\mathbf{P}(\mathbf{t})$.

$$\mathbf{S}_r(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(t). \tag{3.11.8}$$

Между левым и правым векторами угловой скорости существует простая связь, которая немедленно устанавливается с помощью весьма полезного тождества

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}, \tag{3.11.9}$$

верного для любого вектора $\mathbf{a}$ и любого тензора поворота $\mathbf{P}$. Подставляя (3.11.5) и (3.11.8) в (3.11.7), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t). \tag{3.11.10}$$

Если в отсчетный момент времени $t = \tau$ тензор поворота $\mathbf{P}(\tau)$ обращается в единичный, то из (3.11.10) получаем совпадение $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ и $\boldsymbol{\Omega}(\tau)$:

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) = \mathbf{P}^T(\tau) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\tau) = \boldsymbol{\Omega}(\tau). \tag{3.11.11}$$

При решении задач динамики твердого тела используются оба вектора угловой скорости. Уравнение (3.11.5) удобнее и нагляднее записать в другой форме

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t). \tag{3.11.12}$$

Уравнение (3.11.12) носит название левого уравнения Пуассона или (в литературе) уравнения Пуассона. Аналогично может быть переписано и уравнение (3.11.8)

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \tag{3.11.13}$$

Уравнение (3.11.13) будем называть правым уравнением Пуассона.

Упражнение. *Показать, что из левого уравнения Пуассона однозначно вытекает правое уравнение Пуассона, т.е. (3.11.12) и (3.11.13) — суть разные записи одного и того же уравнения.*

Определение: *прямая, натянутая на вектор левой угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}(t)$*, называется левой осью вращения, а прямая, натянутая на вектор правой угловой скорости, называется правой осью вращения.*

Левая ось вращения обычно называется просто осью вращения. Ни в коем случае нельзя смешивать понятия ось вращения и ось поворота. В общем (типичном) случае эти оси различаются. Иными словами, поворот тела и его вращение происходят вокруг разных осей. Кроме того, следует помнить, что

ни ось вращения, ни ось поворота, ни векторы угловых скоростей не связаны ни с какими точками тела. Иными словами, векторы угловых скоростей — суть свободные аксиальные векторы. Ось вращения — это множество параллельных прямых, любая из которых может с равным правом называться осью вращения. Если тензор поворота задан, то левый и правый векторы угловой скорости вычисляются относительно легко с помощью уравнений (3.11.12) и (3.11.13), которые, вспомнив определение [18] векторного инварианта тензора второго ранга, удобнее переписать в другой форме

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\right)_{\times};\quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}(t)\right)_{\times}, \tag{3.11.14}$$

где $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{\times}\equiv\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Таким образом, введены понятия левой и правой угловых скоростей. Формально мы, конечно, имели право это сделать. Но пока что неясно, насколько эти понятия удобны. Заранее это предвидеть трудно. Ситуация прояснится немного позднее, когда мы увидим, что именно эти величины будут естественным образом возникать в приложениях. Тем не менее, один вопрос мы должны выяснить немедленно. По определению тензора поворота, он зависит существенным образом от выбора отсчетного положения. Интуитивно ясно, что вектор угловой скорости, при любом разумном определении не должен зависеть от выбора отсчетного положения. Если это не так, то такое определение нельзя признать удовлетворительным. Покажем, что левая угловая скорость действительно не зависит от выбора отсчетного положения, а правая угловая скорость, хотя и зависит от выбора отсчетного положения, но зависит весьма простым и понятным образом. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 3.6.

Пусть тензор поворота $\mathbf{P}$ поворачивает тело из отсчетного положения 1 в актуальное положение, а тензор $\mathbf{Q}$ поворачивает тело из отсчетного положения 2 в то же самое актуальное положение. Очевидно, что поворот $\mathbf{P}$ может быть осуществлен в виде композиции поворота $\mathbf{P}_0$, переводящего тело из положения 1 в положение 2, и последующего поворота $\mathbf{Q}$. Иными словами, имеем представление

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{P}_0. \tag{3.11.15}$$

Используя определение левой угловой скорости (3.11.14), получаем

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{P}}(t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\right)_{\times} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{Q}}(t)\cdot\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{P}_0^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t)\right)_{\times} = \\ = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{Q}}(t)\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t)\right)_{\times} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}}(t), \tag{3.11.16}$$

т.е. левая угловая скорость не зависит от выбора отсчетного положения.

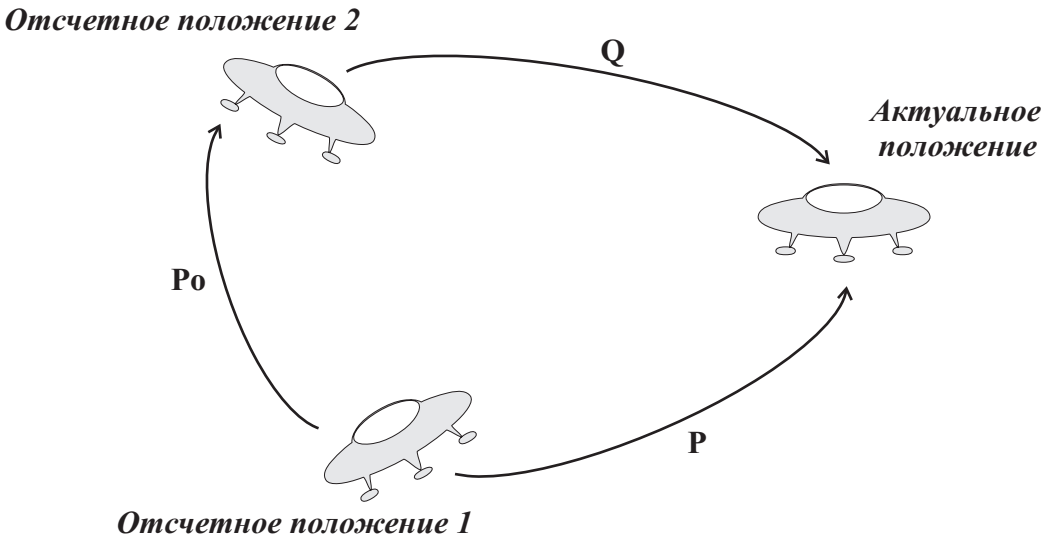

Рис. 3.6. Замена отсчетного положения

Для правой угловой скорости, согласно (3.11.11) и (3.11.16), имеем

$$\boldsymbol{\Omega}_P = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{P}_0^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_Q = \mathbf{P}_0^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_Q, \tag{3.11.17}$$

т.е. правая угловая скорость зависит от выбора отсчетного положения. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\ \mathbf{n}(t), \qquad |\mathbf{n}(t)| = 1, \tag{3.11.18}$$

где $\omega(t)$ называется величиной угловой скорости.

Если $\omega(t) > 0$, то вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}(t)$. Иногда в качестве $\mathbf{n}(t)$ выбирают направляющий вектор вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$\mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)/|\boldsymbol{\omega}(t)|. \tag{3.11.19}$$

В этом случае $\omega(t)$ в (3.11.18) есть модуль вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$. Представление (3.11.19) неудобно, т.к. в этом случае направляющий вектор $\mathbf{n}(t)$ не является в общем случае непрерывной функцией времени: если модуль $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ в какой-то момент времени обращается в нуль, а сам вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ при этом меняет направление на противоположное, то $\mathbf{n}(t)$ скачком меняет свою величину, ибо $|\mathbf{n}(t)| = 1$ при всех t. В представлении (3.11.18) знак будет менять величина $\omega(t)$, а вектор $\mathbf{n}(t)$ будет меняться непрерывно. Итак, по заданному тензору поворота $\mathbf{P}(t)$ векторы угловых скоростей вычисляются однозначно по формулам (3.11.14). Сложнее обстоит дело с обратной задачей: по заданному вектору $\boldsymbol{\omega}(t)$ восстановить тензор поворота.

3.12. Определение поворота по угловой скорости

Допустим, что нам известен левый (правый) вектор угловой скорости. Кроме того, нам известно, что в момент сравнения $t = \tau$ тензор поворота равен единичному тензору

$$\mathbf{P}(t)|_{t=\tau} = \mathbf{E}. \tag{3.12.1}$$

Требуется найти тензор поворота, отвечающий вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Запишем уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad (t > \tau), \tag{3.12.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}(t)$ считается заданным.

Тензорное уравнение (3.12.2) эквивалентно девяти скалярным уравнениям первого порядка для координат тензора $\mathbf{P}(t) = P^{mn}(t)\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$. Однако не все эти уравнения являются независимыми. В (3.12.2) только три уравнения оказываются независимыми. Поэтому система (3.12.2) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Несмотря на то, что сказанное отнюдь не самоочевидно для начинающего, мы не будем заниматься доказательствами немедленно, а изложим их немного позднее, когда ознакомимся с различными представлениями тензора поворота. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача их интегрирования при определенных начальных условиях типа (3.12.1) называется задачей Коши. Таким образом, нахождение тензора поворота по заданной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ сводится к интегрированию уравнения (3.12.2) при начальных условиях (3.12.1). Эта задача Коши весьма специфична и исследована еще в прошлом веке Жаном Дарбу (1842-1917). Поэтому задачу интегрирования уравнения (3.12.2) при начальных условиях (3.12.1) в динамике твердого тела принято называть задачей Дарбу.

Теорема: *решение задачи Дарбу, т.е. решение уравнения (3.12.2) при начальных условиях (3.12.1), существует, единственно и является тензором поворота.*

Доказательство. *Существование и единственность решения задачи Коши, частным случаем которой является задача Дарбу, доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому нам необходимо доказать только последнее утверждение теоремы, т.е. доказать, что тензор* $\mathbf{P}(t)$*, являющийся решением уравнения (3.12.2) и удовлетворяющий условию (3.12.1), является тензором поворота. Пусть* $\mathbf{P}(t)$ *удовлетворяет уравнению (3.12.2) и начальному условию (3.12.1). Составим тензор* $\mathbf{B}(t)$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t), \quad \mathbf{B}(\tau) = \mathbf{E}, \quad t \geq \tau. \tag{3.12.3}$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$ *в силу (3.12.1). Продифференцируем (3.12.3) по времени и воспользуемся уравнением (3.12.2) для того, чтобы исключить производные от* $\mathbf{P}(t)$ *по времени. Получим*

$$\dot{\mathbf{B}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^{\mathsf{T}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^{\mathsf{T}} =$$

$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Таким образом, если тензор $\mathbf{P}(t)$ *удовлетворяет уравнению (3.12.2), то тензор* $\mathbf{B}(t)$ *должен удовлетворять уравнению*

$$\dot{\mathbf{B}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t), \quad t > \tau. \tag{3.12.4}$$

Кроме того, $\mathbf{B}(t)$ *при* $t = \tau$ *должен удовлетворять условию (3.12.3):* $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{E}$. *Иными словами, для тензора* $\mathbf{B}(t)$ *мы также получили задачу Коши, решение которой существует и единственно. На первый взгляд, решение задачи (3.12.4) и (3.12.3) ничуть не проще, чем решение задачи Дарбу (3.12.2) и (3.12.1). Но все дело в том, что решение задачи (3.12.4) и (3.12.3) легко угадать. Именно угадать, а не построить на основе каких-либо общих методов. Действительно, легко видеть, что тензор* $\mathbf{B}(t) = \mathbf{E}$ *удовлетворяет как уравнению (3.12.4), так и начальному условию (3.12.3). Поскольку решение задачи Коши (3.12.4) и (3.12.3) единственно, то тензор* $\mathbf{B}(t) = \mathbf{E}$ *является единственным решением задачи. Таким образом, получается, что тензор* $\mathbf{P}(t)$ *при всех* t *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) = \mathbf{E},$$

из которого следует, что тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ *— ортогонален. Как следствие получаем отсюда условия*

$$[\det \mathbf{P}(\mathbf{t})]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) [\det \mathbf{P}(t)]^{\cdot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \text{const}.$$

Поскольку при $t = \tau$ *имеем* $\det \mathbf{P}(\tau) = \det \mathbf{E} = 1$, *то* $\det \mathbf{P}(t) = 1$ *при всех* t. *Итак, решение задачи Дарбу является тензором поворота.*

В качестве момента сравнения τ всегда можно выбрать значение $\tau = 0$, т.е. τ принять за начало отсчета времени. Но это не всегда удобно. Рассмотрим пример (рис. 3.7).

Пусть стержень OA подвешен с помощью шарнира в точке O и может совершать движения вокруг O в плоскости чертежа. Пусть на стержень действует поле силы тяжести g. Тогда если стержень слегка отклонить от вертикали и затем опустить, то он начнет совершать малые колебания около вертикали. Начальное положение стержня (на рисунке — это OA) при $t = 0$ отклонено от вертикали. В качестве отсчетного положения удобно принять не это начальное

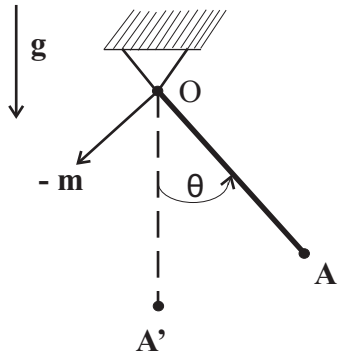

Рис. 3.7. Выбор отсчетного положения

положение, а вертикальное положение стержня. Поэтому принимаем, что при каком-то $\tau < 0$ стержень занимал вертикальное положение и тензор поворота $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$. При $t = 0$ тензор поворота имеет вид

$$\mathbf{P}(0) = (1 - \cos\theta_0)\,\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\theta_0\,\mathbf{E} + \sin\theta_0\,\mathbf{m} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{P}_0,$$

где $\mathbf{m}$ — ортогонален плоскости чертежа и направлен “от нас”.

Задача Дарбу в этом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \tag{3.12.5}$$

Отметим одно свойство задачи Дарбу. На первый взгляд может показаться, что задача (3.12.5) линейна. Следовательно, ее общее решение должно быть суммой трех частных решений уравнения (3.12.5). Именно так гласит известная теорема из теории линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Здесь имеется одна тонкость, которая резко меняет ситуацию. Дело, конечно, в начальном условии. Тензор $\mathbf{P}_0$ в (3.12.5) должен быть тензором поворота. Повороты, как мы уже знаем, мультипликативны, а вовсе не аддитивны. Поэтому сумма частных решений нас попросту не устраивает. Как же строить в таком случае общее решение задачи Дарбу (3.12.5)? Оказывается, что достаточно найти одно частное решение уравнения (3.12.5), но такое, что оно является тензором поворота. Последнее обстоятельство существенно затрудняет построение решения задачи Дарбу. В частности, оно делает проблематичным численное построение решения, ибо строить численно матрицы, строго удовлетворяющие условиям ортогональности, весьма затруднительно, если вообще возможно. Позднее мы покажем, как устранить описанное затруднение. Сейчас мы ограничимся демонстрацией того, что одного частного решения уравнения (3.12.5), без учета начального условия, достаточно, чтобы найти общее решение задачи (3.12.5). Пусть тензор поворота $\mathbf{Q}(t)$ является

каким-либо решением уравнения (3.12.5) без учета начального условия

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t).$$

Тогда тензор поворота

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(0) \cdot \mathbf{P}_0 \tag{3.12.6}$$

является решением задачи (3.12.5).

Упражнение. *Доказать последнее утверждение.*

3.13. Вращение вокруг фиксированной оси

Повороты и вращения твердого тела вокруг фиксированной оси часто встречаются в приложениях, например, при плоских движениях тела. Этот случай наиболее прост для интуитивного восприятия спинорного движения. Не случайно поэтому в элементарных учебниках по физике угловая скорость вводится именно на примере вращения тела вокруг фиксированной оси. Рассмотрим диск, который поворачивается (вращается) вокруг собственной оси, причем плоскость диска сохраняет неизменное положение. За время Δt диск поворачивается на угол $\Delta\theta(t)$. Ось диска совпадает с прямой, натянутой на единичный вектор $\mathbf{m} = \text{const}$. Угловой скоростью называют векторную величину

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t}\right] \mathbf{m} = \dot{\theta}(t)\,\mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \tag{3.13.1}$$

В некоторых книгах определение (3.13.1) распространяется на общий случай, когда $\mathbf{m}$ меняется во времени. Интуитивно не вполне ясно, всегда ли приемлемо определение угловой скорости в виде (3.13.1). Однако совершенно ясно, что любое приемлемое определение угловой скорости обязательно должно совпадать с (3.13.1) в описанной выше ситуации, т.е. когда вращение происходит вокруг фиксированной во времени оси. Проверим этот факт для левой и правой угловых скоростей, определенных посредством (3.11.5) и (3.11.8). Тензор поворота вокруг оси $\mathbf{m}$ дается теоремой Эйлера (3.3.1), причем

$$\mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}. \tag{3.13.2}$$

Это равенство, разумеется, справедливо всегда, а не только при $\mathbf{m} = \text{const}$. Запишем теперь уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta\,\mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}). \tag{3.13.3}$$

Умножим это равенство скалярно на вектор $\mathbf{m}$ справа и учтем, что

$$[\dot{\mathbf{Q}}(\theta\,\mathbf{m})] \cdot \mathbf{m} = [\mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}]^{\cdot} = \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}.$$

Тогда из (3.13.3) следует равенство

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \lambda(t)\mathbf{m}. \tag{3.13.4}$$

Иными словами, если повороты происходят вокруг фиксированной оси, то и вращения происходят вокруг этой же фиксированной оси. Оси поворота и вращения совпадают. Подставляя (3.13.4) в (3.13.3), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta\,\mathbf{m}) = \lambda(t)\mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}). \tag{3.13.5}$$

Вычислим теперь след от обеих частей уравнения (3.13.5) и учтем равенства

$$\operatorname{tr}\dot{\mathbf{Q}}\,(\theta\,\mathbf{m}) = [\operatorname{tr}\mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m})]^{\cdot} = (1 + 2\cos\theta)^{\cdot} = -2\sin\theta \cdot \dot{\theta},$$

$$\operatorname{tr}[\,\mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m})] = \operatorname{tr}[\sin\theta\,\mathbf{m} \times \mathbf{E} \times \mathbf{m}] = -2\sin\theta.$$

В результате, вместо (3.13.5) получим

$$-2\sin\theta\dot{\theta} = -2\lambda(t)\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \dot{\theta}(t). \tag{3.13.6}$$

Подставляя это соотношение в (3.13.4), получаем определение (3.13.1). Итак, левая угловая скорость при поворотах вокруг фиксированной оси совпадает с определением (3.13.1). Для правой угловой скорости имеем

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\theta\,\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{Q}(\theta\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \dot{\theta}\,\mathbf{m},$$

т.е. правая и левая угловые скорости в этом случае совпадают. Ранее равенствами (3.10.2),(3.10.3) и (3.10.4) были введены три различных определения угловой скорости. При поворотах вокруг фиксированной оси все три определения приводят к одному и тому же вектору

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t). \tag{3.13.7}$$

Можно только пожалеть, что справедливость соотношений (3.13.7) исчерпывается случаем поворотов вокруг фиксированной оси. Весьма близким к рассмотренному случаю поворота вокруг фиксированной оси является случай вращения вокруг фиксированной оси

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \text{const}, \quad |\mathbf{n}| = 1. \tag{3.13.8}$$

Для того, чтобы найти ось поворота, необходимо по $\boldsymbol{\omega}(t)$ построить тензор поворота и найти его неподвижный вектор. Иными словами, необходимо решить задачу Дарбу

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \omega(t)\mathbf{n} \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \tag{3.13.9}$$

Введем следующие подстановки

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{K} = \text{const}. \tag{3.13.10}$$

Подставляя эти соотношения в (3.13.9) получаем следующую задачу для нового тензора поворота $\mathbf{Q}(t)$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \omega(t)\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}. \tag{3.13.11}$$

Докажем утверждение: производная от тензорной экспоненты $\exp[\varphi(t)\,\mathbf{A}]$, где $\mathbf{A} = \text{const}$, равна

$$\frac{d}{dt}\exp[\varphi(t)\,\mathbf{A}] = \dot{\varphi}\,\mathbf{A} \cdot \exp(\varphi\,\mathbf{A}) = \dot{\varphi}\exp(\varphi\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}. \tag{3.13.12}$$

Для доказательства (3.13.12) рассмотрим тензорный ряд, являющийся определением тензорной экспоненты

$$\exp(\varphi\,\mathbf{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\varphi^m\,\mathbf{A}^m.$$

Дифференцируя этот ряд по времени и учитывая, что $\mathbf{A}$ — постоянный тензор, получаем

$$\frac{d}{dt}\exp(\varphi\,\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dot{\varphi}\varphi^{m-1}}{(m-1)!}\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{m-1} = \dot{\varphi}\,\mathbf{A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\varphi^k\,\mathbf{A}^k =$$

$$= \dot{\varphi}\,\mathbf{A} \cdot \exp(\varphi\mathbf{A}) = \dot{\varphi}\exp(\varphi\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}.$$

Здесь мы перешли к другому индексу суммирования $k = m - 1$. Обратим внимание, что условие $\mathbf{A} = \text{const}$ является весьма существенным. В противном случае, при дифференцировании тензорного ряда пришлось бы дифференцировать тензор $\mathbf{A}$ и ничего похожего на (3.13.12) не получилось бы. Проблема в том, что тензоры $\mathbf{A}$ и $\dot{\mathbf{A}}$ не коммутируют

$$\mathbf{A}(t) \cdot \dot{\mathbf{A}}(t) \neq \dot{\mathbf{A}}(t) \cdot \mathbf{A}(t).$$

Обратимся к решению задачи (3.13.11). Тензор поворота $\mathbf{Q}(t)$ ищем в виде (3.4.11)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\theta(t) \times \mathbf{E}) = \exp[\theta(t)\,\mathbf{K}], \tag{3.13.13}$$

где

$$\theta(t) = \theta(t)\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \text{const}. \tag{3.13.14}$$

Дифференцируя (3.13.13) по времени и учитывая (3.13.12), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \dot{\theta}(t)\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(t).$$

Подставляя это выражение в (3.13.11), приходим к скалярному уравнению

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau. \tag{3.13.15}$$

Здесь мы учли начальное условие $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$, из которого следует, что $\theta(0) = 0$. Итак, задача Дарбу (3.13.11) решена и тензор поворота $\mathbf{Q}$ найден. Ось этого поворота совпадает с осью вращения $\mathbf{n}$. Исходный тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ согласно (3.13.10) имеет вид

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\theta \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_0 = \exp(\theta \times \mathbf{E}) \cdot \exp(\boldsymbol{\varphi}_0 \times \mathbf{E}), \tag{3.13.16}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_0$ есть вектор начального поворота.

Вектор поворота, отвечающий тензору $\mathbf{P}(t)$, можно найти по формуле сложения векторов поворота (3.8.16). В результате получим, что неподвижный вектор тензора $\mathbf{P}(t)$ совпадает с осью вращения $\mathbf{n}$ тогда и только тогда, когда вектор начального поворота $\boldsymbol{\varphi}_0$ лежит на оси вращения $\mathbf{n}$.

Упражнение. *Доказать это утверждение.*

Если

$$\theta \times \boldsymbol{\varphi}_0 \neq \mathbf{0},$$

то вектор поворота, отвечающий тензору поворота $\mathbf{P}(t)$, будет иметь переменное во времени направление.

3.14. Связь угловой скорости с вектором поворота

Угловая скорость вводится в рассмотрение с помощью уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}|_{t=0} = \mathbf{P}_0. \tag{3.14.1}$$

Если тензор поворота задан, то угловая скорость определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_x. \tag{3.14.2}$$

Для тензора поворота мы имеем несколько представлений. Одно из них выражалось формулой (3.3.1)

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\theta)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi, \tag{3.14.3}$$

где угол поворота $\theta(t)$ и неподвижный вектор $\mathbf{m}(t)$ зависят от времени.

Упражнение. *Доказать равенство*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}\,\mathbf{m} + \sin\theta\dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos\theta)\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \tag{3.14.4}$$

Для доказательства этого равенства достаточно продифференцировать (3.14.3) по времени, а результат подставить в (3.14.2). Начинающим весьма полезно проделать вывод (3.14.4).

Равенство (3.14.4) было строго получено в [17, 21]. Однако, в несколько другой трактовке, это равенство было известно еще Эйлеру [26]. Если вращение происходит вокруг фиксированной оси $\dot{\mathbf{m}} = 0$, то из (3.14.4) получаем (3.13.7). Если в качестве отсчетного положения выбрать положение в данный момент времени, то получим определение угловой скорости, принятое в некоторых книгах

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[\frac{d\theta(\tau - t)}{d\tau}\right]_{\tau=t} = \dot{\theta}(t)\mathbf{m}(t), \quad \theta(0) = 0. \tag{3.14.5}$$

Это выражение справедливо только в один момент времени. Поэтому его нельзя дифференцировать по времени. Наконец, для малых поворотов, когда

$$\sin\theta = \theta, \quad 1 - \cos\theta = 0(\theta^2),$$

получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{m} + \theta\dot{\mathbf{m}} = (\theta\,\mathbf{m})^{\cdot}, \tag{3.14.6}$$

где $\theta(t)\,\mathbf{m}(t)$ есть вектор малого поворота.

Выражение (3.14.6) можно, разумеется, получить непосредственно из представлений (3.5.3) и (3.14.2). В самом деле, дифференцируя (3.5.3), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = (\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E} + \mathbf{0}(\theta^2).$$

Подставляя это выражение в (3.14.2) и учитывая тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\,\mathbf{a},$$

получаем (3.14.6). Выражение (3.14.4) будет удобно во многих случаях, но не всегда. Главный недостаток (3.14.4) состоит в том, что в него входят производные от угла поворота и неподвижного вектора по отдельности. Часто бывает необходимо выразить угловую скорость непосредственно через производную от вектора поворота $\boldsymbol{\theta} = \theta\,\mathbf{m}$. Вывод этого представления [21] приведем достаточно подробно. Вычисляя след от обеих частей уравнения Пуассона, получаем

$$(\operatorname{tr}\mathbf{P})^{\cdot} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -2\frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tr}\mathbf{P} = 1 + 2\cos\theta, \quad \operatorname{tr}\dot{\mathbf{P}} = -2\sin\theta\dot{\theta},$$

из предыдущего равенства получаем

$$\theta\dot{\theta} = \boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{3.14.7}$$

Умножая теперь обе части уравнения Пуассона (3.14.1) скалярно на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и учитывая, что

$$\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}, \tag{3.14.8}$$

получаем

$$\dot{\mathbf{P}}\cdot\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\theta})^{\cdot} - \mathbf{P}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\mathbf{P}-\mathbf{E})\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Используя представление (3.4.6), получаем

$$\dot{\mathbf{P}}\cdot\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

В результате из (3.14.1) следует равенство

$$\mathbf{R}\cdot\left[\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega}\right] = \mathbf{0}. \tag{3.14.9}$$

Заметим, что

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \lambda\boldsymbol{\theta}.$$

Следовательно, из (3.14.9) получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\theta} + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.14.10}$$

Осталось определить скаляр λ. Для этого умножим (3.14.10) скалярно на $\boldsymbol{\theta}$ и учтем равенство (3.14.7)

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = \lambda\theta^2 + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.14.11}$$

Теперь (3.14.10) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R} + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\,\mathbf{R}^2\right]\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}, \tag{3.14.12}$$

где

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\mathbf{R} + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\,\mathbf{R}^2. \tag{3.14.13}$$

Как видим, связь (3.14.12) угловой скорости с производной от вектора поворота является довольно сложной. Обращая (3.14.12), получаем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0, \tag{3.14.14}$$

где

$$\mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2}\mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin\theta}{2(1-\cos\theta)}. \tag{3.14.15}$$

Обратим внимание, что θ в формулах (3.14.11) – (3.14.15) и ниже можно трактовать как модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$, определенный равенством (3.14.15), в дальнейшем будем называть тензором-интегратором. Название объясняется тем, что $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ выполняет роль интегрирующего множителя, переводящего линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega}\,dt$ в полный дифференциал $d\boldsymbol{\theta}$ вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ невырожден, ибо его определитель

$$\det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta^2}{2(1-\cos\theta)} \neq 0, \quad \theta < \pi. \tag{3.14.16}$$

Он обладает рядом полезных свойств, облегчающих его применение. Отметим некоторые из них. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ есть изотропная функция вектора поворота

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{S}^{\mathsf{T}}, \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}. \tag{3.14.17}$$

Если $\mathbf{S} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$, то из (3.14.17) следует

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.14.18}$$

Кроме того, легко проверить тождество

$$\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.14.19}$$

Используя это тождество, равенство (3.14.14) легко переписать для правой угловой скорости

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{Z}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\theta})\cdot\boldsymbol{\Omega}(t). \tag{3.14.20}$$

В терминах вектора поворота левую и правую задачи Дарбу можно переписать в следующих формах

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0; \tag{3.14.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.14.22}$$

Следует обратить внимание на различие, например, в формулировках левой задачи Дарбу (3.14.1) и (3.14.21). В принципе, эти формулировки эквивалентны. Решив одну из этих задач, мы одновременно решим и другую задачу. На первый взгляд кажется, что формулировка (3.14.1) значительно проще, чем (3.14.21). В самом деле, уравнение (3.14.1) линейно и однородно. Уравнение (3.14.21) существенно нелинейно и неоднородно. Тем не менее, численное,

по крайней мере, решение задачи (3.14.21) несравнимо проще, нежели решение задачи (3.14.1). В частности, обратим внимание читателя на следующую возможность. Задачу Дарбу (3.14.1) можно простой заменой

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{P}_0 \tag{3.14.23}$$

свести к следующей

$$\dot{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{Q}|_{t=0} = \mathbf{E}. \tag{3.14.24}$$

Это возможно, поскольку левые угловые скорости для поворотов $\mathbf{P}(\theta)$ и $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi})$ совпадают

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}]_{\times} = -\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}]_{\times}.$$

Тогда вместо задачи (3.14.21) получаем следующую задачу для вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\varphi^2}\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}. \tag{3.14.25}$$

Преимущество последней задачи по сравнению с (3.14.21) в том, что, во–первых, здесь простейшее начальное условие и, во–вторых, очень часто вектор $\boldsymbol{\varphi}$ можно считать малым. Исходный вектор поворота θ можно найти по вектору $\boldsymbol{\varphi}$ и θ_0 с помощью формул (3.8.16). Представления (3.14.21) и (3.14.22) можно записать в другой форме

$$\dot{\theta} = g\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0; \tag{3.14.26}$$

$$\dot{\theta} = g\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.14.27}$$

Иногда она бывает полезной.

Этими краткими замечаниями мы здесь и ограничимся. Более детальное описание выходит за рамки данной книги. Приведенные в этом пункте формулы понадобятся нам в дальнейшем при определении потенциальных моментов.

3.15. Угловая скорость композиции поворотов

В приложениях бывает удобно представлять общий поворот $\mathbf{P}(t)$ в виде композиции поворотов

$$\mathbf{P}(\theta(t)) = \mathbf{Q}_2(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\psi}(t)). \tag{3.15.1}$$

Здесь $\mathbf{Q}_1$ есть первый поворот, а $\mathbf{Q}_2$ — второй поворот. Напомним, что композицию поворотов нельзя понимать так, что сначала, в течение какого–то

интервала времени, производится поворот $\mathbf{Q}_1$, а затем, по истечении первого интервала времени, начинает производиться второй поворот $\mathbf{Q}_2$. Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ — это мгновенное действие, происходящее в момент времени t и состоящее в том, что в момент времени t тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ поворачивает тело из отсчетного положения в актуальное. В следующий момент времени $t + \Delta t$ тензор поворота $\mathbf{P}(t + \Delta t)$ переводит тело из отсчетного положения в положение, занимаемое телом в момент времени $(t + \Delta t)$. Истинное изменение ориентации тела в пространстве описывается не тензором поворота, а его изменением (дифференциалом). Это обстоятельство важно осознать. Полезно поэтому провести аналогию с вектором перемещения $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(t).$$

Вектор $\mathbf{u}(t)$ мгновенно переносит тело из отсчетного положения $\mathbf{r}$ в актуальное положение $\mathbf{R}(t)$. При этом $\mathbf{u}(t)$ сам по себе не показывает истинного движения тела, которое, тем не менее, может быть восстановлено по вектору $\mathbf{u}$

$$d\,\mathbf{R}(t) = d\,\mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \int_0^t d\,\mathbf{u}(t).$$

При этом $d\,\mathbf{u} = \mathbf{v}dt$, т.е. линейная дифференциальная форма $\mathbf{v}dt$ есть полный дифференциал вектора перемещения. Для поворотов ситуация сложнее. Изменение поворота, согласно уравнению Пуассона, определяется через линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega}dt$

$$d\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}dt \times \mathbf{P},$$

но $\boldsymbol{\omega}dt$ не является полным дифференциалом вектора поворота

$$\boldsymbol{\omega}dt \neq d\theta.$$

По существу именно с этим обстоятельством связаны все усложнения, возникающие при описании поворотов.

Вернемся, однако, к композиции поворотов (3.15.1). Все, сказанное относительно полного поворота $\mathbf{P}$, справедливо и для составляющих поворотов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$. Допустим, нам известны угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ поворотов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ соответственно

$$\dot{\mathbf{Q}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1, \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2. \tag{3.15.2}$$

Как по ним вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ полного поворота $\mathbf{P}$? Ответ дает следующая простая

Теорема: *угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$ *полного поворота* $\mathbf{P}$*, определенного в виде композиции (3.15.1), вычисляется по угловым скоростям* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *составляющих поворотов* $\mathbf{Q}_1$ *и* $\mathbf{Q}_2$ *посредством равенства*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(t). \tag{3.15.3}$$

Доказательство *(3.15.3) вполне элементарно и получается после дифференцирования (3.15.1) по времени*

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_2(t) \cdot \mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1(t).$$

Заменяя здесь производные от тензоров поворота с помощью уравнения Пуассона (3.15.2), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1). \tag{3.15.4}$$

Преобразуем здесь второе слагаемое в правой части

$$\mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1) = \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_1 =$$

$$\mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_2^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = [(\mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1.$$

Учитывая это тождество и равенство (3.15.1), вместо (3.15.4) получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = (\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{P}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ *справа и вычисляя векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства, приходим к формуле (3.15.3). Доказательство завершено.*

В литературе равенство (3.15.3), точнее его аналог, называют *теоремой сложения угловых скоростей*. Как уже неоднократно отмечалось, в литературе используется определение угловой скорости, когда в качестве отсчетного положения используется положение в данный момент времени. При таком описании

$$\mathbf{Q}_2(\tau - t)|_{\tau=t} = \mathbf{E}$$

и равенство (3.15.3) переходит в традиционную форму сложения угловых скоростей

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t). \tag{3.15.5}$$

Хотя в этом выражении и стоит аргумент t, тем не менее его нельзя дифференцировать по времени, поскольку здесь t есть один фиксированный момент времени. Автор рекомендует не использовать формулы типа (3.15.5) и аналогичные ей выражения, аппелирующие к мгновенному состоянию движения.

Будучи формально правильными, они служат источником многих недоразумений и практически бесполезны. Кроме того, они находятся в трудно устранимом противоречии с интуитивными представлениями. Например, мы знаем, что повороты не коммутируют. Поэтому их угловые скорости должны входить в формулу сложения не равноправно. Это действительно имеет место в (3.15.3), но в (3.15.5) этот факт глубоко замаскирован. В данной книге теорема о сложении угловых скоростей используется исключительно в форме (3.15.3). Из последней вытекает представление для сложения правых угловых скоростей

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_2, \tag{3.15.6}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{Q}_2^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_2.$$

Из представлений (3.15.3) вытекают формулы для композиции трех и большего числа поворотов

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \tag{3.15.7}$$

Тогда имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{Q}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1. \tag{3.15.8}$$

Упражнение. *Доказать (3.15.8).*

Ранее мы видели, что угловая скорость в общем случае вычисляется по довольно сложным формулам, представленным в предыдущем параграфе. Все они резко упрощаются, если поворот происходит вокруг фиксированной оси. Тогда угловая скорость вычисляется по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{m} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \tag{3.15.9}$$

Поэтому часто бывает полезным общий поворот представить в виде композиции поворотов вокруг фиксированных осей. Рассмотрим, например, композицию поворотов

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi\,\mathbf{n}), \tag{3.15.10}$$

где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — постоянные единичные векторы.

Угловые скорости поворотов $\mathbf{Q}_2(\varphi\ \mathbf{m})$ и $\mathbf{Q}_1(\psi\ \mathbf{n})$ вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{m}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}(t)\,\mathbf{n}. \tag{3.15.11}$$

Согласно теореме сложения угловых скоростей (3.15.3), имеем

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{m} + \dot{\psi}(t)\,\mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \tag{3.15.12}$$

Это выражение можно переписать в эквивалентной форме

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \left[\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,\mathbf{m} + \dot{\psi}(t)\,\mathbf{n}\right], \tag{3.15.13}$$

которая часто будет использоваться в дальнейшем. Обычно такого рода преобразованиями вообще удается избежать относительно громоздкой операции умножения тензора поворота на вектор. Посмотрим теперь как усложняются вычисления, если хотя бы один из поворотов проводить вокруг меняющейся во времени оси. В соответствии с правилом квазикоммутативности поворотов поворот (3.15.10) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi\,\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1(\psi\,\mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}), \tag{3.15.14}$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \tag{3.15.15}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ поворота $\mathbf{Q}_1(\psi\,\mathbf{n}')$ теперь уже должна вычисляться по полной формуле (3.14.4)

$$\boldsymbol{\omega}_* = \dot{\psi}\,\mathbf{n}' + \sin\psi\,\dot{\mathbf{n}}' + (1 - \cos\psi)\,\mathbf{n}' \times \dot{\mathbf{n}}'. \tag{3.15.16}$$

Угловая скорость поворота (3.15.14) согласно (3.15.3) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_*(t) + \dot{\varphi}\,\mathbf{Q}_1(\psi\,\mathbf{n}') \cdot \mathbf{m}. \tag{3.15.17}$$

Поскольку повороты (3.15.10) и (3.15.14) совпадают, то и угловые скорости (3.15.12) и (3.15.17) должны тождественно совпадать, что сразу не очевидно.

Упражнение. *Доказать, что выражения (3.15.12) и (3.15.17) приводят к одному и тому же вектору* $\boldsymbol{\omega}(t)$.

При вычислении производной от вращающегося вектора следует активно пользоваться уравнением Пуассона. Например, для вектора (3.15.15) имеем

$$\dot{\mathbf{n}}' = [\mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}]^{\cdot} = \dot{\mathbf{Q}}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \dot{\varphi}\,\mathbf{m} \times \mathbf{Q}_2(\varphi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь использовано уравнение Пуассона. Вспоминая (3.15.15) окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{n}}'(t) = \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{m} \times \mathbf{n}'(t). \tag{3.15.18}$$

Если вектор $\mathbf{a} = \text{const}$ поворачивается тензором поворота общего вида, то вместо (3.15.18) имеем

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \tag{3.15.19}$$

Если вектор $\mathbf{a}$ меняется во времени и, кроме того, поворачивается тензором поворота, то, разумеется, вместо (3.15.19) следует использовать более полное выражение

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \tag{3.15.20}$$

Часто последнее выражение удобно представлять в другой форме. При этом следует вспомнить тождество

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{P}\cdot\mathbf{b}), \tag{3.15.21}$$

которое выполняется для любых векторов и любых тензоров поворота.

Вводя в рассмотрение правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}(t),$$

равенство (3.15.20) переписываем в виде

$$\dot{\mathbf{a}}'(t)=\mathbf{P}(t)\cdot[\dot{\mathbf{a}}(t)+\boldsymbol{\Omega}(t)\times\mathbf{a}(t)]. \tag{3.15.22}$$

В литературе формулы типа (3.15.22) часто трактуют в терминах различного рода наблюдателей. Читатель, уже добившийся более или менее устойчивой визуализации векторных и тензорных объектов, легко сможет самостоятельно интерпретировать смысл формул типа (3.15.22). Тем не менее, в параграфе, посвященном описанию относительных движений, мы обсудим и эти трактовки. Здесь же укажем только, что все величины, входящие в (3.15.22) и другие формулы, заданы в одной и только одной (произвольно выбранной) системе отсчета и, вообще говоря, не нуждаются в каких-то дополнительных трактовках. Замены системы отсчета будут обсуждены позднее в конце этой главы.

Вернемся к вычислению угловой скорости для композиции поворотов. Ранее была доказана теорема (3.8.1) о представлении произвольного тензора поворота в виде композиции трех поворотов вокруг фиксированных и произвольно выбираемых осей. Теорема (3.15.3) позволяет без труда вычислить угловую скорость композиции поворотов (3.8.1)

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{Q}_3(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}_2(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{Q}_1(\varphi\,\mathbf{n}),\quad \mathbf{e}=\mathbf{m}\times\mathbf{n}/|\mathbf{m}\times\mathbf{n}|. \tag{3.15.23}$$

Здесь единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ выбираются произвольно, но они не зависят от времени. Уравнения Пуассона для поворотов, входящих в (3.15.23), дают

$$\dot{\mathbf{P}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P},\quad \dot{\mathbf{Q}}_1=\dot{\varphi}\,\mathbf{n}\times\mathbf{Q}_1,\quad \dot{\mathbf{Q}}_2=\dot{\vartheta}\,\mathbf{e}\times\mathbf{Q}_2,\quad \dot{\mathbf{Q}}_3=\dot{\psi}\,\mathbf{m}\times\mathbf{Q}_3.$$

Угловые скорости для составляющих поворотов вычисляются по простейшим формулам. Полная угловая скорость в соответствии с (3.15.8) дается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\dot{\psi}\,\mathbf{m}+\dot{\vartheta}\,\mathbf{e}'+\dot{\varphi}\,\mathbf{n}'', \tag{3.15.24}$$

$$\mathbf{e}'=\mathbf{Q}_3(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{e},\quad \mathbf{n}''=\mathbf{Q}_3(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}_2(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{n}. \tag{3.15.25}$$

Уравнение (3.15.24) носит название кинематического уравнения Эйлера. Оно было получено Л. Эйлером для случая $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ и единичного вектора $\mathbf{e}$, ортогонального $\mathbf{m}$. Величины $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\varphi}$ носят названия угловых скоростей прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Заметим, что эти названия в общем случае весьма условны, а сами эти величины обретают объективный смысл только при учете специфики как рассматриваемой задачи, так и твердого тела, повороты которого описываются тензором (3.15.23).

3.16. Скорости и ускорения точек твердого тела

Вся информация о кинематических характеристиках движения точек абсолютно твердого тела содержится в основном уравнении кинематики (3.2.6)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q), \tag{3.16.1}$$

где векторы $\mathbf{r}_Q$ и $\mathbf{R}_Q$ определяют положение полюса Q в отсчетном и актуальном положениях соответственно, векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{R}_A$ определяют положение произвольно выбранной точки A в отсчетном и актуальном положениях соответственно, тензор $\mathbf{P}(t)$ определяет поворот абсолютно твердого тела. Чтобы найти распределение скоростей в абсолютно твердом теле достаточно продифференцировать (3.16.1) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q). \tag{3.16.2}$$

Исключая отсюда производную от тензора поворота с помощью уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \tag{3.16.3}$$

получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q).$$

С учетом уравнения (3.16.1) этому соотношению можно придать вид

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)). \tag{3.16.4}$$

Последнее равенство носит название уравнения Эйлера. Оно позволяет найти скорости всех точек абсолютно твердого тела и допускает ясное геометрическое истолкование для скорости точки A относительно полюса Q (рис. 3.8).

Эта интерпретация упрощается, если полюс Q неподвижен. Тогда в каждый момент времени точка A как бы движется по окружности вокруг оси, натянутой на вектор $\boldsymbol{\omega}$. Следует, впрочем, предостеречь от слишком буквального следования этой интерпретации, поскольку точка A движется по указанной окружности только тогда, когда, во–первых, полюс Q неподвижен и,

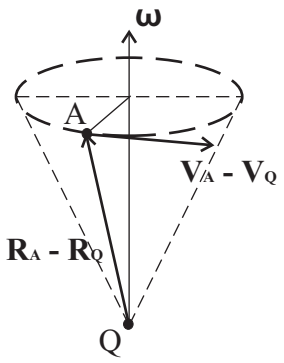

Рис. 3.8. Интерпретация уравнения Эйлера

во–вторых, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен. При нарушении любого из этих двух условий фактическое движение точки A происходит по другой траектории, которая может весьма сильно отличаться от упомянутой окружности. Многие книги по механике используют формулу (3.16.4) в качестве определения угловой скорости. Такой подход, разумеется, возможен, но при этом природа угловой скорости и ее связь с поворотами тела оказываются скрытыми. Чтобы получить распределение ускорений в абсолютно твердом теле достаточно продифференцировать (3.16.4) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_Q).$$

Исключая отсюда скорости с помощью равенства (3.16.4), получаем

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q)]. \tag{3.16.5}$$

Выражение (3.16.5) можно переписать в другой, но эквивалентной, форме

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}] \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q). \tag{3.16.6}$$

Вектор $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется вектором угловых ускорений. Тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} \tag{3.16.7}$$

будем называть тензором угловых ускорений. Последний можно выразить через левый тензор спина S_l

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = \dot{\mathbf{S}}_l + \mathbf{S}_l^2, \quad \mathbf{S}_l = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \tag{3.16.8}$$

В заключение этого пункта введем еще два часто используемых в литературе понятия. Рассмотрим тело, имеющее неподвижную точку Q, которую выберем в качестве полюса, причем $\mathbf{V}_Q = \mathbf{0}$.

Определение: *прямая*

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q + \frac{\lambda}{\omega(t)}\boldsymbol{\omega}(t), \quad \dot{\mathbf{R}}_Q = \mathbf{0}, \tag{3.16.9}$$

проходящая через неподвижный полюс Q *и натянутая на вектор угловой скорости, называется мгновенной осью вращения.*

Скалярный параметр λ, входящий в (3.16.9), играет роль расстояния, на которое точка A отстоит от полюса Q. Из выражения (3.16.4) видим, что скорости всех точек, лежащих на мгновенной оси вращения в данный момент времени равны нулю. Иными словами, если тело имеет неподвижную точку Q, то существует такая прямая (3.16.9), что в данный момент времени тело как бы вращается вокруг этой неподвижной прямой. Если тело имеет неподвижную точку, то мгновенная ось вращения всегда существует. Можно распространить понятие мгновенной оси вращения и на другие случаи движения, при которых тело не имеет неподвижной точки. Однако такое расширение возможно не для любых движений.

Определение: *мгновенной осью вращения называется прямая, натянутая на вектор угловой скорости и такая, что скорости точек тела, лежащие в данный момент времени на этой прямой, обращаются в нуль.*

Выясним при каких условиях, налагаемых на движение тела, мгновенная ось вращения существует. По определению мгновенная ось вращения состоит из точек, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Тогда, согласно (3.16.4) для таких точек имеем

$$\mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)) = \mathbf{0}. \tag{3.16.10}$$

Это равенство должно быть справедливым для любого выбора полюса Q, т.е. для всех точек тела. Скалярно умножая (3.16.10) на вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, получаем

$$\mathbf{V}_Q(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0. \tag{3.16.11}$$

Поскольку выбор Q произволен, то отсюда следует, что скорости всех точек тела должны быть ортогональны вектору угловой скорости. Этот случай реализуется, например, для так называемых плоских движений твердого тела.

Определение : *движение абсолютно твердого тела называется плоским, если скорости всех точек этого тела лежат в плоскостях, ортогональных постоянному единичному вектору* $\mathbf{e}$.

Упражнение : *доказать, что при плоском движении угловая скорость тела ортогональна плоскостям, в которых лежат векторы скорости, т.е.* $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\,\mathbf{e}$.

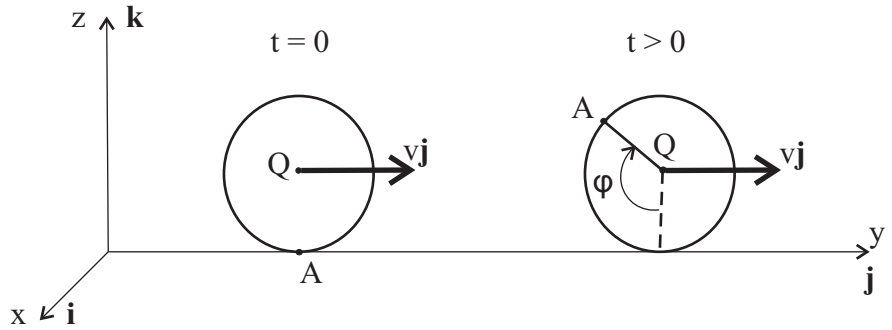

Рис. 3.9. Качение цилиндра по плоскости

Итак, будем считать, что условие (3.16.11) выполнено. Тогда (3.16.10) дает нам уравнение для нахождения мгновенной оси вращения. Решая это уравнение, получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q + \frac{\lambda}{\omega}\boldsymbol{\omega}(t). \tag{3.16.12}$$

Выражение (3.16.12) определяет прямую, проходящую через точку

$$\mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q \tag{3.16.13}$$

и натянутую на вектор $\boldsymbol{\omega}$. Мгновенная ось вращения при этом движется в пространстве, хотя скорости точек тела, лежащих в данный момент времени на этой оси, равны нулю. При плоских движениях точка (3.16.13) называется *мгновенным центром скоростей*. Это понятие широко используется в теории машин и механизмов, но здесь мы его обсуждать не будем.

3.17. Качение цилиндра по плоскости

Простейшим примером плоского движения является качение колеса (цилиндра) по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Для решения этой задачи вполне достаточно здравого смысла и мощный аппарат кинематики абсолютно твердого тела в данной задаче не дает особых преимуществ. Тем не менее, аппарат работает и не менее эффективен, чем любой другой подход.

Катящееся по плоскости колесо (поперечное сечение цилиндра) представлено на рис. 3.9.

Одним из величайших открытий в истории человечества было изобретение колеса. Археологические раскопки показывают, что люди далеко не сразу изобрели круглое колесо. Первоначально колеса делались квадратными. При перекатывании углы квадратного колеса обламывались и колеса становились многоугольными, т.е. приближались к круговой форме. Такое колесо считалось

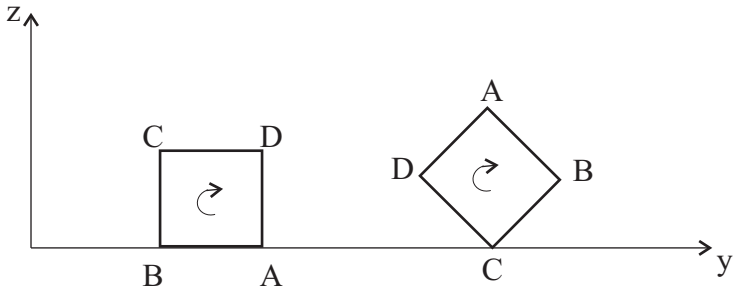

Рис. 3.10. Перекатывание бруса квадратного сечения

плохим и делалось новое квадратное колесо. Сейчас мы рассмотрим процесс перекатывания квадратного колеса с тем, чтобы лучше осознать понятие мгновенной оси вращения. Перекатывание квадрата представлено на рис. 3.10. Если проскальзывание отсутствует, то движение бруса происходит путем перекатывания через одно из своих ребер. На рис. 3.10 брус перекатывается через ребро C. Если проскальзывание отсутствует, то ребро C неподвижно, и брус поворачивается вокруг него. Именно ребро C бруса и является мгновенной осью вращения. Со временем ребра бруса не выдерживают нагрузок и обламываются, а квадрат превращается в восьмиугольник. Рассматривая перекатывание восьмиугольника, мы опять придем к выводу, что в каждый момент времени брус перекатывается через одно из своих ребер, которое при этом остается неподвижным.Через некоторое время углы восьмиугольника также обламываются, и он превратится в шестнадцатиугольник и т.д. Рассматривая движение произвольного многоугольника, мы понимаем, что при перекатывании то ребро, которое соприкасается с обкатываемым телом (землей), остается неподвижным, т.е. является мгновенной осью вращения. Последняя перемещается в пространстве. Если число сторон многоугольника устремить к бесконечности, то придем к кругу (цилиндрическому телу). Понятно, что в этом случае роль ребра начнет исполнять та образующая цилиндра, которая в данный момент времени соприкасается с землей. При этом цилиндр поворачивается вокруг этой образующей, которая и является мгновенной осью вращения. Понятно также, что форма поперечного сечения цилиндра (круг, эллипс, овал и вообще любая выпуклая замкнутая кривая) не имеет значения. Во всех случаях мгновенной осью вращения является та образующая цилиндра, по которой движущееся без проскальзывания тело соприкасается с телом, по которому оно катится.

Замечание. *Мгновенная ось вращения является прямой линией. Поэтому если тела соприкасаются по кривым линиям, то обкатывание без проскальзывания невозможно.*

Обратимся к формальному рассмотрению. В качестве полюса Q выбираем центр круга. Пусть полюс Q движется с постоянной скоростью $\mathbf{V}_Q = v\,\mathbf{j}$ (рис. 3.9). Согласно основному уравнению кинематики (3.16.1) для вектора положения произвольной точки A тела имеем

$$\mathbf{R}_A(t) = vt\,\mathbf{j} + a\,\mathbf{k} + \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{i}) \cdot (\mathbf{r}_A - a\,\mathbf{k}), \tag{3.17.1}$$

где

$$\mathbf{R}_Q(t) = vt\,\mathbf{j} + a\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_Q = a\,\mathbf{k},$$

a — радиус цилиндра.

В данном случае очевидно, что ось поворота натянута на вектор $\mathbf{i}$. Тензор поворота задается выражением

$$\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{i}) = (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{i} \times \mathbf{E}, \tag{3.17.2}$$

где φ есть угол, на который поворачивается вектор $\mathbf{r}_A$ в процессе качения.

При этом сам вектор $\mathbf{r}_A$ определяет ту точку A, движение которой мы рассматриваем. Вектор угловой скорости поворота (3.17.2) определяется по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{i}. \tag{3.17.3}$$

Уравнение Эйлера (3.16.4) для скорости точки A дает

$$\mathbf{V}_A(t) = v\,\mathbf{j} + \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{i} \times (\mathbf{R}_A - vt\,\mathbf{j} - a\,\mathbf{k}). \tag{3.17.4}$$

Пусть точка A есть та точка диска, которая соприкасается в данный момент с землей. Тогда $\mathbf{R}_A = vt\,\mathbf{j}$. Для этой точки скорость равна нулю в силу отсутствия проскальзывания. Уравнение (3.17.4) для этой точки дает

$$v\,\mathbf{j} - a\dot{\varphi}(t)\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

или

$$\dot{\varphi}(t) = -v/a \quad \Rightarrow \quad \varphi = -vt/a. \tag{3.17.5}$$

Знак минус в этой формуле показывает, что поворот диска происходит по ходу часовой стрелки. Найдем траекторию движения той точки A, которая при $t = 0$ находилась в начале системы координат, т.е. $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$. Согласно (3.17.1) и (3.17.5) имеем

$$\mathbf{R}_A(t) = vt\,\mathbf{j} + a\mathbf{k} - \mathbf{Q}\left(-\frac{vt}{a}\,\mathbf{i}\right) \cdot a\,\mathbf{k} = \left(vt - a\,\sin\frac{vt}{a}\right)\mathbf{j} + a\left(1 - \cos\frac{vt}{a}\right)\mathbf{k}.$$

По этому выражению можно вычислить все характеристики движения точки A.

3.18. Качение конуса по конусу

При рассмотрении плоских движений абсолютно твердых тел тензор поворота легко определяется заранее. Во всех остальных случаях тензор поворота заранее угадать достаточно сложно. К сожалению, наша интуиция с поворотами тел справляется с большим трудом и требуется длительная тренировка, прежде чем появится легкость в обращении с поворотами. К счастью, нас выручает то обстоятельство, что сложный поворот можно выразить как композицию простых поворотов, легко поддающихся интуитивному восприятию. В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим качение конуса по конусу. В отличие от случая плоского движения здесь повороты и вращения происходят вокруг меняющихся во времени осей. Обсуждаемая ситуация изображена на рис. 3.11. Оба конуса имеют неподвижную точку Q, которую выбираем в

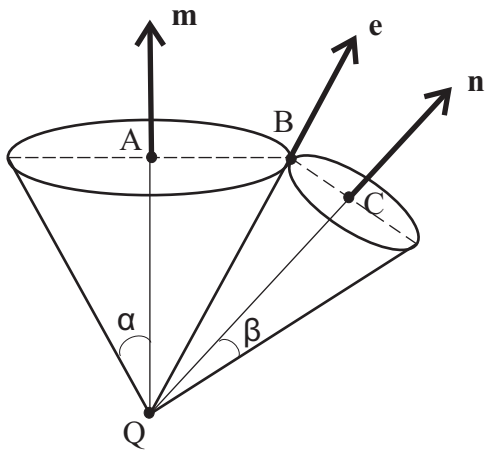

Рис. 3.11. Качение конуса по конусу

качестве полюса для обоих конусов. Конус QA или неподвижен, или может вращаться вокруг фиксированной оси QA. Угол раствора конуса QA равен 2α. Второй конус QC может поворачиваться вокруг конуса QA, причем оба конуса всегда соприкасаются, т.е. имеют общую образующую. Угол раствора конуса QC равен 2β. В учебниках по теоретической механике задача качения конуса по конусу формулируется следующим образом: конус QC катится по неподвижному конусу QA без проскальзывания, причем модуль скорости точки C задан, т.е. $|\mathbf{V}_C| = V$; требуется найти угловую скорость конуса QC. Ниже мы рассмотрим как классическое решение, представленное в учебниках, так и альтернативное более полное решение.

3.18.1. Классическое решение

В качестве отсчетного положения выберем положение, изображенное на рис. 3.11. Единичные векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ постоянны и лежат в одной плоскости. Конус QA неподвижен. Введем обозначения : $|QA| = h_m$, $|QC| = h_n$, $|QB| = l$. При качении конуса QC векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ поворачиваются и обозначаются символами $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{e}'$. Классическое решение опирается на уравнение Эйлера для точки B

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_Q), \quad \mathbf{R}_B = l\,\mathbf{e}'. \tag{3.18.1}$$

Пусть точка Q неподвижна и начало выбрано в этой точке, тогда

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_Q = \mathbf{0}. \tag{3.18.2}$$

Поскольку качение происходит без проскальзывания, то скорость точки B равна нулю. Тогда из (3.18.1) и (3.18.2) следует

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}'. \tag{3.18.3}$$

Для скорости точки C уравнение Эйлера дает выражение

$$\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C = \omega h_n\,\mathbf{e}' \times \mathbf{n}', \quad \mathbf{R}_C = h_n\,\mathbf{n}'. \tag{3.18.4}$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{V}_C| = |\omega| h_n \sin\beta \quad \Rightarrow \quad |\omega| = \frac{v}{h_n \sin\beta}, \tag{3.18.5}$$

где $v = |\mathbf{V}_C|$.

