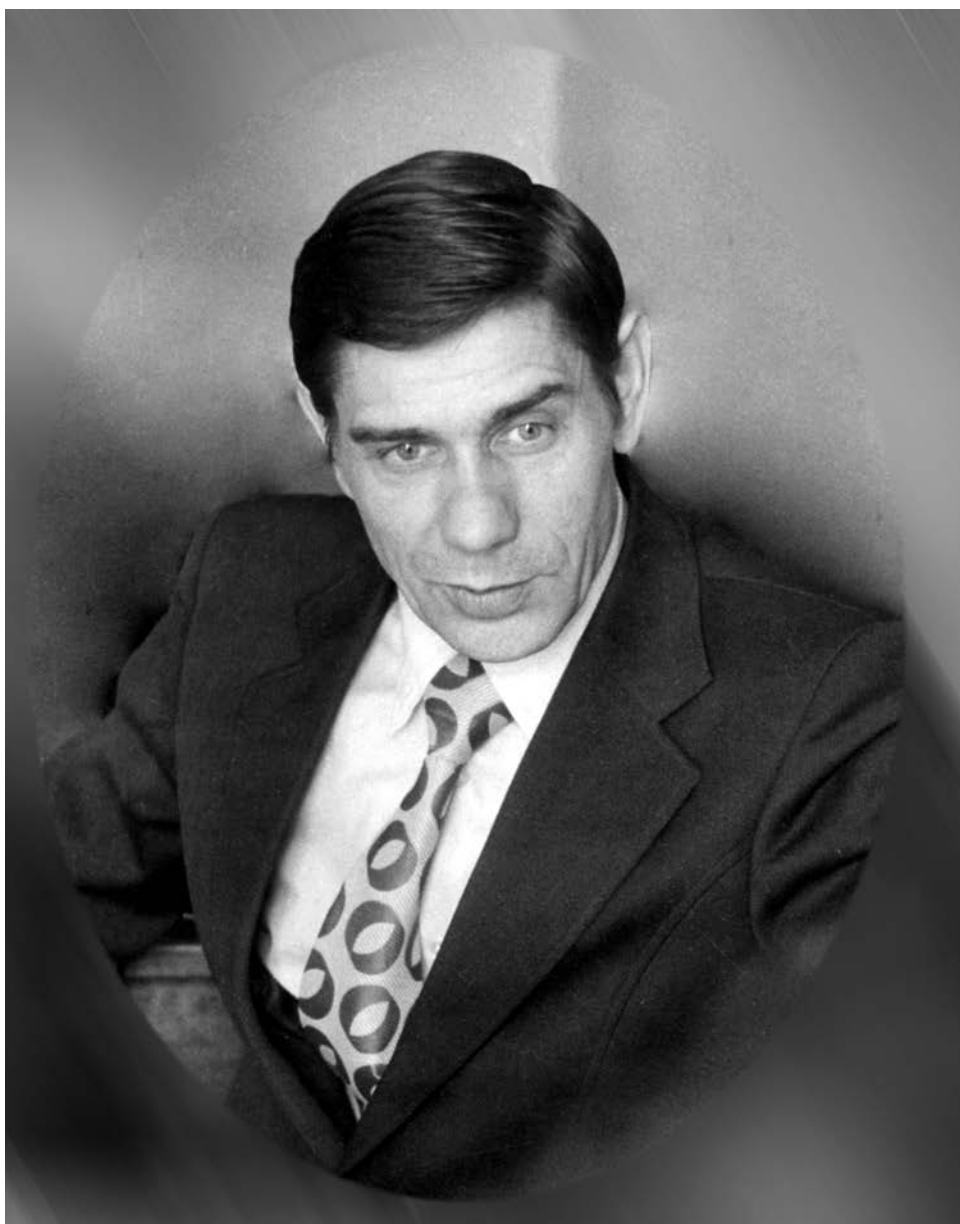


П. А. Жилин

**РАЦИОНАЛЬНАЯ
МЕХАНИКА
СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2012



Tabbucchi

Министерство образования и науки
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. А. Жилин

РАЦИОНАЛЬНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2012

УДК 539.3 (075.8)

ББК 22.251я73

Ж 72

Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.

Пособие соответствует содержанию направлений магистерской подготовки 010800 “Механика и математическое моделирование” и 010900 “Прикладная математика и физика”.

Дано логически строгое изложение основ рациональной механики и математической теории неупругих сред. Представлена методика описания спинорных движений и мультиполярных сред. Изложена микрополярная теория бинарной среды. Описана методика построения модели электромагнитного поля на основании рациональной механики. Изложены теории пьезоупругих и магнитоупругих сред. Представлена теория симметрии евклидовых и неевклидовых тензоров.

Предназначено для студентов, изучающих физико-математические и технические специальности, а также аспирантов и преподавателей, деятельность которых связана с вопросами механики.

Редакционная коллегия:

Доктор физико-математических наук Е. А. Иванова
(главный редактор и составитель),
доктор технических наук Х. Альтенбах,
кандидат физико-математических наук Е. Н. Вильчевская,
кандидат физико-математических наук С. Н. Гаврилов,
кандидат физико-математических наук Е. Ф. Грекова,
доктор физико-математических наук А. М. Кривцов

Ил. 21. Библиогр.: 228 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Жилина О. П., 2012

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2012

ISBN 978-5-7422-3248-3

Оглавление

Предисловие редакторов	12
Краткая биография П. А. Жилина	17
Глава 1. Краткий исторический обзор	20
Введение.....	20
1.1. Рациональная и экспериментальная механика	21
1.2. Ранний период становления механики сплошной среды.....	26
1.3. Теория стержней и современная механика	31
1.4. Гидромеханика	33
1.5. Построение теории упругости и рождение теории оболочек	35
1.6. Нелинейная теория упругости	39
1.7. О прямых подходах к построению континуальных теорий.....	41
1.8. Фундаментальные законы механики и термодинамики	44
1.9. Рациональная механика и электродинамика	52
Глава 2. Основные положения эйлеровой механики	58
Введение.....	58
2.1. Пространство, время, движения	58
2.1.1. Тела отсчета. Время. Системы отсчета.....	58
2.1.2. Принцип инерции Галилея. Инерциальные те- ла отсчета.....	61
2.1.3. Время	63
2.1.4. Инерциальные системы отсчета	66
2.1.5. Системы отсчета и системы координат.....	67
2.1.6. Трансляционные и спинорные движения.....	68
2.2. Тела и их динамические структуры.....	70
2.2.1. Тела-точки и их размерность.....	70
2.2.2. Закрытые и открытые тела. Динамические структуры тел	74

2.3. Воздействия	78
2.3.1. Силы и моменты	78
2.3.2. Статика абсолютно твердого тела.....	81
2.4. Полная и внутренняя энергия.....	82
2.5. Фундаментальные законы механики	86
2.5.1. Уравнение баланса количества движения.....	87
2.5.2. Уравнение баланса кинетического момента.....	91
2.5.3. Первое и второе начала термодинамики.....	97
Заключение	107
Глава 3. Математическая теория неупругости	108
Введение.....	108
3.1. Предмет исследования	109
3.1.1. О явлениях первого и второго рода.....	109
3.1.2. Неупругость. Важнейшие экспериментальные факты.....	111
3.1.3. Цель и метод исследования.....	114
3.2. Фундаментальные законы механики	116
3.2.1. Материальная производная и кинематика.....	117
3.2.2. Уравнения баланса частиц и массы	123
3.2.3. Динамические структуры	128
3.2.4. Первый закон динамики Эйлера.....	130
3.2.5. Второй закон динамики Эйлера.....	132
3.2.6. Уравнение баланса энергии.....	133
3.3. Приведенное уравнение баланса энергии.....	138
3.4. Второй закон термодинамики	143
3.5. Уравнения теплопроводности и диффузии.....	147
3.6. Неполярная сплошная среда с кулоновым трением.....	149
3.7. К теории безмоментной несимметричной среды с кулоновым трением.....	154
3.8. Изотропная неполярная среда	155
3.8.1. Определяющее уравнение для упругой части девиатора тензора напряжений.....	158
3.8.2. Определяющее уравнение для упругого давления.....	161
3.8.3. Задание внутренней энергии.....	167
3.9. Сводка основных уравнений	174
Заключение	178

Глава 4. Модифицированная теория симметрии тензоров и тензорных инвариантов	179
Введение.....	179
4.1. Общая постановка проблемы	181
4.2. Ортогональные преобразования тензоров.....	184
4.3. Ортогональные инварианты и теорема о базисе	192
4.4. Основное уравнение теории инвариантов	195
4.5. Базисные инварианты конкретных систем тензоров	200
4.5.1. Базисный инвариант вектора.....	200
4.5.2. Базисные инварианты системы трех полярных векторов	202
4.5.3. Базисные инварианты симметричного тензора второго ранга	205
4.5.4. Базисные инварианты совокупности вектора и тензора второго ранга	207
4.5.5. Базисные инварианты системы двух симметричных тензоров	211
4.5.6. Базисные инварианты системы трех тензоров.....	222
Заключение	226
 Глава 5. Микрополярная теория бинарной среды с приложением к течению волокнистой суспензии	 227
Введение.....	227
5.1. Современное состояние вопроса.....	228
5.1.1. Экспериментальные факты.....	228
5.1.2. Моделирование потока, обусловленного волокнистой микроструктурой.....	232
5.1.3. Особенности предлагаемого подхода.....	240
5.2. Кинематические соотношения.....	242
5.3. Уравнения баланса частиц и баланса массы.....	244
5.4. Законы динамики Эйлера	249
5.5. Уравнение баланса энергии.....	253
5.6. Основные материальные предположения	256
5.7. Уравнение теплопроводности. Второй закон термодинамики.....	259
5.8. Приведенное уравнение баланса энергии. Соотношения Коши–Грина	263
5.9. Определяющее уравнение для давления.....	267
Заключение	272

Глава 6. Построение модели электромагнитного поля с позиций рациональной механики	277
Введение.....	277
6.1. Механика и электромагнетизм.....	278
6.2. Историческая справка и предмет исследования	282
6.3. Многоспиновые частицы	291
6.3.1. Кинематика многоспиновых частиц.....	291
6.3.2. Кинетическая энергия многоспиновой частицы.....	292
6.3.3. Количество движения многоспиновой частицы	294
6.3.4. Кинетический момент многоспиновой частицы	294
6.4. Фундаментальные законы механики для многоспиновых частиц	294
6.4.1. Первый закон динамики Эйлера.....	295
6.4.2. Второй закон динамики Эйлера.....	297
6.4.3. Уравнение баланса энергии.....	300
6.5. Континуум многоспиновых частиц	301
6.5.1. Кинематика сплошной среды.....	301
6.5.2. Интегральная и локальная формы закона сохранения частиц.....	303
6.5.3. Интегральная и локальная формы первого закона динамики	303
6.5.4. Интегральная и локальная формы второго закона динамики	304
6.5.5. Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии.....	305
6.5.6. Приведенное неравенство диссипации энергии	307
6.6. Классическая электродинамика Максвелла.....	308
6.7. Общая нелинейная теория электромагнитного поля	313
6.8. Линейные уравнения электромагнитного поля.....	321
Заключение	326
Глава 7. Механика и новейшая физика	327
Введение.....	327
7.1. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла.....	333
7.1.1. Системы координат и их замена.....	335
7.1.2. Замена систем отсчета	340
7.1.3. Волновое уравнение. Идея ковариантности	343
7.1.4. Уравнения Максвелла.....	348

7.2. Классическая безмоментная теория упругости и уравнения Максвелла	352
7.2.1. Механика и классическая электродинамика	352
7.2.2. Модифицированные уравнения Максвелла	359
7.2.3. Иллюстративные задачи	363
7.3. Рациональная механика и квантовая физика	374
7.3.1. Реальность и Наука: два метода познания	374
7.3.2. Метафизические представления о строении физического мира	376
7.3.3. Динамика первого эфира. Уравнение Шредингера	380
Заключение	390
Библиографический список	392
Приложения	407
Приложение А. Некоторые этапы развития механики как науки	407
А.1. Предварительные замечания	407
А.2. Первые шаги — древность	407
А.3. От периода Ренессанса до века промышленной революции	408
А.4. Механика в XX веке	411
Приложение В. Основы прямого тензорного исчисления	414
В.1. Определение тензора	414
В.2. Операции с тензорами второго ранга	415
В.2.1. Умножение тензоров	415
В.2.2. Симметричный и антисимметричный тензоры	417
В.2.3. Тензорный базис. Координаты тензора	418
В.2.4. Единичный тензор и тензор Леви–Чивита	418
В.2.5. Свойства операций умножения	419
В.2.6. Разложение тензора на шаровую и девиатор- ную части	420
В.2.7. Векторный инвариант. Сопутствующий вектор	420
В.2.8. Определитель тензора второго ранга	421
В.2.9. Обратный тензор. Степени тензора	422
В.3. Линейные отображения	422
В.3.1. Ортогональное отображение	423
В.3.2. Тензор поворота	424

В.3.3. Проекторы и тензоры отражений	425
В.4. Инварианты тензора	426
В.5. Спектральное и полярное разложение тензоров	426
В.6. Тензорные функции	428
В.6.1. Операции дифференцирования	429
В.7. Тензорные поля	433
В.7.1. Дифференциальные операции над произведением	434
В.7.2. Двухкратное дифференцирование	435
В.7.3. Криволинейные ортогональные координаты	436
В.7.4. Формула Гаусса–Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный	438

Приложение С. Описание спинорных движений и модель твердотельного осциллятора

Введение.....	439
С.1. Тензор поворота в кинематике абсолютно твердого тела	440
С.2. Тензор спина и вектор угловой скорости	442
С.3. Определение поворота по угловой скорости	447
С.4. Угловая скорость композиции поворотов	450
С.5. Вектор поворота. Тензор-интегратор	453
С.6. Потенциальные или консервативные моменты	456
С.7. Метод возмущений на множестве собственно ортого- нальных тензоров.....	458
С.8. Постановка задачи о твердотельном осцилляторе	459
С.9. Движение твердого тела на изотропной упругой опоре.....	462

Приложение D. Вывод формул 467

D.1. Формулы с деформационным градиентом	467
D.1.1. Структуры Картана.....	467
D.1.2. Связь между градиентом вектора угловой скорости и материальной производной от ме- ры деформации	468
D.2. Уравнение баланса энергии.....	469
D.2.1. Преобразование уравнения баланса энергии.....	469
D.2.2. Доказательство вспомогательного тождества.....	471
D.2.3. Преобразование выражения, содержащего де- виатор тензора напряжений.....	471

D.2.4. Преобразование выражения, содержащего тензор моментных напряжений.....	472
D.2.5. Ограничение на материальную производную от тензора поворота	472
D.2.6. Общий интеграл характеристической системы.....	473
D.3. Определяющие соотношения.....	474
D.3.1. Выражение для девиатора тензора напряжений	474
D.3.2. Выражение для девиатора тензора напряжений в случае изотропного материала.....	475

Приложение Е. Приведенное уравнение баланса энергии — альтернативный подход **476**

E.1. О различных способах определения энтропии и химического потенциала	476
E.2. Приведенное уравнение баланса энергии.....	477
E.3. Об одной трактовке химического потенциала.....	478
E.4. Производство тепла, вызванное структурными изменениями в материале.....	482
E.5. Сравнение различных подходов	484

Приложение F. Метод Жилина и метод Трусделла — сравнительный анализ **486**

Введение.....	486
F.1. Приведенное уравнение баланса энергии и уравнение теплопроводности.....	488
F.2. Соотношения Коши–Грина	490
F.3. Второй закон термодинамики	493
Заключение	494

Приложение G. Материальный тензор деформации **496**

Введение.....	496
G.1. Простейшая дискретная модель неупругого деформирования....	496
G.2. Континуальное описание.....	499
G.3. Материальный тензор деформации в случае упругого изотропного материала	501
G.4. Обсуждение и заключительные замечания.....	503

Приложение H. Континуум Коссера и пьезоэлектричество **506**

Введение.....	506

Н.1. Классическая теория пьезоэлектричества	508
Н.2. Уравнения баланса для континуума Коссера	510
Н.3. Модификация классической теории пьезоэлектричества	514
Н.3.1. Приведенное уравнение баланса энергии	514
Н.3.2. Теория симметрии тензорных величин	517
Н.3.3. Простейшая пьезоэлектрическая среда.....	520
Н.4. Микрополярная теория дипольной пьезоэлектриче- ской среды.....	523
Н.4.1. Модель дипольной частицы	523
Н.4.2. Уравнения дипольной пьезоэлектрической среды	525
Н.4.3. Простейшая теория дипольной пьезоэлектри- ческой среды	529
Н.4.4. Сравнение с классической теорией	530
Заключение	531
Приложение I. Среда Кельвина и ферромагнетизм	532
Введение.....	532
I.1. Основные уравнения обобщенной среды Кельвина	535
I.1.1. Кинематика обобщенной среды Кельвина	535
I.1.2. Меры деформации полярной среды.....	537
I.1.3. Динамические характеристики полярной среды	538
I.1.4. Тензоры напряжений. Законы динамики Эйлера	538
I.1.5. Нелинейные определяющие уравнения поляр- ной среды	540
I.1.6. Нелинейные определяющие уравнения обоб- щенной среды Кельвина.....	541
I.1.7. Ограничения на тензоры напряжений в обоб- щенной среде Кельвина	543
I.1.8. Линейная теория обобщенной среды Кельвина	544
I.2. Ферромагнетики и обобщенная среда Кельвина	548
I.2.1. Некоторые сведения об упругих непроводя- щих ферромагнетиках в состоянии магнитно- го насыщения	548
I.2.2. Кинематические соотношения.....	552
I.2.3. Законы динамики для ферромагнетиков. Срав- нение с обобщенной средой Кельвина.....	552

I.2.4. Аналогия уравнения баланса энергии для ферромагнетиков и обобщенной среды Кельвина	553
I.2.5. Меры деформации и определяющие уравнения ферромагнетиков. Сравнение с обобщенной средой Кельвина.....	555
I.2.6. Уравнения квазимагнитостатики	560
I.2.7. Линейная теория ферромагнетиков	560
Заключение	562

Приложение J. Неклассическая теория упругих оболочек 565

J.1. Основные уравнения теории простых оболочек.....	565
J.1.1. Кинематика простых оболочек. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент	565
J.1.2. Тензоры усилий и моментов Коши и Пиолы–Кирхгофа. Уравнения движения в актуальной и отсчетной конфигурациях.....	567
J.1.3. Уравнение баланса энергии и введение тензоров деформации. Соотношения Коши–Грина	569
J.2. Определение тензоров инерции и ограничения на тензоры усилий моментов	570
J.3. Задание внутренней энергии и введение приведенных тензоров деформации.....	571
J.4. Линеаризация основных уравнений	573
J.5. Ограничения на тензоры упругих модулей и определения групп симметрии.....	574
J.6. Связи между двумерными и трехмерными характеристиками ...	575
J.7. Определение тензоров упругости и “начальных” напряжений.....	576
J.7.1. Группа симметрии простой оболочки. Принцип Кюри–Неймана.....	576
J.7.2. Структура тензоров упругости для “тонких” простых оболочек.....	577
J.7.3. Структура тензоров “начальных” напряжений	581
J.7.4. Некоторые частные случаи	582
J.8. Уравнения неразрывности	584

Предисловие редакторов

Данная книга, вообще говоря, не является учебником по стандартному курсу механики сплошных сред, который входит в программу подготовки бакалавров в университетах и технических вузах. Книга, прежде всего, адресована читателю, который уже знаком с механикой сплошных сред и имеет некоторый опыт работы в этой области. Однако по стилю изложения книга является учебником; кроме того, она дополнена приложениями, облегчающими понимание основного текста. Поэтому книгу сможет прочесть и начинающий.

Отметим, что кроме нескольких глав и приложений, тематика которых традиционно относится к области механики, книга содержит главы, посвященные проблемам электродинамики, квантовой физики и теории относительности, а также приложения, в которых обсуждаются пьезоупругость и магнитоупругость, т. е. теории, лежащие на стыке механики и физики. От других книг аналогичного содержания книгу П. А. Жилина отличают используемые в ней подходы и методы. Все без исключения модели, предложенные в книге, построены на основании фундаментальных законов механики с использованием методов механики сплошных сред.

Цель, которую ставил перед собой автор, — расширить область применения механики, распространив ее на те сферы, которые традиционно относятся к области других естественных наук. Следующая цитата хорошо отражает представление П. А. Жилина о месте и роли механики в современном естествознании. *“Механика, как наука, — это не теория каких бы то ни было явлений Природы. Механика — это метод исследования Природы. Мнение о том, что механика имеет ограниченную область применимости, основано, главным образом, на ее фактической неспособности в настоящее время описать целый ряд явлений, известных в экспериментальной физике. Тем не менее никто не доказал, что механика принципиально не способна описать эти явления”*.

Главную причину сложившейся ситуации П. А. Жилин видел в том, что все попытки описать с точки зрения механики известные в эксперименталь-

ной физике явления базировались на механике Ньютона (механике материальных точек), в которой исследуется только одна форма движений — трансляционные движения. П. А. Жилин был глубоко убежден в том, что при описании явлений в микромире огромное значение приобретает учет спинорных движений, при которых точечное тело меняет свою ориентацию в пространстве, хотя его положение в пространстве может оставаться неизменным. В механике все переменные представлены в виде сопряженных пар: трансляционным движениям отвечают силы; спинорным движениям отвечают независимые моменты. Связи между силами и моментами, с одной стороны, и трансляционными и спинорными движениями, с другой стороны, устанавливаются посредством так называемых определяющих уравнений. При наличии определяющих уравнений все характеристики механического поведения тела определяются на основе законов динамики. В механике Ньютона есть только один независимый закон динамики — второй закон Ньютона. Введение спинорных движений и независимых моментов в корне меняет ситуацию. Возникает необходимость формулировки двух независимых законов динамики: первого закона динамики Эйлера (который является обобщением второго закона Ньютона) и второго закона динамики Эйлера, отвечающего за спинорные движения. Механику, основанную на двух законах динамики Эйлера, автор книги называет эйлеровой механикой. Именно с эйлеровой механикой П. А. Жилин связывал возможность распространения области применения механики на широкий класс задач современной физики. Следующая цитата дает ясное представление о его мнении относительно возможностей механики Ньютона и механики Эйлера. *“Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютоновская механика. В этих случаях эйлерова механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновской механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлерова механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике. В частности, она позволяет с совершенно новой точки зрения взглянуть на проблемы квантовой физики”*.

Характерным для книг П. А. Жилина [1–6] является углубленный интерес к основам и первичным элементам механики. Данная книга — не исключение из этого правила. В ней подробно обсуждаются такие понятия, как пространство, время, системы отсчета, трансляционные и спинорные движения, тела-точки, тела общего вида, динамические структуры тел, воздействия (силы и моменты), полная и внутренняя энергия. Формулируются фундаментальные

законы механики: уравнение баланса количества движения (первый закон динамики Эйлера), уравнение баланса кинетического момента (второй закон динамики Эйлера) и уравнение баланса энергии (первый закон термодинамики), обсуждаются различные формулировки второго закона термодинамики. Все перечисленное лежит в основе *рациональной механики* — науки, которая базируется на первых принципах и строгих математических методах и в которой интуитивные представления о физических явлениях находят свое выражение в математической форме.

Нельзя не отметить, что изложение механики в книге П. А. Жилина расходится со многими установившимися традициями и взглядами. Мы убеждены, что эта книга не оставит читателя равнодушным. У кого-то она вызовет восхищение новизной и смелостью взглядов, у кого-то — чувство протеста. Именно такие книги оказывают влияние на развитие науки в целом. Масштаб личности Павла Андреевича Жилина и его вклад в науку в полной мере будет оценен научной общественностью, видимо, только спустя много лет.

Многие результаты, содержащиеся в книге, впервые получены П. А. Жилиным. В периодических изданиях они были опубликованы в основном в 1990–2005 гг. По мнению редколлегии, в дальнейшем при упоминании этих результатов будет правильно связывать их с именем П. А. Жилина.

Прежде всего, это относится к теории симметрии неевклидовых тензоров, которая излагается в четвертой главе и которую по праву можно называть *теорией симметрии Жилина*.

Второй результат относится к описанию спинорных движений, а именно речь идет о тензоре, посредством которого связаны между собой вектор угловой скорости и производная от вектора поворота. В тексте книги этот тензор называется тензором-интегратором, однако правильнее его называть *тензором Жилина*.

Третье — это новое определение материальной производной. Предложенная П. А. Жилиным материальная производная применима в более общих ситуациях, чем классическая, и содержит в себе классическую как частный случай. Для новой материальной производной можно использовать название *“производная Жилина”*.

Четвертый результат — это специальная форма уравнения баланса энергии¹, на которой основан разработанный П. А. Жилиным метод получения определяющих уравнений. Соответственно, здесь уместны названия *“уравнение Жилина”* и *“метод Жилина”*.

¹ В тексте книги это уравнение называется приведенным уравнением баланса энергии.

Еще один результат — это новая формулировка второго закона термодинамики, которую также целесообразно называть *формулировкой Жилина*.

К сожалению, П. А. Жилин не успел завершить работу над материалом книги. Книга составлена Е. А. Ивановой из материалов, хранившихся в личном архиве П. А. Жилина, а также статей, опубликованных в различные годы. Редакционная коллегия постаралась максимально бережно отнестись к авторскому тексту. Редакторская правка основного текста книги заключалась только в исключении повторов и приведении формул к единой системе обозначений. Поскольку значительная часть оригинального авторского текста представляла собой статьи, предназначенные для научных журналов, а книга создавалась нами как учебник, мы сочли, что некоторые места нуждаются в пояснении. Стараясь сделать книгу более понятной и легко читаемой, редакционная коллегия, вместе с тем, строго разграничивала авторский текст и его интерпретацию. Поэтому книга содержит большое количество примечаний редакции.

Книга дополнена приложениями, часть из которых (приложения А–F) содержит материал, поясняющий основной текст книги, остальные (приложения G–J) включены как дополнительный материал. Приложения G, H и I содержат идеи П. А. Жилина относительно построения теорий неупругих, пьезоупругих и магнитоупругих сред. Эти материалы помещены в книгу в качестве приложений, а не основных глав, потому что они основаны на статьях, текст которых частично или полностью написан учениками П. А. Жилина и по стилю изложения отличается от основного текста книги. Приложение J стоит особняком — оно содержит статью П. А. Жилина по теории оболочек. Редколлегия сочла целесообразным включить эту статью в качестве приложения, поскольку ссылки на нее многократно встречаются на страницах книги, а опубликована она в труднодоступном издании.

Авторский вклад в написание приложений: X. Альтенбах (приложение A), Е. Н. Вильчевская (приложения B, D и E), Е. Ф. Грекова (приложение I), П. А. Жилин (приложения C и J), Е. А. Иванова (приложения E, F, G, H, I), Я. Э. Колпаков (приложение H), А. М. Кривцов (приложение G).

Завершая предисловие, приведем еще одно высказывание П. А. Жилина, обращенное, прежде всего, к тем ученым, которым небезразлична судьба механики. *“К сожалению, большинство механиков полагают, что у механики достаточно своих проблем, и потому они самоустраниются от анализа труднейших проблем новейшей физики. Кажется, что это опасная тенденция. Те, кто следят за развитием науки, легко заметят, как стремительно снижается роль и значение механики в исследовательских и обра-*

зовательных программах. Некоторые исследователи вообще перестали считать механику фундаментальной наукой. Ошибочность подобных воззрений проявится очень скоро, но восстанавливать престиж механики будет нелегко. Единственный шанс для механики сохранить роль фундаментальной науки состоит в активном внедрении в разработку проблем новейшего естествознания в широком смысле". Мы очень надеемся, что книга Павла Андреевича Жилина поможет читателю не только по-новому взглянуть на механику, но и найти новые интересные тематики для своих научных исследований.

Павел Андреевич Жилин создал свою научную школу. Его влияние и помощь ученикам в становлении их как ученых трудно переоценить. Павел Андреевич был убежден в том, что о фундаментальных научных проблемах будущие ученые должны размышлять еще будучи студентами, и только в этом случае, спустя многие годы, кто-нибудь из них сможет внести свой вклад в решение научных вопросов, выходящих за рамки частных задач. Поэтому он никогда не жалел времени на обсуждение фундаментальных вопросов со студентами, как в личных беседах, так и на лекциях. Лекции Павла Андреевича отличало глубокое проникновение в суть вещей, они были не пересказом известных литературных источников, а, прежде всего, изложением его собственных научных взглядов и убеждений. Павел Андреевич никогда не скрывал существующие научные проблемы, а, наоборот, старался обратить на них внимание. Павел Андреевич — Ученый, Философ и Учитель в самом высоком понимании этих слов. Даже недолгое общение с Павлом Андреевичем могло изменить мировоззрение человека, а те, кому посчастливилось быть его учеником, навсегда сохраняют в душе тот удивительный взгляд на мир, который позволял Павлу Андреевичу видеть все окружающее с неожиданной, порой парадоксальной стороны, открывать то, что скрыто от обычного взгляда, но поражает своей правильностью и простотой.

Редакционная коллегия выражает благодарность Н. А. Жилиной за предоставленные материалы, члену-корреспонденту РАН Д. А. Индейцеву, академику РАН Н. Ф. Морозову, профессорам В. А. Пальмову и П. Е. Товстику за внимание к работам и творческому наследию П. А. Жилина, студентам кафедры "Теоретическая механика" СПбГПУ 2011 года выпуска, которые были первыми слушателями курса лекций, составленного на основе материалов этой книги, за помощь в редактировании и подготовке книги к печати.

Е. Ф. Грекова, Е. А. Иванова, А. М. Кривцов

Краткая биография П. А. Жилина

Павел Андреевич Жилин был заведующим кафедрой “Теоретическая механика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, заведующим лабораторией “Динамика механических систем” Института проблем машиноведения РАН, членом Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом Международного общества прикладной математики и механики (GAMM), членом президиума Научно-методического совета по прикладной механике Министерства высшего образования РФ, действительным членом Санкт-Петербургской АН по проблемам прочности. Ему принадлежит свыше 200 научных работ. Под руководством П. А. Жилина защищено шестнадцать кандидатских и семь докторских диссертаций.

Павел Андреевич родился 8 февраля 1942 г. в городе Великий Устюг Вологодской области, где семья оказалась во время войны. Детство Павла Андреевича прошло в Волхове и Подпорожье — городах, связанных с работой его отца, Андрея Павловича Жилина, главного инженера каскада Свирских гидроэлектростанций. Мать Павла Андреевича, Зоя Алексеевна Жилина, воспитывала сыновей и вела домашнее хозяйство. В 1956 г. Андрей Павлович был переведен на должность главного энергетика во всесоюзном тресте “Гидроэлектромонтаж” и семья переехала в Ленинград. Старший брат, Сергей Андреевич Жилин, пошел по стопам отца, стал энергетиком. Павел Андреевич в 1959 г. закончил 172 среднюю школу и поступил в Ленинградский политехнический институт. Еще в школе Павел Андреевич познакомился со своей будущей женой, Ниной Александровной, которая была ему верным другом и помощником на протяжении всей жизни.

В период 1959–1965 гг. Павел Андреевич Жилин учился в Ленинградском политехническом институте на кафедре “Механика и процессы управления” физико-механического факультета. Эту же кафедру закончила и дочь Павла Андреевича, Ольга Павловна Жилина, впоследствии кандидат физико-математических наук. По окончании института П. А. Жилин получил квалификацию инженер-физик по специальности “Динамика и прочность машин”

и в период 1965–1967 гг. работал инженером в отделе прочности гидротурбин Центрального котлотурбинного института. В 1967 г. был принят на кафедру “Механика и процессы управления”, где работал сначала в должности ассистента, затем старшего научного сотрудника, доцента и профессора. Основателем кафедры и ее заведующим был Анатолий Исаакович Лурье, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР, всемирно известный ученый. Научное мировоззрение Павла Андреевича в значительной степени формировалось под влиянием Анатолия Исааковича. П. А. Жилин — кандидат физико-математических наук с 1968 г. (тема диссертации “Теория ребристых оболочек”), доктор физико-математических наук с 1984 г. (тема диссертации “Теория простых оболочек и ее приложения”), профессор по кафедре механики и процессов управления с 1989 г. В 1974–1975 гг. П. А. Жилин проходил стажировку в Датском техническом университете (Дания). Работая на кафедре “Механика и процессы управления”, П. А. Жилин читал лекции по аналитической механике, теории колебаний, теории упругости, теории оболочек, тензорному анализу, механике сплошных сред. В 1988 г. он был приглашен на семестр в Ярмукский университет (Иордания) для постановки курса “Механика сплошных сред” на физическом факультете. Одновременно с преподаванием П. А. Жилин активно вел научную работу в области теории пластин и оболочек, нелинейной теории стержней, теории упругости, механики сплошных сред; им получено три свидетельства об изобретении в области виброизоляции и гидроакустики, ему присвоен знак “Изобретатель СССР”.

С 1989 г. Павел Андреевич — заведующий кафедрой “Теоретическая механика”. За время его руководства кафедрой пятеро сотрудников защитили докторские диссертации, у четверых из них Павел Андреевич был научным консультантом. К этому периоду времени относятся его исследования спинорных движений в механике и физике, фазовых переходов и явлений неупругости, электродинамики с позиций рациональной механики, логических основ механики. Во время работы на кафедре “Теоретическая механика” П. А. Жилин поставил и читал оригинальные курсы тензорной алгебры, теоретической механики и теории стержней. В этот период Павел Андреевич серьезно работал в области исследования и разработки фундаментальных основ механики. Созданный им курс теоретической механики [2] не имеет аналогов в мировой литературе, так как в нем совершен переход от ньютоновской механики к механике Эйлера и изложение ведется на языке прямого тензорного исчисления. С 1994 г. Павел Андреевич — заведующий лабораторией “Динамика механических систем” Института проблем машиноведения РАН. С 1993 г. он состоял членом научного комитета ежегодной международной школы-конференции

“Актуальные проблемы механики” (“Advanced Problems in Mechanics”), проводимой Институтом проблем машиноведения РАН.

4 декабря 2005 года Павел Андреевич Жилин ушел из этой жизни. Его жизненный путь стал частью истории науки. Трудно оценить влияние, которое оказал Павел Андреевич на его учеников, коллег, всех, кому выпало счастье личного знакомства с ним. У него была необыкновенная способность пробуждать интерес к науке, заставлять взглянуть по-новому, с неожиданной стороны на окружающий нас мир. Павел Андреевич был отзывчивым, добрым человеком, у которого для каждого всегда находился дельный совет и поддержка. Поражали в Павле Андреевиче его выдающиеся человеческие качества, его абсолютная научная и человеческая честность. Мы, ученики, благодарны судьбе, подарившей нам возможность общения с этим замечательным человеком и выдающимся ученым, ставшим для нас олицетворением духовности.

Более подробную информацию о жизни и деятельности Павла Андреевича Жилина, о его научных интересах и достижениях, его философских взглядах и суждениях по различным научным и ненаучным вопросам можно найти на веб-сайте

<http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin.htm>

Глава 1

Краткий исторический обзор

Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена отдельных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительно отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удастся только на больших интервалах времени.

Революция в физике, произошедшая в начале XX в., не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики вследствие их логической непоследовательности. С другой стороны, к концу XIX в. уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А. Ю. Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Указанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX в. начало развиваться некое расширение классической механики,

связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж. Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом.

Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики, и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссию. Отметим только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Показательно, что роль Л. Эйлера долгое время оставалась неосознанной. Например, Г. Герц [7] пишет: “...главные вехи (развития механики) обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа”. Как видим, имя Эйлера в этом перечне даже не фигурирует. Подобная позиция присуща и подавляющему большинству современных работ по теоретической физике. Естественно предположить, что если бы Дж. Максвелл, Г. Лоренц и другие крупнейшие физики XIX в. были осведомлены о результатах позднего Л. Эйлера, то облик современной физики мог бы быть совершенно другим. К сожалению, резко негативную роль сыграла здесь талантливая, но крайне легковесная книга Э. Маха [8].

В заключение подчеркнем, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное далее ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Вполне очевидно, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

1.1. Рациональная и экспериментальная механика

Механика сплошных сред является объектом пристального внимания исследователей в течение нескольких столетий. Именно в этой области знания зародился анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление и многое другое. Первое дифференциальное уравнение в истории науки было установлено Я. Бернулли (1694) при изучении равновесия гиб-

ких нитей. Оно имеет вид

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{T}$ — усилие в сечении; $\rho \mathbf{F}$ — внешняя нагрузка, штрихом обозначена производная по координате s .

Уравнение поперечных колебаний струны (Ж. Даламбер, 1749)

$$\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения движения идеальной жидкости (Л. Эйлер, 1755), которые приведены в следующем разделе, явились первыми примерами уравнений с частными производными. С этого времени началось интенсивное исследование поведения твердых деформируемых тел при воздействии на них внешней нагрузкой, а также изучение динамических проблем. Сначала это были тонкие упругие стержни. В 1771 г. Л. Эйлер впервые вывел уравнения равновесия тонких стержней

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}'(s) + \mathbf{R}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \rho \mathbf{L}(s) = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

не зависящие от частных свойств материала. Здесь $\mathbf{M}$ — момент в сечении стержня; $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, определяющий положение данной точки стержня; $\rho \mathbf{L}$ — внешняя моментная нагрузка.

Линейная теория упругости была построена О. Коши (1822) и остается неизменной вплоть до наших дней. История ее создания весьма показательна. В 1821 г. О. Коши был рецензентом работы А. Навье, в которой на основе корпускулярных представлений впервые были выведены уравнения линейной теории упругости с одной упругой постоянной. Коши отнесся к этой работе весьма критически, в результате чего работа Навье была опубликована только в 1827 г. Для построения теории упругости Коши выбирает другой подход, ставший основным в механике твердых деформируемых тел. Он вводит понятие упругого континуума, строит теорию напряжений и деформации для этого континуума, постулирует линейную зависимость тензора напряжений от тензора деформаций и выводит уравнения равновесия. Результирующая система уравнений Коши

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S, \quad (1.4)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, тензор четвертого ранга $\mathbf{C}$ называется тензором упругости.

Построение линейной теории упругости было выполнено О. Коши за считанные месяцы. После чего в течение следующих 15 лет, вплоть до 1837 г., Коши пытался улучшить построения А. Навье. Проблеме вывода уравнений теории упругости из корпускулярных представлений были посвящены многолетние исследования С. Д. Пуассона. Результаты оказались малоудовлетворительными. Указанное обстоятельство весьма наглядно демонстрирует силу методов механики сплошных сред. Между тем, единственное важное дополнение к теории Коши, которое состояло во введении понятия энергии деформации и постулировании уравнения баланса энергии, было сделано Дж. Грином (1839). Так были получены соотношения Коши–Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{C} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}, \quad (1.5)$$

где $\mathcal{U}$ — массовая плотность энергии деформации; ρ — объемная плотность массы.

Все указанное хорошо известно и обсуждается с целью подчеркнуть важный факт. Со времени вывода уравнений (1.1)–(1.5) прошло достаточное количество лет, в течение которых наши представления о природе сущего радикально изменились. Тем не менее указанные уравнения сохранили свой вид без каких-либо, даже самых минимальных, изменений. *Способность механики сплошных сред строить уравнения, истинность которых не опровергается временем и которые не требуют уточнений, является ее важнейшим достоинством.* Последующее развитие механики дополнило, но не изменило эти уравнения. Здесь уместно обсудить еще один важный исторический факт. После вывода уравнения (1.1) Я. Бернулли, вплоть до своей смерти в 1705 г., безуспешно пытался вывести уравнение изгиба стержня, т. е. второе уравнение в системе (1.3). Эта задача, как бы по наследству, перешла к Л. Эйлеру.

Сверхгению Эйлера понадобилось почти столетие, чтобы выяснить истинную причину неудачи гениального Я. Бернулли, а именно в 1771 г. Л. Эйлер окончательно установил, что ньютоновская механика принципиально неполна. Заметим, что ньютоновская механика — это механика трансляционных движений, управление которыми осуществляется силами. Но в Природе существует еще один тип движения (спиновое движение), которое не сводится к трансляционному. Соответственно, наряду с силами, в механике необходимо рассматривать еще один тип воздействий, а именно моменты, которые в общем случае не сводятся к понятию момента силы. Поэтому *в механике, помимо уравнения баланса сил, необходимо постулиро-*

вать еще один закон — уравнение баланса моментов. Собственно, этот закон был открыт еще Архимедом в форме принципа рычага.

Известно множество попыток доказать принцип рычага на основе уравнения баланса сил. Видимо, последняя попытка такого рода была предпринята Лагранжем уже после смерти Эйлера. Лагранж полагал, что ему удалось доказать принцип рычага. Отсюда следовало, что уравнение баланса моментов может быть доказано в ньютоновской механике. Поэтому нет нужды выдвигать дополнительный постулат. Эта ошибка Лагранжа задержала развитие механики, по крайней мере, на столетие и вызвала глубокие негативные последствия в современной теоретической физике. Возвращаясь к Л. Эйлеру, отмечаем, что в не вполне осознанной форме Эйлер использовал уравнение баланса моментов еще раньше, при выводе уравнений динамики твердого тела. Примерно так же поступали многие исследователи при использовании принципа рычага, в правильности которого, разумеется, никто не сомневался. Однако в теории стержней подобный прием не срабатывал. Напомним, что в то время теория напряжений в трехмерных средах еще не существовала. Стержень рассматривался как упругая линия, лишенная толщины. Поэтому ввести момент $\mathbf{M}$ как момент силы было невозможно и его пришлось ввести как самостоятельную сущность.

В 1776 г. Л. Эйлер дает окончательную формулировку фундаментальных законов механики в виде двух независимых постулатов: законов динамики Эйлера. Только в начале XX в. спинорные движения вновь получили признание, а эйлерова механика стала интенсивно развиваться только в последние 50 лет. XIX в. отмечен формулировкой еще двух фундаментальных законов, получивших названия первого и второго законов термодинамики.

Первый закон термодинамики, или уравнение баланса энергии, был сформулирован Дж. Грином в 1839 г. и уже упоминался ранее. Второй закон термодинамики, или неравенство производства энтропии, рождался в великих муках, имел множество формулировок и, наконец, утвердился в механике сплошных сред в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема–Трусделла. *Два закона динамики Эйлера и два начала термодинамики составили каркас, внутри которого и строится современная механика сплошных сред.* Важно подчеркнуть, что упомянутый каркас не определяет конкретных моделей сплошных сред, поскольку дает незамкнутую систему уравнений. Создание модели сплошной среды равносильно решению проблемы замыкания указанной ранее системы уравнений. Иными словами, создание модели сплошной среды равносильно написанию неких дополнительных уравнений, которые принято называть определяющими и которые устанавли-

вают связи между основными переменными, входящими в фундаментальные законы.

Долгое время считалось, что установление определяющих уравнений является задачей экспериментальной механики. Это правильно в том смысле, что эксперимент является неустранимым звеном при построении определяющих уравнений конкретных материалов. Тем не менее построение определяющих уравнений является теоретической проблемой, которая принципиально не может быть решена методами экспериментальной механики. К обсуждению этого вопроса мы еще неоднократно будем обращаться в дальнейшем. В настоящее время проблема замыкания удовлетворительно решена только для так называемых нелинейно упругих сред, а теория линейно упругих сред обрела практически каноническую форму.