Таким образом, мы нашли модуль угловой скорости конуса QC. На этом решения, приводимые в учебниках, заканчиваются. Ясно, что полученный результат мало информативен, а с инженерной точки зрения практически бесполезен. В самом деле, в основе полученного решения лежит предположение о качении без проскальзывания, что исключает возможность получить ответы на многие интересующие инженера вопросы. Например, невозможно определить энергетические затраты при качении; нельзя определить интенсивность шума при качении, которая определяется так называемым крипом (крип — упругое проскальзывание). Кроме того, знание модуля угловой скорости не дает представления о поворотах конуса QC.

3.18.2. Альтернативное решение

Обратимся к относительно полному описанию движения конуса QC. Предположение об отсутствии проскальзывания на первом этапе анализа принимать

не будем. Переход конуса QC из отсчетного положения в актуальное описывается тензором поворота $\mathbf{P}(t)$, который единственен. Однако тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ может быть представлен, и притом бесчисленным числом способом, в виде композиции простых поворотов. Рассмотрим две такие возможности. В отсчетном положении ось конуса QC занимает положение характеризуемое вектором $\mathbf{n}$. В актуальном положении ось конуса QC занимает положение, характеризуемое вектором $\mathbf{n}'$. Кроме того, в актуальном положении конус повернут вокруг своей оси на угол φ, причем $\varphi = 0$ в отсчетном положении. Тогда переход из отсчетного положения в актуальное можно осуществить двумя последовательными поворотами. Первый поворот производим вокруг оси конуса QC в отсчетном положении, т.е. вокруг вектора $\mathbf{n}$, на угол φ. Этот поворот задается тензором $\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n})$. При втором повороте ось конуса QC переводится из отсчетного положения, определяемого вектором $\mathbf{n}$, в актуальное положение, определяемое вектором $\mathbf{n}'$. Поворот производится вокруг вектора $\mathbf{m}$ на угол ψ, т.е. второй поворот задается тензором $\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})$. В результате этих двух поворотов конус QC переводится из отсчетного положения в актуальное. Полный тензор поворота определяется как композиция описанных поворотов, т.е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}). \tag{3.18.6}$$

Обратим внимание, что в формулах типа (3.18.6) последовательность поворотов считается справа-налево, т.е. $\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n})$ есть первый поворот, а $\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})$ второй. При желании мы можем изменить последовательность поворотов. А именно, сначала повернем ось конуса на угол ψ, т.е. используем тензор поворота $\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})$. При этом ось конуса совпадает с вектором

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \tag{3.18.7}$$

Теперь мы должны повернуть конус вокруг собственной оси, т.е. вокруг вектора $\mathbf{n}'$, на угол φ. Этот поворот задается тензором $\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}')$. Суммарный поворот при этом описывается композицией

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}). \tag{3.18.8}$$

Упражнение. *Доказать, что повороты (3.18.6) и (3.18.8) тождественно совпадают.*

В приложениях представление (3.18.6) значительно удобнее, чем (3.18.8), т.к. для него легче вычисляется угловая скорость. Поэтому ниже будем использовать представление (3.18.6). Угловая скорость, отвечающая повороту (3.18.6), вычисляется по (3.15.3) и дается выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{m} + \dot{\varphi}\,\mathbf{n}', \quad \mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \tag{3.18.9}$$

По условию задачи скорость точки C конуса QC задана. Для большей определенности зададим ее в виде

$$\mathbf{V}_C = \nu\,\mathbf{m}\times\mathbf{n}'/\sin(\alpha+\beta),\quad |\mathbf{V}_C| = |\nu|. \tag{3.18.10}$$

Здесь через ν обозначена величина скорости, которая может быть и положительной, и отрицательной. Ранее через ν обозначался модуль скорости точки C. В (3.18.10) учтено, что $\alpha+\beta<\pi$. Скорость точки C можно вычислить на основе уравнения Эйлера (3.16.4). В данном случае, с учетом (3.18.9) и равенства $\mathbf{R}_C = h_n\,\mathbf{n}'$, имеем

$$\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C = \dot\psi\,\mathbf{m}\times h_n\,\mathbf{n}'. \tag{3.18.11}$$

Сравнивая это выражение с (3.18.10), получаем

$$\dot\psi = \frac{\nu}{h_n\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.18.12}$$

Таким образом, угловая скорость прецессии $\dot\psi$ определена. Полная угловая скорость зависит еще от угловой скорости собственного вращения, т.е. вращения конуса QC вокруг собственной оси. Для ее нахождения необходимо сформулировать дополнительные условия, которые зависят от конкретного содержания задачи. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Первый случай: конус скользит без трения по неподвижному конусу. В этом случае у конуса QC нет причин для вращения вокруг собственной оси. Поэтому имеем

$$\dot\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\nu}{h_n\sin(\alpha+\beta)}\,\mathbf{m}.$$

Тензор поворота конуса QC сводится к повороту вокруг $\mathbf{m}$. Движение такого рода называется регулярной прецессией. При этом конус QC всегда обращен одной и той же своей образующей к оси неподвижного конуса. Наблюдатель, находящийся на оси конуса QA, всегда будет видеть только одну половину конуса QC. Ситуация похожа на вращение Луны вокруг Земли.

Второй случай: качение конуса без проскальзывания по неподвижному конусу. Именно этот случай рассмотрен в классическом решении. Отсутствие проскальзывание означает, что скорость точек конуса QC, лежащих на образующей, по которой соприкасаются конусы, равна нулю

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_B = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}', \tag{3.18.13}$$

где $\mathbf{e}'$ есть направляющий орт образующей, по которой касаются конусы.

Заметим, что было бы ошибкой думать, что $\mathbf{e}'$ есть повернутая образующая, по которой конусы соприкасались в отсчетном положении. Вектор $\mathbf{e}'$ лежит

в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}'$, где $\mathbf{n}'$ определен выражением (3.18.9). Точно такое же выражение имеет место для вектора $\mathbf{e}'$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{e}. \tag{3.18.14}$$

Таким образом, для угловой скорости получили два выражения (3.18.9) и (3.18.13). Они должны совпадать. Поэтому имеем

$$\dot\psi\,\mathbf{m} + \dot\varphi\,\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{n} = \omega\,\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{e}.$$

Умножая это уравнение на $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\psi\,\mathbf{m})$ слева, получаем

$$\dot\psi\,\mathbf{m} + \dot\varphi\,\mathbf{n} = \omega\,\mathbf{e}. \tag{3.18.15}$$

Это уравнение содержит две неизвестные $\dot\varphi$ и ω, поскольку $\dot\psi$ определено выражением (3.18.12). Умножая (3.18.15) векторно на $\mathbf{e}$, получаем

$$\dot\psi\,\mathbf{m}\times\mathbf{e} + \dot\varphi\,\mathbf{n}\times\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{3.18.16}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{m}\times\mathbf{e} = \sin\alpha\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{e} = -\sin\beta\,\mathbf{k}, \tag{3.18.17}$$

где $\mathbf{k}$ есть единичный вектор, ортогональный плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{e}$ или, что то же самое, на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, поскольку векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}$ лежат в одной плоскости. Подставляя (3.18.17) в (3.18.16), получаем

$$\dot\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\dot\psi = \frac{\nu\sin\alpha}{h_n\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}. \tag{3.18.18}$$

Умножая (3.18.15) скалярно на вектор $\mathbf{e}$, получаем

$$\omega = \dot\psi\cos\alpha + \dot\varphi\cos\beta = \dot\psi\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}. \tag{3.18.19}$$

Здесь было использовано выражение (3.18.18). Подставляя в (3.18.19) выражение (3.18.12), получаем

$$\omega = \frac{\nu}{h_n\sin\beta},$$

которое совпадает, разумеется, с (3.18.5). Может показаться, что данное построение значительно длиннее классического, но это не так, ибо в рассмотренном решении найдена не только величина угловой скорости, но и ее направление, а также найден тензор поворота конуса QC. В классическом решении это построение должно быть добавлено, что будет сделано в заключительной части этого параграфа.

Третий случай: качение без проскальзывания конуса по вращающемуся конусу. Допустим, что конус QA вращается вокруг фиксированной оси $\mathbf{m}$ с заданной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{m}. \tag{3.18.20}$$

Конус QC катится без проскальзывания по конусу QA таким образом, что скорость точки C по-прежнему определена выражением (3.18.10). Поэтому для конуса QC остаются справедливыми выражения (3.18.9) и (3.18.12). Меняется условие только для угловой скорости собственного вращения. Поскольку качение происходит без проскальзывания, то скорости точек тех образующих конусов QA и QC, по которым конусы соприкасаются должны быть одинаковыми. Указанные образующие совпадают с вектором $\mathbf{e}'$. Тогда для точки B образующей конуса QA имеем

$$\mathbf{V}_{\mathrm{B}}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathrm{l}\,\mathbf{e}'. \tag{3.18.21}$$

Скорость точки B конуса QC, лежащей на образующей $\mathrm{l}\,\mathbf{e}'$, находится по формуле

$$\mathbf{V}_{\mathrm{B}}^{(2)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{l}\,\mathbf{e}'. \tag{3.18.22}$$

Положение образующей $\mathbf{e}'$ определяется скоростью точки $\mathbf{V}_{\mathrm{C}}$. Поэтому для $\mathbf{e}'$ остается справедливым выражением (3.18.14). Условие отсутствия проскальзывания заключается в равенстве

$$\mathbf{V}_{\mathrm{B}}^{(1)} = \mathbf{V}_{\mathrm{B}}^{(2)}$$

и, с учетом (3.18.21) и (3.18.22), сводится к следующему

$$\omega_1 \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathrm{l}\,\mathbf{e} = (\dot{\psi}\,\mathbf{m} + \dot{\varphi}\,\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}) \times \mathrm{l}\,\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}.$$

Умножая это равенство на $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\psi \mathbf{m})$ слева и учитывая тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}),$$

получаем

$$\omega_1 \mathbf{m} \times \mathbf{e} = \dot{\psi}\,\mathbf{m} \times \mathbf{e} + \dot{\varphi}\,\mathbf{n} \times \mathbf{e}.$$

Отсюда следует равенство

$$(\omega_1 - \dot{\psi})\,\mathbf{m} \times \mathbf{e} = \dot{\varphi}\,\mathbf{n} \times \mathbf{e}. \tag{3.18.23}$$

Подставляя сюда (3.18.17), окончательно получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}(\dot{\psi} - \omega_1). \tag{3.18.24}$$

Угловая скорость конуса QC полностью определена.

Существуют и многие другие типы условий качения одного конуса по другому. Наиболее интересными и важными являются условия наличия проскальзывания либо с трением, либо случай так называемого упругого проскальзывания (крип). Однако здесь уже одной кинематики недостаточно и нужно привлекать законы механики, к чему мы еще не готовы.

3.18.3. Определение поворотов в классическом решении

В классическом решении была найдена угловая скорость конуса QC. Она определялась выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\nu}{h_n \sin\beta}\,\mathbf{e}' \equiv \omega\,\mathbf{e}'. \tag{3.18.25}$$

Однако единичный вектор $\mathbf{e}'$ остался неопределенным. Задача нахождения тензора поворота по вектору угловой скорости называется задачей Дарбу. В данном случае задача Дарбу сводится к следующей

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \omega\,\mathbf{e}' \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \tag{3.18.26}$$

При этом мы как бы забыли все детали альтернативного решения, но должны найти тензор поворота $\mathbf{P}$ конуса QC из решения задачи Дарбу (3.18.26). Очевидно, что ось конуса QC прецессирует вокруг вектора $\mathbf{m}$, т.е. мы имеем

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{e}, \tag{3.18.27}$$

где ψ называется углом прецессии, который мы пока не знаем.

Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ будем искать в виде композиции

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{T} = \mathbf{E}, \tag{3.18.28}$$

где $\mathbf{S}$ — новый тензор поворота. Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{S} + \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\dot{\mathbf{S}} = \dot{\psi}\,\mathbf{m}\times\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{S} + \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\dot{\mathbf{S}} =$$
$$= \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot[\dot{\psi}\,\mathbf{m}\times\mathbf{S} + \dot{\mathbf{S}}], \quad \mathbf{e}'\times\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot[\mathbf{e}\times\mathbf{S}].$$

Подставляя эти выражения в (3.18.26), получаем следующее уравнение

$$\dot{\psi}\,\mathbf{m}\times\mathbf{S} + \dot{\mathbf{S}} = \omega\,\mathbf{e}\times\mathbf{S}$$

или в другой форме

$$\dot{\mathbf{S}} = (\omega\,\mathbf{e} - \dot{\psi}\,\mathbf{m})\times\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{E}. \tag{3.18.29}$$

Теперь следует обратить внимание на следующий факт. Повернутая ось конуса QC занимает положение $\mathbf{n}'$, т.е. имеем равенство

$$\mathbf{n}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \tag{3.18.30}$$

Здесь учтено определение (3.18.27). Подставляя (3.18.28) в (3.18.30), получаем

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

Иными словами, вектор $\mathbf{n}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{S}$. Отсюда следует, что тензор $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_S = \dot{\varphi}\,\mathbf{n}, \tag{3.18.31}$$

где $\boldsymbol{\omega}_S$ угловая скорость поворота $\mathbf{S}$. С другой стороны, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_S$ равна выражению, стоящему в скобках в уравнении Пуассона (3.18.29). Поэтому имеем

$$\omega\,\mathbf{e} - \dot{\psi}\,\mathbf{m} = \dot{\varphi}\,\mathbf{n}. \tag{3.18.32}$$

В этом выражении нам известна величина ω, а скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ подлежат определению. Из (3.18.32) имеем

$$\omega\,\mathbf{e} \times \mathbf{n} = \dot{\psi}\,\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \quad \omega\,\mathbf{e} \times \mathbf{m} = \dot{\varphi}\,\mathbf{n} \times \mathbf{m}. \tag{3.18.33}$$

Имеем очевидные формулы

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \sin(\alpha + \beta)\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{n} = \sin\beta\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{m} = -\sin\alpha\,\mathbf{k}.$$

Подставляя эти выражения в (3.18.33), окончательно получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\omega \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\omega \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.18.34}$$

Углы поворота находятся из (3.18.34) очевидным интегрированием. В данном случае задача Дарбу допускает простое решение. Однако это скорее исключение, нежели правило.

Рассмотренная в этом параграфе задача о качении конуса по конусу является одной из простейших задач о пространственных вращениях твердого тела. Тем не менее, начинающим строго рекомендуется тщательно изучить ее и самостоятельно повторить (проделать) все необходимые вычисления.

3.19. Шарнир Гука

В задаче о качении конуса по конусу тензор поворота было нетрудно угадать заранее. Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой тензор поворота и вообще характер поворотов заранее предсказать довольно трудно, если вообще

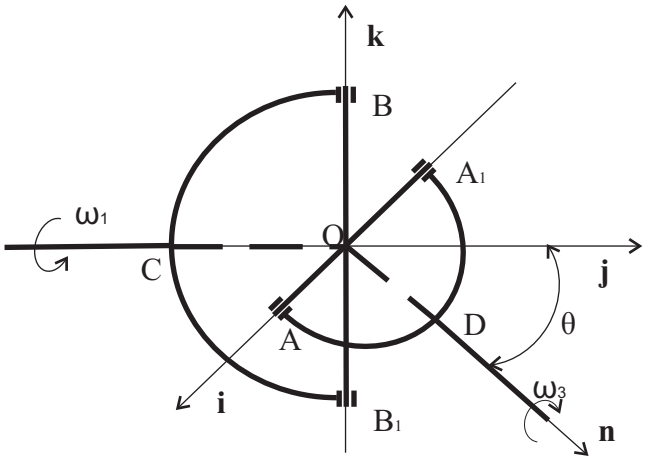

Рис. 3.12. Шарнир Гука

возможно. В таких случаях необходимо сначала установить какие необходимые ограничения налагаются на тензор поворота. Только после этого следует принимать решение о выборе представления тензора поворота. Шарнир Гука является подходящей иллюстрацией сказанного.

Шарнир Гука используется для передачи вращения от одного вала к другому. Причем оба вала расположены в одной плоскости, но составляют угол θ между собой. Схематическое изображение шарнира Гука представлено на рис. 3.12, котором векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ образуют правую ортонормированную тройку. В отсчетном положении входной вал CO расположен вдоль вектора $\mathbf{j}$. Вилка CB входного вала расположена в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Выходной вал OD расположен вдоль вектора $\mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1$, который также расположен в вертикальной плоскости, натянутой на $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Входной и выходной валы пересекаются в точке 0, которая остается неподвижной при вращении валов. Диаметр OA вилки DA выходного вала в отсчетном положении расположен вдоль вектора $\mathbf{i}$. Ось выходного вала, т.е. вектор $\mathbf{n}$, ортогональна диаметру OA вилки DA. Входной вал вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, что заставляет вращаться выходной вал с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_3$.

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \omega_3 \mathbf{n}, \tag{3.19.1}$$

где $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \cos\theta = \text{const}$.

Соединение входного и выходного валов осуществляется с помощью крестовины AOB, которая считается абсолютно твердым телом. Входной вал вращает диаметр BB_1 крестовины. В результате начинает вращаться диаметр AA_1 крестовины, что приводит к вращению выходного вала. Таким образом, шарнир Гука представляет собой сочленение трех абсолютно твердых тел: входного вала с вилкой BCB_1 (тело 1), крестовины ABA_1B_1 (тело 2) и выходного вала с вилкой ADA_1 (тело 3). Все три тела имеют одну и ту же неподвижную

точку O. Понятно, что движение крестовины и выходного вала полностью определяется геометрическими факторами (в частности, углом θ) и поворотами входного вала. Требуется определить угловую скорость выходного вала, а также тензор поворота крестовины $\mathbf{P}_2$ и угловую скорость крестовины.

Введем обозначения: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ суть тензоры поворота входного вала, крестовины и выходного вала соответственно. Оси поворота входного и выходного валов заданы и фиксированы

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{j}), \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{n}), \tag{3.19.2}$$

причем угол поворота входного вала известен

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1\,\mathbf{j} = \dot{\varphi}\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega_1(\tau)\,d\tau. \tag{3.19.3}$$

Угол поворота выходного вала ψ и его угловая скорость подлежат определению. Будем считать, что начало в системе отсчета выбрано в точке O. Тогда в отсчетном положении материальные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ совпадают с векторами

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{r}_A = l\,\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{r}_B = l\,\mathbf{k}. \tag{3.19.4}$$

В актуальном положении имеем

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{R}_A, \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{R}_B. \tag{3.19.5}$$

Для вектора $\mathbf{R}_B$ в соответствии с основным уравнением кинематики имеем равенство

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r}_B = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_B. \tag{3.19.6}$$

Это равенство справедливо в силу того, что материальный вектор $\overrightarrow{OB}$ одновременно принадлежит как входному валу, так и крестовине. С учетом (3.19.2) и (3.19.4) равенство (3.19.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{3.19.7}$$

Получили первое ограничение, которому должен удовлетворять тензор поворота $\mathbf{P}_2$. Аналогичные рассмотрения применительно к материальному вектору $\overrightarrow{OA}$ дают

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{r}_A = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i}. \tag{3.19.8}$$

Умножая скалярно последнее равенство на $\mathbf{n}$ и учитывая, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$, получаем второе ограничение на тензор $\mathbf{P}_2$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i} = 0. \tag{3.19.9}$$

Таким образом, тензор поворота $\mathbf{P}_2$ удовлетворяет двум ограничениям (3.19.7) и (3.19.9), которые должны выполняться при всех возможных поворотах крестовины. Всякий тензор поворота зависит от трех параметров. На эти три параметра, какие бы они не были, наложено два ограничения. Следовательно, только один из упомянутых параметров остается независимым, а два другие могут быть выражены через него. Ограничение (3.19.7) показывает, что тензор $\mathbf{P}_2$ является двухпараметрическим. Будем искать этот двухпараметрический тензор в следующем виде

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{k}). \tag{3.19.10}$$

Легко убедиться, что при любых значениях параметров α и β ограничение (3.19.7) тождественно выполнено. Потребуем, чтобы тензор (3.19.10) удовлетворял условию (3.19.9).

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 0. \tag{3.19.11}$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{k}) = (1 - \cos\beta)\,\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos\beta\,\mathbf{E} + \sin\beta\,\mathbf{k} \times \mathbf{E},$$

получаем

$$\mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{j}.$$

Подставляя это соотношение в (3.19.11) и проводя аналогичные вычисления, получаем равенство

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{j}) \cdot (\cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{j}) = \cos\beta\ \sin\alpha\ \sin\theta + \sin\beta\ \cos\theta = 0$$

или в другой форме

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\theta \sin\alpha. \tag{3.19.12}$$

Итак, тензор $\mathbf{P}_2$ имеет вид (3.19.10), где параметры α и β связаны соотношением (3.19.12). Теперь мы должны вернуться к равенству (3.19.6) и первому из равенств (3.19.8). Дифференцируя (3.19.6) по времени и исключая производные от тензоров поворота посредством соответствующих уравнений Пуассона, получаем

$$\dot{\varphi}\,\mathbf{j} \times \mathbf{R}_\mathrm{B} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_\mathrm{B}.$$

Умножая это равенство векторно на $\mathbf{R}_\mathrm{B}$, получаем

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\mathbf{j} + \mathbf{R}_\mathrm{B}(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_\mathrm{B})\,l^{-2}, \tag{3.19.13}$$

где

$$l^2 = \mathbf{R}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{R}_\mathrm{B}, \quad \mathbf{R}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Дифференцируя (3.19.8) по времени, получаем аналогичное равенство для вектора $\mathbf{R}_A$

$$\dot{\psi}\,\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{R}_A(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_A)\,l^{-2}. \tag{3.19.14}$$

Равенство (3.19.13) позволяет вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_2$, а равенство (3.19.14) позволяет найти угловую скорость выходного вала

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}. \tag{3.19.15}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_2$, отвечающая повороту (3.19.10), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\alpha}\,\mathbf{j} + \dot{\beta}\,\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}. \tag{3.19.16}$$

Сравнивая (3.19.13) и (3.19.16), получаем

$$\dot{\alpha}\,\mathbf{j} + \dot{\beta}\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \dot{\varphi}\,\mathbf{j} + \mathbf{R}_B(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_B)l^{-2}.$$

Проецируя это равенство на вектор $\mathbf{j}$, получаем

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \varphi(t). \tag{3.19.17}$$

Здесь и далее мы принимаем начальные условия в виде

$$\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(0) = \psi(0) = 0. \tag{3.19.18}$$

Итак, угол поворота $\alpha(t)$ оказался равным углу поворота $\varphi(t)$ входного вала. Чтобы найти $\dot{\beta}$ достаточно продифференцировать (3.19.12) по времени. Тогда получим

$$\dot{\beta}(1 + \operatorname{tg}^2\beta) = -\dot{\varphi}\operatorname{tg}\theta\cos\varphi. \tag{3.19.19}$$

Здесь учтено равенство (3.19.17). Исключая из (3.19.19) угол β с помощью (3.19.12), получаем

$$\dot{\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\theta\cos\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\theta\sin^2\varphi}\,\dot{\varphi} = -\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi}\,\dot{\varphi}. \tag{3.19.20}$$

Таким образом, угловая скорость крестовины полностью определена:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\left[\mathbf{j} - \frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi}\,(\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{k})\right]. \tag{3.19.21}$$

Как видим, угловая скорость крестовины определяется относительно сложным выражением. Осталось вычислить угловую скорость выходного вала, которая определяется формулой (3.19.15). Из последней получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi}\,\dot{\varphi}. \tag{3.19.22}$$

Отсюда видим, что угловая скорость выходного вала переменна во времени при $\theta \neq 0$, даже если угловая скорость входного вала постоянна. Обратим внимание на сложный характер зависимости угловой скорости выходного вала от углов θ и φ. Пусть, например, скорость входного вала постоянна и равна $\dot{\varphi} = \omega_1$. Тогда имеем $\varphi = \omega_1 t$. Рассмотрим теперь моменты времени такие, что $\omega_1 t = \pi k$. В эти моменты времени, согласно (3.19.22), имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\cos\theta}. \tag{3.19.23}$$

При $\theta = \pi/2$ угловая скорость выходного вала становится бесконечно большой. Из общих соображений, т.е. исходя из здравого смысла, этот результат кажется сомнительным. Сомнения увеличиваются еще больше, если мы обратимся непосредственно к формуле (3.19.22). Полагая в ней $\theta = \pi/2$, получаем, что $\dot{\psi} = 0$. Здесь мы встречаемся с любопытными особенностями. С чисто математической точки зрения, мы имеем, хотя и не совсем стандартную, но хорошо известную ситуацию, когда предел функции двух переменных зависит от направления, по которому вычисляется этот предел. Иными словами, с математической точки зрения ничего особенно удивительного в полученном результате нет. Однако подобные фокусы с физической точки зрения вызывают протест у нашей интуиции. Обычно они указывают на не вполне удовлетворительную постановку задачи. Во всяком случае, в данной задаче это именно так. В самом деле, мы допустили, что входной вал может вращаться с заданной угловой скоростью независимо от угловой скорости выходного вала. Это допущение подразумевает, что входной вал вращается двигателем неограниченной мощности, каковых в действительности не существует. Чтобы яснее осознать необходимость двигателя неограниченной мощности, рассмотрим ситуацию, когда угол θ близок к $\pi/2$, т.е. $\theta = \pi/2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon << 1$. Разлагая функции $\sin\varepsilon$ и $\cos\varepsilon$ в ряд по степеням ε и удерживая слагаемые до второго порядка малости включительно, выражение (3.19.22) переписываем в следующей форме

$$\dot{\psi} = \frac{2\varepsilon\dot{\varphi}}{2\sin^2\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi} = \frac{2\varepsilon\omega_1}{2\sin^2\omega_1 t + \varepsilon^2\cos^2\omega_1 t}. \tag{3.19.24}$$

Читателю рекомендуется построить график функции $\dot{\psi}/\omega_1$ на интервале $\pi/2 \leq \omega_1 t \leq 3\pi/2$ при $\varepsilon = 0.001$. Из графика видно, что при подходе к точке $\omega_1 t = \pi$ угловая скорость выходного вала начинает очень быстро нарастать до бесконечно большой величины. После прохождения этой точки угловая скорость выходного вала начинает столь же быстро уменьшатся. Вообразим теперь, что на выходной вал посажен массивный маховик. Тогда двигатель,

подключенный к входному валу, должен почти мгновенно раскрутить этот маховик, а затем почти мгновенно затормозить его. Это было бы возможно только в том случае, если бы двигатель обладал бесконечной мощностью, что практически невозможно. Если мы хотим использовать двигатель ограниченной мощности, то чисто кинематических рассмотрений уже недостаточно. Необходимо привлекать законы механики. Кроме того, некоторые режимы работы требуют другого конструктивного исполнения вилки выходного вала, но на кинематических соотношениях это не отражается.

3.20. Сложное движение материальной точки

В приложениях часто используется так называемая лабораторная система отсчета, в которой производятся разного рода измерения. Вместе с тем, лабораторная система отсчета сама движется относительно основной системы отсчета. Последняя в механике и классической физике должна быть инерциальной, ибо в ней и только в ней вводятся такие понятия, как воздействия (силы, моменты и т.д.) и формулируются фундаментальные законы. Инерциальные системы отсчета будут введены во второй части курса. В кинематике мы должны просто научиться пересчитывать результаты лабораторных измерений в соответствующие результаты, имеющие смысл в основной системе отсчета. Чтобы яснее осознать все нижеследующее, рассмотрим воображаемую задачу о полете мухи (материальной точки) в салоне самолета, совершающего полет. Лабораторную систему отсчета естественно связать с самолетом, который, в свою очередь, будем рассматривать как абсолютно твердое тело. Выберем какую-либо точку Q, которая фиксирована относительно самолета. Выберем тройку материальных векторов $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$ таких, что при $t = 0$ (например, при посадке в самолет в аэропорту) они совпали бы с векторами

$$\mathbf{d}_m : \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{mn}, \tag{3.20.1}$$

заданными в основной системе отсчета. При этом

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1, \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2, \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3. \tag{3.20.2}$$

Введем материальные координаты x^1, x^2, x^3, жестко связанные с самолетом. Тогда положение точки самолета с координатами x^m определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{d}_1 + x^2 \mathbf{d}_2 + x^3 \mathbf{d}_3 \equiv x^m \mathbf{d}_m. \tag{3.20.3}$$

Пока самолет стоит на месте, лабораторная система отсчета совпадает с основной системой отсчета, связанной с Землей. Допустим, что по салону летает

муха. Пассажир, сидящий в салоне, будет отмечать ее движение вектором

$$\mathbf{r}_f(t) = x_f^m(t)\,\mathbf{d}_m, \tag{3.20.4}$$

где $x_f^m(t)$ координаты мухи в момент времени t.

В дальнейшем индекс f будем опускать и, вместо (3.20.4), писать

$$\mathbf{r}(t) = x^m(t)\,\mathbf{d}_m. \tag{3.20.5}$$

Надеемся, что читатель не спутает векторы (3.20.3) и (3.20.5). Однако начинающим лучше все-таки использовать более громоздкое, но более точное, обозначение (3.20.4). Пусть самолет приходит в движение и взлетает. Для пассажира ничего не изменится поскольку и материальные векторы $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$ (а, следовательно, и векторы $\mathbf{d}_m$), и материальные координаты x^m для него останутся неизменными. Движение мухи пассажир будет по-прежнему фиксировать (измерять) с помощью вектора (3.20.4) или, что то же самое, (3.20.5). Однако для наблюдателя, неподвижного относительно основной системы отсчета, ситуация радикально изменится. Лабораторная система отсчета для этого наблюдателя, в отличие от пассажира самолета, уже движется. В частности, движутся точка Q и материальные векторы $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$. В то же время, материальные координаты x^m остаются неизменными как для пассажира, так и для неподвижного наблюдателя. Пусть материальные векторы $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$ в момент времени t в основной (“неподвижной”) системе отсчета занимают положения векторов

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{D}_1(t), \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{D}_2(t), \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{D}_3(t). \tag{3.20.6}$$

Поэтому, с точки зрения неподвижного наблюдателя, положение мухи в основной системе отсчета задается вектором

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_Q(t) + x^m(t)\,\mathbf{D}_m(t). \tag{3.20.7}$$

Введем в рассмотрение тензор поворота

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}_m(t) \otimes \mathbf{d}_m, \tag{3.20.8}$$

где по индексу m подразумевается суммирование от 1 до 3. Из (3.20.8) имеем

$$\mathbf{D}_m(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_m. \tag{3.20.9}$$

Подставляя (3.20.9) в (3.20.7), получаем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_Q(t) + x^m(t)\,\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_m = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot x^m(t)\,\mathbf{d}_m.$$

Вспоминая (3.20.5), окончательно получаем

$$\mathbf{R}(\mathrm{t}) = \mathbf{R}_{\mathrm{Q}} + \mathbf{P}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{r}(\mathrm{t}). \tag{3.20.10}$$

Сравнивая это выражение с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела, видим их большое сходство, что, впрочем, следовало ожидать. Роль абсолютно твердого тела в (3.20.10) выполняет лабораторная система отсчета. Роль полюса выполняет начало Q в лабораторной системе отсчета. Единственное различие состоит в том, что вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{A}} - \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}$, который в основном уравнении кинематики абсолютно твердого тела определял отсчетное положение рассматриваемой точки A, теперь определяет положение точки, движущейся относительно лабораторной системы отсчета. Аналогия будет видна еще лучше, если уравнение (3.20.10) переписать в виде

$$\mathbf{R}_{\mathrm{A}}(\mathrm{t}) = \mathbf{R}_{\mathrm{Q}} + \mathbf{P}(\mathrm{t}) \cdot (\mathbf{r}_{\mathrm{A}}(\mathrm{t}) - \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}), \tag{3.20.11}$$

где метка A соответствует мухе.

Вектор $\mathbf{r}_{\mathrm{A}}(\mathrm{t})$ определяет положение мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно лабораторной системы отсчета, причем вектор $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}$ не зависит от времени. Вектор $\mathbf{R_A}(\mathbf{t})$ определяет положение той же самой мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного в основной системе отсчета. Подчеркнем, что упоминания о наблюдателях не влекут за собой никаких формальных следствий. Они важны только для правильной интерпретации. Все векторы, входящие в (3.20.10) или (3.20.11), определены в основной (неподвижной) системе отсчета. В дальнейшем строчными буквами будем обозначать величины, наблюдаемые пассажиром в лабораторной системе отсчета. Прописными буквами будем обозначать величины, воспринимаемые наблюдателем в основной системе отсчета.

Для вычисления скорости мухи нужно продифференцировать (3.20.10) по времени. В результате получим

$$\mathbf{V}(\mathrm{t}) = \mathbf{V}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{\omega}(\mathrm{t}) \times \mathbf{P}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{r}(\mathrm{t}) + \mathbf{P}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{v},$$

где

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{3.20.12}$$

Исключая из предыдущего равенства вектор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$ с помощью (3.20.10), получаем

$$\mathbf{V}(\mathrm{t}) = \mathbf{V}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.20.13}$$

В учебниках по теоретической механике эту формулу обычно записывают в виде

$$\mathbf{V}(\mathrm{t}) = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_{\mathrm{r}}, \tag{3.20.14}$$

где

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}), \quad \mathbf{V}_{\mathrm{r}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.20.15}$$

Вектор $\mathbf{V}_e$ называется переносной скоростью, он характеризует скорость той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор $\mathbf{V}_{\mathrm{r}}$ называется вектором относительной скорости и является скоростью мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения наблюдателя в основной системе отсчета.

Обратимся к вычислению ускорений. Для этого достаточно продифференцировать (3.20.13) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathrm{Q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\mathrm{Q}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Исключая отсюда вектор $\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\mathrm{Q}}$ с помощью равенства (3.20.13) и проводя перегруппировку слагаемых, получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathrm{Q}} + \mathcal{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}, \tag{3.20.16}$$

где

$$\mathcal{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}. \tag{3.20.17}$$

Тензор $\mathcal{W}$ называется тензором угловых ускорений лабораторной системы отсчета. Он совпадает с тензором угловых ускорений абсолютно твердого тела. Вектор $\mathbf{w}$ есть ускорение мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения пассажира самолета. Выражение (3.20.16) часто записывают в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_{\mathrm{c}} + \mathbf{W}_{\mathrm{r}}, \tag{3.20.18}$$

где

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_{\mathrm{Q}} + \mathcal{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}), \quad \mathbf{W}_{\mathrm{c}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{W}_{\mathrm{r}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}. \tag{3.20.19}$$

Вектор $\mathbf{W}_e$ называется переносным ускорением и выражает ускорение той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор $\mathbf{W}_{\mathrm{c}}$ называется ускорением Кориоли́са. Вектор $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}$ называется относительным ускорением. В приложениях удобнее работать непосредственно с формулой (3.20.16).

3.21. Сложные движения абсолютно твердого тела

В предыдущем параграфе были рассмотрены сложные движения материальной точки. При этом сложным называлось движение, которое было композицией двух движений: движения материальной точки относительно лабораторной системы отсчета и движения самой лабораторной системы отсчета

относительно основной, условно неподвижной, системы отсчета. Аналогичные построения нетрудно распространить на сложные движения абсолютно твердого тела.

Продолжим аналогию с полетом мухи (материальной точки) в салоне самолета. Только вместо мухи будем рассматривать шляпу, которой решили перебрасываться два чрезмерно любознательных пассажира, сидящих в разных концах салона, с целью исследования закономерностей ее полета. При этом их интересовали не только положения шляпы в полете, но и ее ориентация относительно салона самолета.

Лабораторную систему отсчета (ЛСО) жестко свяжем с салоном самолета. Выберем точку Q, фиксированную относительно самолета и тройку материальных векторов $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$, которые в отсчетном положении соответствуют векторам

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1, \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2, \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_s = \delta_{ms}. \tag{3.21.1}$$

Векторы $\mathbf{d}_m$ определены в основной системе отсчета. Таким образом, лабораторная система отсчета порождается репером

$$\{Q, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$$

и материальными координатами x^m. Положение точки лабораторной системы отсчета с координатами x^m определяется заданием вектора

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{d}_m. \tag{3.21.2}$$

Положение этой же точки лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета в отсчетный момент времени определяется вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{x} = \mathbf{r}_Q + x^m \mathbf{d}_m. \tag{3.21.3}$$

Вернемся к лабораторной системе отсчета. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью сохраняется в лабораторной системе отсчета. Поэтому имеем

$$\mathbf{X}_A(t) = \mathbf{X}_S(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S), \tag{3.21.4}$$

где точка S есть произвольно выбираемая точка шляпы (полюс), точка A есть рассматриваемая точка шляпы, $\mathbf{x}_A$ и $\mathbf{x}_S$ суть векторы положения точек A и S в отсчетном положении в лабораторной системе отсчета, векторы $\mathbf{X}_A$ $\mathbf{X}_S$ суть векторы положения точек A и S в актуальном положении в лабораторной системе отсчета, $\mathbf{P}(t)$ есть тензор поворота шляпы в лабораторной системе отсчета.

Выражение (3.21.4) определяет движение точки A шляпы, наблюдаемое пассажиром самолета. В основной системе отсчета ситуация выглядит несколько иначе. Положение точки A в основной системе отсчета определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_A(t), \tag{3.21.5}$$

где $\mathbf{Q}(t)$ есть тензор поворота лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета. Аналогичное равенство можно записать для вектора положения полюса S

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_S(t), \tag{3.21.6}$$

Из (3.21.5) и (3.21.6) следует равенство

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot [\mathbf{X}_A(t) - \mathbf{X}_S(t)], \tag{3.21.7}$$

которые, впрочем, можно было написать сразу на основе очевидного равенства

$$|\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_S(t)| = |\mathbf{X}_A(t) - \mathbf{X}_S(t)|.$$

Подставляя (3.21.4) в (3.21.7), получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S). \tag{3.21.8}$$

Используя (3.21.3) и (3.21.6), окончательно получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S). \tag{3.21.9}$$

Здесь величины $\mathbf{X}_S(t)$, $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S$ и $\mathbf{P}(t)$ фиксируются (измеряются) пассажиром самолета. Величины $\mathbf{R}_Q$ и $\mathbf{Q}(t)$ фиксируются только наблюдателем, неподвижным в основной системе отсчета. По выражению (3.21.9) нетрудно найти скорости и ускорения точки A относительно основной системы отсчета. В (3.21.9) полный поворот шляпы выражается как композиция двух поворотов: поворота шляпы относительно лабораторной системы отсчета и дополнительного поворота вместе с лабораторной системой отсчета.

Упражнение. *Используя выражение (3.21.9), вывести формулы для скорости и ускорения точки A и дать интерпретацию всех слагаемых в полученных формулах.*

Глава 4.

Пространство, время, движения

Предшествующие главы были подготовительными. В них излагались элементы языка, на котором говорит механика. Однако собственно механика в них не обсуждалась. Цель этой и следующих за ней глав состоит в том, чтобы дать ясное представление о структуре рациональной механики, ее внутреннем устройстве, фундаментальных законах и основных понятиях, используемых в механике. Внешняя простота исходных понятий механики не должна вводить в заблуждение: не все, что легко выучить, столь же легко осознать. Читатель должен обратить внимание на фундаментальное различие между рациональной механикой и математикой. Подобно математике механика вводит в рассмотрение некие объекты, между которыми устанавливаются те или иные отношения. Различие состоит в том, что в математике не ставится и не должен ставиться вопрос о связи вводимых объектов с реальностью. Задача механики состоит в изучении Природы или техногенных явлений. Поэтому далеко не всякие объекты представляют интерес для механики. Более того, именно выбор объектов, позволяющих дать описание тех или иных явлений является наиболее трудной частью механики, принципиально не поддающейся формализации. В данной книге механика рассматривается как универсальная наука и потому в ней вводятся не только те понятия, которыми традиционно оперирует механика, но на основе чисто механических рассуждений без каких бы то ни было ссылок на термодинамику и статистическую физику вводятся такие понятия как температура и энтропия. Цель данной книги в том и состоит, чтобы даже начинающий изучать механику смог бы увидеть ее как живую развивающуюся науку, как универсальный метод исследования природных и техногенных процессов.

4.1. Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительнее отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удается только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической непоследовательности. С другой стороны, к концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссии. Отметим только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики.

Огромный вклад в формирование рациональной механики внес Леонард

Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Показательно, что роль Л. Эйлера долгое время оставалась неосознанной. Например, Г. Герц [11] пишет: "...главные вехи (развития механики) обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа." Как видим, имя Эйлера в этом перечне даже не фигурирует. Подобная позиция присуща и подавляющему большинству современных работ по теоретической физике. Автор полагает, что если бы Дж. Максвелл, Г. Лоренц и другие крупнейшие физики XIX века были осведомлены о результатах позднего Л. Эйлера, то облик современной физики мог бы быть совершенно другим. К сожалению, резко негативную роль сыграла здесь талантливая, но крайне легковесная, книга Э. Маха [43].

В заключение этого пункта подчеркнем, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Вполне очевидно, что так называемая шестая проблема Гильберта об аксиоматизации физики принципиально не допускает решения.

4.2. Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными понятиями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [50]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O, и тремя некомпланарными "векторами" $\mathbf{e}_k$, то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. "Векторы" $\mathbf{e}_k$ нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование "векторов" $\mathbf{e}_k$ позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно "векторов"

$\mathbf{e}_k$ определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \le x^k \le \infty$, $(k = 1, 2, 3)$, где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 , \qquad -\infty \le x^k \le \infty. \tag{4.2.1}$$

Будем считать, что вектор $\mathbf{r}$, отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k, определяет точку, фиксированную относительно репера $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение "векторов" $\mathbf{e}_k$

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m|\,|\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \tag{4.2.2}$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n) . \tag{4.2.3}$$

Числа x_A^k называются координатами точки A. Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

***Определение**: репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (4.2.1) называется телом отсчета.*

Сам репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколь угодно много других систем координат. Важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t, называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И. Ньютон [52] отмечал на с. 45: "Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово "время" . . . под ним нужно понимать не время в

его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время". Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак не на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л. Больцманом: "Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем" [82], с. 8. Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П. Боль среди таковых проблем указал следующую: "Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь" [6], с. 198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д. Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже при формулировке им 6-й проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А. Пуанкаре (см., например, [61]). Удивительно, что эти исследования до сих пор либо вообще игнорируются, либо существенно искажаются. Если говорить о времени, то, согласно А. Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

***Определение**: тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.*

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело отсчета или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: *любая произвольно выбранная* функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение *любой данной*

частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ и ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \to \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

4.3. Инерциальные системы отсчета

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**). Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Следует ясно понимать, что **GPI** не является ни принципом, ни аксиомой, ни постулатом в строгом смысле этих понятий, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает *определение* понятия прямолинейного и равномерного движения: движение изолированной частицы в абсолютном пространстве *называется* прямолинейным и равномерным. При этом не имеет значения как на самом деле движется изолированная частица в абсолютном пространстве. Важно только то, что это движение является для нас эталоном, посредством которого будут оцениваться все остальные движения. Обратим внимание на то, что в абсолютном пространстве нельзя ввести понятие прямой линии. В теле отсчета понятие прямой линии уже определено. Поэтому из всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства. А именно, необходимо ввести такие тела отсчета, в которых движение изолированной частицы будет прямолинейным. С этой целью необходимо провести мысленные эксперименты. Представим себе изолированную материальную точку и рассмотрим ее траектории в разных телах отсчета. Относительно некоторых из них траектория будет криволинейной. Такие тела отсчета исключаются из рассмотрения. В других телах отсчета траектория материальной точки будет прямой линией или точкой. При этом считаем, что

следы (траектории) материальной точки сохраняются в телах отсчета. Среди этих тел отсчета нужно провести дополнительное испытание. Вновь рассмотрим изолированную материальную точку, которая движется относительно отобранных тел отсчета так, чтобы хотя бы в одной из них (а, следовательно, и во многих других) траектория испытуемой точки не совпадала бы со следом, оставленным первой точкой. Теперь вновь отбросим те тела отсчета, в которых траектория точки криволинейна — это те тела отсчета, которые вращались вокруг прямолинейной траектории первой частицы. В результате, число допускаемых к рассмотрению тел отсчета сократилось. Наконец, среди оставшихся тел отсчета проведем еще одно испытание, при котором изолированная частица хотя бы в одном теле отсчета движется ортогонально плоскости, натянутой на траектории двух первых частиц. Отбросив те из них, в которых траектория частицы криволинейна, получим интересующие нас тела отсчета, относительно которых траектория любой изолированной частицы будет прямолинейна.

***Определение**: тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.*

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно обратить внимание на то, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется время, поскольку представление о траектории не нуждается во введении каких-либо часов.

***Замечание**. Из вышесказанного видно, что введение инерциальных тел отсчета возможно только на уровне идей, которые не поддаются непосредственной экспериментальной проверке. Некоторым философским школам такой подход кажется неприемлемым. Однако мы придерживаемся тех философских школ, согласно которым рациональная наука может претендовать на роль фундаментальной науки тогда и только тогда, когда ее исходные положения принципиально не могут быть ни подтверждены, ни опровергнуты экспериментом.*

***Определение**: множество инерциальных тел отсчета, рассматриваемое как класс эквивалентности, называется абсолютным пространством.*

При введении инерциальных тел отсчета использовалась только та часть **GPI**, в которой говорилось о том, что изолированная частица в абсолютном пространстве движется прямолинейно. При введении времени необходимо воспользоваться вторым утверждением в **GPI** о том, что изолированные частицы в абсолютном пространстве движутся *равномерно*. Равномерным называют движение, при котором частица за одинаковые интервалы времени пролетает одинаковые в данном теле отсчета расстояния. Подчеркнем, что не имеет значения, как на самом деле движется изолированная частица в инерциаль-

ном теле отсчета. Однако именно это движение мы принимаем за эталонное и называем равномерным. Время измеряется посредством некоего прибора, называемого часами и регистрирующего некую монотонно возрастающую величину t, которую и называют временем. Введем в рассмотрение упорядоченное множество значений (моментов времени) $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Величина $t_k - t_s$ при $k > s$ называется интервалом времени между моментами времени t_k и t_s. В инерциальном теле отсчета изолированная частица движется вдоль некоей прямой (траектории). На траектории можно ввести параметр s, показывающий положение частицы на этой прямой. Пусть моментам времени $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ соответствуют положения $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ частицы на траектории. Тогда $s_k - s_p$ есть расстояние, пролетаемое частицей за интервал времени $t_k - t_p$.

***Определение**: часы называются оттарированными в соответствии с* **GPI**, *если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.*

В математической форме это определение можно выразить следующим образом

$$\frac{s_k - s_p}{t_k - t_p} = \nu = \text{const}, \quad \forall\, k, p : \; k > p. \tag{4.3.1}$$

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \to qt + t_0$, где q определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета. Действительно, рассмотрим двое часов, оттарированных по Галилею. Штрихами обозначим моменты времени и скорости, отвечающие вторым часам. Кроме того, считаем, что момент времени t'_k соответствует положению частицы s_k. Тогда получим

$$\frac{s_k - s_p}{t_k - t_p} = \nu = \text{const}, \quad \frac{s_k - s_p}{t'_k - t'_p} = \nu' = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{t'_k - t'_p}{t_k - t_p} = \frac{\nu}{\nu'} = q = \text{const}.$$

Отсюда получаем

$$t'_k - t'_p = q\,(t_k - t_p) \quad \Rightarrow \quad t'_k = q\,t_k + t_*, \;\forall k \quad \Rightarrow \quad t' = q\,t + t_*,$$

где неопределенная величина q есть масштаб измерения времени, а неопределенная величина t_* определяет начало отсчета времени.

Таким образом, время в рациональной механике определяется с точностью до линейного преобразования. Это утверждение находится в неустранимом противоречии с основными положениями специальной теории относительности. В последней требование равномерного течения времени подменено рассуждениями о синхронизации часов в различных точках тела отсчета. Но, как

бы ни синхронизировать часы, все они должны идти равномерно. В специальной теории относительности это требование не выполняется.

***Определение**: инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.*

***Определение**: множество инерциальных систем отсчета называется абсолютным пространством-временем классической физики.*

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство и время образуют единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это часто утверждается в новейшей физике.

***Замечание.** Изложенное выше основано на работах [91] и [19]*[1].

4.4. Системы отсчета и системы координат

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

***Определение**: система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.*

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k:

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \quad \Rightarrow \quad x' = x'(y', t)\,. \tag{4.4.1}$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \quad \Rightarrow \quad y^m = y^m(y', t)\,. \tag{4.4.2}$$

где как бы забыто о существовании формул (4.4.1).

Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (4.4.2), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

***Принцип объективности**: все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются в работе [19], где, кроме того, вводятся инвариантные

[1] При написании работы [19] автор не знал о работе [91], но ясно ощущал, что она реально существует.

дифференциальные операторы, и в конце предыдущей главы. Там же обсуждается принцип материальной объективности, где идет речь о замене системы отсчета.

4.5. Трансляционные и спинорные движения

Как уже неоднократно отмечалось в предыдущей главе, существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\mathbf{a}_\star$ сопоставляется “обычный” вектор $\mathbf{a}$:

1) $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\mathbf{a}_\star$,

2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\mathbf{a}_\star$,

3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального

тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{E}\,,\qquad \det\mathbf{P}(t)=+1. \tag{4.5.1}$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от $\mathbf{E}$, однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t)=(1-\cos\theta)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\cos\theta\,\mathbf{E}+\sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}\,, \tag{4.5.2}$$

где единичный вектор $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{m}(t)=\mathbf{m}(t)$, а угол $\theta=\theta(t)$ называется углом поворота.

Вектор $\boldsymbol{\theta}=\theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t)=\exp[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}],\quad \mathbf{R}=\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}\,, \tag{4.5.3}$$

где тензор $\mathbf{R}=-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ называется логарифмическим тензором поворота.

Представление (4.5.3) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости. Все эти понятия подробно обсуждались в предыдущей главе.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S}=\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$— левый тензор спина и $\mathbf{S}_{\text{r}}=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина кососимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{S}_{\text{r}}=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P},\quad \dot{\mathbf{P}}=\mathbf{P}\times\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Omega}\,. \tag{4.5.4}$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Глава 5.

Тела и их динамические структуры

Следующим шагом после введения инерциальных систем отсчета является введение объектов, с которыми имеет дело рациональная механика. При этом важно подчеркнуть, что рациональная механика не понимает словесных формулировок. Например, слова "материальная точка" или "абсолютно твердое тело" остаются пустым звуком для рациональной механики до тех пор, пока они не определены посредством тех или иных математических структур. Ситуация здесь в точности напоминает работу на компьютере. Можно сколь угодно долго уговаривать компьютер решить какую-либо проблему. Но если эта проблема не сформулирована в понятных для компьютера терминах, то компьютер безжалостно откажет нам в нашей мольбе. Рациональная механика в этом отношении не отличается от компьютера. Поэтому наша задача в данной главе как раз и состоит в том, чтобы задать исходные объекты механики на языке, понятном для рациональной механики.

5.1. Тела-точки и их размерность

С древних времен прослеживается стремление свести все тела к неким совокупностям первичных неделимых тел — атомов. В настоящее время имеется много оснований полагать, что это невозможно. Тем не менее, идея первичных тел оказалась весьма полезной и плодотворной. При этом само первичное тело можно определять по разному. Поскольку первичное тело нельзя определить через уже известные понятия, то оно вводится посредством задания неких математических структур. Например, в ньютоновой механике первичным объектом является материальная точка, движение которой полностью характеризуется заданием одного вектора положения $\mathbf{R}(\mathrm{t})$ в некоторой инерциальной системе отсчета. По вектору положения стандартным образом находится скорость $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$. Далее материальная точка наделяется следующими динамиче-

скими структурами

$$K = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_1 = \frac{dK}{d\mathbf{v}} = m\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q)\times m\,\mathbf{v}. \tag{5.1.1}$$

Здесь величина K называется кинетической энергией, $\mathbf{K}_1$ называется количеством движения, величина $\mathbf{K}_2^Q$ называется моментом количества движения, вычисленным относительно опорной точки Q. В кинетическую энергию входит скалярный параметр m, называемый массой. Масса считается объективной характеристикой материальной точки, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета и, следовательно, не может зависеть от скорости. В то же время, кинетическая энергия, количество движения и момент количества движения не объективны и меняются при переходе к другой системе отсчета. Это означает, что сами по себе они не могут описывать объективную реальность, которая вообще ничего не знает ни о каких системах отсчета. Поэтому законы механики, имеющие своей целью изучение реальности и формулируемые с использованием динамических структур, должны иметь специальный вид, гарантирующий независимость получаемых результатов от выбора системы отсчета. Обратим внимание на то, что никакие эксперименты не могут ни подтвердить, ни опровергнуть правильность динамических структур (5.1.1). В частности, никто и никогда не измерял кинетическую энергию, хотя ее можно вычислить по измеряемым величинам. Тем не менее, это одна из важнейших структур в механике. Динамические структуры материальной точки, как это видно из выражений (5.1.1), предельно просты, но они очень долго и трудно утверждались в механике. Можно только поражаться тому, что такой простой первичный элемент позволяет ньютоновой механике объяснить огромное количество явлений, в том числе и весьма трудных. В то же время ньютонова механика оказалась неспособной адекватно описывать электричество и магнетизм и многие другие явления микромира. Впрочем, и в пределах макромира ньютонова механика иногда вынуждена привлекать чуждые ей элементы и допускать логические противоречия. Например, законы статики абсолютно твердого тела в рамках ньютоновой механики получить невозможно, но они, тем не менее, используются и приводят к правильным результатам. На неполноту ньютоновой механики впервые указал Л. Эйлер еще в 1771 г., но и по настоящее время это обстоятельство не учитывается в должной мере в учебниках механики и, особенно, физики.

Материальную точку можно назвать бесспиновой частицей, поскольку она не реагирует на спинорные движения. Видимо, можно утверждать, что динамические структуры (5.1.1) дают наиболее общую модель бесспиновой части-

цы. В самом деле, попробуем заменить структуры (5.1.1) более общими

$$K = \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_1 = \frac{dK}{d\mathbf{v}} = m\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}-\mathbf{R}_Q)\times m\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}, \quad (5.1.2)$$

где симметричный тензор второго ранга $m\,\mathbf{A}$ называется тензором инерции.

Тензор инерции любого тела, в том числе и материальной точки, должен быть объективной характеристикой тела. Это означает, что при повороте тела тензором поворота $\mathbf{P}$ тензор инерции должен поворачиваться вместе с телом, т.е. должно выполняться условие

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{P}^T,$$

где тензор $\mathbf{A}_0$ вычислен в отсчетном положении, т.е. не зависит от движения.

Динамические структуры (5.1.2) при подобном задании тензора инерции кажутся интуитивно неприемлемыми, поскольку они реагируют на поворот, но не реагируют на интенсивность поворота, т.е. на угловую скорость. Хотя чисто умозрительно модель (5.1.2) кажется допустимой, но она ведет к множеству неприятностей при попытке ее использовать. Только в том случае, когда тензор $\mathbf{A}$ является единичным, т.е. модель (5.1.2) переходит в модель материальной точки, все неприятности исчезают. Желательно, конечно, найти простые и убедительные аргументы, заставляющие отбросить модель (5.1.2). Так или иначе, но в данной книге на основании огромного опыта, накопленного в механике, в качестве безальтернативной модели бесспиновой частицы рассматривается модель материальной точки.

В эйлеровой механике в качестве исходного объекта вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Такое тело-точку будем называть односпиновой частицей. Относительно односпиновой частицы считается, что она существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение односпиновой частицы определено, если заданы ее вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела-точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^T\right)_\times \quad \left((\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\right). \quad (5.1.3)$$

***Определение**: кинетической энергией односпиновой частицы называется квадратичная форма ее скоростей*:

$$K = m\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}\right), \quad (5.1.4)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции односпиновой частицы, а скалярный множитель m выделен просто для удобства и называется массой тела.

Тензоры инерции, будучи объективными характеристиками тела-точки, должны зависеть от тензора поворота

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}, \tag{5.1.5}$$

где $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0, при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$.

В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}$ и (5.1.5). Кроме того, потребуем, чтобы квадратичная форма (5.1.4) была бы положительно определенной

$$K = m\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{m}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \frac{m}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\mathbf{C} - \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B}\right)\cdot\boldsymbol{\omega} > 0. \tag{5.1.6}$$

Условие (5.1.6) будет выполнено, если тензор $\mathbf{C} - \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B}$ положительно определен и $m > 0$. В ряде идеализированных задач можно вместо (5.1.6) принимать более слабое условие неотрицательности тензора $\mathbf{C} - \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B}$. Например, кинетическая энергия односпиновой частицы в виде цилиндра бесконечно малого радиуса (в пределе нулевого радиуса) не зависит от составляющей угловой скорости вдоль оси цилиндра. Но при этом теряется единственность решения, а проекция угловой скорости на ось цилиндра остается неопределенной.

Придавая тензорам инерции те или иные значения, приходим к различным исходным объектам. Поэтому посредством квадратичной формы (5.1.4) вводятся не только те тела-точки, которые традиционно рассматриваются в механике, но и множество других тел-точек. Ниже будет приведен пример тела-точки, которое не встречается в механике. Кинетическая энергия (5.1.6) содержит десять независимых параметров: массу m, шесть инвариантов тензора $\mathbf{B}$ и три собственных числа симметричного тензора $\mathbf{C}$.

***Определение**: число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела-точки и не зависящих от движения тела-точки, называется размерностью тела-точки.*

Материальная точка характеризуется всего одним параметром. Поэтому размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела, модель которого будет рассмотрена в следующем параграфе, равна четырем: $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем

случае, размерность частицы (5.1.4) равна 10. Следовательно, квадратичная форма (5.1.4) описывает $10! = 3628800$ различных частиц. Правда, многие из них образуют классы эквивалентности и потому не различаются.