Существуют материалы, которые удивительно хорошо моделируются нелинейно упругой средой в достаточно широком интервале деформаций. Однако этот класс материалов весьма узок. Большинство реальных материалов хотя и проявляет свойство упругости, но демонстрирует явное отклонение от того, что принято называть упругостью. Поэтому основные проблемы механики деформируемых тел в настоящее время сконцентрированы в области неупругого поведения материалов. Несмотря на то что здесь накоплен огромный экспериментальный материал и опубликованы тысячи теоретических работ, итоговые достижения в этой области оставляют желать много лучшего. Об этом свидетельствуют, в частности, и постоянно появляющиеся новые публикации, содержащие попытки улучшить основы существующих теорий. Ничего подобного не наблюдается в нелинейной теории упругости, где усилия исследователей направлены исключительно на решение конкретных проблем, не меняющих основ теории, но углубляющих и расширяющих результативную часть теории.

В чем же состоит главная причина столь разительных отличий между двумя родственными теориями? По-видимому, основная причина заключается в том, что в теории неупругих материалов телега поставлена впереди лошади. В нелинейной теории упругости ведущая роль принадлежит сугубо теоретической идее гладкого дифференцируемого многообразия. Эта идея принципиально не может вытекать из эксперимента. Иными словами, сначала лошадь (теоретическая идея и ее реализации), а затем телега с добром (конкретными результатами, уточняющимися и проверяющимися экспериментом). В теории неупругих материалов теоретические модели пытаются вывести из экспериментальных фактов. При этом отсутствует общая теоретическая концепция.

Известно, например, что при достаточно больших напряжениях всякий материал обретает свойство текучести, и это свойство закладывается в определение теоретической модели в виде критерия текучести. Но что является причиной текучести и что, собственно, называется текучестью, не обсуждается. Не обсуждается также и определение исходного объекта: от модели сплошной среды в виде гладкого дифференцируемого многообразия приходится отказываться, но никакой замены этому не предлагается.

Между тем, *отказ от идеи гладкого дифференцируемого многообразия по необходимости влечет за собой отказ от традиционного понимания концепции определяющих уравнений*, чего в существующих теориях упругопластических материалов не происходит. Напротив, именно на определяющие уравнения в их традиционной трактовке возлагается вся ответственность за основные свойства предлагаемых к рассмотрению теорий.

1.2. Ранний период становления механики сплошной среды

Принято считать, что теория сопротивления твердых тел деформированию основана Галилео Галилеем (1564–1642) в его последнем трактате “Беседы о двух новых науках” (1638). “Беседы” изложены в виде диалогов и разделены на шесть дней. Первые два дня посвящены сцеплению частиц в твердых телах, сопротивлению и разрушению при изгибе и растяжении упругих балок, а также звуковым колебаниям. Здесь формулируются: а) задача о разрушении упругой призмы при изгибе; б) задача о разрушении цилиндрического бруса при продольном разрыве. Первая задача стала отправной для более чем столетнего цикла работ. При рассмотрении второй задачи в рассуждениях Сальвиати (Галилея) неявно присутствуют два фундаментальных понятия: а) принцип затвердевания; б) понятие о напряжении. До Галилея считалось, что сила, необходимая для разрыва каната, зависит только от длины каната. Чем длиннее канат, тем меньше сила разрыва. Сегодня известно, что вследствие наличия дефектов это действительно верно, но в идеальном канате это не так. Требовалась поразительная прозорливость, чтобы, вопреки экспериментальным фактам, утверждать, что сила, необходимая для разрыва каната, пропорциональна площади сечения каната и не зависит от его длины.

Принцип затвердевания для теории твердых деформируемых тел в явной форме был сформулирован Гастоном Пардисом (1636–1673) в 1673 г. Он

относится к гибким нитям (подвесным мостам, цепным линиям и т. д.) и утверждает, что форма любой выделенной части нити не изменится, если отброшенную часть нити заменить подходящими силами, приложенными к концам выделенной части нити и направленными вдоль касательных к нити в концевых точках. Именно в такой форме принцип затвердевания был использован Якобом Бернулли (1654–1705) в его исследованиях по гибким нитям. В 1691 г. Я. Бернулли выводит уравнения равновесия гибких нитей при действии произвольной распределенной нагрузки

$$T \frac{dx}{ds} = T_0 - \int_0^s F_x ds; \quad T \frac{dy}{ds} = - \int_0^s F_y ds, \quad (1.6)$$

где T — продольное усилие; F_x, F_y — внешние погонные усилия; s — длина нити.

Даже в XXI в. ничего нельзя добавить к этим уравнениям. В 1660 г. Роберт Гук (1635–1703) открыл (опубликовал в 1676 г.) свой закон упругости. В 1680 г. этот закон был независимо установлен Э. Мариоттом (1620–1684), который применил его к исследованию задачи Г. Галилея об изгибе призмы. В отличие от Галилея, считавшего, что поперечное сечение призмы поворачивается вокруг своего нижнего основания, Мариотт правильно расположил ось вращения, но допустил ошибку при вычислении момента сопротивления. В 1694 г. Я. Бернулли также обратился к решению задачи Галилея и при этом получил следующее уравнение:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ_y}; \quad \left(\frac{1}{R} = - \frac{d^2 w}{ds^2} \right), \quad (1.7)$$

где обозначения вполне современные и не нуждаются в пояснениях. Это соотношение принято считать формулой изгиба Бернулли–Эйлера, хотя оно было получено до рождения Л. Эйлера, который, правда, широко использовал его в своих трудах по колебаниям и устойчивости балок.

При выводе (1.7) Я. Бернулли использовал закон Гука и, кроме того, две гипотезы: “1) сечения, плоские и перпендикулярные к ребрам призмы до ее изгиба, остаются и после изгиба также плоскими и нормальными к этим ребрам и волокнам или продольным элементам, которые становятся криволинейными; 2) волокна, одни растянутые, другие укороченные, сопротивляются независимо, как будто бы они представляли собой малые изолированные призмы, не оказывающие друг на друга никакого действия”. Здесь приведена формулировка этих гипотез в трактовке Б. де Сен-Венана [9], с. 385–386,

который считал их ошибочными¹.

Уравнение (1.7) сохраняет свое значение и в наши дни, хотя его уже и не называют более уравнением изгиба. Дело в том, что (1.7) возможно трактовать двояко. Во-первых, можно считать, что момент M в нем задан, тогда по (1.7) можно найти прогиб балки. Так и поступали Я. Бернулли, Л. Эйлер и другие. Именно в этом смысле (1.7) и называют уравнением изгиба. Во-вторых, уравнение (1.7) можно трактовать как определяющее соотношение (аналог закона Гука). Такова современная точка зрения.

Я. Бернулли отчетливо сознавал недостаточность уравнения (1.7) для создания полной теории изгиба балки и до конца своей жизни не прекращал попыток вывести уравнения равновесия балки при действии поперечной нагрузки. Причем эти уравнения должны были бы быть вполне аналогичными уравнениям (1.6), т. е. не зависящими от свойств материала балки. Для этой цели Я. Бернулли использовал остроумную модель изгиба балки, сводящую изгиб к продольному растяжению пружины. Попытки Я. Бернулли были неудачны. Причина неудач была установлена значительно позднее Л. Эйлером. Учеником Я. Бернулли был его младший брат Иоганн Бернулли (1667–1748), внесший большой вклад в математику и механику. Однако по интересующему нас вопросу заслуга И. Бернулли была в том, что он воспитал двух великих учеников: своего сына Даниила Бернулли (1700–1784) и Л. Эйлера (1707–1783). В мемуаре [10], изданном в 1744 г., Л. Эйлер рассматривал балку (в данном случае он обобщил уравнение Бернулли (1.7) на плоский первоначально изогнутый стержень)

$$M = D \left(\frac{1}{R_*(s)} - \frac{1}{R(s)} \right) = -D \left[\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2(s)} + v \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R(s)} \right) \right], \quad (1.8)$$

где R и R_* — радиусы кривизны стержня до и после деформации; $w(s)$ и $v(s)$ — нормальный и тангенциальный прогибы, как материальную линию, имеющую бесконечно малое поперечное сечение. При этом он считал возможным применять к этой линии все известные законы механики.

В этом же мемуаре (с. 492–498) Л. Эйлер рассматривает вопрос “Определение абсолютной упругости посредством опытов”. Абсолютной упругостью

¹ В мемуаре [9] Сен-Венан дает формулировку гипотез Я. Бернулли и далее излагает их критику, которая, конечно, является правильной, но только с уровня знаний XIX в. С позиций конца XVII в. гипотеза Я. Бернулли вовсе не является гипотезой. Это теоремы, которые легко доказываются при отсутствии напряжений сдвига. Последние еще не были открыты. Поэтому критику “гипотез” Я. Бернулли, по нашему мнению, следовало излагать не как ошибку Я. Бернулли, а как-то иначе. К сожалению, трактовка Сен-Венана попала во многие руководства по теории упругости.

Л. Эйлер называет жесткость балки на изгиб. Хотя при написании функционала Л. Эйлер считает балку именно линией, в этом пункте он полагает, что поперечное сечение балки имеет конечные размеры и устанавливает зависимость жесткости на изгиб от природы материала (модуля упругости Юнга) и размеров поперечного сечения. Конечный результат Л. Эйлера оказался ошибочным: он повторил ошибку Галилея. Для нас интересен именно способ рассуждений Л. Эйлера, а не конечный результат. Л. Эйлер продолжил труды Я. Бернулли по выводу уравнений равновесия при изгибе балок. При этом ему пришлось сделать два открытия. Первое: необходимость введения перерезывающих усилий (касательных напряжений). Второе: установление независимости уравнений баланса сил и моментов. Именно этих фундаментальных открытий и недоставало Я. Бернулли для вывода уравнений изгиба балки. Строго говоря, понятие напряжений сдвига впервые было введено А. Параном (1666–1716) в 1713 г., но его работа осталась незамеченной и, очевидно, неизвестной Л. Эйлеру, ибо он нигде на нее не ссылается. В данном случае следует упомянуть, что Л. Эйлер был первым, кто ввел в употребление ссылки на достижения предшественников. До него такие ссылки носили только негативно-критический характер. Честь второго открытия, одного из самых ярких в творчестве гениального ученого, целиком принадлежит ему. В современных терминах, впрочем мало отличающихся от использованных Л. Эйлером, эйлеровы законы динамики сформулированы во второй главе. Применительно к системам взаимодействующих материальных точек эти законы могут быть выведены из законов Ньютона, но Эйлер принимает их как независимые постулаты, применимые к любой механической системе. (Это обстоятельство чрезвычайно важно.) Используя эти законы, Эйлер приходит в 1771 г. к уравнениям равновесия плоского изогнутого стержня

$$\frac{dT}{ds} + \frac{N}{R(s)} + F_v = 0, \quad \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R(s)} + F_n = 0, \quad \frac{dM}{ds} - N = 0, \quad (1.9)$$

где T , N — растягивающее и пререзывающее усилия; M — изгибающий момент.

Кроме уравнений (1.9), Л. Эйлер предложил обобщение третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия. В современной записи оно выглядит так

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} + \mathbf{T}_{(-\mathbf{v})} = 0, \quad \mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v}T + \mathbf{n}N, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ — векторы единичных касательной и нормали к материальной линии; причем $\mathbf{T}_{(\mathbf{v})}$ характеризует воздействие в данном сечении части стержня, находящегося со стороны положительного направления касательной $\mathbf{v}$ на

оставшуюся часть стержня. Аналогичное (1.10) равенство имеет место и для момента M . Уравнения (1.9) и (1.10) сохранились неизменными до наших дней.

Итоги исследований по теории стержней подвел Шарль Кулон (1736–1806) в своей небольшой работе, выпущенной в 1773 г. В этой работе Ш. Кулон исправил ошибки своих предшественников и дал правильную формулу для момента сопротивления. Конец XVIII в. отмечен двумя, ставшими известными попытками подойти к проблеме построения теории оболочек на основе принципов, использованных в теории стержней. Первая попытка была принята Л. Эйлером в 1776 г., когда он предложил рассматривать колокол как совокупность колец, каждое из которых ведет себя как плоский кривой брус. Вторая попытка была совершена Якобом Бернулли-младшим (1759–1789) — сыном Иоганна II Бернулли (1710–1790). Он рассматривал (1789) оболочку “как двойной слой кривых брусьев, причем брусья одной системы пересекаются с брусьями другой системы под прямым углом” [11] с. 19. Конечные уравнения, как выяснилось впоследствии, оказались неверными (не было учтено закручивание брусьев).

В 1788 г. выходит первое издание “Аналитической механики” Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), второе (посмертное) издание вышло, видимо, в 1814 г. Фундаментальным вкладом Ж. Лагранжа в механику является формулировка и систематическое применение принципа возможных перемещений, хотя его частные формулировки появились задолго до Лагранжа. На основе высказанного принципа Лагранж рассматривает и сплошные среды. В частности, в “Аналитической механике” впервые выведено уравнение равновесия мембраны. При рассмотрении движения жидкости Ж. Лагранж привел формулировку и дал истолкование линейному тензору деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (1.11)$$

Обычно эту формулу, как указали Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, приписывают О. Коши, который получил ее в 1822 г.²

Парижская академия наук объявила проблему тонких пластинок темой на конкурс 1811 г. В Представленной на конкурс работе Софи Жермен (1776–

² Томсон и Тэт [12] показали, что принцип возможных перемещений равносильен при игнорировании притоков энергии немеханического происхождения закону баланса энергии. В. Л. Кирпичев [13] показал, что из него при наложении требования инвариантности относительно группы жестких движений следуют эйлеровы законы динамики. Поэтому трудно согласиться с К. Трусделлом [14], считающим описанный результат достижением механики второй половины XX столетия.

1831) используется функционал, аналогичный предложенному Д. Бернулли в теории балок. Отличие заключено в замене кривизны стержня суммой главных кривизн изогнутой поверхности пластинки. Как сегодня известно, это верно только для защемленной пластины, но на конечном уравнении не сказывается. С. Жермен при выводе уравнения пластины допустила ошибку, которую исправил Ж. Лагранж, рецензировавший ее работу. Уравнение равновесия Лагранжа–Жермен имеет вид

$$\Delta \Delta W = P/D. \quad (1.12)$$

Заканчивая этот раздел, приведем цитату из книги А. Лява [11], с. 20: “Результаты всех трудов и остроумия исследователей в области проблем упругости можно подытожить к концу 1820 г. следующим образом: несовершенная теория изгиба, ошибочная теория кручения, недоказанная теория колебаний стержней и пластинок и определения модулей Юнга”. Далее А. Ляв отмечает большую роль этих исследований в становлении теории упругости. Хотелось бы сформулировать эти итоги несколько иначе, а именно к 1820 г. были твердо установлены: а) принцип затвердевания; б) эйлеровы законы динамики с приложением к выводу уравнений равновесия стержней; в) понятие напряжений, особенно в гидромеханике; г) обобщен и многократно применен, в том числе и в сплошной среде, принцип возможных перемещений; д) закон упругости Гука–Мариотта и его приложения к частным задачам; е) общая теория малых деформаций сплошной среды. К сказанному, конечно, следует добавить и те итоги, которые сформулированы А. Лявом вслед за приведенной цитатой.

1.3. Теория стержней и современная механика

Теория тонких стержней в истории развития механики и математической физики сыграла выдающуюся роль. Чтобы яснее отобразить вклад теории тонких стержней в развитие естественных наук, перечислим только некоторые факты.

Рождение обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1691 г. Якоб Бернулли вывел дифференциальное уравнение равновесия каната (нити), которое имеет вид (1.1). Это было первое дифференциальное уравнение в истории науки.

Рождение уравнений в частных производных. В 1742 г. Жак Даламбер вывел уравнение поперечных колебаний струны (1.2). Это было первое дифференциальное уравнение в частных производных. Разработка методов его

решения привела к созданию *теории разложения функций в ряды* (Даниил Бернулли и Леонард Эйлер).

Рождение теории ветвления решений нелинейных дифференциальных уравнений. В 1744 г. Л. Эйлер решил задачу о продольном изгибе стержня, названную впоследствии **Эластикой Эйлера** и положившую начало теории ветвлений решений и теории собственных значений нелинейных операторов.

Рождение новой механики и доказательство неполноты ньютоновской механики. В 1771 г. Л. Эйлер впервые вывел общие уравнения равновесия стержней (1.3).

Чтобы вывести уравнения (1.3), Л. Эйлеру понадобилось около 50 лет размышлений. При этом он совершил одно из величайших открытий в механике и физике, которое в полной мере не осознается большинством механиков и физиков вплоть до настоящего времени, а именно он осознал, что помимо сил и моментов сил в механике фундаментальную роль играют моменты как самостоятельные сущности, не определяемые через понятие момента силы. Это означало, во-первых, необходимость введения нового фундаментального закона физики и, во-вторых, принципиальную неполноту ньютоновской механики. Это открытие Л. Эйлера имеет громадное значение во всей физике, но в полной мере ученые осознают его значение в ближайшем будущем при разработке явлений микромира, в котором второй закон динамики Эйлера играет определяющую роль. Хотя Л. Эйлер сделал решающий шаг по введению моментов, независимых от понятия момента силы, общее определение момента было дано сравнительно недавно П. А. Жилиным, и оно еще не вошло в учебники механики.

Рождение теории устойчивости неконсервативных систем. В 1927 г. Е. Л. Николаи сообщил результаты анализа устойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня и показал, что она неустойчива при любом сколь угодно малом значении крутящего момента (парадокс Николаи). Этот результат буквально шокировал ученых того времени, привыкших к понятию критических сил по Эйлеру. Одновременно П. Ф. Папкович указал, что речь идет об анализе неконсервативной системы и потому не стоит удивляться полученному результату, поскольку возможна накачка энергии в систему. Последующее развитие теории устойчивости неконсервативных систем выявило и другие удивительные факты, например, дестабилизирующую роль внутреннего трения. Например, парадокс Николаи объясняется причинами, не связанными непосредственно с неконсервативностью системы [15]. Тем не менее теория устойчивости неконсервативных систем в настоящее время является одним из важных разделов механики.

Рождение теории симметрии в многоориентированных пространствах. В 1977 г. П. А. Жилин при построении определяющих уравнений в теории стержней и оболочек обнаружил, что применение классической теории симметрии ведет к абсурдным результатам. Анализ показал, что причиной создавшегося тупика является тот факт, что в теории стержней и оболочек вводимые тензорные объекты действуют в пространствах с двумя независимыми ориентациями. Поэтому в таком пространстве существуют тензоры четырех различных типов. Классическая теория симметрии применима только к полярным тензорам, т. е. объектам, не зависящим от выбора ориентаций в пространстве. В результате осознания этих фактов не составило особого труда разработать обобщенную теорию симметрии, применимую к тензорам любого типа. Следует указать, что без обобщенной теории симметрии корректное построение общей теории стержней и оболочек, а также общей теории микрополярных сред оказывается невозможным. Разумеется, можно обойтись и без этой теории, если материал стержня или оболочки подчиняется известным уравнениям теории упругости, что справедливо далеко не всегда. Но даже в этом частном случае возникают, строго говоря, непреодолимые проблемы.

Ранее были отмечены только те факты, которые повлияли и продолжают влиять на становление теоретического фундамента современной механики и математической физики. О громадном значении теории стержней при решении актуальных проблем техники и строительства можно и не говорить.

Нерешенные проблемы теории стержней. В теории стержней получено немало удивительных и даже парадоксальных результатов, которые требуют ясных объяснений. Крайне слабо изучены пространственные формы движения стержней. В рамках существующей теории стержней трудно строго исследовать важные для приложений задачи совместной динамики стержней и, например, абсолютно твердых тел, поскольку эти два раздела механики изложены на различных и трудно совместимых языках. Основным препятствием на пути преодоления всех этих трудностей является отсутствие достаточно общей нелинейной теории стержней, изложенной на удобном для приложений языке.

1.4. Гидромеханика

Если не обсуждать теорию тонких стержней, то первой моделью сплошной среды была так называемая идеальная жидкость, уравнения для которой были предложены Л. Эйлером в 1755 г. В обозначениях, принятых в основном тексте книги, уравнения динамики жидкости сводятся к следующей системе

уравнений [16]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] &= 0, \\ -\nabla p + \rho \mathbf{F} &= \rho \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Эта система четырех скалярных уравнений содержит пять неизвестных. Для ее замыкания необходимо принять определяющее уравнение, связывающее давление p с плотностью ρ . Известны различные определяющие уравнения для жидкости. Для иллюстрации приведем уравнение, которое в литературе не используется, но, возможно, лучше отражает поведение “идеальной” жидкости

$$p = p(\rho) = p_0(\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad \zeta \equiv \frac{\rho_0}{\rho}, \quad m > n. \quad (1.14)$$

Здесь p_0 , m , n , ρ_0 суть характеристики жидкости, определяемые экспериментально. Важным свойством любого определяющего уравнения должна быть конечная прочность жидкости на разрыв, причем для жидкости она весьма мала.

В качестве примера задания граничных условий рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть жидкость занимает цилиндрическую область $0 \leq r \leq R$. Граница $r = R$ моделируется силовым полем³ вида

$$\mathbf{F} = -F_0 \left[\left(\frac{R-r}{l} \right)^{-p} - \left(\frac{R-r}{l} \right)^{-q} \right] \mathbf{e}_r, \quad l \ll R, \quad p > q. \quad (1.15)$$

Как видим, граничные условия моделируются заданием массовых сил, причем на единицу объема действует сила $\rho \mathbf{F}$. Следует подчеркнуть, что при правильном задании определяющего уравнения, например в форме (1.14), эта система способна описать большинство известных экспериментальных фактов. Правда, в некоторых случаях необходимо дополнительно учитывать термомеханические эффекты. Разумеется, при анализе системы (1.13), (1.14) необходимо учитывать наличие у нее разрывных решений. Следует иметь в виду, что внешняя простота системы (1.13), (1.14) обманчива и ее решение наталкивается в нетривиальных случаях на значительные математические

³ Эта идея принадлежит ученику и коллеге автора А. М. Кривцову, который с успехом применяет ее в задачах молекулярной динамики.

трудности. Чрезвычайно популярная модель жидкости Навье–Стокса⁴, хотя и приводит к осмысленным практическим результатам, неприемлема с фундаментальной точки зрения. Известный факт прилипания жидкости к стенкам канала объясняется отнюдь не вязкостью жидкости в общепринятом понимании, а взаимодействием жидкости со стенками канала. Указанное взаимодействие описывается силовым полем, задаваемым потенциалом типа Леннарда–Джонса. Этим взаимодействием также объясняются и капиллярные явления. Существенно изменить описание жидкости можно только учетом, в дополнение к трансляционным движениям, независимых спинорных движений (вращательных степеней свободы), которые впервые были введены в механику Л. Эйлером [17].

1.5. Построение теории упругости и рождение теории оболочек

Начиная с 1821 г. развитие теории упругости и построение на ее основе различных прикладных теорий протекало весьма интенсивно. Исходя из корпускулярных представлений Луи Анри Навье (1785–1836) в 1821 г. предложил уравнения равновесия изотропных упругих тел

$$\mu (\Delta \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.16)$$

где μ — модуль сдвига.

В уравнение (1.16) входит только одна постоянная μ , поэтому его, строго говоря, нельзя признать уравнением равновесия упругих изотропных тел общего вида. В этом же году теория упругости привлекла внимание Огюстена Луи Коши (1789–1857). И уже к осени 1822 г. О. Коши вывел все основные уравнения теории упругости. Коши вводит в рассмотрение сплошную среду, напряженное состояние в которой определяется единственным силовым тензором. Далее Коши использует принцип затвердевания и эйлеровы законы динамики. В результате он впервые получает уравнения движения трехмерной деформируемой среды

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T. \quad (1.17)$$

Если принять $\boldsymbol{\tau} = p \mathbf{E}$, то придем к эйлеровым уравнениям движения жидкости. Подчеркнем, что у Навье не было аналога уравнения (1.17), не зависящего от свойств материала. Уравнения (1.17) являются весьма общими

⁴ Простота модели Навье–Стокса связана с тем, что в ней отсутствуют разрывные решения.

и опираются всего на два допущения: а) тело является трехмерным многообразием; б) в каждой точке среды действует только один силовой тензор. Для него Коши устанавливает свойства

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\tau}_{-n} = \mathbf{0}. \quad (1.18)$$

Тензор деформаций был введен Ж. Лагранжем. Коши постулирует линейную связь между тензорами напряжений и деформаций, т. е. дает обобщение закона упругости Гука–Мариотта

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{d} = -\mathbf{d}^T, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{C}$ называется тензором упругости. В общем случае тензор $\mathbf{C}$ имеет 36 независимых компонент, а для изотропного тела имеется всего два модуля упругости.

Все результаты по линейной теории упругости, сохранившие свое основополагающее значение, Коши получил менее чем за год. В течение последующих 15 лет Коши пытается улучшить построения Навье. Этому также посвящен ряд работ другого выдающегося математика Симеона Дени Пуассона (1781–1840). Как известно, эти усилия не увенчались успехом, на что следует обратить внимание при оценке достоинств и недостатков прямого подхода к построению моделей сплошных сред.

Существенное дополнение к теории упругости Эйлера–Коши было сделано одним из первых английских математиков Джорджем Грином (1793–1841) в работе “О законах отражения и преломления света на общей поверхности двух некристаллических сред” (1839).

В указанном труде Дж. Грин подробно обсуждает попытки вывести уравнения теории упругости из корпускулярных представлений и далее говорит: *“... более надежным методом представляется выбрать в качестве основы какой-нибудь общий физический принцип, а не исходить из определенного способа действия, который, в конце концов, может значительно отличаться от того механизма, которым пользуется природа. ... Принцип, избранный в качестве основы рассуждений в этой работе, таков: каким бы образом ни действовали друг на друга элементы любой материальной системы, если все действующие внутренние силы помножить на элементы их соответствующих направлений, общая сумма для любой определенной части тела всегда будет полным дифференциалом некоторой функции”* [18], с. 110. Математическое выражение сказанного Грином имеет вид

$$d\mathcal{U} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.20)$$

где $\mathcal{U}$ — энергия деформации. Отсюда следуют формулы Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \frac{d^2\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\varepsilon}d\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.21)$$

В данном случае число упругих постоянных можно сократить до 21. Сравнительно недавно В. В. Новожилов [19] показал, что существенны только 13 компонент. Формулы (1.17)–(1.21) составляют основу современной линейной теории упругости. Подчеркнем, что все эти уравнения были получены из общих законов механики, примененных к абстрактной сплошной среде, а попытки учесть действительное строение вещества оказались незавершенными. Последняя задача не нашла полного решения и в настоящее время.

После создания теории упругости Эйлера–Коши–Грина наступила новая эпоха в разработке прикладных теорий стержней, пластин и оболочек. Причем эти теории стали выводиться как более или менее логические следствия из теории упругости. Первыми к выводу уравнений теории пластин из уравнений теории упругости обратились Коши (1828) и Пуассон (1829). Они использовали разложения по степеням толщинной координаты и ограничились только низшими членами. Метод Коши–Пуассона подвергся критике со стороны Б. де Сен-Венана (1797–1886). Критика Сен-Венана изложена в примечаниях к французскому переводу книги А. Клебша “Теория упругости” (1883) и сводится к сомнениям в сходимости используемых разложений. Несмотря на отсутствие строгих доказательств, метод Коши–Пуассона широко используется и в настоящее время.

В 1850 г. вышла первая работа Густава Роберта Кирхгофа (1824–1887) по теории пластин. В этой работе впервые введены в рассмотрение гипотезы Кирхгофа и получено уравнение Лагранжа–Жермен вместе с двумя краевыми условиями (вместо трех у Пуассона). В 1859 г. выходит работа Г. Кирхгофа по теории стержней, в которой использован совершенно необычный по тем временам метод.

Описание указанного метода можно найти в книге Кирхгофа “Механика” [20]. Ученик Кирхгофа Ф. Геринг распространил данный метод на теорию пластин. В улучшенном виде метод Кирхгофа изложен в лекциях № 28–30 книги “Механика” (1876). Хотя конечные уравнения теории пластин в последней версии Кирхгофа совпадают с его первоначальной версией, следует подчеркнуть и большое различие. Если в первой работе гипотезы Кирхгофа принимались априорно, то в последней версии “гипотезы” Кирхгофа являются следствием сочетания двух вполне строгих методов: метода “внутренних уравнений” (позволяющего оценить асимптотические порядки всех

напряжений) и метода “кинематических соотношений” Кирхгофа. В то время как метод “внутренних уравнений” сохранился в неизменном виде до сих пор, кинематические соотношения вышли из употребления, что, вероятно, объясняется сугубо историческими причинами. Вводя в рассмотрение растяжение толщинной координаты $z = h z'$, где $-1/2 \leq z' \leq 1/2$, Кирхгоф вводит в уравнения равновесия и кинематические уравнения малый параметр, после чего находит асимптотические порядки всех переменных в главных членах. Далее из кинематических уравнений неразрывности находятся аппроксимации для перемещений по толщинной координате. Найденные аппроксимации подставляются в функционал энергии и производится осреднение по толщинной координате. Результатом является двумерный функционал, из которого следует как уравнение изгиба пластин, так и два краевых условия (вместо трех у Пуассона).

Метод Кирхгофа был с энтузиазмом воспринят современниками и широко применялся. Его использовал А. Клебш в своей “Теории упругости” (1862). В этой книге впервые были введены в рассмотрение усилия и моменты вместо напряжений. Однако уравнения Клебша подверглись критике А. Лява. На основании метода Кирхгофа Клебш правильно устанавливает, что в главном члене перерезывающие усилия обращаются в нуль (асимптотически малы по сравнению с растягивающими усилиями), и он их отбрасывает. Ляв обратил внимание на то, что малость перерезывающих усилий не позволяет их отбросить, поскольку они входят в уравнения моментов, которые также являются малыми.

Первая попытка вывода уравнений теории оболочек из уравнений теории упругости была предпринята Г. Ароном (1874). Он использовал метод Кирхгофа и получил весьма сложные уравнения, но выражение для энергии у него оказалось тем же, что и в теории пластин Кирхгофа. Различие состояло в энергии изгиба: вместо кривизн деформированной пластины, стояли разности кривизн поверхности до и после деформации. Однако при вычислении кривизн Арон допустил неточности.

Рождение современной теории, видимо, следует связать с работами А. Лява (1888), А. Бэссета (1892) и Х. Лэмба (1890). В целом, результаты Лэмба и Бэссета подтвердили теорию А. Лява. Следует указать, что в работе А. Лява (1888) использовался метод Кирхгофа–Геринга без обращения к гипотезам Кирхгофа. В сильно расширенном виде, учитывающем критику Бэссета и Лэмба, работа Лява изложена в первом издании второго тома “Математической теории упругости” (1893) [21]. В 1903 г. вышла “Натуральная философия” Томсона и Тэта. Благодаря удачному изложению материала, эта

книга оказала большое влияние на всю механику. В частности, теория Кирхгофа излагается следующим образом. Сначала формулируются “гипотезы” Кирхгофа и строится вся теория пластин. Только после этого упомянутые “гипотезы” доказываются методом Кирхгофа. Также поступил и Ляв во втором издании “Математической теории упругости” (1906), но для краткости метод доказательства “гипотез” Кирхгофа опустил. Именно это изложение и известно нашим читателям по книге [11]. Следует указать, что в первом издании содержится значительно большее количество вариантов соотношений упругости.

Дальнейшее развитие теории оболочек пошло по двум существенно различным направлениям. Первое, называемое классическим, продолжило исследования по выводу уравнений теории оболочек из уравнений пространственной теории упругости. Второе направление связано с прямым подходом к построению теории оболочек. Суть его в моделировании оболочки деформируемой поверхностью и последующем изучении механики таких поверхностей.

1.6. Нелинейная теория упругости

Следующей после гидромеханики трехмерной теорией сплошной среды, разработанной в механике, была линейная, а позднее и нелинейная теория упругости. В данном случае нет необходимости давать исторические ссылки. Существуют полные обзоры по данной теме, например [22]. Коснемся только тех аспектов теории, которые имеют непосредственное отношение к обсуждаемым вопросам. При известных условиях среда может вести себя так, что частицы среды, которые были близки до деформации, остаются близкими в процессе деформации. Такое поведение среды можно назвать упругим.

С формальной точки зрения упругую среду можно отождествить с гладким дифференцируемым многообразием и использовать так называемое материальное или лагранжево описание среды. В такой среде можно ввести понятия материальных линий, поверхностей и объемов, которые в процессе деформирования состоят из одних и тех же частиц. Эти понятия нельзя ввести для идеальной жидкости или неупругой среды. Поэтому в гидромеханике используется пространственное, или эйлерово, описание, при котором в данной точке системы отсчета задаются две функции $p(\mathbf{x}, t)$ и $\rho(\mathbf{x}, t)$, которые не связаны с конкретными частицами жидкости.

Чисто пространственное описание твердых деформируемых тел в лите-

ратуре⁵, видимо, не разработано. Основное различие материального и пространственного описаний проявляется в трактовке определяющих уравнений. Подробнее речь об этом пойдет в дальнейшем. Если ограничиться рассмотрением упругих тел, то материального описания вполне достаточно для полного анализа поведения нелинейно упругого тела.

К настоящему времени нелинейная теория упругости уже обрела каноническую форму. Все, что необходимо сделать для возможности решения конкретных задач, — это задать вид энергии деформации (внутренней энергии, свободной энергии). С чисто теоретической точки зрения здесь не существует никаких проблем. Энергию деформации можно задавать произвольно. Однако энергия деформации материалов, способных устойчиво существовать достаточно продолжительное время, должна удовлетворять неким условиям, известным под названием дополнительных неравенств в теории упругости [25, 26]. При материальном описании наиболее важным из условий такого рода является условие сильной эллиптичности в статике или условие строгой гиперболичности в динамике упругих тел. Это условие обеспечивает корректность возникающих краевых задач. Впрочем, условие сильной эллиптичности оказывается недостаточным, чтобы обеспечить существование устойчивых, т. е. ограниченных во времени, решений у корректно поставленных задач. В качестве иллюстрации важности условия сильной эллиптичности можно указать следующий факт: если это условие нарушено, то статическая задача нелинейной теории упругости имеет несчетное множество решений. Энергия деформации реальных тел заведомо не может удовлетворять условиям сильной эллиптичности для любых деформаций, поскольку это означало бы существование неразрушимых тел. Фактически всякие проявления пластических свойств у твердых тел связаны с нарушением условий сильной эллиптичности, но об этом речь пойдет немного позже.

Общая схема построения нелинейной теории упругости включает в себя три этапа, причем среда (упругий континуум) рассматривается как гладкое дифференцируемое многообразие. Первый: разработка теории напряжений и вывод уравнений движения, не зависящих от свойств среды. На втором этапе рассматривается чисто геометрическая теория деформирования многообразий и вводятся меры деформации. На этом этапе свойства среды также не имеют значения. Важно только, чтобы среду можно было бы считать гладким многообразием. Наконец, на третьем этапе напряжения связываются

⁵ Описание, используемое, например, в [23, 24] и называемое эйлеровым, на самом деле является материальным (лагранжевым), в котором в качестве отсчетной выбирается актуальная конфигурация.

ся с деформациями посредством так называемых определяющих уравнений. Именно последние фиксируют физические свойства рассматриваемой среды.

Описанная схема впервые была введена Л. Эйлером при построении теории тонких стержней, а в 1822 г. была распространена на трехмерные среды и существенно развита О. Коши. С тех пор она фактически остается неизменной. Более того, считается, что указанный подход сохраняет свою силу не только для упругих сред, но справедлив и при больших неупругих деформациях. Между тем, описанная схема имеет ограниченную область применимости даже для упругих сред. Действительно, с позиций чистой логики нельзя утверждать, что напряжения связаны именно с теми мерами деформаций, которые порождаются чисто геометрическими рассуждениями. К тому же, в общем случае, этих мер деформаций может быть гораздо больше, чем тензоров напряжений. Нельзя даже утверждать, что напряжения связаны с деформациями.

Для неупругих материалов нетрудно показать, что напряжения в принципе не определяются мерами деформации в общепринятом смысле даже при учете предыстории процесса. Для мультиполярных упругих сред, которые моделируются оснащенными многообразиями, описанная схема практически не срабатывает и необходимо использовать другой подход (см. Приложение J). Мерами деформации следует считать объекты, на изменениях которых совершают работу тензоры истинных напряжений Коши. Случайно оказалось, что в классической теории упругости неполярных сред данное определение деформации совпало с чисто геометрическими построениями. Огромный и, разумеется, вполне заслуженный успех теории О. Коши привел к тому, что разработанная схема построения теории упругости стала использоваться далеко за пределами ее применимости⁶.

1.7. О прямых подходах к построению континуальных теорий

Прямыми условимся называть подходы, основанные на применении законов механики к абстрактной сплошной среде. Примеры использования прямых подходов доставляют: теория Бернулли гибких нитей, теория стержней Эйлера, теория упругости Коши–Грина, теория изгиба пластин Лагранжа–Жермен.

⁶ Дополнительное обсуждение этих вопросов и некоторые пути их разрешения представлены в Приложении G. (*Примеч. ред.*)

При прямых подходах вопросы обоснования получаемых уравнений остаются в стороне и должны решаться отдельно, что является весьма сложной проблемой. Например, классическая теория упругости обоснована только экспериментально; область ее применимости очерчена, по-существу, только на интуитивном уровне. В то же время теория стержней и классическая теория оболочек типа Лява обоснованы с позиций трехмерной теории упругости. Конечно, было бы хорошо, если бы все варианты теории оболочек, необходимые для прикладных целей, можно было бы вывести из трехмерной теории упругости. Но это невозможно по двум основным причинам. Первая: многие полезные прикладные теории оболочек, видимо, нельзя обосновать из-за отсутствия критериев достоверности; некоторые характеристики таких теорий приближенно совпадают с трехмерными, другие — даже качественно не совпадают с трехмерными. Вторая: во многих случаях, исследуемых с позиций теории оболочек, трехмерная теория вообще отсутствует. Такова, например, теория мягких (из тканей) оболочек или теория биологических мембран [27]. К этому классу оболочек относятся случаи, когда поверхностная энергия становится сравнимой с объемной энергией (разного рода пленки, включая пьезоэлектрические).

После создания теории упругости первой работой, в которой рассматривались теории стержней, пластин и оболочек и трехмерные сплошные среды с позиций прямого подхода, была книга Е. и Ф. Коссера (1909). Долгое время подход Коссера выпадал из поля зрения исследователей. Однако, начиная с работы К. Трусделла и Дж. Эриксона (1958), этот подход начал интенсивно развиваться, главным образом, в работах зарубежных исследователей. В СССР подобные работы не проводились.

Мы не будем описывать всех достижений Коссера и их последователей, хотя здесь и получены важные результаты, поскольку этот подход в данной книге не используется. Опишем коротко только основную идею. Братья Коссера вводят в рассмотрение упругий континуум, каждое тело-точка которого может испытывать смещения и независимые повороты. Упругий континуум может быть одномерным (стержни), двумерным (оболочки) или трехмерным (континуум Коссера). Далее в рассмотрение вводится функционал евклидова действия (действия по Гамильтону), который определен на множестве векторов смещений и поворотов. Основные уравнения выводятся из условий стационарности этого функционала.

С теоретической точки зрения подход Коссера хотя и ограничен, но логически безупречен. Однако эту теорию очень непросто использовать в прикладных целях. Конечно, когда ответ заранее известен, то нетрудно подо-

брать соответствующий функционал, но этого недостаточно. Имеются и другие трудности. В теории Коссера “усилия” и “моменты” определяются как производные от лагранжиана и оказываются отличными от настоящих усилий и моментов, с которыми привык иметь дело инженер-расчетчик. Далее, вариационная постановка имеет много достоинств, но имеет и недостатки, связанные с использованием энергии. Конечно, в теоретическом отношении здесь нет никаких проблем, однако в прикладном плане эти проблемы весьма существенны. Дело в том, что функционал энергии крайне критичен к скрытым неконсервативностям, неучтенным потерям энергии и т. д.

Приведем одну школьную задачу: на абсолютно гладкой поверхности лежит свернутая в “комочек” цепь с погонной плотностью ρ ; затем конец этой цепи начинают вытягивать с постоянной скоростью v так, что все большая часть цепи приходит в движение (“комочек” остается неподвижным); спрашивается, какая сила должна быть приложена к концу цепи?

Решение I: Первый закон динамики Эйлера

$$\frac{d m v}{d t} = F, \quad m(t) = \rho s(t), \quad \frac{d s}{d t} = v \quad \Rightarrow \quad F = \rho v^2,$$

где $s(t)$ — длина вытянутой части цепи.

Решение II: Уравнение баланса энергии

$$\frac{d m v^2}{d t} = F v \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Для силы F получили разные ответы. Правильный ответ дает первый закон динамики. При втором подходе следует искать скрытые утечки энергии. Конечно, они всегда находятся, но не всегда ясно, что их надо искать.

Можно было бы назвать и современные работы по теории пластин, где допущены ошибки аналогичного типа.

Обратимся к теории оболочек и рассмотрим энергетический (вариационный) подход. Часто поступают так. Берут энергию трехмерного тела. Затем ее осредняют тем или иным способом и получают двумерный функционал энергии; последняя приписывается оболочке. Верно ли это? Нет, неверно⁷, ибо трехмерная энергия учитывает энергию тех движений частиц оболочки — трехмерного тела, которые никак не сказываются на движении собственно двумерной оболочки. В то же время законы динамики Эйлера совершенно не чувствительны к подобного рода обстоятельствам. Вспомним, что уравнения движения оболочки могут быть получены из трехмерных уравнений движения посредством вполне точных операций осреднения.

⁷ Это будет верно [28] только в том случае, когда допустимо использовать гипотезы Кирхгофа–Лява.

Сказанное ни в коем случае нельзя воспринимать как критику подхода Коссера. Работа Коссера внесла выдающийся вклад в механику деформируемой среды, и ее полезность уже доказана в многочисленных работах. Просто ее приложение к техническим задачам требует известной осторожности, а у инженера зачастую нет времени для обдумывания всех аспектов задачи: он выделяет главное и работает только с ним. Поэтому нужны гарантии, доставляемые законами динамики Эйлера.

В целом подход Коссера означает радикальный отход от генеральной линии Бернулли–Эйлера–Коши. В данной книге мы вернемся к этой линии. Ознакомиться с развитием теории Коссера можно по работам, содержащимся в списке литературы, и по обзору П. М. Нахди [29].

1.8. Фундаментальные законы механики и термодинамики

Современная рациональная механика основана на четырех фундаментальных законах: двух законах динамики Эйлера и двух началах термодинамики. Существующие формулировки этих законов и дополняющая их теория определяющих уравнений позволяют вполне удовлетворительно описывать классические упругие среды без разрывов сплошности, химических превращений, фазовых переходов и т. д. Однако уже учет неупругих свойств материала порождает весьма серьезные проблемы, которые до сих пор остаются нерешенными (см. [30]). Можно указать множество других явлений, которые не описываются и не могут быть описаны существующими теориями.

Попытки преодолеть возникающие проблемы на основе разного рода частных допущений предпринимаются в течение многих десятилетий. Можно ли считать эти попытки вполне успешными? Видимо, нельзя. Свидетельством этому являются, например, современные работы по теории пластичности, авторы которых предлагают все новые и новые варианты теории пластичности. Ничего подобного не наблюдается, например, в нелинейной теории упругости, где развитие теории носит поступательный и преемственный характер, т. е. к существующим результатам добавляются новые результаты, дополняющие, но не отвергающие уже существующие. Ранее упоминалась теория пластичности по той причине, что построение удовлетворительной теории неупругих сред на самом деле решает множество других проблем, непосредственно не связанных с теорией пластичности.