***Определение**: количеством движения $\mathbf{K}_1$ тела-точки называется линейная форма скоростей*

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\,(\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega})\,. \tag{5.1.7}$$

Несколько более сложным понятием является понятие кинетического момента, которое в случае материальной точки сводится к понятию момента количества движения. При определении кинетического момента в рассмотрение вводится некая точка Q в системе отсчета, которая выбирается произвольно, но неподвижна относительно системы отсчета. Эту точку Q в дальнейшем будем называть опорной.

***Определение**: кинетическим моментом $\mathbf{K}_2^Q$ тела-точки, вычисленным относительно опорной точки Q, зафиксированной в данной системе отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле*

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q)\times\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \\ = m\,[\,(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q)\times(\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}]\,.\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Здесь первое слагаемое в правой части называется моментом количества движения тела-точки, а второе слагаемое, т.е. величина $m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела-точки.

В качестве чисто иллюстративного примера этого пункта приведем пример воображаемого тела-точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} + q\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{5.1.9}$$

где m — масса тела-точки; J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах-точках, используемых в классической механике.

Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Обратим внимание, что условный заряд является аксиальным скаляром, т.е. он меняет знак при смене ориентации системы отсчета. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело-точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “заряд” и т.д., то это должно быть отражено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной

функцией своих аргументов, что для формы (5.1.9) обеспечивается условиями

$$m > 0, \quad mJ - q^2 > 0.$$

В качестве опорной точки выберем начало в теле отсчета. Тогда количество движения и кинетический момент тела-точки (5.1.9) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \tag{5.1.10}$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забежав вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции. Основная аксиома механики утверждает, что количество движения и кинетический момент изолированной частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\,\mathbf{e},$$

$$\mathbf{R} \times \mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}, \tag{5.1.11}$$

где принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0$, $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$.

Дифференцируя второе из уравнений (5.1.11) по времени и исключая из получившегося уравнения вектор $J\dot{\boldsymbol{\omega}}$, приходим к уравнению для определения трансляционной скорости

$$\dot{\mathbf{V}} + \alpha\mathbf{e} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \alpha \equiv \frac{qa}{mJ - q^2}. \tag{5.1.12}$$

Решение этого уравнения находится немедленно и имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}(-\alpha t\mathbf{e}) \cdot \mathbf{V}_0 \equiv [(1 - \cos\alpha t)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos\alpha t\,\mathbf{E} + \sin\alpha t\,\mathbf{e} \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{V}_0, \tag{5.1.13}$$

где тензор поворота $\mathbf{Q}(-\alpha t\mathbf{e})$ осуществляет поворот вектора $\mathbf{V}_0$ вокруг $\mathbf{e}$ на угол α по ходу часовой стрелки и для него справедливо уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}}(-\alpha t\mathbf{e}) = -\,\alpha\,\mathbf{e} \times \mathbf{Q}(-\alpha t\mathbf{e}).$$

Из выражения (5.1.13) видим, что частица движется по инерции с постоянной по модулю, но переменной по направлению трансляционной скоростью. Подставляя представление (5.1.13) в первое из уравнений (5.1.11), получаем выражение для угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(-\alpha t\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0.$$

Иными словами, угловая скорость частицы также постоянна по модулю, но переменна по направлению. Нетрудно найти и траекторию частицы. Для

этого достаточно проинтегрировать уравнение (5.1.13) по времени. Можно убедиться, что движение происходит по спирали, определяемой выражением

$$\mathbf{R} = \left[\frac{\alpha t - \sin\alpha t}{\alpha}\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \frac{\sin\alpha t}{\alpha}\mathbf{E} + \frac{1-\cos\alpha t}{\alpha}\,\mathbf{e}\times\mathbf{E}\right]\cdot\mathbf{V}_0, \qquad (5.1.14)$$

Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{V}_0 = mV_0^2 + q\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{V}_0 = 0,$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности с центром в точке $\mathbf{e}\times\mathbf{V}_0/\alpha$, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор.

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение рассматриваемой частицы по инерции остается равномерным, но не прямолинейным. Если в рассматриваемом примере условный заряд положить равным нулю, т.е. $\alpha = 0$, то движение, описываемое формулами (5.1.9), (5.1.13) и (5.1.14), переходит в обычное движение по инерции

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_0\,t, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0.$$

В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела-точки общего вида) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Любопытно сравнить движение по инерции частицы с энергией (5.1.9) с движением заряженной частицы в постоянном магнитном поле. В классической физике под заряженной частицей понимают обычную материальную точку, на которую в электромагнитном поле действует сила Лоренца, определяемая выражением

$$\mathbf{F} = q_*\left(\mathbf{E} + \mathbf{V}\times\mathbf{B}\right),$$

где q_* есть истинный заряд частицы, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ суть векторы электрического и магнитного полей соответственно.

Примем, что электрическое поле отсутствует, а магнитное поле постоянно

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = B\,\mathbf{e} = \mathrm{const}.$$

Запишем для этой частицы второй закон Ньютона

$$m\dot{\mathbf{V}} = -q_*B\mathbf{e}\times\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{V}} + \alpha\mathbf{e}\times\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \alpha \equiv \frac{q_*B}{m}. \qquad (5.1.15)$$

Сравнивая между собой уравнения (5.1.12) и (5.1.15), видим, что они совпадают с точностью до значения параметра α. Если условный заряд, т.е. параметр q в (5.1.9), подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$q_* B = \frac{qm\sqrt{m^2V_0^2 + q^2\omega_0^2 + 2mq\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0}}{mJ - q^2},$$

то движение частицы (5.1.9) по инерции будет идентично движению заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Таким образом, меняя модель первичного тела-точки можно до некоторой степени моделировать наличие внешней среды, которую нам по тем или иным причинам не хотелось бы принимать во внимание. Впрочем, полной аналогии двух рассмотренных ситуаций все-таки не существует. В качестве информации для размышления отметим следующее обстоятельство. В классической физике считается, что заряд q_* является абсолютным скаляром, электрическое поле $\mathbf{E}$ есть полярный вектор, магнитное поле $\mathbf{B}$ есть аксиальный вектор. Эти предположения вводятся по умолчанию и не имеют обоснований. Между тем, они совсем не очевидны. В самом деле, известны элементарные частицы называемые электроном и позитроном. Они полностью идентичны по массе и величине заряда, но их заряды имеют противоположные знаки. Заряд электрона принято считать отрицательным, а заряд позитрона — положительным. Однако принципиально ничего не может измениться, если заряд электрона считать положительным, а заряд позитрона — отрицательным. Таким образом, мы стоим перед выбором одной из двух равноправных возможностей. В математике выбор такого рода называется ориентацией, а заряд оказывается зависящим от этой ориентации. Если обсуждаемую ориентацию связать с ориентацией системы отсчета, то заряд должен быть аксиальным скаляром и характеризовать некое свойство спинорного движения. Отсюда вытекают далеко идущие следствия, которые нуждаются в тщательной разработке и пока что являются не более чем полетом фантазии. Тем не менее, вопрос о выборе знака заряда электрона не снят с рассмотрения и требует ясного ответа.

Рассмотренный пример показывает, что в классической механике таятся еще не изученные возможности. Не исключено, что именно эти возможности окажутся определяющими при изучении микромира. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений и тем незначительнее становится роль трансляционных движений.

В заключение этого пункта введем понятие многоспиновой частицы. Здесь мы не будем вдаваться в детали, а ограничимся общим представлением о многоспиновой частице. Пусть дана частица, движение которой определяется заданием ее вектора положения $\mathbf{R}(t)$ и набором независимых тензоров пово-

рота $\mathbf{P}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. При этом частица обладает $n + 1$ спином. Ее можно представить себе как несущее тело, в котором закреплены n роторов, независимо вращающихся относительно несущего тела. Тензор $\mathbf{P}_0(t)$ характеризует поворот несущего тела. Тензоры $\mathbf{P}_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, n$ характеризуют абсолютные повороты каждого из роторов. Движение многоспиновой частицы характеризуется набором скоростей

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}_m = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}}_m \cdot \mathbf{P}_m^T\right)_\times, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Кинетическая энергия, как всегда, является квадратичной формой скоростей

$$K = \frac{1}{2} m\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \sum_{m=0}^{n} \mathbf{B}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_m + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{C}_{km} \cdot \boldsymbol{\omega}_m.$$

Тензоры $\mathbf{B}_m$ и $\mathbf{C}_{km}$ называются тензорами инерции. Количество движения многоспиновой частицы находится по формуле

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \sum_{m=0}^{n} \mathbf{B}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_m.$$

Кинетический момент вычисляется следующим образом

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}_k}.$$

Практическое использование этих формул нуждается в дополнительных пояснениях, которые здесь не приводятся, поскольку в данной книге основное внимание будет уделяться эйлеровой механике в ее простейшей форме. Однако позднее будет продемонстрировано применение многоспиновых частиц, где и будут даны необходимые детали.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела-точки.

5.2. Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновой механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность

ограничиться первичными телами-точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела-точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела-точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2\mathfrak{n}$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с $\mathfrak{n}$ атомами кислорода (первичные тела-точки другого типа) образуют в результате $\mathfrak{n}$ молекул воды (первичные тела-точки третьего типа). Таким образом, вместо $3\mathfrak{n}$ первичных тел-точек мы получили $\mathfrak{n}$ других первичных тел-точек. О том, почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек, будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать раздельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной книге мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова $\mathbb{S}_t$, которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на $\mathbb{S}_t$ нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

***Определение**: множество $\mathfrak{M}_A$ тел-точек, находящихся внутри $\mathbb{S}_t$, называется телом A, а множество $\mathfrak{M}^e_A$ тел-точек, находящихся вне $\mathbb{S}_t$, называется окружением тела $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^e$.*

Принятое выше определение тела нельзя считать достаточно общим и иногда от него приходится отказываться. Мы принимаем это определение для простоты, чтобы начинающий изучать механику имел бы какой-то интуитивный образ тела. После приобретения определенного опыта изучающий без труда сможет отказаться от этого определения. Во всяком случае, принимаемые определения отнюдь не являются догмами и при необходимости могут быть изменены.

Объемом тела $\mathcal{A}$ называется объем, заключенный внутри $\mathbb{S}_t$, поэтому объем тела $\mathcal{A}$ не является физической (объективной) характеристикой тела $\mathcal{A}$.

***Определение**: тело $\mathcal{A}$ называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением: в противном случае тело $\mathcal{A}$ называется открытым.*

***Аксиома:** кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ аддитивны по телам-точкам, составляющим тело $\mathcal{A}$.*

В ньютоновой механике все тела рассматриваются как совокупности материальных точек. В этом случае кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ вычисляются по простейшим формулам, вытекающим из выражений (5.1.1)

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathcal{K}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \mathcal{K}_k}{\partial \mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k,$$
$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}_k}{\partial \mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times m_k \mathbf{v}_k. \quad (5.2.1)$$

Для сплошных тел все суммы в (5.2.1) заменяются интегралами. Задержимся ненадолго на кинетической энергии тела $\mathcal{A}$, являющегося совокупностью материальных точек. Такие тела являются основным объектом исследования в классической механике. С этой целью введем в рассмотрение понятие центра масс тела. Следует иметь в виду, что понятие центра масс вводится по определению и само по себе не является выражением какого-либо физического закона. Тем не менее, оно чрезвычайно удобно и полезно в приложениях. Для системы материальных точек центр масс определяется следующим образом

$$m \mathbf{R}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{R}_k, \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad m \mathbf{R}_C = \int\limits_{(m)} \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) dm(\mathbf{r}), \qquad (5.2.2)$$

где векторы $\mathbf{R}_k$ определяют положения материальных точек с массой m_k.

Последнее выражение в (5.2.2) есть определение центра масс для сплошных тел, к которым мы обратимся позднее. Введем в рассмотрение векторы $\boldsymbol{\rho}_i$, определяющие положение i материальной точки относительно центра масс

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_C + \boldsymbol{\rho}_i, \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\boldsymbol{\rho}}_k = \mathbf{0}. \quad (5.2.3)$$

С учетом равенств (5.2.2) и (5.2.3) выражение для кинетической энергии (5.2.1) переписывается следующим образом

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i. \quad (5.2.4)$$

Выражение (5.2.4) известно в механике (см., например, [41]) под названием ***теоремы Кенига***: *кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс и имеющая массу, равную массе всей системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Аналогичные представления имеются для количества движения и кинетического момента тела $\mathcal{A}$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\mathbf{v}_c, \quad \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_Q) \times m\mathbf{v}_c + \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k.$$

Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Если тело $\mathcal{A}$, состоящее из множества материальных точек, рассматривать как одно тело-точку, то его уже нельзя рассматривать как материальную точку, но можно рассматривать как своего рода односпиновую частицу. В самом деле, допустим, что точки тела $\mathcal{A}$ движутся по закону

$$\boldsymbol{\rho}_k(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\rho}_k(0) + \mathbf{u}_k(t), \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t),$$

где вектор $\mathbf{u}_k(t)$ в некотором смысле мал и им можно пренебречь.

Тогда для кинетической энергии, количества движения и кинетического момента тела $\mathcal{A}$ получим

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}(t),$$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\mathbf{v}_c, \quad \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_Q) \times m\, \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}(t),$$

где

$$\boldsymbol{\Theta} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\rho}_k \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} = -\,\mathbf{P}(t) \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k(0) \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\rho}_k(0) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t),$$

причем тензор $\boldsymbol{\Theta}$ называется тензором инерции. Таким образом, если система материальных точек движется так, что расстояния между материальными точками в процессе движения меняются незначительно, то при взгляде на эту систему издалека ее можно воспринимать как односпиновую частицу.

Обратимся к рассмотрению тел, состоящих из односпиновых частиц. Пусть все характеристики i-го тела-точки снабжаются индексом i. Тогда в соответствии с принятой аксиомой имеем

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{1}{2}\, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right), \quad (5.2.5)$$

где $\mathcal{K}_i$ называется массовой плотностью кинетической энергии.

Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{K}_{1i}, \quad \mathcal{K}_{1i} = \frac{\partial \mathcal{K}_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \tag{5.2.6}$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{K}_{2i}^Q, \quad \mathcal{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial \mathcal{K}_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} =$$
$$= (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \tag{5.2.7}$$

Для сплошных тел все суммы в (5.2.5) – (5.2.7) заменяются интегралами

$$K(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \mathcal{K}\, dm = \int\limits_{(m)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dm, \tag{5.2.8}$$

где величина $\mathcal{K}$ называется массовой плотностью кинетической энергии, тензоры $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ суть массовые плотности тензоров инерции. Все величины под знаком интеграла вычисляются в той точке тела, окрестность которой обладает бесконечно малой массой dm.

Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \mathcal{K}_1 dm, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{5.2.9}$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \mathcal{K}_2^Q dm,$$

$$\mathcal{K}_2^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{5.2.10}$$

В формулах (5.2.8) – (5.2.10) величины под знаком интеграла вычисляются в той точке тела, окрестности которой принадлежит бесконечно малая масса dm. К обсуждению тел, составленных из односпиновых частиц, мы еще вернемся при обсуждении понятия квазитвердого тела. Поэтому обсуждение тел из односпиновых частиц нельзя считать законченным.

В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [69]

считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать модель односпиновой частицы (5.1.4) или даже вводить в рассмотрение многоспиновые частицы, то поведение таких тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Есть основания думать, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л. Эйлер.

В качестве примеров использования моделей материальной точки и односпиновой частицы рассмотрим динамические структуры одномерных сплошных сред. В приложениях часто встречаются такие объекты, как нити, струны, канаты и т.д. Их основное свойство заключается в том, что они не сопротивляются изгибу. Нити можно представлять себе как деформируемые кривые в пространстве. Как известно, параметрическое задание кривой в пространстве определяется заданием вектор-функции $\mathbf{R}(s,t)$, где параметр $s : 0 \le s \le l$ есть длина дуги кривой в недеформированном состоянии, l есть полная длина нити в недеформированном состоянии, а t есть время. Движение точки нити (или струны) с координатой s определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}(s,t)$. Скорость этой точки вычисляется обычным образом $\mathbf{v}(s,t) = \dot{\mathbf{R}}(s,t)$. Когда параметр s зафиксирован, например $s = 0.38l$, то вектор $\mathbf{R}(0.38l,t)$ задает движение точки нити с координатой $s = 0.38l$. В качестве тела будем рассматривать часть нити, заключенную в замкнутом интервале $[s_1, s_2]$. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию $\rho(s)$ такую что масса dm бесконечно малой части нити ds равна $dm = \rho(s)ds$. Тогда динамические структуры для нити имеют вид

$$K(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{K}\rho(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{v}(s,t)\cdot\mathbf{v}(s,t)\,\rho(s)\,ds,$$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}}\rho(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{v}(s,t)\,\rho(s)\,ds,$$

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{R}(s,t)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}}\rho(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{R}(s,t)\times\mathbf{v}(s,t)\,\rho(s)\,ds.$$

Еще одним весьма популярным в приложениях объектом является тонкий упругий стержень. Подобно нитям тонкий стержень рассматривается как линия в пространстве, но каждая точка этой линии реагирует не только на смещения, но и на повороты. Это означает, что каждая точка упругой линии-стержня

является односпиновой частицей. Динамические структуры стержня определяются следующими выражениями

$$K(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{K}\rho(s)\,ds,$$

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{v}(s,t)\cdot\mathbf{v}(s,t) + \mathbf{v}(s,t)\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(s,t)\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t),$$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}}\rho(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} [\mathbf{v}(s,t) + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t)]\ \rho(s)\,ds,$$

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \left[\mathbf{R}(s,t)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right]\rho(s)\,ds =$$
$$= \int_{s_1}^{s_2} [\mathbf{R}(s,t)\times(\mathbf{v}(s,t) + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t)) + \mathbf{v}(s,t)\cdot\mathbf{B} + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t)]\ \rho(s)\,ds,$$

где в качестве опорной точки выбрано начало в системе отсчета, а массовые плотности тензоров инерции $\mathbf{B}(s,t)$ и $\mathbf{C}(s,t)$ подлежат определению и зависят от размеров и формы поперечного сечения стержня, который при этом должен рассматриваться не как упругая линия, а как трехмерное тело.

В дальнейшем модели нити и стержня будут наделены дополнительными структурами: силовыми, моментными и внутренней энергии.

5.3. Классическая модель абсолютно твердого тела

Вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, являющегося наряду с материальной точкой одной из основных моделей, рассматриваемых в рациональной механике. Ранее было показано, что движение абсолютно твердого тела определено, если заданы вектор положения произвольно выбранной точки тела, жестко зафиксированной относительно тела и называемой полюсом, и тензор поворота тела. Там же была доказана основная теорема кинематики абсолютно твердого тела, которая позволяет найти вектор положения $\mathbf{R}(t)$ текущей точки тела

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t)\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_X),\ \mathbf{r} = \mathbf{R}(0),\ \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0),\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \qquad (5.3.1)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X, называемой полюсом и зафиксированной в теле $\mathcal{A}$; $\mathbf{P}(t)$ — тензор поворота тела.

По выражению (5.3.1) вычисляем распределение скоростей в твердом теле

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) = \mathbf{v} + \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}_X, \quad \mathbf{S} \equiv -\mathbf{E}\times(\mathbf{R} - \mathbf{R}_X). \quad (5.3.2)$$

В рассматриваемом случае кинетическая энергия абсолютно твердого тела может быть вычислена непосредственно. Для этого все тело разделим на бесконечно малые части массой $\mathrm{d}\,m$. Эти малые части будем рассматривать как материальные точки, кинетическую энергию которых вычисляем по простейшей формуле

$$\mathrm{d}\,K(A) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,\dot{\mathbf{R}}(t)\cdot\dot{\mathbf{R}}(t).$$

Полная кинетическая энергия находится как интеграл по всей массе тела

$$K(A) = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} \dot{\mathbf{R}}(t)\cdot\dot{\mathbf{R}}(t)\,\mathrm{d}\,m = \int\limits_{(m)} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\,m, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(-\mathbf{S}^2)\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{5.3.3}$$

Подставляя сюда выражение (5.3.1) и учитывая, что скорость полюса X и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависят от точки интегрирования, получаем

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}^{(X)}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(X)}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{5.3.4}$$

где

$$\mathbf{B}^{(X)} = \int\limits_{(m)} \mathbf{S}\,\mathrm{d}\,m = m\,(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C)\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\int\limits_{(m)} \mathbf{R}\,\mathrm{d}\,m, \tag{5.3.5}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)} = -\int\limits_{(m)} \mathbf{S}^2\,\mathrm{d}\,m = \int\limits_{(m)} \Big[|\mathbf{R}-\mathbf{R}_X|^2\,\mathbf{E} - (\mathbf{R}-\mathbf{R}_X)\otimes(\mathbf{R}-\mathbf{R}_X)\Big]\,\mathrm{d}\,m, \tag{5.3.6}$$

m — масса всего тела, вектор $\mathbf{R}$ определяет положение элемента $\mathrm{d}m$, вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_X$ определяет скорость полюса.

В выражении (5.3.5) фигурирует вектор $\mathbf{R}_C$, который определяет положение центра масс тела. Выражение для кинетической энергии (5.3.4) показывает, что тензор $\mathbf{A}$ в данном случае равен единичному тензору. Тензор $\mathbf{B}^{(X)}$ вычислен в явном виде и зависит только от выбора полюса и вектора положения центра масс. Если полюс тела выбрать в центре масс, то тензор $\mathbf{B}^{(C)}$ становится нулевым. Тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(X)}$ называется эйлеровым тензором инерции. Он также зависит от выбора полюса в теле. Если в качестве полюса выбирается центр масс тела, то тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(C)}$ называется центральным тензором инерции. Указание на полюс в обозначении тензоров инерции в дальнейшем будет опускаться в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям.

Количество движения тела $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \dot{\mathbf{R}}\,\mathrm{d}m = \int\limits_{(m)} [\mathbf{v}+\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\omega}]\,\mathrm{d}m = \int\limits_{(m)} [\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}-\mathbf{R}_X)]\,\mathrm{d}m =$$

$$= m\,\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{5.3.7}$$

Кинетический момент, вычисленный относительно опорной точки Q, определяется по формуле

$$\mathbf{K}_2^{Q}(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X))\, dm = \\ = (\mathbf{R}_X(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.3.8)$$

Сравнивая полученные выражения (5.3.4), (5.3.7) и (5.3.8) с соответствующими выражениями для односпиновой частицы, видим их внешнее совпадение. Различие только в том, что для абсолютно твердого тела тензоры инерции конкретизированы формулами (5.3.5) и (5.3.6). При этом тензор $\mathbf{B}$ для абсолютно твердого тела оказался антисимметричным, в то время как у односпиновой частицы он, в принципе, может быть любым. В частности, для кинетической энергии (5.1.9) он был симметричным $\mathbf{B} = q\mathbf{E}$. Поэтому такие односпиновые частицы в классической механике не рассматривались.

5.4. Квазитвердое тело и его структуры

При первых чтениях этот параграф можно просто просмотреть или даже пропустить без ущерба для понимания основного содержания.

Выше при определении динамических структур абсолютно твердого тела мы благополучно избежали некоей ошибки, которую мог бы совершить человек, неясно чувствующий различие между трансляционным и спинорным движением. Трудность в том, что и в трансляционном движении, и в спинорном движении имеет смысл понятие угловой скорости. Именно поэтому и понадобилось вводить специальный термин “спинорное движение” вместо не вполне определенного термина “вращательное движение”. Ниже различие между этими терминами проявится весьма отчетливо. Чтобы проявить это затруднение, рассмотрим пример квазитвердого тела, которое состоит из вращающихся частиц, расстояние между которыми не меняется в процессе движения.

Предварительно рассмотрим абсолютно твердое на основе способа, отличающегося от подхода предыдущего параграфа. Как и в предыдущем параграфе, будем исходить из определения кинетической энергии (5.3.3), но перепишем его с учетом (5.3.2) в следующем виде

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.4.1)$$

Подставляя (5.4.1) в (5.3.3), получаем

$$K(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \mathcal{K}\, dm = \int\limits_{(m)} \left[\frac{1}{2}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{S}^2) \cdot \boldsymbol{\omega}\right] dm, \quad (5.4.2)$$

Сравнивая выражение (5.4.2) с выражением (5.2.8) для кинетической энергии тела, составленного из односпиновых частиц, видим, что они совпадают при $\mathbf{B} = \mathbf{S}$ и $\mathbf{C} = -\mathbf{S}^2$. Воспользуемся в таком случае формулами (5.2.9) и (5.2.10) соответственно для определения количества движения и кинетического момента. Для количества движения имеем

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int\limits_{(\mathfrak{m})} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}}\, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int\limits_{(\mathfrak{m})} [\mathbf{v} + \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\omega}]\, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{5.4.3}$$

где тензор $\mathbf{B}$ дается выражением

$$\mathbf{B} = \int\limits_{(\mathfrak{m})} \mathbf{S}\mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C)\times\mathbf{E}.$$

Сравнивая выражения (5.3.7) и (5.4.3), видим, что оба подхода ведут к одинаковым результатам при вычислении количества движения. Обратимся к вычислению кинетического момента и воспользуемся формулой (5.2.10) для тела из односпиновых частиц. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2^Q &= \int\limits_{(\mathfrak{m})} \left[(\mathbf{R}-\mathbf{R}_Q)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right]\mathrm{d}\mathfrak{m} = \\
&= \int\limits_{(\mathfrak{m})} \left[(\mathbf{R}_X-\mathbf{R}_Q)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}} + (\mathbf{R}-\mathbf{R}_X)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right]\mathrm{d}\mathfrak{m} = (\mathbf{R}_X-\mathbf{R}_Q)\times\mathbf{K}_1 + \\
&\quad + \int\limits_{(\mathfrak{m})} \left[\mathbf{S}\cdot\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right]\mathrm{d}\mathfrak{m} = (\mathbf{R}_X-\mathbf{R}_Q)\times\mathbf{K}_1 + 2\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}),
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

где тензор $\boldsymbol{\Theta}$ определен формулой (5.3.6).

Сравнивая выражения (5.4.4) и (5.3.8), видим, что они не совпадают: произошло удвоение динамического спина. Разумеется, правильным является выражение (5.3.8). Следовательно, выше мы совершили какую-то ошибку. Особенно неприятно то, что формально мы сделали все правильно. Допущенная ошибка имеет не формально-математический характер, но имеет чисто физическую природу: необходимо было использовать не формулу (5.2.10) для тел из односпиновых частиц, а определение кинетического момента для тела, составленного из бесспиновых частиц, т.е. из материальных точек. В этом случае

вместо (5.4.4) получили бы

$$\mathbf{K}_2^Q = \int\limits_{(m)} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}}\right] dm =$$

$$= \int\limits_{(m)} \left[(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}}\right] dm =$$

$$= (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 - \int\limits_{(m)} \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} dm = (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

На этом примере ясно видно, что наличие в выражении для кинетической энергии вектора угловой скорости не является признаком учета спинорных движений. Например, движение материальной точки по окружности можно описать с помощью вектора угловой скорости, но это движение является трансляционным.

Чтобы еще лучше выявить различие между телами, составленными из бесспиновых частиц, и телами, составленными из односпиновых частиц, рассмотрим квазитвердое тело, составленное из вращающихся частиц, расстояния между которыми не меняются в процессе движения. Квазитвердое тело можно представить себе следующим образом. Пусть дано абсолютно твердое тело, которое будем называть несущим. Для наглядности можно представлять себе несущее тело в виде тела, в котором имеется множество маленьких полостей. Пусть в каждой полости установлен миниатюрный гироскоп, центр масс которого неподвижен относительно несущего тела. Гироскоп состоит из вращающегося ротора, закрепленного в специальной конструкции, называемой кардановым подвесом. При вращении ротора его ось может поворачиваться. Если ось ротора закреплена относительно несущего тела, а сам ротор является телом вращения, то распределение массы в таком квазитвердом теле не меняется в процессе движения. *Квазитвердое тело, распределение массы в котором не меняется в процессе движения, называется гиростатом.* Если квазитвердое тело состоит из односпиновых частиц, то более точным образом квазитвердого тела является кристаллическая решетка (безынерционное несущее тело), в узлах которой находятся быстровращающиеся атомы. На самом деле атом нужно моделировать многоспиновой частицей, но в иллюстративном примере можно ограничиться и односпиновыми атомами, которые в Природе не встречаются. Итак, рассмотрим тело, состоящее из множества вращающихся частиц. Допустим, что в момент времени $t = 0$ положение центра масс типичной частицы определялось вектором положения $\mathbf{r}$. Ориентацию этой частицы относительно системы отсчета при $t = 0$ определим заданием

тензора поворота $\mathbf{P}_0(\mathbf{r})$. Движение частицы определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}(\mathbf{r},t)$, причем $\mathbf{R}(\mathbf{r},0)=\mathbf{r}$, и тензора поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ такого, что $\mathbf{P}(\mathbf{r},0)=\mathbf{P}_0(\mathbf{r})$. Примем теперь, что векторы положений центров масс частиц, составляющих рассматриваемое тело, образуют абсолютно твердое тело, которое будем называть несущим телом. Тогда для векторов положений односпиновых частиц, т.е. для несущего тела, справедлива основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t)=\mathbf{R}_O(t)+\mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_O), \tag{5.4.5}$$

где в качестве полюса выбрана точка, зафиксированная относительно несущего тела, причем $\mathbf{R}_O(0)=\mathbf{r}_O$, а тензор $\mathbf{Q}(t)$ определяет поворот несущего тела.

По выражению (5.4.5) находим трансляционную и угловую скорости несущего тела

$$\begin{gathered}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}_O(t)+\boldsymbol{\omega}_Q(t)\times\left(\mathbf{R}(\mathbf{r},t)-\mathbf{R}_O(t)\right),\\ \mathbf{v}_O(t)=\dot{\mathbf{R}}_O(t),\quad \dot{\mathbf{Q}}(t)=\boldsymbol{\omega}_Q(t)\times\mathbf{Q}(t),\end{gathered} \tag{5.4.6}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}_Q$ есть угловая скорость несущего тела.

Угловая скорость частиц определяется по тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{P}(\mathbf{r},t). \tag{5.4.7}$$

Тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ можно представить в виде композиции поворотов

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\omega}_Q(t)+\mathbf{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}_S(\mathbf{r},t), \tag{5.4.8}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}_S$ есть угловая скорость частицы относительно несущего тела.

Таким образом, мы видим, что движение квазитвердого тела характеризуется двумя угловыми скоростями: угловой скоростью несущего тела $\boldsymbol{\omega}_Q(t)$, которая характеризует трансляционное движение квазитвердого тела, и полем угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ (или полем относительных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_S(\mathbf{r},t)$), характеризующим спинорные движения частиц квазитвердого тела.

Запишем выражение для кинетической энергии квазитвердого тела. Кинетическая энергия любого тела является аддитивной функцией массы этого тела и в соответствии с известной в теории меры теоремой Радона–Никодима может быть представлена интегралом по массе. Иными словами, необходимо использовать представление (5.2.8)

$$K(\mathcal{A})=\int\limits_{(m)}\mathcal{K}\,dm=\int\limits_{(m)}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)dm. \tag{5.4.9}$$

Если в качестве односпиновых частиц рассматривать микроскопические абсолютно твердые тела, то для массовых плотностей тензоров инерции мы

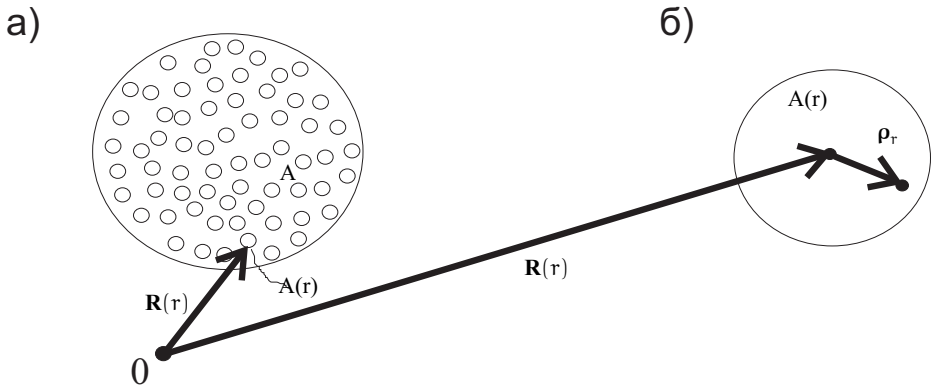

Рис. 5.1. Принцип телеобъектива: а — взгляд издалека, б — в кадре одна частица

имели бы формулы, отличающиеся от (5.3.5) и (5.3.6) тем, что в них интегрирование производилось бы по распределению массы внутри частицы и они были бы разделены на массу частицы. Поскольку для этих частиц в качестве полюса выбран центр масс, то тензор $\mathbf{B}$ в (5.3.5) равнялся бы нулю. Именно этот случай мы и будем рассматривать ниже. Тогда кинетическая энергия квазитвердого тела определяется формулой

$$\mathsf{K}(\mathcal{A}) = \int\limits_{(\mathfrak{m})} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int\limits_{(\mathfrak{m})} \left(\frac{1}{2}\,\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathrm{t})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathrm{t}) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\mathrm{t})\right)\mathrm{d}\,\mathfrak{m}(\mathbf{r}), \tag{5.4.10}$$

где тензоры $\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ задают массовую плотность тензоров инерции односпиновых частиц.

Для них справедливы представления

$$\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r},\mathrm{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{r},\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{\Theta}^{0}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{r},\mathrm{t}),$$

где тензоры $\boldsymbol{\Theta}^{0}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})$ определены в отсчетном положении, т.е. в начальный момент времени.

Задержим свое внимание на выражении для кинетической энергии (5.4.10) и на понятии квазитвердого тела. При построении разного рода теорий в рациональной механике широко используется, хотя и в неявной форме, некий принцип, который трудно поддается формализации. Для краткости назовем его

Принцип телеобъектива. *Всякое тело $\mathcal{A}$ в рациональной механике должно рассматриваться с двух точек зрения. При написании фундаментальных законов и общих структур тела используется взгляд на тело издалека, т.е. в кадр телеобъектива входит очень много частиц тела. При этом тело из-за использования малых масштабов воспринимается как нечто единое целое, например видится сплошным. При определении параметров, входящих в общие*

структуры тела и определяемых микроструктурой тела, нужно рассматривать тело в резко увеличенном виде, когда в кадр телеобъектива входит только одна частица со всеми ее особенностями.

На первый взгляд кажется, что "*Принцип телеобъектива*" совмещает несовместимое и противоречив в логическом отношении. Но следует иметь в виду, что все плодотворные теории в механике, которые многократно проверены на практике, построены с использованием этого принципа. Например, при построении общей теории стержней последний рассматривается как одномерная упругая линия, лишенная толщины. Это типичный пример взгляда издалека, при котором стержень воспринимается как линия. При этом оказывается возможным построить полную и замкнутую теорию стержней. Однако в эту теорию будут входить, в частности, такие динамические характеристики, как плотность массы (масса на единицу длины) и тензоры инерции. Для их определения уже необходимо рассматривать стержень как трехмерный объект, т.е. рассматривать стержень с очень близкого расстояния. Следует также иметь в виду, что увеличение формальной строгости той или иной теории ведет к увеличению ее бесполезности. Абсолютно строгие теории, которые, естественно, не встречаются, абсолютно бесполезны. Искусство ученого-механика и, особенно, инженера-исследователя состоит в установлении правильного баланса между строгостью и полезностью: необходимо максимизировать строгость теории при сохранении ее полезности.

Проиллюстрируем "*Принцип телеобъектива*" на рассматриваемом случае квазитвердого тела. На рис. 5.1 представлены обе точки зрения. Рис. 5.1,а представляет взгляд на квазитвердое тело издалека. На рис. 5.1,б изображена одна из односпиновых частиц квазитвердого тела, которая сама является абсолютно твердым телом. Ее тензор инерции находится по формуле (5.3.6)

$$\mathfrak{m}_r\,\boldsymbol{\Theta}_r = -\,\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\cdot\int\limits_{(\mathfrak{m}_r)}\mathbf{S}_r^2\,d\,\mathfrak{m}\;\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{r},t) = \tag{5.4.11}$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{r},t)\cdot\int\limits_{(\mathfrak{m}_r)}[\boldsymbol{\rho}_r(\mathbf{x},0)\cdot\boldsymbol{\rho}_r(\mathbf{x},0)\mathbf{E} - \boldsymbol{\rho}_r(\mathbf{x},0)\otimes\boldsymbol{\rho}_r(\mathbf{x},0)]\,d\,\mathfrak{m}_r(\mathbf{x})\;\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{r},t),$$

где $\mathfrak{m}_r$ — масса частицы, которая в отсчетном положении занимала место $\mathbf{r}$.

Обратим внимание, что интегрирование в (5.4.11) ведется по массе частицы, а $\mathbf{x}$ есть внутренняя переменная интегрирования, о которой ничего не знает интеграл (5.4.10). Если все частицы, составляющие квазитвердое тело одинаковы, то $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_0$, $\boldsymbol{\rho}_r = \boldsymbol{\rho}_0$ и массовая плотность тензоров инерции $\boldsymbol{\Theta}_r$ частиц зависит от координаты $\mathbf{r}$ только через тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$.

Итак, пусть кинетическая энергия квазитвердого тела дается выражением (5.4.10). Количество движения и кинетический момент этого тела вычисляются

по формулам (5.2.9) и (5.2.10). Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} d\, m = \int\limits_{(m)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\, m = \\ = \int\limits_{(m)} [\mathbf{v}_O - (\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{R}_O(t)) \times \mathbf{E}]\, dm \cdot \boldsymbol{\omega}_Q.$$

Вычисляя последний интеграл, получаем

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\mathbf{v}_O(t) + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q(t), \quad \mathbf{B} = m\,(\mathbf{R}_O(t) - \mathbf{R}_C(t)) \times \mathbf{E}.$$

Видим, что количество движения квазитвердого тела в точности совпадает с количеством движения абсолютно твердого тела. Вычислим кинетический момент квазитвердого тела

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \int\limits_{(m)} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right] dm = \int\limits_{(m)} \left[(\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}}\right] dm + \\ + \int\limits_{(m)} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_O) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right] dm = \\ = (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \int\limits_{(m)} [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_O) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\Theta}_r \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)]\, dm.$$

Последний интеграл в этом выражении представляет собой динамический спин квазитвердого тела, который в общем случае упростить невозможно. Примем, что все частицы тела одинаковы и одинаково вращаются

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(t), \quad \boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\omega}(t).$$

При этих условиях кинетический момент квазитвердого тела легко вычисляется и имеет вид

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q(t) + m\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t). \tag{5.4.12}$$

Первые три слагаемые в правой части (5.4.12) дают кинетический момент квазитвердого тела, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Последнее слагаемое дает суммарный динамический микроспин частиц, составляющих квазитвердое тело. Чтобы сравнить вклады каждого из слагаемых, примем, что и само тело и частицы имеют шарообразную форму. В качестве полюса

$\mathbf{R}_O$ выбираем центр инерции тела. Тогда тензоры инерции легко вычисляются и определяются формулами

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Theta} = \frac{2}{5} m a^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{\Theta}_0 = \frac{2}{5} b^2 \mathbf{E},$$

где a и b радиусы тела и частицы соответственно, причем $a >> b$.

Следует обратить внимание, что тензоры $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{\Theta}_0$ имеют разные физические размерности, поскольку тензор $\mathbf{\Theta}_0$ есть массовая плотность спинорной инерции. Теперь кинетический момент (5.4.12) принимает вид

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \frac{2}{5} m a^2 \boldsymbol{\omega}_Q(t) + \frac{2}{5} m b^2 \boldsymbol{\omega}(t). \qquad (5.4.13)$$

Если модули угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_Q(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеют одинаковый порядок, то динамическим микроспином можно пренебречь и квазитвердое тело по своим динамическим структурам не отличается от абсолютно твердого тела. Если же $|\boldsymbol{\omega}(t)| >> |\boldsymbol{\omega}_Q(t)|$, то динамическим микроспином пренебрегать нельзя. Легко видеть, что квазитвердое тело переходит в абсолютно твердое тело при $b \to 0$, когда односпиновая частица переходит в материальную точку. Таким образом, “парадокс”, указанный в начале этого параграфа, нашел свое разрешение.

5.5. Тензоры инерции твердого тела и их свойства

Согласно выражениям (5.3.5) и (5.3.6) тензоры инерции абсолютно твердого тела зависят от трех факторов: 1) движения тела; 2) выбора полюса в теле; 3) распределения массы в теле. Только последний фактор является неотъемлемым атрибутом тела, а первые два фактора связаны с внешними обстоятельствами. Важно в явном виде выделить влияние каждого из этих факторов. Сначала установим вид зависимости тензоров инерции от движения. Для этого достаточно воспользоваться формулами (5.3.5), (5.3.6) и основным уравнением кинематики (5.3.1). Учитывая, что тензор поворота не зависит от точек тела, получаем

$$\mathbf{B}^{(X)}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{B}_0^{(X)} \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \mathbf{B}_0^{(X)} = m\ (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}, \qquad (5.5.1)$$

где тензор $\mathbf{B}_0^{(X)}$ вычислен в отсчетном положении, которое не зависит от движения и выбирается произвольно; тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ показывает поворот тела относительно отсчетного положения, все эти понятия подробно обсуждались в предыдущей главе; векторы $\mathbf{r}_X$ и $\mathbf{r}_C$ задают положения полюса и центра масс в отсчетном положении.

Аналогичные формулы справедливы и для эйлерова тензора инерции

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t), \quad \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} = -\int\limits_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X)\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}). \tag{5.5.2}$$

Тензоры инерции $\mathbf{B}_0^{(X)}$ и $\boldsymbol{\Theta}_0^{(X)}$ не зависят от движения и являются характеристиками рассматриваемого тела, но они по-прежнему зависят от выбора полюса в теле. Атрибутом тела является его центр масс. Если последний выбрать в качестве полюса, то тензор $\mathbf{B}_0^{(C)}$ обращается в нулевой тензор, а эйлеров тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}_0^{(C)}$ в этом случае называется центральным тензором инерции, который может служить паспортной характеристикой тела. Посмотрим как меняется эйлеров тензор инерции при замене полюса. Наряду с полюсом X рассмотрим другой полюс Y. Тогда имеем

$$\boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} = -\int\limits_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y + \mathbf{r}_Y) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y + \mathbf{r}_Y)\, \mathrm{d}\, m = \\ = (\mathbf{r}_Y - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{B}_0^{(X)} + \mathbf{B}_0^{(Y)} \times (\mathbf{r}_Y - \mathbf{r}_X) + \boldsymbol{\Theta}_0^{(Y)}. \tag{5.5.3}$$

Особый интерес представляет случай, когда полюс Y совпадает с центром масс тела. В этом случае имеем

$$\boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} = -m\,(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) - \int\limits_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)\, \mathrm{d}\, m. \tag{5.5.4}$$

Последнее слагаемое в правой части последнего выражения есть центральный тензор инерции, вычисленный относительно центра масс C. Чтобы выяснить смысл первого слагаемого в правой части равенства (5.5.4), рассмотрим частный случай твердого тела. Пусть абсолютно твердое тело состоит из безмассового стержня, длина l которого равна $|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X|$, и прикрепленной к одному концу стержня сосредоточенной массы m. Свободный конец стержня закреплен с помощью сферического шарнира в точке $\mathbf{r}_X$. В отсчетном положении конец стержня с массой m расположен в точке $\mathbf{r}_C$. Эйлеров тензор инерции рассмотренного тела в отсчетном положении вычисляется по формуле (5.5.2), в которой интегрирование по массе должно пониматься в смысле интеграла Стилтьеса [48]

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -m\, l^2 \mathbf{e} \times \mathbf{E} \times \mathbf{e} = m l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) l^{-1}. \tag{5.5.5}$$

Таким образом, эйлеровы тензоры инерции $\boldsymbol{\Theta}_0^{(X)}$ и $\boldsymbol{\Theta}_0^{(C)}$, вычисленные относительно полюсов X и C, т.е относительно точек $\mathbf{r}_X$ и $\mathbf{r}_C$, соответственно,

связаны между собой простой зависимостью

$$\boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} = m l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \boldsymbol{\Theta}_0^{(C)}, \tag{5.5.6}$$

где единичный вектор $\mathbf{e}$ направлен от точки $\mathbf{r}_X$ к точке $\mathbf{r}_C$, а l есть расстояние между этими точками, т.е. $l = |\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C|$.

Это представление можно переписать в актуальной конфигурации

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)} = m l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}') + \boldsymbol{\Theta}^{(C)}, \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \tag{5.5.7}$$

Представления (5.5.6) и (5.5.7) в некоторых книгах по механике [39] называют ***теоремой Гюйгенса–Штейнера***.

Вернемся к выражению для кинетической энергии абсолютно твердого тела (5.3.4) и перепишем его в следующем виде

$$K = \frac{m}{2}\left(\mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) + \\ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\boldsymbol{\Theta}^{(X)} - \frac{1}{m}(\mathbf{B}^{(X)})^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{B}^{(X)}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Нетрудно видеть смысл величин, входящих в это уравнение

$$\mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_C,$$

где $\mathbf{v}_C$ есть скорость центра масс.

Для тензора инерции, входящего во второе слагаемое в кинетической энергии, имеем

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)} - \frac{1}{m}(\mathbf{B}^{(X)})^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{B}^{(X)} \equiv \boldsymbol{\Theta}^{(X)} + m\,(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) = \boldsymbol{\Theta}^{(C)}, \tag{5.5.8}$$

где тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(C)}$ есть центральный тензор инерции.

Подставляя выражение (5.5.8) и предыдущее равенство в формулу для кинетической энергии, получаем

$$K = \frac{m}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(C)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(C)} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{5.5.9}$$

где использован левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}$, а тензор $\boldsymbol{\Theta}_0^{(C)}$ есть центральный тензор инерции, вычисленный в отсчетном положении.

В представлении (5.5.9) легко узнается частный случай теоремы Кенига. На первый взгляд кажется, что выражение (5.5.9) проще, чем выражение (5.3.4), но это не всегда так. Например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной

точки в качестве полюса удобно выбирать именно неподвижную точку. Тогда скорость полюса $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и выражение (5.3.4) принимает совсем простой вид

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{5.5.10}$$

где тензор инерции вычислен относительно неподвижной точки X.

Введем в рассмотрение важное понятие момента инерции относительно оси, натянутой на единичный вектор $\mathbf{n}$ и проходящей через ту точку тела, относительно которой вычислен тензор инерции

$$J_n^{(X)} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(X)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} \cdot \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n}_0. \tag{5.5.11}$$

В выражении (5.5.11) вектор $\mathbf{n}_0$ определяет фиксированную материальную ось в теле в отсчетном положении, а вектор $\mathbf{n}$ определяет ту же материальную ось в актуальной конфигурации, т.е. вектор $\mathbf{n}$ вращается вместе с телом.

Физический смысл момента инерции сразу же усматривается из выражения для кинетической энергии, например, (5.5.10). Действительно, представим вектор угловой скорости в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{m}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \omega\mathbf{m}_0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_0,$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет мгновенную ось вращения.

Тогда кинетическая энергия (5.5.10) принимает вид

$$K = \frac{1}{2} J_m^{(X)} \omega^2, \quad J_m^{(X)} \equiv \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(X)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} \cdot \mathbf{m}_0. \tag{5.5.12}$$

Отличие момента инерции $J_m^{(X)}$ в (5.5.12) от момента $J_n^{(X)}$ в (5.5.11) состоит в том, что $J_m^{(X)}$ вычисляется относительно той материальной оси в теле, которая в данный момент времени совпадает с мгновенной осью вращения. Поэтому, в отличие от момента инерции $J_n^{(X)}$, момент инерции $J_m^{(X)}$ зависит от времени, поскольку в разные моменты времени он вычисляется относительно разных осей в теле. Тем не менее, из выражения (5.5.12) видим, что момент инерции определяет инерционность тела по отношению к спинорному движению точно так же, как масса определяет инерционность тела по отношению к трансляционному движению. Однако здесь имеется существенная разница: масса тела не зависит от движения, а момент инерции $J_m^{(X)}$ зависит от движения, т.е. зависит от времени.

По определению момента инерции видим, что он зависит от точки, относительно которой вычисляется тензор инерции. Особое значение имеет центральный момент инерции, который вычисляется по формуле (5.5.11) при выборе полюса совпадающим с центром масс

$$J_n^{(C)} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(C)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(C)} \cdot \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n}_0.$$

Изменение момента инерции при изменении полюса сразу же следует из определения момента инерции (5.5.11) и формулы (5.5.7). После скалярного умножения уравнения (5.5.7) на вектор **n** слева и справа, получим

$$J_n^{(X)} = J_n^{(C)} + m\,D^2, \quad D^2 = l^2 \sin^2\alpha, \tag{5.5.13}$$

где D есть расстояние между осями, натянутыми на единичный вектор **n** и проходящими через полюса X и C, α есть угол между векторами **n** и $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_X$, l есть расстояние $|\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_X|$.

Выражение (5.5.13) фигурирует в учебниках по механике под названием ***теоремы Гюйгенса–Штейнера***. Нетрудно получить связь между моментами инерции относительно параллельных осей, проходящих через произвольно выбираемые полюса X и Y. Для этого достаточно записать выражение (5.5.13) для полюса Y и исключить из него с помощью (5.5.13) центральный момент инерции. В результате получим

$$J_n^{(X)} = J_n^{(Y)} + m\,\left(D_1^2 - D_2^2\right),$$

где D_1 и D_1 суть расстояния от осей, проходящих через полюса X и Y соответственно, до центра масс.

Как уже отмечалось, работать с величинами, зависящими от движения, не очень удобно. Вместе с тем, в соответствии с формулами (5.5.2), вместо тензора инерции в актуальном положении можно изучать эйлеров тензор в отсчетном положении. Именно так мы и будем поступать ниже. Эйлеров тензор инерции в отсчетном положении и вычисленный относительно произвольно выбранного полюса X определен второй из формул (5.5.2). Как видно из определения этот тензор симметричен и неотрицательно определен. Перепишем выражение для эйлерова тензора инерции в эквивалентном виде

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \int\limits_{(m)} \left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2\mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X)\right)\, \mathrm{d}\,m. \tag{5.5.14}$$

Покажем, что этот тензор действительно неотрицательно определен

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{a} = \int\limits_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2\, a^2(1 - \cos^2\alpha)\,\mathrm{d}\,m \geq 0, \quad \forall\,\mathbf{a}:\ \mathbf{a} \neq \mathbf{0},$$

где α есть угол между векторами **a** и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_X$.

Как известно, любой симметричный тензор второго ранга допускает спектральное разложение

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_1\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_k = \delta_{ik}. \tag{5.5.15}$$

Оси, натянутые на собственные векторы $\mathbf{d}_k$, называются главными осями инерции. Главные оси инерции пересекаются в точке $\mathbf{r}_\chi$. Собственные числа Θ_k называются главными моментами инерции. Они вычисляются относительно главных осей инерции. Главные моменты инерции тела будем нумеровать так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \le \Theta_1 \le \Theta_2 \le \Theta_3. \tag{5.5.16}$$

Если все главные моменты инерции тела различны, то собственные диады $\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i$ определяются однозначно. Если два главных момента инерции совпадают, то однозначно находится только та собственная диада, которая соответствует некратному собственному числу. Пусть, например, $\Theta_1 = \Theta_2 \le \Theta_3$. Тогда вместо (5.5.16) будем иметь

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_1 \left(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3\right) + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \tag{5.5.17}$$

Такой тензор называется трансверсально изотропным с осью изотропии, натянутой на вектор $\mathbf{d}_3$. Объяснение смысла подобного названия будет дано позднее. Если все три главных момента инерции совпадают, то тензор инерции приобретает совсем простой вид

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_1 \, \mathbf{E}. \tag{5.5.18}$$

Тензор вида (5.5.18) называется изотропным или шаровым.

Помимо неотрицательности тензор инерции обладает еще одним замечательным свойством. Главные моменты инерции вычисляются по тензору инерции следующим образом

$$\Theta_i = \mathbf{d}_i \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{d}_i \quad \Rightarrow \quad \Theta_i = \int\limits_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi|^2 \left(1 - \cos^2 \alpha_i\right) \mathrm{d}\, m, \tag{5.5.19}$$

где α_i есть угол между векторами $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi$.

Составим комбинацию

$$\Theta_i + \Theta_j - \Theta_k = 2 \int\limits_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi|^2 \, \cos^2 \alpha_k \, \mathrm{d}\, m \ge 0, \quad i \ne j \ne k \ne i.$$

Таким образом, получили неравенства

$$\Theta_1 + \Theta_2 \ge \Theta_3, \quad \Theta_2 + \Theta_3 \ge \Theta_1, \quad \Theta_1 + \Theta_3 \ge \Theta_2. \tag{5.5.20}$$

Из неравенств (5.5.20) следует, что тензор инерции может иметь не более одного нулевого момента инерции. Более того, в случае одного нулевого главного момента инерции два других момента инерции обязаны совпадать между собой. Примером тензора инерции такого рода является тензор (5.5.5).

Главные моменты инерции являются объективными характеристиками тела и не зависят от движения тела. Через главные моменты инерции легко вычислить момент инерции относительно произвольной оси, натянутой на единичный вектор $\mathbf{n}$ и проходящей через полюс, т.е. через точку тела, относительно которой вычисляется тензор инерции. Имеем очевидную формулу

$$\Theta_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{n} = \Theta_1 \cos^2 \alpha_1 + \Theta_2 \cos^2 \alpha_2 + \Theta_3 \cos^2 \alpha_3,$$

$$\mathbf{n} = \cos \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{d}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{d}_3. \tag{5.5.21}$$

Из равенств (5.5.21) и (5.5.16) следуют минимаксные свойства главных моментов инерции

$$\Theta_1 \le \Theta_{(n)} \le \Theta_3.$$

Следует обратить внимание, что зависимость тензора инерции от выбора полюса, относительно которого он вычисляется, является весьма серьезным фактором. Например, центральный тензор инерции шара из однородного материала является шаровым. Но тензор инерции того же шара, вычисленный относительно точки, отличной от центра масс, будет уже трансверсально изотропным.

Теорема: *для любого тела существует такой полюс, относительно которого тензор инерции является трансверсально изотропным, причем ось изотропии совпадает с главной осью центрального тензора инерции, отвечающей наибольшему моменту инерции.*

Доказательство. *Рассмотрим центральный тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}^{(C)}$. Представим его в виде спектрального разложения (5.5.15). Выберем теперь другой полюс и вычислим соответствующий ему тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}_*$. Между тензорами $\boldsymbol{\Theta}^{(C)}$ и $\boldsymbol{\Theta}_*$ существует связь, установленная формулой (5.5.6)*

$$\boldsymbol{\Theta}_* = m l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \tag{5.5.22}$$

где $\mathbf{e}$ направлен от центра масс к новому полюсу, l — расстояние от центра масс до нового полюса.

Выберем теперь новый полюс так, чтобы вектор $\mathbf{e}$ совпадал бы с вектором $\mathbf{d}_2$. Тогда вместо (5.5.22) получим

$$\boldsymbol{\Theta}_* = (\Theta_1 + m l^2) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + (\Theta_3 + m l^2) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \tag{5.5.23}$$

Сославшись на неравенства (5.5.16), выберем величину l так, чтобы выполнялось равенство

$$\Theta_1 + m l^2 = \Theta_2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{m}}.$$

Подставляя это значение l *в равенство (5.5.23), получаем утверждение теоремы*

$$\boldsymbol{\Theta}_* = \Theta_2\,(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\Theta_3 + \mathrm{m}\mathrm{l}^2)\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 = \Theta_2\mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1)\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Выше было введено понятие центрального тензора инерции абсолютно твердого тела. Центральный тензор инерции вычислен относительно центра масс тела и может служить паспортной характеристикой тела. Посмотрим на центральный тензор инерции с другой точки зрения. А именно, будем искать такой полюс в теле, относительно которого тензор инерции обладает минимальными моментами инерции. В отсчетном положении выберем единичный вектор $\mathbf{k}$, который будем считать фиксированным. Вычислим момент инерции тела относительно оси, натянутой на вектор $\mathbf{k}$ и проходящей через полюс $\mathbf{r}_\chi$

$$\mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\chi) = -\mathbf{k} \cdot \int\limits_{(\mathrm{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k} \geq 0. \tag{5.5.24}$$

Наряду с полюсом $\mathbf{r}_\chi$ рассмотрим другой полюс $\mathbf{r}_\chi + \mathbf{y}$, отстоящий от полюса $\mathbf{r}_\chi$ на вектор $\mathbf{y}$. Вычислим момент инерции относительно нового полюса

$$\mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\chi + \mathbf{y}) = -\mathbf{k} \left[\cdot \int\limits_{(\mathrm{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi - \mathbf{y}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi - \mathbf{y})\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{k} =$$

$$= \mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\chi) + \mathrm{m}\,\left(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})^2\right) +$$

$$+ \mathbf{k} \cdot \left(\int\limits_{(\mathrm{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E} \times \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{y} \times \mathbf{E} \times \int\limits_{(\mathrm{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{k}.$$

Выберем полюс $\mathbf{r}_\chi$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{(\mathrm{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\chi)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_\chi = \frac{1}{\mathrm{m}} \int\limits_{(\mathrm{m})} \mathbf{r})\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}_\mathrm{c}.$$

Теперь предыдущее равенство принимает вид

$$\mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\mathrm{c} + \mathbf{y}) = \mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\mathrm{c}) + \mathrm{m}\,\left(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})^2\right) \geq \mathrm{J}_\mathrm{k}(\mathbf{r}_\mathrm{c}),$$

причем знак равенства достигается либо при $\mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$, либо при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Выражение (5.5.) справедливо при любом выборе вектора $\mathbf{y}$. Таким образом, доказана

Теорема: *момент инерции тела, вычисленный относительно произвольной оси, принимает минимальное значение, когда в качестве полюса выбирается центр масс тела.*

Эта теорема находит приложение на практике при динамическом определении центра масс. Введем еще несколько понятий, которые используются, как в теоретических построениях, так и в прикладных вопросах. Прежде всего, речь идет о понятии радиуса инерции. Момент инерции имеет размерность *масса* $\times$ *квадрат длины*. Поэтому его можно представить в следующем виде

$$J_k(\mathbf{r}_X) = m\,\rho_k^2 = m\,\kappa_k^{-2}, \quad \kappa_k = \rho_k^{-1},$$

где вводимая по определению величина ρ_k называется радиусом инерции, а величина κ_k — модулем инерции [39].