Что же является главной причиной столь разительного несходства тео-

рий упругих и неупругих сред? По нашему мнению, ответ заключается в следующем. Во-первых, успех обеспечивается тем, что упругие среды могут моделироваться гладким дифференцируемым многообразием. Во-вторых, существующие формулировки фундаментальных законов механики содержат в себе все элементы, необходимые для строгого построения теории упругих сред.

Для неупругих сред отказ от идеи гладкого дифференцируемого многообразия является необходимостью — это главная нерешенная проблема. Кроме того, фундаментальные законы механики нуждаются в некоторых уточнениях и дополнениях. Перечислим некоторые из них.

Первое. Фундаментальные законы должны формулироваться для открытых систем, обменивающихся со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. Сказанное необходимо, если мы хотим описывать такие явления, как фрагментация материала, зарождение трещин, образование так называемых квантовых точек и целый ряд других фактов. При реализации сказанного приходится вводить две независимых функции, описывающих распределение частиц и массы в пространстве. Именно это обстоятельство не учитывается во всех существующих теориях. Например, при образовании разрывов (трещин) на линии разрыва происходит как бы удвоение числа частиц, хотя массовая плотность при этом не меняется. Поэтому к списку фундаментальных законов необходимо добавлять два независимых закона: уравнение баланса массы и уравнение баланса частиц. Подчеркнем, что это необходимо делать даже для однокомпонентных сред. В частности, это необходимо для корректного введения так называемого химического потенциала, о котором будет сказано несколько слов в дальнейшем.

Второе. Необходимо более точно учитывать спинорные движения и, соответственно, более точно формулировать второй закон динамики Эйлера. Важную роль в данном случае играет теорема о представлении тензора поворота (см. [31]). Кроме того, необходимо дать более общее определение момента, не сводящегося к моменту силы. Эти факторы играют определяющую роль в теории, например, ферромагнитных материалов.

Третье обстоятельство связано с полной формулировкой уравнения баланса энергии или первого начала термодинамики. В классической механике это уравнение как фундаментальный закон не формулируется. Не вполне удовлетворительна его формулировка и в термодинамике, поскольку отсутствуют определения важнейших понятий: энергии, температуры, энтропии, химического потенциала и т. д. Разумеется, в более или менее изученных ситуациях использование этих понятий не вызывает затруднений. Однако в

менее изученных случаях, например при анализе радиационного старения материала, ситуация оказывается более сложной.

Первое неотчетливое представление об энергии возникло в незапамятные времена. Достаточно вспомнить *Золотое правило механики: выигрывая в силе, проигрываешь в пути*. Этот закон пытался обосновать еще Аристотель. В этом законе энергия появляется под названием работы. В более отчетливой форме уравнение баланса энергии появилось в форме принципа возможных перемещений, первая формулировка которого принадлежит И. Бернулли [32]. Ж. Лагранж принял принцип возможных перемещений в качестве исходного положения своей аналитической механики.

Несмотря на всю свою важность для механики, принцип возможных перемещений не является точным аналогом уравнения баланса энергии в его современном виде. Более того, этот принцип не является независимым утверждением и может быть получен в качестве следствия из первых двух законов динамики. В то же время, именно принцип возможных перемещений натолкнул Дж. Грина [33] на первую формулировку уравнения баланса энергии, в которой впервые вводится новое для классической механики понятие внутренней энергии.

Примерно в это же время, т. е. в первой половине XIX в., возникла и начала интенсивно развиваться новая наука — термодинамика. Последняя включает в себя учение о различных формах энергии и способах ее перехода из одной формы в другую. Нет необходимости обсуждать историю возникновения термодинамики, поскольку она изложена во множестве работ [25,34,35].

Многие выдающиеся исследователи считают, что термодинамика не менее точная наука, чем рациональная механика. Мы не разделяем подобной позиции, хотя, разумеется, полностью признаем важнейшую роль, которую играет термодинамика в современной науке. Сомнения связаны не с результативной частью термодинамики, а исключительно с ее логическими основаниями. Проблема заключается в том, что термодинамика оперирует с понятиями, которые не определены и не могут быть определены в рамках самой термодинамики [36].

Попытки обосновать термодинамику в рамках классической механики⁸ заведомо обречены на неудачу, ибо на самом деле термодинамика выходит за рамки классической механики, что и выражается в дополнительном принятии третьего фундаментального закона, а именно в постулировании уравнения

⁸ Под классической механикой в физике (термодинамике) обычно понимают ньютоновскую механику (часто гамильтонову механику), которые являются очень частными разделами механики.

баланса энергии. Ссылки на статистическую физику [37] также не кажутся убедительными. Подробный разбор подходов, принятых в термодинамике и статистической физике, далеко выходит за рамки данной работы. Отметим только один факт. Известно значение, которое придается в литературе понятиям равновесных и неравновесных процессов. Следует обратить внимание на то, что использование этих представлений связано не с природой вещей, а исключительно с принятым способом рассуждения и введения основных понятий.

В дальнейшем будет использован другой подход, при котором не возникает необходимости в различении равновесных и неравновесных процессов. В данной книге будет приведена общая формулировка уравнения баланса энергии, которая, по существу, служит определением полной энергии системы. При этом будет показано, что понятие механической энергии, вытекающее из законов динамики, является недостаточным.

Механическая энергия не является новым понятием. Для ее введения достаточно использовать первые два закона динамики. Если внутренние и внешние воздействия не имеют диссипативных составляющих, то известная процедура не только позволяет ввести механическую энергию, но и доказать ее сохранение, т. е. получить интеграл энергии. К сожалению, описанный подход пригоден только в достаточно простых ситуациях. Обычно внутренние силы в телах заранее неизвестны и подлежат определению.

Постулирование уравнения баланса энергии позволило Дж. Грину показать, что в упругом теле именно внутренняя энергия порождает внутренние силы и является для них потенциалом. Задание внутренней энергии обычно является более простой и более ясной процедурой, нежели задание внутренних сил. Понятие механической энергии позволяет получить предварительное представление об энергии, которое является достаточным при исследовании огромного множества задач. Тем не менее, если ограничиться только понятием механической энергии, то многие важные физические явления окажутся за рамками механики. В частности, остаются за кадром все тепловые явления, введение температуры, энтропии, химического потенциала и учет такого явления, как излучение.

В отличие от первых двух законов, уравнение баланса энергии суммирует в себе явления самой разной природы, ибо все они так или иначе могут быть охарактеризованы в терминах энергии. Область действия уравнения баланса энергии столь широка, что существовало целое направление в науке (энергетизм), в котором баланс энергии считался достаточным для описания всего сущего. Постепенно энергетизм вышел из употребления, но, тем не менее,

значение уравнения баланса энергии как Всеобщего Интегратора всех процессов сохранилось. А само уравнение баланса энергии стало неотъемлемой частью механики и физики.

Из далекой древности пришло представление о двух типах энергии: динамической энергии и притягивающей энергии. С динамической энергией все ясно — это кинетическая энергия. Притягивающая энергия — это то, что соединяет совокупность первичных “атомов” в единое нераспадающееся тело **А**. Роль притягивающей энергии в рациональной механике играет внутренняя энергия.

Важнейшую роль в механике неупругих сред играет некое уравнение, являющееся следствием законов динамики и уравнения баланса энергии, называемое приведенным уравнением баланса энергии. Именно при формулировке приведенного уравнения баланса энергии возникают и определяются такие понятия, как внутренняя энергия, температура, энтропия и химический потенциал. Строгое определение этих понятий на основе чисто механических рассуждений приводится впервые, и эта часть работы является принципиально новой. В литературе по физике и термодинамике часто можно встретить утверждения типа: “Химическим потенциалом называется производная от внутренней (или свободной) энергии по массе (или числу частиц)”. При этом подразумевается, что внутренняя (или свободная) энергия откуда-то известна, хотя определения этих понятий отсутствуют.

В третьей главе будет показано, что понятия энергии, температуры, энтропии и химического потенциала вводятся одновременно и по отдельности определить их принципиально нельзя. Методика введения этих понятий показывает, что можно ввести в рассмотрение много различных температур и, соответственно, энтропий, отвечающих разным энергетическим потокам. Например, можно ввести температуры трансляционных и спинорных движений, температуру радиационных излучений и т. д. Не менее важной оказывается роль приведенного уравнения баланса энергии при определении таких понятий, как меры деформации. В отличие от теории упругих сред, где эти понятия могут быть введены на основе чисто геометрических рассуждений, в теории неупругих сред, для которых отсутствует понятие отсчетной конфигурации, геометрических рассуждений недостаточно. Меры деформации вводятся как объекты, на изменениях которых совершают работу тензоры силовых и моментных напряжений. При этом сами меры деформации начинают зависеть от свойств материала.

Рассмотренные три фундаментальных закона в настоящее время, по нашему мнению, исчерпывают список фундаментальных законов механики. Од-

нако почти общепринято в качестве еще одного фундаментального закона механики рассматривать второй закон термодинамики⁹, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая энергия может быть переведена в тепловую энергию, но полностью перевести тепловую энергию в механическую энергию невозможно [25, 34].

Обобщенно говоря, формулировка второго закона термодинамики — это попытка ввести идею необратимости многих природных и техногенных процессов в рациональную науку. Во многих, если не во всех, случаях для введения идеи необратимости в рассматриваемые процессы достаточно обычного здравого смысла. Тем не менее многих исследователей не оставляет желание перевести идею необратимости с уровня здравого смысла на уровень фундаментального закона. Многие полагают, что этот перевод уже осуществлен формулировкой второго закона термодинамики. Мы считаем, что в данном случае желаемое выдается за действительное.

Фактически в настоящее время не существует формулировки второго закона термодинамики, обладающей той же степенью общности, какой обладают законы динамики и уравнение баланса энергии. Основная проблема, возникающая при попытке дать общую формулировку второго закона термодинамики, связана со следующим обстоятельством. Фундаментальные законы представляют собой утверждения, которые принципиально не могут быть опровергнуты экспериментально. Почему такие утверждения всеобщего характера вообще возможны? Дело в том, что любой фундаментальный закон можно воспринимать как определение некой новой величины. Первый закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие силы. Второй закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие момента. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение новое понятие внутренней энергии. Комбинация всех трех законов позволяет ввести в рассмотрение температуру, энтропию, химический потенциал. Что же остается на долю второго закона термодинамики? Он не вводит никаких новых понятий, но постулирует некие ограничения на

⁹ Взгляды П. А. Жилина на второй закон термодинамики за последние 25 лет его научной деятельности существенно изменились. При построении теории оболочек (работы периода 1965–1980 гг.) П. А. Жилин придерживается трактовки второго закона термодинамики, предложенной К. Трусделлом, и развивает эту трактовку применительно к двумерным материальным объектам. При построении общей теории стержней [6] (работа 2005 г.) П. А. Жилин вообще не упоминает второй закон термодинамики в какой бы то ни было из его известных формулировок. В этом разделе содержится трактовка второго закона термодинамики, представленная в статьях “Математическая теория неупругих сред” 2003 г. [38] и “Основные уравнения теории неупругих сред” 2001 г. [39]. (Примеч. ред.)

уже введенные величины. Эти ограничения отражают наши представления о характере поведения системы и носят опытный характер. Отсюда следует, что новые наблюдения и новые опыты могут изменить как наши представления о природе сущего, так и, следовательно, формулировку второго закона термодинамики. По этой причине второй закон термодинамики в его существующей трактовке нельзя наделить статусом фундаментального закона. В добавление к сказанному можно отметить, что в любом случае роль второго закона заключается в получении утверждений типа: “*Тепло течет от горячего к холодному*”. Но такого рода ограничения при необходимости нетрудно принять по соображениям здравого смысла, без ссылки, не всегда обоснованной, на второй закон термодинамики¹⁰.

В основании второго закона термодинамики лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т. е. не учитываемую нами, Вселенную.

При введении второго закона термодинамики обычно рассматриваются тепловые машины и циклы Карно. И то и другое понятия относятся, скорее, к области правдоподобных рассуждений, нежели к рациональной науке. Главный недостаток рассуждений, связанных с введением понятия циклов, состоит в том, что рассматривается не сама система, а система плюс окружение. Например, в изотермическом процессе к системе подводится или отводится тепло от термостата. При этом используется понятие равновесного процесса, само существование которого далеко не всегда возможно. В качестве иллюстрации этого факта напомним эффект Савара–Массона. Можно сколь угодно медленно изменять внешнюю силу, деформирующую образец.

Тем не менее процесс пластического деформирования носит скачкообраз-

¹⁰ Здесь заканчивается текст статьи Жилин П. А. *Математическая теория неупругих сред* / П. А. Жилин // *Успехи механики*. — 2003. — Т. 2, N 4. — С. 3–36. Далее, до конца раздела, следует текст статьи Жилин П. А. *Основные уравнения теории неупругих сред* / П. А. Жилин // *Труды XXVIII летней школы “Актуальные проблемы механики”*. — СПб., 2001. — N 4. — С. 14–58. (Примеч. ред.)

ный характер, причем скорость протекания скачкообразных изменений является характеристикой тела, а не условий нагружения. Можно избежать скачкообразных изменений, если использовать жесткое нагружение, т. е. задавать не силу, а деформацию. Но в таком случае мы изучаем не свойства материала, а свойства системы из образца и нагружающей машины. Именно по этой причине экспериментаторы уже давно отказались от схемы жесткого нагружения при изучении свойств материала.

На механику сплошных сред второй закон термодинамики был распространен Дюгемом [34]. Принятая в настоящее время трактовка второго закона термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема была предложена К. Трусделлом в 1960 г. [22] и явилась развитием идей Дюгема. В данной работе будет использована другая схема введения второго закона термодинамики и понятия энтропии, которая в большей степени опирается на чисто механические соображения. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии¹¹. В современной механике сплошных сред это просто некий прием, причем очень несовершенный, позволяющий в известной мере учесть энергию движения не учитываемого нами бесконечного множества степеней свободы как самого тела, так и его окружения. Более того, маловероятно, что в обозримом будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. Проблема здесь отнюдь не в затруднениях с написанием подходящего неравенства. Истинная проблема заключается в сомнениях относительно всеобщности самого второго закона термодинамики. Применительно к реальным тепловым машинам он, конечно, справедлив. Но верно ли это применительно ко всем процессам, существующим в Природе? Простой пример. Рассмотрим силу вязкого трения $\mathbf{F} = -\mathbf{b}\mathbf{V}$. Во многих случаях необходимо считать, что коэффициент вязкого трения $\mathbf{b}$ положителен. Можно написать неравенство, выражающее второй закон термодинамики, из которого положительность коэффициента вязкого трения будет вытекать в качестве необходимого следствия. Но все дело в том, что коэффициент вязкого трения не обязан быть положительным всегда. Можно сконструировать систему, в которой он будет отрицательным и будет происходить накачка энергии в систему,

¹¹ Проблема состоит в отсутствии строгого определения понятия температуры. Это понятие невозможно ввести без использования концепции электромагнитного поля, которое и вынуждает тепло течь от горячего к холодному.

вместо ее рассеяния. Ситуация здесь напоминает проблему дополнительных неравенств в нелинейной теории упругости [25]. Многие из них полезны и важны в тех или иных случаях, но ни одно из них нельзя принять в качестве обязательного условия.

1.9. Рациональная механика и электродинамика

Обратимся к обсуждению самого важного и до сих пор не решенного механикой вопроса о причинах логической несовместимости классической механики и электродинамики. Дело здесь совсем не в принципе относительности Галилея¹². Причина лежит гораздо глубже и своими корнями уходит на два тысячелетия назад. Кажется необходимым хотя бы кратко затронуть один аспект исторического развития механики.

Основы рациональной механики были заложены еще Архимедом, среди многих достижений которого выделяются два фундаментальных положения, относящихся к равновесию тел: а) уравнение баланса сил; б) уравнение баланса моментов (принцип рычага). Архимед формулирует эти два положения как независимые законы природы. Все дальнейшее развитие механики сопровождалось поисками ответа на вопрос: “Действительно ли баланс сил и баланс моментов являются независимыми утверждениями?” Поначалу эта проблема исследовалась только в статике. Начиная с конца XVI и вплоть до конца XVIII в. шли непрерывные атаки на принцип рычага Архимеда. Было найдено много более или менее строгих доказательств принципа рычага и даже утвердилось мнение, что баланс моментов не является независимым утверждением. Это мнение представлено во многих современных учебниках по механике. Удивительно, но самого главного обстоятельства в приводимых доказательствах принципа рычага “не замечают” до сих пор, а именно во всех этих доказательствах существенно используются соображения симметрии. Но с появлением работы Э. Нетер (1918) всем стало понятно, что соображения симметрии вполне могут заменить требования баланса сил и моментов. Поэтому принцип рычага есть независимое от баланса сил утверждение.

Современная рациональная механика имеет, можно сказать, точную дату рождения (1638), и ее основателем по праву считается Галилео Галилей (1564–1642). Открытие Галилеем принципа инерции (1638) является главным событием в классической физике, из которого уже естественно вытекает закон, впоследствии названный вторым законом Ньютона. Частная формули-

¹² О принципе относительности Галилея и об уравнениях Максвелла см. раздел 7.1. (Примеч. ред.)

ровка этого закона также открыта Галилеем, поэтому Ньютон называет его законом Галилея. В 1687 г. появляются “Математические начала натуральной философии” Исаака Ньютона (1643–1727). Несмотря на то что в этом труде не было представлено новых фундаментальных принципов, за исключением третьего закона, “Начала” сыграли огромную роль в истории механики, ибо это была первая попытка систематического изложения механики. Конечно, главным в “Началах” являются закон всемирного тяготения и следствия из него.

С точки зрения фундаментальных принципов главной заслугой Ньютона является постановка задачи о необходимости построения механики на основе ясно выраженных исходных постулатов, но самих этих постулатов Ньютон не знал. Ньютону удалось разрешить только ограниченную задачу: как по известным движениям находить силы. Многие крупнейшие ученые (например Р. Кирхгоф) даже через два столетия были настолько очарованы этим успехом Ньютона, что всерьез считали второй закон Ньютона определением силы. Находить по заданным силам движение Ньютон не только не умел, но даже считал, что сформулированных в “Началах” законов для этого явно недостаточно.

Итог своих воззрений на механику сформулировал сам И. Ньютон в 1717 г.: “*Vis inertia* есть пассивный принцип, посредством которого тела пребывают в их движении или покое, получают движение¹³, пропорциональное приложенной к ним силе, и сопротивляются настолько же, насколько сами встречают сопротивление (здесь формулировка всех трех законов. — П. Ж.)”. По одному этому в мире еще не могло бы произойти движение. Был необходим иной принцип, чтобы привести тела в движение, и раз они находятся в движении — требуется еще один принцип для сохранения движения. Ибо из различного сложения двух движений вполне ясно, что в мире не всегда имеется одно и то же количество движения. Если два шара, соединенные тонким стержнем, вращаются вокруг общего центра тяжести равномерным движением, в то время как центр равномерно движется по прямой линии, проведенной в плоскости их кругового движения, то сумма движений двух шаров в том случае, когда шары находятся на прямой линии, описываемой их центром тяжести, будет больше, чем сумма их движений, когда они находятся на линии, перпендикулярной к этой прямой. Из этого примера ясно, что движение может получаться и теряться” [40], с. 301. Эти слова были написаны через 30 лет после выхода “Математических начал”, и они дают

¹³ Под движением здесь и далее Ньютон понимает то, что сейчас называется количеством движения.

ясное представление о состоянии механики того времени. Столь длинная цитата кажется необходимой, ибо искажения действительной истории механики в литературе весьма значительны. Ньютон достаточно велик без того, чтобы приписывать ему то, чего он не делал. Книга Э. Маха [8], где впервые появилось утверждение, получившее затем большое распространение, о том, что “после Ньютона в механику не было внесено ничего принципиально нового”, является сборником фантазий самого Э. Маха.

Задача, поставленная Ньютоном, была в значительной мере решена Л. Эйлером (1707–1783). На Эйлера огромное влияние оказали В. Лейбниц, Я. и И. Бернулли, Г. Гюйгенс, Ж. Даламбер. Современная форма закона Галилея–Ньютона была открыта К. Маклореном в 1742 г. Именно Леонард Эйлер ввел почти все понятия, которыми пользуется современная механика (исключая, разумеется, гамильтонову механику).

То, что сегодня называется ньютоновской механикой, было построено Л. Эйлером в 1735–1758 гг. Опустив все подробности, отметим только формулировку первого закона динамики (1756): “Скорость изменения количества движения произвольной системы равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему”. Эта формулировка несравнимо сильнее закона Галилея–Ньютона. В частности, из нее следует третий закон Ньютона. Однако дело даже не в первом законе динамики, а именно в строгом введении основных понятий, включая понятие силы, уничтожившее пропасть между статикой и динамикой. Все построения проведены Эйлером с такой легкостью и изяществом, с такой естественностью, что многие современники (и не только современники) даже не поняли, что на самом деле произошло.

В 1771 г. Л. Эйлер окончательно установил, что уравнение баланса количества движения и кинетического момента — суть независимые законы механики. А это означало принципиальную неполноту ньютоновской механики. Возникла новая механика — механика Эйлера, в которой место материальной точки в ньютоновской механике заняло абсолютно твердое тело. С этой поры “элементарная” частица наделяется не только количеством движения, но и собственным кинетическим моментом. Эйлер формулирует второй закон динамики. Его современная форма такова: “Скорость изменения кинетического момента произвольной системы равна главному вектору внешних моментов и моментов внешних сил, действующих на эту систему”. В механике Эйлера вводятся воздействия двух типов. Воздействия, выражаемые полярными векторами, называются силами. Воздействия, выражаемые аксиальными векторами, называются моментами.

Мы вплотную подошли к интересующей нас точке разрыва между меха-

никой и электродинамикой, но необходимо сказать еще несколько слов.

Видимо, единственным человеком, осознавшим открытие Эйлера, был Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), но по ряду причин он не захотел с ним согласиться. В попытках опровергнуть открытие Эйлера Лагранж вновь и вновь обращается к доказательству принципа рычага и доводит это доказательство до высокой степени совершенства, хотя избавиться от соображений симметрии ему, разумеется, не удастся. Гений Лагранжа позволил ему насытить ньютоновскую механику новыми идеями, плодотворность которых надолго отвлекла всех механиков от основных принципов и обратила их внимание на решение важнейших конкретных проблем, включая проблемы механики сплошных сред. Так и получилось, что, резко продвинув вперед одни аспекты механики, Лагранж почти на столетие задержал прогресс механики в других, более важных аспектах. Воистину прав сказавший, что гений ученого оценивается тем, на сколько лет он задержал развитие науки. Правда, это верно только в отношении гениев. Есть еще сверхгении, идеи которых входят в науку навсегда, но сверхгении крайне редки. В истории физики ими были: Архимед, Галилео Галилей, Леонард Эйлер и Джеймс Клерк Максвелл.

Обратимся к описанию проблемы, которую ставит перед механикой электродинамика Максвелла.

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Иными словами, в ньютоновской механике задействованы частицы только одного сорта. В электродинамике существенную роль играют частицы трех сортов: нейтральные, положительные и отрицательные, которые наделяются не только массой, но и зарядом. Природа заряда до сих пор точно не известна, как, впрочем, и природа массы. Поэтому важным здесь является не то, какими качествами обладает частица, а число несводимых друг к другу качеств, которыми наделена частица, т. е. важна “размерность” частицы. В ньютоновской механике “размерность” элементарной частицы равна единице, “размерность” абсолютно твердого тела в макромеханике равна четырем, а в электродинамике “размерность” частицы должна быть заведомо больше четырех, чтобы включить заряд. Уже по одной этой причине очевидно, что логический разрыв между ньютоновской механикой и электродинамикой неизбежен и неустраним. Максвелл ясно осознавал этот разрыв и пытался его устранить, изобрел электродинамику с “колесиками”. Может быть, напрасно в дальнейшем эти усилия никем не были продолжены. Нельзя забывать, что сверхгении знают намного больше того, что они в состоянии выразить в терминах рациональной науки. Так или иначе, но Максвелл не сумел преодолеть разрыв, существующий

между механикой и электродинамикой. Вместо этого он просто “перепрыгнул” через пропасть и написал уравнения электродинамики такими, какими они должны быть на основании известных фактов. Если бы в эти уравнения входило только электрическое поле, то все было бы просто и никакого разрыва с ньютоновской механикой не было бы. Однако в уравнения Максвелла входит вектор магнитного поля. Судя по многим признакам, Максвелл воспринимал его как моментное воздействие. В ньютоновской механике моменты порождаются силами: если нет сил, то и нет моментов. В электродинамике дело обстоит иначе: электрическое и магнитное поля в общем случае не сводимы одно к другому, магнитное поле может существовать при отсутствии электрического поля, и наоборот. Вот именно в этом пункте Максвелл и вступил в вопиющее противоречие с ньютоновской механикой. Видимо, это был первый тревожный сигнал, когда реальные факты указывали на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Однако никто, кроме Максвелла, не услышал этого сигнала. Вторично он прозвучал в 1918 г., когда Э. Нетер показала, что баланс сил вытекает из однородности пространства, а баланс моментов следует из изотропности пространства. Теорема Э. Нетер обратима. Поэтому, если допустить, что баланс моментов есть следствие баланса сил, то сразу приходим к абсурдному выводу, что изотропия пространства (системы отсчета) есть следствие его однородности.

Механика Эйлера получила свое развитие только в XX в., главным образом, в последние 40 лет. В настоящее время она обрела вполне оформившуюся структуру в механике сплошных сред. Однако попыток объединения механики и электродинамики в рамках механики Эйлера до сих пор не предпринято.

Какие же черты механики Эйлера позволяют надеяться, что разрыв между механикой и электродинамикой может быть устранен? Прежде всего, это модель “элементарной” частицы, которая в механике Эйлера аналогична абсолютно твердому телу в том смысле, что ее кинетическая энергия является квадратичной формой линейной и угловой скоростей частицы. Коэффициенты этой квадратичной формы называются тензорами инерции, а “размерность” частицы равна 10. В зависимости от строения энергии частицы различаются по сортам. У нейтральных частиц отсутствует перекрестный член в энергии: эти частицы вполне аналогичны абсолютно твердому телу в макромеханике, а трансляционные и вращательные движения у них как бы не взаимодействуют между собой. У “положительных” и “отрицательных” частиц присутствует перекрестный член в энергии, причем один сорт частиц отличается от другого строением перекрестного члена, т. е. у обсуждаемых частиц взаимодействие трансляционных и вращательных движений неустра-

нимо. Прямой аналогии этих частиц с абсолютно твердым телом в макро-механике не существует, а композиция “положительных” и “отрицательных” частиц приводит к нейтральной частице. Любопытно, что если эти частицы действительно можно отождествить с заряженными частицами, то ни электрон, ни протон нельзя представить себе в виде маленьких шариков. Более того, их вообще нельзя вообразить в виде обычного маленького твердого тела. Имеется еще одна особенность, отличающая “электрон” от маленького абсолютно твердого тела: очень похоже на то, что не существует инерциальной системы отсчета, в которой траектория “центра масс” движущегося по инерции “электрона” была бы прямолинейной. Впрочем, без формул все это объяснить довольно трудно. Специфична в механике Эйлера аксиоматика для воздействий, но во многих отношениях она даже проще, чем в ньютоновской механике. Если для силовых и моментных воздействий ввести потенциалы, то они очень похожи на потенциалы в электродинамике, и наличие производных по времени в уравнениях Максвелла существенно связано с наличием перекрестного члена в кинетической энергии частиц. К сожалению, в данный момент невозможно утверждать, что в рамках механики Эйлера разрыв между механикой и электродинамикой действительно может быть устранен. Вопросов пока больше, чем ответов на них. Зато совершенно ясна необходимость решения следующей дилеммы.

Либо механика сумеет включить в свои структуры электродинамику, и тогда она подтвердит свое право считаться фундаментальной наукой, либо механика должна признать свою принципиальную ограниченность и согласиться с ролью важной прикладной науки. Правда, в последнем случае должна быть построена какая-то другая наука, которая могла бы заменить механику и каковой пока что не просматривается.

Глава 2

Основные положения эйлеровой механики¹

Введение

В данной главе рассматриваются современные трактовки основных понятий механики. Эти трактовки по форме, а иногда и по существу, отличаются от приводимых в учебниках механики. Хотя вводить какие бы то ни было модификации в устоявшиеся каноны крайне нежелательно, тем не менее в любой развивающейся науке наступает момент, когда модификации необходимы. Важно только, чтобы эти модификации не вступали в противоречие с уже доказанными положениями и не отрицали ничего из достигнутого ранее. В частности, эйлерова механика включает в себя все достижения ньютоновской механики и добавляет к ней важные новые возможности, расширяющие сферу приложения механики.

2.1. Пространство, время, движения

2.1.1. Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [44]. Ос-

¹ Материал этой главы основан на трех статьях П. А. Жилина [41–43]: “Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики” (Труды XXII летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — СПб., 1995. — С. 10–36), “Основные положения эйлеровой механики” (Труды XXIX летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2002. — С. 641–675), “Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла” (Труды СПбГТУ. — СПб., 1994. — N 448. — С. 3–38). Более подробное изложение эйлеровой механики можно найти в книге [2]. (*Примеч. ред.*)

новным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток пространстве невозможно обнаружить движение, равно как и невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O , и тремя некопланарными “векторами” $\mathbf{e}_k$, т. е. тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. “Векторы” $\mathbf{e}_k$ нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются, но существование “векторов” $\mathbf{e}_k$ позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно “векторов” $\mathbf{e}_k$ определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$, ($k = 1, 2, 3$), где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty. \quad (2.1)$$

Будем считать, что вектор $\mathbf{r}$, отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k , определяет точку, фиксированную относительно репера $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение “векторов” $\mathbf{e}_k$

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m| |\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \quad (2.2)$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, т. е. имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n). \quad (2.3)$$

Числа x_A^k называются координатами точки A . Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

Определение. Репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (2.1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны.

Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t , называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами.

Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И. Ньютон писал [45], с. 45: «Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время” ... под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время». Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак не на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX в. в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л. Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы называли временем” [46], с. 8.

Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П. Боль среди таковых проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [47], с. 198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д. Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900) при формулировке им шестой проблемы.

Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А. Пуанкаре (см., например, [48, 49]). Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажают-

ся. Если говорить о времени, то согласно А. Пуанкаре главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т. е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т. е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

Определение. *Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.*

Можно ввести сколько угодно систем отсчета, и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т. е. ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ и ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное ранее, определено с точностью до преобразования $t \rightarrow \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Согласно сказанному введенные ранее системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.1.2. Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета

Ранее было введено множество тел отсчета, и пока что они все равноправны. Дальнейшее продвижение возможно только при принятии какого-

либо принципа, роль которого играет принцип инерции Галилея, являющийся фундаментом всей физики.

Аксиома А1. Принцип инерции Галилея. *Всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Принцип инерции Галилея, конечно, нельзя считать аксиомой в общепринятом смысле этого термина. Действительно, в нем фигурируют такие понятия, как “абсолютное пространство”, “прямолинейность”, “равномерность”. Ни одно из этих понятий не определено и не может быть определено без введения того, что далее называется инерциальной системой отсчета. Поэтому принцип инерции Галилея — это голая идея, не поддающаяся экспериментальной проверке, но на этой идее держится вся физика. Нам не дано знать, что такое абсолютное пространство, но аксиома А1 определяет основные свойства абсолютного пространства и позволяет из всего множества тел отсчета отобрать те, которые обладают постулированными в А1 свойствами.

Представим себе, что мы располагаем изолированной частицей, которая при движении оставляет след наподобие следа реактивного самолета. Этот след называется траекторией частицы. Пронаблюдаем движение частицы относительно всех мыслимых тел отсчета. Относительно одних тел отсчета траектория будет просто точкой, относительно других — прямой линией, наконец, относительно третьих траектория будет криволинейной. Эти последние тела исключим из числа претендентов на роль абсолютного пространства. Запустим теперь вторую пробную частицу (первая уже улетела в бесконечность) так, чтобы хотя бы относительно одного тела отсчета, в котором траектория первой частицы была прямолинейной, траектория второй изолированной частицы была бы прямолинейной и непараллельной траектории первой частицы. Снова пронаблюдаем траектории частицы и вновь исключим из рассмотрения тела отсчета, относительно которых траектория второй частицы криволинейна. У нас остались тела отсчета двух типов: первый тип включает в себя тела отсчета, относительно которых траектории обеих частиц прямолинейны; второй тип — тела отсчета, относительно которых траектория первой частицы была точкой, а траектория второй — прямая линия, или наоборот. Для тел отсчета второго типа необходимо провести третье испытание, а именно: возьмем одно из таких тел отсчета и проведем в нем плоскость, проходящую через траекторию-точку и содержащую прямолинейную траекторию. Запустим третью частицу так, чтобы ее траектория не лежала в упомянутой плоскости. Исключим из рассмотрения все тела отсчета, в которых траектория третьей частицы криволинейна. Легко понять, что дальнейшие испыта-

ния не нужны: любая изолированная частица относительно отобранных тел отсчета будет иметь прямолинейную траекторию или траекторию-точку.

Определение. Тела отсчета, относительно которых траектория любой изолированной точки (одинокой во всем мире) частицы прямолинейна или является точкой, называются **инерциальными телами отсчета**.

В определении речь идет о траекториях, т. е. о понятиях, не оперирующих с понятием времени. Таким образом, инерциальные тела отсчета образуют трехмерный континуум тел отсчета, обладающих замечательным свойством: траектории всех точек одного инерциального тела отсчета относительно другого инерциального тела отсчета суть параллельные прямые. Множество инерциальных тел отсчета образует класс эквивалентности, отношение эквивалентности в котором устанавливается принципом инерции Галилея.

Определение. Множество инерциальных тел отсчета называется **абсолютным пространством**.

Не следует удивляться тому, что абсолютное пространство представлено не одним каким-то телом отсчета, а классом эквивалентности. Это достаточно стандартная ситуация в математике. Например, вектор — это не какой-то единичный объект, а класс эквивалентности, состоящий из множества направленных отрезков, имеющих одинаковые длины и одинаковые направления.

2.1.3. Время

Обратимся к понятию времени, самому сложному понятию в науках о Природе. О реальном времени² мы не можем сказать ничего определенного, неизвестна даже его размерность. В пользу далеко не очевидной трехмерности пространства имеется немало весьма серьезных аргументов. В пользу самоочевидной на первый взгляд одномерности времени нет не только серьезных, но и вообще никаких аргументов. А самоочевидность слишком часто подводила людей. Поэтому в механике реальное время не обсуждается, а вводится в рассмотрение *математическое время* или просто *время*.

Аксиома А2. *Время является непрерывно меняющейся величиной, пробегающей одномерное неограниченное множество (числовую ось); оно направлено (ориентировано) и течет от прошлого к будущему.*

Аксиома А3. *Математическое время существует само по себе и не зависит ни от каких внешних обстоятельств. В частности, оно не зависит от движения и от выбора инерциального тела отсчета (И. Ньютон).*

² О реальном времени см. подразделы 7.3.2 и 7.3.3. (Примеч. ред.)

Для измерения времени применяются часы, т. е. приборы, в основе действия которых лежит какой-либо периодический процесс. Необходимо, однако, иметь гарантию, что этот процесс действительно периодический. Например, мы должны быть уверены в том, что длительности всех минут по обычным часам действительно одинаковы. Единственным гарантом здесь выступает принцип инерции Галилея, утверждающий, что движение изолированной частицы относительно инерциального тела отсчета является (или, лучше сказать, *называется*) равномерным. Это и дает способ тарировки часов.

Определение. *Часы считаются оттарированными в соответствии с принципом Галилея, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в каком-либо (любом) инерциальном теле отсчета.*

Существует мнение, что аксиома АЗ подразумевает существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью. Но такое мнение ни на чем не основано. Да, аксиоматикой классической механики *не отрицаются* сигналы с бесконечной скоростью, но такие сигналы *не навязываются* аксиоматикой, в том числе и аксиоматикой для воздействий. Чтобы оттарировать часы в соответствии с принципом инерции Галилея, достаточно разместить их на изолированной частице и отмечать моменты прохождения одинаковых расстояний в инерциальном теле отсчета. На уровне идей это вполне достижимая вещь, а всякая наука строится на уровне идей. Реальность, разумеется, отличается от наших построений и, видимо, никогда не будет уложена в “прокрустово ложе” какой-либо науки будущего.

Чтобы сделать процесс тарировки единообразным во всех инерциальных телах отсчета, можно предложить мысленный эксперимент, в основе которого лежит допущение о равноправности всех инерциальных тел отсчета. Это допущение в немного расширенной версии будет сформулировано в виде отдельного утверждения, известного под названием принципа относительности Галилея. Представим себе, что в каждом теле отсчета неподвижно (относительно данного тела отсчета) закреплен некий прибор, способный испускать, например, фотоны или какие-либо другие частицы. Все эти приборы (или один прибор, последовательно устанавливаемый во всех телах отсчета) считаются идентичными. Далее, в момент времени $t = 0$, фиксируемый по каким-то, не обязательно оттарированным, часам, прибор испускает фотон. Измеряется расстояние $r(t)$, пролетаемое к моменту времени t , и вводится абсолютное время $t_a = r(t)/c$, где c — постоянная, имеющая размерность скорости и одинаковая во всех телах отсчета. Введенное определение абсолютного времени можно обратить и получится универсальная тарировка ча-

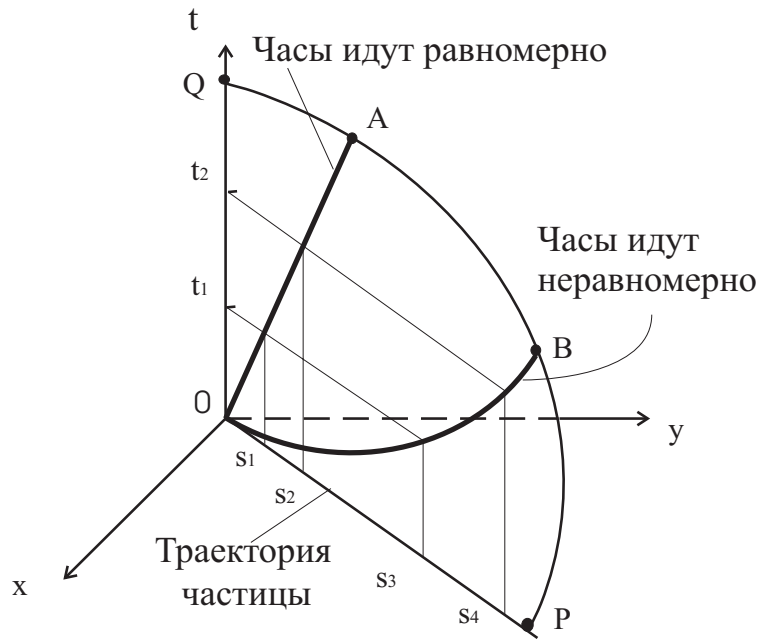


Рис. 2.1. Тарировка часов по Галилею

сов $t = f(ct_a)$. Далее будет использоваться именно абсолютное время t_a , которое будет обозначаться буквой t .

Следует отчетливо понимать, что принятыми аксиомами математическое время введено достаточно жестко. Для того чтобы прояснить это обстоятельство, рассмотрим двумерный мир, наделенный математическим временем (рис. 2.1).

Плоскость xOy — это двумерное пространство. Прямая OP в плоскости xOy — прямолинейная траектория частицы. Ось Ot — ось времени. Плоскость tOP — плоскость, в которой лежит мировая линия частицы, т. е. множество точек, которое пробежала частица в трехмерном пространстве: два пространственных измерения и одно временное измерение. Кривая xOB , лежащая в плоскости tOP , есть одна из возможных мировых линий, проекция которой на пространственную плоскость есть траектория-прямая частицы в двумерном пространстве. Уравнение этой прямой имеет вид

$$x = f(t)a, \quad y = f(t)b, \quad y = bx/a. \quad (2.4)$$

Функция $f(t)$ при этом может быть достаточно произвольной. Принцип инерции Галилея требует, чтобы за одинаковые интервалы времени $t_1 - 0 = t_2 - t_1$ пролетались бы одинаковые расстояния $s_3 - 0 = s_4 - s_3$. Если OB — кривая, то это условие не выполнено. Другая возможная мировая линия — это прямая OA . Здесь, очевидно, требование принципа инерции вы-

полнено

$$t_1 - 0 = t_2 - t_1 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 - 0 = s_2 - s_1.$$

Однако прямых типа ОА можно провести сколько угодно и не обязательно из начала координат. Поэтому математическое время принципом инерции Галилея вводится с точностью до линейного преобразования

$$t \rightarrow kt + t_0, \quad (2.5)$$

где t_0 определяет выбор начала отсчета времени, а k — выбор единицы измерения времени (масштабный множитель).

Именно этот ограниченный произвол в выборе математического времени мы и имели в виду, говоря о жестко введенном времени.

2.1.4. Инерциальные системы отсчета

Определение. Инерциальное тело отсчета, снабженное часами, отта-
рированными в соответствии с принципом инерции Галилея, называется
инерциальной системой отсчета.

Инерциальных систем отсчета бесконечно много, и все они равноправны, что и фиксируется принципом относительности Галилея.

Аксиома А4. Принцип относительности Галилея. Все инерци-
альные системы отсчета равноправны, т. е. не существует физических
экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из них.

Понятно, что сам по себе принцип относительности не участвует ни в каких построениях. Поэтому называть его аксиомой можно только условно. Принцип относительности просто фиксирует достаточность принципа инерции Галилея. Никакой существенной пользы из принципа относительности Галилея извлечь невозможно, поскольку любая теория, построенная на основе фундаментальных законов механики, будет автоматически удовлетворять этому принципу.

Определение. Абсолютное пространство, снабженное абсолютным
временем, есть класс эквивалентности на множестве всех мыслимых
систем отсчета, причем отношение эквивалентности устанавливается
принципом инерции Галилея.

Приведем цитату из книги К. Трусделла [25]: “Система отсчета — это чистый холст, на котором можно рисовать картины природы. Этот холст может быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”.

Замечание. Для многих книг по физике и механике характерно использование понятия “аксиома” в нетрадиционном для математики смысле. Иногда забывается, что не всякое, даже правильное, утверждение может быть принято в качестве аксиомы, ибо, став аксиомой, это утверждение может превратиться в свою противоположность. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую аксиому.

Аксиома АХ. *Скорость света, испускаемого одним источником, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Часто думают, что этой аксиомой постулируется одинаковость скорости света во всех введенных ранее инерциальных системах отсчета. Однако это не так. Главная особенность любой аксиомы состоит в том, что ей нельзя навязывать какое-либо мнение, аксиома на все смотрит со своей точки зрения. Поясним на примере. Допустим, имеется сад, в котором растут грушевые и яблоневые деревья. Примем аксиому: “На всех деревьях в саду растут груши”. Понятно, что груши не начнут в силу этой аксиомы расти на яблонях. Просто с точки зрения этой аксиомы яблони перестанут считаться деревьями. Точно так же обстоит дело и с аксиомой АХ. Приняв эту аксиому, необходимо на ранее введенном множестве систем отсчета провести новые испытания и отобрать те из них, которые являются инерциальными с точки зрения аксиомы АХ. Если мы, допустим, знаем утверждение АХ как экспериментально установленный факт, то необходимо построить теорию с помощью каких-то других аксиом так, чтобы утверждение АХ являлось их следствием. Если же утверждение АХ формулировать как аксиому, то это будет просто сужение класса инерциальных систем отсчета до множества инерциальных тел отсчета, имеющих одну точку, в которой расположен источник света. Ведь аксиома А1 продолжает действовать.

2.1.5. Системы отсчета и системы координат

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение. *Система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.*

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \quad \Rightarrow \quad x' = x'(y', t). \quad (2.6)$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат

можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \quad \Rightarrow \quad y^m = y^m(y', t), \quad (2.7)$$

где как бы забыто о существовании формул (2.6). Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (2.7), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Принцип объективности. *Все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т. д.) зависят от выбора системы отсчета. Поэтому недопустимо смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются в подразделе 7.1.2, где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.1.6. Трансляционные и спинорные движения

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т. д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые далее спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия.

Чтобы определить спин-вектор, необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\mathbf{a}_*$ сопоставляется “обычный” вектор $\mathbf{a}$:

1) $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\mathbf{a}_*$;

2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\mathbf{a}_*$;

3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую, и наоборот.

Таким образом в ориентированной системе отсчета действует два типа векторов (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными³.

Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = +1. \quad (2.8)$$

Тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ далее будет называться тензором поворота. Более подробную информацию о тензоре поворота можно найти в Приложении С. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от $\mathbf{E}$, однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

где единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{t})$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, т. е. $\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{t}) = \mathbf{m}(\mathbf{t})$, а угол $\theta = \theta(\mathbf{t})$ называется углом поворота.

Вектор $\boldsymbol{\theta} = \theta(\mathbf{t})\mathbf{m}(\mathbf{t})$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

где тензор $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T$ называется логарифмическим тензором поворота. Представление (2.10) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$ (левый тензор спина) и $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}}$ (правый тензор спина). Оба тензора спина антисимметричны и имеют сопутствующие векторы $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$ и $\mathbf{S}_r = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями,

³ Подробнее о спин-векторах и аксиальных векторах см. раздел 4.2. (Примеч. ред.)

соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.11)$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее о тензоре поворота⁴ и его представлениях можно ознакомиться по книгам [2, 50].

2.2. Тела и их динамические структуры

2.2.1. Тела-точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику, так как материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела-точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела-точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела-точки находятся по формулам

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_{\times}, \quad ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (2.12)$$

Аксиома Т1. *Кинетическая энергия тела-точки есть квадратичная форма его скоростей*

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.13)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела-точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота.

Представление (2.13) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела-точки. Тогда

⁴ Подробнее о тензоре поворота и связанных с ним понятиях см. Приложение С. (*Примеч. ред.*)

(2.13) принимает вид $2K = \mathbf{m} \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{V}$. Положим здесь $\mathbf{V} = V \mathbf{n}$ и получим $2K = \mathbf{m} V^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что система отсчета изотропна, т. е. телу-точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только в том случае, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{m}$, $\forall \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Это равенство в свою очередь выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_* = \alpha \mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, так как у нас уже выделен скалярный множитель $\mathbf{m}$. К сожалению, это рассуждение неправильно, и равенство $\mathbf{A}_* = \alpha \mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать.

Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (2.14)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т. е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулы (2.14) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности.

С учетом приведенных выше рассуждений и (2.14) получаем, что тензор инерции $\mathbf{A}$ равен единичному, а представление (2.13) принимает вид

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.15)$$

где скалярный множитель $\mathbf{m}$ называется массой тела-точки.

Представление (2.15) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. В самом деле, допустим, например, что тело-точка — это электрон. Тогда все наши рассуждения теряют силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (2.15) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (2.13), где множитель $\mathbf{m}$ лучше не выделять. При использовании (2.13) массой тела-точки удобнее называть величину $1/3 \operatorname{tr}(\mathbf{mA})$.

В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (2.14). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (2.13) положительной определенности. Однако,

по-видимому, можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} K dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}: \quad |\mathbf{V}| \neq 0, \quad |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \quad (2.16)$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (2.13), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение. Число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела-точки и не зависящих от движения тела-точки, называется размерностью тела-точки.

Размерность материальной точки равна единице: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы с кинетической энергией (2.13) равна 12, а тела-точки с кинетической энергией (2.15) — 10.

Определение. Количеством движения $\mathbf{K}_1$ тела-точки называется линейная форма скоростей

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{V}} = m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (2.17)$$

Определение. Кинетическим моментом $\mathbf{K}_2^Q$ тела-точки, вычисленным относительно опорной точки Q , зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q &= (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \\ &= m [(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь первое слагаемое называется моментом количества движения тела-точки, а второе слагаемое, т. е. величина $m (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела-точки.

В заключение приведем пример воображаемого тела-точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + q \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{m}$ — масса тела-точки; $\mathbf{J}$ — момент инерции; $\mathbf{q}$ — новый параметр, который не встречается в телах-точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр $\mathbf{q}$ определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело-точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и так далее, то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной функцией своих аргументов.

Положительная определенность формы (2.19) обеспечивается условиями

$$\mathbf{m} > 0, \quad \mathbf{m} \mathbf{J} - \mathbf{q}^2 > 0.$$

Количество движения и кинетический момент тела-точки (2.19) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{m} \mathbf{V} + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (\mathbf{m} \mathbf{V} + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{q} \mathbf{V} + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.20)$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забежав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \mathbf{V} + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{m} \mathbf{V}_0 + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a \mathbf{e}, \\ \mathbf{R} \times \mathbf{a} + \mathbf{q} \mathbf{V} + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{q} \mathbf{V}_0 + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(\mathbf{J} - \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{m}} \right) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{\mathbf{q}a}{\mathbf{m}} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (2.22)$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t) \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (2.23)$$

Подставляя это выражение в (2.22) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mathbf{q}a}{\mathbf{q}^2 - \mathbf{m} \mathbf{J}} \equiv \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha t. \quad (2.24)$$

Интегрируя уравнения (2.21), нетрудно найти все искомые характеристики движения

$$m \mathbf{R}(t) = (\mathbf{a} - q \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}) t \mathbf{e} + q \alpha^{-1} \mathbf{e} \times \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}]. \quad (2.25)$$

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{a} = q \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m \mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{a} \mathbf{e} - q \boldsymbol{\omega}_0). \quad (2.26)$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т. е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела-точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота $\mathbf{Q}$, а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела-точки.

2.2.2. Закрытые и открытые тела. Динамические структуры тел

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами-точками только одного типа,

как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела-точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела-точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела-точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела-точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел-точек мы получили n первичных тел-точек. Причины того, почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек, будут рассмотрены при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать раздельно.

Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее в данной главе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена ранее. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова S_t , которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на S_t нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение. Множество $\mathcal{M}_A$ тел-точек, находящихся внутри S_t , называется телом A , а множество $\mathcal{M}_A^e$ тел-точек, находящихся вне S_t , называется окружением тела A и обозначается A^e .

Объемом тела A называется объем, заключенный внутри S_t , поэтому объем тела A не является физической (объективной) характеристикой тела A .

Определение. Тело A называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением; в противном случае тело A называется открытым.

Аксиома Т2. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела A аддитивны по телам-точкам, составляющим тело A .

Пусть все характеристики i -го тела-точки снабжаются индексом i . Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} m_i K_i, \quad (2.27)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i,$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{V}_i} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (2.28)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{V}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = \\ &= (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение. Совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом $\mathcal{A}$, если выполняются следующие два условия.

Первое: для любых пар точек $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_m$, принадлежащих телу $\mathcal{A}$, и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|. \quad (2.30)$$

Второе: тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \quad (2.31)$$

причем $\mathbf{P}(t)$ называется тензором поворота тела $\mathcal{A}$.

Из (2.30) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i(t) &= \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{R}_i(t_0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(t_0), \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом, зафиксированным в теле $\mathcal{A}$. Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i(t),$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ в виде

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= m \dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$; $\mathbf{B}_X$ и $\mathbf{C}_X$ — тензоры инерции тела $\mathcal{A}$, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_X &= m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} = \mathbf{P}(t) \cdot [m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{P}^T(t), \\ \mathbf{C}_X &= \mathbf{P}(t) \cdot \left\{ \sum_i m_i \left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \otimes (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \right] \right\} \cdot \mathbf{P}^T(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

В (2.33), (2.34) через m обозначена масса тела $\mathcal{A}$, через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела $\mathcal{A}$,

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор $\mathbf{C}$ называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К. Трусделл и Р. Тупин [22] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но предположим, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (2.13), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т. е. вернуться к языку, которым пользовался Л. Эйлер.

2.3. Воздействия

2.3.1. Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л. Эйлера [51]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, распространяя его на тела общего вида.

Основная аксиома механики. *В инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело $\mathcal{A}$ движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1. *В инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела $\mathcal{A}$ обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.*

Аксиома F2. *В инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q , обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.*

При этом момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad (2.35)$$

где $\mathbf{R}_Q$ определяет положение опорной точки Q ; вектор $\mathbf{R}_P$ определяет произвольно выбираемую точку $\mathcal{B}$, называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P , но не зависит от выбора опорной точки Q . Полный момент

$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на изменение положения тела $\mathcal{A}$;
 б) момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на повороты тела $\mathcal{A}$ вокруг точки приведения P .

Для того чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$; 2) мысленно “заморозить” тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое; 3) мысленно придавать всем точкам $\mathcal{A}$ всевозможные бесконечно малые смещения $\xi \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным смещениям тела $\mathcal{A}$, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление $\mathbf{e}_*$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует смещению тела $\mathcal{A}$ в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_*$ равна нулю.

Для того чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$; 2) мысленно “заморозить” тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела $\mathcal{A}$, т. е. тело $\mathcal{A}$ и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P ; 4) мысленно поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi \mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным поворотам тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на $\mathbf{e}_{**}$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_{**}$ равна нулю.

Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (2.36)$$

Определение. Пара векторов $\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$ называется воздействием тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.

Определение. Воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения

$\mathbf{R}_P(\mathbf{t})$, что при любых движениях тела $\mathcal{A}$ воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ определяется заданием пары векторов

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); (\mathbf{R}_P(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}, \quad (\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}), \quad (2.37)$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела $\mathcal{A}$. Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Указанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение. Воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$, так и по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

Аксиома F3. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отдельным телам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, составляющим тело $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (2.38)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (2.39)$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (2.39). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ может производиться независимо.

Аксиома F4. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отдельным телам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, составляющим тело $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (2.40)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (2.41)$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно указанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

2.3.2. Статика абсолютно твердого тела

В качестве простой иллюстрации применения понятий сил и моментов сформулируем необходимые условия равновесия абсолютно твердого тела.

Утверждение. *Если абсолютно твердое тело $\mathcal{A}$ находится в покое (в равновесии), то внешние сила и момент, действующие на него, равны нулю, т. е.*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) &= (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

При выполнении этих условий абсолютно твердое тело может совершать движение, сохраняющее его количество движения и кинетический момент. Чтобы исключить эти движения, необходимо принять дополнительное требование об отсутствии движения тела в какой-либо момент времени. При практическом использовании условий равновесия целесообразно применять аксиомы аддитивности.

Пример. *Дано абсолютно твердое тело $\mathcal{A}$, к точкам $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ которого прикреплены тонкие нити, передающие силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$; выяснить, при каких ограничениях на силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$ тело $\mathcal{A}$ находится в равновесии.*

Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их крепления к телу $\mathcal{A}$. Таким образом, имеем $\mathcal{A}^e = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Аксиома F1 требует,

чтобы сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \quad (2.44)$$

где Q есть выбранная опорная точка. Для простоты совместим ее с началом в системе отсчета. В таком случае будем опускать символ опорной точки в обозначениях. При вычислении момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо сначала выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P , не совпадающую с точкой закрепления нити B , то собственный момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг точки P , то нить $\mathcal{B}$ будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нуля. Если в качестве точки приведения выбрать точку B , то собственно момент $\mathbf{L}^B(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^O(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (2.45)$$

Внешне это выражение не совпадает с (2.35), но оно легко преобразуется к виду (2.35). При этом нетрудно убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ равнялся нулю. Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения $\mathcal{A}^e$ на тело $\mathcal{A}$ не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (2.43)–(2.45), получаем

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C, \quad \mathbf{F}_B = \lambda(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B), \quad (2.46)$$

где величина λ остается произвольной. Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно.

2.4. Полная и внутренняя энергия

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г. В. Лейбницем, далеко не сразу утвердилось

в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т. е. не было самостоятельной структурой.

В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839 г. Дж. Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало не зависимым от законов движения постулатом.

Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г. Гельмгольца [52] и А. Пуанкаре [48]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. В данном случае наша цель не прояснить концепцию энергии, а подчеркнуть роль энергии как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела $\mathcal{A}$ есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Само существование тел в виде нераспадающихся объектов указывает на присутствие им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела $\mathcal{A}$ представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \quad (2.47)$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела $\mathcal{A}$ и требует определения. Если внутренняя энергия определена, то и полная энергия тела определена.

Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела $\mathcal{A}$ сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$, а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от взаимных положений тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$. Во многих случаях подобное разделение оказывается приемлемым и не приводит ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому совершенно неприемлемо в фундаментальном плане.

Качественное различие понятий кинетической и внутренней энергии со-

стоит в следующем. Кинетическая энергия — это та часть полной энергии, которая зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы “вморожена” в тело и перемещается вместе с ним. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о любых системах отсчета, т. е. инерциальность системы отсчета не подразумевается.

Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать об абсолютно твердом теле. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример. Допустим, тело $\mathcal{A}$ состоит из $2n$ атомов водорода и n атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. С другой стороны, известно, что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). Поэтому тело $\mathcal{A}$ можно рассматривать как состоящее из n тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела $\mathcal{A}$ есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела $\mathcal{A}$ в обоих случаях должны совпадать, хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела $\mathcal{A}$ в этих двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного характера. Отсюда и многочисленные проблемы, связанные с принятием формальных определений для энергии.

Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома Е1. *Внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ зависит только от конфигурации тела $\mathcal{A}$, т. е. только от векторов положения $\mathbf{R}_i$ и тензоров*

поворота $\mathbf{P}_i$ тел-точек $\mathcal{A}_i$, составляющих тело $\mathcal{A}$

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \dots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N). \quad (2.48)$$

Аксиома Е2. Внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$,

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k), \quad \varphi_{i,i}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0. \quad (2.49)$$

Эта аксиома часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (2.48). Не доказано, но по всей видимости аксиома (2.49) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий. Следует обратить внимание на тот факт, что внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, в отличие от его кинетической энергии, не аддитивна по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

Аксиома Е3а. Внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ является индифферентным скаляром, т. е. она не зависит от выбора системы отсчета⁵.

Аксиома Е3б. Внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ не изменится, если на движение тела $\mathcal{A}$ наложить дополнительное движение тела $\mathcal{A}$, как жесткого целого.

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом Е1, Е2, Е3а, Е3б являются утверждения:

а) внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|); \quad (2.50)$$

б) внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек общего вида, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k). \quad (2.51)$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (2.51), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\varphi_{i,k}$ в (2.50) приведем такую

$$\varphi(r) = \varphi_0 e^{-r_0/r} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^m - \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \right], \quad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|, \quad (2.52)$$

⁵ О замене системы отсчета см. подраздел 7.1.2. (Примеч. ред.)

где φ_0 , r_0 , r_1 , m , n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (2.52) переходит в потенциал Леннарда–Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (2.52) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда–Джонса. На первый взгляд потенциал типа (2.52) кажется странным, так как он допускает “слипание” тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев является необходимым. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, так как они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений.

В заключение примем следующее.

Определение. Мощностью внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек $\mathcal{A}_i$, называется билинейная форма скоростей и воздействий

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_i]. \quad (2.53)$$

Обратим внимание, что в выражение (2.53) включены силы и моменты, действующие на тело-точку со стороны окружения всего тела $\mathcal{A}$, а не со стороны $\mathcal{A}_i^e$, т. е. окружение i -го тела-точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбрана точка, заданная вектором положения $\mathbf{R}_i$ тела-точки $\mathcal{A}_i$, причем напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q .

2.5. Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают два закона динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения и уравнение баланса кинетического момента) и два начала термодинамики, к которым относятся уравнение баланса энергии и второе начало термодинамики⁶, не имеющее

⁶ Здесь говорится об общепринятой точке зрения на второй закон термодинамики. П. А. Жилин придерживался этой точки зрения в ранний период своей научной деятельности (работы 1965–1980 гг.). В более поздних работах П. А. Жилин в той или иной форме высказывает сомнения относительно фундаментальности второго закона термодинамики, и, наконец, в работе [6] 2005 г., посвященной общей теории стержней, он полностью отказывается от использования второго закона термодинамики в каких-либо формальных построениях и получает соотношения Коши–Грина с помощью принципиально нового метода. (Примеч. ред.)

другого общепринятого наименования. Все эти законы суть некие логические утверждения, которые не вытекают из опыта и потому не могут быть опровергнуты опытным путем. Иными словами, фундаментальные законы отнюдь не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы суть метод изучения Природы. При дальнейшем развитии механики существующие формулировки фундаментальных законов могут измениться, но не потому что неправильны, а потому что могут быть найдены их более эффективные выражения. Можно утверждать, что фундаментальные законы механики действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

2.5.1. Уравнение баланса количества движения

Формулировка первого закона динамики Эйлера. *Скорость изменения количества движения тела $\mathcal{A}$ равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$ в тело $\mathcal{A}$*

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}). \quad (2.54)$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (2.54) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (2.54) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 г. Из (2.54) и аддитивности по телам количества движения и сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Обратим внимание, что это равенство ничего не говорит о направлении силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Уравнение И. В. Мещерского есть просто запись уравнения (2.54).

Замечание. В физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (2.54). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровой механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (2.54) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден. Поэтому ограничимся двумя простыми примерами.

Пример. Погрузка движущейся тележки. Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никаких сил не действует. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна и трение в подшипниках колес отсутствует⁷. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \quad (2.55)$$

где $dm(t)/dt$ есть скорость подвода массы, а $\mathbf{u}(t)$ есть абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке.

Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (2.55) будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \quad (2.56)$$

где ρ_1, ρ_2 суть скорости подвода массы песка первого и второго сортов, соответственно, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ суть скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке.

Движение тележки существенно зависит от подводимого к ней количества движения. Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором случае будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

Пример. Задача Кэйли. Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке (см. с. 114 учебника [53]). В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи, соответственно. В качестве тела $\mathcal{A}$ выбираем свисающую часть цепи, а

⁷ На тележку не действует никаких сил в направлении движения. Сила тяжести и сила реакции опоры действуют в перпендикулярном направлении и на характер движения не влияют. Поэтому, если задача состоит только в определении движения, а реакция опоры не представляет интереса, эти силы можно не учитывать. (*Примеч. ред.*)

через x обозначим ее длину. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \quad (2.57)$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи.

Отметим, что в уравнении, используемом Кэйли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (2.57) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе,

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (2.58)$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (2.57), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т. е. примем следующие начальные условия:

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6} g t^2. \quad (2.59)$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [53]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (2.59), но любители парадоксов идут дальше. Выясним, сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т. е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho g L^2, \quad K_1 = \frac{1}{3} \rho g L^2 \Rightarrow P_1 + K_1 = \frac{5}{6} \rho g L^2 \neq P_0 = \rho g L^2. \quad (2.60)$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2/6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости $\dot{x}$, т. е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее тривиален вопрос о правильной записи

уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через $\mathcal{U}$ обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т. е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (2.61)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.61) для решения (2.59) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta. \quad (2.62)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (2.63)$$

где использовано решение (2.59). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “немеханического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее мы говорим, что энергия (2.63) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным ранее примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие

проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

2.5.2. Уравнение баланса кинетического момента

Формулировка второго закона динамики Эйлера. *Скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту $M^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ в тело $\mathcal{A}$*

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = M^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}). \quad (2.64)$$

Этот закон для закрытых тел ($\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$) впервые был открыт Л. Эйлером в 1776 г. и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 г. при формулировке уравнений динамики твердого тела. Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера, как фундаментальный постулат механики, не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как считал Лагранж, разумеется, нельзя⁸.

Если два закона динамики Эйлера применить к системе материальных точек, то они позволяют доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными, т. е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновской механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует. Экспериментально доказано, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Это означает, что ионы, в общем случае, нельзя моделировать материальными точками. В качестве иллюстрации использования второго закона динамики рассмотрим простые примеры.

Пример. Движение абсолютно твердого тела в центральном поле тяготения. Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело с массой M . Пусть в поле тяготения этого тела движется

⁸ Ранее (см. разд. 1.9) П. А. Жилин отмечает: "... Э. Нетер показала, что баланс сил вытекает из однородности пространства, а баланс моментов следует из изотропности пространства. Теорема Э. Нетер обратима. Поэтому, если допустить, что баланс моментов есть следствие баланса сил, то сразу приходим к абсурдному выводу, что изотропия пространства (системы отсчета) есть следствие его однородности". (Примеч. ред.)

абсолютно твердое тело $\mathcal{A}$ с массой m . Центральный тензор инерции тела $\mathcal{A}$ считается трансверсально изотропным и в отсчетном положении имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (2.65)$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный центральные моменты инерции тела $\mathcal{A}$, соответственно. Количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \quad (2.66)$$

где $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ суть вектор положения центра масс тела $\mathcal{A}$ и тензор поворота тела $\mathcal{A}$, соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ есть угловая скорость тела $\mathcal{A}$, которая связана с тензором поворота тела $\mathcal{A}$ уравнением Пуассона (2.11). В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела $\mathcal{A}$.

Уравнение баланса количества движения записывается так⁹

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R}, \quad (2.67)$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная. Уравнение (2.67) имеет один скалярный и один векторный интеграл движения. Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (2.67) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} - G \frac{mM}{R} = \mathcal{E}_T = \text{const}, \quad (2.68)$$

где $\mathcal{E}_T$ будем называть энергией трансляционного движения тела $\mathcal{A}$. Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (2.67) на вектор $\mathbf{R}$ и имеет вид

$$\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.69)$$

Согласно последнему равенству траектория центра масс тела $\mathcal{A}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{H}$ и называемой плоскостью эклиптики.

⁹ Предполагается, что размеры тела много меньше расстояния до точечной массы. В этом случае выражение в правой части уравнения (2.67) представляет собой асимптотически главный член действующей на тело гравитационной силы. Точным это выражение является только в случае сферически симметричного распределения массы в твердом теле. (Примеч. ред.)

Решение задачи (2.67)–(2.69) может быть найдено во всех учебниках механики и здесь не приводится.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}(t) \times m \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \right) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (2.69) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела $\mathcal{A}$. Этот интеграл дается выражением

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} = \text{const.} \quad (2.70)$$

Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спинорные движения. Но, к сожалению, в настоящее время этого нет. Равенство (2.70) можно переписать в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (2.71)$$

Решение уравнения (2.71) совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела $\mathcal{A}$. Разумеется, к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.72)$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела $\mathcal{A}$ выбрано его начальное положение. Решение задачи (2.71), (2.72) рассмотрим немного подробнее. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.71) допускает интеграл, который выражает закон сохранения энергии спинорного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку часть энергии вращательного движения, т. е. энергия трансляционного движения тела $\mathcal{A}$ вокруг центра притяжения, уже вошла в интеграл (2.68). Энергия спинорного движения вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Вычисляя производную по времени от энергии $\mathcal{E}_S$ и учитывая уравнение (2.71), немедленно убеждаемся, что энергия спинорного движения $\mathcal{E}_S$ сохраняется неизменной. Всякий тензор поворота, как известно, выражается через

три параметра, например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра доказана в работе [31]. Закон сохранения энергии спинорного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три упомянутые параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (2.73). В результате, тензор поворота, тождественно удовлетворяющий закону сохранения энергии спинорного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}(t)) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (2.74)$$

для поворота на угол φ вокруг вектора $\mathbf{m}$. Тогда искомый двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции двух поворотов

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}), \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const}, \quad (2.75)$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии $\mathbf{e}$ тела $\mathcal{A}$, а угол прецессии ψ задает прецессию тела $\mathcal{A}$ вокруг постоянного вектора динамического спина $\mathbf{L}$. Подстановка (2.75) в (2.73) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{L} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Здесь учтены очевидные тождества

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) = \mathbf{e}.$$

Вычисляя угловую скорость композиции поворотов (2.75), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot (\dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{e}) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.77)$$

Подставляя выражение (2.77) в уравнение (2.71) и умножая обе части получившегося уравнения на $\mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m})$ слева, получаем

$$\dot{\psi}\mathbf{L} + \dot{\varphi}\mathbf{l}\mathbf{e} = \mathbf{l}\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{l} = \sqrt{\mu^2\omega_0^2 + (\lambda^2 - \mu^2)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})^2}, \quad (2.78)$$

где $\mathbf{l}$ есть модуль вектора $\mathbf{L}$. Решение уравнения (2.78) находится элементарно и имеет вид

$$\psi = \frac{\mathbf{t}\mathbf{l}}{\mu}, \quad \varphi = \frac{\mathbf{t}(\mu - \lambda)}{\mu}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{\mathbf{t}(\mu - \lambda)}{\lambda\mu}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}). \quad (2.79)$$

Таким образом, мы видим, что ось тела $\mathcal{A}$ прецессирует вокруг вектора динамического спина

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' \cdot \mathbf{L} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \quad (2.80)$$

с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным.

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо в пренебрежении влиянием Луны и гравитационным моментом от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно

$$\lambda \simeq 1,0033 \mu.$$

К сожалению, нам не известны детали наблюдений по изучению вращения Земли и потому мы не в состоянии судить о степени их точности. Много полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [54]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [54], что ось Земли также фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^\circ 33'$. Согласно (2.80) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае имеем

$$\mathbf{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e} = \text{const}, \quad l = |\mathbf{L}| = \lambda \omega_0, \quad (2.81)$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. С другой стороны, имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но, в дополнение к этому объяснению, существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться. Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина, и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле будет определяться не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси, как это видно из формул (2.79).

Пример. Реакция в опоре свободно вращающегося тела. Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена, и никаких сил, кроме реакции в опоре, на тело не действует. Эта задача мало отличается от рассмотренной, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{F}, \quad (2.82)$$

где вектор $\mathbf{R}$ определяет положение центра масс относительно неподвижной точки, сила $\mathbf{F}$ есть реакция в неподвижной точке. Уравнение (2.82) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики имеем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad (2.83)$$

где вектор $\mathbf{r}$ задает положение центра масс тела в отсчетном положении. Для нахождения тензора поворота $\mathbf{P}$ необходимо записать второй закон динамики:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \text{const}, \quad (2.84)$$

где тензор инерции $\mathbf{C}$ вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально изотропным. Решение задачи (2.84) при заданных начальных условиях ничем не отличается от решения (2.75)–(2.79), построенного в предыдущем примере. Используя (2.82), вычислим реакцию в опоре

$$\mathbf{F} = m \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\phi} (\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{Q}(\phi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}. \quad (2.85)$$

В выражении (2.85) использованы обозначения, принятые в (2.75)–(2.79). Как видим, реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора $\mathbf{R}$, определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем далее два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находиться в различных точках тела, причем

движение центров масс неконтролируемо. Если мы стоим на позициях ньютоновской механики, то возникшая ситуация покажется нам парадоксальной, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого факта мы начнем придумывать некие вероятностные трактовки и говорить о нарушениях законов классической механики. Нечто похожее как раз и происходит в микромире. Современная физика для описания подобных явлений использует вероятностные законы квантовой физики.

2.5.3. Первое и второе начала термодинамики

В механике дискретных систем не обсуждаются такие понятия, как внутренняя энергия, тепло, температура, энтропия. Поэтому и основные законы термодинамики остаются за рамками классической механики. Вместе с тем, в механике сплошных сред законы термодинамики играют весьма важную роль. В результате, при переходе от дискретных систем к сплошным средам возникает некий логический разрыв, поскольку приходится вводить понятия, чуждые детерминированной механике дискретных систем. В данной главе общая концепция законов термодинамики не обсуждается. Тем не менее кажется целесообразным ввести основные понятия термодинамики на элементарных примерах механики дискретных систем.

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т. е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия, как внутренняя энергия, тепловая энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, где внутренняя энергия вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже не всегда возможно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики.

В данной работе используются упрощенные формулировки, которые имеют своей целью на простых примерах пояснить такие основные понятия тер-

модинамики, как внутренняя энергия, температура и энтропия¹⁰. В частности, понятие энтропии, используемое далее, отличается от известных определений¹¹.

Уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики. *Скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “немеханического происхождения” обычно в форме тепла.*

Дать общее и строгое определение понятию энергии “немеханического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия немеханического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним указанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2, \quad (2.86)$$

где c есть жесткость пружины. Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по-разному

$$1. \quad \dot{E} = -b_1 \dot{x}_1^2 - b_2 \dot{x}_2^2; \quad 2. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2, \quad (2.87)$$

где постоянные коэффициенты b_1 , b_2 , b называются коэффициентами вязкости.

В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “немеханического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние

¹⁰ В этом разделе П. А. Жилин показывает, что метод введения основных понятий термодинамики, принятый в механике сплошных сред, можно использовать применительно к дискретным системам, в том числе к системам, состоящим из очень небольшого числа частиц. Предложенные П. А. Жилиным формулировки являются упрощенными (по сравнению с механикой сплошных сред) только с математической точки зрения. С физической точки зрения данные формулировки — точный аналог тех, которые П. А. Жилин дает для сплошных сред (см. подразд. 3.2.6). Поэтому данные формулировки можно рассматривать не только как упрощенный вариант метода механики сплошных сред, но и как расширение термодинамических понятий на механику дискретных систем с небольшим числом частиц. В этом смысле метод П. А. Жилина является уникальным. (*Примеч. ред.*)

¹¹ Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “немеханического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Каждое уравнение баланса вводит в рассмотрение новое понятие. В первом законе динамики впервые вводится понятие силы. Во втором законе динамики вводится новое понятие момента, не сводящегося к понятию момента силы. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение сразу два новых понятия: внутреннюю энергию и скорость подвода энергии в систему. В дальнейшем мы покажем, что и такие понятия, как температура и энтропия, также вводятся посредством специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

Обсуждение уравнения баланса энергии проведем на элементарном примере двух грузиков, соединенных безынерционной пружиной общего вида. Предварительно рассмотрим случай одной материальной точки. При обычной трактовке подвод энергии “немеханического происхождения” к материальной точке невозможен. Поэтому уравнение баланса энергии для нее имеет простейший вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{U} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.88)$$

где $\mathcal{U}$ есть внутренняя энергия, $\mathbf{F}$ есть сила, действующая на материальную точку. Вычисляя производную по времени в левой части уравнения (2.88) и учитывая первый закон динамики $m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}$, получаем, что внутренняя энергия материальной точки постоянна. Именно поэтому в классической механике внутренняя энергия исключается из рассмотрения. Между прочим, в упомянутой постоянной энергии заключаются огромные энергии, например, атомная энергия. Ситуация изменилась бы, если бы мы захотели рассматривать распад одной частицы на несколько новых частиц. В таком случае внутренняя энергия перестала бы быть неизменной. При этом игнорировать скорость подвода энергии уже было бы нельзя. Рассмотрим теперь тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной. Допустим, что внутри этого тела возможны потери энергии, например, из-за наличия демпфера между частицами. Запишем уравнение баланса энергии для рассматриваемого тела

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \mathcal{U} \right) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \delta, \quad (2.89)$$

где $\mathcal{U}$ есть внутренняя энергия рассматриваемого тела, δ есть скорость подвода энергии в систему, а $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ суть внешние силы, действующие на первую

и вторую частицы, соответственно. Подчеркнем, что в силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ не входят внутренние силы. В данном случае внутренние силы — это силы, действующие на частицы со стороны пружины, а также силы внутреннего трения.

Пусть, например, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ — силы трения о внешнюю среду

$$\mathbf{F}_1 = -b_1 \dot{\mathbf{R}}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -b_2 \dot{\mathbf{R}}_2, \quad (2.90)$$

где постоянные величины b_1 и b_2 называются коэффициентами вязкости.

Уравнение баланса энергии (2.89) можно переписать в эквивалентном виде

$$m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \delta. \quad (2.91)$$

Уравнение (2.91) следует еще немного преобразовать и исключить из него внешние силы, поскольку они ни в какой степени не характеризуют рассматриваемую систему. Для этого выпишем уравнения движения (первый закон динамики) для обеих частиц в отдельности и для всего тела

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1i}, & m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{2i}, \\ m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (2.92)$$

где $\mathbf{F}_{1i}$, $\mathbf{F}_{2i}$ суть внутренние силы, действующие на первую и вторую частицы, соответственно. Складывая первые два уравнения системы (2.92) и учитывая третье уравнение, получаем

$$\mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} = \mathbf{0}. \quad (2.93)$$

Это аналог третьего закона Ньютона. С учетом уравнений (2.92) и (2.93) уравнению баланса энергии (2.91) можно придать следующий вид:

$$\dot{\mathcal{U}} = -\mathbf{F}_{1i} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) + \delta. \quad (2.94)$$

Это уравнение носит название приведенного уравнения баланса энергии. Его существенное отличие от (2.91) состоит в том, что в него не входят никакие внешние параметры. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии характеризует саму рассматриваемую систему и оказывается удобным для дальнейшего анализа. Но предварительно следует сказать еще несколько слов о понятии внутренней энергии.

По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, *обязана зависеть* от неких относительных скоростей игнорируемых нами переменных.

Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно средних положений, которые и воспринимаются нами как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то и в этом случае осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И та часть Вселенной, которая не учитывается в наших моделях, всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на их внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т. е. от положений частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого энтропией H .

Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических, свойствами.

Вернемся теперь к приведенному уравнению баланса энергии (2.94). Примем, что внутренняя энергия рассматриваемого тела зависит от векторов положений частиц тела и энтропии. Используя принцип независимости от выбора системы отсчета, нетрудно доказать, что внутренняя энергия рассматриваемого тела есть функция вида

$$U = U(\gamma, H), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2, \quad (2.95)$$

где параметр H будем называть энтропией. Внутренние силы представим в виде суперпозиции

$$\mathbf{F}_{1i} = \mathbf{F}_{1e}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, H) + \mathbf{F}_{1d}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_2, H). \quad (2.96)$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии (2.94) можно переписать

в виде

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' - \mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (2.97)$$

Левая часть этого равенства является полной производной по времени от внутренней энергии. Следовательно, и правая часть (2.97) должна быть полной производной. Чтобы получить полную производную, введем в рассмотрение новую неизвестную переменную ϑ , которую в дальнейшем будем называть температурой, посредством равенства

$$\vartheta \dot{H} = -\mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (2.98)$$

Следует подчеркнуть, что равенство (2.98) не требует принятия никаких новых допущений. Правда, остается пока неясным, можно ли назвать введенный параметр ϑ температурой. Проблема в том, что, например, в статистической физике температура вводится посредством вполне определенных рассуждений, которые невозможно увязать с принятым ранее способом введения температуры. В данной работе мы лишены возможности провести детальное обсуждение этого трудного вопроса. Поэтому ограничимся декларацией о том, что принятый способ введения температуры, в принципе, согласуется с механикой сплошных сред и классической термодинамикой.

Аналог уравнения (2.98) в механике сплошных сред носит название уравнения теплопроводности. Подставив (2.98) в приведенное уравнение баланса энергии (2.97), получим равенства

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \vartheta \dot{H} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{1e} &= 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Последними двумя равенствами определяются сила упругости, возникающая при деформации пружины, и температура, если считать, что внутренняя энергия системы каким-то образом задана. Конкретный вид внутренней энергии зависит от физических свойств системы и может быть установлен только на основе интуитивных представлений, включающих знание основных экспериментальных данных. Если энтропию считать не имеющей физической размерности, то температура будет иметь смысл энергии, которую обычно называют тепловой. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится.

По смыслу своего введения *температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы.*

В рассматриваемом нами примере о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером, мы имеем

$$\mathbf{F}_{1d} = -b (\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2),$$

где b постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкости демпфера. Подставив это выражение в уравнение производства тепла (2.98), получим

$$\vartheta \dot{H} = b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 + \delta. \quad (2.100)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.100) есть тепло, вырабатываемое в системе в единицу времени, а второе слагаемое в правой части есть тепло, излучаемое системой в единицу времени в окружающую среду. Таким образом, вся правая часть уравнения (2.100) есть тепло, накапливаемое телом в единицу времени. Мощность излучения δ , вообще говоря, уже не определяется только свойствами тела, но зависит также и от свойств (например, температуры) окружающей среды. Определение функции δ есть отдельная задача. Примем, например, следующее определяющее уравнение для мощности излучения

$$\delta = -\eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.101)$$

где коэффициент η показывает, какая часть вырабатываемой в теле мощности излучается в окружающую среду. Второе из уравнений (2.87) записано для случая $\eta = 1$, когда энтропия системы сохраняется постоянной, как это следует из (2.100). Подставив (2.101) в (2.100), получим уравнение для производства тепла в следующем виде:

$$\vartheta \dot{H} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2. \quad (2.102)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в правую часть (2.100) не вошли характеристики вязкого трения частиц о внешнюю среду. Упомянутые характеристики входят во внешние силы и потому исключаются из приведенного уравнения баланса энергии. Ситуация может показаться странной, поскольку, как известно, тело нагревается при трении о внешнюю среду. Однако этот нагрев должен учитываться введением некоего механизма внутри материальных точек, чтобы сделать их способными накапливать тепло.

Уравнение (2.102) служит для определения температуры в теле. Но само по себе оно недостаточно, ибо содержит две неизвестных функции: температуру ϑ и энтропию H . Для замыкания этого уравнения необходимо дополнительное уравнение, связывающее температуру и энтропию. Трудность состоит в том, что энтропия является неизмеряемым параметром. По существу, она служит только для того, чтобы правильно определить температуру.

Примем, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию $\mathbf{H}$. Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры¹²

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{H}) = c^{-1} \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = c \vartheta, \quad (2.103)$$

где c есть экспериментально определяемый параметр. Подставляя (2.103) в (2.102), находим температуру

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2(1 - \eta)b}{c} \int_0^t |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 dt \right]^{1/2},$$

где ϑ_0 есть начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удастся удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (2.103) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение.

Если принять определяющее уравнение для температуры (2.103) и определяющие уравнения для внешних сил (2.90), то уравнение баланса энергии рассматриваемой системы запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2 - \eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{E} + \frac{\eta c \vartheta^2}{2(1 - \eta)} \right) &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2. \end{aligned}$$

Это равенство справедливо только при $\eta \neq 1$. На рассмотренном примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т. е. энергия движения игнорируемых степеней свободы.

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло

¹² Сейчас мы не заботимся о действительном соответствии этого уравнения реальности, а хотим продемонстрировать только идею нахождения температуры.

в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения.

Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т. е. в не учитываемую нами, Вселенную. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии. Более того, маловероятно, что в ближайшем будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом.

Второе начало термодинамики имеет очень много различных формулировок. В общих чертах второе начало термодинамики утверждает, что в реальности не существует изолированных систем. Иными словами, всякая система неизбежно излучает часть своей энергии в окружающую среду.

Общая формулировка второго закона термодинамики. *Тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду.*

Следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т. е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Фактически в рациональной механике под вторым законом термодинамики понимают совокупность неких утверждений, выражающих интуитивные представления о поведении реальных систем.

Примером представления такого рода является следующее рассуждение. Ранее мы рассматривали две материальные точки, соединенные пружиной. При этом допускалось, что эта система способна существовать сколь угодно долго. Подобное допущение справедливо не всегда. Достаточно вспомнить о существовании радиоактивных элементов и коротко живущих элементарных частиц. В рациональной науке словесные утверждения ничего не значат, если они не находят своего отражения в тех или иных математических формулировках. В рассматриваемом случае длительное существование системы возможно тогда и только тогда, когда энергия деформации пружины¹³ удо-

¹³ Следующее далее условие достаточно только в линейном приближении.

влетворяет условию

$$\frac{1}{2}c|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 > 0 \quad (\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2) \quad \Rightarrow \quad c > 0.$$

Если $c < 0$, то легко убедиться, что любые бесконечно малые возмущения этой системы приведут к появлению решений, которые неограниченно возрастают во времени, что приведет к взрывному разрушению системы. Если же $c > 0$, то система будет сопротивляться всяким попыткам ее разрушить, т. е. при приложении внешней нагрузки ее внутренняя энергия будет возрастать.

Приведенное здесь рассуждение, конечно, нельзя связывать со вторым законом термодинамики, поскольку оно не связано со взаимоотношением системы с окружающей средой. Однако, если не буква, то дух этих рассуждений полностью сохраняется и при формулировке второго закона термодинамики.

Ко второму закону термодинамики относят следующие утверждения.

Первое. *Тепло всегда течет от горячего к холодному.* Это утверждение известно под названием нулевого начала термодинамики. Однако его нельзя обосновать без привлечения окружающей среды (электромагнитного поля). В данной главе потоки тепла не рассматривались.

Второе. *Силы трения не могут совершать положительной работы.* Для рассматриваемой нами системы из этого утверждения следуют неравенства

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b > 0.$$

Третье. *При отсутствии внешних силовых и моментных воздействий всякая система стремится к равновесию с окружающей средой, например, излучает энергию в окружающую среду.* В рассмотренном примере это утверждение равносильно условию

$$\delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \eta.$$

Четвертое. *Энтропия всякой системы либо постоянна, либо возрастает с ростом времени.* В рассмотренном примере это утверждение приводит к неравенству

$$\dot{H} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \leq 1.$$

Третье и четвертое утверждения в совокупности ведут к неравенству $0 \leq \eta \leq 1$, использованному в (2.101).

Формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если из нее вытекают следствия, подобные приведенным утверждениям. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные вари-

анты формулировок второго закона термодинамики можно найти в превосходной книге [34]. Тем не менее далеко не со всеми утверждениями книги [34] можно согласиться.

В настоящее время понятия температуры и энтропии и их объективный смысл окончательно не установлены. Конечно, термометр позволяет¹⁴ нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял.

В данном разделе мы хотели дать только приблизительное представление о втором законе термодинамики.

Заклучение

В данной главе сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Можно надеяться, что читатель понял самое главное. А именно то, что механика открыта для творческих поисков¹⁵ и не может быть сведена к чистой математике. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютоновская механика. В этих случаях эйлерова механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновской механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлерова механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике. В частности, она позволяет с совершенно новой точки зрения взглянуть на проблемы квантовой физики.

¹⁴ Впрочем, и здесь имеются свои нерешенные проблемы.

¹⁵ Однако, прежде чем начинать творить, необходимо ясно осознать идеи, лежащие в основе рациональной механики. К сожалению, многим неортодоксальным “творцам” это не свойственно.

Глава 3

Математическая теория неупругости¹

Введение

В настоящее время построение теории нелинейноупругих сред практически завершено, а основные нерешенные проблемы связаны с неупругими материалами. Далее приводятся хорошо известные экспериментальные факты, которые, тем не менее, не описываются существующими теориями пластичности. Нашей целью является попытка построения такой теории неупругих материалов, которая, по крайней мере, качественно описывала бы основные экспериментальные факты. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны быть непротиворечивыми в логическом отношении, достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже известными экспериментальными фактами.