Наконец, центробежным моментом инерции называется [39, 41] величина

$$\Theta_{mn} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\Theta}_0\cdot\mathbf{n}, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Центробежные моменты инерции появляются, если мы хотим воспользоваться произвольным ортогональным базисом $\mathbf{d}_i : \mathbf{d}_i\cdot\mathbf{d}_j = \delta_{ij}$ для представления тензора инерции

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_{11}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1+\Theta_{12}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2+\Theta_{13}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_3+\Theta_{21}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_1+\Theta_{22}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2+\Theta_{23}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3+ \\ +\Theta_{31}\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_1+\Theta_{32}\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_2+\Theta_{33}\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_3, \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ji}.$$

В этом представлении координаты Θ_{ii} называются осевыми моментами инерции, а координаты Θ_{ij} называются центробежными моментами инерции.

5.6. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела

Вернемся к обсуждению различных форм записи кинетической энергии для абсолютно твердого тела. Как отмечалось в предыдущем параграфе тензор инерции в отсчетном положении может быть записан в виде спектрального разложения (5.5.15)

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_1\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1+\Theta_2\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2+\Theta_3\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_3.$$

В актуальном положении тензор инерции также имеет спектральное разложение

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Theta}_0\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \Theta_1\mathbf{D}_1\otimes\mathbf{D}_1+\Theta_2\mathbf{D}_2\otimes\mathbf{D}_2+\Theta_3\mathbf{D}_3\otimes\mathbf{D}_3, \quad \mathbf{D}_i \equiv \mathbf{P}\cdot\mathbf{d}_i. \quad (5.6.1)$$

В представлении (5.6.1) векторы $\mathbf{D}_i$ суть собственные векторы тензора инерции в актуальном положении. Очевидно, что они являются вращающимися

вместе с телом собственными векторами $\mathbf{d}_i$, которые фиксированы относительно тела. Левую и правую угловые скорости можно представить в виде следующих разложений по главным осям тензоров инерции

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{D}_i, \quad \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \mathbf{d}_i, \quad \omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}_i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{d}_i = \Omega_i. \tag{5.6.2}$$

Видим, что координаты левой угловой скорости относительно главных осей тензора инерции в актуальном положении совпадают с координатами правой угловой скорости относительно главных осей тензора инерции в отсчетном положении. Иными словами, положение левой угловой скорости относительно вращающегося тела точно такое же, как и положение правой угловой скорости относительно отсчетного положения тела. Напомним, что модули левой и правой угловых скоростей одинаковы. Используя вышеприведенные разложения и подставляя их в выражение для кинетической энергии (5.5.9), получаем

$$K = \frac{m}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \Theta_i \omega_i^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \Theta_i \Omega_i^2, \tag{5.6.3}$$

где Θ_i суть главные центральные моменты инерции.

Если тело вращается вокруг неподвижной точки, то удобнее пользоваться выражением для кинетической энергии (5.5.10). Оно получается из представления (5.6.3) при $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \Theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \Theta_i \Omega_i^2,$$

где Θ_i суть главные моменты инерции, вычисленные относительно неподвижной точки, т.е. они отличаются от моментов инерции, входящих в (5.6.3), если неподвижная точка не совпадает с центром масс.

Представление (5.6.3) дает ясное представление о различии вкладов в кинетическую энергию абсолютно твердого тела трансляционного и спинорного движений. Зависимость кинетической энергии от трансляционной скорости является изотропной, т.е. энергия этого движения не зависит от направления трансляционной скорости по отношению к телу, а зависит только от квадрата модуля трансляционной скорости. Зависимость кинетической энергии от спинорного движения (угловой скорости) является анизотропной, т.е. энергия спинорного движения зависит не только от величины угловой скорости, но и от ее направления по отношению к телу. При заданном модуле угловой скорости, энергия минимальна, когда вращение происходит вокруг оси с минимальным моментом инерции. Напротив, энергия максимальна, когда вращение происходит вокруг оси с максимальным моментом инерции.

5.7. Вычисление тензоров инерции простейших тел

Рассмотрим тело $\mathcal{A}$, состоящее из n материальных точек с массами m_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тело $\mathcal{A}$ считаем абсолютно твердым. Так будет, если все материальные точки соединены между собой нерастяжимыми безмассовыми (безынерционными) стержнями. В качестве полюса выбираем произвольную точку P, расстояние от которой до любой из материальных точек в процессе движения тела $\mathcal{A}$ остается неизменным. Вычислим эйлеров тензор инерции тела $\mathcal{A}$ в отсчетном положении. Для этого необходимо воспользоваться его определением (5.5.2)

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -\int\limits_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P)\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}),$$

где интегрирование ведется по всему пространству, но в тех точках, где массы отсутствуют, нужно принять $\mathrm{d}m(\mathbf{r}) = 0$; в точках расположения масс нужно принять $\mathrm{d}m(\mathbf{r}_k) = m_k$.

Тогда интеграл (5.5.2) превращается в сумму

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -\sum_{k=1}^{n} m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) = \\ = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P|^2\, \mathbf{E} - (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_P) \right). \quad (5.7.1)$$

В данном случае вычисление тензора инерции свелось к простой операции суммирования. Полезно запомнить тензор инерции (5.7.1) для случая, когда тело $\mathcal{A}$ состоит из одной материальной точки, отстоящей от полюса на расстояние l. В этом случае выражение (5.7.1) принимает вид

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = m\, l^2 \left(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right), \quad (5.7.2)$$

где единичный вектор $\mathbf{e}$ направлен от полюса к материальной точке.

Вычислим тензор инерции тонкого стержня из однородного материала. Массу стержня обозначим через m. Положение стержня в отсчетной конфигурации определяется заданием вектора

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_a + s\, \mathbf{e}, \quad 0 \le s \le l,$$

где вектор $\mathbf{r}_a$ определяет положение одного из концов стержня; единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет направление стержня и координата s отсчитывается от точки стержня, определяемой вектором $\mathbf{r}_a$.

Выбирая в качестве полюса точку стержня с координатой s_*, получаем

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_P = (s - s_*)\mathbf{e}.$$

Кроме того, учтем, что $dm(s) = (m/l)ds$. Таким образом, тензор инерции стержня вычисляется по совсем простой формуле

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -\frac{m}{l}\mathbf{e} \times \mathbf{E} \times \mathbf{e} \int_0^l (s - s_*)^2 \, ds = -\frac{m}{l}\frac{(l - s_*)^3 + s_*^3}{3}\mathbf{e} \times \mathbf{E} \times \mathbf{e}. \qquad (5.7.3)$$

Момент инерции стержня относительно его оси, который называют осевым моментом инерции, равен нулю

$$J_e = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку s_* стержня ортогонально оси стержня, вычисляется по формуле

$$J_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{m} = \frac{m}{l}\frac{(l - s_*)^3 + s_*^3}{3}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Этот момент инерции часто называют экваториальным моментом инерции. Он достигает своего минимума при $s_* = l/2$, что соответствует центру масс стержня, т.е. центральному тензору инерции. Экваториальный момент инерции достигает своего максимального значения, когда полюс выбирается на одном из концов стержня, т.е. при $s_* = 0$ или $s_* = l$. Таким образом, имеем

$$J_m|_{s_*=l/2} = \frac{ml^2}{12}, \quad J_m|_{s_*=0} = \frac{ml^2}{3}.$$

Видим, что момент инерции существенно зависит от выбора полюса. В рассматриваемом случае он меняется в четыре раза. “Вращательная инерция” тела оказывается наименьшей, когда тело вращается вокруг своего центра масс. Центральный тензор инерции для тонкого стержня имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \frac{ml^2}{12}\left(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\right).$$

Легко вычисляются тензоры инерции составных тел, если известны тензоры инерции каждого из тел, входящего в составное тело. Это будет простая сумма тензоров инерции. Вычислим, например, центральный тензор инерции гантели, состоящей из стержня длины $2l$ и массы m и двух материальных точек массой M каждая, закрепленных на концах стержня. В рассматриваемом случае центральный тензор инерции гантели есть сумма центрального тензора

инерции стержня, определяемого формулой (5.7.3) при замене l на $2l$, и двух тензоров инерции (5.7.2). Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = -\left(\frac{ml^2}{3} + 2Ml^2\right)\mathbf{e}\times\mathbf{E}\times\mathbf{e} = \left(\frac{ml^2}{3} + 2Ml^2\right)(\mathbf{E} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}).$$

Из приведенных выше примеров видим, что вычисление тензоров инерции для тел, состоящих из материальных точек и прямолинейных стержней, как, впрочем, и стержней произвольного вида, является весьма простой задачей, т.к. она сводится либо к простому сложению, либо к вычислению одномерных интегралов. В общем случае вычисление тензора инерции абсолютно твердого тела сводится к вычислению тройных интегралов по объему, занятому телом. Это уже более сложная задача, но часто она может быть значительно упрощена, если воспользоваться специальными приемами и соображениями симметрии, описанию которых излагается в следующем пункте.

5.8. Группы симметрии. Принцип Кюри–Неймана

Симметрия — одно из важнейших и древнейших представлений как в искусстве, так и в науке. Аргументы, основанные на соображениях симметрии, всегда считались весьма убедительными и достоверными, поскольку с аргументами такого рода легко соглашается наша интуиция. Приложения теории симметрии в физике чрезвычайно обширны, а сама теория симметрии по праву занимает одно из центральных мест в любой рациональной науке. В данном пункте описываются простейшие приложения теории симметрии к определению тензоров инерции. Введем в рассмотрение понятие о группе симметрии тензора второго ранга. При этом достаточно подробно будем рассматривать только полярные тензоры второго ранга [18], каковым и является тензор инерции.

Введем понятие ортогонального преобразования тензоров разных рангов. Пусть дан ортогональный тензор $\mathbf{Q}$

Определение: *ортогональными преобразованиями скаляра* g*, вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора второго ранга* $\mathbf{A}$ *называются соответственно величины*

$$g' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha} g, \quad \mathbf{a}' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}, \quad \mathbf{A}' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}, \qquad (5.8.1)$$

где $\alpha = 0$ *для полярных объектов и* $\alpha = 1$ *для аксиальных объектов.*

Для полярных объектов вводимое определение ортогонального преобразования совпадает с общепринятым. Для аксиальных объектов оно было впервые введено в работе [16]. Для иллюстрации естественности вводимого определения ортогонального преобразования аксиальных объектов рассмотрим два

простых примера. Рассмотрим аксиальный скаляр

$$\mathrm{f} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Пусть векторы **a**, **b**, **c** полярны. Тогда ортогональное преобразование скаляра f можно определить непосредственно

$$\mathrm{f}' = \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c})] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}) \cdot [(\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \\ = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathrm{f}.$$

Здесь мы использовали тождество [18]

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

В результате пришли к определению (5.8.1). Типичным примером аксиального вектора является векторное произведение двух полярных векторов. В этом случае также возможно дать определение ортогонального преобразования непосредственно на основе определения ортогонального преобразования полярных векторов

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}.$$

Аналогично можно объяснить определение ортогональных преобразований для тензоров любого ранга [16].

Обратимся к введению важного физического понятия симметрии объектов. Интуитивное представление о симметриях тел имеется практически у каждого человека. Но в рациональной науке эти интуитивные представления должны быть однозначно определены в математической форме. Например, физической операции зеркального отражения, осуществляемой с помощью реального зеркала, должна соответствовать математическая операция, в которой реальному зеркалу должен соответствовать однозначно определенный математический объект. Реальному зеркалу соответствует плоскость, совпадающая с плоскостью зеркала, которую обычно определяют заданием вектора единичной нормали **n**. Математический объект, точно соответствующий реальному зеркалу, действительно существует и определяется заданием тензора второго ранга

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E} \quad \det \mathbf{Q} = -1. \tag{5.8.2}$$

Если тензором зеркального отражения (5.8.2) подействовать на вектор **a**, то получим вектор $\mathbf{a}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$. Проекции векторов **a** и $\mathbf{a}_*$ на плоскость, ортогональную вектору **n**, совпадают, а проекции этих векторов на вектор **n** равны между собой по модулю, но противоположны по знаку.

Еще одним важным представлением о симметрии является симметрия тел относительно разного рода поворотов. Например, шар не меняется при произвольных поворотах вокруг своего центра. Этому представлению также отвечает вполне определенный математический объект, называемый тензором поворота, который в соответствии с теоремой Эйлера [18] может быть представлен в следующем виде

$$\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{m}) \equiv (1-\cos\varphi)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\cos\varphi\mathbf{E}+\sin\varphi\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}=\mathbf{E} \quad \det\mathbf{Q}=+1, \tag{5.8.3}$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет прямую, называемую осью поворота, а угол φ называется углом поворота.

Действие тензора поворота (5.8.3) на вектор $\mathbf{a}$ сводится к повороту этого вектора вокруг оси поворота на угол φ. Замечательным является тот факт, что любой элемент симметрии тела может быть представлен в виде композиции тензоров типа (5.8.2) и (5.8.3). Как видим, симметрии тел описываются тензорами второго ранга.

Определение: *группами симметрии скаляра* g*, вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора второго ранга* $\mathbf{A}$ *называются соответственно множества ортогональных решений уравнений*

$$\mathrm{g}' = \mathrm{g}, \quad (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}, \quad (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}, \tag{5.8.4}$$

где скаляр g*, вектор* $\mathbf{a}$ *и тензор второго ранга* $\mathbf{A}$ *считаются заданными, а ортогональные тензоры* $\mathbf{Q}$ *подлежат определению.*

Смысл введенного определения вполне ясен. Если ортогональное преобразование рассматриваемого объекта совпадает с исходным объектом, то ортогональный тензор, входящий в это преобразование, называется элементом симметрии данного объекта. Очевидно, что множество элементов симметрии объекта действительно образует группу. В самом деле, это множество не пусто, поскольку единичный тензор является элементом (тривиальным) симметрии любого объекта. Обратный элемент также существует для любого элемента симметрии. Осталось только убедиться, что если тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ являются элементами симметрии, то и их композиция $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{Q}_1$ является элементом симметрии, т.е. принадлежит к рассматриваемому множеству. Покажем это на примере тензора второго ранга $\mathbf{A}$. Пусть тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ являются элементами симметрии тензора $\mathbf{A}$, т.е. пусть они удовлетворяют уравнениям

$$(\det\mathbf{Q}_1)^{\alpha}\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}, \quad (\det\mathbf{Q}_2)^{\alpha}\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_2^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}. \tag{5.8.5}$$

Тогда имеем

$$(\det\mathbf{Q}_3)^{\alpha}\mathbf{Q}_3\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_3^{\mathsf{T}} = (\det\mathbf{Q}_2)^{\alpha}(\det\mathbf{Q}_1)^{\alpha}\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{Q}_2^{\mathsf{T}} = \\ = (\det\mathbf{Q}_2)^{\alpha}\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_2^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}.$$

Здесь мы дважды использовали уравнения (5.8.5) и убедились, что тензор $\mathbf{Q}_3$ принадлежит к множеству элементов симметрии. Таким образом, множество элементов симметрии обладает всеми признаками, позволяющими назвать это множество группой.

Опишем группы симметрии скаляров, векторов и симметричных тензоров второго ранга. Для скаляров непосредственно из определения видим, что группа симметрии абсолютного скаляра совпадает с полной ортогональной группой, а группа симметрии аксиального скаляра совпадает с собственно ортогональной группой.

Группа симметрии полярного вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, параллельных $\mathbf{a}$, т.е. из тензоров (5.8.3) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров (5.8.2) при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Группа симметрии аксиального вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных $\mathbf{a}$, т.е. из тензоров поворота (5.8.3) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров зеркальных отражений (5.8.2) при $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. При экспериментальной проверке этого факта с помощью зеркала следует вспомнить, что прообразом аксиального вектора является спин-вектор, а зеркало ничего не знает о соглашении об ориентации, которое существует только в наших головах. Поэтому при работе с зеркалом следует использовать не аксиальный вектор, а его прообраз, т.е. спин-вектор. Таким образом, группы симметрии полярных и аксиальных векторов существенно различны.

Группа симметрии симметричного полярного тензора второго ранга, все собственные числа которого различны, состоит из зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных собственным векторам этого тензора.

Здесь это понятие используется применительно к эйлерову тензору инерции, который является полярным тензором второго ранга.

Определение. *Группой симметрии тензора инерции* $\boldsymbol{\Theta}$ *называется множество ортогональных решений уравнения*

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\Theta}. \tag{5.8.6}$$

В определении (5.8.6) и до конца этого параграфа тензоры инерции рассматриваются в отсчетном положении. Если тензор инерции задан, то нетрудно найти его группу симметрии. Например, для шарового тензора инерции имеем

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q} \cdot (\Theta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \Theta \mathbf{E} = \boldsymbol{\Theta}, \quad \forall \mathbf{Q} : \ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}.$$

Иными словами группой симметрии шарового тензора является полная ортогональная группа. Знание даже отдельных элементов симметрии у тензора инерции позволяет получить важную информацию о его структуре.

Пример. *Допустим, что тензор инерции имеет одну плоскость зеркальной симметрии. Тензор зеркального отражения от плоскости, ортогональной единичному вектору* $\mathbf{n}$*, имеет вид*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}.$$

Поскольку этот тензор, по условию, является элементом симметрии тензора инерции, то справедливо равенство (5.8.6)

$$(\mathbf{E} - \mathbf{2n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{2n} \otimes \mathbf{n}) = \boldsymbol{\Theta}. \tag{5.8.7}$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{n}$*, получаем*

$$(\mathbf{E} - \mathbf{2n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n}) = -(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}.$$

Иными словами, если тензор инерции обладает зеркальной плоскостью симметрии, то вектор, ортогональный этой плоскости, является собственным вектором тензора инерции, а ось, ортогональная плоскости зеркальной симметрии, является главной осью тензора инерции. Допустим теперь, что тензор инерции обладает еще одной плоскостью зеркальной симметрии, ортогональной единичному вектору $\mathbf{m}$ *такому, что* $\mathbf{m} \times \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$*. Тогда вектор* $\mathbf{m}$ *также является собственным вектором тензора инерции. Таким образом, имеем два равенства*

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{m} = \mu \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Здесь возможны два случая.

Первый случай. Если $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \neq 0$*, то* $\lambda = \mu$*. В этом случае легко убедиться, что любой вектор, являющийся линейной комбинацией векторов* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{n}$*, является собственным вектором тензора инерции. Это означает, что в рассматриваемом случае имеется несчетное множество плоскостей зеркальной симметрии, пересекающихся по одной прямой, которая, в свою очередь, является главной осью тензора инерции. Этот факт вытекает из следующего рассуждения. Выберем пару ортогональных векторов* $\mathbf{d}_1$ *и* $\mathbf{d}_2$*, лежащих в плоскости, натянутой на векторы* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{n}$*. Тогда тензоры*

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = -(\mathbf{E} - 2\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3),$$

где $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$*, также являются элементами симметрии тензора инерции, а вектор* $\mathbf{d}_3$ *является собственным вектором тензора инерции.*

По теореме о спектральном разложении [18] тензора второго ранга имеем

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + \lambda_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 = \lambda(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) + \lambda_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \tag{5.8.8}$$

Тензоры такого строения называются трансверсально-изотропными с осью изотропии, натянутой на вектор $\mathbf{d}_3$. *Название объясняется тем, что тензор (5.8.8) не меняется при произвольных поворотах вокруг оси изотропии* $\mathbf{d}_3$. *Иными словами, тензор поворота*

$$\mathbf{Q} = (1 - \cos\varphi)\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\mathbf{d}_3 \times \mathbf{E}$$

принадлежит к группе симметрии тензора инерции. Вот такие удивительные следствия вытекают из существования у тензора инерции двух неортогональных между собой плоскостей зеркальной симметрии.

Второй случай. Если $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, *то* λ *уже не обязано равняться* μ. *В этом случае из существования двух плоскостей зеркальной симметрии вытекает только то, что тензор инерции обязан иметь вид*

$$\mathbf{\Theta} = \lambda\,\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mu\,\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \lambda_3\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \tag{5.8.9}$$

С другой стороны, эйлеров тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. Следовательно, для него справедлива теорема о спектральном разложении [18], из которой вытекает, что любой тензор второго ранга и тензор инерции в частности имеет, как минимум, три плоскости зеркальной симметрии. Заметим, что теорема о спектральном разложении никак не связана с соображениями симметрии, но она, в более узкой трактовке, может быть получена на основании соображений симметрии. В отличие от соображений симметрии, при доказательстве теоремы о спектральном разложении не использовалось допущение, что у тензора имеются какие-либо плоскости симметрии.

С учетом важности умения использовать соображения симметрии, приведем прямое построение полученных выше представлений. Итак, пусть тензор инерции имеет одну плоскость зеркальной симметрии, ортогональную единичному вектору $\mathbf{n}$. Введем в рассмотрение ортонормированную тройку векторов $\mathbf{d}_k$ такую, что $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1$. Тогда любой тензор второго ранга, не обязательно симметричный, может быть представлен в виде разложения

$$\mathbf{\Theta} = \Theta^{11}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1+\Theta^{12}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2+\Theta^{13}\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_3+\Theta^{21}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_1+\Theta^{22}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2+\Theta^{23}\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3+ \\ + \Theta^{31}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{32}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

По условию, тензор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_3$$

должен принадлежать к группе симметрии тензора $\mathbf{\Theta}$. Иными словами, при замене $\mathbf{d}_1$ на $(-\mathbf{d}_1)$ тензор $\mathbf{\Theta}$ не должен меняться. Так будет тогда и только тогда, когда

$$\Theta^{12} = \Theta^{21} = \Theta^{13} = \Theta^{31} = 0.$$

Тензор $\boldsymbol{\Theta}$ принимает вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta^{11}\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{22}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{23}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3 + \Theta^{32}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Пусть теперь тензор зеркального отражения $\mathbf{E} - 2\,\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2$ от плоскости ортогональной вектору $\mathbf{d}_2$ также принадлежит группе симметрии тензора $\boldsymbol{\Theta}$. Это возможно только при условии, что

$$\Theta^{23} = \Theta^{32} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} = \Theta^{11}\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{22}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Итак, если полярный тензор второго ранга обладает двумя ортогональными плоскостями зеркальной симметрии, то он симметричен и обладает, по крайней мере, тремя ортогональными между собой плоскостями зеркальной симметрии. Если этот тензор обладает еще одной плоскостью зеркальной симметрии, ортогональной единичному вектору $\mathbf{m}$, лежащему в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, и не совпадающему ни с одним из этих векторов, то такой тензор обязан быть трансверсально-изотропным $\Theta^{11} = \Theta^{22}$. Наконец, если имеется еще одна плоскость зеркальной симметрии, ортогональная вектору $\mathbf{n}$, который не ортогонален плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ и не лежит в этой плоскости, то такой тензор обязан быть шаровым или, что то же самое, изотропным. Итогом всего сказанного является

Теорема. *Если полярный тензор второго ранга обладает двумя не ортогональными между собой плоскостями симметрии, то он является трансверсально-изотропным с осью изотропии, являющейся линией пересечения плоскостей симметрии. Если полярный тензор второго ранга обладает тремя не ортогональными между собой плоскостями симметрии, то он является изотропным.*

Как было показано выше соображения симметрии дают очень много информации о строении рассматриваемого тензора. Эти соображения легко воспринимаются интуицией и способствуют ясной визуализации, в частности, тензора инерции. Проблема, однако, в том, что интуиция ничего не знает о тензоре инерции, ибо в Природе такого объекта самого по себе не существует. Тензор инерции возник в результате принятого способа описания (моделирования) природных объектов. Поэтому может показаться, что все вышеприведенные рассмотрения повисают в воздухе, ибо мы лишены возможности увидеть какие-бы то ни было элементы симметрии тензора инерции. Здесь нам на помощь приходит совершенно замечательный и чрезвычайно важный в физике

Принцип Кюри–Неймана: *группа симметрии причины принадлежит группе симметрии следствия.*

Применительно к тензорам инерции речь идет о следующем. Тензор инерции абсолютно твердого тела является характеристикой этого тела, т.е. явля-

ется следствием свойств тела. Тело является причиной, а его тензор инерции является следствием, вытекающем из строения самого тела. Вот на этом этапе и вступает в действие интуиция. Мы видим реальное тело и знаем о распределении массы внутри этого тела. Поэтому мы в состоянии увидеть (интуитивно ощутить) элементы симметрии реального тела. По *Принципу Кюри–Неймана* мы можем утверждать, что эти элементы симметрии обязательно принадлежат группе симметрии следствия, т.е. тензора инерции. Вместе с тем, *Принцип Кюри–Неймана* не утверждает, что группа симметрии следствия совпадает с группой симметрии причины, первая может быть значительно шире второй. Например, реальное тело может вообще не обладать плоскостями зеркальной симметрии. Но тензор инерции, согласно теореме о спектральном разложении, обязательно обладает тремя плоскостями зеркальной симметрии, ортогональными собственным векторам тензора инерции.

Обратимся к вычислению тензоров инерции конкретных тел и посмотрим, чем нам помогут соображения симметрии.

5.9. Тензоры инерции конкретных тел

Центральный тензор инерции полого шара из однородного материала. Рассмотрим шар радиуса $\mathfrak{a}$ с концентрической полостью радиуса $\mathfrak{b}$. Шар выполнен из равномерно распределенного однородного материала. Масса шара равна $\mathfrak{m}$. Эйлеров тензор инерции вычисляется по формуле (5.5.2)

$$\boldsymbol{\Theta} = -\int\limits_{(\mathfrak{m})} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathrm{c}}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathrm{c}})\, \mathrm{d}\,\mathfrak{m}(\mathbf{r}) = \int\limits_{(\mathfrak{m})} \left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathrm{c}}|^2\mathbf{E} - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathrm{c}}) \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathrm{c}})\right)\, \mathrm{d}\,\mathfrak{m}(\mathbf{r}). \quad (5.9.1)$$

В принципе, можно вычислить этот интеграл и найти тензор инерции. Но мы будем поступать иначе. У рассматриваемого шара любая плоскость, содержащая центр шара, является плоскостью зеркальной симметрии. Таким образом, реальный шар обладает несчетным множеством плоскостей зеркальной симметрии, включая тройки неортогональных между собой плоскостей. По *Принципу Кюри–Неймана* эти плоскости должны принадлежать к плоскостям зеркальной симметрии следствия, т.е. тензора инерции. Это возможно только для изотропного тензора инерции. Иными словами, тензор инерции полого шара имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta\,\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\Theta} = 3\Theta. \quad (5.9.2)$$

Чтобы найти тензор инерции, нам достаточно вычислить только одно число — момент инерции Θ. Для этого нет нужды вычислять тензорный интеграл (5.9.1). Достаточно вычислить скалярный интеграл

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\Theta} = 2\int\limits_{(m)} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_c|^2\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = 2\int\limits_{(m)} \rho^2\,\mathrm{d}\,m(\rho) = 3\Theta, \quad \rho \equiv |\boldsymbol{\rho}| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_c|. \tag{5.9.3}$$

Осталось вычислить интеграл по массе. Будем поступать следующим образом. Объем полого шара равен $4\pi(a^3-b^3)/3$. Следовательно, массовая плотность равна $3m/4\pi(a^3-b^3)$. Весь объем, занятый телом, разделим на тонкие концентрические слои толщины $\mathrm{d}\,\rho$. Масса одного слоя вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}\,m(\rho) = \frac{3m}{4\pi(a^3-b^3)}4\pi\rho^2 d\rho = \frac{3m}{(a^3-b^3)}\rho^2 d\rho.$$

Используя этот результат, формулу для момента инерции (5.9.3) переписываем в виде одномерного интеграла

$$3\Theta = \frac{6m}{(a^3-b^3)}\int\limits_b^a \rho^4\,\mathrm{d}\,\rho = \frac{6m}{5(a^3-b^3)}(a^5-b^5) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Theta = \frac{2m(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{5(a^2+ab+b^2)}.$$

Для сплошного шара при $b=0$ получаем $\Theta = 2ma^2/5$.

Тензор инерции шара относительно полюса, не совпадающего с центром шара. При вычислении этого тензора мы должны воспользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера (5.5.6). В данном случае она принимает вид

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)} = ml^2(\mathbf{E}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}) + \boldsymbol{\Theta}^{(C)} = ml^2(\mathbf{E}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}) + \frac{2}{5}ma^2\mathbf{E}, \tag{5.9.4}$$

где l — расстояние от полюса до центра шара, $\mathbf{e}$ есть единичный вектор, направленный от полюса к центру шара или наоборот.

Тензор инерции шара с шаровой, но не концентрической полостью. Рассмотрим шар с шаровой полостью, центр которой не совпадает с центром основного шара. Радиус шара равен a, радиус полости равен b. Пусть m есть масса шара с полостью. Вычислим тензор инерции шара с полостью относительно центра основного шара. Это, разумеется, уже не центральный тензор инерции. Начало системы отсчета поместим в центр основного шара. По опре-

делению эйлерова тензора инерции имеем

$$\boldsymbol{\Theta} = \int\limits_{(m)} \left(|\mathbf{r}|^2\mathbf{E} - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right)\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = \int\limits_{(m+m_1)} \left(|\mathbf{r}|^2\mathbf{E} - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right)\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) - \\ - \int\limits_{(m_1)} \left(|\mathbf{r}|^2\mathbf{E} - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right)\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}), \quad (5.9.5)$$

где m_1 есть масса дополнительного материала, необходимого для заполнения полости. Первый интеграл в правой части этого выражения дает нам центральный тензор инерции шара без полости. Второй интеграл дает нам тензор инерции сплошного шара массой m_1 относительно центра основного шара. Оба тензора инерции мы уже умеем вычислять. Первый тензор инерции дается формулой (5.9.2), а второй тензор инерции определяется формулой (5.9.4). Поэтому выражение (5.9.5) окончательно принимает вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{2}{5}(m + m_1)a^2\mathbf{E} - \left(\frac{2}{5}m_1b^2\mathbf{E} + m_1l^2(\mathbf{E} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\right),$$

где l есть расстояние между центрами основного шара и полости, а $\mathbf{e}$ есть направление от центра шара к центру полости.

Центральный тензор инерции однородного кругового цилиндра. Рассмотрим сплошной цилиндр радиуса a и высотой h. Очевидно, что у него есть две неортогональные плоскости зеркальной симметрии, пересекающиеся по оси цилиндра. Это означает, что его тензор инерции является трансверсально-изотропным с осью изотропии, совпадающей с осью цилиндра. Общий вид такого тензора дается выражением

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \mu\,(\mathbf{E} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}), \quad \lambda = \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{e}, \quad \lambda + 2\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{\Theta}. \qquad (5.9.6)$$

Чтобы найти тензор инерции, достаточно вычислить осевой λ и экваториальный μ моменты инерции. Начало системы отсчета расположим в центре масс цилиндра. Вектор положения типичной точки цилиндра представим в виде разложения

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\mathbf{e}, \quad |\mathbf{r}|^2 = |\boldsymbol{\rho}|^2 + z^2, \quad z = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}, \quad 0 \le |\boldsymbol{\rho}| \le a, \quad -h/2 \le z \le h/2.$$

Подставляя определение эйлерова тензора инерции (5.9.1) в формулы для моментов инерции (5.9.6), получаем

$$\lambda = \int\limits_{(m)} |\boldsymbol{\rho}|^2\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}), \quad \lambda + 2\mu = 2\int\limits_{(m)} |\mathbf{r}|^2\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = 2\lambda + 2\int\limits_{(m)} z^2\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}). \quad (5.9.7)$$

При вычислении осевого момента весь цилиндр представим как совокупность концентрических слоев малой толщины. Масса этого слоя вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = \frac{m}{\pi a^2 h} 2\pi\rho h \mathrm{d}\rho = \frac{2m\rho}{a^2}\mathrm{d}\rho, \quad \rho \equiv |\boldsymbol{\rho}|.$$

Тогда осевой момент инерции определяется одномерным интегралом

$$\lambda = \int\limits_{(m)} \rho^2 \mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = \frac{2m}{a^2}\int\limits_0^a \rho^3\,\mathrm{d}\,\rho = \frac{ma^2}{2}.$$

При вычислении экваториального момента инерции область, занятую цилиндром, удобно разбить на цилиндры высотой $\mathrm{d}z$. Масса такого цилиндра равна

$$\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = \frac{m}{\pi a^2 h}\pi a^2 \mathrm{d}\,z = \frac{m}{h}\mathrm{d}\,z.$$

Теперь экваториальный момент инерции согласно (5.9.6) вычисляется посредством интеграла

$$2\mu - \lambda = 2\frac{m}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} z^2\,\mathrm{d}\,z = \frac{mh^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{mh^2}{12} + \frac{ma^2}{4}.$$

Таким образом, центральный тензор инерции кругового цилиндра имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{ma^2}{2}\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \left(\frac{mh^2}{12} + \frac{ma^2}{4}\right)(\mathbf{E} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}).$$

Если радиус цилиндра устремить к нулю, то выражение (5.9.) дает центральный тензор инерции тонкого стержня. Если положить $\lambda = \mu$, то центральный тензор инерции цилиндра становится шаровым. Для этого достаточно принять $h = \sqrt{3}a$. Если, кроме того, принять $a = \sqrt{4/5}R$, то центральный тензор инерции цилиндра совпадает с центральным тензором шара радиуса R и массой m.

Центральный тензор инерции однородного параллелепипеда. Вычислим центральный тензор инерции однородного параллелепипеда со сторонами a, b, c. Начало системы отсчета разместим в центре масс. Здесь также имеются три плоскости зеркальной симметрии, но они взаимно ортогональны. Поэтому тензор инерции параллелепипеда имеет более сложный вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \int\limits_{(m)} \left(|\mathbf{r}|^2\mathbf{E} - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right)\,\mathrm{d}\,m(\mathbf{r}) = \Theta_1\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1 + \Theta_2\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2 + \Theta_3\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_3,$$

где векторы $\mathbf{d}_k$ параллельны ребрам параллелепипеда.

Вектор $\mathbf{r}$ представим в виде разложения

$$\mathbf{r} = x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2 + z\mathbf{d}_3, \quad -a/2 \le x \le a/2, \quad -b/2 \le y \le b/2, \quad -c/2 \le z \le c/2.$$

Для моментов инерции имеем формулы

$$\Theta_1 = \mathbf{d}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{d}_1 = \int\limits_{(m)} \left(y^2 + z^2\right)\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}),$$

$$\Theta_2 = \mathbf{d}_2 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{d}_2 = \int\limits_{(m)} \left(x^2 + z^2\right)\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}), \quad \Theta_3 = \mathbf{d}_3 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{d}_3 = \int\limits_{(m)} \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}).$$

Здесь также достаточно вычислить три одномерных интеграла, если использовать рассуждения предыдущего пункта. Вычислим, например, интеграл по массе от функции x^2

$$\int\limits_{(m)} x^2\, \mathrm{d}\, m(\mathbf{r}) = \int\limits_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{abc}\, bc\, \mathrm{d}\, x = \frac{ma^2}{12}.$$

Аналогично вычисляются и два остальных интеграла. Окончательно для центрального тензора параллелепипеда имеем

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \frac{m(a^2 + c^2)}{12}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \frac{m(b^2 + a^2)}{12}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Заканчивая этот пункт, обращаем внимание на то, что не следует торопиться с переходом от интегрирования по массе к интегрированию по объему. При интегрировании по массе следует активно использовать аддитивность тензора инерции по массе тела. Особенно важно полностью учитывать это обстоятельство при вычислении тензоров инерции составных тел.

Глава 6.

Воздействия

6.1. Основная аксиома механики

Отправной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела, т.е. тела, не обменивающиеся частицами с окружающей средой, меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Если рассматриваемое тело изолировано (одинокое во всем мире по выражению Л. Эйлера), то тело самопроизвольно не может менять характер своего движения. Это интуитивное представление само по себе не может стать основой рациональной науки, ибо термин “характер движения” неопределен. Выше было введено понятие тела, которое определялось посредством задания неких динамических структур: кинетической энергии, количества движения, кинетического момента. Позднее будет введена дополнительная структура, называемая внутренней энергией тела. В рациональной механике при использовании термина “тело” подразумевается задание указанных выше структур. Все свойства тела должны быть отражены в этих структурах. Поэтому в рациональной механике нельзя говорить о заряженном теле, если в динамических структурах отсутствует параметр, характеризующий заряд тела. К этой важной мировоззренческой проблеме мы еще будем неоднократно возвращаться в дальнейшем. Сейчас нас интересует вопрос, какие-же из этих величин определяют то, что было названо характером движения. Этот вопрос не так прост, как может показаться с первого взгляда. Сначала ограничимся рассмотрением простейшего тела — материальной точки. Несколько десятилетий продолжалась дискуссия о том, что именно определяет характер движения у материальной точки: кинетическая энергия или количество движения (понятие кинетического момента тогда не существовало, да оно и не важно для материальной точки). Декарт и его последователи (картезианцы) полагали, что определяющим является количество движения, хотя правильно написать количество движения они не умели, поскольку векторная природа скорости в то время была еще не до конца ясной. Лейбниц и

его последователи настаивали на том, что определяющим свойством является кинетическая энергия. Значительно позднее выяснилось, что применительно к изолированной материальной точке этот спор не имеет значения, поскольку правыми оказываются и те, и другие. Ситуация резко меняется, если мы говорим о телах общего вида. Механика ценой усилий многих и многих исследователей накопила громадный опыт решения самых различных задач. Этот опыт отчетливо показывает определяющую роль количества движения и кинетического момента тела. Время еще не пришло, а может и никогда не придет, говорить о том, кто и какой вклад внес в решение этой проблемы. Ясно только то, что первый и во многом все определяющий шаг был сделан Л. Эйлером. В настоящее время принято считать, что движение тела определяется его количеством движения и кинетическим моментом. Поэтому можно отказаться от традиционного (правильного, но длинного и довольно запутанного) подхода и принять нижеследующую аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, распространяя его на тела общего вида.

Основная аксиома механики*: в инерциальной системе отсчета любое изолированное (одинокое во всем мире) тело $\mathcal{A}$ движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Посмотрим, что дает основная аксиома механики, если ее применить к системе материальных точек. Последняя характеризуется заданием кинетической энергии K, количества движения $\mathbf{K}_1$ и момента количества движения $\mathbf{K}_2$, вычисленного, например, относительно начала в системе отсчета

$$K = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{K}_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{V}_C, \quad \mathbf{K}_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i. \qquad (6.1.1)$$

Основная аксиома утверждает, что количество движения системы материальных точек в отсутствии других тел сохраняется неизменным

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_C = \text{const}. \qquad (6.1.2)$$

Утверждением (6.1.2) фиксируется следующая

Теорема: *центр масс изолированной системы материальных точек движется в инерциальной системе отсчета с постоянной скоростью.*

Основная аксиома утверждает также сохранение, т.е. постоянство, момента количества движения изолированной системы материальных точек. Преобразуем момент количества движения к другому виду. С этой целью введем

движения относительно центра масс

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_C + \boldsymbol{\rho}_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V}_C + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{0}.$$

В понятиях относительного движения момент количества движения системы материальных точек записывается следующим образом

$$\mathbf{K}_2 = m\,\mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i.$$

Из основной аксиомы теперь следует

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \text{const.} \quad (6.1.3)$$

Иными словами, доказана

Теорема: *момент количества изолированной системы материальных точек, вычисленный относительно центра масс системы в инерциальной системе отсчета сохраняется неизменным.*

Что касается кинетической энергии системы материальных точек, то она даже в изолированной системе не обязана сохраняться. Это и не удивительно. Ведь основная аксиома ничего не говорит о том, что происходит внутри системы материальных точек и каковы законы взаимодействия между материальными точками внутри системы. Хотя изолированная система не может ничего излучать в пустоту, тем не менее ее кинетическая энергия может меняться за счет перехода в другие формы энергии самой системы. Например, кинетическая энергия может переходить в так называемую внутреннюю энергию тела, о которой мы будем говорить позже.

Упражнение: *продумать, что дает основная аксиома механики применительно к изолированной системе односпиновых частиц.*

На этом мы закончим обсуждение основной аксиомы механики, хотя многие факты, вытекающие из нее, остались скрытыми. Нам просто еще не хватает некоторых понятий. Позднее мы вернемся к обсуждению основной аксиомы, но она будет рассматриваться как следствие фундаментальных законов. А именно, в частных случаях фундаментальные законы будут формулировкой основной аксиомы.

6.2. Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Эта идея достаточно ясно была

сформулирована И. Ньютоном, но особенно отчетливо она представлена у Л. Эйлера [78]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Долгое время полагали, что воздействия сводятся к силам. Физики[1] и до сих пор считают это мнение атрибутом механики. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействий опирается на основную аксиому механики. А именно, принимаются следующие определения воздействий.

***Определение**: в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела $\mathcal{A}$ обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.*

***Определение**: в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q, обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$. При этом момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, вычисляется по правилу*

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \qquad (6.2.1)$$

где $\mathbf{R}_{\mathrm{Q}}$ определяет положение опорной точки Q; вектор $\mathbf{R}_{\mathrm{P}}$ — определяет произвольно выбираемую точку $\mathcal{B}$, называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P, но не зависит от выбора опорной точки Q. Полный момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения.

Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные для объективного восприятия на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на изменение положения тела $\mathcal{A}$;

б) момент $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — реакция тела $\mathcal{B}$ на повороты тела $\mathcal{A}$ вокруг точки приведения P.

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все те-

[1] Чтобы ясно увидеть различие в точках зрения механики и физики на понятие воздействий, читателю полезно обратиться, например, к книге [14] и сравнить сказанное там с изложенным в данной книге.

ла за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, 2) мысленно "заморозить" тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам $\mathcal{A}$ всевозможные бесконечно малые смещения $\xi\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$, произвольный единичный вектор. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным смещениям тела $\mathcal{A}$, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление $\mathbf{e}_*$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует смещению тела $\mathcal{A}$ в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_*$ равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела $\mathcal{A}$, т.е. тело $\mathcal{A}$ и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P; 4) мысленно поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi\mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным поворотам тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на $\mathbf{e}_{**}$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_{**}$ равна нулю. Из определения момента следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^{\mathsf{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathsf{S}} - \mathbf{R}_{\mathsf{P}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}). \tag{6.2.2}$$

***Определение**: пара векторов $\left\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right\}$ называется воздействием тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.*

***Определение**: воздействие тела B на тело A называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_{\mathsf{P}}(t)$, что при любых движениях тела $\mathcal{A}$ воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ определяется заданием пары векторов*

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\,(\mathbf{R}_{\mathsf{P}}(t) - \mathbf{R}_{\mathsf{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})\}, \qquad \left(\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}\right), \tag{6.2.3}$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{M}^{\mathsf{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{L}^{\mathsf{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела $\mathcal{A}$. Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи, выходящие за рамки устоявшихся моделей. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

***Определение**: воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто моментным, если* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$, так и по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

***Аксиома**: сила* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *и момент* $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *аддитивны по отделенным телам* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$*, составляющим тело* $\mathcal{B}$*:* $\mathcal{B}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{D}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{6.2.4}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{D}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{6.2.5}$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (6.2.5). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{D})$ может производиться независимо.

***Аксиома**: сила* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *и момент* $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *аддитивны по отделенным телам* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$*, составляющим тело* $\mathcal{A}$*:* $\mathcal{A}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{F}(\mathcal{D},\mathcal{B}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{6.2.6}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{D},\mathcal{B}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{6.2.7}$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства. Заметим, что при традиционном изложении механики вышеуказанные аксиомы в явном виде формулировать не принято. Тем не менее, они активно, хотя и неявно, используются.

Обсудим подробнее введенное понятие воздействия применительно к частным случаям. Если в качестве тела $\mathcal{A}$ выбрана материальная точка, то собственно момент, действующий на материальную точку, равен нулю при условии, что точка приведения совпадает с вектором положения материальной точки. Это следует из того, что тела, окружающие материальную точку, не могут реагировать на повороты материальной точки вокруг самой себя, поскольку просто не замечают этих поворотов. Поэтому воздействие на материальную точку всегда является чисто силовым и определяется заданием пары векторов

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e),\quad \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=(\mathbf{R}(\mathcal{A})-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}})\times\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).$$

Это воздействие не содержит собственно моментов и влияет только на трансляционные движения. Оно широко используется в ньютоновой механике. При переходе от одной материальной точки к системе материальных точек собственно момент уже появляется. Пусть

$$\mathcal{A} = \bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k, \quad \mathcal{A}_k - \text{отделенные материальные точки.}$$

Использовав аксиомы аддитивности, получим следующее выражение для внешнего воздействия, действующего на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e). \tag{6.2.8}$$

Здесь следует обратить внимание, что в (6.2.8) не входят силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ взаимодействия между частицами, составляющими тело $\mathcal{A}$. Составим выражение для момента, действующего на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e).$$

Это выражение перепишем в эквивалентном виде

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) = \\ = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{L}^P,$$

где $\mathbf{R}_P$ определяет точку приведения и

$$\mathbf{L}^P = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e). \tag{6.2.9}$$

Хотя величина $\mathbf{L}^P$ и называется собственно моментом, действующим на тело $\mathcal{A}$, но этот момент порождается силами и потому не выходит за рамки понятий ньютоновой механики.

Обратимся к рассмотрению односпиновых частиц, которые, подобно материальным точкам, являются точечными телами, но они наделены более богатым спектром свойств. Односпиновые частицы в ньютоновой механике уже не рассматриваются и являются атрибутом эйлеровой механики. Силы, действующие на односпиновые частицы, ничем не отличаются от сил, действующих на материальные точки. Меняется (не по форме, но по существу) понятие

момента. Пусть тело $\mathcal{A}$ есть односпиновая частица. Ее положение в системе отсчета определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}$, который характеризует трансляционное движение односпиновой частицы. Спинорное движение односпиновой частицы определяется заданием тензора поворота $\mathbf{P}$. Момент, действующий на такую частицу, определяется выражением (6.2.1)

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}\right)=\left(\mathbf{R}-\mathbf{R}_{\mathrm{Q}}\right)\times\mathbf{F}\left(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}\right)+\mathbf{L}\left(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}\right), \tag{6.2.10}$$

где величина $\mathbf{L}\left(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e}\right)$ выражает реакцию окружения на повороты односпиновой частицы.

Такая ситуация характерна, например, для поведения диполей в электромагнитном поле. Если тело $\mathcal{A}$ состоит из набора односпиновых частиц, то, в силу аксиом аддитивности, имеем то же самое выражение для момента, что и для системы материальных точек. Существенное различие заключается в формуле для собственно момента. А именно, вместо формулы (6.2.9) следует воспользоваться выражением

$$\mathbf{L}^{\mathrm{P}}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{n}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{k}}-\mathbf{R}_{\mathrm{P}}\right)\times\mathbf{F}(\mathcal{A}_{\mathrm{k}},\mathcal{A}^{e})+\sum_{\mathrm{k}=1}^{n}\mathbf{L}(\mathcal{A}_{\mathrm{k}},\mathcal{A}^{e}). \tag{6.2.11}$$

Примечания

1. В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы инерции” не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

6.3. Мощность внешних воздействий

Важную роль в механике играет понятие мощности внешних воздействий. В школьном курсе физики вводится понятие работы. Оно широко используется во многих разделах физики и, особенно, в термодинамике. Тем не менее, это понятие является слишком сложным для того, чтобы принять его в качестве исходного определения. Значительно проще вводится понятие мощности, через которое и вводится понятие работы. Проиллюстрируем это понятие на примере материальной точки. Пусть $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{e})$ есть сила, действующая на материальную точку $\mathcal{A}$ со стороны ее окружения. Тогда мощностью внешнего

воздействия на материальную точку называется величина

$$\mathrm{N}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v}(\mathcal{A}).$$

Мощность — это работа, производимая в единицу времени. Поэтому работой силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)$ называется интеграл по времени от мощности

$$\mathrm{A}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\int\limits_0^{\mathrm{t}}\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v}(\mathcal{A})\,\mathrm{d}\,\mathrm{t}.$$

В отличие от мощности, вычисление работы не такая простая задача, ибо надо знать движение материальной точки и закон изменения силы при движении. Но самое главное заключается в другом. Как мы увидим ниже, в формулировку фундаментальных законов входит именно мощность, но не работа.

При рассмотрении одной материальной точки понятие мощности внешних воздействий оказывается безальтернативным, ибо все воздействия на материальную точку являются внешними. Если тело $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа материальных точек, то мощность внешних воздействий есть просто сумма мощностей, подводимых к каждой из точек от внешних источников

$$\mathrm{N}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\mathbf{F}(\mathcal{A}_\mathrm{k},\mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v}_\mathrm{k},\quad \mathbf{v}_\mathrm{k}=\dot{\mathbf{R}}_\mathrm{k}. \tag{6.3.1}$$

Здесь особое внимание следует обратить на то, что в выражение (6.3.1) не входят силы взаимодействия между частицами, составляющими тело $\mathcal{A}$.

Для тел, состоящих из односпиновых частиц, принимается следующее

***Определение**: мощностью внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек $\mathcal{A}_\mathrm{i}$, называется билинейная форма скоростей и воздействий*

$$\mathrm{N}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\left[\mathbf{F}\left(\mathcal{A}_\mathrm{k},\mathcal{A}^e\right)\cdot\dot{\mathbf{R}}_\mathrm{k}+\mathbf{L}\left(\mathcal{A}_\mathrm{k},\mathcal{A}^e\right)\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathrm{k}\right]. \tag{6.3.2}$$

Обратим внимание на то, что и здесь включены силы и моменты, действующие на тело-точку со стороны окружения всего тела $\mathcal{A}$, а не со стороны $\mathcal{A}^e_\mathrm{k}$, т.е. окружения k-го тела-точки. Кроме того, под $\mathbf{L}\left(\mathcal{A}_\mathrm{k},\mathcal{A}^e\right)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения $\mathbf{R}_\mathrm{k}$ тела-точки $\mathcal{A}_\mathrm{k}$, причем, напомним, $\mathbf{L}\left(\mathcal{A}_\mathrm{k},\mathcal{A}^e\right)$ не зависит от выбора опорной точки Q. Важно также обратить внимание на то, что в формулу (6.3.2) входит угловая скорость спинорного движения.

Наконец, легко видеть, что справедлива

Теорема. *Мощность внешних воздействий аддитивна, как по телам, составляющим само тело $\mathcal{A}$, так и по телам, составляющим его окружение $\mathcal{A}^e_k$.*

При переходе к сплошным телам суммы в (6.3.1) и (6.3.2) должны быть заменены соответствующими интегралами. Вычислим, например, мощность внешних воздействий для абсолютно твердого тела, состоящего и бесспиновых частиц. Сначала вычисляем мощность внешних воздействий, подводимых к бесконечно малой части тела, занимающей положение $\mathbf{R}$ и имеющей массу $\mathrm{d}m(\mathbf{R})$

$$\mathrm{N}(\mathrm{d}m(\mathbf{R}), \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathrm{d}m(\mathbf{R}), \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{R}) \mathrm{d}m(\mathbf{R}).$$

Тогда мощность внешних воздействий, подводимая к телу $\mathcal{A}$, вычисляется посредством интеграла

$$\mathrm{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \int\limits_{(m)} \mathbf{F}(\mathrm{d}m(\mathbf{R}), \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{R}) = \int\limits_{(m)} \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{R}) \mathrm{d}m(\mathbf{R}).$$

Вспомнив основную теорему кинематики абсолютно твердого тела, мы можем переписать это выражение в следующем виде

$$\mathrm{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \int\limits_{(m)} \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathcal{A}^e) \cdot [\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_P)] \, \mathrm{d}m(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{L}^P \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{6.3.3}$$

где

$$\mathbf{L}^P = \int\limits_{(m)} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathcal{A}^e) \mathrm{d}m(\mathbf{R}),$$

а вектор $\mathbf{R}_P$ определяет положение полюса в абсолютно твердом теле.

Глава 7.

Первый закон динамики Эйлера

7.1. Общая формулировка первого закона динамики

Первым фундаментальным законом механики принято называть уравнение баланса количества движения. Первоначально он возник как первый закон статики и применялся еще Архимедом. Применительно к задачам динамики этот закон в частных формулировках применялся Галилеем и Гюйгенсом. Знаменитым первый фундаментальный закон стал после выхода “Математических начал натуральной философии” (1686) Исаака Ньютона. В науке он утвердился под названием Второго закона Ньютона, который и поныне излагается в школьных курсах физики и на базе которого рассмотрено огромное количество важнейших явлений Природы и техники. Точнее говоря, широко употребительным в рациональной механике второй закон Ньютона стал гораздо позднее, а именно после того, как Л. Эйлер [76] придал ему математическую форму. Это произошло через 20 лет после смерти Ньютона. Что же касается мифа о Ньютоне, как единственном творце рациональной механике, то он был придуман в книге Э. Маха [43], опубликованной в 1883 г. и в которой утверждается, что после Ньютона в механике не было сделано ничего принципиально нового. Ошибочность этого утверждения следует хотя бы из того факта, что Ньютон до конца своей жизни отрицал сохранение количества движения у изолированного тела. Решающий шаг в формулировке законов динамики был сделан Л. Эйлером [79][1] в 1776 г. Именно в этой работе Л. Эйлер сформулировал законы механики в виде двух независимых утверждений, которые К. Труселл предложил [86] называть первым и вторым законами динамики Эйлера. В данной книге поддерживается позиция К. Труселла и используется именно эта терминология. Вместе с тем, нужно обратить внимание, что форма фундаментальных законов с развитием механики меняется и, видимо, никогда не обретет окончательный вид. Так происходит из-за того, что с развитием механики меняются наши представления о содержании входящих в фундамен-

[1] Цитируется по работе [45].

тальные законы понятий. Например, понятия количества движения у Декарта, Ньютона и Эйлера одинаковы по смыслу, но различны по формальным признакам. В данной книге используется определение количества движения, по форме отличающееся от многих других книг. Однако суть этого понятия у всех одинакова.

Согласно основной аксиоме механики, в инерциальной системе отсчета количество движения изолированного тела сохраняется неизменным. Если тело является материальной точкой, то это утверждение вытекает из Принципа инерции Галилея и позволяет ввести в рассмотрение инерциальные системы отсчета. Так что в этом случае основная аксиома не дает ничего нового. Для произвольного тела основная аксиома уже не вытекает из Принципа инерции Галилея и является новым постулатом. Наблюдение показывает, что, как правило, количество движения тела $\mathcal{A}$ меняется. В механике полагают, что причина этого заключается в наличии других тел во Вселенной. Но тела, сами по себе, в рациональной механике не обсуждаются. Их наличие моделируется воздействиями и, в некоторых случаях, потоками количества движения. Следует при этом иметь в виду, что под телами механика понимает не только тела типа твердых, жидких и газообразных тел. Электромагнитное поле и многие другие тонкие состояния материи также являются телами. Первый фундаментальный закон фиксирует связь между воздействиями (другими телами) и изменением количества движения рассматриваемого тела. При этом первый фундаментальный закон устанавливает баланс между изменением количества движения тела $\mathcal{A}$ и силой, действующей на тело $\mathcal{A}$. Кроме того, баланс учитывает и возможный подвод количества движения в тело $\mathcal{A}$.

Уравнение баланса количества движения: *скорость изменения количества движения тела $\mathcal{A}$ равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ в тело $\mathcal{A}$*

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}\,, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{7.1.1}$$

В приведенной формулировке уравнение баланса энергии стало использоваться в научной литературе относительно недавно, но у него было много предшественников. Сначала частная форма этого закона применялась Галилеем и Гюйгенсом. Затем появился самый знаменитый в механике закон, получивший название второго закона Ньютона

$$(\mathrm{m}\,\mathbf{v})^{\cdot} = \mathbf{F}.$$

Второй закон Ньютона относится к материальной точке, так что на нее действуют только внешние силы. Поэтому не было нужды разделять силы на внешние и внутренние. Следует отметить, что второй закон у Ньютона был

сформулирован только на вербальном уровне. Математическая форма второго закона, принятая в настоящее время, видимо, впервые появилась у Маклорена в 1742 г. Эйлер в работах [76, 79] приводит следующую формулировку закона (7.1.1) для закрытых тел

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}\,, \mathcal{A}^e), \quad \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k. \tag{7.1.2}$$

Здесь тело $\mathcal{A}$ составлено из материальных точек. Закрытыми[2] называют тела, которые не обмениваются массой со своим окружением. Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ равна нулю. В формулировке (7.1.2) впервые появляется деление сил на внутренние и внешние, причем явно указывается, что количество движения тела $\mathcal{A}$ меняется только в результате действия на тело внешних сил, а внутренние силы, каковы бы они не были, не могут изменить количество движения всего тела $\mathcal{A}$. Именно формулировка (7.1.2) в настоящее время известна под названием *первого закона динамики Эйлера.* Наиболее заметное различие между вторым законом Ньютона и первым законом динамики Эйлера состоит в том, что в последнем случае отпадает необходимость в принятии третьего закона Ньютона в качестве дополнительной аксиомы механики.

В дальнейшем предполагается, что *величина* $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ *аддитивна, как по телам, составляющим тело* $\mathcal{A}$*, так и по телам окружения* $\mathcal{A}^e$.