Новизна предлагаемой теории в сравнении с известными версиями заключается в следующем. Используется пространственное описание. Дается строгое определение материальной производной и на его основе строится кинематика сред с вращательными степенями свободы. Фундаментальные законы формулируются для открытых систем. Дается новая трактовка уравнения баланса энергии (первого начала термодинамики), причем температура и энтропия вводятся посредством чисто механических аргументов. Общие построения приводятся для моментной среды. Сухое трение между частицами среды вводится через антисимметричную часть тензора силовых напряжений. Внутренняя энергия задается в форме, одновременно пригодной для газообразных, жидких и твердых тел. Уравнения состояния такого рода ранее,

¹ Материал этой главы основан на трех статьях П. А. Жилина [38, 39, 55]: “Основные уравнения теории неупругих сред” (Труды XXVIII летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2001. — С. 14–58), “Phase transitions and general theory of elasto-plastic bodies” (Proceedings of XXIX Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, 2002. — P. 364–375), “Математическая теория неупругости” (Успехи механики. — 2003. — Т. 2, N 4. — С. 3–36). (Примеч. ред.)

видимо, не встречались. При этом фазовые переходы в среде описываются без привлечения каких-либо дополнительных условий.

3.1. Предмет исследования

3.1.1. О явлениях первого и второго рода

Явления, которые изучаются в механике деформируемого твердого тела, можно разделить на два обширных и принципиально различных класса или рода.

К первому роду относятся явления, которые можно изучать на основе понятия материала, которое с математической точки зрения почти тождественно понятию гладкого дифференцируемого многообразия. Нестрого выражаясь, к первому роду относятся явления, при изучении которых допустимо считать, что соседние частицы материала остаются соседями в течение всего исследуемого процесса. В качестве классических примеров здесь можно указать на теорию нелинейноупругих материалов, континуальную теорию дислокаций, теорию неупругих материалов, основанную на реологических моделях [23, 24, 56], ряд теорий пластичности² [57, 58], теории микрополярных сред [59–61] и др. Иными словами, к первому роду относятся те явления, которые могут быть исследованы на основе так называемого материального (лагранжева) описания. При описании явлений первого рода широко используются такие понятия, как материал, отсчетная конфигурация, меры деформации, материальные линии, поверхности и объемы. Фундаментальные законы записываются применительно к материальным объемам. Уравнения состояния, определяющие свойства материала, постулируются для бесконечно малой части материала, и считается, что свойства среды в целом вполне определяются поведением ее бесконечно малых частей. С формальной точки зрения теория явлений первого рода является достаточно строгой и логически непротиворечивой. С прикладной точки зрения теория явлений первого рода позволяет удовлетворить великое множество практических потребностей. Тем не менее существует другое множество явлений, которые невозможно отнести к первому роду.

Ко второму роду относятся явления, в которых ярко проявляется дискретное строение вещества. Отметим некоторые из них. Самым известным из явлений второго рода является, конечно, турбулентность в жидкости. Далее

² Критику существующих подходов к построению теорий пластичности и описание некоторых из возникающих здесь проблем можно найти в работе [30].

обсуждаются, главным образом, твердые тела. Многие тела имеют кристаллическое строение, структура которого хорошо изучена практически для всех веществ. Многие явления, которые протекают в сформировавшихся кристаллических телах, часто могут быть отнесены к первому роду. Однако процесс рождения кристаллической решетки до сих пор не описан удовлетворительным образом и относится к явлениям второго рода. Аналогично обстоит дело с теорией трещин в материале: описаны процессы роста трещин, но не процессы их возникновения. К явлениям второго рода относятся процессы фрагментации материала, возникновения линий Людерса, некогерентных фазовых переходов в материалах³ и многие другие явления. Нельзя описать в рамках явлений первого рода и такой хорошо экспериментально изученный процесс, как сильное (многократное) растяжение образца, при котором свободная поверхность растянутого образца включает частицы, которые до деформации были внутри образца. Во всех этих примерах материал нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием, и, как следствие, теряют смысл понятия отсчетной конфигурации, материальных линий и объемов. Некоторые экспериментально установленные факты, относящиеся к явлениям второго рода, будут описаны далее.

Теория явлений второго рода, происходящих в твердых телах, почти не разработана и имеет ряд существенных особенностей. По существу все эти особенности порождаются невозможностью использования концепции материала. Перечислим некоторые особенности, которые по необходимости должны быть присущи любой теории явлений второго рода.

Первая. Вместо материального описания необходимо использовать пространственное (эйлерово)⁴ описание. В частности, все используемые операторы должны быть определены в пространстве, т. е. в системе отсчета, а не в материале.

Вторая. Фундаментальные законы необходимо формулировать для тел переменного состава, т. е. для открытых систем, ибо в данной области пространства в разные моменты времени находятся разные частицы тела.

Третья. Необходимо строго различать понятия плотности частиц в данной точке пространства и плотности массы, ибо, например, проницаемость тел обусловлена плотностью частиц, а внутренние взаимодействия обуслов-

³ Когерентные фазовые переходы, происходящие без разрывов поля перемещений, можно отнести к явлениям первого рода.

⁴ Во многих книгах эйлеровым называют материальное описание, при котором в качестве отсчетной конфигурации выбирается конфигурация в актуальный момент времени. Эйлерово описание этого типа не является пространственным описанием.

лены плотностью массы. В теории явлений первого рода эти две плотности выражаются одна через другую и не являются независимыми функциями⁵.

Четвертая. Существенно возрастает роль уравнения баланса энергии (первого начала термодинамики⁶). Оно не только требует уточненной формулировки и более внятного определения понятия энергии, но без вытекающего из него приведенного уравнения баланса энергии невозможно корректно определить понятия мер деформации, температуры, энтропии и химического потенциала. С физической точки зрения без уточненной формулировки уравнения баланса энергии невозможно описать такое, например, явление, как радиационное старение материала, ибо радиационное облучение попадает существенным образом в законы механики только через уравнение баланса энергии, а его влияние на законы динамики пренебрежимо мало.

Пятая. Необходимо строго различать аддитивность по массе и аддитивность по телам. Например, кинетическая энергия тела аддитивна по массе этого тела, в то время как внутренняя энергия тела аддитивна по телам, составляющим рассматриваемое тело, но, вообще говоря, не является аддитивной функцией массы, как это считается в классической механике сплошных сред.

Шестая. Тензоры силовых и моментных напряжений должны быть определены в пространстве, а не в материале. Именно так обстоит дело в гидромеханике, где давления и массовые плотности заданы в данной точке системы отсчета и непосредственно не привязаны к каким-либо конкретным частицам жидкости.

3.1.2. Неупругость. Важнейшие экспериментальные факты

Поведение твердых тел под нагрузкой изучается в течение нескольких столетий. Достаточно вспомнить знаменитый закон Гука. Однако интенсивные и целенаправленные исследования начались в XIX в. и продолжают по настоящее время. Накоплен поистине огромный материал [62, 63], который существенно используется при формулировке практических (эмпирических) правил и нормативных документов для инженерных и конструкторских проектов, но оказывает, к сожалению, на удивление слабое влияние на теоретические исследования. Поэтому теоретику необходимо детально знать широ-

⁵ В явлениях второго рода, поскольку не все рассматриваемые частицы обладают массой, а также при учете распада или фрагментации частиц плотность массы и плотность частиц не выражаются одна через другую. (*Примеч. ред.*)

⁶ По мнению автора, этот термин уместен в термодинамике, но не в рациональной механике, ибо термодинамика опирается на механику, но никак не наоборот.

кий спектр экспериментальных данных, чтобы по ним выдвигать гипотезы о том, что происходит на самом деле. Теория, основанная на этих гипотезах, должна вновь проверяться экспериментом, но уже целенаправленным экспериментом. К сожалению, в действительности все происходит несколько иначе. Многие давно установленные экспериментальные факты до сих пор не только не описываются существующими теориями, но и вообще не обсуждаются специалистами, занимающимися построениями теорий, описывающих поведение неупругих материалов при внешних воздействиях. Далее будут кратко перечислены некоторые из таких фактов, причем без обсуждения сопровождающих их нюансов.

Первый. *При достаточно высоких давлениях все материалы испытывают необратимые деформации, которые можно назвать фазовыми переходами.* Газ под давлением можно превратить в жидкость, которая при повышении давления превращается в твердое тело. Последнее, в свою очередь, при повышении давления испытывает цепочку превращений, сопровождающихся заметным изменением его механических свойств. Даже при медленных нагружениях все эти превращения происходят скачком, т. е. в результате очень быстрых динамических процессов, называемых фазовыми переходами, скорость которых обусловлена свойствами материала, а не скоростью изменения внешних нагрузок.

Второй. *При достаточно высоких давлениях все твердые тела обретают свойство текучести.* Впервые этот факт был установлен А. Треска [63] и впоследствии был многократно подтвержден многими авторами. Наиболее полными здесь считаются опыты П. У. Бриджмена. Указанный факт не следует смешивать с явлением скольжения.

Третий. *Существует характеристика материала, выражающая максимальное касательное напряжение, при котором независимо от типа опыта твердое тело испытывает необратимые пластические деформации.* Этот факт был установлен А. Треска, но он его дополнил экспериментально недоказанным утверждением о том, что *при пластической деформации максимальное касательное напряжение сохраняет постоянное значение.* Это утверждение принято называть условием текучести, и именно оно было принято Б. де Сен-Венаном при построении первой теории пластичности. В дальнейшем условие текучести в различных модификациях использовалось в большинстве вариантов теории пластичности. На самом деле условие текучести не только не доказано экспериментально, но, напротив, экспериментально показано, что оно никогда не выполняется. Например, эксперименты А. Треска и, особенно, Бриджмена [63] показывают, что материал именно течет, по-

добно жидкости. При этом никаких зон застоя материала не наблюдается. Теоретическое решение одной из задач такого рода по теории, основанной на критерии текучести [64], с. 218, показывает наличие зон застоя. Иными словами, налицо серьезное качественное расхождение теории и эксперимента.

Четвертый. *Эксперименты по определению диаграмм $\sigma \sim \epsilon$ показывают существенное влияние масштабного фактора.* Например, при растяжении силой P цилиндрического образца с круглым сечением начальной площади S снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Затем берется образец из того же материала, но с уменьшенной вдвое площадью поперечного сечения и вновь снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Она пройдет заметно выше, чем в первом случае. Этот процесс можно повторить. Диаграммы показывают, что чем тоньше образец, тем выше оказывается предел упругости. Хотя масштабный фактор известен всем, тем не менее, его природа никак не обсуждается и не учитывается при построении теории. Между тем, масштабный фактор показывает, что определяющие уравнения заведомо не могут быть сформулированы для тела-точки из данного материала, но должны учитывать наличие всех других тел-точек. Кроме того, этот факт показывает неправильность мнения, что определяемая в эксперименте диаграмма $P/S \sim \epsilon$ является неким прообразом определяющего уравнения $\sigma \sim \epsilon$. Например, рассмотрим растяжение полосы из полулинейного материала, т. е. задачу Клингбейла и Шилда [26]. В этом случае определяющее уравнение, т. е. диаграмма $\sigma \sim \epsilon$, грубо говоря, линейна, но диаграмма $P/S \sim \epsilon$, вычисленная на основе точного решения задачи для линейной диаграммы $\sigma \sim \epsilon$, существенно нелинейна и имеет точки минимума и максимума.

Пятый. *Во всех экспериментах с мягким нагружением отчетливо проявляется эффект Савара–Массона (Портвена–Ле Шателье) [62], который заключается в следующем.* На диаграмме растяжения наблюдается многократно повторяющееся чередование участков упругости и течения. Причем на участках течения процесс носит ярко выраженный динамический характер и происходит со скоростью, определяемой самим материалом, а не условиями эксперимента.

Шестой. Наблюдался следующий факт. Брался образец из некоего материала и из него вырезался относительно небольшой контрольный объем. Методами рентгеноструктурного анализа определялись его характеристики и подсчитывалось число частиц, входящих в этот контрольный объем. Затем аналогичный образец из того же материала растягивался в несколько раз, т. е. образец подвергался большому пластическому деформированию. После чего из этого деформированного образца вырезался точно такой же

контрольный объем, как и в первом случае. Для него проводились те же самые анализы. Результат: оба контрольных объема оказались практически идентичными. Это означает, что *при пластическом деформировании теряют всякий смысл такие понятия, как материальные линии, поверхности и объемы. Как следствие, теряют смысл понятия отсчетной и актуальной конфигураций и традиционные меры деформаций.*

Седьмой. При растяжении металлических образцов отчетливо наблюдается наличие так называемой шейки. Это явление до сих пор не объяснено теоретически.

Здесь мы остановимся, хотя, разумеется, можно указать еще много важных экспериментально установленных и теоретически не объясненных⁷ фактов. Например, появление так называемых линий Людерса. Перечисленные ранее факты важны потому, что они наблюдаются практически во всех экспериментах. Тем не менее ни одна из существующих теорий неупругих материалов не описывает эти факты за исключением, может быть, третьего из них.

Любая вновь предлагаемая теория неупругого поведения материала должна принимать во внимание существование перечисленных ранее экспериментальных фактов. По нашему мнению, главным из них является эффект Савара–Массона.

3.1.3. Цель и метод исследования

Построение теории неупругих материалов, отражающей все многообразие наблюдаемых фактов и пригодной для описания современных технологических процессов, в настоящее время кажется неразрешимой задачей. В ближайшей перспективе основная нагрузка по решению возникающих практических проблем будет лежать на разнообразных методах компьютерного моделирования, включая методы так называемой молекулярной динамики. Компьютерное моделирование поведения твердых тел под нагрузкой интенсивно развивается, и на его основе уже достигнуты впечатляющие успехи. Тем не менее кажется очевидным, что нельзя оставлять попытки построения математической теории неупругости методами механики сплошных сред. Цель данной главы состоит в том, чтобы очертить контуры общего подхода к построению теории неупругих сред. При этом внимание обращается на ясное,

⁷ Под объяснениями здесь понимаются не словесные спекуляции, а описания на основе решений корректно поставленных математических задач. Например, объяснение концентрации напряжений вблизи отверстий основано на точном решении соответствующей краевой задачи.

по возможности, введение основных понятий, допускающих либо расширение и улучшение, либо опровержение их другими исследователями, включая людей с математическим складом мышления, которые в настоящее время почти демонстративно уклоняются от обсуждения тех проблем неупругих материалов, которые нельзя моделировать гладким многообразием [22, 25, 65]. Разумеется, мы далеки от мысли, что данная работа исчерпывает проблему хотя бы в общих чертах. В основе — желание, чтобы теория неупругих тел получила такое развитие, при котором отпала бы необходимость каждый раз начинать все заново и начался бы этап уточнений, расширений и дополнений теории.

При построении любой теории важнейшую роль играют предварительные интуитивные представления о том, какие именно объекты и какие явления предназначена описывать данная теория. В качестве интуитивного прообраза неупругого тела имеется в виду такой интересный объект, как тонкие порошки, применяемые в современных принтерах и копировальных машинах. Порошки являются сыпучими средами, но уже при очень малых внешних нагрузках проявляют тенденцию к консолидации, т. е. к слипанию. В результате, порошок частично превращается в некое твердое тело. Кроме того, в порошках большую роль играют силы сухого трения между частицами. При определенных условиях порошки легко поддаются ожижению, т. е. ведут себя подобно жидкости. Причем все эти разнообразные свойства нередко проявляются одновременно, т. е. одна часть порошка ведет себя как твердое тело, другая часть порошка ведет себя как сыпучая среда, а третья — как жидкость. Все это можно наблюдать в довольно большом массиве экспериментальных данных, полученных во многих странах. Весьма схожие явления наблюдаются и в поведении грунтов, удовлетворительной теории которых в настоящее время также не построено. Поэтому практические расчеты для грунтов опираются, главным образом, на экспериментальные зависимости. Попытки использовать для описания поведения порошков известные теории неупругих материалов оказались малоудовлетворительными. Существующие теории пластичности ориентированы на определенные классы материалов в определенных условиях. Например, процессы прокатки и процессы штамповки описываются на основе разных подходов.

При рассмотрении основных положений теории имелись в виду не только тонкие порошки и явления, происходящие в них, но и такие явления, как нагрев излучением или радиационное старение материала. Разумеется, речь идет не о том, что в дальнейшем будет представлена теория, готовая к применению во всех ситуациях. Речь идет о таком введении исходных понятий и

таких формулировках фундаментальных законов, которые не исключали бы возможность рассмотрения достаточно широкого класса явлений. Тем более, что всякие отклонения от чисто упругих материалов порождают, по существу, одни и те же проблемы. Поэтому и речь должна идти об общей концепции теории неупругих сред. При этом нужно иметь в виду, что имеется огромный исторический опыт теоретического анализа поведения неупругих материалов. Это означает, что небольшие модификации известных подходов не позволят радикально улучшить существующее положение дел. Стремление быстро построить теорию, готовую к применению, вынуждало оставлять в стороне исследование принципиальных и трудных вопросов, без решения которых настоящий прогресс теории невозможен. При создании теории упругости О. Коши вообще не думал о каких-либо практических проблемах и никогда ими не занимался, но создал теорию не только огромной практической важности, но и допускающую истинное развитие, а не бесконечные полуэмпирические переделки. Неотложные задачи решались, решаются и будут решаться экспериментальными и инженерными методами. Так или иначе, но целью данной работы является попытка заложить такой фундамент теории неупругих материалов, который не требовал бы полной перестройки каждый раз, когда желательно поменять ту или иную надстройку. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны выражать ясные физические идеи, быть достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже известными экспериментальными фактами и, тем более, не игнорировать их существование.

3.2. Фундаментальные законы механики

Как уже отмечалось во введении к этой главе, сплошную среду при неупругом деформировании нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием. В самом деле, из опыта следует, что частицы среды, которые были соседями в один момент времени, перестают быть соседями в другие моменты времени. В среде возможны разрывы сплошности с образованием полостей. Происходят перестройки структуры типа фазовых переходов. При этом указанные переходы, как правило, не могут быть обнаружены в квазистатических рассматриваниях. Из сказанного следует, что материальное описание сред с перечисленными свойствами не представляется возможным. Остается единственная возможность: строить теорию неупругих сред в чисто пространственном описании. Важным примером теории, удовлетворяющей указанным критериям, является гидромеханика.

3.2.1. Материальная производная и кинематика

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, в которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно среды. Будем наблюдать за некоторой фиксированной областью системы отсчета, в которой в разные моменты времени оказываются разные части среды. Иными словами, будем использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред. В литературе [66] понятие материальной производной считается строгим и общепринятым. Однако мы не придерживаемся этой точки зрения, ибо фактически в литературе не только отсутствует ясное определение материальной производной, но, кроме того, явно (а чаще неявно) смешиваются материальное и пространственное описания.

В некоторой выбранной системе отсчета введем оператор-градиент. Пусть q^s суть произвольные криволинейные координаты в системе отсчета. Они могут меняться во времени по заданному закону. Локальные базис и взаимный базис, а также оператор-градиент определяются стандартными формулами [26]

$$\mathbf{g}_s = \frac{\partial \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^s}, \quad \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{g}_m = \delta_m^s, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial q^s},$$

где вектор $\mathbf{x}$ определяет точку системы отсчета; оператор-градиент определен в системе отсчета и никак не связан с наличием или отсутствием каких-либо частиц или материальной среды.

Рассмотрим некое множество частиц, которое может содержать всего одну частицу, целиком или частично заполняющее контрольную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может покоиться, а система отсчета двигаться относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, где вектор $\mathbf{x}$ задает точку системы отсчета, называемую точкой наблюдения. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени t находится в точке $\mathbf{x}$. В качестве точки наблюдения можно выбрать точку $\mathbf{y}(t)$, движущуюся относительно системы отсчета по заданному закону. Введение подвижной точки наблюдения оказывается необходимым, например, при замене системы отсчета или применении принципа относительности Галилея. Пусть нам дано некоторое поле $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$, которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает

некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ системы отсчета.

Определение. Материальной производной свойства $\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ называется предел отношения⁸

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, \mathbf{t} + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

где

$$\Delta \mathbf{s} = \left(\mathbf{V}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) - \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{t})}{dt} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (3.2)$$

есть перемещение относительно точки наблюдения $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ частицы, которая в момент времени $\mathbf{t}$ находилась в этой точке, за время Δt .

В правую часть равенства (3.2) входит скорость частицы относительно движущейся точки $\mathbf{y}(\mathbf{t})$. Числитель в (3.1) можно переписать в виде следующего разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, \mathbf{t} + \Delta t) &= \\ &= \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta t), \mathbf{t} + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta t), \mathbf{t} + \Delta t). \end{aligned}$$

Теперь из определения (3.1) следует

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) + \left(\mathbf{V}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) - \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{t})}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}). \quad (3.3)$$

Если точка наблюдения неподвижна относительно системы отсчета, то выражение (3.3) упрощается и принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}).$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. На первый взгляд кажется, что определение (3.3) требует непрерывного распределения свойства $\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ в пространстве, поскольку от него необходимо вычислять градиент. Но фактически непрерывность по пространству поля $\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ не требуется, поскольку в определение материальной производной входит не весь

⁸ Материальная производная — это производная по времени при условии следования траектории выбранной частицы. Если точка наблюдения перемещается вместе с частицей, то материальная производная совпадает с полной производной. Заметим, что скорость $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ является материальной производной от радиус-вектора $\mathbf{x}$. Полная производная радиус-вектора $\mathbf{x}$ по времени равна $\mathbf{0}$, так как мы рассматриваем $\mathbf{x}$ как фиксированную точку в пространстве. (Примеч. ред.)

градиент, а только производная вдоль траектории, на которой поле $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$ непрерывно. Выражение для полной производной в правой части (3.3) можно раскрыть

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}(\mathbf{y}, t) + \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}, t) \quad (3.4)$$

и подставить в (3.3). В результате получим общепринятое определение материальной производной [53, 66]

$$\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t), \quad (3.5)$$

где частная производная вычисляется в соответствии со стандартным определением частной производной, т. е. при фиксированном первом аргументе.

Хотя выражения (3.3) и (3.5) полностью эквивалентны, при решении конкретных задач лучше пользоваться выражением (3.3), ибо оно содержит только объективные, т. е. не зависящие от выбора системы координат, производные. Не останавливаясь на нюансах трактовки материальной производной (3.3) и (3.5), отмечаем, что она несколько отличается от приводимых в книгах и была введена в работах [39, 55].

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}.$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны. Для материальной производной, как видно из определения, это неверно

$$\frac{d}{dt}\nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t}\nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}.$$

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

где принято, что точка наблюдения неподвижна относительно системы отсчета.

В качестве иллюстрации применения формул (3.3) и (3.5) рассмотрим простой пример. Рассмотрим две частицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые в момент времени

$t = 0$ занимали одно и то же положение $\mathbf{x}_0$. Зададим движения этих частиц в следующей форме:

$$\mathbf{x}_A(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}_B(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_A + \mathbf{V}_0 t,$$

где $\mathbf{V}_0 = \text{const.}$ Для скоростей этих частиц имеем

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}, \quad \mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} + \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}_A = \mathbf{W}_B = \frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2},$$

т. е. ускорения обеих частиц в один и тот же момент времени одинаковы.

Посмотрим, что дает для ускорения формула (3.5). Имеем

$$\mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t) = \frac{\partial \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t)}{\partial t} + \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t).$$

Для ускорения частицы $\mathcal{B}$ имеем аналогичную формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_B(\mathbf{x}_B, t) &= \frac{\partial \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t)}{\partial t} + \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) \cdot \nabla \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t)}{\partial t} + \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_A = \\ &= \mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_A \neq \mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t). \end{aligned}$$

В итоге пришли к абсурдному результату. Природа ошибки элементарна, но не очевидна и связана с использованием необъективного оператора частного дифференцирования по времени⁹. Видимо, не случайно в книгах по гидромеханике не удастся обнаружить применение принципа относительности Галилея. Аналогичная ошибка при применении принципа относительности Галилея к уравнениям Максвелла привела [53] к созданию специальной теории относительности¹⁰.

⁹ Делается необоснованный переход: частная производная по времени $\frac{\partial \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t)}{\partial t}$ не равна частной производной по времени $\frac{\partial \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t)}{\partial t}$. Чтобы показать это, сделаем замену переменных:

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) = \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_B - \mathbf{V}_0 t, t) = \mathbf{V}_A^*(\mathbf{x}_B, t).$$

Понятно, что

$$\frac{\partial \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}_A^*(\mathbf{x}_B, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}_A^*(\mathbf{x}_B, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t)}{\partial t}.$$

Таким образом, ошибка заключается во втором равенстве в формуле для ускорения частицы $\mathcal{B}$. (*Примеч. ред.*)

¹⁰ О принципе относительности Галилея и уравнениях Максвелла см. раздел 7.1. (*Примеч. ред.*)

Воспользуемся определением (3.3). В этом случае для ускорения имеем равенство

$$\mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t) = \frac{d\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t)}{dt} + \left(\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) - \frac{d\mathbf{x}_A}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t).$$

Для ускорения частицы В имеем аналогичное выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_B(\mathbf{x}_B, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) + \left(\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) - \frac{d\mathbf{x}_B}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) = \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0) + \left(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0 - \frac{d(\mathbf{x}_A + \mathbf{V}_0 t)}{dt} \right) \cdot \nabla (\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0) = \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \left(\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) - \frac{d\mathbf{x}_A}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) = \mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t). \end{aligned}$$

При получении этого очевидного результата изощренная математическая подготовка не потребовалась.

Примем, что $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ есть тензор поворота частицы, находящейся в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t . Как найти ее угловую скорость? Существуют различные определения угловой скорости¹¹, но наиболее естественным является определение на основе уравнения Пуассона [2, 50]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (3.7)$$

Понятно, что это определение непригодно для наших целей, ибо в разные моменты времени в данной точке $\mathbf{x}$ системы отсчета находятся разные частицы. Поэтому необходимо использовать следующую модификацию уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t) &\equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t) + \left(\mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) - \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t) = \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}(t), t) \times \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если в качестве точки наблюдения выбрать положение рассматриваемой частицы, то выражение (3.8) переходит в определение (3.7), откуда видно, что угловая скорость частицы не зависит от ее трансляционной скорости.

В дальнейшем нам понадобится градиент угловой скорости $\nabla \boldsymbol{\omega}$. Введем в рассмотрение тензор второго ранга $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ посредством уравнения

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s. \quad (3.9)$$

¹¹ Подробнее об определении угловой скорости см. Приложение С, раздел С.2. (Примеч. ред.)

Справедливы уравнения структуры Э. Картана¹² [69]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (3.10)$$

Уравнение Пуассона (3.8) для неподвижной точки наблюдения можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{P} = \mathbf{\omega} \times \mathbf{P}; \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{P}, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{\Omega}$ — вспомогательный вектор, не имеющий никакого физического смысла. Из (3.11) сразу получаем выражение для угловой скорости $\mathbf{\omega}$

$$\mathbf{\omega} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.12)$$

Дифференцируя (3.9) по времени и используя свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, для вспомогательного вектора $\mathbf{\Omega}$ получаем равенство¹³

$$\nabla \mathbf{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \mathbf{\Omega}. \quad (3.13)$$

Исключая из уравнения (3.13) вспомогательный вектор $\mathbf{\Omega}$ с помощью уравнения (3.12) и используя уравнение (3.10), после некоторых преобразований получаем¹⁴

$$\nabla \mathbf{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \mathbf{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.14)$$

Откуда для ротора вектора $\mathbf{\omega}$ имеем

$$\nabla \times \mathbf{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^T - (\text{tr} \mathbf{F}) \mathbf{E}) \cdot \mathbf{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_{\times}, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_{\times}, \quad (3.15)$$

где вектор $\mathbf{f}$ называется вектором угловой деформации.

Последние два равенства справедливы для любого вектора $\mathbf{V}$ и будут использованы позднее. Пусть частица, которая в данный момент времени $\mathbf{t}$ находится в точке $\mathbf{x}$, в момент времени $\mathbf{t}_0 \leq \mathbf{t}$ находилась в точке $\mathbf{x}_0$. Введем

¹² Доказательство формулы (3.10) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.1. (Примеч. ред.)

¹³ Доказательство формулы (3.13) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.2. (Примеч. ред.)

¹⁴ Доказательство формулы (3.14) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.2. (Примеч. ред.)

в рассмотрение вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, который переводит частицу из положения $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{x}$. Имеем очевидное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где принято

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Важно подчеркнуть, что уравнение (3.16) служит для определения вектора перемещений по заданному тензору $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющему последним двум условиям в (3.17). Таким образом, тензор $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ является одной из искоемых переменных. Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (3.16) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства:

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Эти равенства можно найти в книгах [23, 24]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Данное соотношение понадобится нам при записи приведенного уравнения баланса энергии.

3.2.2. Уравнения баланса частиц и массы

Обратимся к рассмотрению закона сохранения частиц. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть Z есть данное множество односпиновых частиц. Пусть V есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. В дальнейшем V будем называть контрольным объемом. Понятно, что контрольный объем нельзя смешивать с материальным объемом среды. Граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Контрольный объем может двигаться с постоянной скоростью без изменения своей формы относительно

системы отсчета. Это обстоятельство оказывается важным при замене инерциальной системы отсчета. Пусть далее $\eta(\mathbf{x}, t)dV$ есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} \subset V$ в актуальный момент времени t

$$\eta(\mathbf{x}, t) \geq 0.$$

Можно вводить несколько различных плотностей частиц, если мы хотим учесть наличие в среде частиц разного сорта. Именно так и поступают при рассмотрении многокомпонентных сред. Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, ограничимся только одной плотностью частиц. Обобщения не вызывают затруднений.

Закон сохранения частиц в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = \int_{(V)} \chi(\mathbf{x}, t) dV - \int_{(S)} \eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0) dS, \quad (3.19)$$

где $\chi(\mathbf{x}, t)$ есть скорость рождения частиц в данной точке; $\mathbf{V}_0$ — постоянная скорость движения контрольного объема.

Рождение частиц в среде необходимо вводить, если мы хотим учесть такие явления, как фрагментация или распад частиц. Например, тело при нагрузке испытывает пластические деформации, и возникают линии скольжения (линии Людерса). До приложения нагрузки частицы составляли одну поверхность. В результате приложения нагрузки эта поверхность как бы расслаивается и превращается в две поверхности, которые скользят одна относительно другой, т. е. происходит как бы распад каждой частицы поверхности скольжения на две частицы. Подобными ситуациями мы обязаны нашему желанию описывать дискретные тела сплошными средами. Функция $\chi(\mathbf{x}, t)$ в уравнении (3.19) должна задаваться определяющими соотношениями в соответствии с рассматриваемой ситуацией. Последнее слагаемое в (3.19) необходимо преобразовать с помощью теоремы о дивергенции

$$\int_{(S)} \mathbf{n} \cdot [\eta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] dS = \int_{(V)} \nabla \cdot [\eta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] dV.$$

Учитывая произвольность выбора области интегрирования, из уравнения (3.19) получаем локальную форму закона сохранения частиц

$$\frac{d\eta(\mathbf{x}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\eta(\mathbf{x}, t)(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] = \chi(\mathbf{x}, t). \quad (3.20)$$

С использованием материальной производной это уравнение принимает вид

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} + \eta \nabla \cdot \mathbf{V} = \chi(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \eta)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.21)$$

Этому уравнению можно придать другую форму. Для этого достаточно использовать уравнение (3.18) и вспомнить формулу

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T, \quad I_3(\mathbf{g}) = \det(\mathbf{g}), \quad (3.22)$$

справедливую для любого невырожденного тензора

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= -\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \\ &= -\frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \frac{\delta I_3(\mathbf{g})}{\delta t}. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (3.21) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta t} \ln \left[\frac{\eta(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.23)$$

Введение функции распределения частиц, по существу, стирает грань между дискретными и сплошными средами, поскольку функцию распределения всегда можно выбрать достаточно гладкой или воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций.

Функции распределения частиц η можно дать другую интерпретацию, которая иногда оказывается проще для интуитивных рассуждений. Введем некую фиктивную величину v_0 , характеризующую объем, занимаемый одной частицей. Тогда величина $v_0 \eta dV$ есть объем, занимаемый частицами в бесконечно малой части dV контрольного объема V . Введем величину η_p , которую можно назвать пористостью среды, посредством формулы

$$dV - v_0 \eta dV = \eta_p dV \quad \Rightarrow \quad \eta_p = 1 - v_0 \eta. \quad (3.24)$$

Пористость среды однозначно связана с функцией распределения частиц, но для нее известно большее число экспериментальных данных. В частности, если все частицы одинаковы, то можно считать, что справедливы неравенства

$$0,26 \leq \eta_p \leq 1,$$

где левая граница отвечает плотноупакованной решетке, а правая граница указывает на отсутствие частиц в данной точке пространства (системы отсчета).

До сих пор все рассуждения относились к областям, внутри которых все рассматриваемые функции предполагались непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз. Эксперименты показывают, что эти предположения выполняются далеко не всегда. Об этом свидетельствует, например, появление линий Людерса, демонстрирующих наличие плоскостей скольжения. Вместе с тем, те же эксперименты показывают, что линии Людерса образуют дискретную сетку. Это означает, что разрывы возникают на дискретном множестве поверхностей, вне которых все рассматриваемые функции можно считать непрерывными. Естественно считать, что все фундаментальные законы, записанные в интегральной форме, справедливы всюду. Только переход к локальной их записи требует существования непрерывности и непрерывной дифференцируемости. Допустим теперь, что область V содержит поверхность S_d , при переходе через которую рассматриваемые величины могут терпеть разрывы. Поверхность S_d делит область V на две V^+ и V^- так, что $V = V^+ \cup V^-$. Для каждой из этих областей можно записать фундаментальные законы, из которых и следуют условия на разрывах.

Запишем уравнение баланса частиц для всей области V и для обеих подобластей V^+ и V^-

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = \int_{(V)} \chi(\mathbf{x}, t) dV - \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^+)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = \int_{(V^+)} \chi(\mathbf{x}, t) dV - \int_{(S^+)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^-)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = \int_{(V^-)} \chi(\mathbf{x}, t) dV - \int_{(S^-)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (3.27)$$

где единичный вектор $\mathbf{n}$ есть вектор внешней нормали к соответствующей области. Складывая равенства (3.26) и (3.27) и учитывая (3.25), получаем **уравнение баланса частиц на поверхности разрыва**

$$\int_{(S_d)} \mathbf{n} \cdot [\eta \mathbf{V}] dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot [\eta \mathbf{V}] = 0, \quad (3.28)$$

где, как обычно, квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках.

Наряду с плотностью частиц $\eta(\mathbf{x}, t)$ введем неотрицательную функцию $\rho(\mathbf{x}, t)$, называемую плотностью массы. Эти две функции в общем случае следует рассматривать как независимые, поскольку не все частицы среды обладают массой. Повторяя все рассуждения, которые привели нас к уравнению (3.20), приходим к локальной форме закона сохранения массы

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \ln \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (3.29)$$

Обычно закон сохранения массы принято записывать в виде

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3.30)$$

Это уравнение является следствием первого уравнения (3.29) и по структуре аналогично уравнению баланса частиц (3.21).

В отличие от уравнения (3.23) для плотности частиц, уравнение (3.29) выражает закон сохранения массы, которая не рождается и не уничтожается. В данной работе различие между плотностью частиц и плотностью массы будет сохраняться и окажется важной при формулировке уравнения баланса энергии и вытекающих из него следствий. В частности, понадобится следующая комбинация уравнений (3.23) и (3.29):

$$\frac{\delta z}{\delta t} = -\frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}; \quad z \equiv \ln \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t) \eta_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, t)} \right], \quad (3.31)$$

где $\eta_0(\mathbf{x})$ и $\rho_0(\mathbf{x})$ суть некие отсчетные распределения частиц и массы, например, начальные распределения.

Обычно считается [23, 24, 26], что из уравнения (3.29) следует интеграл

$$\rho(\mathbf{x}, t) I_3(\mathbf{g}_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0) I_3(\mathbf{g}), \quad (3.32)$$

но, строго говоря, это выражение не является общим интегралом. Действительно, допустим, что мы наблюдаем недеформирующуюся, но неоднородную среду из движущейся инерциальной системы отсчета. Тогда имеем

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad I_3(\mathbf{g}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0).$$

Смысл последнего выражения непонятен. Как оно должно выглядеть на самом деле? Для этого нужно просто проинтегрировать уравнение (3.29).

Запишем (3.29) в развернутой форме

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V} \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \mathbf{V} = \text{const}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{0}.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{V}t),$$

где ψ есть произвольная функция.

Полагая здесь $t = 0$, находим функцию ψ . В результате получаем

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{V}t). \quad (3.33)$$

Только в случае однородной среды, когда плотность среды одинакова во всех точках, решения (3.32) и (3.33) совпадают. Подчеркнем, что решение (3.33) справедливо только при выполнении условия $\mathbf{V} = \text{const}$. В общем случае уравнение (3.23), видимо, не может быть проинтегрировано. Его нужно рассматривать как одно из уравнений, составляющих полную систему уравнений динамики сплошной среды. В дальнейшем уравнение (3.29), которое часто называют уравнением неразрывности, будет использоваться в следующем виде:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \zeta = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (3.34)$$

Здесь и далее будем считать, что $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$. Учет движения контрольного объема осуществляется простой заменой

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_0.$$

Уравнение баланса массы на поверхности разрыва имеет вид

$$\int_{(S_d)} \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] = 0, \quad (3.35)$$

где квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках. Уравнение (3.35) получается аналогично уравнению (3.28).

3.2.3. Динамические структуры

На неполноту ньютоновской механики впервые указал Л. Эйлер еще в 1771 г., но и по настоящее время это обстоятельство не учитывается в должной мере. Материальную точку можно назвать бесспиновой частицей, поскольку она не реагирует на спинорные движения. В эйлеровой механике в качестве исходного объекта вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Такое тело-точку будем

называть односпиновой частицей. Относительно односпиновой частицы считается, что она существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение односпиновой частицы определено, если заданы ее вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела-точки находятся по формулам (2.12). Именно односпиновые частицы положены в основу современных мультиполярных теорий [59–61]. Далее мы будем придерживаться определений кинетической энергии, количества движения и кинетического момента (динамического спина) тела-точки, приведенных во второй главе (см. разд. 2.2).

В дальнейшем под телом $\mathcal{A}$ будет пониматься множество тел-точек, входящих в контрольный объем V . При пространственном описании сплошных сред тело $\mathcal{A}$ необходимо считать открытым¹⁵ по нескольким причинам. Во-первых, в контрольном объеме в разные моменты времени находятся разные тела-точки. Во-вторых, на тело $\mathcal{A}$ могут действовать разного рода излучения, например, облучение лазером.

Для тела $\mathcal{A}$, т. е. для совокупности односпиновых частиц в контрольном объеме, кинетическая энергия определяется выражением

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}) &= \int_{(V)} \mathcal{K} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \\ &= \int_{(V)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) \rho(\mathbf{x}, t) dV, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где величина $\mathcal{K}$ называется массовой плотностью кинетической энергии; тензоры $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ суть массовые плотности тензоров инерции, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{P}^T. \quad (3.37)$$

Кроме того, потребуем, чтобы массовая плотность кинетической энергии была бы положительно определенной,

$$\mathcal{K} = (\mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega} > 0. \quad (3.38)$$

Условие (3.38) будет выполнено, если тензор $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$ положительно определен. В ряде идеализированных задач можно принимать более слабое условие неотрицательной определенности тензора $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$.

¹⁵ Определения тела и его окружения, понятия закрытого и открытого тела, а также аксиомы аддитивности для кинетической энергии, количества движения и кинетического момента содержатся в подразделе 2.2.2. (Примеч. ред.)

Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{(V)} \mathbf{K}_1 \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathbf{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (3.39)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \int_{(V)} \mathbf{K}_2^Q \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{L}(\mathbf{x}, t), \quad (3.40)$$

где величина

$$\mathbf{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (3.41)$$

называется массовой плотностью динамического спина.

3.2.4. Первый закон динамики Эйлера

Формулировка фундаментальных законов при пространственном описании отличается тем, что эти законы должны записываться для открытых систем, т. е. для систем, которые обмениваются со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. При пространственном описании запись первого закона динамики Эйлера и введение тензора напряжений практически аналогичны этим операциям при материальном описании. Количество движения частиц, находящихся в контрольном объеме V , определяется выражением (3.39). Первый закон динамики Эйлера (2.54) заключается в следующем утверждении: *скорость изменения количества движения тела $\mathcal{A}$ равна внешней силе, действующей на тело $\mathcal{A}$, плюс скорость подвода количества движения в тело $\mathcal{A}$.*

При пространственном описании первый закон динамики Эйлера (2.54) записывается в виде равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{F} + \mathbf{k}_1) dV + \int_{(S)} [\mathbf{T}_{(n)} - \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \otimes \mathbf{K}_1] dS, \quad (3.42)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S , ограничивающей контрольный объем V . Вектор $\mathbf{T}_{(n)}$ представляет собой силу, действующую на единицу площади поверхности S с нормалью $\mathbf{n}$ и моделирующую воздействие частиц среды, окружающей контрольный объем. Вектор $\mathbf{F}$ характеризует внешнее силовое воздействие, приходящееся на единицу массы. Вектор $\mathbf{k}_1$ определяет скорость подвода количества движения в контрольный объем,

например за счет облучения. Поскольку в данной работе принимается, что масса системы не меняется, то в дальнейшем считаем $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$. Последнее слагаемое определяет подвод количества движения в область V , который имеет место, например, за счет движения системы отсчета относительно среды.

Рассмотрим малый представительный объем $V \sim O(\varepsilon^3)$, где ε — безразмерный малый параметр. Используя равенство

$$\int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{K}_1) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{K}_1) dV,$$

перепишем первый закон динамики (3.42) в виде

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_1 dV}_{O(\varepsilon^3)} = \underbrace{\int_{(V)} [\rho \mathbf{F} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{K}_1)] dV}_{O(\varepsilon^3)} + \underbrace{\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS}_{O(\varepsilon^2)}.$$

Таким образом, в случае малого представительного объема асимптотически главный член последнего уравнения имеет вид

$$\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, при введении которого были использованы стандартные рассуждения¹⁶. Обратим внимание, что тензор напряжений определен в пространстве, а не в материале¹⁷. Таким образом, имеем

$$\int_{(V)} \left[\rho \left(\frac{d}{dt} \mathbf{K}_1 + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{K}_1 \right) - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \left(\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) \mathbf{K}_1 \right] dV = \mathbf{0}.$$

В локальной форме первый закон динамики с учетом уравнения (3.29) принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{d}{dt} \mathbf{K}_1 + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{K}_1 \right) \equiv \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}_1(\mathbf{x}, t). \quad (3.43)$$

Первый закон динамики Эйлера на поверхности разрыва с учетом (3.35) приводит к условию

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} [\mathbf{K}_1], \quad (3.44)$$

где квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках.

¹⁶ Формула $\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ представляет собой хорошо известную формулу Коши, которая справедлива как при пространственном, так и при материальном описании, а ее аналог распространяется на двумерные среды, в том числе и обладающие кривизной. (Примеч. ред.)

¹⁷ Об определении тензора напряжений в материале см. Приложение J. (Примеч. ред.)

3.2.5. Второй закон динамики Эйлера

Второй закон динамики в явной форме был впервые сформулирован Л. Эйлером в 1771 г. Однако в механику сплошных сред он был в неявной форме введен только в начале XX в. в книге [59], в которой был использован вариационный принцип. Стандартные формы вариационного принципа неприменимы к открытым системам. Более современное изложение теории сплошных сред с учетом независимого второго закона динамики можно найти в работах [60, 61], в которых используется материальное описание и неупругие среды не рассматриваются. В данной работе используется подход Эйлера в пространственном описании, который обладает большей общностью. Второй закон динамики Эйлера (2.64) заключается в утверждении: *скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{A}$ равна внешнему моменту, действующему на тело $\mathcal{A}$, плюс скорость подвода кинетического момента в тело $\mathcal{A}$.*

При пространственном описании второй закон динамики Эйлера (2.64) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_2 dV &= \int_{(V)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \\ &+ \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)} - \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{K}_2) dS. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Здесь $\mathbf{K}_2$ есть массовая плотность кинетического момента, определенная выражением (3.40), где опорная точка Q выбрана в начале системы отсчета; $\mathbf{L}$ есть массовая плотность внешнего момента. Вектор $\mathbf{M}_{(n)}$ представляет собой момент, действующий на единицу площади поверхности S с нормалью $\mathbf{n}$.

Стандартные рассуждения позволяют ввести в рассмотрение тензор моментных напряжений $\mathbf{M}$ и формулу Коши

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}, \quad (3.46)$$

а также локальную форму второго закона

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} &= \rho \left[\mathbf{V} \times \mathbf{K}_1(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \right] \equiv \\ &\equiv \rho \left[\mathbf{V} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $\mathbf{L}$ — плотность динамического спина, определенная выражением (3.41).

Второй закон динамики Эйлера на поверхности разрыва с учетом (3.35), (3.44) ведет к следующему условию:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{M}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} [\mathcal{L}], \quad (3.48)$$

где квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках.

3.2.6. Уравнение баланса энергии

В механику сплошных сред уравнение баланса энергии проникает под названием первого начала термодинамики. Несмотря на то что уравнение баланса энергии широко используется при построении математических моделей сплошных сред, статус этого закона в механике до сих пор окончательно не определен.

Прежде чем формулировать уравнение баланса энергии, обратимся к представлению о механической энергии. Именно с последней, как правило, имеют дело в классической механике, когда говорят, например, об интеграле энергии. Примем определение: *механической энергией тела $\mathcal{A}$ называется сумма кинетической энергии тела $\mathcal{A}$, потенциала внутренних сил и потенциала внешних сил*. Для введения механической энергии достаточно использовать первые два закона динамики. Механическая энергия имеет ограниченное значение. В частности, она оставляет за рамками анализа такие понятия, как температура, энтропия, химический потенциал и др.

Уравнение баланса энергии в качестве независимого постулата механики впервые было введено Дж. Грином [33]. При этом было введено новое понятие внутренней энергии. Для упругих тел внутренняя энергия с точностью до постоянной величины совпадает с потенциалом внутренних сил. Тела общего вида Дж. Грин не рассматривал.

Примем, что наряду с такими атрибутами тела, как количество движения и кинетический момент, оно обладает еще одной характеристикой, называемой полной энергией тела $\mathcal{A}$ и обозначаемой символом $E(\mathcal{A})$. Полная энергия тела является новой характеристикой тела и нуждается в определении¹⁸.

Удивительно то, что понятие энергии, будучи одним из наиболее употребительных понятий в физике, механике и термодинамике, вплоть до настоящего времени не имеет общего определения. Всегда, когда в рассмотрение вводится новая характеристика, должен вводиться и новый фундаментальный закон для этой характеристики. Первым законом динамики в рассмотрение

¹⁸ См. раздел 2.4, где аксиоматически вводятся понятия полной и внутренней энергии. (Примеч. ред.)

вводятся силы, вторым фундаментальным законом в рассмотрение вводятся моменты. Третий фундаментальный закон управляет энергетическими потоками и называется уравнением баланса энергии. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение новое понятие внутренней энергии.

В качестве исследуемого тела $\mathcal{A}$, как и ранее, выбираем совокупность частиц, попадающих в данный момент времени в контрольный объем V . Тогда в соответствии с указанным ранее имеем

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}) = \int_{(V)} [\rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{K} + \eta(\mathbf{x}, t) \mathcal{U}] dV(\mathbf{x}), \quad (3.49)$$

где $\mathcal{K}$ есть массовая плотность кинетической энергии, $\mathcal{U}$ есть плотность внутренней энергии, причем плотность кинетической энергии определена выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

где массовые плотности тензоров инерции $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{C}_0(\mathbf{x})$ вычислены в произвольно выбираемом отсчетном¹⁹ положении, т. е. не зависят от времени.

Следует обратить внимание, что кинетическая и внутренняя энергия по-разному представлены в определении (3.49). Кинетическая энергия является аддитивной энергией массы и потому может быть представлена интегралом по массе. Внутренняя энергия аддитивна по частицам среды, среди которых могут быть и безынерционные частицы. Поэтому внутреннюю энергию нельзя представить интегралом по массе без существенных противоречий и потерь. В качестве простого примера рассмотрим три материальных точки, соединенных безынерционными пружинами. Данное тело состоит из шести тел-частиц. Кинетическая энергия тела есть сумма кинетических энергий материальных точек. Внутренняя энергия есть сумма внутренних энергий материальных точек плюс сумма внутренних энергий пружин, не обладающих массой. В механике сплошных сред внутреннюю энергию принято считать аддитивной функцией массы, т. е. заменять в (3.49) плотность частиц на плотность массы, но это, строго говоря, неправильно. Внутренняя энергия характеризует

¹⁹ Здесь речь идет не об отсчетной конфигурации, используемой при материальном описании. В системе отсчета можно ввести произвольное распределение трехгранников, относительно которых и вычисляются все повороты. Можно использовать один и тот же трехгранник во всех точках системы отсчета.

свойство тела запасать и отдавать энергию только за счет изменения конфигурации системы и неких дополнительных параметров, подобных энтропии.

Первый закон термодинамики (уравнение баланса энергии) заключается в утверждении: *скорость изменения полной энергии тела $\mathcal{A}$ равна мощности $N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$ плюс скорость подвода энергии в тело $\mathcal{A}$ от внешних источников*

$$\frac{d}{dt}E(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (3.50)$$

Для мощности внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$ имеем представление

$$\begin{aligned} N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = & \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] dV(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{(S)} [\mathbf{T}_{(n)}(\mathbf{x}_S, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_S, t) + \mathbf{M}_{(n)}(\mathbf{x}_S, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_S, t)] dS. \end{aligned}$$

Скорость подвода энергии от внешних источников является более сложным понятием. Можно принять, что величина $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ аддитивна как по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$, так и по телам окружения. Кроме того, можно доказать следующее свойство²⁰: $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\delta(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Скорость подвода энергии определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = & \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) q(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) + \int_{(S)} h_n(\mathbf{x}_S) dS - \\ & - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} [\rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{K} + \eta(\mathbf{x}, t) \mathcal{U}] dS, \end{aligned}$$

где $q(\mathbf{x}, t)$ есть подвод энергии в единицу времени в частицы тела $\mathcal{A}$; $h_n(\mathbf{x}_S)$ — скорость подвода энергии через границу контрольного объема. Подвод энергии через границу происходит в том случае, когда поток энергии направлен внутрь контрольного объема, т. е. при $h_n(\mathbf{x}_S) < 0$. В противном случае происходит отвод энергии через границу контрольного объема. По этой же причине последнее слагаемое в правой части уравнения записано со знаком минус.

Таким образом, для тела $\mathcal{A}$, находящегося внутри контрольного объема V , уравнение баланса энергии записывается в форме следующего интегрального

²⁰ При доказательстве, кроме уравнения баланса энергии, следует использовать законы динамики Эйлера. (Примеч. ред.)

равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} (\rho \mathcal{K} + \eta \mathcal{U}) dV &= \int_{(V)} (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q) dV + \\ &+ \int_{(S)} (\mathbf{T}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega} + h_{(n)}) dS - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (\rho \mathcal{K} + \eta \mathcal{U}) dS. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Поток энергии $h_{(n)}$ после стандартных рассуждений выражается через вектор $\mathbf{h}$ потока энергии по правилу Стокса

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}. \quad (3.52)$$

Обычно поток энергии сводится к потоку тепла. Поэтому вектор $\mathbf{h}$ принято называть вектором потока тепла. Это возможно, поскольку само понятие тепла не определено. В данной работе понятие вектора потока тепла в качестве общего термина не используется, поскольку в традиционное представление о тепле плохо вписывается, например, подвод электрической энергии к телу.

Уравнение баланса энергии на поверхности разрыва принимает вид

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{h} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} [\rho \mathcal{K} + \eta \mathcal{U}], \quad (3.53)$$

где квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках.

Используя теорему о дивергенции и произвольность выбора контрольного объема, приходим к локальной форме уравнения баланса энергии

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{d\mathcal{K}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) + \eta \left(\frac{d\mathcal{U}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{U} \right) + \mathcal{K} \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) + \\ + \mathcal{U} \left(\frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} + (\nabla \cdot \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ + \mathbf{T}^T \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Используя определение материальной производной, уравнение баланса частиц (3.20), уравнение баланса массы (3.29), уравнение (3.31), первый (3.43) и второй (3.47) законы динамики, уравнение баланса энергии переписываем в виде²¹

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} + \mathbf{T}^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q. \quad (3.54)$$

²¹ Вывод формулы (3.54) можно найти в Приложении D, подраздел D.2.1. (*Примеч. ред.*)

Правая часть равенства (3.54), среди прочего, содержит мощность силовых и моментных напряжений. Часть этой мощности идет на изменение внутренней энергии. Оставшаяся часть мощности частично остается в теле в форме тепла, а частично рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = -(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_f)\mathbf{E} + \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_f, \quad \text{tr } \boldsymbol{\tau}_e = \text{tr } \boldsymbol{\tau}_f = 0, \quad (3.55)$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_f$ есть давление, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f$ есть девиатор тензора напряжений, а индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей.

Напряжения, не зависящие от скоростей, будем называть упругими напряжениями. Индексом “f” обозначена вся оставшаяся часть напряжений, которые будем называть диссипативными. Здесь следует обратить внимание на то, что определение упругих напряжений отнюдь не означает их обратимости или еще каких-то специальных свойств. Это не так. Упругость означает только то, что заявлено ранее, а именно независимость тензоров напряжений $\boldsymbol{\tau}_e$ от скоростей, и не более того. Используя разложение (3.55), уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} = & \frac{\mathbf{p}_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta\mathbf{q} - \mathbf{p}_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Уравнение баланса энергии, записанное в форме (3.56), нуждается в дальнейшем преобразовании к специальному виду, называемому *приведенным уравнением баланса энергии*. В частности, из уравнения (3.56) не видно, от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме:

$$\frac{\delta\eta\mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} + \eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}, \quad (3.57)$$

где тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются первой и второй мерой деформации, соответственно, скалярные функции ϑ и $\mathcal{H}$ называются температурой и плотностью энтропии. Равенство типа (3.57) называется *приведенным уравнением баланса энергии*. При его написании в рассмотрение введены два новых параметра: температура ϑ и плотность энтропии $\mathcal{H}$. Тот факт, что введены только два новых параметра, определяется исключительно нашим желанием обойтись

простейшими средствами. С не меньшим основанием вместо (3.57) мы могли бы написать приведенное уравнение баланса энергии в такой, например, форме

$$\frac{\delta \eta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \eta \vartheta_1 \frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta t} + \eta \vartheta_2 \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta t},$$

где в каждой точке системы отсчета введены две температуры и две энтропии. Так, например, приходится поступать в теории оболочек [67, 68]. Из уравнения (3.57) видно, что внутренняя энергия зависит от мер деформации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, а также от энтропии. В указании аргументов, от которых зависит внутренняя энергия, и состоит главное назначение приведенного уравнения баланса энергии, вывод которого будет приведен в следующем разделе.

3.3. Приведенное уравнение баланса энергии

Переход от уравнения баланса энергии (3.56) к приведенному уравнению баланса энергии не является формальным преобразованием, но существенно опирается на интуитивные представления. Вместе с тем, даже формальные нарушения уравнения (3.56) недопустимы. Далее будет показано, что мощность упругих напряжений всегда приводится к нужному виду. Поэтому в дальнейшем и неформальном преобразовании нуждаются только подчеркнутые слагаемые в уравнении (3.56). Именно в них сокрыты многие физические явления, выходящие за рамки, так сказать, классической механики. Ниже будут рассмотрены только простейшие из таких явлений. К ним относятся явления распада частиц или образование новых (фрагментация среды), а также тепловые явления. Заметим, что пластичность и другие проявления неупругих свойств материалов не являются фундаментальными (определяющими) свойствами. Они являются внешними проявлениями-следствиями других факторов. В качестве измеряемых параметров (параметров состояния), интегрально характеризующих свойства материала, выберем плотность распределения частиц в пространстве η и температуру ϑ . При этом считается, что мы располагаем соответствующими приборами, т. е. микроскопом и термометром. В качестве сопряженных переменных, подлежащих определению, выбираем химический потенциал ψ и энтропию $\mathcal{H}$. Принятые наименования этих переменных не обязательно совпадают с терминами, которые используются в литературе. Как ни странно, но проблема в том, что строгие определения широко используемых понятий химического потенциала и энтропии в литературе отсутствуют. Поскольку далее вводятся определения этих понятий, то возможная несогласованность в терминах не является существенной.

В качестве одной части определения для химического потенциала и энтропии принимаем равенство²²

$$\begin{aligned} \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} + \eta \frac{\delta \psi}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \\ + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Равенства (3.58), конечно, недостаточно для того, чтобы однозначно определить химический потенциал и энтропию. В дальнейшем уравнение (3.58) необходимо будет разбить на два уравнения: уравнение теплопроводности и уравнение диффузии. Но сейчас нам важно только то, что введение понятий энтропии и химического потенциала равенством (3.58) всегда возможно и принципиально не может приводить к противоречиям. С формальной точки зрения теория, основанная на равенстве (3.58), будет безупречной. Но может случиться, что она не будет описывать те или иные экспериментальные данные. Это будет означать, что одного химического потенциала и одной энтропии недостаточно и необходимо контролировать не только плотность частиц и температуру, но и дополнительные параметры, например, вводить в рассмотрение несколько температур и, соответственно, энтропий, как это делается в динамике разряженного газа.

Левая часть равенства (3.58) содержит два формально похожих слагаемых, но их физический смысл существенно различен. Энтропия характеризует переходы энергии из одной формы в другую и миграцию этих переходов внутри тела. Химический потенциал отвечает за диффузию частиц внутри тела. При этом в данной работе считается, что диффундируют легкие частицы, массой которых можно пренебречь в сравнении с массой частиц основного тела. Иными словами, имеются в виду процессы типа растворения газа в твердом теле. Можно, конечно, при желании учесть и массу диффундирующих частиц. Следует просто вместо уравнения (3.29) записать уравнение с источником в правой части. Указанный физический смысл необходимо иметь в виду при формулировке определяющих уравнений для энтропии и химического потенциала.

Обратим внимание на чрезвычайно важное с теоретической точки зрения обстоятельство. В литературе [36] приводится такое, например, определение

²² В неопубликованной работе П. А. Жилина разработан несколько иной подход к определению химического потенциала, который соответствует ситуации, когда в системе нет никаких химических реакций, а есть только структурные превращения типа фазовых переходов. Развитие идей этой неопубликованной работы содержится в Приложении Е. (Примеч. ред.)

химического потенциала: “Химическим потенциалом называется производная от внутренней энергии по числу частиц, составляющих рассматриваемую систему”. При этом подразумевается, что внутренняя энергия уже каким-то образом определена. Обычно постулируется существование некоей функции состояния, называемой внутренней энергией. Но смысл слова “существование” непонятен. Когда мы говорим, что *существует сундук, где деньги лежат*, то мы имеем в виду реальное существование сундука. Однако внутренняя энергия, как объективно существующая (измеряемая) величина, в Природе не существует. Равно как не существует в Природе объект, называемый кинетической энергией. Последнюю можно вычислить по измеряемым параметрам, но непосредственно измерить кинетическую энергию невозможно. Аналогично обстоит дело и с внутренней энергией. Обратим теперь внимание, что при излагаемом подходе внутренняя энергия пока еще не определена. О ней сказано, что есть такая новая физическая характеристика тела, поведение которой определяется уравнением баланса энергии. Но как математический объект, т. е. функция какого-то числа заданных аргументов, внутренняя энергия еще не определена. Заранее этого сделать нельзя: нельзя сначала определить внутреннюю энергию, а затем химический потенциал и энтропию. Все эти понятия могут быть введены только *одновременно*. Если мы введем несколько температур и, соответственно, несколько энтропий, то изменится и смысловое содержание внутренней энергии. В установлении связи между внутренней энергией, химическим потенциалом, энтропией, давлением и так далее и состоит основное назначение приведенного уравнения баланса энергии, к выводу которого мы и переходим. Обратим только внимание на то, что ни здесь, ни где-либо в другом месте нам не понадобятся понятия равновесных и неравновесных процессов.

Используя уравнение (3.58), уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} = & \frac{p_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \eta \frac{\delta\psi}{\delta t} + \eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \\ & + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Осталось преобразовать последние два слагаемых в правой части уравнения (3.59). Для этого нам понадобится тождество²³, справедливое для любого

²³ Доказательство этого тождества можно найти в Приложении D, подраздел D.2.2. (Примеч. ред.)

вектора $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}.$$

С учетом этого тождества и равенства (3.18) имеем²⁴

$$\boldsymbol{\tau}_e^\top \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^\top) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_\times \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t},$$

где вектор $\boldsymbol{\tau}_\times$ есть векторный инвариант тензора $\boldsymbol{\tau}_e$.

С учетом равенства (3.14) для тензора моментных напряжений имеем²⁵

$$\mathbf{M}_e^\top \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_e^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}_e^\top \cdot \mathbf{F})_\times \times \mathbf{P}]^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^\top) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}.$$

Принимая указанные выше равенства, вместо (3.59) получаем окончательную форму приведенного уравнения баланса энергии

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta \mathcal{U})}{\delta t} &= \frac{p_e + \eta \mathcal{U} \delta \rho}{\rho \delta t} + \eta \frac{\delta \psi}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \\ &\quad - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^\top + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^\top) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \\ &\quad + \mathbf{M}_e^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}_e^\top \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_\times \times \mathbf{P}]^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Приведенное уравнение баланса энергии показывает, что внутренняя энергия является функцией следующих аргументов:

$$\eta \mathcal{U} = \mathcal{F}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}).$$

Кроме того, из уравнения (3.60) вытекают соотношения, называемые соотношениями Коши–Грина,

$$\begin{aligned} p_e &= \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\eta \mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \psi}; \\ \boldsymbol{\tau}_e &= - \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\top - \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Что касается коэффициента при материальной производной от тензора поворота, то при выводе формулы для него необходимо учесть, что компоненты тензора поворота не являются независимыми. Действительно, согласно

²⁴ Доказательство тождества для девиатора тензора напряжений можно найти в Приложении D, подраздел D.2.3. (*Примеч. ред.*)

²⁵ Доказательство тождества для тензора моментных напряжений можно найти в Приложении D, подраздел D.2.4. (*Примеч. ред.*)

модифицированному уравнению Пуассона (3.8) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота следующего вида²⁶:

$$\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0,$$

которое должно выполняться для любого симметричного тензора $\mathbf{A}$. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_e^\top \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_\times \times \mathbf{P} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top.$$

Чтобы исключить из указанного уравнения произвольный симметричный тензор $\mathbf{A}$, необходимо умножить это уравнение на тензор $\mathbf{P}^\top$ слева и вычислить векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства. Результатом указанных операций будет следующее уравнение:

$$\left[\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{M}_e^\top \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \forall \mathbf{B} : \mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top, \quad (3.62)$$

которое должно выполняться для любого антисимметричного тензора $\mathbf{B}$. Поскольку тензоры силовых и моментных напряжений уже определены соотношениями Коши–Грина (3.61), условие (3.62) налагает некоторые ограничения на задание внутренней энергии, а именно внутренняя энергия должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (3.63)$$

где $\mathbf{B}$ — произвольный антисимметричный тензор.

Таким образом, внутренняя энергия не может быть произвольной функцией аргументов $\mathbf{P}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{F}$. Чтобы выявить, от каких именно аргументов зависит внутренняя энергия, необходимо найти общее решение уравнения (3.63) с частными производными первого порядка. Теория таких уравнений²⁷ хорошо разработана [70]. Помимо уравнения (3.63), внутренняя энергия должна удовлетворять еще одному уравнению в частных производных. Действительно, тензор $\boldsymbol{\tau}_e$ является девиатором, т. е. его след должен равняться нулю. Поэтому из соотношений Коши–Грина (3.61) имеем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^\top \cdot \cdot \mathbf{g} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^\top \cdot \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (3.64)$$

²⁶ Доказательство этого тождества можно найти в Приложении D, подраздел D.2.5. (Примеч. ред.)

²⁷ О решении уравнений типа (3.63) см. раздел 4.5. (Примеч. ред.)

Для нахождения общего решения уравнения (3.64) необходимо выписать так называемую характеристическую систему [70] для уравнения (3.64). Она имеет вид

$$\frac{dg}{ds} = \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{F}. \quad (3.65)$$

Получили систему 18-го порядка, которая имеет не более 17 независимых интегралов. Произвольная функция этих 17 интегралов и является общим решением уравнения (3.64). Далее нужно потребовать, чтобы общее решение уравнения (3.64) удовлетворяло уравнению (3.63) при произвольном выборе антисимметричного тензора $\mathbf{B}$, характеристическая система для которого имеет вид

$$\frac{dg}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.66)$$

Получили систему уравнений 21-го порядка, которая имеет не более 20 независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от антисимметричного тензора $\mathbf{B}$. Системы (3.65) и (3.66) служат для определения мер деформации, от которых зависит свободная энергия и которые должны быть интегралами этих уравнений. Аналогичная ситуация рассматривалась в работе [67], в которой показан метод отыскания мер деформации в нелинейной теории оболочек²⁸. Здесь мы не будем строить эти интегралы, чтобы не загромождать изложение техническими деталями. Далее будет подробно рассмотрен частный случай неполярной среды.

3.4. Второй закон термодинамики

Начнем с обсуждения уравнения баланса энергии (3.51). Скорость подвода энергии в нем определена тремя величинами $\mathbf{q}$, $h_{(n)}$ и последним интегралом в правой части (3.51). Что касается последнего слагаемого, то оно не имеет отношения к тепловой энергии. Поэтому нужно обсудить только первые два слагаемых, т. е. величину

$$\int_{(V)} \eta \mathbf{q} dV + \int_{(S)} h_n dS = \int_{(V)} (\eta \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h}) dV. \quad (3.67)$$

Именно эта величина определяет скорость подвода тепловой энергии в рассматриваемое тело. Однако это не весь подвод (отвод) энергии. Нужно

²⁸ О методе отыскания мер деформации в нелинейной теории оболочек см. Приложение J. (*Примеч. ред.*)

еще учесть диссипацию энергии внутри самого выделенного тела. По определению и по физическому смыслу внутренняя энергия не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, **обязана зависеть от** неких относительных **скоростей** игнорируемых нами переменных²⁹. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от актуальной конфигурации тела, т. е. от взаимных положений и поворотов частиц, составляющих тело, но и от некоего параметра, называемого плотностью энтропии $\mathcal{H}$, причем полная энтропия системы считается аддитивной функцией

$$H = \int_{(V)} \eta \mathcal{H} dV. \quad (3.68)$$

Введение энтропии — это попытка учесть зависимость внутренней энергии от скоростей не учитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но с практической точки зрения этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными свойствами. Коль скоро мы ввели новый параметр (новую степень свободы), мы должны для него сформулировать некий дополнительный закон, который играет роль второго закона термодинамики в механике сплошных сред. Вид этого закона подсказывается нам простым сравнением уравнений баланса энергии в формах (3.56) и (3.57), из которого следует равенство

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (3.69)$$

Это равенство перепишем в другой форме

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} = \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \eta \delta, \quad \eta \delta \equiv \mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (3.70)$$

В левой части этого равенства стоит скорость подвода энергии. Часть этой энергии аккумулируется в теле. Она идет на изменение внутренней энергии, что и указывается первым слагаемым в правой части равенства (3.70). Это слагаемое представлено в виде произведения двух функций: температуры ϑ и материальной производной от энтропии. Энтропию можно считать не имеющей размерности. Поэтому температура имеет размерность энергии. В общем

²⁹ Подробнее об этом см. подраздел 2.5.3. (*Примеч. ред.*)

случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения **температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы**. Принятая трактовка энтропии и температуры несколько отличается от трактовки, используемой в физике. В частности, энтропия не является логарифмом вероятности чего-то, что вообще нельзя определить в механике сплошных сред. Тем не менее все сказанное полностью согласуется с теми действиями, которые мы совершаем при введении энтропии и температуры в механике, уравнения которой никак не связаны с тем смыслом, который приписывается температуре и энтропии в статистической физике. Второе слагаемое $\eta\delta$ в уравнении (3.70) есть часть тепловой энергии, которая не может быть аккумулирована в данной точке тела и либо излучается в окружающую среду, либо переносится в другие точки тела посредством вектора потока тепла.

Уравнение (3.70) допускает достаточную свободу интерпретации, чтобы удовлетворить весьма широким потребностям. Иными словами, принятие уравнения (3.70), называемого уравнением теплопроводности, не содержит в себе ничего обременительного, поскольку оно включает в себя несколько неизвестных, т. е. не замкнуто. Назначение второго закона термодинамики состоит, в частности, в том, чтобы сказать нечто определенное о неизвестных, входящих в уравнение (3.70), т. е. идеологически обосновать процедуру замыкания уравнения (3.70). В частности, второй закон термодинамики или, что то же самое, опыт утверждает, что

$$\eta\delta \equiv \mathbf{T}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \geq 0. \quad (3.71)$$

Последнее неравенство можно интерпретировать как утверждение о том, что **силы трения**, а именно с ними связываются напряжения $\mathbf{T}_f$ и $\mathbf{M}_f$, **не могут совершать положительной работы**. Кроме того, важнейшим опытным фактом, известным под названием нулевого закона термодинамики, является утверждение о том, что **тепло всегда течет от горячего к холодному**, т. е. утверждается справедливость неравенства

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (3.72)$$

Как известно, оба неравенства (3.71) и (3.72) не противоречат никаким опытным фактам и могут считаться надежно установленными. Поэтому формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если неравенства (3.71) и (3.72) вытекают из нее в качестве следствий. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в книге [34]. Исходя из

равенства (3.70), мы видим, что если в системе нет механизмов внутреннего рассеяния энергии, т. е. $\delta = 0$, то все тепло аккумулируется в системе и сохраняется в нем. По аналогии с “чистой” механикой можно сказать, что в этом случае мощность теплового воздействия $\eta \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h}$ оказывается материальной производной от некоей функции, т. е. тепловая энергия является в некотором смысле консервативной. Если диссипация в системе имеется и выполняется неравенство (3.71), то из равенства (3.70) следует неравенство

$$\eta \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h} \leq \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \quad (3.73)$$

которое в литературе [25] трактуется как ограничение сверху для скорости подвода тепла. С подобной трактовкой трудно согласиться, ибо и температура, и энтропия сами зависят от скорости подвода тепла. Пусть, например, даны две функции $\mathbf{y}(\mathbf{t}) > 0$ и $B(\mathbf{t}) > 1$. Для них справедливо неравенство $\mathbf{y}(\mathbf{t}) < \mathbf{y}(\mathbf{t})B(\mathbf{t}) + 1$. Однако отсюда не следует, что функция $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ ограничена сверху. Вообще, в так называемой рациональной термодинамике далеко не все утверждения кажутся бесспорными.

Рассмотрим, например, неравенство Клаузиуса–Дюгема. Для его получения достаточно записать выражение для материальной производной от энтропии и затем воспользоваться уравнением теплопроводности (3.70). В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV &= \int_{(V)} \frac{\eta(\mathbf{q} + \delta) + \nabla \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dV = \\ &= \int_{(V)} \frac{\eta \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS + \int_{(V)} \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta}{\vartheta^2} dV + \int_{(V)} \frac{\eta \delta}{\vartheta} dV. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Учитывая неравенства (3.71) и (3.72), получаем

$$\int_{(V)} \eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV \geq \int_{(V)} \frac{\eta \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS. \quad (3.75)$$

Это и есть неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое положено в основу большинства современных работ по механике сплошных сред. Разумеется, оно правильно. Но из этого неравенства не следует ни принцип диссипации (3.71), ни нулевое начало термодинамики (3.72). Из неравенства Клаузиуса–Дюгема вытекает более слабое неравенство

$$\eta \delta + \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (3.76)$$

Это неравенство является слишком слабым для физических приложений. Поэтому в данной работе под вторым законом термодинамики будет пониматься уравнение теплопроводности (3.70) в совокупности с неравенствами (3.71) и (3.72). Можно также добавить, что в современных теориях придается явно преувеличенное значение таким понятиям, как температура и энтропия. В настоящее время объективный характер этих величин еще не установлен. Конечно, термометр позволяет нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. Для целей данной работы с формальной точки зрения не очень важно, какую именно трактовку принимать для второго закона термодинамики. В словесной формулировке второй закон термодинамики утверждает, что *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду*. При этом следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т. е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии.

3.5. Уравнения теплопроводности и диффузии

Вернемся к уравнению (3.58), вводящему в рассмотрение энтропию и химический потенциал. В приведенном виде оно характеризует только суммарное влияние энтропии и химического потенциала на внутреннюю энергию. Чтобы яснее представить роль этих понятий в рассматриваемых процессах, а не только их участие в формировании внутренней энергии, перепишем уравнение (3.58) в виде двух равенств

$$\nabla \cdot \mathbf{h}_1 + \eta q_1 - p_1 \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} + \mathcal{Q}, \quad (3.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}_2 + \eta q_2 - p_2 \nabla \cdot \mathbf{V} = \eta \frac{\delta \psi}{\delta t} - \mathcal{Q}. \quad (3.78)$$

В уравнениях (3.77) и (3.78) принято

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \quad p_f = p_1 + p_2.$$

Кроме того, в уравнения (3.77) и (3.78) введено дополнительное слагаемое $\mathcal{Q}$, которое описывает скорость обмена энергиями в процессах теплопроводности и диффузии. Понятно, что разбиение равенства (3.58) на два уравнения

(3.77) и (3.78) всегда осуществимо при соответствующем подбore значения $\mathcal{Q}$ и не требует никаких дополнительных предположений. В общем случае весьма затруднительно сделать обоснованный выбор определяющих уравнений для потоков энергии $\mathcal{Q}$, $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Для векторов потока энергии примем простейшие уравнения

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_{11}\nabla\mathcal{H} + \mathbf{a}_{12}\nabla\psi, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{a}_{21}\nabla\mathcal{H} + \mathbf{a}_{22}\nabla\psi, \quad (3.79)$$

где коэффициенты $\mathbf{a}_{12}$ и $\mathbf{a}_{21}$ характеризуют связанность тепловых и диффузионных потоков энергии; видимо, их можно считать малыми или вообще равными нулю; коэффициенты $\mathbf{a}_{11}$ и $\mathbf{a}_{22}$ называются коэффициентами теплопроводности и диффузии, соответственно.

При принятии равенств

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{22} = 0$$

определяющие уравнения (3.79) переходят в известный закон Фурье–Стокса с тем различием, что вместо градиента температуры он содержит градиент энтропии. С физической точки зрения принятое определяющее уравнение кажется более правдоподобным, но во многих случаях указанное различие несущественно.

Следует подчеркнуть, что уравнения (3.77) и (3.78) указывают только направление исследований. Отдельных и отнюдь не очевидных рассуждений требуют формулировки определяющих уравнений для величин, входящих в уравнения (3.77) и (3.78). Эти рассуждения оставим за рамками данной работы и ограничимся только указанием на их физический смысл и процессы, за которые они ответственны. Вполне ясен смысл величин $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\boldsymbol{\tau}_f$, $\mathbf{M}_f$ — они отвечают за внутреннее трение в среде, т. е. за переходы энергии из одной формы в другую внутри среды. Вместе с тем, конкретное описание внутреннего трения в среде наталкивается на серьезные затруднения. Например, вязкое трение в жидкости принято вводить посредством популярного закона

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mu_f \left(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{E} \right),$$

который не кажется удовлетворительным, поскольку приводит к уравнениям не гиперболического типа.

Величины $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ отвечают за взаимодействие с окружающей средой. При этом следует иметь в виду, что окружающая среда реально существует во всех точках пространства, в том числе и внутри рассматриваемого тела. Например, электромагнитное поле существует как внутри тела, так и вне его.

Если мы хотим учесть радиационное облучение тела, то его влияние войдет в обсуждаемые уравнения через величины $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Воздействие на вещество пучками заряженных частиц [73] также описывается величинами $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Поэтому роль величин $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ во многих случаях очень велика, но проблема их правильного и обоснованного выбора еще ждет своего решения. Понятно, что нельзя игнорировать потоки энергии $\mathbf{Q}$, $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, если в среде происходят химические реакции.

На этом общие построения заканчиваются. Проблема свелась к построению определяющих уравнений, т. е. к заданию внутренней энергии. Здесь мы вступаем на крайне зыбкую почву. С одной стороны, мы располагаем огромным экспериментальным материалом и знанием того, что происходит в материале. С другой стороны, адекватные математические модели разработаны только для термоупругих материалов, а существующие теории неупругих материалов крайне уязвимы для критики и, кроме того, оставляют многие явления за рамками анализа. Сказанное, разумеется, не означает отрицания полезности существующих теорий для практических целей. Речь идет о необходимости построения более общей теории реальных процессов, идущих в материале. Без этого будет невозможно использовать механику при разработке современных технологий. Каковы бы ни были трудности, возникающие на этом пути, они должны быть преодолены. Последующие рассуждения носят качественный характер. Они являются всего лишь попыткой понять, как устроена внутренняя энергия материалов с многими фазовыми переходами. Кроме того, хотелось бы выяснить, как формально устроен механизм диффузии “свободных” частиц в материале, ибо известно, что упомянутая диффузия определяет многие характерные свойства материала.

3.6. Неполярная сплошная среда с кулоновым трением

Сосредоточим свое внимание на пластических и сыпучих средах со слабо-выраженной микроструктурой. Примем, что упругая составляющая тензора моментных напряжений $\mathbf{M}_e$ равна нулю. В таком случае последнее из соотношений Коши–Грина (3.61) показывает, что внутренняя энергия не зависит от тензора $\mathbf{F}$. Кроме того, примем, что девиатор упругой части тензора напряжений симметричен

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_e^T \Rightarrow (\boldsymbol{\tau}_e)_\times = \mathbf{0}.$$

При этих ограничениях приведенное уравнение баланса энергии (3.60)

принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} &= \frac{p_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \eta \frac{\delta\psi}{\delta t} + \eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^\top) \cdot \frac{\delta\mathbf{g}}{\delta t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Соотношения Коши–Грина (3.61) принимают вид

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\eta\mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \psi}, \quad \boldsymbol{\tau}_e = -\frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\top. \quad (3.81)$$

Симметричность тензора $\boldsymbol{\tau}_e$ и требование $\text{tr } \boldsymbol{\tau}_e = 0$ приводят к следующим ограничениям, налагаемым на внутреннюю энергию,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^\top \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^\top \cdot \mathbf{g} = 0, \quad \forall \mathbf{B} : \mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top. \quad (3.82)$$

Для внутренней энергии получили два уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система [70] для первого из этих уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}. \quad (3.83)$$

Эта система девятого порядка определена в девятимерном пространстве тензоров второго ранга. Первое из уравнений (3.82) показывает, что свободная энергия постоянна вдоль интегральной кривой уравнения (3.83). Иными словами, внутренняя энергия есть интеграл системы (3.83), для которой существует не более восьми независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбираемого тензора $\mathbf{B}$. Таких интегралов шесть, и их нетрудно найти. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (3.83) на тензор $\mathbf{g}^\top$ слева. В результате получим

$$\mathbf{g}^\top \cdot \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{g}^\top}{ds} \cdot \mathbf{g} = -\mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}.$$

Складывая получившиеся уравнения, находим шесть скалярных интегралов уравнения (3.83) или один тензорный интеграл

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = 0, \quad \mathbf{G}_* = \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{G}_*). \quad (3.84)$$

Тензор $\mathbf{G}_*$ является аналогом хорошо известного в литературе по нелинейной теории упругости [26] тензора, который является обратным для меры

деформации Коши–Грина. Различие в том, что здесь используется пространственное описание. Таким образом, если внутренняя энергия задана как произвольная функция тензора $\mathbf{G}_*$, то она тождественно удовлетворяет первому из условий (3.82). Для выполнения второго из условий (3.82) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\mathbf{g} \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}_* \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}_*} \right)^T = 0.$$

Характеристическая система для второго из этих уравнений имеет вид первого из уравнений

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{G}_* \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{G}_*^m}{ds} = m \mathbf{G}_*^m, \quad (3.85)$$

где m есть любое целое число.

Это система шестого порядка, которая имеет не более пяти независимых интегралов. Нетрудно убедиться, что общим интегралом системы (3.85) является унимодулярный тензор³⁰

$$\mathbf{G} = I_3^{-1/3}(\mathbf{G}_*) \mathbf{G}_* = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}, \quad I_3(\mathbf{G}) = 1, \quad (3.86)$$

где

$$I_3(\mathbf{A}) \equiv \frac{1}{6}(\text{tr} \mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{A}) \text{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A}^3 \equiv \det(\mathbf{A}).$$

Тензор $\mathbf{G}$, следуя [23, 24], будет называться тензором формоизменения. Чтобы убедиться, что тензор $\mathbf{G}$ действительно является интегралом системы (3.85), т. е.

$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{G}^m}{ds} = \mathbf{0},$$

достаточно воспользоваться представлением (3.86) для тензора $\mathbf{G}$. Окончательно получили, что внутренняя энергия имеет вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{G}) \quad (3.87)$$

и тождественно удовлетворяет ограничениям (3.82). Определяющее уравнение для девиатора тензора напряжений (3.81) принимает вид³¹

$$\boldsymbol{\tau}_e = \frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (3.88)$$

³⁰ Доказательство этого факта можно найти в Приложении D, подраздел D.2.6. (*Примеч. ред.*)

³¹ Вывод формулы (3.88) можно найти в Приложении D, подраздел D.3.1. (*Примеч. ред.*)

Дальнейшая конкретизация требует задания внутренней энергии.

Обратимся к обсуждению тензоров вязких напряжений. Следует подчеркнуть, что пластичность — это свойство материала, которое не исчезает даже в том случае, если диссипация энергии в материале отсутствует. Поэтому влияние вязких напряжений на пластические свойства материала не слишком значительно. Исключение, возможно, составляют сыпучие среды, в которых, по мнению многих авторов, важную роль играет сухое трение между частицами среды.

Убедительных способов введения сухого трения в механику сплошных сред в настоящее время не предложено, хотя этому посвящено большое число публикаций, обзор которых выходит за рамки данной работы. Обычно считается, что вязкое трение зависит от градиента вектора скорости. Так обстоит дело, например, в ньютоновской жидкости, материале Максвелла [56] и наиболее популярных теориях пластичности [23, 24]. Полный анализ роли вязких напряжений оставим за рамками данной работы и ограничимся введением только сухого трения.

Примем допущение, что тензоры вязких напряжений можно представить в следующем простейшем виде:

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{E} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_f = \mathbf{0}. \quad (3.89)$$

Допущениями (3.89) мы исключаем из рассмотрения теории пластичности, основанные на теориях течения. При желании это легко исправить, следуя, например, работе [24]. С учетом (3.89) неравенство (3.71), утверждающее, что работа внутренних сил трения неотрицательна, принимает вид

$$\mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) \equiv -2\mathbf{t} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \right) \geq 0. \quad (3.90)$$

Для вектора напряжений $\mathbf{t}$ считаем, что справедлив закон сухого трения Кулона

$$\mathbf{t} = -k |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}| \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|}, \quad \boldsymbol{\omega} \neq \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}, \quad (3.91)$$

где $k > 0$ — коэффициент трения, который является характеристикой материала; характеристическая функция σ определяется выражением

$$\sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} < 0, \\ 0, & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} \geq 0. \end{cases}$$

Единичный вектор $\mathbf{n}$ в выражении (3.91) находится по тензору $\boldsymbol{\tau}_e$ из решения задачи

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} = \max, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m}: \quad |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (3.92)$$

Покажем, что решение задачи (3.92) единственно, если оно, конечно, существует. В самом деле, рассмотрим функционал

$$\mathcal{J} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} + \lambda_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \lambda_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1) + \lambda_3 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1), \quad (3.93)$$

где параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть множители Лагранжа. Обращение в нуль первой вариации этого функционала дает уравнения

$$\boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} = -\lambda_1 \mathbf{m} - 2\lambda_2 \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} = -\lambda_1 \mathbf{n} - 2\lambda_3 \mathbf{m}. \quad (3.94)$$

Согласно уравнениям (3.94) следуют условия

$$2\lambda_2 = 2\lambda_3 = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m}, \quad -\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m}. \quad (3.95)$$

При этом система (3.94) может быть переписана в эквивалентной форме

$$\boldsymbol{\tau}_e \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = (2\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{m} - \mathbf{n}), \quad \boldsymbol{\tau}_e \cdot (\mathbf{m} + \mathbf{n}) = -(2\lambda_2 + \lambda_1)(\mathbf{m} + \mathbf{n}).$$

Отсюда видим, что векторы $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ являются собственными векторами симметричного тензора $\boldsymbol{\tau}_e$. Пусть вектор $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_i тензора $\boldsymbol{\tau}_e$, а вектор $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_j . Тогда имеем

$$\begin{aligned} (2\lambda_2 - \lambda_1) &= \sigma_i, & -2\lambda_2 - \lambda_1 &= \sigma_j, \\ \mathbf{m} - \mathbf{n} &= \sqrt{2} \mathbf{e}_i, & \mathbf{m} + \mathbf{n} &= \sqrt{2} \mathbf{e}_j & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \sqrt{2} \mathbf{n} &= \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i, & \sqrt{2} \mathbf{m} &= \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (3.96)$$

где векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ суть собственные векторы тензора напряжений.

Функционал (3.93) теперь принимает вид

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) = \frac{1}{2} (\sigma_j - \sigma_i). \quad (3.97)$$

Функционал принимает наибольшее значение, если σ_j является наибольшим собственным числом, а σ_i — наименьшим. Если эти собственные числа совпадают, то решением рассматриваемой задачи является произвольная пара ортогональных векторов, а все касательные напряжения обращаются в

нуль. Нетрудно убедиться, что второе из условий (3.95) выполняется тождественно

$$-\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j).$$

Указанное ранее относилось к случаю скольжения. Если проскальзывание отсутствует, т. е. если выполняется условие

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (3.98)$$

то вектор $\mathbf{t}$ находится из уравнений движения, а точнее по второму закону динамики³²

$$-2\mathbf{t} = \rho \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{t}}.$$

Это выражение значительно упрощается для шарового тензора инерции

$$-2\mathbf{t} = \rho \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{t}} = \rho J \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{1}{2} \rho J \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{V} \right).$$

Используя это соотношение, вектор $\mathbf{t}$ можно исключить из первого закона динамики.

Во многих случаях сухое трение можно заменить значительно более простым вязким трением. В этом случае вместо уравнения (3.91) нужно принять

$$\mathbf{t} = -k \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \right), \quad (3.99)$$

где $k > 0$ — коэффициент вязкого трения.

3.7. К теории безмоментной несимметричной среды с кулоновым трением

Ранее была рассмотрена среда, тензор обратимых напряжений в которой симметричен. Интуитивно кажется вполне вероятным, что имеет смысл рассмотреть случай среды с несимметричным тензором обратимых напряжений, в которой тензор моментных напряжений отсутствует. Особенно это может оказаться важным при наличии сухого трения между частицами, поскольку в таком случае есть возможность дать более простую в применениях формулировку закона сухого трения. К сожалению, подробное обсуждение возникающих здесь особенностей выходит за рамки данной работы. Ограничимся поэтому только первым шагом.