Из первого закона динамики немедленно вытекает одно весьма общее утверждение, являющееся аналогом третьего закона Ньютона. Чтобы доказать это утверждение, разделим тело $\mathcal{A}$ на два отделенных тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. При этом имеем равенства $\mathcal{B}^e = \mathcal{C} \vee \mathcal{A}^e$ и $\mathcal{C}^e = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}^e$. Запишем первый закон динамики для тел $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{B}\,, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{B}\,, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e),$$

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}\,, \mathcal{C}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{C}\,, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e),$$

Складывая эти два равенства и учитывая равенство (7.1.1), получаем

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) - \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \tag{7.1.3}$$

Примем очевидное допущение

$$\mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \tag{7.1.4}$$

которое утверждает, что тело $\mathcal{B}$ получает от тела $\mathcal{C}$ в единицу времени ровно столько количества движение, сколько тело $\mathcal{C}$ получает (отдает) его от тела $\mathcal{B}$. С учетом допущения (7.1.4) предыдущее равенство дает третий закон Ньютона

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \tag{7.1.5}$$

[2]Открытые тела начали рассматриваться только в конце XIX века

Иными словами, сила, действующая на тело $\mathcal{B}$ со стороны тела $\mathcal{C}$, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{C}$. Именно в такой форме сформулировал этот закон Ньютон [50]. Тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ у Ньютона совсем не обязательно являются материальными точками, что прямо следует из рассуждений Ньютона, непосредственно продолжающих формулировку трех законов. В современных учебниках третий закон Ньютона формулируют несколько иначе [41], сужая его на взаимодействующие материальные точки и добавляя утверждение о том, что силы взаимодействия направлены по прямой, соединяющей материальные точки. Это последнее добавление невозможно распространить на тела общего вида, входящие в (7.1.5), ибо разных прямых, соединяющих не точечные тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, можно провести сколько угодно. Более того, если считать, что силы имеют точку приложения, то равенство (7.1.5) также теряет смысл. Это является одной из причин того, что в данной книге понятие “точка приложения силы” не используется, а сама сила рассматривается как свободный вектор. В таком случае равенство (7.1.5) имеет однозначный смысл. Наконец, из равенства (7.1.5) следует, что сила, действующая на тело $\mathcal{B}$ со стороны самого тела $\mathcal{B}$, равна нулю, т.е. $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \mathbf{0}$. После формулировки второго закона динамики будет доказано, что в системе материальных точек силы взаимодействия между точками направлены вдоль прямых, соединяющих эти точки. Иными словами, в системе материальных точек внутренние силы *центральны.* Ничего подобного не имеет места для тел, отличных от материальных точек.

Применительно к закрытой материальной точке уравнение (7.1.1) есть второй закон Ньютона. Рассмотрим систему материальных точек и запишем первый закон динамики для каждой из материальных точек, входящих в систему

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_i^e) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}^e), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7.1.6}$$

Уравнения (7.1.6) впервые [68] были сформулированы Л. Эйлером в 1747 г., а затем были воспроизведены в работе [76]. Складывая все уравнения в системе (7.1.6) и учитывая равенство (7.1.5), приходим к первому закону динамики (7.1.1) при $\mathbf{k}_1(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$. Таким образом, первый закон динамики заменяет собой все три закона Ньютона, но обладает большей общностью. На базе только первого закона динамики можно исследовать огромное количество важных задач. В частности, он позволяет, при добавлении закона Всемирного тяготения, построить теорию движения Луны и планет, т.е. небесную механику. На этом законе базируется механика сплошных сред, гидроаэромеханика и т.д. Некоторые задачи, имеющие историческую ценность, будут рассмотрены ниже в этом параграфе. Огромные возможности, открываемые первым законом

динамики, конечно, впечатляют. Но давно сказано, что недостатки являются продолжением достоинств. Так и получилось с первым законом динамики. Следствия из него столь значительны, что многие, вплоть до настоящего времени, полагают, что первый закон динамики — это и есть вся механика. Тем не менее, тревожный звонок прозвучал еще в конце XIX века, когда физика стала внедряться в микромир. Механика, базирующаяся только на первом законе и трансляционных движениях, забуксовала и не смогла полноценно описать ни явления электромагнетизма, ни строение атома. Бремя лидерства в исследовании микромира взяла на себя теоретическая физика, методы и дух которой резко отличаются от методов, используемых механикой. В настоящее время уже ясно, что в микромире главную роль играют спинорные движения, которыми управляет второй закон динамики. Поэтому, несмотря на огромные возможности первого закона динамики, одного этого закона недостаточно для построения полноценной рациональной механики. Подчеркнем следующее обстоятельство. На протяжении многих столетий механика изучала только закрытые тела. Открытые тела казались экзотикой. В XX веке уравнения движения открытых тел стали активно использоваться в теории реактивного движения. В последние два-три десятилетия открытые тела стали интенсивно исследоваться в связи с современными технологиями, в которых разделение чисто механических и физико-химических процессов оказывается недопустимым. Заметим, что в механике открытых тел еще имеется много белых пятен, связанных с отсутствием достоверно установленных принципов построения потоков подвода количества движения в сложных системах в зависимости от различных физико-химических факторов. Тем не менее, даже начинающий изучать механику человек, должен знать, что механика отнюдь не сводится ко второму закону Ньютона, как это утверждается в школьных, и не только школьных, курсах физики. Именно поэтому в данной книге за основу принимается уравнение баланса количества движения в его наиболее общей форме.

Замечание. *Многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. При этом в третий закон включают и утверждение о центральности сил взаимодействия. Однако в эйлеровой механике третий закон Ньютона без допущения о центральности сил взаимодействия уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Ниже будет доказано, что силы взаимодействия центральны только для системы материальных точек. Поэтому нарушение условия центральности сил в микромире указывает на то, что многие "элементарные частицы" нельзя рассматривать как материальные точки — это многоспиновые частицы.*

Важнейшей особенностью фундаментальных законов механики, включая

первый закон динамики, является то, что они принципиально не могут быть ни подтверждены, ни опровергнуты экспериментальными методами. В первый закон входит вектор силы, который не поддается прямому экспериментальному определению, хотя, разумеется, существует много косвенных методов измерения силы. На самом деле, силы, как таковые, в Природе не существуют. Наблюдаемыми и измеряемыми величинами являются движения. Задача механики состоит в определении движений тел. Поскольку в уравнение (7.1.6) входит два неизвестных вектора $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e)$, то оно не замкнуто и требуется дополнительное уравнение, связывающее силы с движениями.

Определение: *уравнения, связывающие силы с движениями, называются определяющими и устанавливаются в дополнение к законам динамики.*

Хорошей иллюстрацией к сказанному является закон Всемирного тяготения, открытый Р. Гуком и И. Ньютоном. Этот закон утверждает, что между любыми двумя точечными телами в солнечной системе действует сила, определяемая по закону

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = -\,G\,\frac{m_i m_j}{R_{ij}^2}\,\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}}, \quad R_{ij} \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|. \tag{7.1.7}$$

Закон Всемирного тяготения является типичным определяющим уравнением, использование которого в небесной механике позволяет найти траектории движения планет солнечной системы, которые превосходно согласуются с наблюдениями. Именно поэтому закон Всемирного тяготения считается правильным, а вовсе не потому, что некие прямые эксперименты позволяют установить конкретный закон (7.1.7). Более того, с экспериментальной точки зрения нельзя утверждать, что силы в точности обратно пропорциональны квадрату расстояния. Но даже незначительное отклонение от закона (7.1.7), привело бы к катастрофическим последствиям.

Построение определяющих уравнений относится к числу трудных проблем механики. Во многих конкретных случаях проблема определяющих уравнений уже разрешена, но во многих важных для практики случаев она еще ждет своего решения. Часто поступают так. На основе интуитивных соображений задаются какими-то определяющими уравнениями и, тем самым, получают замкнутую систему уравнений, описывающую механическое поведение рассматриваемой умозрительной системы. Исследуют поведение этой системы. Если оказывается, что поведение умозрительной системы в основных чертах совпадает с наблюдаемым поведением реальной системы, то определяющие уравнения считаются приемлемыми. Если этого нет, то ищут другие определяющие уравнения. На первый взгляд может показаться, что построение определяющих уравнений основано на произвольных допущениях. Это не так. Фундаментальные законы, особенно третий фундаментальный закон, наклады-

вают довольно жесткие ограничения на определяющие уравнения. Но сейчас мы еще не готовы обсуждать эту проблему, ибо еще не введены необходимые понятия. Определяющие уравнения относятся не только к силам и движениям. Например, при вычислении скорости подвода количества движения в тело также приходится принимать соответствующие определяющие уравнения. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя во многих приложениях особых проблем не возникает. Поэтому ниже мы ограничимся иллюстративными примерами.

7.2. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия входит в список исходных динамических структур рациональной механики. Выше она вводилась вне всякой связи с уравнениями движения. Количество движения определялось через кинетическую энергию. Однако кинетическую энергию можно ввести иначе. Сейчас мы ограничимся рассмотрением тела $\mathcal{A}$, состоящего из материальных точек $\mathcal{A}_i$. Такого рода тела являются основным объектом исследования в механике Ньютона. В качестве исходного понятия можно рассматривать количество движения тела $\mathcal{A}$, как это принималось И. Ньютоном и Л. Эйлером, и определять его как линейную форму скоростей

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{R}}_i.$$

Для каждой из материальных точек можно записать первый закон динамики (7.1.6), дополненный подводом количества движения в каждую из частиц системы $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left(m_i \dot{\mathbf{R}}_i\right)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e). \qquad (7.2.1)$$

Умножим обе части каждого из уравнений (7.2.1) скалярно на вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ и сложим получившиеся уравнения. Тогда с учетом равенств (7.1.3) получим

$$\frac{dK(\mathcal{A})}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} \mathcal{K}(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{R}_k}{dt} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}. \quad (7.2.2)$$

В классической механике принимают, что массы материальных точек, составляющих тело $\mathcal{A}$, не меняются. Поэтому второе слагаемое в правой части (7.2.2) обычно отсутствует. Первое слагаемое в правой части равенства (7.2.2) есть мощность внутренних сил плюс скорости обмена энергией между частицами за счет переноса количества движения от одной частицы к другой. Важно заметить, что первое слагаемое описывает изменения внутри системы. Если система смещается как жесткое целое, т.е. скорости всех частиц одинаковы, то это слагаемое обращается в нуль. Второе слагаемое в правой части равенства (7.2.2) есть мощность внешних сил, определенная равенством (6.3.1). Третье слагаемое в этом равенстве можно назвать скоростью подвода энергии в тело $\mathcal{A}$ за счет переноса массы в систему. Равенство (7.2.2) сильно упрощается, если принять, что обмен количеством движения отсутствует, а массы частиц неизменны. Для очень широкого класса механических систем эти допущения справедливы. В этом случае равенство (7.2.2) принимает вид

$$\frac{\mathrm{dK}(\mathcal{A})}{\mathrm{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_i}{\mathrm{dt}}. \tag{7.2.3}$$

Таким образом, доказана

***Теорема**: скорость изменения кинетической энергии закрытого тела $\mathcal{A}$, состоящего из материальных точек, равна мощности сил, действующих на каждую из частиц тела $\mathcal{A}$.*

Равенство (7.2.2) или равенство (7.2.3) можно принять за определение кинетической энергии тела $\mathcal{A}$. Доказанную теорему в книгах по механике называют теоремой об изменении кинетической энергии. Несмотря на популярность теоремы об изменении кинетической энергии, тем не менее в приведенном виде она недостаточно информативна, поскольку в ее формулировку входит мощность внутренних сил, о которых заранее известно немногое. Более полная версия этой теоремы будет приведена в параграфе, посвященном обсуждению уравнения баланса энергии. Однако некоторые дополнения целесообразно сделать уже сейчас на простом примере тела, состоящего из материальных точек. А именно, необходимо расширить наши представления об энергии и ввести в рассмотрение предварительные представления о механической, внутренней и потенциальной энергиях. Позднее при обсуждении уравнения баланса энергии эти представления будут дополнены, но их содержание радикально не изменится.

7.3. Ограниченная теорема об изменении механической энергии

Будем исходить из равенства (7.2.3), т.е. ограничимся рассмотрением закрытых тел. Рассмотрение открытых тел будет продолжено после формулировки уравнения баланса энергии. Примем следующие определяющие уравнения для внутренних и внешних сил. Прежде всего разделим силы на позиционные, т.е. зависящие только от положений частиц, и диссипативные, т.е. зависящие не только от положений частиц, но и от их скоростей. Можно доказать, что для позиционных сил всегда существует производящая функция или потенциал. В математической форме все сказанное записывается в виде равенств

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = -\frac{\partial \Pi_{int}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k),$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) = -\frac{\partial \Pi_{ext}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \tag{7.3.1}$$

где функция $\Pi_{int}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ есть потенциал внутренних сил, функция $\Pi_{ext}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ есть потенциал внешних сил, диссипативные силы обозначены символами $\mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ и $\mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$.

Как будет показано в главе, посвященной общей форме уравнения баланса энергии, потенциал внутренних сил составляет часть так называемой внутренней энергии тела. Потенциал внешних сил будем называть *потенциальной энергией тела* $\mathcal{A}$ и обозначать символом $\Pi_{ext}(\mathcal{A})$.

Для любой функции $V(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ справедливо равенство

$$\frac{dV(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} \cdot \dot{\mathbf{R}}_i.$$

Теперь, с учетом равенств (7.3.1), равенство (7.2.3) можно переписать в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\left[K(\mathcal{A}) + \Pi_{int}(\mathcal{A}) + \Pi_{ext}(\mathcal{A})\right] = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i. \tag{7.3.2}$$

Величину

$$E_M(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + \Pi_{int}(\mathcal{A}) + \Pi_{ext}(\mathcal{A}) \tag{7.3.3}$$

будем, по определению, называть *механической энергией* тела $\mathcal{A}$.

Замечание. *Термин механическая энергия в механике не используется. Обычно величину* $E_M(\mathcal{A})$*, определенную формулой (7.3.3) называют полной*

энергией или просто энергией. Например, в широко применяемом термине "интеграл энергии", как правило, речь идет об энергии $\mathsf{E}_M(\mathcal{A})$. *Новым термином мы хотим подчеркнуть, что механическая энергия появляется как следствие уравнений баланса количества движения и кинетического момента. Поэтому механическая энергия не является новой структурой в механике, независимой от законов движения. Называть ее полной энергией нехорошо, ибо под полной энергией тела* $\mathcal{A}$ *традиционно понимается сумма кинетической и внутренней энергий тела* $\mathcal{A}$. *В частных случаях понятие внутренней энергии совпадает с потенциалом внутренних сил. Однако в общем случае внутренняя энергия будет иметь более широкий смысл. Достаточно общее определение энергии будет дано при обсуждении уравнения баланса энергии.*

Первое слагаемое в правой части (7.3.3) определяют диссипацию энергии в теле. При этом принимается следующий

Принцип диссипации энергии: *работа внутренних диссипативных сил в теле* $\mathcal{A}$ *не может увеличивать механическую энергию тела* $\mathcal{A}$, *т.е. справедливо неравенство*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i \le 0. \tag{7.3.4}$$

Диссипативные силы, мощность которых строго меньше нуля, называются силами трения. Диссипативные силы, мощность которых равна нулю, называются гироскопическими силами. Что касается второй суммы в правой части равенства (7.3.3), то знак этого слагаемого может быть любым, т.е. внешние силы могут как отбирать энергию у тела, так и накачивать ее в тело.

Равенство (7.3.3) будем в дальнейшем называть *ограниченной теоремой об изменении механической энергии*. Ограниченной эта теорема называется потому, что она доказана только для системы материальных точек, но на самом деле она верна и для значительно более широкого класса тел. Практическое значение введенных понятий потенциалов внутренних и внешних сил обусловлено тем, что задавать их часто бывает проще, чем задавать сами силы. Потенциалы вводились как функции векторов положений, но они не могут быть произвольными функциями. Чтобы убедиться в этом, достаточно получить равенство (7.3.3) немного другим путем. В следующем параграфе будет доказано, что внутренние силы в системе материальных точек по необходимости являются центральными

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)\gamma_{ik}^{-1}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k), \quad \gamma_{ik}^2 \equiv (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k), \tag{7.3.5}$$

где $\lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \lambda(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i)$ есть произвольная скалярная функция.

Теорема об изменении кинетической энергии (7.2.3) с учетом равенства

(7.3.5) может быть переписана в эквивалентной форме

$$\frac{dK(\mathcal{A})}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)\gamma_{ik}^{-1}\,(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\cdot\left(\dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_k\right) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i$$

или

$$\frac{dK(\mathcal{A})}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)\dot{\gamma}_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i. \tag{7.3.6}$$

где скалярная функция $\lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ удовлетворяет условию $\lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0$.

Для нее можно принять разложение

$$\lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \varphi_{ik}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) + \psi_{ik}(\mathbf{R}_1, \dot{\mathbf{R}}_1, \ldots, \mathbf{R}_n, \dot{\mathbf{R}}_n)$$

Подставляя это разложение в (7.3.6) и сравнивая получившееся равенство с выражением (7.3.2), получаем

$$\dot{\Pi}_{int}\,(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\varphi_{ik}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)\dot{\gamma}_{ik} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{int} = \Pi_{int}(\gamma_{ik}). \tag{7.3.7}$$

Иными словами, потенциал внутренних сил зависит только от расстояний между материальными точками, а не просто от векторов их положений.

7.4. Уравнение Мещерского. Движущаяся тележка под погрузкой

Динамика систем переменного состава (динамика открытых тел) стала необычайно актуальной в XX веке в связи с развитием ракетной техники. Будем рассматривать ракету как материальную точку. Масса ракеты m состоит из массы "железа" m_0 и массы топлива m_1, т.е $m = m_0 + m_1$. В полете топливо сгорает и выбрасывается из ракеты в виде газа. В результате масса ракеты меняется. Рассмотрим уравнение движения ракеты с позиций первого закона динамики. Количество движения ракеты вычисляется по стандартной формуле. Скорость подвода количества движения вычисляется на основе следующего рассуждения. За время dt масса ракеты меняется на величину $dm = dm_1$, а ее количество движения за это же время dt меняется на величину $dm\,\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ есть скорость выбрасываемого газа. Чтобы найти скорость подвода количества движения в ракету достаточно разделить величину $dm\,\mathbf{u}$ на dt. Таким образом, имеем

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m(t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \frac{dm}{dt}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{v}$ есть скорость ракеты, а $\mathbf{u}$ есть скорость выбрасываемого газа.

Первый закон динамики (7.1.1) в данном случае принимает вид

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (7.4.1)$$

Уравнение (7.4.1) и есть знаменитое уравнение И.В. Мещерского, полученное в 1893 г. Последнее слагаемое в правой части уравнения Мещерского называется реактивной силой, вектор $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ есть скорость истечения газов относительно ракеты. Из уравнения Мещерского можно получить множество важных и полезных результатов. Однако только уравнения Мещерского недостаточно для изучения динамики полета ракеты. В дополнение надо указать закон изменения массы топлива и увязать этот закон со скоростью истечения газа из ракеты. Всем этим занимаются специалисты по ракетной технике. Ниже мы ограничимся приложением уравнения Мещерского к совсем простой задаче о движении тележки, нагружаемой, например, песком.

Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. Для простоты считаем, что тележка движется по инерции. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никаких сил не действует. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна, а трение в подшипниках колес отсутствует. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \quad (7.4.2)$$

где $dm(t)/dt$ — есть скорость подвода массы, а $\mathbf{u}(t)$ — абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке.

Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (7.4.2) будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \quad (7.4.3)$$

где ρ_1, ρ_2 — скорости подвода массы песка первого и второго сорта соответственно; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ суть скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке.

Движение тележки существенно зависит от способа подведения к ней количества движения. Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором случае будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

7.5. Задача Кэйли о падающей цепочке

Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке [38]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. В качестве тела A выбираем свисающую часть цепи, а через x обозначим ее длину. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt}\left(\rho x \frac{dx}{dt}\right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt}\frac{dx}{dt}, \tag{7.5.1}$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Отметим, что в уравнении, используемом Кэйли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (7.5.1) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\,(L-x)\,0\right] = F + \frac{d\rho\,(L-x)}{dt}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad F = \rho\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (7.5.1), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования

$$\frac{d}{dt}\left(\rho x \frac{dx}{dt}\right) = \rho g x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g. \tag{7.5.2}$$

Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0: \quad x = \varepsilon, \quad \dot{x} = 0. \tag{7.5.3}$$

Решение уравнения (7.5.2) при начальных условиях (7.5.3) в теории обыкновенных дифференциальных уравнений называется задачей Коши. Сформулированная задача имеет единственное решение при $\varepsilon \neq 0$. Любопытно, что при $\varepsilon = 0$ единственность решения данной задачи Коши теряется. В самом деле, легко убедиться, что функции

$$1). \quad x(t) = 0 \quad \text{и} \quad 2). \quad x(t) = \frac{1}{6}gt^2 \tag{7.5.4}$$

являются решением задачи (7.5.2)–(7.5.3) при $\varepsilon = 0$. Надо сказать, что подобная ситуация в осмысленных задачах механики возникает весьма редко. Решение задачи (7.5.2)–(7.5.3) легко сводится к квадратуре. Сделаем замену переменных

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad z = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$$

Используя эти замены, переписываем уравнение (7.5.2) в следующем виде

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2z}{x} = 2g. \tag{7.5.5}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение. Уравнение с переменными коэффициентами такого типа называется уравнением Эйлера и легко интегрируется. Его решение, удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$z = \frac{2g}{3}\frac{x^3 - \varepsilon^3}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{3}}\frac{\sqrt{x^3 - \varepsilon^3}}{x}, \quad \varepsilon \le x(t) \le L \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sqrt{x}}{dt} = \sqrt{\frac{g}{6}}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^3}{x^3}}. \tag{7.5.6}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменным, которое, в принципе, легко интегрируется, но не в элементарных функциях. При очень малых ε и при не очень малых временах решение (7.5.6) практически совпадает со вторым из решений (7.5.4). На этом мы пока и остановимся. Но читателю предлагается задуматься над следующим вопросом. Понятие энергии у нас еще не введено, но из школьного курса физики известно, как понятие кинетической энергии, которое нами уже введено, так и понятие потенциальной энергии, которое нам еще предстоит обсудить. Сейчас мы будем апеллировать к школьному курсу физики. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1, когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho g L^2/2, \quad K_1 = \rho g L^2/3 \quad \Rightarrow P_1 + K_1 = 5\rho g L^2/6 \neq \rho g L^2 = P_0.$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2/6$?

7.6. Поперечные колебания струны

С поперечными колебаниями струны сталкивались практически все люди, которым знакомы струнные музыкальные инструменты. Многие знают, как

настраивается, например, гитара. Для этого гитарист меняет силу натяжения струны так, чтобы при колебаниях она воспроизводила нужную ноту. Неудивительно, что, уже на ранней стадии становления рациональной механики, поперечные колебания струны оказались в центре внимания ученых. Частоты и формы поперечных колебаний струны интенсивно изучались всю первую половину XVIII века. Главными действующими лицами здесь были Даниил Бернулли, Жак Даламбер и Леонард Эйлер. Некоторые конечные результаты этих исследований будут описаны ниже.

Задачу о равновесии нерастяжимой нити мы уже рассматривали в главе, посвященной статике. Здесь мы будем придерживаться тех же обозначений. Будем полагать, что струна расположена горизонтально и закреплена на левом конце, а правый конец струны закреплен от вертикальных смещений и к нему приложена горизонтальная растягивающая сила $\mathbf{T} = T\mathbf{i}$. Струна является закрытым телом и ни с кем своей массой не обменивается. В равновесном положений натянутая струна расположена практически горизонтально (вспомним струну на гитаре) и ее весом можно пренебречь. Длину натянутой струны обозначим через l. Точки струны будем идентифицировать расстоянием s от левого конца струны, т.е. определять заданием вектора $\mathbf{r}(s) = s\mathbf{i}$. Положение точки струны в отклоненном положении будем задавать вектором

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r} + w(s,t)\mathbf{j} = s\,\mathbf{i} + w(s,t)\,\mathbf{j},$$

где $\mathbf{j}$ есть орт вертикали, функция $w(s,t)$ есть нормальное смещение точек струны и считается малой в сравнении с длиной струны. В качестве тела $\mathcal{A}$ будем рассматривать часть струны, заключенную между точками s_1 и s_2. Тогда количество движения тела $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{d\mathbf{R}(s,t)}{dt}\rho\,ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{dw(s,t)}{dt}\rho\,ds\,\mathbf{j}, \quad 0 \le s_1 \le s_2 \le l, \quad \rho = \mathrm{const},$$

где ρ есть погонная масса струны.

Внешняя сила, действующая на струну находится точно также, как это было сделано при выводе уравнения равновесия струны. Повторяя все рассуждения, приводящие к уравнению (1.7.5), получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{T}(s,t)}{\partial s} = \rho\frac{\partial^2 \mathbf{R}(s,t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{T}(s,t)}{\partial s} = \rho\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}\mathbf{j}. \tag{7.6.1}$$

Примем теперь, как это и предполагалось первопроходцами, что растягивающая сила в струне направлена по касательной к деформированной струне

$$\mathbf{T}(s,t) = \lambda(s,t)\frac{\partial \mathbf{R}(s,t)}{\partial s} = \lambda(s,t)\left(\mathbf{i} + \frac{\partial w(s,t)}{\partial s}\mathbf{j}\right).$$

Если бы мы воспользовались вторым законом динамики, который мы, подобно первопроходцам, еще не ввели в действие, то это соотношение мы бы не предполагали, а строго доказали. Подставляя полученное выражение для силы в уравнение (7.6.1) и проецируя получившееся равенство на орты, получаем два уравнения

$$\frac{\partial \lambda(s,t)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}\lambda(s,t)\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = \rho\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}. \tag{7.6.2}$$

К этим уравнениям необходимо добавить краевые условия. Для рассматриваемого случая они имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(0,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(l,t)\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{T}(l,t)\cdot\mathbf{i} = T \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad \lambda(l,t) = T,\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

где T есть заданная постоянная во времени растягивающая сила на правом конце струны.

Из первого уравнения (7.6.2) видим, что функция $\lambda(s,t)$ не зависит от s, а из краевого условия получаем

$$\lambda(s,t) = T = \mathrm{const}.$$

Второе уравнение системы (7.6.2) теперь принимает вид

$$\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \equiv \frac{T}{\rho}. \tag{7.6.4}$$

Получили, что нормальный прогиб струны удовлетворяет уравнению в частных производных (7.6.4). Впервые это уравнение было выведено Даламбером в 1746 г. и получило название волнового уравнения. Это уравнение не только является первым[3] уравнением в частных производных в истории науки, но оно знаменует собой рождение нового раздела математики, получившего название “математическая физика”. Этот раздел математики окончательно оформился только к середине XIX века. Волновое уравнение (7.6.4) лежит в основе многих специальных разделов современной механики и физики и никогда не утратит своего фундаментального значения.

Решение Даламбера–Эйлера. Чтобы понять, почему уравнение (7.6.4) называется волновым, а также смысл параметра c в этом уравнении, перепишем его в другом виде. Сделаем замену переменных

$$\eta = s - c\,t, \quad \xi = s + c\,t.$$

[3]Уравнения в частных производных появлялись и раньше, но они были типа (7.6.1), т.е. не могли быть самостоятельным объектом математического исследования. Уравнение (7.6.4) содержит только одну неизвестную функцию и может изучаться независимо от того, как оно было получено.

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial w}{\partial \eta} + c\frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - c^2 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.6.4), получаем следующее уравнение

$$4\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

которое без труда интегрируется. Его общее решение имеет вид

$$w(\eta, \xi) = \varphi(\eta) + \psi(\xi) \quad \Rightarrow \quad w(s, t) = \varphi(s - c\,t) + \psi(s + c\,t), \qquad (7.6.5)$$

где функции φ и ψ суть произвольные функции, причем каждая зависит только от одного аргумента, являющегося линейной комбинацией переменных s и t.

Чтобы найти эти функции, необходимо воспользоваться краевыми и начальными условиями. Здесь мы этого делать не будем, но это детально описано в книгах по уравнениям с частными производными, например, в [28]. Ниже решение рассматриваемой задачи будет построено другим, не менее замечательным в теоретическом и в историческом отношениях, методом. Сейчас же присмотримся внимательнее к функциям $\varphi(s - ct)$ и $\psi(s + ct)$. Функции такого вида называются волнами. Почему? Рассмотрим функцию $\varphi(s - ct)$. Зафиксируем ее аргумент

$$s - c\,t = a = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad s = a + c\,t. \qquad (7.6.6)$$

Значение функции $\varphi(a)$ задано, если сама эта функция уже определена. Точка s, отвечающая фиксированному числу a, согласно (7.6.6) бежит вдоль оси (вдоль струны) вправо со скоростью c. Вместе с ней перемещается вправо с той же скоростью значение функции $\varphi(a)$. Иными словами, если при $t = 0$ функция $\varphi(s)$ задана, то при $t \neq 0$ весь график функции $\varphi(s)$ смещается вправо со скоростью c. Это напоминает движение волны на воде. Поэтому такое движение и называется волновым, а величина c называется скоростью волны. Функция $\psi(s + ct)$ также является волной, но она бежит вдоль струны влево с той же скоростью. Итак, решениями уравнения (7.6.4) являются волны. Отсюда и название — “волновое уравнение”.

Решение Бернулли–Эйлера. Как это ни удивительно на первый взгляд, но решение уравнения (7.6.4) было построено Даниилом Бернулли и Леонардом

Эйлером еще до того, как было выведено само уравнение поперечных колебаний струны [68]. При этом струна рассматривалась как система с конечным числом степеней свободы, а затем делался предельный переход. Именно это решение мы сейчас и построим, но на основе непосредственного решения уравнения (7.6.4), что, конечно, намного проще.

Решение будем строить так называемым методом разделения переменных. Сначала будем искать частные решения уравнения (7.6.4) специального вида

$$w(s,t) = X(s)Y(t).$$

Подставляя это представление в (7.6.4) и деля получившееся уравнение на $X(s)Y(t)$, получаем

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{1}{c^2Y}\frac{d^2Y}{dt^2} = -\lambda^2 = \mathrm{const}.$$

Величина λ^2 постоянна, ибо первое равенство показывает, что она не зависит от t, а второе равенство показывает, что она не зависит и от s. Таким образом, функции $X(s)$ и $Y(t)$ должны быть решениями уравнений

$$\frac{d^2X(s)}{ds^2} + \lambda^2 X(s) = 0, \quad \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + c^2\lambda^2 Y(t) = 0. \tag{7.6.7}$$

Функция $X(s)$, называемая формой колебания, должна удовлетворять краевым условиям (7.6.3): $X(0) = X(l) = 0$. При этих условиях нетрудно доказать, что величина λ^2 вещественна и положительна. Решение первого из уравнений (7.6.7) имеет вид

$$X(s) = A\cos\lambda s + B\sin\lambda s.$$

Постоянная A обращается в нуль, поскольку $X(0) = 0$. Постоянная B не может равняться нулю, ибо в таком случае имеем только нулевое решение, которое не представляет интереса. Следовательно, для обращения $X(l)$ в нуль необходимо выполнение условия

$$\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где n любое целое число.

Таким образом, получили счетное множество частных решений волнового уравнения

$$w_n(s,t) = (A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\sin\lambda_n s, \tag{7.6.8}$$

где

$$\lambda_n = n\pi/l, \quad \omega_n = c\,\lambda_n = c\,n\pi/l.$$

Функции, характеризующие изменение нормального прогиба вдоль струны, называются собственными формами колебаний струны. Каждой собственной

форме колебания отвечает строго определенная собственная частота ω_n колебания. Оказалось, что струна имеет счетное множество собственных форм колебаний и, соответственно, счетное множество собственных частот или тонов. Вспомнив выражение для скорости распространения волны c, запишем формулу для собственных частот

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Отсюда видим, что чем больше натяжение струны, тем выше ее собственные частоты, тем на более высокой ноте может звучать струна. Увеличение погонной массы струны, напротив, ведет к снижению собственных частот. Поэтому басовые струны у гитары самые толстые. При настройке гитары музыкант-исполнитель увеличивает или уменьшает силу натяжения струны и тем самым повышает или снижает тон звучания струны. Кроме того, частоту колебания можно менять изменением длины струны, как это и делает гитарист, прижимая струну к деке в определенных местах.

Общее решение волнового уравнения дается суммой частных решений (7.6.8) и называется решением Бернулли–Эйлера. Оно имеет вид

$$w(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\lambda_n s. \tag{7.6.9}$$

Постоянные A_n и B_n должны определяться по начальным условиям. В начальный момент времени мы должны задать прогиб струны и начальные скорости

$$w(s,0) = f(s), \quad v(s,0) = \dot{w}(s,0) = g(s).$$

Потребуем, чтобы решение (7.6.9) удовлетворяло начальным условиям

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\lambda_n s, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\lambda_n s. \tag{7.6.10}$$

Получили задачу о разложении произвольной функции в ряд по заданной системе функций. В настоящее время это совершенно стандартная вещь, которая излагается студентам младших курсов. Но в момент ее возникновения около 1730 г. эта проблема вызвала весьма горячие дискуссии. В самом деле, функция $f(s)$, например, задана на непрерывном интервале, содержащем *несчетное* множество точек. Соответственно, она характеризуется *несчетным* множеством значений. Представление функции $f(s)$ рядом (7.6.10) содержит *счетное* множество подлежащих определению коэффициентов, т.е. функция

$f(s)$ может быть охарактеризована счетным множеством своих значений. Возник математический парадокс, на разрешение которого ушло более столетия и понадобились усилия многих математиков. Оказалось, что ряд (7.6.10) представляет произвольную функцию $f(s)$ не полностью, а с точностью до ее значений на множестве меры нуль. В приложениях редко встречаются *произвольные* функции. Обычно они, как минимум, непрерывны и интегрируемы. При этих ограничениях все проблемы снимаются и можно сказать, что ряд (7.6.10) действительно представляет достаточно общую для приложений функцию $f(s)$. Нужное число подробностей дается в курсах математической физики, в которых излагается спектральная теория операторов. Нам же осталось определить коэффициенты разложений (7.6.10). Для этого следует обратить внимание на важную особенность собственных функций $\sin\lambda_n s$. А именно, на их ортогональность

$$\int_0^l \sin\lambda_m s \sin\lambda_n s\,ds = \frac{l}{2}\delta_{mn} = \frac{l}{2}\begin{cases} 1, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

С учетом соотношений ортогональности коэффициенты разложений (7.6.10) вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin\lambda_n s\,ds, \quad \omega_n B_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(s)\sin\lambda_n s\,ds.$$

Рассмотрим конкретный вид начальных условий

$$f(s) = \frac{4f_0}{l^2}s(s-l), \quad g(s) = 0,$$

где f_0 есть значение функции $f(s)$ при $s = l/2$, т.е. в середине струны. Для этих начальных условий коэффициенты $B_n = 0$, а для коэффициентов A_n нужные интегралы легко вычисляются

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin\lambda_n s\,ds = -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin''\lambda_n s\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{2}{l}\int_0^l f''(s)\sin\lambda_n s\,ds = -\frac{16f_0(1-\cos\pi n)}{\pi^3 n^3}.$$

Решение Бернулли–Эйлера (7.6.9) для принятых начальных условий имеет

вид

$$w(s,t) = -\frac{32f_0}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{\cos\omega_n t \sin\lambda_n s}{n^3} = \\ = -\frac{32f_0}{\pi^3}\left[\cos\omega_1 t \sin\lambda_1 s + \frac{1}{27}\cos\omega_3 t \sin\lambda_3 s + \ldots\right].$$

Итак, в струне возбуждается счетное множество форм колебаний, каждая из которых меняется во времени по гармоническому закону с определенной для этой формы колебания частотой. Однако слушая гитару, мы слышим фактически только первый тон. Когда это не так, возникает диссонанс, весьма неприятный для нашего слуха, что имеет место в звуковых колонках низкого качества. Но вернемся к струне. Почему же мы слышим только первый тон? Кажущийся правильным ответ напрашивается сам собой. Потому что, во-первых, уже третий тон ослаблен в 27 раз и, во-вторых, из-за наличия трения, пропорционального скорости и приводящего к значительно более сильному затуханию третьего тона в сравнении с первым. В известной мере этот ответ верен, но имеется еще и третье обстоятельство, и именно оно является определяющим. Чтобы понять это обстоятельство, нужно разобраться почему мы вообще слышим. Слух определяется давлением, оказываемым воздухом на барабанные перепонки нашего уха. Если бы струна колебалась в вакууме, то мы бы вообще ничего не услышали. Следовательно, важным является давление, создаваемое в воздухе колеблющейся струной. Иными словами, определяющим является излучение струны в воздухе. Определение этого излучения является довольно сложной проблемой, исследованием которой занимается специальный раздел механики, называемый акустикой. Так вот, волна давления, создаваемая данной формой колебания струны в воздухе существенно зависит от числа узлов формы колебания струны. Чем больше узлов, тем быстрее затухает волна давления в пространстве. У первой формы колебания узлов нет, т.е. она обращается в нуль только на краях струны. У второй формы колебания, которая в данном случае не возбуждается, имеется узел в середине струны. У третьей формы имеется два узла и т.д. Анализ показывает, что давление, создаваемое третьей формой колебания, меньше давления, создаваемого первой формой колебания, не в 27 раз, а в $27^2 = 729$ раз, т.е. является почти неразличимым и, к тому же, очень быстро затухает в пространстве. Разумеется, все сказанное имело своей целью не ясное объяснение явления излучения, а указание на взаимосвязанность различных явлений в Природе и их весьма нетривиальный характер, изучением которого и занимается механика.

Замечание. *Приведенное выше рассуждение справедливо для струны, колеблющейся в воздухе. Мощность излучения струны в воздух весьма мала и на*

концерте гитариста мы слышим не струну, а звучание деки, качество которой и определяет качество звучания. Популярны электрогитары, в которых колебания струны усиливаются специальными усилителями и подаются на динамики, заменяющими деку в классической гитаре.

Глава 8.

Второй закон динамики Эйлера

8.1. Общая формулировка второго закона динамики

Второй фундаментальный закон механики — это уравнение баланса кинетического момента или второй закон динамики Эйлера. Этот закон, строго говоря, отсутствует в ньютоновой механике. Тем не менее, его частная форма под названием теоремы об изменении кинетического момента используется в современных учебниках и монографиях по механике. Следует обратить внимание, что теорему об изменении кинетического момента можно доказать только для системы материальных точек и только при расширенном толковании третьего закона Ньютона, когда в дополнение к равенству (7.1.5) принимается условие о том, что силы между материальными точками направлены вдоль соединяющей эти точки прямой. Приложение этой теоремы к выводу, например, уравнений движения абсолютно твердого тела является незаконным. Тем не менее, конечные результаты оказываются верными. Причины этого станут понятны немного ниже после постулирования второго закона динамики.

Уравнение баланса кинетического момента: *скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки* Q*, равна моменту* $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ *плюс скорость подвода кинетического момента* $\mathbf{k}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A})$ *в тело* $\mathcal{A}$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{8.1.1}$$

Этот закон для закрытых тел $\left(\mathbf{k}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0} \right)$ был открыт Л. Эйлером [79] и носит название *второго закона динамики Эйлера*. В менее строгой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 г. при выводе уравнений динамики твердого тела. Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера в качестве фундаментального закона механики не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как это считал Лагранж, разумеется нельзя.

В дальнейшем считается, что величина $\mathbf{k}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ аддитивна, как по те-

лам, составляющим тело $\mathcal{A}$, так и по телам окружения $\mathcal{A}^e$. Из второго закона динамики вытекает общее утверждение, являющееся продолжением третьего закона Ньютона на моментные взаимодействия. Чтобы доказать это утверждение, разделим тело $\mathcal{A}$ на два отделенных тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Запишем второй закон динамики для тел $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) = \\ = \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e),$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{C}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) = \\ = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e).$$

Складывая эти два равенства и учитывая равенство (8.1.1), получаем

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) - \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \tag{8.1.2}$$

Примем допущение

$$\mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}).$$

Тогда получаем моментный аналог третьего закона Ньютона

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \tag{8.1.3}$$

Иными словами, момент, действующий на тело $\mathcal{B}$ со стороны тела $\mathcal{C}$, равен по величине и противоположен по направлению моменту, действующему со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{C}$. Наконец, из равенства (8.1.3) следует, что момент, действующий на тело $\mathcal{B}$ со стороны самого тела $\mathcal{B}$, равен нулю, т.е. $\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Применим второй закон динамики Эйлера к системе материальных точек. Для системы материальных точек кинетический момент сводится к моменту количества движения

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times \left(m_i \dot{\mathbf{R}}_i\right)^{\cdot}.$$

Исключая отсюда скорость изменения количества движения с помощью уравнения баланса количества движения, получаем

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)].$$

Переставляя индексы суммирования в двойной сумме и складывая получившиеся два равенства с учетом равенства (7.1.3), получаем

$$\dot{\mathbf{K}}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\times[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k)] + \\ + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}^e)]\,.$$

С другой стороны, согласно уравнению баланса кинетического момента (8.1.1) имеем

$$\dot{\mathbf{K}}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}^e)]\,.$$

Здесь учтено, что на материальную точку собственно моменты не могут действовать, поскольку материальная точка не реагирует на повороты. Кроме того, скорость подвода кинетического момента есть просто скорость подвода момента количества движения. Сравнивая между собой два последних равенства, получаем

$$\sum_{i,k=1}^{n}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\times[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k)] = \mathbf{0}.$$

Поскольку в качестве тела $\mathcal{A}$ можно было выбрать любую пару материальных точек, то отсюда получаем

$$(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\times[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k)] = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) = \lambda\gamma_{ik}^{-1}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\,, \quad (8.1.4)$$

где $\lambda(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k)$ есть произвольная скалярная функция, $\gamma_{ik} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|$.

Если $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_k) = \mathbf{0}$, то сила, действующая со стороны материальной точки $\mathcal{A}_k$ на материальную точку $\mathcal{A}_i$, направлена по прямой, соединяющей эти точки. Такие силы принято называть центральными. Таким образом, внутренние силы в системе материальных точек по необходимости являются центральными, т.е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновой механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует. Может показаться, что полученные результаты просто подтверждают справедливость третьего закона Ньютона в его расширенной трактовке. Однако это не так. Действительно, если третий закон Ньютона просто постулируется, то нет ничего особенного в том, что этот постулат может

иногда нарушаться и приводить к ограниченности сферы действия механики. В эйлеровой механике расширенная версия третьего закона уже не постулат, а доказанная теорема, справедливая только для систем материальных точек. Отсюда следуют важные заключения. Например, имеются экспериментально полученные свидетельства, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Физики трактуют этот факт как ограниченность механики. На самом деле по доказанному выше следует только то, что ионы нельзя моделировать материальными точками, но ни о какой ограниченности механики речь здесь идти не может.

В рациональной механике второй закон динамики, обычно применяемый под названием теоремы об изменении кинетического момента, находит очень широкое приложение. На нем основана, например, теория гироскопических приборов. Только малая часть этих приложений будет описана в данной книге. В данном параграфе в качестве иллюстраций будут рассмотрены некоторые простейшие следствия из второго закона динамики.

8.2. Перманентные вращения твердого тела

Трансляционные движения тела по инерции являются простейшим видом движения, при котором центр масс тела движется прямолинейно и равномерно. Именно это движение рассматривает Ньютон в качестве иллюстрации своего первого закона. Но сразу же вслед за этим примером Ньютон пишет [50]: “Волчок, коего части вследствие взаимного сцепления отвлекают друг друга от прямолинейного движения, не перестает равномерно вращаться поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха”. Таким образом, Ньютон полагал, что вращение твердого тела является простой иллюстрацией первого закона и вполне аналогично трансляционному движению. Различие состоит только в том, что постоянной сохраняется угловая скорость тела. Так ли это? Чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим так называемые перманентные вращения, т.е. вращения с постоянной угловой скоростью, абсолютно твердого тела. При этом считаем, что никакие силы и моменты на тело не действуют, т.е. его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.

Выберем инерциальную систему отсчета так, чтобы центр масс тела в ней покоился, и, следовательно, его количество движения обращалось бы в нуль. В качестве полюса в теле выберем центр масс. При этих условиях кинетический момент тела вычисляется по простейшей формуле

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t),$$

где центральный тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}$ вычислен в отсчетном положении, в качестве которого примем положение тела при $t = 0$. При этом $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}$. Поскольку в силу второго закона динамики при отсутствии внешнего момента кинетический момент тела сохраняется, то имеем равенство

$$\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \, \mathbf{m}. \tag{8.2.1}$$

При перманентных вращениях угловая скорость остается постоянной, т.е. $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$. Откуда следует (смотри решение задачи Дарбу в главе 6), что тензор поворота равен

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\omega_0 t \, \mathbf{m}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\omega_0 t \, \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\omega_0 t \, \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_0.$$

Используя этот результат, уравнение (8.2.1) переписываем в следующем виде

$$\mathbf{Q}(\omega_0 t \, \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \lambda \, \boldsymbol{\omega}_0. \tag{8.2.2}$$

Первое равенство в (8.2.2) показывает, что вектор $\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$ является неподвижным вектором тензора поворота $\mathbf{Q}(\omega_0 t \, \mathbf{m})$. Второе равенство в (8.2.2) следует из того факта, что неподвижный вектор тензора поворота находится с точностью до произвольного множителя. С другой стороны, второе равенство в (8.2.2) показывает, что вектор угловой скорости должен быть собственным вектором тензора инерции. Итак, свободные, т.е. в отсутствии внешних воздействий, перманентные вращения твердого тела возможны тогда и только тогда, когда вращения происходят вокруг одной из главных осей инерции тела. Если волчок вращается вокруг одной из своих главных осей инерции, то Ньютон прав, но этот факт никак не может служить иллюстрацией первого закона Ньютона.

8.3. Теорема об изменении момента количества движения

В ньютоновой механике систем материальных точек второй закон динамики может быть доказан как теорема. Действительно, примем, что для системы материальных точек справедлив второй закон Ньютона (7.1.6) в форме, предложенной Л. Эйлером

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\mathbf{R}_i}{dt}\right) = \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.3.1}$$

Кроме того, примем, что справедлив третий закон Ньютона в его расширенном варианте

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = -\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i), \quad (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \mathbf{0}. \tag{8.3.2}$$

Здесь уже равенства (8.3.2) следует воспринимать как дополнительные постулаты, ибо считается, что второй закон динамики не принят. Момент количества движения системы материальных точек вычисляется по формуле (5.2.1)

$$\mathbf{K}_2^{Q}(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times m_k \frac{d\mathbf{R}_k}{dt}.$$

Дифференцируя это равенство по времени и учитывая равенства (8.3.1) и (8.3.2), получаем

$$\frac{d\mathbf{K}_2^{Q}(\mathcal{A})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times m_k \frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j) + \right.$$

$$\left. + \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \right] = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \equiv \mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (8.3.3)$$

Равенство (8.3.3) известно в механике под названием теоремы об изменении момента количества движения. Внешне эта теорема очень похожа на уравнение баланса кинетического момента (8.1.1), но, в отличие от (8.1.1), она справедлива только для систем материальных точек. Тем не менее, при традиционном построении ньютоновой механики ее применяют к системам общего вида. С формальной точки зрения, это, конечно, неправильно, но это не может привести к фактическим ошибкам[1] при условии, что моменты, действующие на систему, порождаются силами, действующими на эту систему. Так, например, обстоит дело при выводе уравнений движения абсолютно твердого тела. С кинематической точки зрения абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, если принять дополнительные ограничения (связи), что расстояния между материальными точками системы не меняются в процессе движения. Но теорема об изменении количества движения в этом случае, строго говоря, не применима, поскольку для твердого тела равенства (8.3.2) теряют смысл и неправильны[2]. Тем не менее, назовем ли мы равенство (8.3.3) теоремой и незаконно применим ее к выводу уравнений движения абсолютно твердого тела или скажем, что мы используем постулат (8.1.1), результирующие уравнения при этом никак не изменятся. Если же на абсолютно твердое тело действуют моменты, не порождаемые силами, то теорема об изменении момента количества движения ничего не дает даже при принятии аксиом (8.3.2).

[1] Здесь мы видим важную особенность классической механики. Развитие механики ведет к укреплению ее логических основ и расширению ее сферы действия, но не отменяет используемых ею ранее законов.

[2] В абсолютно твердом теле внутренние силы не определены и не могут быть определены в принципе.

8.4. Иллюстрация неполноты механики Ньютона

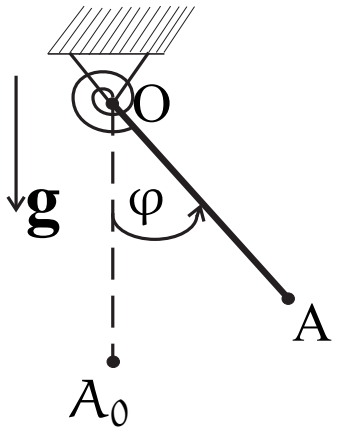

Рис. 8.1. Маятник с упругой опорой

Пусть дано точечное тело с массой $\mathfrak{m}$, которое будем рассматривать как материальную точку. Пусть это тело присоединено к концу абсолютно твердого безынерционного, т.е. не имеющего массы, стержня. Второй конец стержня закреплен с помощью цилиндрического шарнира в точке, неподвижной в данной инерциальной системе отсчета, и может свободно поворачиваться в плоскости, ортогональной оси цилиндрического шарнира. На точечную массу действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Поэтому вертикальное положение стержня, когда точечная масса находится в нижнем положении, является положением устойчивого равновесия. В рассмотренной системе есть еще одно положение равновесия, когда стержень направлен вертикально вверх, и точечная масса находится в верхнем положении. Это — неустойчивое положение равновесия. Исключим это положение равновесия введением упругой пружины, препятствующей отклонению стержня от вертикали. Причем будем считать, что пружина не создает момента, когда точечная масса находится в нижнем положении. Теперь рассматриваемая система, показанная на рис. 8.1, имеет единственное и притом устойчивое положение равновесия. Если стержень отклонить от вертикали и затем придать ему начальную угловую скорость, которая может быть и нулевой, то стержень с точечной массой начнет совершать колебания в вертикальной плоскости. Требуется вывести уравнение движения точечной массы. Введем обозначения: тело $\mathcal{A}$ есть точечная масса, тело $\mathcal{B}$ — стержень, тело $\mathcal{C}$ — пружина, тело $\mathcal{D}$ — цилиндрический шарнир, вектор $\mathbf{R}(\mathrm{t})$ есть вектор положения точечной массы в момент времени t, l — длина стержня.

Целью данного пункта является не столько вывод уравнения движения рассматриваемой системы, сколько демонстрация неполноты ньютоновой механики. В частности, ниже будет показано, что теорема об изменении момента количества движения, доказанная в предыдущем пункте для системы материальных точек, не является заменой второго закона динамики Эйлера для рассматриваемой системы.

Запишем второй закон Ньютона или, что в рассматриваемом случае одно и то же, первый закон динамики Эйлера для тела $\mathcal{A}$

$$\mathfrak{m}\,\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) - \mathfrak{m}g\mathbf{k}, \tag{8.4.1}$$

где $\mathbf{k}$ есть единичный орт вертикали, направленный вверх; вектор $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ есть сила, действующая на массу со стороны стержня; $(-m g\,\mathbf{k})$ — сила тяжести.

Никаких других сил на точечную массу не действует. Запишем первый закон динамики Эйлера для стержня. Поскольку он не обладает массой, то он не имеет количества движения. Поэтому имеем

$$\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{A}) + \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mathbf{0}. \tag{8.4.2}$$

По определению, пружина реагирует только на поворот стержня, т.е.

$$\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \mathbf{0}.$$

Два векторных уравнения (8.4.1) и (8.4.2) содержат три неизвестных вектора: $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ и $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D})$. Иными словами, система оказалась незамкнутой. Ничего не дает нам и теорема об изменении момента количества движения системы. Действительно, умножим обе части каждого из уравнений (8.4.1) и (8.4.2) векторно на вектор $\mathbf{R}(t)$ и сложим получившиеся уравнения. В результате получим

$$m\left[\mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t)\right]^{\cdot} = -m g\,\mathbf{R}(t)\times\mathbf{k} + \mathbf{R}(t)\times\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D}). \tag{8.4.3}$$

Уравнение (8.4.3) по существу не дает нам нового уравнения и потому не позволяет сократить число неизвестных векторов. Ситуация была бы существенно иной, если бы вместо стержня мы рассматривали нить. В таком случае мы бы сказали, что сила $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D})$ направлена вдоль нити

$$\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mu\,\mathbf{R}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t)\times\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mathbf{0}. \tag{8.4.4}$$

Конечно, условие (8.4.4) все равно осталось бы просто допущением, но это допущение для нити очевидно по здравому смыслу и потому приемлемо. Более того, оно является еще и правильным[3], хотя без использования второго закона динамики Эйлера доказать это невозможно. Покажем, что условие (8.4.4) действительно позволяет вывести уравнение движения маятника. Для этого заметим, что при плоских движениях маятника справедливо равенство

$$\mathbf{R}(t) = l\,(-\cos\varphi\,\mathbf{k} + \sin\varphi\,\mathbf{j}), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t) = l^2\,\dot{\varphi}\,\mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ — единичный вектор, ортогональный плоскости движения маятника; $\mathbf{j}$ — единичный горизонтальный вектор такой что тройка единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ является правой.

[3]Напомним в вольном пересказе знаменитую теорему Геделя [71] о неполноте: *в рамках любой теории, основанной на непротиворечивой системе аксиом, существуют правильные утверждения, которые нельзя доказать на основе принятых аксиом.* В механике эта теорема находит многочисленные подтверждения.

Подставляя последнее равенство в уравнение и используя условие (8.4.4), получаем уравнение для нахождения угла $\varphi(t)$

$$m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0. \tag{8.4.5}$$

Уравнение (8.4.5) называется уравнением плоских движений математического маятника, а система, состоящая из нити и точечного груза, называется математическим маятником. Уравнение (8.4.5) справедливо только в том случае, если нить растянута, поскольку нить не сопротивляется сжатию. Условие того, что нить растянута, выражается следующим неравенством

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \cdot \left[m \ddot{\mathbf{R}} + mg\mathbf{k} \right] \leq 0.$$

Здесь было использовано уравнение (8.4.1). Выражая здесь вектор $\ddot{\mathbf{R}}$ через угол φ, переписываем последнее неравенство в другой форме

$$l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi \geq 0. \tag{8.4.6}$$

Неравенство (8.4.6) можно переписать в терминах начальных отклонений и скоростей, если воспользоваться интегралом энергии, который для уравнения (8.4.5) легко находится. Делать этого не будем, поскольку нас интересует совсем другой вопрос.

Итак, решение рассматриваемой задачи в рамках механики Ньютона оказывается невозможным. Это и не удивительно, ибо в уравнение баланса количества движения невозможно включить момент, создаваемый пружиной. Теорема об изменении момента количества движения также не может учесть этот момент, поскольку эта теорема выводится из уравнения баланса количества движения. Предположение (8.4.4) позволяет решить задачу, но для физически другой системы. Пружина, работающая на поворот, не может оказать влияния на нить, которая будет просто изгибаться в точке прикрепления пружины к нити. Между тем, очевидно, что пружина существенно влияет на движение абсолютно твердого стержня и, следовательно, на движение всей рассматриваемой системы. Рассмотрим вышеописанную задачу в рамках механики Эйлера. Тела $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будем рассматривать как единое тело $\mathcal{E} = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. В качестве отсчетного положения для тела $\mathcal{E}$ выберем положение, когда точечная масса находится в низшем положении. В качестве полюса в теле выбираем точку в шарнире. Тогда полюс при движении тела $\mathcal{E}$ будет оставаться неподвижным. Тензор инерции тела $\mathcal{E}$ в отсчетном положении вычисляется по формуле (5.7.2)

$$\boldsymbol{\Theta} = m\, l^2 \left(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \right).$$

Поскольку тело совершает движения в плоскости, то оно может поворачиваться только вокруг нормали к этой плоскости. При этом тензор поворота дается выражением

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\varphi)\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{i} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbf{i}.$$

Второй закон динамики Эйлера для тела $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\left(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot} \equiv ml^2\,\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) - mg\,\mathbf{R} \times \mathbf{k}, \tag{8.4.7}$$

где $\mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ — момент, создаваемый пружиной.

Примем простейшее определяющее уравнение для пружины

$$\mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) = -c\,\varphi\,\mathbf{i}, \tag{8.4.8}$$

где c — жесткость пружины на поворот; $\varphi = 0$, когда точечная масса находится в низшем положении.

Подставляя (8.4.8) в (8.4.7), получаем уравнение для определения угла поворота

$$ml^2\ \ddot{\varphi} + c\,\varphi + mg\,\sin\varphi = 0. \tag{8.4.9}$$

При $c = 0$ уравнение (8.4.9) переходит в уравнение (8.4.5), но остается справедливым без ограничения, выражаемого неравенством (8.4.6), поскольку стержень выдерживает и сжимающие усилия. Проверим выполняется ли условие (8.4.4) в данной задаче. Для этого достаточно применить второй закон динамики Эйлера к безынерционному телу $\mathcal{B}$ и учесть, что его кинетический момент равен нулю. В качестве опорной точки выбираем шарнирно закрепленный конец стержня. При вычислении момента $\mathbf{M}^{O}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ точку приведения выбираем в точке сцепления с точечной массой. Тогда получим

$$\mathbf{M}^{O}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{e}) = \mathbf{M}^{O}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) + \mathbf{M}^{O}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) - c\,\varphi\,\mathbf{i} = \\ = -\mathbf{R} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) - c\,\varphi\,\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Как видим, сила, передаваемая стержнем, при $\varphi \neq 0$ не является продольной, т.е. не направлена вдоль стержня, как в нити. Последнее равенство, строго говоря, не может быть получено в рамках механики Ньютона. Тем не менее, если им все же воспользоваться, то теорему об изменении кинетического момента (8.4.3) можно переписать следующим образом

$$m\left[\mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}\,(t)\right]^{\cdot} = -mg\,\mathbf{R}(t) \times \mathbf{k} - c\,\varphi\,\mathbf{i}.$$

Нетрудно убедиться, что из этого равенства следует уравнение (8.4.9). Иными словами, второй закон динамики в рассматриваемой задаче можно не использовать, но взамен приходится использовать второй закон статики, который также невозможно доказать в рамках механики Ньютона. Отсюда видим недостаточность законов Ньютона для решения рассматриваемой задачи.

8.5. Динамические уравнения Эйлера

Уравнения вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки были выведены Л. Эйлером в 1758 г., т.е. до открытия им второго закона динамики как независимого постулата механики. При выводе он опирался на теорему об изменении момента количества движения, хотя в то время эта теорема так не называлась, но использовалась. Более того, при строгом использовании теорема об изменении момента количества ничего не могла бы дать, аналогично тому, что мы имели в предыдущем пункте. Но, при наличии гениального ума, можно и неправильными методами получать надежные и правильные результаты. Нормальным людям лучше пользоваться правильными методами.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной точки. Последнюю выберем в качестве полюса в теле. Тогда кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела вычисляются по формулам (5.3.4), (5.3.7) и (5.3.8) соответственно. Кинетическая энергия может быть записана в двух эквивалентных формах

$$\mathsf{K}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}, \tag{8.5.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ суть левая и правая угловые скорости тела соответственно; тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}$ вычислен относительно неподвижной точки тела в отсчетном положении.

Для количества движения имеем представление

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\,\frac{d\mathbf{R}_C(t)}{dt} = m\,\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{R}_C(t), \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}_c, \tag{8.5.2}$$

где вектор $\mathbf{r}_c$ определяет положение центра масс тела относительно неподвижной точки в отсчетном положении, а вектор $\mathbf{R}_C$ определяет положение центра масс относительно неподвижной точки в актуальном положении.

При вычислении кинетического момента тела в качестве опорной точки выбираем неподвижную точку. Тогда получаем следующие выражения

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t)\cdot\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{8.5.3}$$

Обратимся к вычислению сил и моментов, действующих на тело $\mathcal{A}$. При этом воспользуемся аксиомами аддитивности. В результате получим

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = \mathbf{Q} + \int\limits_{(m)} \mathcal{F}(r,\mathcal{A}^e)\,dm(r),$$

$$\mathbf{M}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\mathbf{L}+\int\limits_{(\mathfrak{m})}[\mathfrak{L}(\mathrm{r},\mathcal{A}^e)+\mathbf{R}(\mathrm{r})\times\mathfrak{F}(\mathrm{r},\mathcal{A}^e)]\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(\mathrm{r}),$$

где $\mathfrak{F}(\mathrm{r},\mathcal{A}^e)$ есть массовая плотность внешней силы, действующей на точку тела, определяемую в отсчетном положении вектором $\mathbf{r}$; вектор $\mathfrak{F}(\mathrm{r},\mathcal{A}^e)$ — массовая плотность момента, действующего на точку $\mathbf{r}$; векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}$ суть силовая и моментная реакции опоры (сферического шарнира), фиксирующей неподвижную точку тела; если опора не сопротивляется повороту тела вокруг нее, то $\mathbf{L}=\mathbf{0}$.

Запишем первый закон динамики для рассматриваемого тела с учетом вышеуказанных формул

$$[\mathfrak{m}\,\boldsymbol{\omega}(\mathrm{t})\times\mathbf{R}_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})]^{\cdot}=\mathbf{Q}+\int\limits_{(\mathfrak{m})}\mathfrak{F}(\mathrm{r},\mathcal{A}^e)\mathrm{d}\mathfrak{m}(\mathrm{r}).$$

Это уравнение позволяет вычислить реакцию $\mathbf{Q}$ в опоре, если угловая скорость тела известна. Для определения угловой скорости тела необходимо воспользоваться вторым законом динамики, который можно представить в двух формах: через левую (истинную) и правую угловые скорости тела. В терминах левой угловой скорости второй закон динамики имеет вид

$$\left[\mathbf{P}(\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{\omega}\right]^{\cdot}=\mathbf{M}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).\tag{8.5.4}$$

Второй закон динамики в форме (8.5.4) удобен при рассмотрении свободных вращений тела при $\mathbf{M}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\mathbf{0}$. Чтобы записать второй закон динамики в терминах правой угловой скорости, нужно воспользоваться вторым из представлений (8.5.3) и следующей формулой

$$\dot{\mathbf{K}}_2(\mathcal{A})=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}+(\mathbf{P}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\mathbf{P}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega})=$$
$$=\mathbf{P}\cdot\left(\boldsymbol{\Theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}\right).$$

Здесь мы воспользовались правым уравнением Пуассона. С учетом этого выражения второй закон динамики (8.1.1) для закрытого тела можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\Theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).\tag{8.5.5}$$

Уравнение (8.5.5) есть тензорная запись динамических уравнений Л. Эйлера, которые у Л. Эйлера и в книгах по механике представлены в проекциях на главные оси инерции. Приведем и эту форму динамических уравнений Л. Эйлера. Пусть векторы $\mathbf{d}_{\mathrm{k}}$ суть собственные векторы тензора инерции $\boldsymbol{\Theta}$, который задан в отсчетном положении, т.е. векторы $\mathbf{d}_{\mathrm{k}}$ не зависят от времени. Тогда векторы $\mathbf{D}_{\mathrm{k}}=\mathbf{P}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{d}_{\mathrm{k}}$ будут собственными векторами тензора инерции

$\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{T}(t)$ в актуальном положении. Спектральные разложения тензоров инерции в отсчетном и актуальном положениях имеют соответственно вид

$$\boldsymbol{\Theta}=\Theta_1\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1+\Theta_2\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2+\Theta_3\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_3,$$

$$\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{T}(t)=\Theta_1\mathbf{D}_1\otimes\mathbf{D}_1+\Theta_2\mathbf{D}_2\otimes\mathbf{D}_2+\Theta_3\mathbf{D}_3\otimes\mathbf{D}_3.$$

Кроме того, имеем очевидные формулы

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{D}_k(t)\otimes\mathbf{d}_k\quad\Rightarrow\quad\omega_k\equiv\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{D}_k=\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{d}_k\equiv\Omega_k\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\boldsymbol{\omega}=\omega_k\mathbf{D}_k,\quad\boldsymbol{\Omega}=\Omega_k\mathbf{d}_k.$$

Получили, что проекции левой угловой скорости на вращающиеся собственные вектора тензора инерции равны проекциям правой угловой скорости на неподвижные собственные векторы тензора инерции в отсчетном положении. Проецируя левую часть уравнения (8.5.5) на векторы $\mathbf{d}_k$, т.е. умножая их скалярно на векторы $\mathbf{d}_k$, получаем

$$\mathbf{d}_k\cdot\left(\boldsymbol{\Theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)=\Theta_k\dot{\Omega}_k+\sum_{s,m=1}^{3}e_{skm}\Theta_s\Omega_s\Omega_m,$$

где суммирование по повторяющемуся индексу k не производится.

Проецируя правую часть уравнения (8.5.5) на векторы $\mathbf{d}_k$, получаем

$$\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{P}^{T}(t)\cdot\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\mathbf{D}_k\cdot\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)\equiv M_k(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).$$

В координатном виде динамические уравнения Л. Эйлера (8.5.5) имеют вид

$$\Theta_k\dot{\Omega}_k+\sum_{s,m=1}^{3}e_{skm}\Theta_s\Omega_s\Omega_m=M_k(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)\quad(\text{не суммировать по }k),\qquad(8.5.6)$$

где e_{skm} есть символ Риччи или символ перестановки [18].

В развернутом виде уравнения (8.5.6) записываются так

$$\begin{aligned}&\Theta_1\dot{\Omega}_1+(\Theta_3-\Theta_2)\,\Omega_2\Omega_3=M_1(\mathcal{A},\mathcal{A}^e),\\&\Theta_2\dot{\Omega}_2+(\Theta_1-\Theta_3)\,\Omega_1\Omega_3=M_2(\mathcal{A},\mathcal{A}^e),\\&\Theta_3\dot{\Omega}_3+(\Theta_2-\Theta_1)\,\Omega_1\Omega_2=M_3(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).\end{aligned}\qquad(8.5.7)$$

Уравнения (8.5.7) в книгах по механике называют динамическими уравнениями Л. Эйлера, поскольку именно в такой форме они впервые появились у Л. Эйлера. Заметим, что во времена Л. Эйлера ни векторное, ни, тем более, тензорное исчисления еще не были разработаны. Как ни удивительно, но

Л. Эйлер фактически знал эти разделы математики. Практически все исследования по динамике абсолютно твердого тела основаны на использовании динамических уравнений Л. Эйлера в форме (8.5.7).

В заключение этого пункта приведем еще одну форму динамических уравнений Л. Эйлера. Поскольку тензор инерции невырожден, т.е. его определитель отличен от нуля, то он допускает построение обратного тензора. Напомним тождество [18], которое для симметричных невырожденных тензоров принимает вид

$$(\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{a})\times(\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{b})=(\det\boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\quad\forall\,\mathbf{a},\,\mathbf{b}.$$

Умножая обе части равенства (8.5.5) на тензор $\boldsymbol{\Theta}^{-1}$ слева и учитывая вышеуказанное тождество, получаем [92] уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}+\frac{1}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}(\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Omega})\times(\boldsymbol{\Theta}^2\cdot\boldsymbol{\Omega})=\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e).\tag{8.5.8}$$

В некоторых случаях уравнение (8.5.8) оказывается более удобным, нежели другие формы динамических уравнений Л. Эйлера. Вернемся, например, к утверждению И. Ньютона, процитированному в предыдущем пункте. И. Ньютон говорит о равномерном вращении волчка. В предыдущем пункте мы истолковали утверждение И. Ньютона как вращение с постоянной угловой скоростью. Но можно истолковать это утверждение иначе. А именно, как вращение с постоянной по модулю угловой скоростью. Выясним, возможны ли такие вращения, если они происходят не вокруг главных осей инерции, т.е. не являются перманентными. Для этого примем, что $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=\mathbf{0}$. Умножим уравнение (8.5.8) скалярно на правый вектор угловой скорости и получим

$$\frac{1}{2}\frac{d(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})}{dt}=\frac{(\Theta_3-\Theta_1)\,(\Theta_3-\Theta_2)\,(\Theta_2-\Theta_1)}{\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3}\Omega_1\Omega_2\Omega_3,\quad\Omega_1\Omega_2\Omega_3\neq 0.\tag{8.5.9}$$

Последнее неравенство есть условие, что вращения не являются перманентными. Из уравнения (8.5.9) видим, что вращение будет происходить равномерно, т.е. с постоянной по модулю угловой скоростью, тогда, когда два главных момента инерции у тела совпадают. Другие варианты вращений с постоянной по модулю угловой скоростью возникают в случае, когда $\Omega_i=0$, $\Omega_j\Omega_k\neq 0$, $i\neq j\neq k\neq i$. Такие вращения также не являются перманентными. Волчком обычно называют тело вращения, т.е. тело с трансверсально изотропным тензором инерции, два собственных числа которого совпадают между собой. Иными словами, для волчка утверждение И. Ньютона оказывается правильным, если, конечно, равномерность понимать в вышеуказанном смысле. Воистину Великие часто оказываются правыми даже тогда, когда они ошибаются.

8.6. Свободные вращения твердого тела

Если на тело не действуют никакие внешние воздействия, то говорят, что тело движется по инерции или совершает свободные движения. В этом случае два закона динамики Эйлера выражают собой основную аксиому механики. Первый закон динамики утверждает, что центр масс тела движется равномерно и прямолинейно. Этот факт легко воспринимается и известен каждому школьнику. Второй закон утверждает постоянство кинетического момента тела. Но как при этом будет вращаться и поворачиваться тело? На этот вопрос не ответит не только школьник, но он труден даже для специалиста. Последнему придется провести некоторые, причем не очень простые, вычисления прежде, чем он скажет, как именно будет вращаться тело. Уже в этом факте мы видим, что включение спинорных движений в сферу действия механики влечет за собой значительные усложнения. Это, конечно, печально, но это необходимость, продиктованная самой Природой. Без учета спинорных движений электричество, магнетизм и вообще микромир останутся для теории тайной за семью печатями.

Пусть нам дано абсолютно твердое тело с тензором инерции $\boldsymbol{\Theta}$, вычисленным в отсчетном положении. В качестве последнего выберем положение тела в начальный момент времени $t = 0$. Пусть в начальный момент времени угловая скорость тела определялась заданным вектором $\boldsymbol{\omega}_0$. Пусть, наконец, при $t > 0$ тело предоставлено самому себе и движется по инерции. Требуется найти повороты и вращения рассматриваемого тела при $t > 0$. Для ответа на этот вопрос требуется найти решение уравнения (8.2.1). Но оно содержит две неизвестных функции: вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Поэтому к уравнению (8.2.1) необходимо добавить уравнение Пуассона, связывающее повороты и вращения. В результате приходим к следующей задаче

$$\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t),$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0. \tag{8.6.1}$$

Для тензора инерции общего вида задача (8.6.1) имеет довольно сложное решение, которое было построено Л. Эйлером и представлено в книгах по механике под названием случая Эйлера в динамике твердого тела. Полное решение будет изложено в главе, посвященной динамике абсолютно твердого тела. Задача (8.6.1) резко упрощается, если два или три главных момента инерции совпадают. В простейшем случае тензор инерции является шаровым $\boldsymbol{\Theta} = \Theta\mathbf{E}$. Задача (8.6.1) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\omega_0 t\, \mathbf{m}).$$

Шаровой тензор инерции как бы уравнивает трансляционные и спинорные движения. Различие только в том, что в первом случае при движении по инерции постоянной является трансляционная скорость, а во втором — постоянна угловая скорость тела.

Случай трансверсально изотропного тензора инерции будет рассмотрен в следующем пункте.

8.7. Движение твердого тела в центральном поле тяготения

Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело с массой M. Пусть в поле тяготения этого тела движется абсолютно твердое тело A с массой m. С физической точки зрения эта задача близка к движению электрона в кулоновом поле ядра, но при этом нам пришлось бы ввести дополнительные понятия, которые пока вводить преждевременно. Поэтому рассмотрим более привычную постановку задачи. Будем рассматривать абсолютно твердое тело, размеры которого пренебрежимо малы в сравнении с расстоянием между центром масс тела и точечным телом, расположенным в начале системы отсчета. Тензор инерции тела A считается трансверсально изотропным и в отсчетном положении имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu \left(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right), \tag{8.7.1}$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный моменты инерции тела A соответственно.

Количество движения и кинетический момент тела A задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \tag{8.7.2}$$

где $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ суть вектор положения центра масс тела A и тензор поворота тела A соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела A, которая связана с тензором поворота тела A уравнением Пуассона (4.5.4).

В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела A.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{R}} \right) = -G\frac{Mm}{R^3}\mathbf{R}, \tag{8.7.3}$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная.

Уравнение (8.7.3) имеет четыре интеграла движения (один скалярный и один векторный). Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (8.7.3) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{R}} - G\,\frac{mM}{R} \equiv \mathcal{E}_T = \text{const}, \tag{8.7.4}$$

где $\mathcal{E}_T$ будем называть энергией трансляционного движения тела A.

Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения или интегралом площадей, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (8.7.3) на вектор $\mathbf{R}$ и имеет вид

$$\mathbf{R}\times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{8.7.5}$$

Из последнего равенства видно, что траектория центра масс тела A лежит в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{H}$ и называемой плоскостью эклиптики. Решение задачи (8.7.3) – (8.7.5) нетрудно построить, но здесь оно опускается и будет рассмотрено в последующих главах.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}(t)\times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t)\right) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (8.7.5) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела A. Этот интеграл дается выражением

$$\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \tag{8.7.6}$$

Интеграл (8.7.6) дает нам уравнение для определения угловой скорости. Иными словами, пришли к задаче, сформулированной в предыдущем пункте и определяемой уравнениями (8.6.1). Равенство (8.7.6) можно переписать в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\mathbf{L}. \tag{8.7.7}$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела A. Разумеется, к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}_0. \tag{8.7.8}$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела A выбрано его начальное положение. Решение задачи (8.7.7) – (8.7.8) рассмотрим немного подробнее. Нетрудно убедится, что уравнение (8.7.7) допускает интеграл,

который выражает закон сохранения энергии спинорного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку часть энергии вращательного движения, т.е. энергия трансляционного движения тела A вокруг центра притяжения, уже вошла в интеграл (8.7.4). Энергия спинорного движения вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\mathbf{L}. \quad (8.7.9)$$

Вычисляя производную по времени от энергии $\mathcal{E}_S$ и учитывая уравнения Пуассона и (8.7.7), немедленно убеждаемся, что энергия спинорного движения $\mathcal{E}_S$ сохраняется неизменной

$$2\dot{\mathcal{E}}_S = (\mathbf{L}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\mathbf{L} - \mathbf{L}\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}) = \\ = (\mathbf{L}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}) = 0.$$

Всякий тензор поворота выражается через три параметра. Например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра доказана в работе [19] и выражается равенством (3.8.1). Закон сохранения энергии спинорного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три вышеупомянутых параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (8.7.9). В результате, тензор поворота, тождественно удовлетворяющий закон сохранения энергии спинорного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}(t)) \equiv (1-\cos\varphi)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\varphi\,\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{m}\times\mathbf{E} \quad (8.7.10)$$

для поворота на угол φ вокруг вектора $\mathbf{m}$. Тогда искомый двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции двух поворотов

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}), \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const}, \quad (8.7.11)$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии $\mathbf{e}$ тела A, а угол прецессии ψ задает прецессию тела A вокруг постоянного вектора динамического спина $\mathbf{L}$.

Подстановка (8.7.11) в (8.7.9) дает

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e})\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{e})\cdot\mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m})\cdot\mathbf{L} = \\ = \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{L} = \text{const}. \quad (8.7.12)$$

Здесь учтены очевидные тождества

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{e}\cdot\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) = \mathbf{e}, \quad \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e})\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{e}) = \boldsymbol{\Theta}^{-1}.$$

Таким образом, двухпараметрическое представление тензора поворота (8.7.11) сохраняет энергию спинорного движения при любых значениях углов φ и ψ. Вычисляя угловую скорость композиции поворотов (8.7.11), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{Q}\,(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}\,(\psi\mathbf{m}) \cdot \left(\dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{e}\right). \tag{8.7.13}$$

С другой стороны, подставляя представление (8.7.11) в уравнение (8.7.7), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{Q}\,(\psi\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{Q}\,(\psi\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \tag{8.7.14}$$

Сравнивая выражения (8.7.13) и (8.7.14), приходим к уравнению

$$\dot{\psi}\mathbf{L} + l\dot{\varphi}\mathbf{e} = l\boldsymbol{\omega}_0, \quad l = \sqrt{\mu^2\omega_0^2 + (\lambda^2 - \mu^2)\,(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)^2}, \tag{8.7.15}$$

где l есть модуль вектора $\mathbf{L}$.

Решение уравнения (8.7.15) находится элементарно и имеет вид

$$\psi = \frac{tl}{\mu}, \quad \varphi = \frac{t\,(\mu - \lambda)}{\mu}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{t\,(\mu - \lambda)}{\lambda\mu}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}). \tag{8.7.16}$$

Таким образом, мы видим, что ось тела A прецессирует вокруг вектора динамического спина

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}\,(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}\,(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}\,(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' \cdot \mathbf{L} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \tag{8.7.17}$$

с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным. Движение такого рода в динамике твердого тела называют регулярной прецессией.

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо при пренебрежении влиянием Луны и гравитационного момента от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно

$$\lambda \simeq 1,0033\,\mu.$$

К сожалению, автор не знаком с деталями наблюдений по изучению вращения Земли и потому не в состоянии судить о степени их точности. Много полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [27]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [27], что ось Земли также фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^{\circ}33'$. Согласно (8.7.17) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда

и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае имеем

$$\mathbf{L} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\mathbf{e} = \text{const}, \quad \mathfrak{l} = |\mathbf{L}| = \lambda\,\omega_0, \tag{8.7.18}$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. С другой стороны, имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но, в дополнение к этому объяснению, существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться. Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле определяется не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси вокруг вектора динамического спина, как это видно из формул (8.7.16).

Примечание. *Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спинорные движения. Обсуждение проблем квантовой физики, разумеется, выходит за рамки данной книги, но можно обратить внимание на следующее обстоятельство. Одной из важнейших и наиболее мистических формул в квантовой физике является формула для кванта энергии или энергии фотона [42]. Эта знаменитая формула имеет вид* $\mathsf{E} = \hbar\,\omega$, *где* $\hbar$ *есть постоянная Планка. На первый взгляд, эта формула решительно не согласуется с классической механикой, ибо в ней энергия зависит от скорости линейно, а не квадратично. Обратим, однако, внимание на формулу для энергии спинорного движения (8.7.9)*

$$2\,\mathcal{E}_S = \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}(t).$$

Она также линейно зависит от угловой скорости и внешне похожа на формулу для кванта энергии, особенно в случае, когда направления угловой скорости и динамического спина совпадают.

8.8. Реакция в опоре свободно вращающегося тела

Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена и никаких сил, кроме силовой реакции в опоре, на тело не действует.

Эта задача мало отличается от рассмотренной выше, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{\mathbf{R}}\right) = \mathbf{F}, \tag{8.8.1}$$

где вектор $\mathbf{R}$ определяет положение центра масс относительно неподвижной точки, сила $\mathbf{F}$ есть реакция в неподвижной точке.

Уравнение (8.8.1) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики имеем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}, \tag{8.8.2}$$

где вектор $\mathbf{r}$ задает положение центра масс тела в отсчетном положении.

Для нахождения тензора поворота P необходимо записать второй закон динамики. Имеем

$$\left(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \mathrm{const}, \tag{8.8.3}$$

где тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}$ вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально изотропным.

Решение задачи (8.8.3) при заданных начальных условиях ничем не отличается от решения (8.7.11) – (8.7.16), построенного в предыдущем примере. Использовав (8.8.1), вычислим реакцию в опоре

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\varphi}\left(\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e}\right)\right] \cdot \mathbf{Q}\left(\varphi\mathbf{e}\right) \cdot \mathbf{r}. \tag{8.8.4}$$

В выражении (8.8.4) использованы обозначения, принятые в (8.7.11)–(8.7.16). Как видим, реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора $\mathbf{R}$, определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем далее два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находиться в различных точках тела, причем движение центров масс неконтролируемо. Если бы мы были физиками, то заявили бы, что эксперимент решительно опровергает классическую механику, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого

факта мы начали бы придумывать вероятностные трактовки. В сказанном нет никакого преувеличения. В этом может убедиться каждый, кто не поленится заглянуть в книги по атомной физике, которые насыщены заявлениями “о решительном разрыве с классической механикой”. Причем оснований для этого ничуть не больше, чем в приведенном примере.

8.9. Быстровращающийся гироскоп

Абсолютно твердое тело с трансверсально изотропным тензором инерции, вращающееся вокруг неподвижной точки, называют гироскопом [41]. В технике гироскопы находят очень широкое применение и обычно являются телами вращения. Но нередко [39] гироскопом называют тело с произвольным тензором инерции, и даже не обязательно вращающимся вокруг неподвижной точки. Так что термин *“гироскоп”* не является однозначно определенным и применяется в разных смыслах. Начальные понятия о гироскопах читатель может найти в учебнике [41], а более детальные сведения в книге [39]. Кроме того, по гироскопам существует обширная литература. Описание приложений не входит в цели главы, посвященной обсуждению фундаментальных законов механики, но при изложении второго закона динамики не упомянуть гироскопы совершенно невозможно. Тем более, что гироскопы особенно ярко демонстрируют принципиальные различия между спинорными и трансляционными движениями. Ниже будет рассмотрена простейшая из возникающих здесь задач. К сожалению, обсуждению поведения гироскопа мы вынуждены предпослать относительно длинное решение задачи о быстровращающемся гироскопе. При этом не будут использоваться подходы, типичные для динамики твердого тела. Здесь уместно процитировать известного специалиста по теории гироскопов К. Магнуса [39], с.117: “*Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение нелинейных уравнений движения. Как бы ни были привлекательны для математика достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они почти (или даже совсем) не представляют интереса*”. Поэтому ниже будет представлено приближенное, но с очень высокой степенью точности, решение, причем оно будет найдено в явной форме и выражено через элементарные функции. Сравнивая полученное ниже решение с результатами, представленными в книгах[4] по динамике твердого тела, необходимо соблюдать известную осторожность. В частности, при их получении использовалось

[4]Даже терминология не всегда совпадает. Используемая в данной книге терминология близка к таковой в учебнике [41], но сильно отличается от принятой в книге [39].

представление тензора поворота через углы Эйлера, которые в данной задаче неудобны. Ниже используется другое представление тензора поворота.

Итак, рассмотрим тело с трансверсально изотропным тензором инерции, который вычислен относительно неподвижной точки и в отсчетном положении определен выражением

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu \left(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right),$$

где $\mathbf{e}$ есть единичный вектор, задающий ось изотропии, λ и μ суть осевой и экваториальный моменты инерции соответственно.

Будем считать, что начало системы отсчета расположено в точке O, а центр масс расположен на оси симметрии

$$\mathbf{r}_C = l\,\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C = l\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{e} \equiv l\,\mathbf{e}',$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; $\mathbf{r}_C$ и $\mathbf{R}_C$ суть векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях соответственно.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с тензором поворота $\mathbf{P}$ уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \tag{8.9.1}$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ тела $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mu\,\boldsymbol{\omega} + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела $\mathcal{A}$

$$[\boldsymbol{\omega} + \eta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']^{\cdot} = \nu\,\mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \tag{8.9.2}$$

где $\mathbf{k}$ — орт вертикали; m — масса тела; g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}. \tag{8.9.3}$$

Система уравнений (8.9.1) – (8.9.2) с начальными условиями (8.9.3) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [40, 41]. Решение этой задачи в полном объеме будет изложено в главе, посвященной динамике твердого тела. Ниже рассматривается частный случай, когда $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}$. Кроме того, модуль начальной угловой скорости ω_0 будет считаться достаточно большим. Более точный смысл этого утверждения будет указан позднее. Вычислим проекцию уравнения (8.9.2) на орт $\mathbf{e}'$. При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot}.$$

С учетом этого равенства проекция уравнения (8.9.2) на орт $\mathbf{e}'$ дает

$$(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}')^{\cdot}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}'=\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{e}=\omega_0. \tag{8.9.4}$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (8.9.3). Интеграл (8.9.4) впервые был получен Лагранжем и потому его принято называть интегралом Лагранжа. Теперь уравнение (8.9.2) принимает вид

$$(\boldsymbol{\omega}+\eta\,\omega_0\mathbf{e}')^{\cdot}\equiv\dot{\boldsymbol{\omega}}+\eta\,\omega_0\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}'=\nu\,\mathbf{k}\times\mathbf{e}'. \tag{8.9.5}$$

Для уравнения (8.9.5) нетрудно получить еще два интеграла. Классические подходы существенно опираются на эти интегралы, но в излагаемом ниже решении они практически не используются. Укажем только, что один из них называется интегралом энергии и получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (8.9.5) на вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\nu\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}'=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{\omega}_0+\nu\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}=\text{const}. \tag{8.9.6}$$

Интеграл энергии (8.9.6), в совокупности с интегралом Лагранжа, утверждает постоянство суммы кинетической и потенциальной энергии тела. Из интеграла энергии (8.9.6) немедленно вытекают неравенства

$$-(1-\cos\alpha)\frac{2\nu}{\omega_0^2}\le\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\le(1+\cos\alpha)\frac{2\nu}{\omega_0^2}\equiv(1+\cos\alpha)\frac{2mgl}{\mu\omega_0^2},\quad \cos\alpha=\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}.$$

Из этого неравенства видим, что для быстровращающегося гироскопа, т.е. при $2\nu/\omega_0^2<<1$, модуль угловой скорости почти не отличается от модуля начальной угловой скорости. Смысл параметра $2mgl/\mu\omega_0^2$ понятен. Это отношение максимальной потенциальной энергии гироскопа, когда центр масс находится в верхнем положении, к удвоенной начальной кинетической энергии гироскопа. Для быстровращающегося гироскопа это отношение является малым. Если бы угловая скорость была постоянной, то из интеграла энергии следовало бы

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}'\equiv\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}=\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k})\cdot\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e})\quad\Rightarrow\quad\mathbf{e}'=\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k})\cdot\mathbf{e}.$$

где использовано стандартное для этой книги обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma\mathbf{m})\equiv(1-\cos\gamma)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\cos\gamma\;\mathbf{E}+\sin\gamma\;\mathbf{m}\times\mathbf{E}.$$

Иными словами, если бы модуль угловой скорости был постоянным, то ось гироскопа совершала бы чистую прецессию вокруг орта вертикали с угловой

скоростью прецессии $\dot\psi\mathbf{k}$. На самом деле угловая скорость не постоянна, а угол между вертикалью и осью гироскопа меняется, но меняется незначительно. Поэтому тензор поворота нужно искать в виде композиции трех поворотов

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}/\sin\alpha, \quad |\vartheta| << 1, \tag{8.9.7}$$

где углы ψ, ϑ и φ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно.

По основной теореме о представлении тензора поворота (3.8.1) представление (8.9.7) без допущения о малости угла нутации справедливо всегда. Для быстровращающегося гироскопа вектор нутации $\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta\mathbf{p}$ мал по модулю. Поэтому можно использовать аппроксимацию для малых углов

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}). \tag{8.9.8}$$

Вычисляя угловую скорость для поворота (8.9.8), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \left(\dot\psi\mathbf{k} + \dot\varphi\mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot\varphi\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}\right). \tag{8.9.9}$$

Нетрудно установить формулы

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \Big(\ddot\psi\,\mathbf{k} + \ddot\varphi\,\mathbf{e} + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot\varphi\,\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e} - \dot\varphi\,\mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot\psi\dot\varphi\,\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \\ + \dot\psi\,\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot\psi\dot\varphi\,\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e})\Big),$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \left(\dot\psi\,\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot\psi\,\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}) + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{e}\right),$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e})].$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8.9.5), приходим к следующему уравнению

$$\underline{\ddot\psi\,\mathbf{k} + \ddot\varphi\,\mathbf{e}} + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot\varphi\,\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e} + \left(-\dot\varphi\,\mathbf{e} + \dot\psi\,\mathbf{k} - \eta\omega_0\mathbf{e}\right) \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \\ + \underline{\left(\dot\psi\dot\varphi + \eta\omega_0\,\dot\psi - \nu\right)\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \left(\dot\psi\dot\varphi + \eta\omega_0\,\dot\psi - \nu\right)\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e})} = \mathbf{0}. \tag{8.9.10}$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнении (8.9.10) должны быть малыми и иметь порядок $\mathrm{O}(\vartheta)$. Этого можно добиться, если принять, что

$$\dot\varphi = \dot\varphi_0 + \beta, \quad \dot\psi = \dot\psi_0 + \gamma, \quad \beta \sim \mathrm{O}(\vartheta), \quad \gamma \sim \mathrm{O}(\vartheta). \tag{8.9.11}$$

Причем величины, помеченные индексом 0, должны удовлетворять уравнению

$$\ddot{\psi}_0\,\mathbf{k}+\ddot{\varphi}_0\,\mathbf{e}+\left(\dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0+\eta\omega_0\,\dot{\psi}_0-\nu\right)\mathbf{k}\times\mathbf{e}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \dot{\varphi}_0=\omega_0,\quad \dot{\psi}_0=\frac{\nu}{(1+\eta)\omega_0}=\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}. \tag{8.9.12}$$

Здесь использовано начальное условие для $\dot{\varphi}_0$. Не следует думать, что функции β и γ должны быть малыми в сравнении с $\dot{\varphi}_0$ и $\dot{\psi}_0$ соответственно. В представлении (8.9.11) этого не предполагается. В частности, функции γ и $\dot{\psi}_0$ будут иметь одинаковый порядок малости. Из равенств (8.9.12) видим, что скорость прецессии $\dot{\psi}_0$ для быстровращающегося гироскопа мала, но угол прецессии ψ_0 не мал, поскольку он нарастает во времени по линейному закону. Подставляя выражения (8.9.11) и (8.9.12) в уравнение (8.9.10) и отбрасывая в нем величины $O(\beta\vartheta)$ и $O(\gamma\vartheta)$ второго порядка малости, получаем

$$\dot{\gamma}\,\mathbf{k}+\dot{\beta}\,\mathbf{e}+\frac{\ddot{\vartheta}}{\sin\alpha}\mathbf{k}\times\mathbf{e}-\frac{\dot{\vartheta}}{\sin\alpha}\left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda}\mathbf{e}-\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\mathbf{k}\right)\times(\mathbf{k}\times\mathbf{e})+$$

$$+\left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda}\gamma+\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta\right)\mathbf{k}\times\mathbf{e}=\mathbf{0}. \tag{8.9.13}$$

Проекция уравнения (8.9.13) на орт $\mathbf{k}$ дает

$$\dot{\gamma}+\dot{\beta}\cos\alpha=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\,\dot{\vartheta}\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad \gamma+\beta\cos\alpha=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\vartheta\sin\alpha+a,$$

где a есть произвольная постоянная.

Проекция уравнения (8.9.13) на орт $\mathbf{e}$ дает

$$\dot{\gamma}\cos\alpha+\dot{\beta}=\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\,\dot{\vartheta}\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad \gamma\cos\alpha+\beta=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\,\vartheta\sin\alpha+b,$$

где b есть произвольная постоянная.

Наконец, проекция уравнения (8.9.13) на орт $\mathbf{k}\times\mathbf{e}$ дает

$$\ddot{\vartheta}+\sin\alpha\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\gamma+\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta\right)=0. \tag{8.9.14}$$

Для определения постоянных a и b необходимо использовать начальные условия для угловой скорости. Поскольку начальные углы равны нулю, то выражение (8.9.9) дает

$$\omega_0\mathbf{e}=\left(\dot{\psi}\mathbf{k}+\dot{\varphi}\mathbf{e}+\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\big|_{t=0}\quad\Rightarrow\quad \beta(0)=0,\quad \gamma(0)=-\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0},\quad \dot{\vartheta}\,(0)=0. \tag{8.9.15}$$

Используя условия (8.9.15), получаем

$$a = -\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}, \quad b = -\frac{\mu\nu\cos\alpha}{\lambda\omega_0}.$$

Исключая в уравнении (8.9.14) функции β и γ, получаем уравнение для определения угла нутации

$$\ddot{\vartheta} + \omega_*^2\vartheta = \nu\sin\alpha, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0, \tag{8.9.16}$$

где

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2\omega_0^2}{\mu^2}\left(1 - 2\frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\cos\alpha + \frac{\mu^4\nu^2}{\lambda^4\omega_0^4}\right).$$

В этом выражении последнее слагаемое в скобках имеет порядок $O(\vartheta^2)$. Поскольку величины порядка $O(\vartheta^2)$ ранее отбрасывались, то и здесь ее необходимо отбросить. В итоге получаем

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2\omega_0^2}{\mu^2}\left(1 - 2\frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\cos\alpha\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2\omega_0^2 > 2\nu\mu^2\cos\alpha. \tag{8.9.17}$$

Последнее неравенство в (8.9.17) является необходимым критерием применимости полученного решения при всех t. Если оно нарушено, то полученное решение правильно только при малых t и не представляет никакого интереса. В этом случае нужно использовать более общий подход, который будет изложен в главе, посвященной задачам динамики твердого тела.

Таким образом, получаем окончательное выражение для угла нутации

$$\vartheta(t) = \frac{\nu\sin\alpha}{\omega_*^2}\left(1 - \cos\omega_* t\right), \tag{8.9.18}$$

где частота нутационных колебаний ω_* определена формулой (8.9.17).

Выражение (8.9.17) показывает, что для стоячего гироскопа [39], т.е. при $\alpha < \pi/2$, частота нутационных колебаний немного меньше, чем частота нутационных колебаний висячего гироскопа $(\alpha > \pi/2)$. Окончательные выражения для скорости собственного вращения и скорости прецессии имеют вид

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 - \frac{\nu}{\omega_*^2}\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\cos\alpha - \underline{\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}}\right)\left(1 - \cos\omega_* t\right),$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\nu}{\omega_*^2}\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu} - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\cos\alpha\right)\left(1 - \cos\omega_* t\right). \tag{8.9.19}$$

Подчеркнутое слагаемое в (8.9.19) следует отбросить как выходящее за пределы точности принятого метода решения задачи. Отметим, что для быстровращающихся гироскопов, которые используются в технике, формулы (8.9.18)

и (8.9.19) являются практически точными. Наиболее показательным является случай, когда при $t = 0$ ось гироскопа была направлена горизонтально, т.е. $\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$. Тогда вместо выражений (8.9.18) и (8.9.19) будем иметь

$$\vartheta(t) = \frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\left(1 - \cos\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu}\right), \quad \dot{\vartheta}(\mathbf{t}) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\sin\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu},$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0, \quad \dot{\psi}(t) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\left(1 - \cos\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu}\right).$$

Сравним полученное решение с решением, представленном в [41] и полученном на основе приближенной теории быстровращающегося гироскопа. Оно имеет вид

$$\dot{\vartheta}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}(t) = \omega_0, \quad \dot{\psi}(t) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}.$$

Видим, что эти формулы совпадают с осредненными по периоду нутационных колебаний скоростями, даваемыми формулами (8.9.).

Если бы гироскоп вращался вокруг своего центра масс ($\nu = 0$), то он обладал бы только вращением вокруг собственной оси, причем скорость собственного вращения сохраняла бы свое направление в пространстве. Если $\nu \neq 0$, то на гироскоп действует внешний момент, направленный по вектору $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. На первый взгляд кажется, что ось гироскопа должна поворачиваться также вокруг вектора $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. Но так было бы только в том случае, если бы скорость собственного вращения равнялась бы нулю. Если $\omega_0 \neq 0$, то ось гироскопа начинает прецессировать вокруг вектора $\mathbf{k}$. Более точно, для оси гироскопа имеем выражение

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} + \vartheta \times \mathbf{e}) \simeq \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Последнее выражение и показывает, что ось гироскопа прецессирует вокруг вектора $\mathbf{k}$ с переменной и малой в сравнении с ω_0 скоростью. Но угол прецессии нарастает во времени и потому происходит уход оси гироскопа от первоначально заданного направления на сколь-угодно большой угол. В то же время ось гироскопа практически не выходит из горизонтальной плоскости, поскольку угол нутации пренебрежимо мал при всех временах. То обстоятельство, что вращающееся тело, при дополнительном воздействии на него моментом, начинает поворачиваться вокруг оси, ортогональной моменту, кажется удивительным. Но это далеко не единственный факт, вызывающий удивление, при первоначальном изучении спинорных движений твердых тел.

Глава 9.

Уравнение баланса энергии

9.1. Вводные замечания

Каждый фундаментальный закон вводит в рассмотрение новое понятие. Первый закон динамики вводит в рассмотрение силы. Второй закон динамики вводит в рассмотрение моменты. Было бы просто замечательно, если бы количество движения, кинетический момент, силы и моменты исчерпывали бы список необходимых понятий и позволяли бы исследовать хотя бы уже известные науке явления. К сожалению, это не так. Даже рациональная механика, которая в настоящее время еще не описывает многих явлений Природы, не может обойтись без таких понятий, как внутренняя энергия, температура, энтропия, химический потенциал и т.д. Проблема в том, что эти понятия, в общем случае, до сих пор не имеют четкого определения в рамках рациональной механики. Неясно даже являются ли они чем-то принципиально новым, или это производные от уже известных понятий. Зато совершенно очевидно, что без введения понятия энергии как самостоятельной и независимой структуры механика обойтись не может. Если возникла необходимость во введении нового фундаментального понятия, то необходим и дополнительный фундаментальный закон, управляющий этой новой величиной. Этот дополнительный фундаментальный закон и дается уравнением баланса энергии. Отметим, что в термодинамике уравнение баланса энергии известно под названием первого закона термодинамики и имеет много различных формулировок.

Чрезвычайно трудно найти человека, который никогда не слышал слова “энергия” и не употреблял бы его в своей речи. Многие люди полагают, что они вполне ясно понимают и свободно владеют понятием энергии. Во всяком случае, именно такое впечатление остается после прочтения многих книг по механике, физике, химии и т.д. Тем не менее, невозможно найти книгу, в которой было бы дано рациональное определение понятия энергии. Никто, разумеется, не сомневается, что энергия — одно из важнейших понятий в науке, да и не только в науке. С различными проявлениями энергии мы встречаемся

на каждом шагу. Существовало даже целое научное направление (энергетизм), ставившее своей целью свести все явления Природы к закону, управляющему потоками энергии. На уровне философии, сводящейся к бесконечному потоку неопределенных слов, это кажется возможным. Однако в рациональной науке все оказывается сложнее. Существует четко определенное понятие кинетической энергии, но вполне ясно, что общее понятие энергии не может быть сведено к кинетической энергии, если иметь в виду некие уравнения, а не умозрительные рассуждения. Существует ясное представление о потенциальной энергии как функции, производные от которой по координатам дают силы. Но не всякие силы могут быть выражены через потенциальную функцию. Можно привести множество примеров, когда термин энергия (в разных проявлениях) определен вполне точно. Так обстоит дело в классической механике систем с конечным числом степеней свободы, где энергия как самостоятельная структура не вводится, а определяется через законы динамики движения в качестве вполне определенной функции состояния системы. Однако отказ от включения энергии в список основных независимых структур механики резко сужает сферу ее действия. Подобное самоограничение неприемлемо для науки, претендующей на исследование широкого класса природных и техногенных явлений. Фактически оно и не принимается. Например, в механике сплошных сред энергия уже давно играет роль самостоятельной структуры. Поэтому кажется вполне естественным включить энергию в фундамент механики и, следовательно, в первоначальный курс рациональной механики, а не вводить ее с черного хода где-то в надстроечных структурах, каковой, в частности, является механика сплошных сред.

Уравнение баланса энергии или третий фундаментальный закон рациональной механики используется в механике около двухсот лет[1]. Однако статус этого закона в механике долгое время был неопределенным. Например, даже в настоящее время в учебниках теоретической механики этот закон как самостоятельный постулат не формулируется. В физике [65] этот закон известен под названием закона сохранения энергии, открытие которого связывают с именами Р. Майера (1845) и Г. Гельмгольца (1847). Закон сохранения энергии — это скорее философский принцип, который утверждает, что энергия не может исчезать, но может переходить из одной формы существования в другую. Для конкретных приложений подобного утверждения недостаточно. Действительно, если рассматривается некая система и изучается ее поведение, то часть ее энергии может уходить в окружающую среду, т.е. ее энергия не сохраняется. Кроме того, в конкретных приложениях необходимо знать какие именно формы энергии переходят друг в друга и по каким законам совер-

[1]Предтечей уравнения баланса энергии являлось знаменитое “Золотое правило механики”, которое известно более двух с половиной тысячелетий.

шаются эти переходы. Поэтому в рациональной механике закон сохранения энергии реализуется в форме уравнения баланса, а не сохранения, энергии. В 1839 г. Дж. Грин [83] впервые ввел понятие внутренней энергии и предложил частную формулировку уравнения баланса энергии, которую он с большим успехом применил в теории упругих систем, в которых диссипация энергии отсутствует. Уравнение баланса энергии несравнимо сильнее в конкретных приложениях, нежели закон сохранения энергии. К тому же и открыто оно был раньше. Поэтому настойчивость, с которой физики утверждают приоритет Р. Майера и Г. Гельмгольца, не совсем понятна. Как бы то ни было, но ни открытие Р. Майера, ни работа Г. Гельмгольца не оказали существенного влияния на развитие рациональной механики, которая развивалась по пути, указанному Дж. Грином.

В данной главе дается формулировка уравнения баланса энергии, которая сама по себе является достаточно общей, но вытекающие из нее следствия будут получаться после введения дополнительных предположений, которые имеют относительно частный характер. Важная роль уравнения баланса энергии как фундаментального и неустранимого закона механики ярко проявляется только в механике систем с бесконечным числом степеней свободы, но все основные понятия, сопровождающие этот закон, могут быть введены и на простых примерах систем с конечным числом степеней свободы. Более того, именно в этих простых примерах можно отчетливо понять все основные идеи, связанные с использованием уравнения баланса энергии и самого понятия энергии.

9.2. Полная и внутренняя энергии

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г. Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило ограниченный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839 г. Дж. Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало независимым от законов движения постулатом. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г. Гельмгольца [10] и А. Пуанкаре [61]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет общепринятого понимания концепции

энергии и в настоящее время, хотя, разумеется, многие исследования указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при анализе многих проблем. Значение понятия энергии определяется тем, что энергия является Великим Интегратором всех процессов, протекающих в физических системах. Многообразие этих процессов и является главной причиной того, что для энергии трудно дать окончательное определение. Замечательно, однако, то, что и без окончательных определений энергия оказывается чрезвычайно полезным и даже необходимым элементом физических теорий.

Кинетическая энергия тела $\mathcal{A}$ есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера, ибо зависит от выбора системы отсчета. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде не распадающихся объектов указывает на присущее им "нечто", что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Поэтому уже давно существует интуитивное представление о двух типах энергии: динамической и притягивающей. С динамической энергией все ясно — это кинетическая энергия. Под притягивающей энергией понимают то, что сцепляет совокупность атомов в единое тело или обеспечивает существование самого атома. О природе этой притягивающей энергии можно высказать очень много интуитивных соображений, но очень мало конкретных утверждений. Поэтому в рациональной науке указанные интуитивные представления использовать трудно или даже невозможно.

Примем, что всякое тело $\mathcal{A}$ характеризуется некоей величиной, называемой полной энергией тела $\mathcal{A}$ и обозначаемой символом $\mathsf{E}(\mathcal{A})$. Кинетическая энергия является частью полной энергии и характеризует состояние движения тела относительно выбранной системы отсчета. Эта часть полной энергии вводится по определению и хорошо известна. Разность между полной энергией и кинетической энергией тела $\mathcal{A}$ называется внутренней энергией тела $\mathcal{A}$. Последняя является новой характеристикой тела $\mathcal{A}$, которая, в общем случае, не может быть выражена через уже введенные понятия.

Итак, полную энергию $\mathsf{E}(\mathcal{A})$ тела $\mathcal{A}$ представим в виде суммы

$$\mathsf{E}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A}) + \mathsf{U}(\mathcal{A}). \tag{9.2.1}$$

Функция $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $\mathsf{U}(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела $\mathcal{A}$ и требует определения. Если внутренняя энергия определена, то и полная энергия тела определена. Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела $\mathcal{A}$ сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$, а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от положений тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$. Во многих случаях

подобное разделение оказывается приемлемым и не ведет ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому непригодно в фундаментальном плане. Одно из качественных различий между понятиями кинетической и внутренней энергии состоит в следующем. Кинетическая энергия — это часть полной энергии, которая является мерой "внешнего" движения тела, зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы вморожена в тело и перемещается вместе с ним. Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия классической материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать о классическом абсолютно твердом теле. Ниже будет показано, что внутренняя энергия упомянутых объектов может меняться, но при этом сами объекты будут наделяться дополнительными свойствами, которые хорошо известны и, тем не менее, в классической механике игнорируются. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример. Допустим, что тело $\mathcal{A}$ состоит из $2\mathfrak{n}$ атомов водорода и $\mathfrak{n}$ атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. С другой стороны, известно что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). Поэтому тело $\mathcal{A}$ можно рассматривать как состоящее из $\mathfrak{n}$ тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела $\mathcal{A}$ есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела $\mathcal{A}$ в обоих случаях должны совпадать[2], хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела $\mathcal{A}$ в этих двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного (объективного) характера. Да и само понятие внутренней энергии зависит от используемых моделей. Кинети-

[2]Вообще говоря, это совсем не обязательно. Химические реакции могут проходить, как с поглощением энергии, так и с выделением энергии.

ческая энергия может переходить во внутреннюю энергию и консервироваться в теле. Возможны и обратные переходы.

Итак, выше введена новая характеристика тела, называемая полной энергией тела и представляемая в виде разложения (9.2.1). Для полной энергии постулируется, что она аддитивна по телам, составляющим рассматриваемое тело $\mathcal{A}$

$$\mathsf{E}(\mathcal{A}) = \mathsf{E}(\bigvee_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(\mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{n}[\mathsf{K}(\mathcal{A}_i) + \mathsf{U}(\mathcal{A}_i)] = \\ = \sum_{k=1}^{m} m_k\mathcal{K}(\mathcal{A}_k) + \sum_{i=1}^{n}\mathsf{U}(\mathcal{A}_i), \quad m \le n. \quad (9.2.2)$$

Обратим внимание, что полная и внутренняя энергии аддитивны по телам, в то время как кинетическая энергия аддитивна не только по телам, но и по массе. Аддитивность внутренней энергии по телам, а не по массе, необходима, ибо в механике часто используются идеализированные тела, лишенные массы, но способные запасать энергию. Такова, например, модель безынерционной упругой пружины, способной накапливать внутреннюю энергию, но не обладающей кинетической энергией.

9.3. Общая формулировка уравнения баланса энергии

Несмотря на то, что выше было произнесено много слов в тщетной попытке объяснить, что такое полная или внутренняя энергия тела, тем не менее далеко мы не продвинулись. Поэтому пора обратиться к точной[3] формулировке уравнения баланса, посредством которого понятие полной энергии вводится в рациональную механику.

Уравнение баланса энергии: *скорость изменения полной энергии тела $\mathcal{A}$ равна мощности $\mathsf{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$ плюс скорость подвода энергии $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ в тело $\mathcal{A}$ от внешних источников*

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}(\mathcal{A}) = \mathsf{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (9.3.1)$$

Особо следует подчеркнуть, что скорость подвода энергии $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ от внешних источников является свойством тела $\mathcal{A}$. Причем это свойство тела

[3] Со временем эта формулировка претерпит существенные изменения, когда будет осознано, что энергия тела $\mathcal{A}$ на самом деле обусловлена скрытой материей, которая пока не принимается во внимание. Фактически будет существенно расширено само представление о теле $\mathcal{A}$.

не зависит от наличия (или отсутствия) внешних источников и не определяется ими. Величина $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ предполагается[4] аддитивной как по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$, так и по телам, составляющим окружение

$$\delta(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) = \delta(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e)+\delta(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e), \quad \delta(\mathcal{A}, \mathcal{D}\vee\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{A}, \mathcal{D})+\delta(\mathcal{A}, \mathcal{E}). \quad (9.3.2)$$

Внешняя простота формулировки уравнения баланса энергии не должна вводить в заблуждение. Для правильного применения уравнения баланса энергии необходимо иметь ясное представление о характере исследуемых процессов, т.е. необходимо иметь достаточно хорошо развитую интуицию. Впрочем, во многих практически важных случаях применение уравнения баланса энергии не вызывает затруднения, ибо в механике и физике уже накоплен богатейший опыт, дающий ясные указания на то, как правильно записать уравнение баланса энергии в том или ином конкретном случае. Однако пройдет еще немало времени до того момента, когда с уравнением баланса энергии будут работать с той же легкостью, как со вторым законом Ньютона.

Как уже неоднократно отмечалось, сложившаяся традиция не включает уравнение баланса энергии в список фундаментальных законов механики. Означает ли это, что понятие энергии не используется в классической механике? Ответ, разумеется, категорически отрицательный. Понятие энергии играет важнейшую роль в классической механике, хотя уравнение баланса энергии не привлекается. Возникает кажущееся противоречие, которое следует устранить. С этой целью введем в рассмотрение понятие механической энергии. Последний термин в качестве строгого понятия в литературе не используется, хотя и применяется в описательно-интуитивном смысле. Введение понятия механической энергии опирается исключительно на законы динамики. Для простоты мы воспользуемся только первым законом динамики, т.е. ограничимся рамками ньютоновой механики. Обобщение на случай эйлеровой механики не вызывает никаких затруднений.

Рассмотрим хорошо изученный в механике случай тела, являющегося совокупностью материальных точек неизменной массы. Здесь полная энергия рассматриваемого тела $\mathcal{A}$ дается выражением

$$\mathsf{E}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + \mathsf{U}(\mathcal{A}).$$

Мощность внешних воздействий дается выражением (6.3.2), которое для тела, составленного из бесспиновых частиц, имеет вид

$$\mathsf{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\,(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k.$$

[4]На самом деле это не предположение, а доказуемое утверждение, если, конечно, уравнение (9.3.1) постулировано.

Рассмотрение начнем с доказательства теоремы об изменении кинетической энергии. Выпишем первый закон динамики применительно к каждой из материальных точек, входящих в тело $\mathcal{A}$ $(i, m = 1, 2, \ldots, n)$

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \tag{9.3.3}$$

где внутренние силы, т.е. силы между частицами, составляющими тело $\mathcal{A}$, удовлетворяют условиям

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = -\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i), \quad (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_m) = \mathbf{0}.$$

Если обе части каждого из уравнений (9.3.3) скалярно умножить на соответствующий вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ и сложить получившиеся уравнения, то получим теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i,$$

которая утверждает, что *скорость изменения кинетической энергии тела равна мощности внутренних и внешних воздействий.*

В приведенной формулировке эта теорема не вводит никаких новых понятий. Кроме того, она включает в себя такое понятие, как мощность внутренних сил, о которых, как правило, мало что известно. Поэтому теорему об изменении кинетической энергии целесообразно трансформировать в уравнение баланса механической энергии.

Примем, что и внутренние, и внешние силы частично обладают потенциалом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = -\frac{\partial \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k),$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \tag{9.3.4}$$

где функция $\Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ называется потенциалом внутренних сил и является характеристикой тела $\mathcal{A}$; функция $\Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ называется потенциалом внешних сил и характеризует окружение тела $\mathcal{A}$; непотенциальные силы $\mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ и $\mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ обычно называются диссипативными силами, ибо они, как правило, отвечают за рассеяние энергии.

Используя представления (9.3.4), умножая скалярно обе части уравнения (9.3.3) на вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ и суммируя получившиеся уравнения, получаем

$$\dot{E}_M = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i, \tag{9.3.5}$$

где

$$E_M \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) + \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n). \tag{9.3.6}$$

Первое слагаемое в правой части (9.3.5) отвечает за диссипацию энергии внутри тела $\mathcal{A}$, а второе слагаемое отвечает за диссипацию энергии в окружающую среду. В обоих случаях речь идет о диссипации энергии, осуществляемой посредством сил. Ранее мы видели и увидим далее, что имеются и другие пути диссипации энергии. Термин “диссипация энергии внутри тела” не вполне удачен. Точнее было бы сказать так: “Первое слагаемое в правой части (9.3.5) отвечает за необратимые переходы энергии внутри тела из одной формы в другую”. Но другие формы энергии у нас еще, по существу, не введены. Поэтому к обсуждению этого вопроса мы вернемся позднее. Посмотрим на выражение механической энергии (9.3.6). Оно состоит из двух неравноправных частей. Первая часть есть сумма кинетической энергии тела и потенциала внутренних сил. Последний можно было бы назвать внутренней энергией тела, но это только часть внутренней энергии. Важно, что обсуждаемая первая часть механической энергии есть атрибут самого тела. Вторая часть в (9.3.6) есть потенциал внешних сил и может быть названа энергией взаимодействия тела с внешними полями. Если внутренние и внешние диссипативные силы отсутствуют, то механическая энергия сохраняется, т.е. имеем интеграл энергии

$$E_M \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) + \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) = \mathrm{const}.$$

Системы, механическая энергия которых сохраняется, называются *консервативными*. Системы такого рода очень часто встречаются в механике.

Допустим теперь, что отсутствует только внешняя диссипация. В этом случае вместо уравнения (9.3.5) получаем

$$\dot{E}_M = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i \neq 0, \tag{9.3.7}$$

т.е. механическая энергия не сохраняется. Но тогда возникает вопрос куда же исчезает механическая энергия? С окружающей средой тело посредством сил и моментов не взаимодействует, а никаких других взаимодействий законы динамики не предусматривают. Здесь мы отчетливо видим недостаточность как законов динамики, так и вытекающего из них уравнения баланса механической энергии.

Обратимся к рассмотрению уравнения баланса энергии, которое для системы материальных точек записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + U(\mathcal{A})\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \qquad (9.3.8)$$

В уравнение баланса энергии (9.3.8), в отличие от уравнения баланса механической энергии, не входит мощность внутренних сил, но входит новое слагаемое $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, описывающее обмен энергией с окружающей средой и которое нельзя получить из законов динамики. Используя второе из представлений (9.3.4), уравнение (9.3.8) переписываем в виде

$$\dot{E}_T = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e), \qquad (9.3.9)$$

где

$$E_T = E(\mathcal{A}) + \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n). \qquad (9.3.10)$$

Энергия E_T, определенная выражением (9.3.10), не имеет устоявшегося названия и в дальнейшем будет называться полной энергией расширенного тела $\mathcal{A}$. Она является суммой полной энергии тела и потенциала внешних сил. Если внешние силы потенциальны, то $\mathbf{f}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) = 0$. Если, кроме того, энергетический обмен с внешней средой отсутствует, т.е. $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = 0$, то полная энергия расширенного тела сохраняется. Подчеркнем, что внутренние силы при этом могут быть диссипативными, т.е. механическая энергия тела не сохраняется. Системы, у которых сохраняется полная энергия расширенного тела, можно назвать консервативными, но этот термин уже занят. Поэтому системы такого рода будут называться *квазиконсервативными*.

Введем понятие *тепловой энергии*, которое также не является общеупотребительным. По определению, *тепловой энергией* E_H тела назовем разность между полной энергией расширенного тела E_T и механической энергией E_M

$$E_H = E_T - E_M. \qquad (9.3.11)$$

Тепловая энергия тела является его внутренней характеристикой. Заметим, что потенциал внешних сил не входит в выражение тепловой энергии. Введение понятия тепловой энергии неразрывно связано с понятиями температуры и энтропии, которые ниже будут введены на элементарных примерах, демонстрирующих смысл этих понятий. Используя уравнения баланса энергии (9.3.9) и уравнение баланса механической энергии (9.3.5), получаем уравнение баланса тепловой энергии

$$\frac{dE_H}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(E_T - E_M) = \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) - \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i. \qquad (9.3.12)$$

Если энергетический обмен с внешней средой и внутренняя диссипация в теле отсутствуют, то тепловая энергия тела сохраняется. В этом случае различие между механической энергией и полной энергией расширенного тела становится несущественным. Важным является случай, когда мощность внутренних сил равна скорости отвода энергии в окружающую среду

$$\delta(\mathcal{A},\, \mathcal{A}^e) = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i.$$

В таком случае тепловая энергия тела также сохраняется и пропадает различие между полной энергией расширенного тела и его механической энергией. Именно этот случай является основным в классической механике, чем и объясняется традиция не включать уравнение баланса энергии в список фундаментальных законов механики. Тем не менее это всего лишь частный случай, а в общем случае правая часть выражения (9.3.12) отлична от нуля. Поэтому в общем случае уравнение баланса энергии и понятие внутренней энергии тела вводить необходимо.

9.4. Материальная точка

Чтобы проиллюстрировать применение уравнения баланса энергии, рассмотрим предельно упрощенный случай одной материальной точки. В этом примере следует обратить внимание на то, как меняется выражение для скорости подвода энергии $\delta(\mathcal{A},\, \mathcal{A}^e)$ от внешних источников по мере наделения материальной точки новыми свойствами.