³² Здесь при формулировке второго закона динамики считается, что тензор инерции $\mathbf{V}$ равен нулю. (Примеч. ред.)

Примем, что внутренняя энергия есть функция вида

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{P}).$$

Тогда соотношения Коши–Грина (3.61) примут вид (3.81), а для антисимметричной части тензора напряжений имеем соотношение (3.62), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\left[\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top - \boldsymbol{\tau}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top. \quad (3.100)$$

Подставляя сюда тензор напряжений (3.81), получаем ограничение на внутреннюю энергию

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) = 0. \quad (3.101)$$

Характеристическая система [70] для уравнения (3.101) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{E}. \quad (3.102)$$

Эта система 12-го порядка имеет 11 независимых интегралов, но только 9 из них не зависят от произвольного антисимметричного тензора $\mathbf{A}$. Легко убедиться, что отмеченные интегралы являются координатами тензора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{g}. \quad (3.103)$$

Таким образом, внутренняя энергия рассматриваемой среды имеет вид

$$\mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{g}). \quad (3.104)$$

Дальнейшие построения аналогичны тем, которые проведены далее для симметричной среды.

3.8. Изотропная неполярная среда

Приведенные ранее построения носили достаточно общий характер, поскольку до сих пор не принималось никаких предположений о свойствах среды. Даже предположения сплошности по существу не принимались. В самом деле, разрывы сплошности всегда можно было сгладить выбором функции распределения частиц. Поэтому все указанное ранее применимо для описания произвольных неупругих и, в частности, пластических и сыпучих сред.

Неоднократно высказывалась точка зрения [71], что неупругие среды на этапе нагружения ведут себя вполне аналогично нелинейно-упругим телам, отличаясь от них только на этапе разгрузки. Ранее было показано, что упругие напряжения в общем случае выражаются через производные от внутренней энергии по формулам, аналогичным таковым в нелинейной теории упругости. Что касается неупругих составляющих, то их влияние на внутреннюю энергию проявляется в зависимости внутренней энергии от энтропии и химического потенциала. Таким образом, вся информация о свойствах среды определяется строением внутренней энергии. Поэтому задание внутренней энергии эквивалентно заданию уравнений состояния среды.

Для жидкостей и газов уравнения состояния изучены достаточно хорошо. Они сводятся к установлению связи между давлением, массовой плотностью и температурой, но могут быть переписаны и в терминах внутренней энергии. Не столь убедительно обстоит дело с уравнением состояния твердых тел, которое записывается в разных формах. С одной из этих форм можно ознакомиться по книге [72]. Существуют и другие уравнения состояния, из которых наиболее известным является уравнение Ми–Грюнайзена. Однако подход, изложенный в [72] и других работах, не позволяет в полной мере описать уравнения состояния твердых тел. Действительно, различие между жидкими и твердыми телами заключается, главным образом, в их реакции на изменение формы. Описать эту реакцию, игнорируя при этом девиатор тензора напряжений, кажется проблемой, не имеющей решения. Без учета девиатора тензора напряжений можно достаточно полно описать только различие между жидкостями и газами.

Вернувшись к механике сплошных сред, заметим, что при классическом подходе к описанию пластических материалов центральную роль играет так называемый критерий текучести, т. е. некое условие, налагаемое на девиатор тензора напряжений. Из критерия текучести следует так называемый ассоциативный закон течения. При этом девиатор тензора напряжений связывается с тензором деформации и тензором скоростей деформации [23, 24] не аналитическими зависимостями. Иными словами, девиатор тензора упругих напряжений, который, по определению, не зависит от скоростей, при описании неупругих свойств материала игнорируется. Это означает, что внутренняя энергия не зависит от тензора формоизменения. Однако для твердых тел, которые очевидным образом сопротивляются изменению формы, это неприемлемо³³, ибо обсуждаемое допущение означает отказ от рассмотрения очень

³³ Сейчас обсуждается общая ситуация. Разумеется, для частных моделей приемлемы и полезны с практической точки зрения самые разные допущения.

многих наблюдаемых явлений. Поэтому одна из задач теории заключается в определении строения внутренней энергии, которое в общем случае должно не только учитывать наличие твердой фазы, но и отражать наличие многих твердотельных фаз. Это очень трудная и малоизученная проблема. Поэтому анализ возможных форм задания внутренней энергии целесообразно начать с частных случаев.

Прежде всего, примем, что материал является изотропным. Это означает, что внутренняя энергия зависит только от инвариантов³⁴ тензора $\mathbf{G}$

$$\eta\mathcal{U} = \Phi(\rho, \psi, \mathcal{H}, I_1, I_2), \quad I_1(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{G}, \quad I_2(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}. \quad (3.105)$$

Подставляя эти представления³⁵ в соотношения Коши–Грина (3.81) с учетом соотношений (3.88), получаем³⁶

$$\begin{aligned} p_e &= \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\eta\mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \psi}, \\ \boldsymbol{\tau}_e &= \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_1} + 2 I_2 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - 2 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} - 4 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2, \\ \boldsymbol{\Lambda} &= I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T, \end{aligned} \quad (3.106)$$

где тензор $\boldsymbol{\Lambda}$ называется тензором формоизменения, отвечающим мере деформации Альманзи [23, 24].

³⁴ Общая теория тензорных инвариантов излагается в четвертой главе — см. разд. 4.3, 4.4, 4.5. Эта теория разработана П. А. Жилиным. Она существенно отличается от классической в случае ориентированных (в частности, аксиальных) объектов и полностью совпадает с классической в случае полярных объектов. Тензор $\mathbf{G}$ является полярным, так что читателю, знакомому с классической теорией инвариантов, при чтении этого и последующих пунктов третьей главы нет необходимости обращаться к четвертой главе. Однако читателю, который не удовлетворится результатами исследования изотропной неполярной среды и пожелает обобщить эти результаты на случай полярной среды, при описании которой используются аксиальные тензоры, материал четвертой главы будет очень полезен. (*Примеч. ред.*)

³⁵ Определение второго инварианта тензора второго ранга, данное П. А. Жилиным, отличается от общепринятого. Обычно вторым инвариантом тензора называют величину $I_2(\mathbf{G}) \equiv \frac{1}{2} [(\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{G})^2 - \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}]$. (*Примеч. ред.*)

³⁶ Вывод формулы (3.88) для девиатора тензора напряжений можно найти в Приложении D, подраздел D.3.2. (*Примеч. ред.*)

3.8.1. Определяющее уравнение для упругой части девиатора тензора напряжений

Поскольку материал изотропен, то собственные векторы тензора напряжений и меры Альманзи совпадают. Инварианты тензоров $\mathbf{G}$ и $\mathbf{\Lambda}$ совпадают и определяются формулами

$$I_1(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \geq 3, \quad I_2(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2} \geq 3,$$

где Λ_1, Λ_2 суть два собственных числа тензора $\mathbf{\Lambda}$. Вместо инварианта $I_2(\mathbf{\Lambda})$ введем другой инвариант σ

$$\sigma \equiv 3I_2(\mathbf{G}) - I_1^2(\mathbf{G}) = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 + (\Lambda_1 - \Lambda_3)^2 + (\Lambda_2 - \Lambda_3)^2, \quad (3.107)$$

где $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1$.

Если $\sigma = 0$, то $\mathbf{G} = \mathbf{E}$. Внутреннюю энергию будем рассматривать как функцию инвариантов $I_1(\mathbf{\Lambda})$ и σ . В таком случае вместо соотношения для девиатора (3.106) будем иметь

$$\boldsymbol{\tau}_e = -2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} \left(\mathbf{\Lambda} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{E} \right) - 12 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \left(\mathbf{\Lambda}^2 - \frac{\sigma + I_1^2}{9} \mathbf{E} \right).$$

Это соотношение можно переписать в более компактной форме

$$\boldsymbol{\tau}_e = -2 \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} + 4I_1 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \right) \boldsymbol{\lambda} - 12 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \left(\boldsymbol{\lambda}^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right), \quad (3.108)$$

где введены обозначения

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Lambda} - \frac{I_1}{3} \mathbf{E}, \quad \sigma \equiv 3I_2(\mathbf{G}) - I_1^2(\mathbf{G}) = 3\text{tr} \boldsymbol{\lambda}^2. \quad (3.109)$$

Обращает на себя внимание характер зависимости девиатора упругих напряжений от инвариантов $I_1(\mathbf{\Lambda})$ и σ . Рассмотрим, например, случай малых деформаций, когда $\|(\nabla \mathbf{u})\| \ll 1$. В этом случае с точностью до малых второго порядка получаем

$$I_1 = I_2 = 3, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = -2\text{dev} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \quad (3.110)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ есть линейный тензор деформации. Соотношение (3.108) упрощается и принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}_e = 2\mu \text{dev} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \mathcal{O}(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad \mu \equiv 2 \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} + 4I_1 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \right). \quad (3.111)$$

Параметр μ может быть назван модулем сдвига. Если допустить, что производная от внутренней энергии по параметру σ стремится к нулю при $\sigma \rightarrow 0$, то из уравнения (3.111) видим, что в линейной теории зависимость внутренней энергии от параметра σ является пренебрежимо малой. Возможно, что эта зависимость является несущественной и в нелинейном случае, но здесь требуется дополнительный анализ, который в настоящее время отсутствует. Для простоты можно предположить, что внутренняя энергия вообще не зависит от инварианта $I_2(\mathbf{\Lambda})$. Тогда получим более простое определяющее уравнение

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mu \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{E} - \mathbf{\Lambda} \right) \equiv -\mu \mathbf{\Lambda}, \quad \mu \equiv 2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1}, \quad \mu = \mu(\rho, \psi, \mathcal{H}, I_1). \quad (3.112)$$

Существует множество возможных вариантов задания функции μ . В настоящее время трудно однозначно определить, какой из вариантов использует Природа³⁷. Предположим, что модуль сдвига является функцией вида

$$\mu = \mu \left(\vartheta, \eta, \sqrt{\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})}}, I_1 \right).$$

Зависимость μ от температуры представляется нам не принципиальной. То же самое можно сказать в отношении переменной $\sqrt{\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})}}$. Ключевым моментом является влияние на модуль сдвига параметров η и I_1 . Проблема заключается в том, что с физической точки зрения оба этих параметра влияют на модуль сдвига почти одинаковым образом. Насколько нам известно, в механике деформируемого твердого тела параметр η никогда не использовался, а характер изменения модуля сдвига определялся исключительно деформациями. Исходя из этого, можно остановиться, например, на следующем представлении:

$$\mu = \mu_0 \left(\vartheta, \sqrt{\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})}} \right) \left[1 - \cos \left(\frac{\pi(I_1 - 3)}{2l_*} \right) \right], \quad (3.113)$$

где l_* — некоторая характеристика материала. Представление (3.113) соответствует свободной энергии, которая выглядит точно так же, как потенциал Френкеля–Конторовой [72] в динамике кристаллической решетки. Мы не считаем, что это представление хорошо подходит для практических целей, мы

³⁷ Начиная с этого места оригинальный текст написан на английском языке (статья “Phase transitions and general theory of elasto-plastic bodies”, 2002 г.). Перевод с английского Е. А. Ивановой. (Примеч. ред.)

только хотим указать на качественный характер изменения модуля сдвига. Следует иметь в виду два обстоятельства: во-первых, при высоком давлении модуль сдвига должен обращаться в нуль; во-вторых, для того чтобы описывать эффект Савара–Массона, зависимость модуля сдвига от I_1 должна быть немонотонной.

Возможно, более реалистичным определяющим уравнением для модуля сдвига является функция вида

$$\mu = \mu_0 \left(\vartheta, \sqrt{\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})}}, I_1 \right) (1 - \eta_p)^2 (\eta_p - 0,26)^2, \quad (3.114)$$

где η_p — пористость среды (см. соотношения (3.24)). Для газов характерны малые значения величины $(1 - \eta_p)$; для твердых тел η_p ограничена величиной 0,26. Функция η_p должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\delta \eta_p}{\delta t} + v_0 \chi(\eta_p, p) = (1 - \eta_p) \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (3.115)$$

где p — давление; v_0 — некая фиктивная величина, характеризующая объем, занимаемый одной частицей. Источниковый член $v_0 \chi(\eta_p, p)$ задается с помощью определяющего уравнения. Существует много различных вариантов этого определяющего уравнения, однако среди них нет ни одного, которому в данный момент можно было бы отдать предпочтение.

Количественная зависимость μ от η_p может быть, конечно, отличной от (3.114). Вполне возможно, что понадобится некоторая комбинация представлений, подобных уравнению (3.113) и уравнению (3.114). Дальнейшие исследования прояснят эту ситуацию³⁸.

Мы предполагали, что внутренняя энергия не зависит от инварианта $I_2(\mathbf{\Lambda})$ и девиатор тензора напряжений, соответственно, имеет вид (3.112). Вернемся к общему случаю (3.108). Чтобы яснее представить себе потери, связанные с переходом от уравнения (3.108) к уравнению (3.112), рассмотрим случай сферически симметричной деформации полого шара

$$\mathbf{u} = F(r) \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{a} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{b} (\mathbf{E} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r),$$

$$\mathbf{a} \equiv \left(1 - \frac{dF}{dr} \right), \quad \mathbf{b} \equiv \left(1 - \frac{F}{r} \right).$$

³⁸ Здесь заканчивается перевод текста статьи “Phase transitions and general theory of elasto-plastic bodies”, 2002 г. (Примеч. ред.)

Тогда для мер деформации имеем

$$\lambda = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt[3]{a^2 b^4}} \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \right),$$

$$\lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{6} \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \right), \quad \sigma = \frac{2(b^2 - a^2)^2}{\sqrt[3]{a^4 b^8}}.$$

Для однородной деформации сплошного шара верны равенства

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{r}, \quad \lambda = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

и девиатор тензора напряжений равен нулю, как это и должно быть. В этом случае выражения (3.108) и (3.112) совпадают. Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, то между выражениями (3.108) и (3.112) имеется различие. С формально математической точки зрения переход от выражения (3.108) к уравнению (3.112), конечно, упрощает теорию и потому весьма желателен. Однако с интуитивной точки зрения зависимость внутренней энергии от параметра σ кажется более разумной, нежели зависимость от параметра I_1 , но ведет к серьезным усложнениям. Если, например, внутренняя энергия является линейной функцией параметра $\sqrt{\sigma}$, то выражение (3.108) принимает вид

$$\tau_e = -\frac{2}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sqrt{\sigma}} \left[2I_1 \lambda + 3 \left(\lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right) \right]. \quad (3.116)$$

Определяющее уравнение (3.116) значительно сложнее, нежели уравнение (3.112). Однако имеется несколько правдоподобных аргументов, говорящих в пользу уравнения (3.116). Не менее сильные аргументы имеются в пользу полного уравнения (3.109), не допускающего перехода к упрощенным уравнениям (3.112) или (3.116).

3.8.2. Определяющее уравнение для упругого давления

Часто можно считать, что упругая часть давления является линейной функцией температуры

$$p_e(\rho, \psi, \mathcal{H}, I_1, I_2) = f_1(\rho, \psi, I_1, I_2) + f_2(\rho, \psi, I_1, I_2) \vartheta, \quad (3.117)$$

где предполагается, что задано определяющее уравнение, связывающее энтропию и температуру.

Вполне вероятно, что в некоторых случаях понадобятся и более сложные зависимости от температуры. Однако интуиция подсказывает, что для качественного рассмотрения аппроксимация (3.117) вполне приемлема. Во всяком

случае, именно такой вид имеют наиболее популярные в физике уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и Ми-Грюнайзена. В частности, уравнение Ван-дер-Ваальса в принятых обозначениях имеет вид

$$p(\zeta, \vartheta) = -\frac{a}{\zeta^2} + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b}, \quad (3.118)$$

где a , b и c_* суть постоянные материала; $\zeta = \rho_0/\rho$.

Известно, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо подходит для описания поведения реальных газов. Интуитивно кажется очевидным, что уравнение (3.117) при соответствующем выборе функций f_1 и f_2 можно применять при описании не только газов и жидкостей, но и твердых тел с фазовыми переходами. Качественно функция $f_1(\zeta)$, которая с формальной точки зрения описывает давление³⁹ при нулевой температуре $\vartheta = 0$, представлена на рис. 3.1.

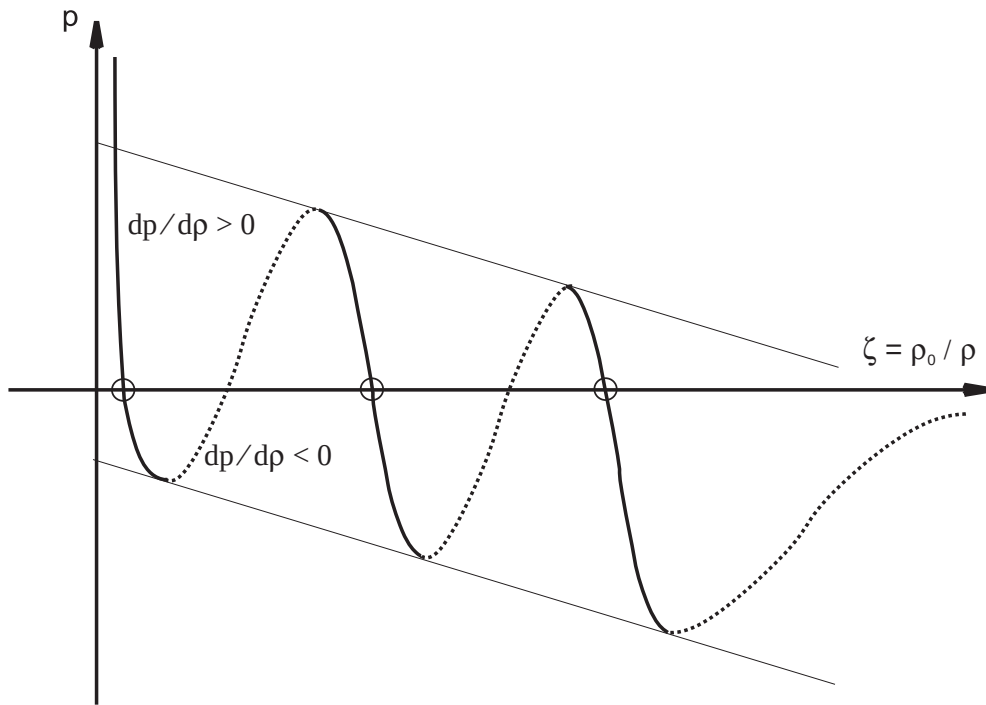


Рис. 3.1. Определяющее уравнение для давления при нулевой температуре

Давление считается положительным при сжатии. Представленная на рис. 3.1 зависимость характерна для материалов, упрочняющихся как при

³⁹ Равновесные границы фаз могут возникать не во всех материалах. Расслоение на фазы связано с существованием в пространстве параметров состояния недостижимых областей неустойчивости материала, вследствие чего зависимость давления от плотности материала должна быть немонотонной. (Примеч. ред.)

сжатии, так и при растяжении. Сплошной линией на диаграмме представлены участки устойчивого деформирования. Пунктирная линия соответствует участкам неустойчивого деформирования, причем на этих участках отсутствуют положения статического равновесия. Кружками на диаграмме обозначены положения устойчивого равновесия материала при нулевом давлении. Число устойчивых равновесных положений зависит от свойств материала. Например, для снега, тонких порошков, грунтов и других аналогичных материалов число устойчивых равновесных положений очень велико.

Рассмотрим изотермическое нагружение шара давлением. Допустим, что в исходном состоянии плотность материала соответствовала крайнему правому кружку на диаграмме. Начнем медленно увеличивать давление. При этом шар будет квазистатически сжиматься, и мы будем двигаться от правого крайнего кружка влево-вверх по сплошной линии диаграммы. Когда давление достигнет первой критической величины, соответствующей локальному максимуму диаграммы, квазиравновесное деформирование становится невозможным, а в материале начинается структурная перестройка, сопровождающаяся быстрым самопроизвольным увеличением плотности при почти постоянном давлении. Иными словами, происходит твердотельный фазовый переход. Скорость этого фазового перехода определяется свойствами материала, но не свойствами внешних обстоятельств. Это будет продолжаться до тех пор, пока мы снова не попадем на сплошную линию⁴⁰. При дальнейшем медленном увеличении давления плотность будет медленно (квазистатически) возрастать, пока не будет достигнут следующий локальный максимум. Если, не достигнув второго локального максимума, мы начнем снижать давление до нуля, то попадем в средний кружок на диаграмме, который соответствует устойчивому состоянию материала с повышенной плотностью. Иными словами, происходит пластическое деформирование шара. Весь описанный процесс отчетливо наблюдался в опытах Бриджмена [63]. Важную информацию для размышления об обсуждаемых процессах можно найти в работе [74].

Если теперь начать процесс растяжения шара, т. е. начать прикладывать отрицательное давление, то от среднего кружка мы начнем двигаться по сплошной линии диаграммы вправо-вниз, при этом будет идти процесс квазистатического растяжения шара. Когда мы достигнем локального минимума, произойдет срыв и начнется самопроизвольное уменьшение плотности материала при почти постоянном давлении. Если материал обладает свойством упрочнения (как это имеет место на изображенной диаграмме), то мы

⁴⁰ На рис. 3.1 этому соответствовал бы отрезок, соединяющий участки устойчивого деформирования и проходящий ниже огибающей. (*Примеч. ред.*)

вновь попадем на участок устойчивого растяжения. При дальнейшем увеличении растягивающего давления мы достигнем крайнего правого локального минимума, в котором произойдет разрушение шара. Следует подчеркнуть, что учет конечности прочности материала на разрыв строго обязателен для определяющих уравнений реальных материалов.

Кроме того, обратим внимание на тот факт, что в точках локальных минимумов и максимумов происходит нарушение условий так называемой сильной эллиптичности. Разумеется, нарушаются и постулаты типа популярного постулата Драккера. С математической точки зрения это, конечно, неприятно, но так уж устроена природа вещей. Легко понять, что зависимости, подобные указанным на рис. 3.1, принципиально не могут быть найдены из эксперимента. Однако огибающие истинной диаграммы могут быть установлены и фактически определяются на основе эксперимента. Причем верхняя огибающая описывает свойства материала при сжатии, а нижняя — прочность материала на разрыв. Одним из простейших представителей определяющего уравнения для материала с конечной прочностью на разрыв является уравнение вида

$$f_1(\zeta) = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad m > n. \quad (3.119)$$

Что касается функции f_2 , то, видимо, ее допустимо принять в той же форме, что и в уравнении Ван-дер-Ваальса. Это возможно, по крайней мере, при качественных рассуждениях. Достаточно общий вид определяющего уравнения для давления дается следующим выражением:

$$p_e = \sum_{k=2}^N a_k(\psi, I_1, \sigma) \zeta^{-k} + \frac{c(\psi, I_1, \sigma) \mathcal{H}}{\zeta - b(\psi, I_1, \sigma)} + a_0(\psi, \mathcal{H}), \quad (3.120)$$

где N характеризует число фазовых переходов, которые включаются в рассмотрение; параметры a_k , c , b суть характеристики материала; функция $a_0(\psi, \mathcal{H})$ описывает давления, не зависящие от плотности, которые обычно в теории неупругих материалов не рассматриваются. Давления, отвечающие функции $a_0(\psi, \mathcal{H})$, называются радиационными давлениями или давлениями электромагнитного излучения [75]. Их учет необходим, если мы хотим учесть такие явления, как испарение твердых частиц и их превращение в газообразную фазу. При этом масса сохраняется, но число частиц резко увеличивается, что и является причиной роста давления.

В уравнении (3.120) вместо температуры используется энтропия, что более последовательно, хотя и менее привычно. Одним из простейших можно

считать следующее определяющее уравнение:

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \mathcal{H}}{\zeta - b}, \quad m > n \geq 2, \quad \zeta > b. \quad (3.121)$$

Это уравнение содержит пять параметров f_0 , m , n , c , b , которые позволяют описать достаточно широкие классы материалов, но, конечно, уравнение (3.121) не универсально.

Альтернативой определяющему уравнению (3.121) является определяющее уравнение

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (3.122)$$

Единственное, но весьма существенное различие определяющих уравнений (3.121) и (3.122) состоит в том, что первое линейно зависит от энтропии, а второе — от температуры⁴¹.

Нетрудно построить фазовые диаграммы, отвечающие уравнению (3.121), при различных значениях энтропии. Примерные зависимости давления от плотности при некоторых значениях энтропии представлены на рис. 3.2, где приняты значения $m = 5$, $n = 3$. Уравнение (3.121) соответствует двухфазной среде. В более общем случае коэффициенты уравнения (3.120) должны подбираться так, чтобы уравнение состояния имело вид, представленный на рис. 3.3.

Утолщенные кривые на рис. 3.2 разделяют различные фазы материала. Ниже нижней утолщенной линии материал находится в твердой фазе. Между утолщенными кривыми материал находится в жидкой фазе. Выше верхней утолщенной линии материал находится в газообразной фазе. При нулевой энтропии среда находится в твердой фазе, плотность которой при нулевом давлении $\zeta = 1$ или $\rho = \rho_0$. Мы опускаем дальнейшее обсуждение фазовых диаграмм, поскольку оно достаточно стандартно, хотя сами фазовые диаграммы для уравнения типа (3.121) ранее, видимо, не встречались. Фазовые диаграммы, отвечающие уравнению (3.122) при различных значениях температуры, имеют вид, аналогичный фазовым диаграммам, отвечающим уравнению (3.121) при различных значениях энтропии.

⁴¹ Исследования, основанные на уравнении (3.121), являются более поздними по времени публикации: они опубликованы в статье 2003 г. “Математическая теория неупругих сред”. Исследования, основанные на уравнении (3.122), опубликованы в статье 2001 г. “Основные уравнения теории неупругих сред”. Поскольку ранняя публикация содержит более полное исследование, редакционная коллегия сочла необходимым поместить оба варианта. (Примеч. ред.)

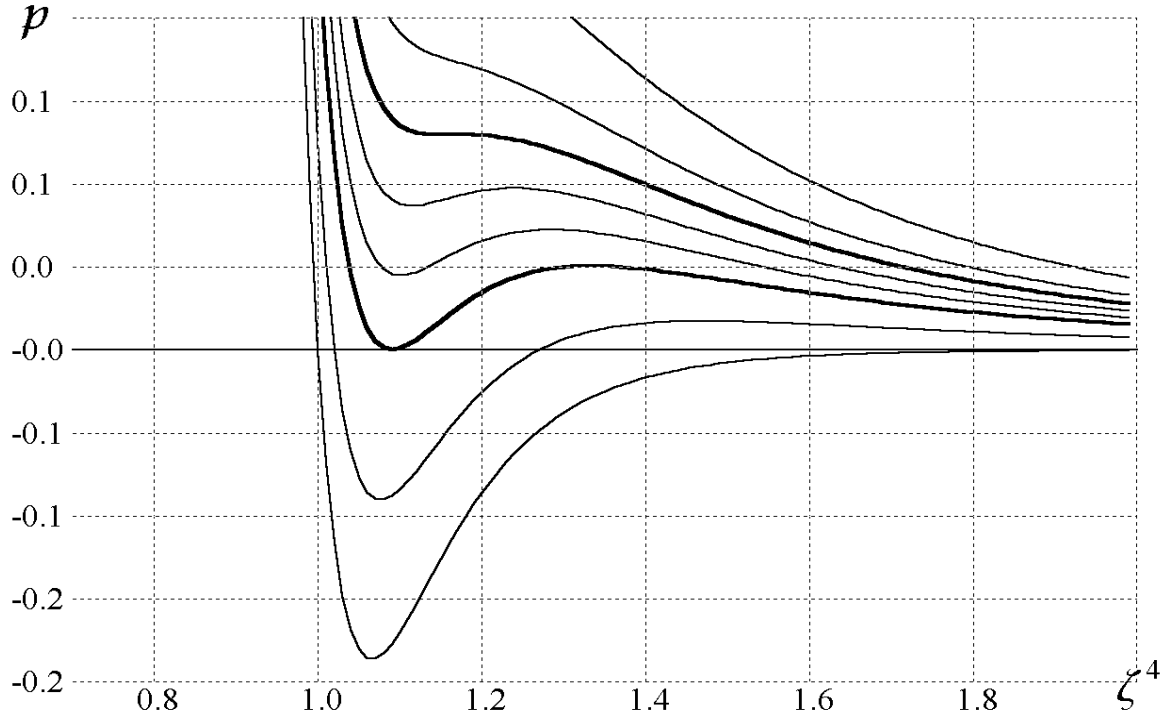


Рис. 3.2. Разные кривые отвечают разным энтропиям: чем выше энтропия, тем выше расположена кривая

При нулевой температуре⁴² среда находится в твердой фазе, плотность которой при нулевом давлении $\zeta = 1$ или $\rho = \rho_0$. При температуре $\vartheta = \vartheta_f$, которую можно назвать температурой плавления, среда может находиться в двух фазах: твердой и жидкой. Температура плавления находится в результате решения системы уравнений

$$f_0(\zeta_f^{-m} - \zeta_f^{-n}) + \frac{c_* \vartheta_f}{\zeta_f - b} = 0, \quad f_0(-m \zeta_f^{-m-1} + n \zeta_f^{-n-1}) = \frac{c_* \vartheta_f}{(\zeta_f - b)^2}, \quad (3.123)$$

где ζ_f отвечает плотности среды при температуре плавления. Поскольку величины ϑ_f и ζ_f являются характеристиками материала, систему (3.123) можно использовать для определения параметров среды. Выше температуры плавления, но ниже критической температуры ϑ_c среда может находиться только в двух фазах: жидкой и газообразной. При этом нулевое давление в среде возможно только при нулевой плотности среды $\zeta = \infty$. Критическая

⁴² Разумеется, наши рассуждения не принимают во внимание квантовые эффекты.

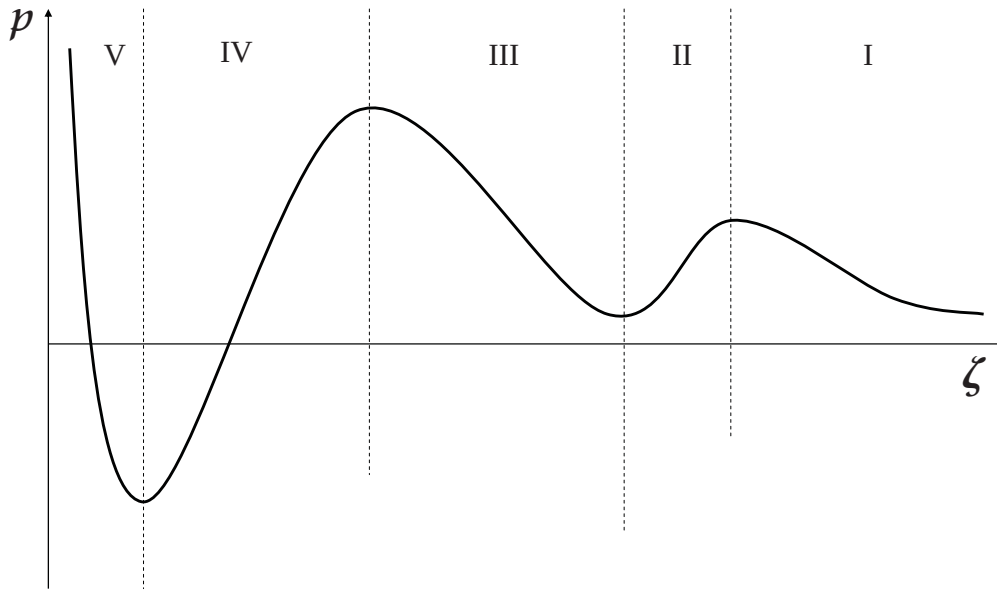


Рис. 3.3. Определяющее уравнение для трехфазной среды: зоны I, III, V соответствуют устойчивым газовой, жидкой и твердой фазам; зоны II, IV отвечают метастабильным состояниям

температура ϑ_c находится в результате решения системы уравнений

$$f_0 \left(-m \zeta_c^{-m-1} + n \zeta_c^{-n-1} \right) = \frac{c_* \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^2},$$

$$f_0 \left(m(m+1) \zeta_c^{-m-1} - n(n+1) \zeta_c^{-n-1} \right) = - \frac{2 c_* \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^3}.$$

Эту систему также можно использовать для определения параметров среды, если известна ее критическая температура. При температурах выше критической $\vartheta > \vartheta_c$ материал ведет себя подобно газу.

3.8.3. Задание внутренней энергии

Ранее было показано, что почти вся информация о физических свойствах рассматриваемой среды заключена в структуре внутренней энергии. С одной стороны, это облегчает работу. Но, с другой стороны, ясного решения проблема задания внутренней энергии до сих пор не получила. Более того, далее будет показано, что здесь имеются существенные затруднения.

При обсуждении возможной формы задания внутренней энергии будем

исходить из соотношений Коши–Грина (3.106)

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\eta \mathcal{U}}{\rho} \right) = - \frac{\partial(\zeta \eta \mathcal{U})}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \psi}.$$

Принимая для давления определяющее уравнение (3.120) и интегрируя первое из приведенных ранее соотношений, получаем

$$\begin{aligned} \eta \mathcal{U} = & \sum_{k=2}^N \frac{a_k(\psi, I_1, \sigma)}{k-1} \zeta^{-k} - \frac{c(\psi, I_1, \sigma) \mathcal{H}}{\zeta} \ln[\zeta - b(\psi, I_1, \sigma)] + \\ & + \frac{d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\zeta} - a_0(\psi, \mathcal{H}), \end{aligned} \quad (3.124)$$

где $d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})$ есть произвольная функция интегрирования.

Если принять кажущееся приемлемым допущение о том, что давление не зависит от тензора формоизменения $\mathbf{\Lambda}$, то выражение (3.124) примет более простой вид

$$\begin{aligned} \eta \mathcal{U} = & \sum_{k=2}^N \frac{a_k(\psi)}{k-1} \zeta^{-k} - \frac{c(\psi) \mathcal{H}}{\zeta} \ln[\zeta - b(\psi)] + \\ & + \frac{d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\zeta} - a_0(\psi, \mathcal{H}), \end{aligned} \quad (3.125)$$

где функция $d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})$ подлежит дальнейшему определению.

Конкретное задание внутренней энергии полностью решает проблему построения общей теории неупругих сред, но это не простая задача, даже при принятии относительно простого представления (3.125). На первый взгляд, выражение (3.125) кажется неудовлетворительным. Действительно, как отмечалось во введении, при больших давлениях и, следовательно, при больших плотностях все тела становятся подобными жидкости, т. е. девиатор тензора упругих напряжений должен стремиться к нулю при $\zeta \rightarrow 0$. Однако выражение (3.125) показывает, что при стремлении плотности к бесконечности девиатор стремится к бесконечности. Действительно, согласно (3.108) и (3.125) имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e = & - \frac{2}{\zeta} \left[\frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial I_1} + 4I_1 \frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial \sigma} \right] \boldsymbol{\lambda} - \\ & - \frac{12}{\zeta} \frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial \sigma} \left(\boldsymbol{\lambda}^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Очевидно, что ни при каком виде функции $\mathbf{d}(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})$ нельзя устранить зависимость девиатора от плотности (давления). Добиться ограниченности девиатора при стремлении плотности к бесконечности можно только за счет правильного выбора зависимости модуля сдвига от температуры и химического потенциала. Здесь существует много возможностей, обсуждение которых выходит за рамки данной работы. На девиатор накладываются дополнительные ограничения: касательные напряжения должны быть ограничены по модулю и должен проявляться эффект Савара–Массона. Этого также можно достичь разными путями, например, использовать модель типа Френкеля–Конторовой [72], трехмерный аналог которой можно выразить следующим представлением:

$$\frac{\partial \mathbf{d}(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial I_1} = \mu_0(\psi, \mathcal{H}) \Theta \left[\cos \left(\frac{\pi(I_1 - 3)}{2l_*(\psi, \mathcal{H})} \right) \right], \quad (3.127)$$

где $l_*(\psi, \mathcal{H})$ есть некоторая характеристика материала, зависящая от энтропии и химического потенциала; $\Theta(x)$ — характеристическая функция области $x \geq 0$: она равна единице при $x \geq 0$ и нулю в остальных случаях⁴³.

Введя в рассмотрение большой термодинамический потенциал⁴⁴

$$\Omega = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H} - \psi,$$

приведем уравнение баланса энергии (3.80) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta\Omega)}{\delta t} &= \frac{p_e + \eta\Omega}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} - \eta\mathcal{H} \frac{\delta\vartheta}{\delta t} + \eta(\psi + \vartheta\mathcal{H}) \frac{\delta z}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \Omega = \Omega(\rho, \vartheta, z, \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (3.128)$$

где величина $\mathbf{z}$ является функцией отношения плотности частиц к плотности массы и определяется формулами (3.31). Из уравнения (3.128) вытекают

⁴³ Здесь заканчивается текст данного раздела, опубликованный в статье 2003 г. “Математическая теория неупругих сред”. Далее следует текст статьи 2001 г. “Основные уравнения теории неупругих сред”, в которой проведено более полное исследование. (Примеч. ред.)

⁴⁴ В оригинальном тексте (статья “Основные уравнения теории неупругих сред”, 2001 г.) не принимается во внимание химический потенциал и все формулы записаны для свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$. Поскольку в предшествующем тексте данной главы химический потенциал учитывается, редакционная коллегия сочла возможным переписать все следующие до конца раздела формулы через большой термодинамический потенциал $\Omega = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H} - \psi$. (Примеч. ред.)

соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} p_e &= \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\eta \Omega}{\rho} \right) = - \frac{\partial(\zeta \eta \Omega)}{\partial \zeta}, \\ \mathcal{H} &= - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \Omega}{\partial \vartheta}, \quad \psi = - \vartheta \mathcal{H} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Примем для давления определяющее уравнение (3.122). Согласно (3.122), (3.129) для большого термодинамического потенциала получается равенство

$$\eta \Omega(\zeta, \vartheta, z, \mathbf{E}) = f_0 \left(\frac{\zeta^{-m}}{m-1} - \frac{\zeta^{-n}}{n-1} \right) - c_* \vartheta \frac{\ln(\zeta - b)}{\zeta} + \frac{f(\vartheta, z)}{\zeta}, \quad (3.130)$$

где $f(\vartheta, z)$ есть подлежащая определению функция. Таким образом, часть большого термодинамического потенциала, отвечающая шаровой части тензора напряжений, построена. Теперь необходимо найти его часть, соответствующую девиатору тензора напряжений. Большой термодинамический потенциал представим в виде суперпозиции двух частей

$$\begin{aligned} \eta \Omega(\zeta, \vartheta, z, \mathbf{G}) &= \eta \Omega(\zeta, \vartheta, z, \mathbf{E}) + \eta \Omega_d(\zeta, \vartheta, z, I_1, I_2), \\ \Omega_d(\zeta, \vartheta, z, 3, 3) &= 0, \end{aligned} \quad (3.131)$$

где первое слагаемое в правой части определено выражением (3.130), причем оно не влияет на девиатор тензора напряжений. Второе слагаемое в (3.131) определяет девиатор тензора напряжений. Эта часть большого термодинамического потенциала отлична от нуля только для твердой фазы материала⁴⁵. Теперь соотношения Коши–Грина (3.106) для девиатора тензора напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e &= \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_1} + 2 I_2 \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - 2 \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} - 4 \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2, \\ \boldsymbol{\Lambda} &= I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Понятно, что при температурах выше точки плавления материала функция $\eta \Omega_d$ должна обращаться в нуль⁴⁶. Вычислим максимальное касательное

⁴⁵ Поскольку часть большого термодинамического потенциала, которая отвечает за девиаторную часть тензора напряжений, зависит от ζ , она оказывает влияние на значение шаровой части тензора напряжений. В результате, для твердой фазы давление уже не определяется формулой (3.122), а имеет более сложную структуру, включающую в себя зависимость от инвариантов тензора формоизменения. Полное выражение для давления получено далее — см. формулу (3.139). (*Примеч. ред.*)

⁴⁶ В оригинальном тексте (статья “Основные уравнения теории неупругих сред”, 2001 г.) это утверждение относится к свободной энергии. Однако оно должно быть справедливо и в отношении приведенной энергии. (*Примеч. ред.*)

напряжение в материале. Пусть σ_j соответствует наибольшему главному напряжению, а σ_i есть наименьшее главное напряжение. Пусть τ_j и τ_i суть соответствующие главные значения девиатора тензора напряжений. Тогда имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2} = \frac{\tau_j - \tau_i}{2} = (\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_1} + 2(\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_2} \right). \quad (3.133)$$

В любом твердом теле касательное напряжение имеет верхнюю границу α , которая зависит от температуры и плотности

$$\alpha = \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right), \quad \vartheta \leq \vartheta_f; \quad \alpha = 0, \quad \vartheta \geq \vartheta_f, \quad (3.134)$$

где $\tau_p(\zeta)$ есть предельное касательное напряжение при нулевой температуре.

Таким образом, получаем двухстороннее неравенство

$$0 \leq (\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_1} + 2(\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \eta \Omega_d}{\partial I_2} \right) \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right), \quad (3.135)$$

где $\vartheta \leq \vartheta_f$. При температуре выше точки плавления функция $\eta \Omega_d$ обращается в нуль.

Введем обозначение

$$\eta \Omega_d = \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right) \mathcal{T}. \quad (3.136)$$

Тогда неравенство (3.135) принимает вид

$$0 \leq (\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + 2(\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) \leq 1, \quad \vartheta < \vartheta_f, \quad (3.137)$$

где функция $\mathcal{T}$ не зависит от температуры.

При достижении максимальным касательным напряжением верхней границы тело переходит в состояние текучести или разрушается в результате деформации скольжения. Условие текучести имеет вид

$$(\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + 2(\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) = 1. \quad (3.138)$$

Функция $\mathcal{T}(\Lambda_j, \Lambda_i)$, вообще говоря, зависит от двух переменных Λ_j, Λ_i . Условие (3.138) показывает, что на поверхности текучести она становится функцией только одной переменной. Чтобы найти эту переменную, необходимо найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

(3.138). В результате, пришли к чисто математической задаче о нахождении класса функций, тождественно удовлетворяющих условиям (3.137) и (3.138). Общее решение этой задачи в настоящее время не известно. Не исключено, однако, что в решении этой задачи нет необходимости. Причина появления условий (3.137) и (3.138) — наше желание удовлетворить одному из утверждений А. Треска, использованному впоследствии Сен-Венаном. Но, как отмечает Дж. Белл [63], с. 32, фактически это утверждение до сих пор остается предположением, а не экспериментально доказанным фактом.

Возможно, что условия (3.137) и (3.138) не обусловлены априорными требованиями, а являются следствием решения краевых задач теории неупругих сред. Поэтому в дальнейшем будет использовано выражение для энергии формообразования, которое тождественно не удовлетворяет условиям (3.137) и (3.138).

Выпишем теперь полное уравнение для давления

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b} - \frac{\partial (\zeta \eta \Omega_d)}{\partial \zeta}, \quad m > n, \quad \zeta > b > 0. \quad (3.139)$$

Последнее слагаемое в этой формуле определяет влияние энергии формоизменения на давление. Только для жидкости и газа это слагаемое обращается в нуль. Поэтому уравнение состояния для твердых тел нельзя свести к уравнению относительно трех переменных (давления, плотности и температуры), как это пытаются сделать в физике. Введение параметров порядка не может улучшить ситуацию, поскольку эти параметры не влияют на формулировку фундаментальных законов.