9.4.1. Классическая материальная точка

Рассмотрим материальную точку, которая обладает только неизменной массой и лишена каких-либо других свойств. Это означает, что материальная точка не способна реагировать на какие бы то ни было внешние источники энергии, т.е. скорость подвода энергии от внешних источников для нее отсутствует. Здесь следует разъяснить смысл утверждения о том, что материальная точка лишена чего-то. Реальный объект, который мы моделируем материальной точкой, нельзя наделять или не наделять какими-бы то ни было свойствами. Он обладает этими свойствами независимо от нашей воли и сознания. Однако в тех или иных случаях и по тем или иным соображениям нас могут не интересовать некоторые свойства материального объекта. В таком случае мы лишаем нашу модель этих свойств. Например, мы моделируем материальной точкой автоматную пулю. Пуля при движении по стволу автомата нагревается, но нам

кажется, что это обстоятельство слабо влияет на точность стрельбы. Поэтому при анализе точности стрельбы мы можем игнорировать способность материальной точки нагреваться. Короче говоря, свойствами наделяется модель, а не реальный объект.

Обсуждению уравнения баланса энергии целесообразно предпослать рассмотрение подхода, используемого в классической механике и вводящего в механику понятие энергии. Выпишем первый закон динамики

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e).$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор скорости. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v} \equiv N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.4.1}$$

Равенство (9.4.1) утверждает, что *скорость изменения кинетической энергии тела $\mathcal{A}$ равна мощности внешних воздействий.* Это утверждение известно в классической механике под названием *теоремы об изменении кинетической энергии.* Эта теорема, конечно, может быть доказана для систем общего вида, а не только для материальной точки. При доказательстве *теоремы об изменении кинетической энергии* уравнение баланса энергии *не использовалось*. Допустим теперь, что одна часть внешней силы обладает потенциалом, а другая — не обладает

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = -\frac{d\Pi(\mathbf{R})}{d\mathbf{R}} + \mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v} = -\dot{\Pi}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v}.$$

Обратим внимание, что потенциал всегда вводится с точностью до произвольной постоянной, т.е. прибавление к потенциалу произвольной постоянной ничего не меняет. Комбинируя определение (9.4.1.) с равенством (9.4.1), получаем уравнение баланса механической энергии

$$\frac{dE_M}{dt} = \mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v}, \quad E_M \equiv \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \Pi(\mathbf{R}). \tag{9.4.2}$$

Если внешняя сила потенциальна, то механическая энергия сохраняется

$$\mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad E_M \equiv \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \Pi(\mathbf{R}) = \mathrm{const}. \tag{9.4.3}$$

Системы, механическая энергия которых сохраняется, в классической механике принято называть *консервативными*. Равенство (9.4.3) в классической механике называется *интегралом энергии*. Как видим, для получения *интеграла энергии* или для вывода закона сохранения механической энергии никакого

дополнительного фундаментального закона не требуется. Следует подчеркнуть, что уравнение баланса механической энергии (9.4.2) и интеграл энергии (9.4.3) играют чрезвычайно важную роль в механике, но им нельзя приписать статус фундаментальных законов. Они относятся к разряду важнейших теорем механики. Исключительно в силу традиции принято считать, что никакого другого энергетического соотношения в классической механике и не требуется. В тех случаях, когда уравнение баланса энергии все же используется в механике, то оно включается в рассмотрение под названием первого закона термодинамики, что создает ложное впечатление ограниченности механики. Но нельзя забывать, что уравнение баланса энергии впервые возникло и нашло широкое применение именно в механике. Термодинамика возникла позже, а ее законы вытекают из законов механики. Поэтому в данной книге термин "первый закон термодинамики" не применяется. Этот термин уместен в термодинамике, но не в механике.

Обратимся теперь к уравнению баланса энергии. Прежде всего возникает вопрос о связи между понятиями полной и механической энергий тела $\mathcal{A}$, которое в данном случае является материальной точкой. Следует отчетливо осознать, что это совершенно разные понятия. Механическая энергия является производным понятием и определяется через введенные ранее понятия кинетической энергии и воздействий. Более того, механическая энергия *не является* характеристикой тела $\mathcal{A}$, а зависит от внешних обстоятельств, т.е. от внешних воздействий. Полная (или внутренняя) энергия является новой характеристикой тела и описывает дополнительные свойства тела $\mathcal{A}$. В рассматриваемом случае имеем

$$E(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} m\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathcal{A}), \quad N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}, \quad \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = 0.$$

Уравнение баланса энергии (9.3.1) в данном случае принимает вид

$$m\, \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{U}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{v}. \tag{9.4.4}$$

Воспользуемся теперь первым законом динамики или, что то же самое, вторым законом Ньютона: $m\, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, для исключения ускорений из уравнения баланса энергии. В результате получим так называемое приведенное уравнение баланса энергии

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(\mathcal{A}) = \mathrm{const}. \tag{9.4.5}$$

Таким образом, при отсутствии внешнего подвода энергии внутренняя энергия материальной точки постоянна и потому может не приниматься во внимание. Ничего нового в дополнение к классической механике мы не получили.

Связь между механической и полной энергией тела дается выражением

$$\mathsf{E}_{\mathsf{M}} = \mathsf{E}(\mathcal{A}) + \Pi(\mathbf{R}).$$

Как будет показано ниже, это равенство в общем случае не выполняется. Заметим, что в рассматриваемом простейшем случае приведенное уравнение баланса энергии выглядит слишком просто и не позволяет оценить важнейшую роль этого уравнения в механике. Эта роль заключается в том, что именно приведенное уравнение баланса энергии является определением внутренней энергии.

9.4.2. Материальная точка, обладающая теплоемкостью

Рассмотрим другой случай. Допустим, что мы нагреваем материальную точку. Это означает, что материальная точка[5] способна воспринимать энергию от внешних источников. При этом мы должны обладать возможностью тем или иным способом контролировать (измерять) подводимую энергию. Обратим теперь внимание, что скорость подвода энергии от внешних источников не входит в первый и второй законы динамики и, следовательно, не попадает в уравнение баланса механической энергии. Чтобы учесть новые свойства тела, необходим новый фундаментальный закон, роль которого и исполняет уравнение баланса энергии (9.3.1). Оно в изучаемом случае принимает вид

$$m\,\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathsf{U}}\,(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e)\cdot\mathbf{v} + \delta(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e).$$

Уравнение баланса энергии, записанное в этой исходной формулировке, нуждается в неких преобразованиях. Прежде всего, из него необходимо исключить то, что управляется другими законами механики. А именно, необходимо исключить внешние воздействия с помощью первого закона динамики. В результате получим

$$\dot{\mathsf{U}}\,(\mathcal{A}) = \delta(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e). \tag{9.4.6}$$

Уравнение (9.4.6) содержит только новые величины, которые не вводились при формулировке законов динамики. Само по себе уравнение (9.4.6) утверждает, что *подвод энергии от внешних источников идет на изменение внутренней энергии рассматриваемого тела*. Чтобы конкретизировать это утверждение необходимо сделать дополнительные шаги. С этой целью введем понятие температуры ϑ материальной точки как величины, измеряемой каким-либо

[5] Материальную точку совсем не обязательно воспринимать как математическую точку. Она может содержать в себе бесконечный набор более мелких частиц, детальным поведением которых мы по тем или иным причинам не интересуемся.

термометром. Способность материальной точки поглощать тепловую энергию будем описывать функцией H, которую определим посредством уравнения

$$\vartheta \dot{H} = q(t) \equiv \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.4.7}$$

Функцию H будем называть энтропией[6]. Принятие равенства (9.4.7) не требует никаких дополнительных предположений — это просто определение функции H. Следует обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Выражение (9.4.7) дает повод думать, что энтропия характеризует внешний подвод энергии, а вовсе не какое-либо свойство рассматриваемого тела. Тогда, конечно, нелепо приписывать энтропию материальной точке. Фактически дело обстоит совершенно иначе. Вокруг нас могут бушевать океаны энергий различных типов, тем не менее далеко не все из них мы в состоянии воспринять. Например, человек практически не воспринимает энергии излучений, передаваемых на частотах в десятки мегагерц. Поэтому для человека эти излучения как бы и не существуют, т.е. внешний подвод энергии для него отсутствует. Но радиоприемники их прекрасно воспринимают. Дело здесь не во внешних источниках, а в различии между человеком и радиоприемником. Другой пример. Допустим, что на улице идет дождь, и мы хотим собрать воду в какую-либо емкость. Возьмем две емкости одинакового объема, но с разными диаметрами входного отверстия. Возьмем, например, литровую банку и литровую бутылку. Выставим их под дождь. Понятно, что банка наполнится значительно быстрее бутылки, и это определяется свойствами банки и бутылки, ибо дождь для них один и тот же. Точно также скорость подвода энергии от внешних источников определяется способностью тела воспринимать эту энергию. Именно способность материальной точки воспринимать тепловой поток и характеризуется энтропией. Описанную идею можно обобщить. Допустим, что подвод энергии от внешних источников есть некое излучение неизвестной природы, но поддающееся контролю. Допустим также, что материальная точка, которая может заключать в себе сложные технические устройства, способна реагировать на это излучение, и эту реакцию мы способны измерять соответствующим прибором, который можем именовать термометром. Уравнение (9.4.6) при этом никак не изменится. Мы, по-прежнему, можем назвать величину ϑ температурой, хотя обычный термометр может оказаться непригодным и нужно использовать другой прибор. Функцию H также можно продолжать именовать энтропией. Единственно важным является то, что имеется некая характеристика тела, которую мы в состоянии измерять. Для каждой такой характеристики тела можно ввести соответствующую ей энтропию. Этих способностей у тела может быть

[6]Энтропия одно из наиболее туманных понятий в классической физике. Важность роли энтропии в прикладных и теоретических исследованиях неоспорима, но исполнитель этой роли подобен певцу за сценой: его все слышат, но никто не видит.

несколько. Пусть, например, их две. Тогда мы введем две температуры и две энтропии. Уравнение (9.4.7) примет следующий вид

$$\vartheta_1 \dot{H}_1 + \vartheta_2 \dot{H}_2 = q_1(t) + q_2(t) \equiv \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e),$$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ задают соответствующие потоки энергии от внешних источников.

Все сказанное имеет своей целью подчеркнуть, что ни температура, ни энтропия не имеют объективного, т.е. не зависящего от позиции исследователя, смысла. Обычная температура — это величина, которая измеряется обычным термометром. Является ли эта температура мерой хаотического движения молекул, как это утверждается[7] в статистической физике? Ответ: если мы в состоянии ввести некий измеряемый параметр, для которого можем доказать, что характеризуемая им величина может служить мерой хаотического движения молекул, то да — является. Если же нет, то — не является. Суть не в том, чем является температура, а исключительно в наших возможностях ее измерять. Важно также иметь в виду, что для включения какой-либо измеряемой величины в теорию неизбежно приходится вводить сопряженную ей величину, выбор которой и позволяет написать некие уравнения для измеряемой величины так, что решения этого уравнения будут правильно описывать поведение измеряемой величины. Для обычной температуры такой сопряженной величиной является обычная энтропия. Поэтому сама по себе энтропия обретает смысл только после того, как заявлено какой именно переменной она сопряжена. Ниже мы будем говорить о той температуре, которую измеряют обычным термометром.

Вернемся к уравнению баланса энергии. Использовав (9.4.7), вместо уравнения (9.4.6) получим следующее уравнение

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = \vartheta \dot{H} \quad \Rightarrow \quad U(\mathcal{A}) = U[H(\mathcal{A})] \quad \Rightarrow \quad \vartheta(\mathcal{A}) = \frac{\partial U(H)}{\partial H}. \qquad (9.4.8)$$

Первое из уравнений (9.4.8) называется *приведенным уравнением баланса энергии*. Оно показывает от каких аргументов зависит внутренняя энергия. По существу введение понятия внутренней энергии неотделимо от введения понятия энтропии. На это обстоятельство следует обратить особое внимание, ибо из чтения многочисленных книг по физике и термодинамике может возникнуть ложное впечатление, что имеется откуда-то заранее возникшее понятие внутренней энергии, а температура является производной от внутренней энергии по энтропии. На самом деле мы просто захотели учесть тепловые потоки и

[7]Когда у человека повышается температура, то кровь начинает течь с большей скоростью и учащается пульс, чтобы сердце могло прокачивать большее количество крови. Идет ли здесь речь о хаотических движениях молекул? Не является ли движение крови при повышенной температуре даже более упорядоченным, чем при нормальной температуре?

для этого ввели понятия внутренней энергии и энтропии, которые неотделимы друг от друга. Конечно, на интуитивном уровне внутренняя энергия воспринимается нами как некая объективная характеристика тела. Может быть, в будущем ее и удастся ввести в качестве таковой. Но здесь мы описываем ситуацию такой, какой она является в настоящее время.

Если внутренняя энергия материальной точки задана как функция энтропии, то последнее уравнение позволяет найти связь между энтропией и температурой, но оно не позволяет вычислить саму температуру. Для этого необходимо использовать уравнение (9.4.7), которое в более сложных системах называется уравнением теплопроводности. Но прежде нужно определить функцию $q(t)$. Примем для нее следующее уравнение, являющееся аналогом так называемого закона Фурье-Стокса

$$q(t) = -\varkappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*) + b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*), \quad \varkappa>0, \quad b>0, \tag{9.4.9}$$

где постоянная величина $\varkappa$ называется коэффициентом теплопроводности; величина ϑ_* есть температура окружающей среды, которую примем постоянной.

Положительность коэффициента теплопроводности $\varkappa$ выражает экспериментальный закон, что тепло течет от горячего к холодному. Положительность коэффициента b означает, что частица при трении о внешнюю среду нагревается. Коэффициент b, вообще говоря, нельзя смешивать с коэффициентом вязкого трения b_*. Пусть, например, сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e)$ имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathbf{R}) + b_*\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*),$$

где b_* есть коэффициент вязкого трения.

Какова бы ни была внешняя сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e)$, она не попадает в приведенное уравнение баланса энергии. Функция $q(t)$ называется потоком тепла. Вектор $\mathbf{v}_*$ есть скорость той бесконечно малой окрестности среды, в которой в данный момент времени движется материальная точка. Следует подчеркнуть, что закон Фурье–Стокса в равной степени отражает как наши интуитивные представления о процессе, так и экспериментальные данные. Это — не фундаментальный закон механики. Законы такого рода в механике принято называть *определяющими уравнениями*. По мере расширения наших знаний о процессе *определяющие уравнения* могут изменяться, но фундамент механики и ее фундаментальные законы при этом не меняются.

Исключительно в качестве иллюстрации основной идеи и без каких бы то ни было претензий на какое-либо соответствие реальности, рассмотрим следующий конкретный пример внутренней энергии

$$U(H) = \frac{1}{2}\alpha H^2 + \mathrm{const}, \quad \alpha>0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \alpha\,H \tag{9.4.10}$$

Возникает вопрос: откуда мы знаем вид внутренней энергии? Ответ: при задании внутренней энергии в первую очередь принимаются интуитивные представления о рассматриваемой системе, а затем реализация этих представлений проверяется экспериментально. По отношению к представлению (9.4.10) мы этого делать не будем, поскольку речь идет только об иллюстрации идеи. Если принять (9.4.10), то уравнение (9.4.6) можно переписать в виде, пригодном для нахождения температуры

$$\dot{\vartheta} = -\alpha\kappa\,(\vartheta - \vartheta_*) + b\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*), \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta_0. \tag{9.4.11}$$

Здесь мы воспользовались выражением (9.4.9) для потока тепла. В уравнение (9.4.11) для измеряемой температуры вошли два параметра $\alpha\kappa$ и b, которые должны измеряться экспериментально. Если их удается определить так, что уравнение (9.4.11) правильно описывает измеряемую температуру материальной точки, то определяющее уравнение (9.4.10) можно признать приемлемыми. Если ни при каких значениях этих параметров решение уравнения (9.4.11) не описывают с приемлемой точностью наблюдаемые факты, то нужно искать другую форму определяющих уравнений, в том числе и для скорости подвода энергии от внешнего источника. Посмотрим, что нам дает уравнение (9.4.11). Его решение находится элементарно и имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_* + (\vartheta_0 - \vartheta_*)\exp(-\alpha\kappa\, t) + b\int\limits_0^t |(\mathbf{v}(\tau) - \mathbf{v}_*(\tau)|^2 \exp[-\alpha\kappa(t-\tau)]\,d\tau.$$

Видим, что при $b = 0$ температура материальной точки стремится к температуре окружающей среды по экспоненциальному закону с показателем $(-\alpha\kappa\, t)$. Заметим, что температура окружающей среды может быть выше температуры плавления материальной точки, т.е. сама материальная точка может исчезнуть в результате этого процесса. При $b \neq 0$ температура частицы может достаточно сильно возрастать в результате трения. Так, например, происходит при вхождении метеорита в атмосферу Земли, когда метеорит сгорает в результате трения. Качественно все это похоже на реальную ситуацию, а количественное совпадение надо проверять экспериментально. Очень часто сравнение с экспериментом вынуждает уточнять модель. Например, коэффициенты $\alpha\kappa$ и b могут зависеть от температуры. Мы их выбрали так, чтобы получить линейное уравнение для определения температуры, но такого рода соображения не имеют под собой физических оснований.

Подведем итоги этого пункта. Первый итог состоит в том, что в рассматриваемом случае механическая энергия E_M и полная энергия $E(\mathcal{A})$ непосредственно не связаны между собой. Например, механическая энергия может сохраняться неизменной, а внутренняя энергия тела при этом может меняться и

наоборот. Второй итог заключается в демонстрации двоякой природы трения. Когда тело движется в среде с трением, то на него может действовать сила трения. Для конкретности и простоты примем, что на материальную точку действует только сила линейного вязкого трения

$$m\,\dot{\mathbf{v}} = -b_*\,\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0\exp(-b_* t).$$

Механическая энергия тела в данном случае совпадает с его кинетической энергией и со временем уменьшается

$$E_M = K = \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0\exp(-2\,b_* t)/2.$$

Как при этом меняется внутренняя энергия тела? Будет ли тело нагреваться? Выше мы видели, что нагрев (изменение внутренней энергии тела) непосредственно не связан с фактом наличия или отсутствия силы трения. Это следует из того, что коэффициент вязкого трения b_* вообще не попал в уравнение (9.4.11) для определения температуры тела. Иными словами, часто встречающееся утверждение, что сила трения вызывает нагрев тела, строго говоря, является неправильным. Нагрев тела определяется не силовыми факторами, а обменом энергиями между телом и окружающей средой. В рассматриваемом случае материальной точки эти "тонкости" не существенны. Однако во многих случаях ясное понимание этого факта является необходимым.

9.4.3. Материальная точка переменной массы

Усложним ситуацию и рассмотрим материальную точку переменной массы, например, ракету, за которой сохраним ее способность нагреваться, т.е. поглощать тепло. В этом случае первый закон динамики принимает вид уравнения Мещерского

$$m(t)\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e) + \dot{m}\,(\mathbf{u}-\mathbf{v}), \tag{9.4.12}$$

где $\mathbf{u}$ есть скорость истечения газа.

Для полной энергии и скорости подвода энергии имеем выражения

$$E(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}m(t)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + U(\mathcal{A}),$$

$$\delta(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + U_*\right)\,\dot{m} + q - \kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*) + b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*).$$

Первое слагаемое в правой части последнего выражения скорость подвода (отвода) полной энергии частиц истекающего газа. Если газ покидает ракету, то $\dot{m} < 0$, т.е. масса ракеты уменьшается. Если уходящие частицы представить себе в виде невзаимодействующих шариков (материальных точек) одного

сорта, то массовая плотность их внутренней энергии постоянна, т.е. $U_* = C$. Величина q описывает подвод энергии, образующейся, например, при сгорании топлива в ракете. Смысл остальных слагаемых уже обсуждался выше. Уравнение баланса энергии принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}+\frac{1}{2}\,\dot{m}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\dot{U}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+U_*\right)\dot{m}+q- \\ -\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*)+b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*).$$

Чтобы получить приведенное уравнение баланса энергии, необходимо проделать несколько дополнительных операций. Прежде всего, с помощью первого закона динамики необходимо исключить из последнего уравнения слагаемое $m\dot{\mathbf{v}}$. Уравнение баланса энергии принимает вид

$$\dot{U}=\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})+U_*\right)\dot{m}+q- \\ -\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*)+b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*). \quad (9.4.13)$$

Приведенным уравнением баланса энергии называется уравнение вида

$$\dot{U}=\mu\,(m,\,H)\,\dot{m}+\vartheta\,(m,\,H)\,\dot{H}\quad\Rightarrow \\ \Rightarrow\quad \mu=\frac{\partial U(m,H)}{\partial m},\quad \vartheta=\frac{\partial U(m,H)}{\partial H}. \quad (9.4.14)$$

Здесь следует обратить внимание на аргументы, от которых зависят коэффициенты при производных в правой части уравнения (9.4.14). Упомянутые коэффициенты не должны зависеть от скоростей $\dot{m}$, $\dot{H}$. Именно по этой причине нельзя, например, принять, что

$$\mu=\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})+U_*.$$

Запись уравнения баланса энергии (9.4.13) в виде (9.4.14) всегда возможна, ибо в рассмотрение вводятся новые функции μ и энтропия H, причем последнюю определим уравнением

$$\vartheta\,\dot{H}=\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})+U_*-\mu\right]\dot{m}+q-\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*)+b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*). \quad (9.4.15)$$

В термодинамике [66] производную по массе от внутренней энергии принято называть химическим потенциалом. Поэтому и мы будем называть μ химическим потенциалом тела. Подчеркнем, однако, что никаких аргументов,

используемых в термодинамике при введении энтропии и других понятий, выше не использовалось. И температура, и энтропия, и химический потенциал выше вводились без каких-либо допущений на основе чисто механических рассуждений[8]. С формальной точки зрения обсуждаемый подход не вызывает возражений. Но хотелось бы внести большую ясность в этот процесс. Не исключено, что существует система аргументации, позволяющая уменьшить нагрузку на интуицию.

Выше внутренняя энергия определена как функция массы и энтропии. Часто в качестве независимых переменных удобнее использовать массу и температуру. С этой целью в рассмотрение вводится понятие свободной энергии Φ, которая связана с внутренней энергией соотношением

$$\Phi = U - \vartheta H. \tag{9.4.16}$$

Подставляя выражение (9.4.16) в приведенное уравнение баланса энергии (9.4.14), получаем

$$\dot{\Phi} = \mu(m, H)\,\dot{m} - H(m, H)\,\dot{\vartheta} \Rightarrow \mu = \frac{\partial \Phi(m,\vartheta)}{\partial m},\ H = -\frac{\partial \Phi(m,\vartheta)}{\partial \vartheta}. \tag{9.4.17}$$

Дальнейшие рассмотрения требуют задания свободной энергии. В общем случае, это — трудная задача, решение которой зависит от конкретных условий задачи. Исключительно в иллюстративных целях примем простейшее выражение для свободной энергии

$$\Phi(m, H) = \frac{1}{2}\alpha(\vartheta - \vartheta_0)^2 + \beta\,(\vartheta - \vartheta_0)\,(m - m_0) + \frac{1}{2}\gamma\,(m - m_0)^2 + d\,(m - m_0),$$

где m_0, ϑ_0 — отсчетные постоянные масса и температура; α, β γ, d — известные, например из эксперимента, числовые параметры.

Тогда получим

$$H = -\alpha\,(\vartheta - \vartheta_0) - \beta(m - m_0), \quad \mu = \beta\,(\vartheta - \vartheta_0) + \gamma(m - m_0) + d.$$

Подставляя равенства (9.4.3.) в уравнение, определяющее энтропию (9.4.15), получаем так называемое уравнение теплопроводности для нахож-

[8]Впрочем, все эти понятия, включая энергию, оказались без прав гражданства. В классической механике они вводятся только для частных случаев. В термодинамике, они также не определяются. Например, в [66] читаем: “Некоторые общие понятия (теплота, температура, система, энергия, масса и т.п.), *выходящие за пределы термодинамики*, признано целесообразным рассмотреть в специальной научной комиссии, совместно с другими фундаментальными понятиями”. В справочнике по физике [29] читаем: “Энергией называется способность тела совершать работу”. Но дать общее определение работы ничуть не проще, чем дать определение энергии. Во многих случаях понятия работы и энергии являются почти синонимами. И по настоящее время эти фундаментальные понятия всеми используются, но не выводятся за рамки интуитивных представлений.

дения температуры

$$-\alpha\vartheta\,\dot{\vartheta}=\left[\frac{1}{2}\,[(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})]+U_*-\beta\,(\vartheta-\vartheta_0)-\gamma(m-m_0)-d\right]\dot{m}+$$
$$+q-\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*)+b\,\vartheta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_*)+\beta\,\dot{m}\,. \quad (9.4.18)$$

Пришли к системе двух уравнений (9.4.12) и (9.4.15) относительно неизвестных $m(t)$, $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\vartheta(t)$, т.е. имеем восемь неизвестных функций и только четыре уравнения. Впрочем, подсчитывать число неизвестных функций еще рано, ибо еще не конкретизирована внешняя сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e)$. Допустим, что рассматриваемая материальная точка моделирует ракету, летящую в атмосфере Земли и не снабженную изощренными средствами управления. Тогда внешняя сила может быть задана простейшим образом

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\,\mathcal{A}^e)=\mathbf{P}-k\,|\dot{\mathbf{R}}|\dot{\mathbf{R}},$$

где первое слагаемое в правой части есть вес ракеты, второе слагаемое есть сила трения об атмосферу, k есть коэффициент трения.

Видим, что внешняя сила не вносит новых неизвестных. Таким образом, система не замкнута и требуются еще четыре уравнения. Поскольку мы уже извлекли из фундаментальных законов все, что они могут дать, то означает ли этот факт какую-либо ущербность фундаментальных законов? Ни в коем случае! Именно так и должно быть. Действительно, если мы хотим управлять полетом, например, ракеты, то нам необходимы для этого некие, не фиксированные фундаментальными законами, элементы. Именно они и попадают в уравнения (9.4.12) и (9.4.15) в качестве неопределенных элементов. По существу, в данной задаче управлять мы можем только вектором $\mathbf{u}(t)$ и частично законом изменения массы ракеты. Написание отмеченных дополнительных уравнений требует конкретных представлений о процессах, происходящих внутри рассматриваемой системы. Например, уходящие частицы — это груз, сбрасываемый с дирижабля, или газы, образующиеся при сгорании топлива. В этих двух случаях дополнительные уравнения будут формулироваться по разному. Цель данного пункта состоит только в демонстрации идеи введения температуры, энтропии и химического потенциала. Поэтому обсуждение этих дополнительных уравнений оставляем в стороне. Отметим только один частный случай, в котором химический потенциал имеет совсем простой смысл. А именно, примем, что относительная скорость истечения газов из ракеты постоянна по модулю

$$\left|\mathbf{u}(t)-\dot{\mathbf{R}}(t)\right|=|\mathbf{u}_r|\equiv u_r=\mathrm{const}.$$

В таком случае в выражении для свободной энергии можно принять

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad d = \frac{1}{2}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r + U_*.$$

Выражение для свободной энергии принимает вид

$$\Phi(m, H) = \frac{1}{2}\,\alpha(\vartheta - \vartheta_0)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r + U_*\right)(m - m_0) + \text{const}, \quad \mu = \frac{1}{2}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r + U_*.$$

Иными словами, химический потенциал есть просто массовая плотность полной энергии истекающего газа. Заметно упрощается и уравнение теплопроводности (9.4.18)

$$-\alpha\vartheta\,\dot{\vartheta} = q - \kappa\,\vartheta(\vartheta - \vartheta_*) + b\,\vartheta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*).$$

К сожалению, если модуль относительной скорости не постоянен, то эта интерпретация становится неверной. Действительно, вернемся к уравнению баланса энергии (9.4.13) и введем энтропию не равенством (9.4.15), а более простым равенством

$$\vartheta\,\dot{H} = q - \kappa\,\vartheta(\vartheta - \vartheta_*) + b\,\vartheta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*).$$

Тогда уравнение (9.4.13) принимает вид

$$\dot{U} = \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + U_*\right)\dot{m} + \vartheta\,\dot{H}\,.$$

Сравнивая это уравнение с приведенным уравнением баланса энергии (9.4.14), видим

$$\mu = \frac{\partial U(m, H)}{\partial m} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + U_* \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U(m, H) = \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + U_*\right) m + f(H).$$

Дифференцируя это выражение для внутренней энергии по времени и требуя выполнения приведенного уравнения баланса энергии, немедленно убеждаемся в том, что коэффициент при массе должен быть постоянен во времени, как это и было принято выше в частном случае. Именно по этой причине и химический потенциал, и энтропия вводились выше более сложным образом. При этом, энтропия оказалась зависящей не только от температуры, но и от массы.

Заметим, что важность химического потенциала полностью раскрывается при рассмотрении более сложных ситуаций вроде многокомпонентных сред, в

которых нужно учитывать химические реакции, теории растворов и т.п. Тем не менее, по нашему мнению знакомство с понятиями температуры, энтропии и химического потенциала целесообразно уже при первом знакомстве с механикой. По крайней мере, это избавит изучающего от неправильного впечатления, что термодинамика, физическая химия, химическая гидродинамика и многие другие разделы науки отделены от рациональной механики непроходимой стеной.

Из сказанного выше следует, что энтропия тела — это величина, которая служит для того, чтобы путем ее правильного подбора, правильно находить измеряемую температуру. Для тех, кто привык к традиционной трактовке энтропии, подобное утверждение может показаться слишком необычным и примитивным. Однако с точки зрения рациональной механики в принятой трактовке нет ничего необычного и даже нового. Действительно, точно такая же ситуация возникает с напряжениями и деформациями в теории упругости. Никто и никогда не измерял тензор напряжений. Измеряются деформации. Напряжения вычисляются с помощью определяющих уравнений, которые, в свою очередь, подбираются так, чтобы измеряемые деформации совпадали бы с найденными теоретически.

Рассмотренный пример материальной точки, конечно, слишком экзотичен. Но достоинством этого примера является то, что в нем отсутствуют все посторонние обстоятельства. Нет возможности одно и то же трактовать с точностью до наоборот. Здесь прекрасно видно, что внутренняя энергия — это совершенно новая характеристика тела, никак не отраженная в динамических структурах тела. Кроме того, уже в этом примере видно, что уравнение баланса энергии, которое носит всеобщий характер и применимо ко всем системам, не налагает обременительных ограничений на рассматриваемые системы. Оно содержит в себе достаточно произволов, т.е. является достаточно универсальным, для того, чтобы обслужить бесчисленное множество конкретных приложений. Как и другие фундаментальные законы механики, уравнение баланса энергии указывает лишь направление исследований, но не налагает слишком жестких ограничений на конкретное содержание этих исследований.

9.5. Система материальных точек

Чтобы продолжить знакомство с уравнением баланса энергии и понятием внутренней энергии, рассмотрим еще один хорошо изученный в механике случай тела, являющегося совокупностью материальных точек неизменной

массы. Здесь полная энергия рассматриваемого тела $\mathcal{A}$ дается выражением

$$E(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + U(\mathcal{A}).$$

Мощность внешних воздействий дается выражением для тела, составленного из бесспиновых частиц, имеет вид

$$N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e\right) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k.$$

Как и в случае с одной материальной точки, рассмотрение начнем с доказательства теоремы об изменении кинетической энергии. Выпишем первый закон динамики применительно к каждой из материальных точек, входящих в тело $\mathcal{A}$ $(i, m = 1, 2, \ldots, n)$

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right) + \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e\right), \tag{9.5.1}$$

где внутренние силы, т.е. силы между частицами, составляющими тело $\mathcal{A}$, удовлетворяют условиям

$$\mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right) = -\mathbf{F}\left(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i\right), \quad \left(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k\right) \times \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_m\right) = \mathbf{0}.$$

Если обе части каждого из уравнений (9.5.1) скалярно умножить на соответствующий вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}$ и сложить получившиеся уравнения, то получим теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e\right) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i,$$

которая утверждает, что *скорость изменения кинетической энергии тела равна мощности внутренних и внешних воздействий.*

В приведенной формулировке эта теорема не вводит никаких новых понятий. Кроме того, она включает в себя такое понятие, как мощность внутренних сил, о которых, как правило, мало что известно. Поэтому теорему об изменении кинетической энергии целесообразно трансформировать в уравнение баланса механической энергии.

Примем, что и внутренние, и внешние силы частично обладают потенциалом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right) = -\frac{\partial \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right),$$

$$\mathbf{F}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)}{\partial \mathbf{R}_i} + \mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\,, \tag{9.5.2}$$

где функция $\Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ называется потенциалом внутренних сил и является характеристикой тела $\mathcal{A}$, функция $\Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ называется потенциалом внешних сил и характеризует окружение тела $\mathcal{A}$.

Непотенциальные силы $\mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ и $\mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ обычно называются диссипативными силами, ибо они, как правило, отвечают за рассеяние энергии. Используя представления (9.5.2), умножая скалярно обе части уравнения (9.5.1) на вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ и суммируя получившиеся уравнения, получаем

$$\dot{E}_M = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}\,(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i, \tag{9.5.3}$$

$$E_M \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) + \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n). \tag{9.5.4}$$

Первое слагаемое в правой части (9.5.3) отвечает за диссипацию энергии внутри тела $\mathcal{A}$, а второе слагаемое отвечает за диссипацию энергии в окружающую среду. В обоих случаях речь идет о диссипации энергии, осуществляемой посредством сил. Ранее мы видели и увидим далее, что имеются и другие пути диссипации энергии. Термин “диссипация энергии внутри тела” не вполне удачен. Точнее было бы сказать так: “Первое слагаемое в правой части (9.5.3) отвечает за необратимые переходы энергии внутри тела из одной формы в другую”. Но другие формы энергии у нас еще, по существу, не введены. Поэтому к обсуждению этого вопроса мы вернемся в следующем пункте. Посмотрим на выражение механической энергии (9.5.4). Оно состоит из двух неравноправных частей. Первая часть есть сумма кинетической энергии тела и потенциала внутренних сил. Последний можно было бы назвать внутренней энергией тела, но это только часть внутренней энергии. Важно, что обсуждаемая первая часть механической энергии есть атрибут самого тела. Вторая часть в (9.5.4) есть потенциал внешних сил и может быть названа энергией взаимодействия тела с внешними полями. Если внутренние и внешние диссипативные силы отсутствуют, то механическая энергия сохраняется, т.е. имеем интеграл энергии

$$E_M \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \Pi_e(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) + \Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n) = \mathrm{const}.$$

Системы, механическая энергия которых сохраняется, называются консервативными. Системы такого рода очень часто встречаются в механике.

Допустим теперь, что отсутствует только внешняя диссипация. В этом случае вместо уравнения (9.5.3) получаем

$$\dot{E}_M = \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{f}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i, \tag{9.5.5}$$

т.е. механическая энергия не сохраняется и в этом случае. Но тогда возникает вопрос куда же исчезает энергия? С окружающей средой тело посредством сил и моментов не взаимодействует, а никаких других взаимодействий законы динамики не предусматривают. Здесь мы отчетливо видим недостаточность как законов динамики, так и вытекающего из них уравнения баланса механической энергии.

Обратимся к рассмотрению уравнения баланса энергии, которое для системы материальных точек записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{R}}_k \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + \dot{U}(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.5.6}$$

Эта форма записи уравнения баланса энергии в виде (9.5.6) нуждается в дальнейших преобразованиях. Здесь, на примере системы с конечным числом степеней свободы, мы встречаемся с ситуацией, которая типична для механики сплошных сред. От уравнения (9.5.6) необходимо перейти к так называемому *приведенному уравнению баланса энергии*. Для этого нужно выписать первый закон динамики применительно к каждой из материальных точек, входящих в тело $\mathcal{A}$ $(i, m = 1, 2, \ldots, n)$

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_m) = \mathbf{0}.$$

Исключая с помощью этих равенств ускорения из уравнений (9.5.6) и проводя простые преобразования, уравнение баланса энергии представляем в виде

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) \cdot \left(\dot{\mathbf{R}}_k - \dot{\mathbf{R}}_m\right) + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.5.7}$$

В уравнение (9.5.7) не входят внешние силы, но имеется дополнительный член, описывающий скорость подвода энергии в тело и не входящий в законы динамики. Как было показано ранее, внутренние силы в системе материальных точек могут быть только центральными, т.е.

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) = \mathcal{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) \frac{(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_m)}{\gamma_{km}}, \quad \gamma_{km} \equiv |\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_m|,$$

причем $\mathcal{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) = \mathcal{F}(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_k)$ и $\mathcal{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k) = 0$.

С учетом этого условия уравнение (9.5.7) можно переписать следующим образом

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \mathcal{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m)\,\dot{\gamma}_{km} + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e).$$

Силы, действующие между частицами, можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых не зависит от скоростей изменения расстояний между частицами, а второе — зависит

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) = \varphi(\gamma_{km}) + \psi(\gamma_{km}, \dot{\gamma}_{km}), \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0, \dot{\gamma}_{kk}) = 0.$$

Внутренние силы, которые описываются первым слагаемым в правой части этого равенства, называются упругими. Внутренние силы, которые зависят от скоростей и описываются вторым слагаемым, называются диссипативными силами.

Теперь уравнение баланса энергии принимает вид

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \varphi(\gamma_{km})\dot{\gamma}_{km} - \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \psi(\gamma_{km}, \dot{\gamma}_{km})\dot{\gamma}_{km} + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e),$$

но это еще не приведенное уравнение баланса энергии. Чтобы получить последнее, введем измеряемые каким-либо прибором температуры материальных точек $\mathcal{A}_k$, которые обозначим через ϑ_k, а энтропии H_k материальных точек введем с помощью равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\ \dot{H}_k = -\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \psi(\gamma_{km}, \dot{\gamma}_{km})\dot{\gamma}_{km} + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.5.8}$$

Конечно, равенством (9.5.8) энтропии однозначно еще не определены, но оно позволяет записать уравнение баланса энергии в специальной форме, которая и называется приведенным уравнением баланса энергии

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \varphi(\gamma_{km})\dot{\gamma}_{km} + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\ \dot{H}_k \quad \Rightarrow \quad U = U(\gamma_{km}, H_1, H_2, \ldots, H_n). \tag{9.5.9}$$

Уравнение баланса энергии, записанное в форме равенства (9.5.9), называется *приведенным уравнением баланса энергии*. Подчеркнем, что приведенное уравнение баланса энергии отнюдь не является простой перефразировкой уравнения баланса энергии. При его выводе использовались, как законы динамики и следствия из них, так и дополнительные рассуждения. В частности, были введены новые функции, названные энтропиями, с помощью равенства

(9.5.8), которое не вытекает ни из каких фундаментальных законов, но которое, тем не менее, не является дополнительным постулатом. Введение равенства (9.5.8) всегда возможно, т.е. оно является *определением*. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии можно назвать одной из общих теорем механики. Оно не только позволяет увидеть, от каких аргументов зависит внутренняя энергия, но и получить соотношения, аналог которых для изотермических процессов в механике сплошных сред впервые был открыт Дж. Грином (1839) и впоследствии получил название соотношений Коши–Грина[9]

$$\varphi(\gamma_{km}) = -\frac{\partial U}{\partial \gamma_{km}}, \quad \vartheta_k = \frac{\partial U}{\partial H_k}. \tag{9.5.10}$$

Таким образом, если внутренняя энергия системы материальных точек задана, то мы можем вычислить упругие силы, действующие между частицами системы, и выразить температуры частиц через энтропии. Чтобы найти температуры фактически, нужно вернуться к уравнению теплопроводности (9.5.8) и конкретизировать его. К сожалению, в общем случае эта процедура довольно громоздкая. Поэтому здесь мы ее делать не будем, а в следующем пункте подробно покажем ее на примере системы, состоящей из двух материальных точек. В этом пункте сосредоточим свое внимание на случае, когда внешний подвод энергии к системе отсутствует, т.е. $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = 0$. Кроме того, примем, что внутри системы диссипативные силы отсутствуют: $\psi(\gamma_{km}, \dot{\gamma}_{km}) = 0$. Наконец, примем, что температуры всех частиц в системе одинаковы. Что будет происходить в системе при отказе от этих ограничений, мы рассмотрим в следующем пункте. При принятии сформулированных ограничений приходим к идеальной системе, состоящей из материальных точек, между которыми действуют только упругие силы, т.е. силы, не зависящие от скоростей. Такого рода система является основным объектом исследования в ньютоновой механике. В этом случае уравнение баланса энергии (9.5.7) принимает простейший вид

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\,(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n) = U(|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_m|). \tag{9.5.11}$$

Тот факт, что внутренняя энергия зависит от векторов положений частиц только через расстояния между ними, следует из записи уравнения баланса энергии в форме (9.5.9) при $H_k = \mathrm{const}$. Из равенства (9.5.11) следуют соотношения Коши–Грина в следующей форме

$$\mathbf{F}\,(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_k}. \tag{9.5.12}$$

[9]При весьма частных допущениях аналоги этих соотношений были получены еще раньше Ж. Лагранжем.

Определение: *векторы* $\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_m)$ *называются потенциальными, если существует такая скалярная функция* $U(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n)$*, называемая потенциалом, что справедливы соотношения (9.5.12).*

Соотношения Коши–Грина (9.5.12) показывают, что внутренняя энергия системы материальных точек является потенциалом для внутренних сил взаимодействия между материальными точками рассматриваемой системы. При этом внутренняя энергия определена с точностью до произвольной постоянной величины. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение баланса энергии ведет только к изменению терминологии: потенциал внутренних сил называется внутренней энергией. Поэтому вполне возможно ограничиться уравнением баланса механической энергии. Классическим примером системы материальных точек с потенциальными силами между частицами системы является наша солнечная система, в которой силы взаимодействия между планетами определяются законом Всемирного тяготения. Именно рассмотрение этой задачи впервые принесло славу механике как фундаментальной науке. Для исследования этой задачи оказалось достаточным использовать второй закон Ньютона с добавлением к нему закона Всемирного тяготения. Приведем классическую постановку этой задачи и сравним ее с тем, что вытекает из фундаментальных законов в их современной трактовке. Пусть дана система n материальных точек с массами m_k, между которыми действуют силы, определяемые законом Всемирного тяготения. Запишем для каждого тела второй закон Ньютона

$$m_k \frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2} = -\sum_{i=1}^{n} G \frac{m_k m_i (1-\delta_{ki})}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|^2} \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (9.5.13)$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная, δ_{ki} есть символ Кронекера.

Умножим обе части каждого из этих уравнений скалярно на вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_k$ и просуммируем все получившиеся уравнения. При суммировании правых частей получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_k \frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{R}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{R}_k}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_k}{dt}\right] = \frac{dK}{dt},$$

где K есть кинетическая энергия системы.

При суммировании левых частей получим следующее равенство

$$-\sum_{k,i=1}^{n} G \frac{m_k m_i (1-\delta_{ki})}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|^2} \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|} \cdot \frac{d\mathbf{R}_k}{dt} = -\frac{dU}{dt},$$

где функцию U

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{n} G\,\frac{m_k\, m_i(1-\delta_{ki})}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|}$$

принято называть потенциальной энергией системы. Но мы предпочитаем называть ее внутренней энергией системы. Термин “потенциальная энергия” в данной книге будет использоваться исключительно для потенциала внешних воздействий на систему. Потенциальная энергия, в отличие от внутренней энергии, не является характеристикой самой системы, а характеризует внешние обстоятельства. Поэтому лучше не смешивать эти два термина. Покажем, что функция U действительно является потенциалом для внутренних сил. Для этого понадобятся формулы

$$\frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{R}_s} = \delta_{ks}\mathbf{E}, \quad \frac{\partial(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i)}{\partial \mathbf{R}_s} = (\delta_{ks} - \delta_{is})\mathbf{E}.$$

Вычислим теперь производные

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_s} = \sum_{i=1}^{n} G\,\frac{m_s\, m_i(1-\delta_{si})}{|\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_i|^3}(\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_i) = -\mathbf{F}(\mathcal{A}_s, \mathcal{B}_s^e),$$

где окружение $\mathcal{B}_s^e$ частицы $\mathcal{A}_s$ состоит только из частиц, принадлежащих рассматриваемой системе.

Иными словами, введенная выше функция U действительно является потенциалом для внутренних сил. Начинающим, разумеется, необходимо доказать последнюю формулу подробными выкладками.

Окончательно получаем равенство

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(K+U)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad K + U = \mathrm{const}. \tag{9.5.14}$$

Равенство (9.5.14) называется интегралом энергии и показывает, что полная энергия рассматриваемой системы сохраняется, т.е. для нее выполняется закон сохранения энергии. В точности этот же самый результат вытекает и из уравнения баланса энергии, но при получении (9.5.14) уравнение баланса энергии не использовалось. Приведенный метод получения интеграла энергии и способ введения понятия полной энергии чрезвычайно популярны при традиционном изложении механики. В результате может сложиться ложное мнение о том, что уравнение баланса энергии вообще не является независимым фундаментальным законом механики. Конечно, можно придерживаться и подобной точки зрения. Но при этом резко сужается сфера действия механики. Например, если придерживаться этой точки зрения, то можно вычислить, и притом весьма точно, траектории движения планет солнечной системы. Это,

разумеется, уникальный результат. Но, как хорошо известно, между планетами солнечной системы действуют не только силы гравитационного притяжения, но и потоки тепла, идущие от Солнца к планетам. Чрезвычайно важную роль играют и температуры планет и Солнца. При традиционной трактовке механики учесть эти тепловые потоки невозможно. Многие считают, что рассмотрение такого рода факторов просто выходит за рамки механики как науки, и механика не в состоянии их учесть. Так и родился миф об ограниченности механики. Автор придерживается позиции, что, во-первых, механика не имеет пределов применимости и, во-вторых, предметом рациональной механики является та часть физики, которая может быть изложена рациональными методами. В частности, современная рациональная механика располагает всеми возможностями для того, чтобы полностью включить термодинамику в свои структуры. В частности, для этого необходимо включить уравнение баланса энергии в список фундаментальных законов механики. Именно этот закон позволяет учесть как силовые, так и тепловые взаимодействия между частицами системы. Разумеется, сказанное отнюдь не означает, что отныне можно игнорировать термодинамику. Последняя имеет великие достижения и без опыта, накопленного термодинамикой, невозможно было бы правильно учесть тепловые явления в механике. Вместе с тем, следует подчеркнуть, что включение термодинамики в рациональную механику вовсе не состоит в автоматическом приписывании термодинамики к механике. Рациональная механика опирается на свои весьма жесткие принципы, которые нельзя нарушать. Не все понятия, используемые в термодинамике, можно без всяких изменений ввести в рациональную механику. Например, понятие энтропии, введенное выше, в рациональной механике получает существенно другую интерпретацию, но при этом результаты, получаемые с помощью понятия энтропии, оказываются теми же, что и в термодинамике. Автор убежден, что недалеко то время, когда электричество и магнетизм также станут разделом рациональной механики. Не исключено, что при этом придется расширить список фундаментальных законов механики, но не исключено также и то, что этого не потребуется.

9.6. Система двух материальных точек

Поясним все сказанное на примере системы двух материальных точек. С принципиальной точки зрения в этой системе проявляются все особенности систем общего вида. Вместе с тем, в этой простой системе все уравнения можно выписать в явном виде. Цель данного пункта состоит не в том, чтобы дать полный анализ поведения системы двух материальных точек при учете тепловых эффектов. Нам важно показать, что рациональная механика вполне спо-

собна полноценно описывать и тепловые, и многие другие эффекты, нисколько не изменяя при этом своим принципам. Уж слишком легко многие авторы, особенно физики, обвиняют механику в ее принципиальной неспособности описать те или иные эффекты. При этом, как правило, под механикой понимают механику Лагранжа и Гамильтона, которая действительно не способна описать многие проблемы даже чисто механического происхождения, не говоря уже о смежных областях. Целью нижеследующего является демонстрация особенностей работы с уравнением баланса энергии. Особое внимание следует обратить внимание на тот факт, что работа с уравнением баланса энергии не сводится к выучиванью четких правил, но требует понимания существа происходящих в системе процессов. Поэтому уравнение баланса энергии является самым трудным для усвоения фундаментальным законом механики.

Итак, пусть тело $\mathcal{A}$ состоит из двух материальных точек $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и некоего третьего тела $\mathcal{D}$, лишенного массы, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$. Уравнение баланса энергии (9.5.6) для этого случая принимает вид

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}}_2 + \dot{U}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_2 + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.6.1}$$

Здесь принято, что на тело $\mathcal{D}$ со стороны окружения тела $\mathcal{A}$ никаких сил не действует, т.е. $\mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$. Для каждой из частиц можно написать первый закон динамики или второй закон Ньютона

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e),$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e).$$

Кроме того, для тела $\mathcal{D}$ также необходимо написать законы динамики. Но поскольку оно лишено массы, то законы динамики переходят в законы статики

$$\mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = \mathbf{0}.$$

Эти равенства лучше переписать в другой форме

$$\mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}), \quad (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = \mathbf{0}.$$

Видим, что справедливо равенство

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = -\mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) = -\mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) \gamma^{-1} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|. \tag{9.6.2}$$

Используя эти равенства, уравнение баланса энергии (9.6.1) переписываем в виде

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = [\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D})] \cdot (\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2) + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.6.3}$$

Видим, что в выражение (9.6.3) входят только внутренние силы, а внешние силы исчезли. Более того, в уравнение баланса энергии вошла только внутренняя сила, действующая на частицу $\mathcal{B}$ со стороны тел $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. Здесь возможны две точки зрения. С одной точки зрения, мы могли бы вообще не упоминать безынерционное тело $\mathcal{D}$ и, соответственно, не рассматривать силу $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D})$, а присутствие тела $\mathcal{D}$ смоделировать силой $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C})$. Если тела $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ не контактируют между собой, то это означает введение в механику дальнодействующих сил. Вообще говоря, никаких сил дальнодействия в Природе не существует. В классической механике они вводятся в тех случаях, когда желают исключить из рассмотрения некие тела. Например, закон Всемирного тяготения вводит в рассмотрение дальнодействующие силы. Но можно ввести в рассмотрение гравитационное поле и рассматривать его как тело. Тогда силы гравитационного притяжения можно было бы рассматривать как контактные силы рассматриваемого тела с гравитационным полем. Именно для иллюстрации сказанного мы и ввели безынерционное тело $\mathcal{D}$. Поэтому вторая точка зрения заключается в том, что существуют только контактные силы, а воздействие тела $\mathcal{C}$ на тело $\mathcal{B}$ осуществляется только через промежуточное тело $\mathcal{D}$. Это означает, что $\mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathbf{0}$. На самом деле, только вторая точка зрения и может быть последовательно проведена в механике, ибо только в этом случае справедлива идея о том, что силы в механике моделируют присутствие других тел.

Итак, не уменьшая общности уравнение баланса энергии (9.6.3) с учетом равенства (9.6.2) можно переписать в виде

$$\dot{\mathrm{U}}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{B},\mathcal{D})\cdot(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2) + \delta(\mathcal{A},\mathcal{A}^e) = -\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{D})\,\dot{\gamma} + \delta(\mathcal{A},\mathcal{A}^e). \quad (9.6.4)$$

Примем теперь, что внутренняя сила определяется выражением

$$\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{D}) = \varphi(\gamma) + \psi(\gamma,\dot{\gamma}). \quad (9.6.5)$$

Можно доказать, что представление (9.6.5) является максимально общим для силы, действующей между двумя материальными точками. Теперь уравнение баланса энергии (9.6.3) принимает вид

$$\dot{\mathrm{U}}(\mathcal{A}) = -\varphi(\gamma)\dot{\gamma} - \psi(\gamma,\dot{\gamma})\dot{\gamma} + \delta(\mathcal{A},\mathcal{A}^e). \quad (9.6.6)$$

Мы вплотную приблизились к формулировке приведенного уравнения баланса энергии. В предыдущем пункте температуры, измеряемые каким-либо термометром, вводились только для материальных точек, входящих в систему. Здесь мы введем в рассмотрение три температуры: ϑ_1, ϑ_2 и ϑ для тел $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Каждой из трех температур поставим в соответствие три

энтропии H_1, H_2 и H, которые выбираются так, чтобы выполнялось равенство типа (9.5.8)

$$\vartheta_1 \dot{H}_1 + \vartheta_2 \dot{H}_2 + \vartheta \dot{H} = -\psi(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma} + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \tag{9.6.7}$$

Немного ниже равенство (9.6.7) будет переписано в виде трех уравнений, из которых можно будет определять температуры. Подставляя равенство в (9.6.7) в уравнение (9.6.6), приходим к приведенному уравнению баланса энергии

$$\dot{U}(\mathcal{A}) = -\varphi(\gamma)\dot{\gamma} + \vartheta_1 \dot{H}_1 + \vartheta_2 \dot{H}_2 + \vartheta \dot{H} \quad \Rightarrow \quad U = U(\gamma, H_1, H_2, H). \tag{9.6.8}$$

Получили, что в рассматриваемой системе внутренняя энергия зависит от четырех аргументов: расстояния между частицами и трех энтропий. Это максимально общий вид внутренней энергии, возможный в системе двух материальных частиц, если, конечно, не принимаются во внимание какие-либо дополнительные излучения, отличные от тепловых. Сказанное немедленно следует из приведенного уравнения баланса энергия. Действительно, допустим, что внутренняя энергия зависит не только от указанных четырех аргументов, но и еще от одного аргумента $a(t)$. Вычисляя производную по времени от внутренней энергии и подставляя ее в равенство (9.6.8), получаем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma} + \varphi(\gamma)\right)\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial H_i} - \vartheta_i\right)\dot{H}_i + \left(\frac{\partial U}{\partial H} - \vartheta\right)\dot{H} + \frac{\partial U}{\partial a}\dot{a} = 0,$$

где внутренняя энергия рассматривается как функция пяти аргументов $U(\gamma, H_1, H_2, H, a)$.

Следует обратить внимание, что коэффициенты при скоростях изменения независимых переменных не зависят от этих скоростей. Иными словами, левая часть последнего равенства является линейной формой скоростей. Поскольку последнее равенство должно выполняться для всех мыслимых процессов, могущих протекать в рассматриваемой системе, то все коэффициенты при скоростях должны равняться нулю. Отсюда получаем, что внутренняя энергия не зависит от аргумента a, т.е. $\partial U/\partial a = 0$[10]. Кроме того, получаем соотношения Коши–Грина

$$\varphi(\gamma) = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \vartheta_1 = \frac{\partial U}{\partial H_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{\partial U}{\partial H_2}, \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \tag{9.6.9}$$

Часто бывает удобно работать не с внутренней энергией, а с так называемой свободной энергией, которая вводится по определению посредством преобразования

$$\Phi(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta) = U(\gamma, H_1, H_2, H) - \vartheta_1 H_1 - \vartheta_2 H_2 - \vartheta H. \tag{9.6.10}$$

[10]Возможен случай, когда это не так. Если $a = \mathrm{const}$, то энергия может от него зависеть. Поэтому постоянные параметры обычно и не включаются в число аргументов функции.

В терминах свободной энергии приведенное уравнение баланса энергии (9.6.8) переписывается в виде

$$\dot{\Phi}(\mathcal{A}) = -\varphi(\gamma)\dot{\gamma} - H_1\dot{\vartheta}_1 - H_2\dot{\vartheta}_2 - H\dot{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \Phi(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta). \quad (9.6.11)$$

Соотношения Коши–Грина (9.6.9) заменяются на

$$\varphi(\gamma) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \quad H_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_1}, \quad H_2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_2}, \quad H = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}. \quad (9.6.12)$$

Цель введения свободной энергии состоит в переходе к новым независимым переменным. Ранее в этом качестве выступали энтропии, а температуры выражались как производные от внутренней энергии по энтропии. Поскольку температуры являются измеряемыми величинами, то именно их и удобно считать независимыми переменными, а энтропии считать зависимыми переменными и выражать их через температуры.

Вернемся к уравнению теплопроводности (9.6.7). При задании скорости подвода энергии от окружающей среды воспользуемся представлением типа (9.4.9)

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = -\kappa_1\vartheta_1(\vartheta_1 - \vartheta_*) + b_1\vartheta_1|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_*|^2 - \kappa_2\vartheta_2(\vartheta_2 - \vartheta_*) + \\ + b_2\vartheta_2|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_*|^2 - \kappa\vartheta(\vartheta - \vartheta_*), \quad (9.6.13)$$

Уравнение теплопроводности (9.6.7) представим в виде системы трех уравнений

$$\vartheta_1\dot{H}_1 + Q_{BC} + Q_{BD} = -\kappa_1\vartheta_1(\vartheta_1 - \vartheta_*) + b_1\vartheta_1|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_*|^2, \quad (9.6.14)$$

$$\vartheta_2\dot{H}_2 - Q_{BC} + Q_{CD} = -\kappa_2\vartheta_2(\vartheta_2 - \vartheta_*) + b_2\vartheta_2|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_*|^2, \quad (9.6.15)$$

$$\vartheta\dot{H} - Q_{BD} - Q_{CD} = \psi(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - \kappa\vartheta(\vartheta - \vartheta_*). \quad (9.6.16)$$

Система (9.6.14) – (9.6.16) эквивалентна уравнению (9.6.7), поскольку в нее введены дополнительные слагаемые Q_{BD}, Q_{BC} и Q_{CD}, которые будем называть обменным теплом. Например, Q_{BD} это мощность, которой обмениваются тело $\mathcal{B}$ и промежуточное безынерционное тело $\mathcal{D}$. Для величин Q_{BD}, Q_{BC} и Q_{CD} также должны быть приняты определяющие уравнения, структура которых зависит от конкретных условий. Допустим, что эти определяющие уравнения сформулированы. Тогда задача будет полностью поставлена, если будет задана свободная энергия как функция расстояния между частицами и их температур. По существу все физические свойства системы почти полностью заданы видом свободной энергии. Примем, например, следующее выражение для свободной энергии

$$\Phi(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta) = \frac{1}{2}c(\gamma - l)^2 + a(\gamma - l)(\vartheta - \vartheta_f) - \frac{1}{2}d(\vartheta - \vartheta_f)^2 + \text{const}, \quad (9.6.17)$$

где l есть некий параметр размерности длины.

Те, кто уже знакомы с энергией линейной пружины, видят, что l есть длина пружины при температуре ϑ_f и при условии, что на пружину никаких сил не действует. Параметр c называется жесткостью пружины. Часто температуру ϑ_f называют температурой натурального состояния. Можно ее назвать температурой отсчетного состояния или отсчетной температурой, которая выбирается относительно произвольно. Это та температура, при которой измеряются параметры материала, приводимые в справочниках. Она, в значительной мере, условна. Постоянные параметры a и d считаются известными, например, из эксперимента. Параметр a характеризует связанность деформационных и температурных полей. Для простоты в дальнейшем считаем, что $a = 0$. Из представления (9.6.17) видим, что материальные точки системы фактически лишены способности нагреваться. При этом соотношения Коши–Грина (9.6.12) дают

$$\varphi(\gamma) = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = c(\gamma - l), \quad H = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = d\,(\vartheta - \vartheta_f), \tag{9.6.18}$$

причем $H_1 = \mathrm{const}$, $H_2 = \mathrm{const}$.

Кроме того, лишив материальные точки способности накапливать тепло, мы лишили их способности обмениваться теплом. Это означает, что величины, задающие обменное тепло, должны равняться нулю

$$Q_{BC} = 0, \quad Q_{BD} = 0, \quad Q_{CD} = 0.$$

Чтобы не вступать в противоречие с уравнениями (9.6.14) – (9.6.16), необходимо в соответствии с физическим смыслом принять

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Наконец, примем, что внешние силы на систему не действуют, т.е.

$$\mathbf{F}\,(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}\,(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}. \tag{9.6.19}$$

Выпишем получившуюся упрощенную систему уравнений. Уравнения движения с учетом принятых упрощений, а также равенства (9.6.5), принимают вид

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} &= -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \psi(\gamma, \dot\gamma)\right] \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{\gamma}, \\ m_2 \frac{d^2\mathbf{R}_2}{dt^2} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \psi(\gamma, \dot\gamma)\right] \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{\gamma}. \end{aligned} \tag{9.6.20}$$

Уравнение баланса энергии будет выполнено, если будет выполнено уравнение теплопроводности (9.6.16)

$$\vartheta \frac{dH}{dt} = \psi(\gamma, \dot\gamma)\dot\gamma - \kappa\,\vartheta(\vartheta - \vartheta_*). \tag{9.6.21}$$

Умножим обе части первого из равенств (9.6.20) скалярно на вектор $\dot{\mathbf{R}}_1$. Обе части второго из равенств (9.6.20) умножим скалярно на вектор$\dot{\mathbf{R}}_2$. После этого сложим получившиеся равенства и получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\mathbf{R}}_1\cdot\dot{\mathbf{R}}_1+m_2\dot{\mathbf{R}}_2\cdot\dot{\mathbf{R}}_2\right)=-\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\dot{\gamma}-\psi(\gamma,\dot{\gamma})\dot{\gamma} \tag{9.6.22}$$

Учтем наличие тождества

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\dot{\gamma}=\frac{d\Phi}{dt}+H\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{dU}{dt}-\vartheta\frac{dH}{dt}.$$

С учетом этого тождества и уравнения теплопроводности (9.6.21) соотношению (9.6.22) придаем вид

$$\dot{K}+\dot{U}=-\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*),\quad \delta(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)=-\kappa\,\vartheta(\vartheta-\vartheta_*). \tag{9.6.23}$$

Система называется теплоизолированной, если $\kappa=0$. В этом случае полная энергия системы сохраняется.

Итак, после проведения всех выкладок в обратной последовательности, т.е от уравнений движения (9.6.20) и уравнения теплопроводности (9.6.21), пришли к уравнению баланса энергии (9.6.23). Видим, что полная энергия рассматриваемой системы не сохраняется и может как убывать при $\vartheta>\vartheta_*$, так и возрастать при $\vartheta<\vartheta_*$. Остается, правда, неясным будет ли этот процесс монотонным. Чтобы выяснить это обстоятельство, необходимо конкретизировать систему полностью, а именно нужно задать конкретный вид функции $\psi(\gamma,\dot{\gamma})$. Эта функция описывает вязкое трение в системе. Примем, что оно является линейным

$$\psi(\gamma,\dot{\gamma})=b\,\dot{\gamma},\quad b>0.$$

Интуитивно ясное требование положительности коэффициента b совсем не просто обосновать формально. Хотелось бы для этой цели использовать так называемый второй закон термодинамики, о котором будет сказано несколько слов немного ниже. Однако можно рассуждать и без формального привлечения второго закона термодинамики, хотя, в каком-то смысле идея этих рассуждений аналогична идеям, которые пытаются использовать при отыскании общей формулировки второго закона термодинамики. Рассмотрим часть силы (9.6.5), связанной с функцией $\psi(\gamma,\dot{\gamma})$

$$\mathbf{F}_f(\mathcal{B},\mathcal{C})=-b\,\dot{\gamma}\gamma^{-1}(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2),$$

которая называется силой трения между частицами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Вычислим производную от функции γ

$$\dot{\gamma}=\left(\dot{\mathbf{R}}_1-\dot{\mathbf{R}}_2\right)\cdot(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)\,\gamma^{-1}.$$

Теперь выражение для силы трения между частицами принимает вид

$$\mathbf{F}_{\mathrm{f}}\,(\mathcal{B},\mathcal{C}) = -\,\mathfrak{b}\,\gamma^{-2}(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2)\cdot(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\otimes(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

где тензор второго ранга $\gamma^{-2}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\otimes(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ есть проектор на прямую $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, соединяющие частицы.

Если относительная скорость частиц $\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2$ ортогональна прямой, соединяющей частицы, и, следовательно, не меняет расстояния между частицами, то сила трения равна нулю. Так будет при чистом вращении частиц как твердого целого вокруг их центра масс. В другом крайнем случае частицы разлетаются вдоль прямой, соединяющей частицы. В этом случае имеем

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = x\mathbf{e},\quad |\mathbf{e}| = 1,\quad |x| = \gamma \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2 = \dot{x}\,\mathbf{e}.$$

В этом случае выражение для силы трения принимает вид

$$\mathbf{F}_{\mathrm{f}}\,(\mathcal{B},\mathcal{C}) = -\,\mathfrak{b}\,(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2),$$

а положительность коэффициента трения $\mathfrak{b}$ означает, что сила трения в демпфере направлена противоположно относительной скорости между материальными точками системы. Именно так и рассуждают в механике без привлечения второго закона термодинамики на основании опыта, воплощенного в здравый смысл. Ту же самую идею можно выразить иначе. А именно, выдвинем требование, чтобы мощность силы трения была бы отрицательной. Иными словами, система должна затрачивать энергию на преодоление сил трения, а не получать ее в результате трения

$$\mathbf{F}_{\mathrm{f}}\cdot(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2) = -\mathfrak{b}\dot{\gamma}^2 \le 0 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{b} > 0.$$

В более общем случае это требование сводится к выполнению неравенства

$$-\,\psi(\gamma,\dot{\gamma})\dot{\gamma} \le 0 \quad\Rightarrow\quad \psi(\gamma,\dot{\gamma})\dot{\gamma} \ge 0. \tag{9.6.24}$$

Как видим, принятие внешне простого неравенства $\mathfrak{b} > 0$ требует, тем не менее, аккуратного проникновения в его смысл. Замечательно, однако, то, что этот смысл можно понять на очень простых примерах, причем он сохраняется в значительно более общих случаях.

Для простоты примем, что массы частиц системы одинаковы $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Складывая оба уравнения системы (9.6.20), получаем первый интеграл

$$\mathfrak{m}\left(\ddot{\mathbf{R}}_1 + \ddot{\mathbf{R}}_2\right) = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{R}}_1 + \dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{C} = \mathrm{const}.$$

Видим, что центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. Поэтому можно выбрать такую инерциальную систему отсчета, в которой

центр масс покоится, т.е. $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Кроме того, центр масс расположим в начале системы отсчета. Тогда получим

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2, \quad \gamma = 2|\mathbf{R}|.$$

С учетом полученных интегралов система (9.6.20) сводится к одному уравнению

$$m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} + b\dot{\gamma}\right]\frac{2\mathbf{R}}{\gamma} = \mathbf{0}. \tag{9.6.25}$$

Для уравнения (9.6.25) легко строится еще один векторный интеграл

$$\mathbf{R}\times\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{L} \equiv L\mathbf{m} = \mathrm{const}, \quad |\mathbf{m}| = 1. \tag{9.6.26}$$

Векторный интеграл (9.6.26) показывает, что система движется в плоскости, ортогональной единичному вектору $\mathbf{m}$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{R}$ может быть представлен в виде вращающегося вектора переменной длины

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\gamma(t)\mathbf{Q}[\varphi(t)\mathbf{m}]\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{2\mathbf{R}(0)}{\gamma(0)}, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Вычисляя первую и вторую производные от вектора $\mathbf{R}$, получаем

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\gamma}\gamma^{-1}\mathbf{R} + \dot{\varphi}\mathbf{m}\times\mathbf{R},$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \left[\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)^2 - \dot{\varphi}^2\right]\mathbf{R} + \left(\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\mathbf{m}\times\mathbf{R}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (9.6.25), приходим к двум скалярным уравнениям для нахождения функций $\gamma(t)$ и $\varphi(t)$. Первое из них имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2\dot{\varphi} = \mu = \mathrm{const}. \tag{9.6.27}$$

Второе уравнение с учетом интеграла (9.6.27) доставляет уравнение для определения функции $\gamma(t)$

$$m\ddot{\gamma} + 2c(\gamma - l) + 2b\dot{\gamma} - m\frac{\mu^2}{\gamma^3} = 0. \tag{9.6.28}$$

Наконец, уравнение теплопроводности (9.6.21) служит для определения температуры и в рассматриваемом случае принимает вид

$$(\vartheta - \vartheta_f)^{\cdot} + \alpha(\vartheta - \vartheta_f) = \alpha(\vartheta_* - \vartheta_f) + (b/d)\dot{\gamma}^2/\vartheta, \quad \alpha = \kappa/d. \tag{9.6.29}$$

Уравнение (9.6.28) не интегрируется в квадратурах, но его решение легко может быть найдено приближенно. Характер решения этого уравнения ясен и

без интегрирования. Величина $\gamma(t)$ совершает затухающие колебания и стремится к равновесному положению γ_*, которое находится из уравнения (9.6.28) при $\dot\gamma(t) = 0$

$$2c\gamma_*^3(\gamma_* - l) = m\mu^2. \tag{9.6.30}$$

При приближении функции $\gamma(t)$ к значению γ_* ее поведение можно описать линейным уравнением

$$m\,\ddot x + 2b\,\dot x + (2c + 3m\mu^2\gamma_*^{-4})\,x = 0, \quad \gamma(t) = \gamma_* + x(t). \tag{9.6.31}$$

Уравнение (9.6.31) есть уравнение свободных колебаний линейного осциллятора с трением. Решением этого уравнения являются затухающие колебания. Если величина $\gamma(0) - \gamma_* = x_0$ мала, то уравнение (9.6.31) справедливо при всех значениях t. Например, так будет при достаточно больших значениях параметра c, характеризующего жесткость пружины. Таким образом, при больших временах рассматриваемая система будет совершать чистое вращение с постоянной угловой скоростью

$$\dot\varphi_* = (\gamma_0^2/\gamma_*^2)\dot\varphi(0).$$

Целью этого параграфа является не обсуждение механического поведения системы, а изучение уравнения баланса энергии и сопутствующих именно ему понятий. Одним из таких понятий является температура, которая в рассматриваемом случае находится по уравнению (9.6.29). Проинтегрировать это уравнение в явном виде не представляется возможным, поскольку оно нелинейно и имеет переменные во времени коэффициенты. Однако и его решение очевидно без интегрирования. Если $\alpha > 0$, то температура системы стремится к температуре окружающей среды, как это и должно быть по физическому смыслу. При $\kappa = 0$, т.е. $\alpha = 0$, система теплоизолирована и не обменивается теплом с окружающей средой. В этом случае полная энергия системы сохраняется, как это видно из равенства (9.6.23), хотя трение в системе присутствует и приводит к нагреву системы. При принятых ограничениях нагреваться может только тело $\mathcal{D}$, которое далее будем называть демпфером. Его температуру можно найти если проинтегрировать уравнение (9.6.29), которое при $\alpha = 0$ интегрируется в явном виде и имеет решение

$$\vartheta(t) = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2b}{d}\int_0^t \dot\gamma^2(\tau)\,d\tau\right]^{-1/2}. \tag{9.6.32}$$

Из этого выражения нетрудно найти конечную температуру демпфера. Обозначим через T время затухания колебаний в системе, когда можно считать,

что $\dot\gamma(T) = 0$. Тогда конечная температура тела $\mathcal{D}$ определяется по формуле

$$\vartheta(t) = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2b}{d}\int\limits_0^T \dot\gamma^2(\tau)\,d\tau\right]^{-1/2} = \mathrm{const}, \quad T \le t.$$

Температура демпфера есть измеряемая величина. Поэтому температуру, найденную теоретически и определяемую формулой (9.6.32), можно сравнить с наблюдаемой экспериментально. В формулу (9.6.32) входит всего один коэффициент d, которым мы можем распорядиться, поскольку вязкость демпфера b определяется из независимых экспериментов и не имеет прямого отношения к способу введения температуры. Если коэффициент d удается выбрать так, что теоретически найденные температуры совпадают с наблюдаемыми экспериментально, то выражение для свободной энергии или, что то же самое, выражение для энтропии найдено удовлетворительно. Если подобрать подходящий коэффициент d не удается, то надо искать другое представление для свободной энергии. Иными словами, определяющее уравнение для энтропии должно быть написано так, чтобы правильно определялись наблюдаемые температуры. Ситуация здесь точно та же, что и при открытии закона Всемирного тяготения (типичный пример определяющего уравнения), который подбирался так, чтобы теоретически найденные траектории планет совпадали бы с наблюдаемыми траекториями.

Немного подробнее рассмотрим теплоизолированную систему, когда обмен энергией с окружающей средой отсутствует, т.е. в уравнении (9.6.23) коэффициент теплопередачи κ равен нулю. Вычислим полную энергию рассматриваемой системы. Кинетическая энергия определяется выражением

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\mathbf{R}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{R}}_2|^2\right) = m|\dot{\mathbf{R}}|^2 = \frac{m}{4}\left(\dot\gamma^2 + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\right).$$

Для внутренней энергии имеем представление

$$U = \Phi + \vartheta\, H = \frac{c}{2}(\gamma - l)^2 + \frac{1}{2d}H^2 + \vartheta_f\, H.$$

Уравнение баланса энергии (9.6.23), которое в рассматриваемом случае выражает сохранение полной энергии тела $\mathcal{A}$, принимает следующий вид

$$K + U = \frac{m}{4}\left(\dot\gamma^2 + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\right) + \frac{c}{2}(\gamma - l)^2 + \frac{1}{2d}H^2 + \vartheta_f\, H = \mathrm{const}. \qquad (9.6.33)$$

Таким образом, в рассматриваемой системе полная энергия сохраняется. Тем не менее, в ней происходят необратимые процессы, поскольку в ней

присутствует внутренняя диссипация энергии. Нетрудно вычислить механическую энергию этой системы

$$E_M = \frac{m}{4}\left(\dot\gamma^2 + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\right) + \frac{c}{2}(\gamma - l)^2. \tag{9.6.34}$$

Выпишем уравнение баланса механической энергии. Для этого достаточно обе части уравнения (9.6.28) умножить на скорость $\dot\gamma/2$. В результате получим

$$\dot E_M = -\,b\,\dot\gamma^2 \le 0.$$

Последнее выражение показывает, что механическая энергия в системе монотонно убывает и стремится к постоянной величине. Поскольку полная энергия при этом сохраняется, то возрастает тепловая энергия системы

$$\dot E_H = -\ \dot E_M = b\,\dot\gamma^2 \ge 0,$$

т.е. механическая энергия переходит в тепловую, что ведет к возрастанию энтропии в системе. Следует обратить внимание на то, что обратный процесс в данной системе невозможен, т.е. тепловую энергию нельзя перевести обратно в механическую. Сравним полученный результат с тем, что будет в этой системе при отсутствии трения, т.е. при $b = 0$. В этом случае полная энергия по-прежнему имеет вид (9.6.33), но уравнения для входящих в нее величин существенно меняются. А именно, вместо уравнений (9.6.28) и (9.6.29) имеем следующую систему уравнений

$$m\,\ddot\gamma + 2c(\gamma - l) - m\frac{\mu^2}{\gamma^3} = 0, \quad (\vartheta - \vartheta_f)^{\cdot} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \mathrm{const}.$$

Функция $\gamma(t)$, являющаяся решением первого из этих уравнений, является периодической. Полная энергия системы сохраняется. В системе часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию, а затем внутренняя энергия вновь переходит в кинетическую. Затем процесс повторяется в бесконечном числе циклов. Таким образом, можно видеть существенное различие в поведении системы. Чтобы подчеркнуть и проявить это различие в термодинамике формулируется так называемый второй закон термодинамики.

9.7. Механика и второй закон термодинамики

Рассмотренные выше три фундаментальных закона в настоящее время, по нашему мнению, исчерпывают список фундаментальных законов механики. Однако почти общепринято в качестве еще одного фундаментального закона

механики рассматривать второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая энергия может быть переведена в тепловую энергию, но полностью перевести тепловую энергию в механическую энергию невозможно. Это обстоятельство мы уже наблюдали на примере системы двух материальных точек. Но это был всего лишь частный пример. Второй закон термодинамики утверждает, что это не частный факт, а всеобщий закон, который должен выполняться всегда. Обобщенно говоря, формулировка второго закона термодинамики — это попытка ввести идею необратимости многих природных и техногенных процессов в рациональную науку. Во многих, если не во всех, случаях для введения идеи необратимости в рассматриваемые процессы достаточно обычного здравого смысла. Тем не менее, многих исследователей не оставляет желание перевести идею необратимости с уровня здравого смысла на уровень фундаментального закона. Многие полагают, что этот перевод уже осуществлен формулировкой второго закона термодинамики. По мнению автора, здесь желаемое выдается за действительное. Фактически в настоящее время не существует формулировки второго закона термодинамики, обладающей той же степенью общности, какой обладают законы динамики и уравнение баланса энергии. Детальное обсуждение всех обстоятельств, связанных с формулировкой второго закона термодинамики, далеко выходит за рамки первоначального курса рациональной механики. Поэтому интересующихся отошлем к книгам [33, 69, 72, 88].

Основная проблема, возникающая при попытке дать общую формулировку второго закона термодинамики, связана со следующим обстоятельством. Фундаментальные законы представляют собой утверждения, которые принципиально не могут быть опровергнуты экспериментально. Почему такие утверждения всеобщего характера вообще возможны? Дело в том, что любой фундаментальный закон можно воспринимать как определение некой новой величины. Первый закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие силы. Второй закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие момента. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение новое понятие внутренней энергии. Комбинация всех трех законов позволяет ввести в рассмотрение температуру, энтропию, химический потенциал. Что же остается на долю второго закона термодинамики? Он не вводит никаких новых понятий, но постулирует некие ограничения на уже введенные величины. Эти ограничения отражают наши представления о характере поведения системы и носят опытный характер. Отсюда следует, что новые наблюдения и новые опыты могут изменить, как наши представления о природе сущего, так и, следовательно, формулировку второго закона термодинамики. Это обстоятельство не позволяет наделить второй закон термодинамики статусом фундаментального закона.

Глава 10.

Принцип возможных перемещений

10.1. Вводные замечания

История развития механики чрезвычайно сложна для описания и анализа. Описывать ее намного сложнее, чем, например, историю развития математики. В последней, как правило, невозможно появление половины или трети теоремы. Теорема либо доказана, либо не доказана. Только в первом случае она и называется теоремой, в противном случае имеем дело с гипотезой. В механике ситуация совершенно иная. Ни одно понятие механики не возникло одномоментно. Каждое из них вводилось на протяжении столетий и даже тысячелетий. Это относится и к силам, которые только относительно недавно обрели окончательное оформление, но использовались в частных и не вполне ясных, но ограниченно правильных, формулировках многие столетия. Это относится и к моментам, которые еще и в настоящее время не обрели статуса, аналогичного силам, но используются со времен Архимеда. С большими трудностями обретает ясные очертания понятие энергии, которое, видимо, не обрело канонической формы и в настоящее время. Чтобы убедиться в сказанном, достаточно взглянуть на название знаменитой работы Г. Гельмгольца [10]: “О сохранении силы”. Речь в этой работе идет об энергии. Иными словами, всего полтора столетия тому назад принятая терминология для базовых понятий совершенно не совпадала с современной. В еще большей степени сказанное справедливо в отношении фундаментальных законов. Ни один из них не является плодом индивидуального творчества тех или иных ученых. Все они являются продуктом коллективного творчества многих поколений ученых. Одним из важнейших отличий рациональной механики от математики является то, что в механике очень трудно, если вообще возможно, достигнуть такого уровня формализации, который позволяет исключить интуицию из определений основных понятий. Уравнение баланса энергии прекрасно иллюстрирует все сказанное. В настоящее время можно утверждать, что все известные част-

ные формулировки уравнения баланса энергии, которые появлялись в механике под различными названиями, вытекают из утверждения (9.3.1). Но появление уравнения баланса энергии в форме (9.3.1) было бы невозможно без предшествующих частных формулировок. В частности, принцип возможных перемещений был прямым предшественником уравнения баланса энергии. История появления принципа возможных перемещений отражена в литературе, например, в книге [44], с. 58–64. Ниже мы начнем рассмотрение не с истоков принципа, но с первой относительно общей формулировки принципа возможных перемещений. Она была приведена в письме И. Бернулли от 1717 г. к Вариньону и звучит следующим образом [5]: *“При всяком равновесии любых сил, каким бы образом они ни были приложены и в каком бы направлении они ни действовали одна на другую, посредственно или непосредственно, сумма энергий положительных будет равна сумме энергий отрицательных, взятых с положительным знаком”*. Под энергией здесь И. Бернулли понимает то, что в настоящее время называют работой силы. Работа считается положительной, если сила и перемещение, на котором совершается работа, направлены в одну сторону. Работа считается отрицательной, если сила и перемещение, на котором совершается работа, направлены в разные стороны. С уровня современных знаний понять утверждение И. Бернулли совсем несложно и легко увидеть в нем современную трактовку принципа возможных перемещений. Однако при буквальном восприятии утверждение И. Бернулли понять очень трудно. Прежде всего, непонятно, имеются ли в виду силы, действующие на одно тело, или это неважно, и речь идет о произвольно выбранной системе сил, находящихся “в равновесии”. Неясен смысл слов “посредственно” и “непосредственно”. Сказанное отнюдь не критика утверждения И. Бернулли. Это демонстрация процесса рождения понятий и принципов механики. Сначала интуитивно улавливается идея, которую трудно выразить в уже существующих понятиях. Идея принципа возможных перемещений[1] отражена в формулировке И. Бернулли вполне правильно. Далее вводятся и уточняются необходимые понятия. После этого дается новая формулировка идеи или принципа. Вновь обнаруживаются некие неясности, которые подлежат устранению. Весь этот процесс повторяется многократно и, в конце концов, возникают понятия и законы, с которыми уже может оперировать рациональная механика. Что касается принципа возможных перемещений, то прошло еще почти сто лет, прежде чем Ж. Лагранж (1788) придал ему ту форму, которая приводится во всех современных учебниках по теоретической механике. Любопытно, что в книгах по механике деформируемых тел этот принцип формулируется

[1]Идея принципа возможных перемещений, сформулированная в еще менее определенных терминах, известна в механике с незапамятных времен под названием *Золотого правила механики*, обосновать которое пытался еще Аристотель.

существенно иначе. Так что и в наши дни принцип возможных перемещений еще не обрел канонической и общепринятой формулировки, хотя и получил широчайшее распространение.

В данной главе сначала будет дана общепринятая форма принципа возможных перемещений и так называемого общего уравнения динамики. После этого будет приведена формулировка, вытекающая из уравнения баланса энергии. Читателю будет весьма полезно сравнить обе формулировки и оценить то новое, что вносит в механику использование уравнения баланса энергии.

10.2. Принцип Лагранжа

Ниже кратко излагается принцип возможных перемещений в трактовке, принятой в современной аналитической (теоретической) механике. Изложение следует книге [9], но для простоты использует ограниченное представление о связях. Желающие ознакомиться с более общими понятиями связей могут обратиться к книгам по аналитической механике, например, книге [9].

Итак, рассмотрим тело $\mathcal{A}$, включающего в себя систему материальных точек $\mathcal{A}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Будем считать, что на движение точек системы наложены некоторые ограничения, которые принято называть связями. Например, часть материальных точек системы вынуждена двигаться вдоль некоторой заданной поверхности, которая, в свою очередь, может двигаться или деформироваться по заранее заданному закону. Расстояния между некоторыми частицами системы также могут быть предписаны каким-либо законом. Например, расстояние между какими-либо частицами $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ определено равенством

$$(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) = l_{ij}(t),$$

где $l_{ij}(t)$ заданная функция времени.

Множество ограничений-связей можно определить заданием функций вида

$$f_s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n, t) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.2.1}$$

Связи называются стационарными, если функции f_s не содержат аргумент t в явной форме. Таким образом, на систему наложено m связей. Понятно, что каждая такая связь осуществляется некоторым телом $\mathcal{B}_s$. Соответственно числу связей имеется m тел. Характер связей таков, что тела $\mathcal{B}_s$ предполагаются либо недеформируемыми, либо деформируемыми, но по заранее предписанному закону. Кроме того, считается, что тела $\mathcal{B}_s$ не имеют массы и не вносят вклада в кинетическую энергию тела $\mathcal{A}$. При традиционном изложении механики понятие тела не вводится и потому не делается различия между связями, налагаемыми на частицы рассматриваемого тела, т.е. внутренними связями, и

связями между частицами тела и телами внешнего окружения. Поскольку при традиционном изложении понятие внутренней энергии тела не вводится, то это обстоятельство не имеет особого значения. Окружение частицы $\mathcal{A}_i$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{A}_i^e = \bigvee_{k=1}^{n\prime} \mathcal{A}_k \bigvee_{s=1}^{m} \mathcal{B}_s \vee \mathcal{A}^e. \tag{10.2.2}$$

Штрих в этой формуле означает, что пропущено значение индекса $k = i$. Для силы, действующей на частицу $\mathcal{A}_i$, имеем выражение

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \sum_{s=1}^{m} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_s) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e). \tag{10.2.3}$$

Определение. *Сила*

$$\mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$$

называется активной силой, действующей на частицу $\mathcal{A}_i$. *Сила*

$$\mathbf{F}_r(\mathcal{A}_i) = \sum_{s=1}^{m} \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_s)$$

называется реакцией связей, действующей на частицу $\mathcal{A}_i$.

Конечно, многие из сил $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_s)$ могут обращаться в нулевые, т.е. отсутствовать. Запишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) - \mathbf{F}_r(\mathcal{A}_i) = \mathbf{0}. \tag{10.2.4}$$

Скалярно умножим каждое из этих уравнений на вектор скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ телаточки $\mathcal{A}_i$ и сложим получившиеся уравнения. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) - \mathbf{F}_r(\mathcal{A}_i) \right) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i = 0. \tag{10.2.5}$$

Поскольку имеются связи (10.2.1), то скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ не могут быть произвольными, но должны удовлетворять ограничениям, вытекающим из уравнений связей (10.2.1)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{R}_i} \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.2.6}$$

Скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$, удовлетворяющие условиям (10.2.6), называются возможными, а соответствующие им бесконечно малые перемещения $d\mathbf{R}_i = \dot{\mathbf{R}}_i\, dt$ называются возможными перемещениями. Ограничения (10.2.6) можно переписать в терминах возможных перемещений. Для этого достаточно просто умножить равенства (10.2.6) на dt. Рассмотрим теперь две разных системы возможных перемещений $d\mathbf{R}_i^*$ и $d\mathbf{R}_i^{**}$ и введем в рассмотрение виртуальные перемещения $\delta\mathbf{R}_i = d\mathbf{R}_i^{**} - d\mathbf{R}_i^*$. Виртуальные перемещения удовлетворяют однородным условиям типа (10.2.6)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{R}_i} \cdot \delta\mathbf{R}_i = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.2.7}$$

Если связи являются стационарными, то понятия возможных и виртуальных перемещений совпадают.

Определение. *Связи называются идеальными, если сумма работ реакций связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т.е. если выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_r(\mathcal{A}_i) \cdot \delta\mathbf{R}_i = 0. \tag{10.2.8}$$

Примерами идеальных связей являются связи, осуществляемые недеформируемыми телами. Например, если материальная точка движется внутри абсолютно твердой идеально гладкой изогнутой трубки, то мы имеем пример идеальной связи. Следует, однако, иметь в виду, что понятие идеальной связи таит в себе опасные подводные рифы, о которые можно разбиться. Об этом будет сказано несколько слов немного ниже. Вернемся к принципу возможных перемещений. Заменяя в равенстве (10.2.5) скорости $\dot{\mathbf{R}}_i$ на виртуальные перемещения $\delta\mathbf{R}_i$ и учитывая равенства (10.2.8), приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i\, \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) \right) \cdot \delta\mathbf{R}_i = 0. \tag{10.2.9}$$

Уравнение (10.2.9) принято называть *общим уравнением динамики*. Общее уравнение динамики должно выполняться при любых виртуальных перемещениях. Как следует из вывода общего уравнения динамики, оно отличается от уравнений Ньютона (10.2.4) тем, что из него исключены реакции связей. Если связи отсутствуют, то уравнение (10.2.9) эквивалентно системе уравнений Ньютона (10.2.4).

Принцип возможных перемещений немедленно вытекает из общего уравнения динамики, если предположить настолько медленные приложения виртуальных перемещений, что ускорениями в уравнении (10.2.9) можно пре-

небречь. Например можно считать, что векторы перемещений являются линейными функциями времени и рассматриваются достаточно малые времена. Таким образом, принцип возможных перемещений выражается уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) \cdot \delta\mathbf{R}_i = 0 \tag{10.2.10}$$

и утверждает, что *для того, чтобы система находилась в положении равновесия, необходимо, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю*. Утверждение (10.2.10) было сформулировано Лагранжем и потому его часто называют принципом Лагранжа. Отличие формулировки принципа Лагранжа от формулировки И. Бернулли только в более четком определении сил, привлекаемых к рассмотрению, и исключению из состава рассматриваемых сил реакций связи.

Приведем следствие из принципа возможных перемещений (10.2.10), также выведенное Лагранжем. Допустим, что активные силы потенциальны

$$\mathbf{F}_a(\mathcal{A}_i) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}_i}.$$

В этом случае принцип возможных перемещений сводится к стационарности потенциала $\Pi(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n)$ активных сил

$$\delta\Pi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}_i} \cdot \delta\mathbf{R}_i = 0.$$

Эта форма принципа возможных перемещений часто оказывается полезной.

Заканчивая формулировку принципа возможных перемещений в его традиционной версии, замечаем, что и общее уравнение динамики (10.2.9), и принцип возможных перемещений (10.2.10) были получены из законов Ньютона с использованием дополнительного допущения (10.2.8) об идеальности связей. Кроме того, сфера их действия, строго говоря, ограничивается системами материальных точек. Поэтому включение связей, типа абсолютно твердых стержней, вообще говоря незаконно, но во многих случаях не ведет к заметным ошибкам с практической точки зрения.

Принцип Лагранжа весьма популярен в учебной литературе, но его практическая значимость невелика. Известно, что существуют задачи, в которых применение принципа возможных перемещений позволяет легко получить решение. Тем не менее, класс этих задач слишком узок и не вполне определен для того, чтобы возводить принцип возможных перемещений в указанной формулировке в ранг важнейших теорем механики. Весьма уязвимым и ограничительным является понятие идеальных связей. В самом деле, идеальные связи

моделируют присутствие в системе или ее окружении недеформируемых тел. Но недеформируемых тел в Природе не существует. Есть очень твердые тела, жесткости которых очень велики. Пусть две материальные точки системы соединены пружиной, жесткость которой сколь угодно велика, но конечна. В предельном случае бесконечной жесткости пружина осуществляет идеальную связь. Но в любом допредельном случае это уже не идеальная связь и, следовательно, силы упругости пружины нужно из реакций перевести в разряд активных сил. Это обстоятельство не очень приятно с физической точки зрения. Неприятность усугубляется тем, что фактически не доказана непрерывность подобного предельного перехода. Иными словами, решение, найденное с использованием идеальной связи, не обязательно является пределом решения, найденного при сколь угодно большой жесткости "связи". Более того, непрерывность предельного перехода и не может быть доказана, поскольку известны примеры, в которых указанная непрерывность нарушается. Поэтому автор не стал бы рекомендовать инженерам-исследователям использовать общее уравнение динамики или принцип возможных перемещений при расчете ответственных конструкций. Тем более, что речь идет не о каких-то принципиальных достижениях, связанных с использованием уравнений (10.2.9) или (10.2.10), а всего лишь об экономии времени: задачи, которые можно решить на основе уравнения (10.2.10) за пять минут, без использования принципа возможных перемещений можно решить за десять минут. Зато достоверность расчетов, не использующих уравнения (10.2.10), возрастает многократно, ибо при этом все детали расчета держатся под непосредственным контролем. Кроме того, существуют ли более идеальные объекты, нежели упругая пружина? Но вот "связь", осуществляемая пружиной, по определению, не является идеальной. По указанным и не указанным причинам ни общее уравнение динамики, ни принцип возможных перемещений в вышеприведенном виде, ни понятие идеальных связей в данной книге не используются.

Наконец, еще один комментарий. Обычно [9] считается, что обратный переход от принципа возможных перемещений (10.2.10) к общему уравнению динамики (10.2.9) можно осуществить на основе *принципа Даламбера*, суть которого состоит во введении так называемых сил инерции $\mathbf{F}_i^{(in)} \equiv -m_i \ddot{\mathbf{R}}_i$, включении их в разряд активных сил в уравнении (10.2.10) и рассмотрении задачи динамики как задачи статики — это так называемый метод *кинетостатики*. Здесь следует иметь в виду, что, во-первых, по определению сила инерции не является силой, ибо она не моделирует присутствия других тел, что, собственно, и является целью введения понятия силы. Во-вторых, активные силы могут зависеть от скоростей и определяющие уравнения для них в статическом варианте существенно отличаются от таковых в динамическом

случае. Поэтому ни о каком сведении задачи динамики к задаче статики в общем случае не может быть и речи. В-третьих, любопытно, как бы отнесся сам Даламбер к подобной трактовке его принципа? Ведь Даламбер всю жизнь стремился изгнать силы из механики. В оригинальной трактовке *принципа Даламбера* [15] никакие силы вообще не упоминаются. Речь идет только о движениях разного рода. Поэтому введение еще одного разряда сил, вместо их изгнания, видимо, сильно рассердило бы Даламбера. Здесь не место обсуждать истинный *принцип Даламбера*. Заметим только, что в рациональной механике нет нужды ни в современной, ни в оригинальной версиях *принципа Даламбера*. Поэтому в данной книге он не используется.

10.3. Общий принцип возможных перемещений

Рассмотрим принцип возможных перемещений с точки зрения фундаментальных законов механики. Как уже отмечалось, прямым предшественником принципа возможных перемещений являлось так называемое *Золотое правило механики: выигрывая в силе, проигрываешь в пути.* Например, нам нужно поднять сто кирпичей весом один килограмм каждый на высоту один метр. Это можно сделать разными способами. Можно сразу поднимать все кирпичи и совершить работу 100 кг · м. Здесь нужна большая сила, зато путь оказывается коротким: всего 1 м. Можно поднимать по одному кирпичу. Сила требуется небольшая, зато суммарный путь оказывается наибольшим: 100 м. Совершаемая при этом работа оказывается одинаковой. Именно это равенство или баланс совершаемых работ и утверждается *Золотым правилом механики.* Хотя можно привести бесчисленное число примеров реализации *Золотого правила механики*, его совсем непросто выразить в общих терминах рациональной механики. Это и понятно, ибо фактически *Золотое правило механики* тесно связано с понятием энергии, которое формировалось очень трудно и только еще обретает, но не обрело, каноническую форму в рациональной науке. Поэтому совсем не случайно первая общая формулировка принципа возможных перемещений, выражающего *Золотое правило механики*, была дана И. Бернулли только после того, как сформировались, хотя и не вполне отчетливые, представления о кинетической энергии и ее связи с уравнениями движения, а также о силах и работе. На интуитивном уровне И. Бернулли осознал, что работа сил, действующих на систему, идет на изменение кинетической энергии этой системы. Если же ограничиться статикой, то эта работа должна равняться нулю. При этом под силами, действующими посредственно, И. Бернулли, видимо, имел в виду внутренние силы в системе, а под силами, действующими непосредственно, он понимал внешние силы. После того, как Л. Эйлер

дал окончательную математическую форму (1747, 1750) первого закона динамики (второго закона Ньютона), стало возможным установление ясной связи между уравнениями движения и кинетической энергией. В настоящее время упомянутая связь называется *Теоремой об изменении кинетической энергии*, из которой и вытекает принцип возможных перемещений. Причем более ясное выражение принцип возможных перемещений получает, если его выразить в терминах энергии. А именно, общее уравнение динамики или принцип возможных перемещений являются просто частными формами уравнения баланса энергии (9.3.1), которое можно переписать в виде

$$\mathrm{d}K(\mathcal{A}) + \mathrm{d}U(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}_k + \mathbf{L}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_k \mathrm{d}t] + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\mathrm{d}t. \tag{10.3.1}$$

Здесь использовано выражение для мощности внешних воздействий (6.3.2), когда система состоит не из материальных точек, а из односпиновых частиц, в качестве которых могут выступать и абсолютно твердые тела. Если считать изменения в системе медленными настолько, что кинетической энергией можно пренебречь, то из (10.3.1) следует принцип возможных перемещений в его современной форме

$$\mathrm{d}U(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}_k + \mathbf{L}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_k \mathrm{d}t] + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)\mathrm{d}t. \tag{10.3.2}$$

Следует предостеречь от излишне широкой трактовки принципа возможных перемещений в форме (10.3.2). Допущение о том, что изменения в системе происходят сколь угодно медленно, не является достаточно общим. Для многих механических систем характерны скачкообразные изменения ее состояния при сколь угодно медленных изменениях внешних воздействий. Таковыми являются системы с фазовыми переходами и неустойчивыми положениями равновесия, когда переход от неустойчивого положения равновесия к устойчивому положению равновесия осуществляется только динамическим путем, причем скорость такого перехода определяется свойствами самой системы, а не внешними воздействиями. Только в относительно простых случаях, которые, разумеется, часто встречаются в приложениях, применение принципа (10.3.2) допустимо. В противоположность сказанному, уравнение баланса энергии (10.3.1) применимо всегда.

Обратимся к сравнительному обсуждению принципа Лагранжа (10.2.10) и принципа возможных перемещений (10.3.2). Во-первых, принцип возможных перемещений (10.3.2), в отличие от принципа Лагранжа, не является следствием первых двух законов динамики, а представляет собой независимое утверждение механики. Это различие пропадает, если подвод энергии от внешних

источников отсутствует, т.е $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = 0$. Во-вторых, в выражение (10.3.2) входит работа внешних моментов, которая принципиально не может быть сведена к работе внешних сил. В-третьих, утверждение (10.3.2) включает в себя только работу внешних воздействий, в то время как принцип Лагранжа вводит в рассмотрение расплывчатое понятие активных сил. В-четвертых, принцип возможных перемещений (10.3.2) явно включает в себя новое понятие внутренней энергии, в то время как в принципе Лагранжа оно скрыто в работе активных сил. Конечно, усвоение понятия внутренней энергии требует от начинающего определенных усилий. Но оно относится к важнейшим понятиям механики и физики и должно быть усвоено в любом случае. Овладение этим понятием многократно расширяет возможности исследователя при анализе нетривиальных ситуаций. В-пятых, основное достоинство принципа Лагранжа заключается в исключении реакций идеальных связей. Однако это достоинство проявляется только в очень простых случаях, поскольку далеко не всегда ясно какую именно связь можно считать идеальной. Например, связь, осуществляемая абсолютно твердым стержнем является идеальной, если стержень передает только продольную силу. Если в стержне возникают поперечные силы, то связь уже не идеальна. В таком случае силы, возникающие в стержне должны быть включены в активные силы с последующим анализом возможности игнорирования работы этих сил, что резко усложняет решение задачи. При работе с принципом возможных перемещений (10.3.2) все эти проблемы отпадают. В терминах внутренней энергии все рассуждения упрощаются. В самом деле, связи осуществляются телами, обладающими внутренней энергией. Если эти тела недеформируемы, то их внутренняя энергия не меняется в процессе движения системы и, следовательно, не участвует в уравнении (10.3.2). Поясним сказанное на простом примере. Пусть связь[2] осуществляется пружиной. Внутренняя энергия пружины дается выражением

$$U = \frac{1}{2} c \Delta^2 + \mathrm{const}, \tag{10.3.3}$$

где c есть жесткость пружины, Δ — ее удлинение.

Сила упругости в пружине находится по закону Гука

$$F_e = -c \Delta. \tag{10.3.4}$$

При устремлении жесткости пружины к бесконечности, пружина переходит в нерастяжимую нить, т.е. в идеальную связь. Выясним, что при этом происходит с ее внутренней энергией. Если система, включающая пружину, может

[2]Здесь термин “связь” трактуется в более широком смысле, нежели в принципе Лагранжа, поскольку связь, осуществляемую пружиной, нельзя выразить кинематическим соотношением типа (10.2.1).

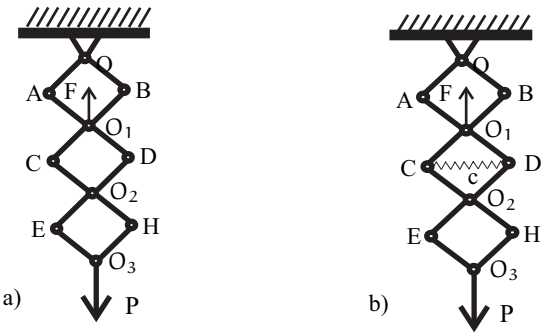

Рис. 10.1. Модифицированный рычаг Архимеда

двигаться так, что пружина остается недеформированной, то при устремлении жесткости пружины к бесконечности, система будет двигаться так, что пружина будет оставаться недеформированной. Тем не менее, сила упругости в пружине будет оставаться отличной от нуля, но конечной. Как это может быть? По равенству (10.3.4) видим, что

$$c \to \infty, \quad |F_e| < \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta \to 0.$$

Отсюда и по равенству (10.3.3) видим, что внутренняя энергия пружины при устремлении ее жесткости к бесконечности стремится к постоянной величине

$$U = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \to 0} c\,\Delta^2 + \mathrm{const} = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta \to 0} F_e\,\Delta + \mathrm{const} = \mathrm{const}.$$

Поэтому эта внутренняя энергия не влияет на уравнение баланса энергии (10.3.2). Поскольку все идеальные связи осуществляются исключительно недеформируемыми телами, то учет такого рода связей осуществляется утверждением о постоянстве их внутренней энергии. Вполне аналогично вышесказанному можно убедиться, что внутренняя энергия абсолютно твердого стержня постоянна. Причем это верно, независимо от того, передает ли стержень только продольную силу (идеальная связь), или он передает и поперечную силу (неидеальная связь).

***Резюме**: Принцип возможных перемещений в его современной формулировке (10.3.2) во всех случаях проще, надежнее и сильнее, нежели принцип Лагранжа, выражаемый равенством (10.2.10).*

10.4. Модифицированный рычаг Архимеда

В качестве простой иллюстрации принципа возможных перемещений рассмотрим задачу, приведенную в учебнике [41], с. 114. На рис. 10.1,а изображен механизм, состоящий из восьми абсолютно твердых стержней:

$|OA| = |OB| = |EO_3| = |HO_3| = l$, $|AD| = |BC| = |CH| = |DE| = 2l$. Длинные стержни — цельные и соединены в точках пересечения шарнирами. Точки O и O_1 соединены пружиной, которая на рис. 10.1,а не изображена. Требуется определить силу натяжения в этой пружине при действии на систему внешней силы P.

Мысленно разрежем пружину и ее действие на систему заменим искомой силой F, которая указана на рис. 10.1,а. Для решения задачи воспользуемся принципом Лагранжа (10.2.10). Предполагая связи, осуществляемые в системе абсолютно твердыми стержнями, идеальными, в число активных сил включаем только силы F и P. При приложении к системе силы P точка O_1 сместится на расстояние δs, при этом сила натяжения пружины совершит отрицательную работу $(-F\,\delta s)$. По геометрическим соображениям видим, что точка O_3 сместится на расстояние $3\delta s$. Сила P при этом совершит положительную работу $3\,P\,\delta s$. Принцип Лагранжа (10.2.10) утверждает, что сумма этих работ равна нулю

$$3\,P\,\delta s - F\,\delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 3P. \tag{10.4.1}$$

Таким образом, сила натяжения в пружине оказалась втрое больше приложенной внешней силы. Если бы мы увеличили число звеньев в системе и сделали бы n параллелограммов, то сила натяжения в пружине была бы в n раз больше приложенной внешней силы. По этой причине систему, представленную на рис. 10.1,а можно назвать модифицированным рычагом Архимеда. Представленное выше решение задачи на основе принципа Лагранжа, разумеется, является правильным. Однако принятое здесь допущение об идеальности связей отнюдь не очевидно. Связи, осуществляемые каждым из стержней в отдельности, не являются идеальными, поскольку в данной задаче силы в стержнях не являются продольными. Только в сумме работа реакций связей равна нулю, т.е. суммарная связь оказывается идеальной. Однако это требует отдельного доказательства, которое сводит на нет всю простоту предложенного решения.

Рассмотрим эту же задачу на основе принципа возможных перемещений в форме (10.3.2). Рассматриваем систему можно считать состоящей из односпиновых частиц, каковыми и являются абсолютно твердые тела. При этом, внешний подвод энергии к системе отсутствует, т.е $\delta(\mathcal{A},\, \mathcal{A}^e) = 0$. Отсутствуют и внешние моменты, действующие на систему $\mathbf{L}\,(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) = 0$. Утверждение (10.3.2) сводится к равенству

$$dU(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\,(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \cdot d\mathbf{R}_k = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{R}_1 + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{R}_2. \tag{10.4.2}$$

В данном случае в состав системы включены только абсолютно твердые

тела, а пружина отнесена к окружению. Поэтому внутренняя энергия системы постоянна. Кроме того, система может совершать только вертикальные движения. Таким образом, имеем

$$dU(\mathcal{A}) = 0, \quad \mathbf{F}_e = F\,\mathbf{k}, \quad d\mathbf{R}_1 = -\delta s\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{P} = -P\,\mathbf{k}, \quad d\mathbf{R}_2 = -3\delta s\ \mathbf{k}.$$

После учета этих соотношений в равенстве (10.4.2) приходим к равенству (10.4.1). Рассматриваемую задачу можно решить и другим способом. Включим пружину в состав рассматриваемой системы. Тогда ее внутренняя энергия с точностью до постоянной величины равна внутренней энергии пружины

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}c\,\Delta^2 \quad \Rightarrow \quad dU(\mathcal{A}) = c\,\Delta d\Delta, \tag{10.4.3}$$

где c есть жесткость пружины, а Δ есть удлинение пружины.

Внешние силы, действующие на систему, сводятся к двум силам: силе $\mathbf{P}$ и реакции в шарнире O. Причем последняя сила не совершает работы, поскольку шарнир O неподвижен. Таким образом принцип возможных перемещений сводится к равенству

$$c\,\Delta d\Delta = 3\,P\,d\Delta \quad \Rightarrow \quad c\,\Delta = 3\,P.$$

Поскольку по закону Гука $c\,\Delta = F$, то вновь приходим к найденному ранее решению.

Немного усложним задачу и рассмотрим систему, расширенную включением дополнительной горизонтальной пружины и изображенную на рис. 10.1,b.

Применение принципа Лагранжа здесь затруднено необходимостью включать в список активных сил дополнительные внутренние силы, вызванные наличием горизонтальной пружины.

Применение принципа возможных перемещений в форме (10.3.2) остается по существу без изменений. Просто нужно учесть внутреннюю энергию дополнительной пружины. В результате имеем

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}c\,\Delta^2 + \frac{1}{2}c\,\Delta_*^2 \quad \Rightarrow \quad dU(\mathcal{A}) = c\,\Delta d\Delta + c\,\Delta_* d\Delta_*,$$

где Δ_* есть удлинение горизонтальной пружины.

Примем, что при отсутствии внешней силы пружины находятся в недеформированном состоянии. Пусть $2h$ и $2a$ есть длины нерастянутых вертикальной и горизонтальной пружин соответственно. Причем $a^2 + h^2 = l^2$. Тогда для возможных удлинений пружин выполняется тождество

$$4a\,\Delta_* + \Delta_*^2 + 4h\,\Delta + \Delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (4a + \Delta_*)\,d\,\Delta_* + (4h + \Delta)\,d\,\Delta = 0.$$

Если жесткость пружин достаточно велика, то эти равенства можно линеаризовать. В результате получим

$$a\,\Delta_* + h\,\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad a\,d\,\Delta_* + h\,d\,\Delta = 0, \quad dU(\mathcal{A}) = c\,\left(1 + h^2/a^2\right)\Delta d\,\Delta.$$

По принципу возможных перемещений для силы натяжения вертикальной пружины получаем равенство

$$c\,\Delta = \frac{3\,P}{1 + h^2/a^2}.$$

Как и следовало ожидать, сила натяжения в вертикальной пружине уменьшилась, поскольку часть нагрузки взяла на себя горизонтальная пружина.

Библиографический список

[1] Аппель П. *Теоретическая механика*. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1960. 515 с.

[2] Аппель П. *Теоретическая механика*. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.

[3] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1979. 431с.

[4] Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела*. М.: Наука, 1977. 328 с.

[5] Бернулли И. *Избранные сочинения по механике*. М.–Л.: ОНТИ, 1937. 297 с.

[6] Боль П. *О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике*: Собр. тр. /Под ред. Л.Э.Рейзиня. Рига: Зинатне, 1974. С. 73 — 198.

[7] Галилео Галилей. *Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки*. Галилео Галилей: Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1964. 571 с.

[8] Галилео Галилей. *Послание к Инголи*. Галилео Галилей: Избр. тр. Т. 1. М.: Наука, 1964. 640 с.

[9] Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. М.: ГИФМЛ, 1960. 296 с.

[10] Гельмгольц Г. *О сохранении силы*. М.– Л.: ГИТТЛ, 1934. 143 с.

[11] Герц Г. *Принципы механики, изложенные в новой связи*. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.

[12] Годунов С.К. *Элементы механики сплошной среды*. М.: Наука, 1978. 303 с.

[13] Голдстейн Г. *Классическая механика*. М.: Наука, 1975. 415 с.

[14] Григорьев В., Мякишев Г. *Силы в природе*. М.: Наука, 1973. 415 с.

[15] Даламбер Ж. *Динамика*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 343 с.

[16] Жилин П.А. *Основные уравнения неклассической теории оболочек* // Динамика и прочность машин: Тр. ЛПИ. № 386. СПб., 1982. С. 29–46.

[17] Жилин П.А. *Тензор поворота в описании кинематики твердого тела* // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. № 443. СПб. 1992. С. 100–121.

[18] Жилин П.А. *Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве*. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.

[19] Жилин П.А. *Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла* // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. № 448. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1994. С. 3–38.

[20] Жилин П.А. *Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики* // Тр. XXII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". СПб., 1996. С. 14–40.

[21] Жилин П.А. *Теоретическая механика*: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 145 с.

[22] Журавлев В.Ф. *Основы теоретической механики*. М.: Наука, 1997. 320 с.

[23] Ишлинский А.Ю. *Классическая механика и силы инерции*. М.: Наука, 1987. 319 с.

[24] Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. *Механика*. Берклеевский курс физики. Т. 1. М.: Наука, 1983. 447 с.

[25] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: ИЛ, 1958. 474 с.

[26] Крутков Ю.А. *Об одной нерешенной задаче Эйлеровой* Theoriae motus. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1935. 239 с.

[27] Куликов К.А. *Вращение Земли*. М.: Недра, 1985. 159 с.

[28] Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1982. 830 с.

[29] Кухлинг Х. *Справочник по физике*. М.: Мир, 1964. 519 с.

[30] Лагранж Ж–Л. *Аналитическая механика*. Т. I. М.–Л.: ОНТИ, 1938. 348 с.

[31] Ламб Г. *Теоретическая механика* Т. III. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 291 с.

[32] Ланцош К. *Вариационные принципы механики*. М.: Мир, 1965. 408 с.

[33] Леонтович М.А. *Введение в термодинамику. Статистическая физика*. М.: Наука, 1983. 416 с.

[34] Лич Дж. У. *Классическая механика*. М.: ИЛ, 1961. 173 с.

[35] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. *Курс теоретической механики*. Т. 1. М.: Наука, 1982. 352 с.

[36] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. *Курс теоретической механики*. Т. 2. М.: Наука, 1983. 540 с.

[37] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.

[38] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.

[39] Магнус К. *Гироскоп. Теория и применение*. М.: Мир, 1974. 525 с.

[40] Мак-Миллан В.Д. *Динамика твердого тела*. М.: ИЛ, 1951. 467 с.

[41] Маркеев А.П. *Теоретическая механика*. М.: Наука, 1990. 414 с.

[42] Матвеев А.Н. *Атомная физика*. М.: Высш. шк., 1989. 439 с.

[43] Мах Э. *Механика (историко–критический очерк ее развития)*. СПб.: Общественная польза, 1909. 448 с.

[44] Меркин Д.Р. *Краткая история классической механики*. М.: Физматлит, 1994. 159 с.

[45] Михайлов Г.К. *Леонард Эйлер и его вклад в развитие рациональной механики* // Успехи механики. Advances in mechanics. Warszawa. Polska. 1985. Vol. 8. № 1. P. 3–58.

[46] Най Дж. *Физические свойства кристаллов*. М.: Мир, 1967. 385 с.

[47] Никольский С.М. *Курс математического анализа*. Т. 1. М.: Наука, 1983. 448 с.

[48] Никольский С.М. *Курс математического анализа*. Т. 2. М.: Наука, 1983. 464 с.

[49] Норден А.П. *Теория поверхностей*. М.: ГИТТЛ, 1956. 259 с.

[50] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собр. тр. акад. А.Н. Крылова. Т. VII. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[51] Ньютон И. *Оптика*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1954. 367 с.

[52] Ньютон И. *Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых* // Ньютон И. Математические работы. М.– Л.: ОНТИ, 1937. С. 25–166.

[53] Павленко Ю.Г. *Лекции по теоретической механике*. М.: Изд-во МГУ, 1991. 336 с.

[54] Пальмов В.А. *Колебания упруго-пластических тел*. М.: Наука, 1976. 328 с.

[55] Пановко Я.Г. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1985. 287 с.

[56] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. М.: Наука, 1987. 352 с.

[57] Петкевич В.В. *Теоретическая механика* М.: Наука, 1981. 496 с.

[58] *Вариационные принципы механики* / Под ред. Л.С. Полака. М.: ГИФМЛ, 1959. 932 с.

[59] Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. *Теоретическая механика*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 536 с.

[60] Пуанкаре А. *Измерение времени*. Избр. тр. А. Пуанкаре. Т. III. М.: Наука, 1974. 771 с.

[61] Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1983. 559 с.

[62] Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.

[63] Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.

[64] Сен-Венан Б. *Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм*. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.

[65] Смородинский Я.А. *Температура*. М.: Наука, 1987.

[66] *Терминология термодинамики* / Под ред. А.М. Терпигорева. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 56 с.

[67] Тер Хаар, Вергеланд Г. *Элементарная термодинамика*. М.: Мир, 1968. 219 с.

[68] Труселл К. *Очерки по истории механики*. Москва–Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2002. 315 с.

[69] Труселл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. М.: Мир, 1975. 592 с.

[70] Труселл К. *Этапы развития понятия напряжения*. Сб. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н.И. Мусхелишвили. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 578 с.

[71] Успенский В.А. *Теорема Геделя о неполноте*. М.: Наука, 1982. 111 с.

[72] Ферми Э. Термодинамика. Харьков: Изд. Харьковского ун-та, 1969. 139 с.

[73] Френкель Я.И. *Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа*. Л.-М.: ГИТТЛ, 1940. 435 с.

[74] Четаев Н.Г. *Теоретическая механика*. М.: Наука, 1987. 367 с.

[75] Эйлер Л. *Основы динамики точки*. М.– Л.: ОНТИ, 1938. 500 с.

[76] Эйлер Л. *Открытие нового принципа механики (Découverte d'un nouveau principe de mécanique)*. Mem. Acad.roy. sci. et belles–lettres. Berlin. **6** (1750), 185–217. 1752 (Opera omnia, II–**5**).

[77] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума*. М.–Л.: ГТТИ, 1934. 600 с.

[78] Эйлер Л. *Общие принципы движения жидкостей*. Mem. Acad.roy. sci. et belles–lettres. Berlin. **11** (1755). 274–315. 1757 (Opera omnia, II–**12**).

[79] Эйлер Л. *Новый метод определения движения твердых тел. (Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi)*. Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop., **20** (1775). 208–238. 1776 (Opera omnia, II–**9**).

[80] Якоби К. *Лекции по динамике*. Л.-М.: ОНТИ, 1936. 271 с.

[81] Argyris J. *An Excursion into Large Rotations* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 32. №1 – 3. P. 85-155.

[82] Boltzmann L. *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik*. Teil I. Leipzig, 1897.

[83] Green G. *On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media* // Trans. Phil. Soc. Cambridge. Vol.7. 1839.

[84] Palmov V. *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin: Springer, 1998.

[85] Silberstein L. *Vectorial mechanics*. London: Macmillan and Co. 1913. 197 p.

[86] Truesdell C. *Essays in the History of Mechanics*. Springer–Verlag. New–York e.a. 1968.

[87] Truesdell C. *History of Classical Mechanics* // Naturwissenschaften 63 (1976). Part 1. P. 53-62. Part 2. P. 119-130. Springer-Verlag, 1976.

[88] Truesdell C. *Rational Termodynamics*. Springer–Verlag. New–York e.a. 1984. 578 p.

[89] Truesdell C., Toupin R. *The classical field theories*. Handbuch der Physik. Vol. III/1. Springer–Verlag. 1960.

[90] Truesdell C., Noll W. *The Non–Linear Field Theories of Mechanics*. Encyclopedia of Physics. III/3. Springer–Verlag. 1965.

[91] Zarembo S. *Reflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle* // Enseignements Math. 1940. T. 38. p. 59–69.

[92] Zhilin P.A. *A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies* // ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**. P. 187–204.

[93] Zhilin P.A. *Rigid body oscillator: a general model and some results* // Acta Mechanica. Vol. 142 (2000). P. 169–193.