Таким образом, в общем случае деформирования твердого тела давление зависит от энергии формоизменения, причем влияние последней может оказаться весьма существенным, поскольку оно может снизить критические значения давления, при которых нарушаются условия сильной эллиптичности. Кроме того, последние могут нарушаться раньше, чем давления достигнут критического значения. В настоящее время математическая сторона обсуждаемого вопроса еще не исследована.

Далее выпишем основные уравнения для важного частного случая, когда плотность массы ρ и плотность числа частиц η не являются независимыми переменными, а связаны соотношением $\rho = m\eta$, где m — константа, определяющая массу одной частицы. Принятие условия $\rho = m\eta$ исключает химические реакции. В этом случае вместо большого термодинамического потенциала $\Omega = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H} - \psi$ следует использовать свободную энергию $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$.

Конкретизируем выражение для свободной энергии в простейшей форме⁴⁷

$$\begin{aligned} \eta \mathcal{F} &= f_0 \left(\frac{\zeta^{-m}}{m-1} - \frac{\zeta^{-n}}{n-1} \right) - c_* \vartheta \frac{\ln(\zeta - b)}{\zeta} + \\ &+ \frac{f(\vartheta)}{\zeta} + \frac{\mu(\zeta, \vartheta)}{2} (I_1 - 3) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \eta \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} = \mu(\zeta, \vartheta) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Соотношения Коши–Грина (3.129), (3.132) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e &= f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b} - \frac{1}{2} (I_1 - 3) \frac{\partial (\zeta \mu(\zeta, \vartheta))}{\partial \zeta}, \\ \boldsymbol{\tau}_e &= -\mu(\zeta, \vartheta) \boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\eta \zeta} \frac{df}{d\vartheta} + \frac{c_*}{\eta \zeta} \ln(\zeta - b) - \frac{1}{2\eta} (I_1 - 3) \frac{\partial \mu(\zeta, \vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Посмотрим, во что превращаются эти уравнения, если вектор перемещений $\mathbf{u}$ считать малым. В принятом приближении, согласно (3.110), определяющие уравнения (3.141) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e &= f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b}, \quad \boldsymbol{\tau}_e = 2\mu(\zeta, \vartheta) \operatorname{dev} \boldsymbol{\epsilon}, \\ \mathcal{H} &= -\frac{1}{\eta \zeta} \frac{df}{d\vartheta} + \frac{c_*}{\eta \zeta} \ln(\zeta - b). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Использовать линейные определяющие уравнения (3.142) в теории неупругих сред, конечно, рискованно, ибо вектор перемещения во многих практических ситуациях не является малым. Поэтому пользоваться нужно нелинейными соотношениями (3.141). Выберем теперь произвольную пару единичных ортогональных векторов $\mathbf{n}, \mathbf{m}$. Касательное напряжение, действующее по площадке с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении вектора $\mathbf{m}$, определяется формулой

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} = -\mu(\zeta, \vartheta) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{m}. \quad (3.143)$$

Очевидно, при выборе приведенной энергии в форме (3.140) касательное напряжение автоматически не удовлетворяет ограничению (3.135), что

⁴⁷ Здесь не учитывается зависимость приведенной энергии от $I_2(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}$. (Примеч. ред.)

усложняет все рассмотрения. Здесь необходимо действовать следующим образом. Выпишем неравенство

$$|\mu(\zeta, \vartheta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{m}| \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right). \quad (3.144)$$

Когда достигается равенство, решение нужно искать на классе разрывных функций. Та часть материала, в которой условие (3.144) выполняется со знаком равенства, начинает скользить относительно части среды, в которой имеет место строгое неравенство (3.144). Обсуждение всех возникающих здесь вопросов выходит за рамки данной работы. Разумеется, желательно так задать большой термодинамический потенциал, чтобы неравенство (3.135) выполнялось автоматически. Решение здесь должно быть примерно таким же, как при написании большого термодинамического потенциала для объемных деформаций. Существует, однако, возможность, что ничего этого делать не придется, а течение материала будет происходить не при постоянном касательном напряжении. Иными словами, лучше обойтись без традиционного критерия текучести, который к тому же не имеет прямого экспериментального подтверждения. Что касается зависимости модуля сдвига от плотности и температуры, то она имеет примерно следующий вид:

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right) \zeta^p \exp \left[-\frac{(\zeta - 1)^2}{c_*^2} \right]. \quad (3.145)$$

Иными словами, модуль сдвига должен обращаться в нуль как при высоких давлениях, так и при низких плотностях.

3.9. Сводка основных уравнений

В заключение перечислим систему уравнений, к решению которых сводится анализ той или иной конкретной задачи. Основными неизвестными являются: плотность частиц $\eta(\mathbf{x}, t)$ и плотность массы $\rho(\mathbf{x}, t)$. Задание функции $\eta(\mathbf{x}, t)$ определяет и само тело, относительно которого считается, что оно известно в начальный момент времени. Обычно для этого достаточно решить статическую задачу. Для определения эволюции указанных функций служат уравнения баланса частиц и массы. При этом необходимо задать правую часть уравнения (3.20), т. е. функцию $\chi(\eta, \rho, \mathcal{H}, \psi)$. К этим уравнениям необходимо добавить первый (3.43) и второй (3.47) законы динамики, а также уравнения теплопроводности (3.77) и диффузии (3.78) с соответствующими определяющими уравнениями для потоков энергии. Далее необходимо конкретизировать задание внутренней энергии (3.125). Следует обратить

внимание на то, что фазовые переходы в среде могут быть получены только при рассмотрении полной динамической задачи. Непривычным является тот факт, что решать необходимо задачу с начальными данными, а никаких краевых условий не требуется. Наличие стенок и препятствий другого рода необходимо моделировать объемными силами. В целом теория получается довольно сложной для численной реализации, но стремительное развитие численных методов позволяет надеяться, что эта задача не безнадежна.

Чтобы использовать изложенную ранее теорию для каких-либо полезных целей, необходимы дальнейшие конкретизации и дополнительные исследования. Наиболее сложной является проблема построения определяющего уравнения для девиатора тензора упругих напряжений. Уравнение (3.127) — всего лишь одна из возможностей и, возможно, далеко не лучшая. Надеемся, что в работе удалось показать направление и содержание исследований, проведение которых необходимо для построения теории неупругих сред с фазовыми переходами⁴⁸.

Выпишем полную систему уравнений динамики рассматриваемой среды. Закон сохранения массы⁴⁹ принимаем в форме (3.34)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (3.146)$$

Первый закон динамики имеет вид⁵⁰

$$-\nabla p_e + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_e + \nabla \times \mathbf{t} + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \quad (3.147)$$

Второй закон динамики Эйлера необходимо формулировать в двух альтернативных формах

$$2k |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}| \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|} = \rho J \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right), \quad (3.148)$$

$$2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V} \neq 0$$

⁴⁸ Здесь заканчивается текст данного раздела, опубликованный в статье 2003 г. “Математическая теория неупругих сред”. Далее следует текст статьи 2001 г. “Основные уравнения теории неупругих сред”. (Примеч. ред.)

⁴⁹ Здесь считается, что $\rho = m\eta$. Поэтому уравнение баланса частиц является тривиальным следствием закона сохранения массы. (Примеч. ред.)

⁵⁰ Здесь при формулировке первого и второго законов динамики Эйлера считается, что тензор инерции $\mathbf{V}$ равен нулю, а тензор инерции $\mathbf{C}$ — шаровой: $\mathbf{C} = J\mathbf{E}$. (Примеч. ред.)

или

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{4}\rho J \nabla \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right), \quad 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (3.149)$$

$$|\mathbf{t}| < 2k |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}| \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}).$$

Вектор $\mathbf{n}$ в уравнениях (3.148) и (3.149) находится из решения задачи (3.92). Для замыкания системы к выписанным уравнениям необходимо добавить определяющие уравнения

$$p_e = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial (\zeta \mu(\zeta, \vartheta))}{\partial \zeta}, \quad (3.150)$$

$$\boldsymbol{\tau}_e = -\mu(\zeta, \vartheta) I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^\top - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g}^\top \mathbf{E} \right)$$

и геометрические соотношения

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (3.151)$$

Последние два уравнения взаимозаменяемы. Наконец, уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q = \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \eta \delta. \quad (3.152)$$

В качестве примера приведем постановку задачи о сферически симметричной деформации полого шара. Пусть при $t = 0$ шар занимал область $\mathbf{a}_0 < \mathbf{r}_0 < \mathbf{b}_0$, а в актуальный момент времени он занимает область $\mathbf{a} < \mathbf{r} < \mathbf{b}$. Вектор смещения зададим в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})\mathbf{e}_r$. Введем обозначения

$$v = 1 - \frac{u}{r} > 0, \quad w = 1 - \frac{\partial u}{\partial r}, \quad z = \left(\frac{w}{v} \right)^{2/3}, \quad \mathbf{e}_r \equiv \mathbf{e}. \quad (3.153)$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{g} = w \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + v (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (3.154)$$

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\Lambda} = z^2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + z^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad I_3(\mathbf{g}) = w v^2.$$

Для инвариантов тензора формоизменения справедливы формулы

$$I_1(\mathbf{G}) = z^2 + 2z^{-1} \geq 3, \quad I_2(\mathbf{G}) = z^4 + 2z^{-2} \geq 3. \quad (3.155)$$

Внутреннее рассеяние энергии считаем чисто тепловым, т. е. вектор $\mathbf{t}$ будем считать равным нулю. Закон сохранения массы в рассматриваемом случае можно представить в форме

$$\frac{\partial(\zeta w v^2)}{\partial t} + \frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial(\zeta w v^2)}{\partial r} = 0. \quad (3.156)$$

Уравнения движения в данном случае сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \frac{\rho_0}{\zeta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi^2}{2} \right) \right], \quad \xi = \frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.157)$$

Для простоты модуль сдвига определим формулой

$$\mu = \frac{\mu_0}{\zeta} \frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - \vartheta_*/\vartheta_f} \theta \left(\frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - \vartheta_*/\vartheta_f} \right), \quad (3.158)$$

где ϑ_* — комнатная температура; μ_0 — модуль сдвига при комнатной температуре; $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Определяющее уравнение для давления принимает вид

$$p_e = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c_* \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (3.159)$$

Для девиатора тензора напряжений имеем

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mu \left(z^2 - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right). \quad (3.160)$$

Тогда нормальные напряжения определяются формулами

$$\sigma_r = -p_e - \frac{2\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right), \quad \sigma_\varphi = -p_e + \frac{\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right). \quad (3.161)$$

Энтропия задается выражением

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\eta \zeta} \frac{df}{d\vartheta} + \frac{c_*}{\eta \zeta} \ln(\zeta - b) - \frac{1}{2\eta} (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial \mu(\zeta, \vartheta)}{\partial \vartheta}. \quad (3.162)$$

Осталось записать уравнение теплопроводности

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = \rho \vartheta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \xi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \right), \quad q = \delta = 0, \quad \mathbf{h} = k \nabla \vartheta, \quad k > 0. \quad (3.163)$$

Теперь необходимо сформулировать краевые и начальные условия. Краевые условия примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} r = \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{a}(t), t) : \quad \sigma_r &= -p_a(t); \\ r = \mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{b}(t), t) : \quad \sigma_r &= -p_b(t). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Первое и третье из этих соотношений служат для определения актуальных положений границ. Кроме того, нужно принять условие для теплового потока. Если теплообмен с окружающей средой отсутствует, то он равен нулю. Начальные условия можно принять, например, такими, чтобы при $t = 0$ шар находился в натуральном состоянии.

Как видим, даже для относительно простой задачи получается весьма сложная система уравнений, не поддающаяся точному аналитическому решению.

Заключение

В данной главе представлен набросок теории неупругих сред. Нерешенной с теоретической точки зрения осталась проблема конкретного задания “девиаторной” части свободной энергии. Тем не менее и эта проблема сформулирована так, что она доступна решению математическими средствами. Поэтому можно надеяться, что математики перестанут уклоняться от разработки теории неупругих сред. Тем более, что в математическом отношении эта теория несравнимо богаче и интереснее, нежели нелинейная теория упругости. Можно сказать, что теория неупругих сред — это теория фазовых переходов в твердых телах. Однако среди этих переходов встречаются и неклассические фазовые переходы, связанные с перестройками структуры твердых тел. При этом, вообще говоря, в теории нет никакой необходимости в критериях типа критериев текучести, которые фактически определяются желанием подогнать теорию под эксперимент, но которыми заведомо не может руководствоваться Природа.

Глава 4

Модифицированная теория симметрии тензоров и тензорных инвариантов¹

Введение

Теория инвариантов систем тензоров является разделом линейной алгебры и, в частности, тензорного исчисления. Классическую постановку проблемы инвариантов можно найти в книгах [78–80]. В механике сплошных сред, в частности в теории определяющих уравнений, теория инвариантов имеет две существенные особенности.

Первая особенность связана с тем, что в механике используются только ортогональные инварианты и практически не рассматриваются инварианты относительно линейной группы преобразований.

Вторая особенность связана с использованием в механике не только евклидовых объектов, но и тензоров других типов, например, аксиальных тензоров².

¹ Материал этой главы основан на двух статьях П. А. Жилина [76, 77]: “Модифицированная теория симметрии тензоров и их инвариантов” (Нелинейные проблемы механики сплошных сред: изв. высш. учеб. заведений Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2003. — Спецвып. — С. 176–195), “Symmetries and Orthogonal Invariants in Oriented Space” (Proceedings of XXXII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia, 2005. — P. 470–483). (*Примеч. ред.*)

² На первый взгляд, кажется, что в данной главе обсуждаются чисто математические вопросы и она не имеет прямого отношения к другим главам книги. Однако это не так. Результаты, полученные в данной главе, очень важны для вывода определяющих соотношений. Действительно, после того как получены соотношения Коши–Грина, дальнейший вывод определяющих соотношений сводится к заданию внутренней энергии как функции тензоров деформации. В нелинейной теории задание внутренней энергии является сложнейшей задачей, решение которой существенно опирается на экспериментальные данные. Для того чтобы подойти к решению этой задачи, важно знать, от каких скалярных величин (инвариантов тензоров деформации) зависит внутренняя энергия. В классической (безмоментной) теории упругости внутренняя энергия зависит от одного симметрично-

Начало применению ортогональных инвариантов евклидовых тензоров в механике сплошных сред было положено О. Коши в 1850 г. Представление о современных направлениях использования теории инвариантов в механике сплошных сред можно получить по книге [81]. Отметим, что значительная часть результатов по теории инвариантов относится к так называемым полиномиальным инвариантам [82]. Однако нет физических оснований для выделения полиномиальных инвариантов среди всех возможных инвариантов. Поэтому в данной работе полиномиальность инвариантов не предполагается. Достаточно полный список современных работ по теории инвариантов можно найти в обзоре [83]. В данной работе будут рассматриваться инварианты систем тензоров относительно полной ортогональной группы, которые наиболее важны в механике сплошных сред. Отличие данной работы от известных состоит в распространении существующей теории на неевклидовы тензоры, которые играют весьма важную роль в механике³.

го тензора, который обладает тремя независимыми скалярными инвариантами. Ситуация усложняется при переходе к моментной теории (см. гл. 3) и построении моделей многокомпонентных сред (см. гл. 5) и сред с внутренними степенями свободы (см. гл. 6), поскольку возникает задача нахождения независимых скалярных инвариантов системы нескольких тензоров деформации. Трудность решения этой задачи обусловлена не столько техническими сложностями, сколько необходимостью модификации классической теории симметрии и классической теории инвариантов. Решению этих теоретических вопросов, а также определению независимых инвариантов конкретных систем векторов и тензоров, возникающих в приложениях, посвящена данная глава. Одним из важнейших теоретических результатов является теорема о числе независимых инвариантов. В классической теории инвариантов такой теоремы нет. Вместе с тем, эта теорема имеет важное прикладное значение, поскольку использование переполненной системы инвариантов приводит к появлению в теории материальных констант, которые в принципе невозможно найти из физических экспериментов. (*Примеч. ред.*)

³ Хорошо известны и широко используются при получении определяющих уравнений для классических нелинейно-упругих материалов теория симметрии и теория инвариантов полярных объектов. Общая теория симметрии тензоров и тензорных инвариантов разработана П. А. Жилиным. Эта теория существенно отличается от классической в случае ориентированных (в частности, аксиальных) объектов и полностью совпадает с классической в случае полярных объектов. Теория П. А. Жилина оказывается востребована при построении моделей различных мультиполярных сред: теории стержней, теории пластин и оболочек (см. Приложение J), трехмерных теорий, в которых учитываются вращательные степени свободы. В третьей и пятой главах книги полярность среды учитывается при формулировке определяющих уравнений неупругих составляющих тензоров силовых и моментных напряжений. При выводе определяющих соотношений для упругих составляющих рассматривается случай неполярной среды (см. разд. 3.8, 5.8). В шестой и седьмой главах, где принимается во внимание зависимость внутренней энергии от аксиальных векторов деформации, конкретный вид энергии задается только в случае линейной теории (см. разд. 6.6, 6.8 и подразд. 7.3.3). Поэтому оригинальные результаты данной главы в

4.1. Общая постановка проблемы

Центральная проблема классической теории инвариантов заключается в следующем. Пусть дана система векторов и тензоров второго ранга

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m; \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n. \quad (4.1)$$

Для данной системы тензоров и векторов и данной группы преобразований нужно найти минимальный набор инвариантов, через которые могут быть выражены все остальные инварианты.

Классическая теория инвариантов приводит к возникновению целого ряда физических парадоксов, некоторые из которых обсуждаются в дальнейшем. В частности, согласно классической теории, смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ не является инвариантом относительно ортогональной группы преобразований. Наша главная цель заключается в модификации классической теории, результатом которой будет устранение противоречия между математикой и физикой.

Далее используется прямое тензорное исчисление [25, 26, 50], при котором векторы рассматриваются как направленные отрезки, а тензоры второго ранга являются совокупностями упорядоченных пар векторов. Заметим, что некоторые тензоры, например градиент деформации, в [26] отличаются от тензоров в [25] операцией транспонирования. В книгах [26, 50] обозначения совпадают. Преимущество прямой тензорной записи заключается в том, что объекты (4.1) содержат в себе всю необходимую информацию. При арифметическом (координатном) подходе за кадром остаются используемые базисы, о которых необходимо помнить дополнительно. Следует иметь в виду, что авторы, применяя координатный подход, часто используют записи, подобные (4.1), но это просто условные обозначения. Все равно вектор $\mathbf{a}$ — это тройка координат $\mathbf{a}^i$: $(\mathbf{a}^i) \equiv \mathbf{a}$ относительно некоторого базиса $\mathbf{g}_i$, который нужно помнить отдельно. При прямом подходе вектор $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^i \mathbf{g}_i$, причем ни координаты $\mathbf{a}^i$, ни базисные векторы $\mathbf{g}_i$ не нужны.

Без ограничения общности можно считать, что тензоры второго ранга, входящие в систему (4.1), симметричны. Действительно, если какой-либо тензор $\mathbf{A}_i$ несимметричен, то его можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Антисимметричный тензор, в свою очередь, допускает [50] однозначное представление через сопутствующий вектор,

этой книге практически не используются. Однако читатель, который поставит перед собой цель построения модели более сложной полярной среды, внутренняя энергия которой зависит от нескольких векторов и тензоров второго ранга, в том числе и аксиальных, найдет применение всем результатам данной главы. (*Примеч. ред.*)

который можно включить в список векторных величин, входящих в (4.1). Здесь, однако, возникают сложности, связанные с типом рассматриваемых тензоров. Пусть дана тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. В книге [81] утверждается, что она обладает шестью базисными инвариантами

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Каждому из этих векторов можно сопоставить антисимметричные тензоры по формуле

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{a} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad -2\mathbf{a} = (\mathbf{W}_a)_\times.$$

После этого можно работать с системой трех антисимметричных тензоров $\mathbf{W}_a$, $\mathbf{W}_b$, $\mathbf{W}_c$. Поскольку система трех антисимметричных тензоров эквивалентна системе трех векторов, число базисных инвариантов у этих систем должно совпадать. Однако в той же книге [81] утверждается, что система трех антисимметричных тензоров имеет семь базисных инвариантов. Комментарии по этому поводу отсутствуют. Кроме того, не обсуждается ни тип рассматриваемых векторов, ни тип сопоставляемых им антисимметричных тензоров. Между тем, они имеют различные типы: если векторы полярны, то сопоставляемые им антисимметричные тензоры аксиальны, и наоборот. Поэтому невозможно ограничиться рассмотрением объектов только одного типа. Отметим некоторые наиболее известные примеры систем типа (4.1), использующихся в механике. Пример одного векторного аргумента дает нам кинетическая энергия материальной точки. Энергия деформации нелинейно упругой изотропной неполярной среды зависит от одного симметричного тензора второго ранга. Энергия деформации мультиполярной изотропной среды (среды Коссера, среды Кельвина и др.) зависит от двух несимметричных тензоров второго ранга, причем один из них полярен, а другой аксиален. При переходе к симметричным тензорам второго ранга получаем систему из двух векторов и двух симметричных тензоров второго ранга, причем один вектор и один тензор полярны, а остальные — аксиальны. Энергия деформации оболочки зависит (см. Приложение J) от двух тензоров второго ранга, один из которых полярен, а другой — аксиален, и одного n -ориентированного вектора. В электродинамике энергия зависит от двух векторов, один из которых полярен (вектор электрического поля), а другой (вектор магнитного поля) — аксиален⁴. Можно привести много других примеров.

⁴ Здесь речь идет о классической электродинамике. В шестой главе в рамках механики сплошной среды строится модель электромагнитного поля, согласно которой вектор электрического поля аксиален, а вектор магнитного поля полярен (см. разд. 6.6). (*Примеч. ред.*)

Классическое определение инвариантов системы (4.1) можно найти, например, в [80]. Известна теорема Гильберта [78], гласящая, что конечная система тензоров имеет конечное число функционально независимых базисных инвариантов, т. е. таких инвариантов, через которые функциональным образом выражаются все остальные инварианты. Однако теорема Гильберта ничего не говорит о числе инвариантов, составляющих базис. Последней проблеме, назовем ее *Проблемой I*, посвящено большое количество работ [80–91], в которых можно найти ссылки и на другие работы⁵. Но окончательного решения *Проблема I* так и не получила. Можно сформулировать проблему, назовем ее *Проблемой II*, несколько иначе.

Найти минимально полный набор инвариантов системы (4.1), фиксация которых определяет систему (4.1) с точностью до жесткого поворота в системе отсчета.

С математической точки зрения сказанное означает следующее. Пусть наряду с системой (4.1) дана еще одна система

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \quad \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n. \quad (4.2)$$

Требуется установить минимально полный набор инвариантов систем (4.1) и (4.2), совпадение которых гарантирует существование тензора поворота $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{E}$, $\det \mathbf{P} = 1$) такого, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_1, & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{b}_m &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_m, \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{P}^T, & \mathbf{B}_2 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{P}^T, & \dots & \mathbf{B}_n &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{P}^T. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Описание тензора поворота и его свойств можно, например, найти в книгах [2, 50]. Иными словами, если базисные инварианты двух систем тензоров совпадают, то эти системы отличаются друг от друга только поворотом как жесткое целое.

Строго говоря, обе постановки проблемы должны приводить к одинаковым результатам. Однако это не так. Затруднение возникает при определении понятия инварианта. С чисто математической точки зрения возможны различные определения инвариантов и в этой связи может возникать только терминологическая дискуссия. При второй постановке проблемы определение инвариантов должно допускать решение *Проблемы II*. Заметим, что решение *Проблемы II* одновременно решает *Проблему I*, но обратное верно не для

⁵ Весьма интересна во многих отношениях статья [91] Р. С. Ривлина. В этой работе Р. С. Ривлин высказывает свою позицию по нескольким важнейшим вопросам механики сплошных сред. В частности, в ней обсуждается и проблема инвариантов. Именно эта работа стимулировала автора к написанию данной статьи.

всякого определения инвариантов. Важно подчеркнуть, что в теории определяющих уравнений сплошных сред вторая постановка проблемы является более важной. Поэтому именно ее решение и рассматривается далее⁶.

4.2. Ортогональные преобразования тензоров

Классическое определение инвариантов и классическая теория симметрии тензоров применимы только для полярных (евклидовых) тензоров. Евклидовы тензоры отнюдь не исчерпывают список объектов, встречающихся в приложениях. В работе [67] (см. Приложение J) введено понятие ориентированных тензоров, для которых предложена теория симметрии. Основные результаты работы [67] воспроизведены в работе [92]. Частным случаем ориентированного тензора является аксиальный (псевдоевклидовый) тензор. Понятие аксиального вектора давно и широко используется в литературе. Однако корректное введение аксиального вектора можно найти только в книге [50]. В частности, в [50] показано, почему нельзя складывать евклидовы и псевдоевклидовы тензоры. Для сравнения: в работе [91] считается, что складывать полярные и аксиальные объекты можно.

Приложение классической теории симметрии к аксиальным объектам ведет к ошибочным результатам. Собственно говоря, именно это обстоятельство обусловило необходимость введения новой теории симметрии в работе [67]. В приложениях аксиальный вектор, в частности, возникает как результат векторного произведения двух полярных векторов. Поскольку классическая теория симметрии при этом не работает, а ее использование ведет к абсурдным результатам, то некоторые авторы [25] вообще отказались от использования векторного произведения. Однако отказ от использования аксиальных объектов ведет к совершенно неоправданным усложнениям во многих разделах механики.

Следует подчеркнуть, что аксиальные объекты обязаны своим возникновением тому факту, что в природе существуют два принципиально различных типа движения: трансляционные и спинорные движения. Трансляционным движениям отвечают полярные объекты, а спинорным движениям отвечают аксиальные объекты. Поэтому кажется целесообразным полностью узаконить аксиальные объекты в механике, вместо того чтобы вводить для них искусственные конструкции, связанные с повышением ранга рассматри-

⁶ Приносим свои извинения тем, кому отдельные места в данной главе покажутся слишком элементарными, но эта глава обращается не только к теоретикам, но и к тем, кто использует теорию инвариантов в сугубо прикладных целях.

ваемых тензоров. Что касается теории симметрии, то она легко обобщается на аксиальные (псевдоевклидовы) тензоры. Это и будет сделано далее.

Прежде всего, необходимо ввести понятие ориентированной системы отсчета [50]. Трансляционные движения определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности *три*. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости, моменты и т. д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые спин-векторами [50]. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия.

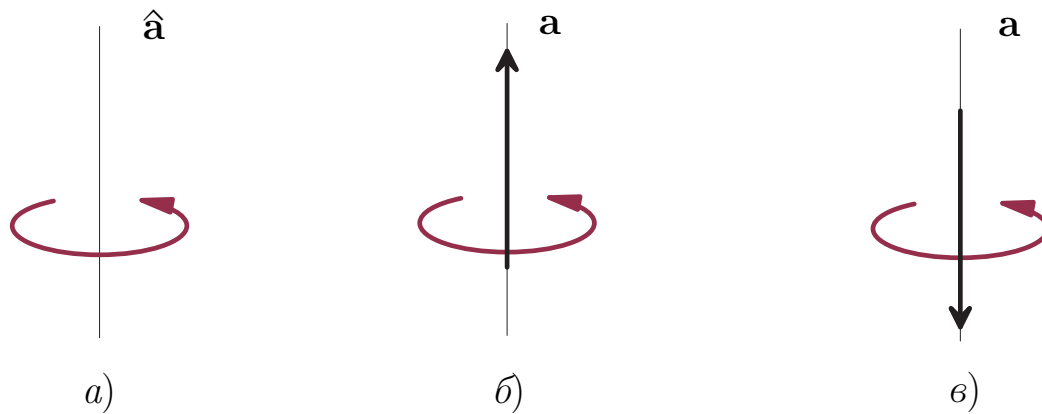


Рис. 4.1. Ориентированная система отсчета: *а* — спин-вектор $\hat{\mathbf{a}}$; *б* — аксиальный вектор $\mathbf{a}$, соответствующий спин-вектору $\hat{\mathbf{a}}$ в правоориентированной системе отсчета; *в* — аксиальный вектор $\mathbf{a}$, соответствующий спин-вектору $\hat{\mathbf{a}}$ в левоориентированной системе отсчета

Чтобы определить спин-вектор, необходимо в системе отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось (рис. 4.1, *а*). Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\hat{\mathbf{a}}$ сопоставляется “обычный” вектор $\mathbf{a}$ таким образом, что выполняются условия:

1) $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\hat{\mathbf{a}}$; 2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\hat{\mathbf{a}}$; 3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (рис. 4.1, б; правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (рис. 4.1, с; левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Очевидно, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую, и наоборот. Обратим внимание, что при замене базиса координаты полярного и аксиального векторов преобразуются одинаково, что находится в противоречии со стандартным определением аксиального вектора, используемым в книгах.

Таким образом, в ориентированной системе отсчета действуют два типа векторов (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Важно подчеркнуть, что введенное правило ориентации существует только в наших головах и само по себе не отражено в формальных определениях, связанных с аксиальным вектором. По этой причине понятие аксиальности должно быть дополнительно введено в определение ортогонального преобразования тензора. Понятно, что аксиальными могут быть и тензоры любого ранга. Например, диада векторов, один из которых является полярным, а другой аксиальным, является аксиальным тензором второго ранга.

Определение. *Объекты, которые не зависят от выбора ориентации в системе отсчета, называются полярными или евклидовыми; объекты, которые при изменении ориентации в системе отсчета умножаются на (-1) , называются аксиальными или псевдоевклидовыми.*

Согласно принятому определению аксиальными могут быть скаляры, векторы и тензоры высших рангов. Полярные скаляры часто называют абсолютными. Примерами абсолютных скаляров в физике являются энергия, температура, объем и т. д. Простейшим и часто встречающимся примером аксиального скаляра является смешанное произведение трех полярных векторов

$$f = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (4.4)$$

Если один из векторов в смешанном произведении является аксиальным, то оно будет абсолютным скаляром. Другим примером аксиального скаляра является проекция аксиального вектора, например вектора угловой скорости или вектора момента силы, на какое-либо направление в системе отсчета.

Введем понятие ортогонального преобразования тензоров разных рангов. Пусть дан ортогональный тензор $\mathbf{Q}$.

Определение. Ортогональными преобразованиями скаляра g , вектора $\mathbf{a}$ и тензора второго ранга $\mathbf{A}$ называются соответственно величины

$$g' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha g, \quad \mathbf{a}' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (4.5)$$

где $\alpha = 0$ для полярных объектов и $\alpha = 1$ для аксиальных объектов.

Для полярных объектов вводимое определение ортогонального преобразования совпадает с общепринятым. Для аксиальных объектов оно было впервые введено в работе [67] (см. Приложение J), в которой даны определения и для других типов тензоров. Для иллюстрации естественности вводимого определения ортогонального преобразования аксиальных объектов рассмотрим два простых примера. Рассмотрим аксиальный скаляр (4.4). Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ полярны. Тогда ортогональное преобразование скаляра f , определенного выражением (4.4), можно определить непосредственно

$$\begin{aligned} f' &= \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c})] = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot [(\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q}) f. \end{aligned}$$

Здесь использовано тождество [50]

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

В результате пришли к определению (4.5). С чисто математической точки зрения последнее выражение можно не считать инвариантом, как это и принято в литературе. Точнее говоря, считается, что смешанное произведение векторов является инвариантом только относительно собственно ортогональной группы, но не является инвариантом относительно полной ортогональной группы. Но с физической точки зрения приведенное определение инварианта (4.5) является единственно возможным. Действительно, рассмотрим физический объект, называемый односпиновой частицей [2]. Эта частица характеризуется двумя векторами: вектором $\mathbf{V}$ трансляционной скорости (полярный вектор) и вектором $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости (аксиальный вектор). Для фиксации системы двух векторов $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ необходимо задать три величины $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Вторая из них является аксиальным скаляром и, согласно традиционному определению, инвариантом не является.

Типичный пример аксиального вектора — векторное произведение двух полярных векторов. В этом случае также возможно дать определение орто-

гонального преобразования непосредственно на основе определения ортогонального преобразования полярных векторов

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Аналогично можно объяснить определение ортогональных преобразований для тензоров любого ранга (см. Приложение J).

Обратимся к введению важного физического понятия симметрии объектов. Интуитивное представление о симметриях тел имеется практически у каждого человека. Но в рациональной науке эти интуитивные представления должны быть однозначно определены в математической форме. Например, физической операции зеркального отражения, осуществляемой с помощью реального зеркала, должна соответствовать математическая операция, в которой реальному зеркалу должен соответствовать однозначно определенный математический объект. Реальному зеркалу соответствует плоскость, совпадающая с плоскостью зеркала, которую обычно определяют заданием вектора единичной нормали $\mathbf{n}$. Математический объект, точно соответствующий реальному зеркалу, действительно существует и определяется заданием тензора второго ранга

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = -1. \quad (4.6)$$

Если тензором зеркального отражения (4.6) подействовать на вектор $\mathbf{a}$, то получим вектор $\mathbf{a}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$. Проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_*$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{n}$, совпадают, а проекции этих векторов на вектор $\mathbf{n}$ равны между собой по модулю, но противоположны по направлению.

Еще одним важным представлением о симметрии является симметрия тел относительно разного рода поворотов. Например, шар не меняется при произвольных поворотах вокруг своего центра. Этому представлению также отвечает вполне определенный математический объект, называемый тензором поворота, который в соответствии с теоремой Эйлера [50] может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1, \quad (4.7)$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет прямую, называемую осью поворота, а угол φ называется углом поворота. Действие тензора поворота (4.7) на вектор $\mathbf{a}$ сводится к повороту этого вектора вокруг оси поворота на угол φ . Замечательным является тот факт, что любой элемент симметрии тела может быть представлен в виде композиции тензоров типа (4.6) и (4.7). Следовательно, симметрии тел описываются тензорами второго ранга.

Определение. Группами симметрии скаляра g , вектора $\mathbf{a}$ и тензора второго ранга $\mathbf{A}$ называются соответственно множества ортогональных решений уравнений

$$(\det \mathbf{Q})^\alpha g = g, \quad (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{A}, \quad (4.8)$$

где скаляр g , вектор $\mathbf{a}$ и тензор второго ранга $\mathbf{A}$ считаются заданными, а ортогональные тензоры $\mathbf{Q}$ подлежат определению.

Смысл введенного определения вполне ясен. Если ортогональное преобразование рассматриваемого объекта совпадает с исходным объектом, то ортогональный тензор, входящий в это преобразование, называется элементом симметрии данного объекта. Очевидно, что множество элементов симметрии объекта действительно образует группу. В самом деле, это множество не пусто, поскольку единичный тензор является элементом (тривиальным) симметрии любого объекта. Обратный элемент также существует для любого элемента симметрии. Осталось только убедиться, что если тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ являются элементами симметрии, то и их композиция $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$ является элементом симметрии, т. е. принадлежит к рассматриваемому множеству. Покажем это на примере тензора второго ранга $\mathbf{A}$. Пусть тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ — элементы симметрии тензора $\mathbf{A}$, т. е. пусть они удовлетворяют уравнениям

$$(\det \mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{A}, \quad (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{Q}_3)^\alpha \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_3^T &= (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha (\det \mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2^T = \\ &= (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Здесь мы дважды использовали уравнения (4.9) и убедились, что тензор $\mathbf{Q}_3$ принадлежит к множеству элементов симметрии. Таким образом, множество элементов симметрии обладает всеми признаками, позволяющими назвать это множество группой.

Опишем группы симметрии скаляров, векторов и тензоров второго ранга. Для скаляров непосредственно из определения видим, что группа симметрии абсолютного скаляра совпадает с полной ортогональной группой, а группа симметрии аксиального скаляра совпадает с собственно ортогональной группой.

Группа симметрии полярного вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, параллельных $\mathbf{a}$, т. е. из тензоров (4.7) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров (4.6) при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Группа симметрии аксиального вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных $\mathbf{a}$, т. е. из тензоров поворота (4.7) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров зеркальных отражений (4.6) при $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. При экспериментальной проверке этого факта с помощью зеркала следует помнить, что прообразом аксиального вектора является спин-вектор. Поскольку зеркальное отражение — это физическая операция, ее результат не может зависеть от нашего соглашения об ориентации. Поэтому при работе с зеркалом следует использовать не аксиальный вектор, а его прообраз, т. е. спин-вектор (рис. 4.2). Таким образом, группы симметрии полярных и аксиальных векторов существенно различны.

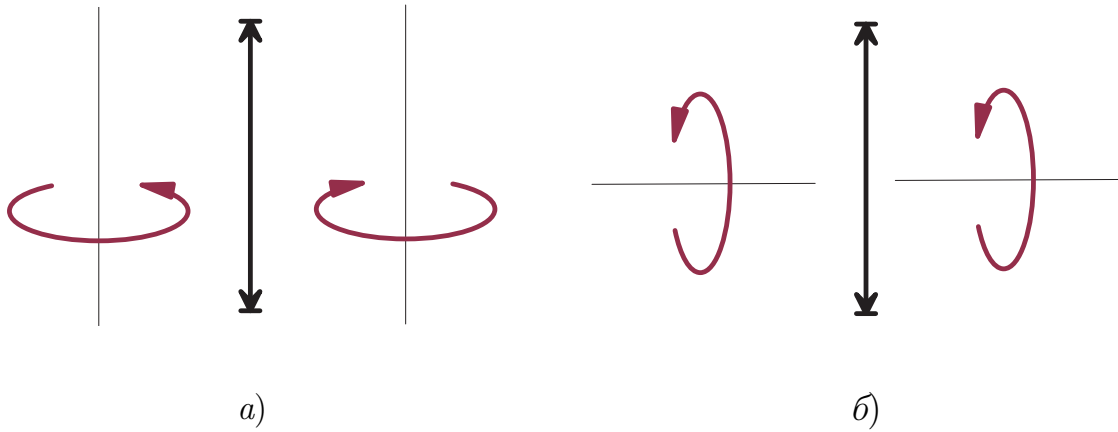


Рис. 4.2. О симметрии аксиального вектора: *a* — зеркальное отражение от плоскости, параллельной оси спин-вектора; *б* — зеркальное отражение от плоскости, перпендикулярной оси спин-вектора

Полярный и аксиальный тензоры с одинаковыми элементами симметрии имеют различную структуру. Пусть, например, зеркальное отражение $\mathbf{E} = 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ принадлежит группе симметрии полярного тензора $\mathbf{A}$ и аксиального тензора $\mathbf{B}$. Это возможно, если и только если эти тензоры имеют вид

$$\mathbf{A} = A_{11}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + A_{22}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + A_{23}\mathbf{n} \otimes \mathbf{p} + A_{32}\mathbf{p} \otimes \mathbf{n} + A_{33}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p},$$

$$\mathbf{B} = B_{12}\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + B_{13}\mathbf{m} \otimes \mathbf{p} + B_{21}\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + B_{31}\mathbf{p} \otimes \mathbf{m},$$

где A_{ik} — абсолютные скаляры и B_{ik} — аксиальные скаляры; $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ — ортогональный базис. Если есть две плоскости зеркальной симметрии с единичными нормальными $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, тогда

$$\mathbf{A} = A_{11}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + A_{22}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + A_{33}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}, \quad \mathbf{B} = B_{12}\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + B_{21}\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}. \quad (4.10)$$

Группа симметрии симметричного полярного тензора второго ранга, все собственные числа которого различны, состоит только из зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных собственным векторам этого тензора. Зеркальные отражения принадлежат к группе симметрии аксиального симметричного тензора только в исключительных случаях. Пусть, например, зеркальное отражение $\mathbf{E} - 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ принадлежит к группе симметрии симметричного аксиального тензора $\mathbf{A}$. Это возможно только в том случае, когда тензор $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) + B(\mathbf{m} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{m}) \quad \Rightarrow \quad \text{tr} \mathbf{A} = 0,$$

где A и B суть аксиальные скаляры, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ есть ортонормированный базис. Если имеются две плоскости зеркальной симметрии, ортогональные векторам $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, то $B = 0$. Три ортогональных плоскости зеркальной симметрии имеет только нулевой аксиальный тензор. Столь существенное различие между полярными и аксиальными объектами необходимо иметь в виду как в приложениях, так и в теории инвариантов.

Пример. Естественно закрученный стержень. Плотность внутренней энергии тонкого упругого стержня определяется квадратичной формой

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}, \quad (4.11)$$

где векторы деформации определяются выражениями

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}' + \mathbf{p} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{k} = \boldsymbol{\varphi}'.$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — соответственно вектор перемещений и вектор углов поворота.

Пусть векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — главные оси поперечного сечения стержня. Пусть тензоры $\mathbf{E} - 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ и $\mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ являются элементами симметрии для поперечного сечения. Если мы применим классическую теорию симметрии, мы получим, что в таком случае тензоры упругости $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в выражении (4.11) имеют такой же вид, как тензор $\mathbf{A}$ в (4.10). С физической точки зрения это нонсенс. При использовании модифицированной теории симметрии только полярные тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ в (4.11) имеют структуру тензора $\mathbf{A}$ в (4.10), а аксиальный тензор $\mathbf{B}$ в выражении (4.11) имеет структуру $\mathbf{B}$ в (4.10). Пусть $\mathbf{p}$ — вектор единичной нормали к поперечному сечению. Как правило, тензор $\mathbf{E} - 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$ принадлежит к группе симметрии стержня. В таком случае аксиальный тензор упругости $\mathbf{B}$ в выражении (4.11) равен нулю. Однако для естественно закрученных стержней (например, сверла) тензор $\mathbf{E} - 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$ не принадлежит к

группе симметрии стержня. Вследствие этого аксиальный тензор упругости $\mathbf{B}$ в (4.11) имеет структуру тензора $\mathbf{B}$ в (4.10). Этот результат невозможно получить с помощью классической теории симметрии.

Определение. Тензор n -го ранга называется изотропным, если его группа симметрии содержит все ортогональные тензоры.

Существует один полярный изотропный тензор второго ранга $f \mathbf{E}$, где f — абсолютный скаляр. Не существует аксиальных изотропных тензоров второго ранга. Не существует полярных изотропных тензоров третьего ранга. Однако есть один аксиальный изотропный тензор третьего ранга $f \mathbf{E} \times \mathbf{E}$, где f — абсолютный скаляр. Действительно, согласно определению (4.5), имеем

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{E})' \equiv (\mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_m \times \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}_n)' \equiv (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{g}_m \times \mathbf{g}^n) \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}_n = \\ = [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_m) \cdot \mathbf{Q}^T] \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}_n) \cdot \mathbf{Q}^T] = [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T] \times [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T] = \mathbf{E} \times \mathbf{E}.$$

При традиционном подходе тензор $f \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ не считается изотропным. Этот факт важен в теории пьезоэлектричества.

4.3. Ортогональные инварианты и теорема о базисе

Обратимся к проблеме инвариантов⁷. Пусть дан конечный набор векторов и тензоров второго ранга

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n. \quad (4.12)$$

Как уже отмечалось во введении, тензоры в системе (4.12) можно считать симметричными. В систему (4.12) входит $m + n$ объектов или, в пересчете на координаты, $N = 3m + 6n$ скалярных функций.

Определение. Скалярная функция $F = F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ называется ортогональным инвариантом системы объектов (4.12), если для любых ортогональных тензоров выполняется равенство

$$F(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m, \mathbf{A}'_1, \dots, \mathbf{A}'_n) = (\det \mathbf{Q})^\alpha F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n), \quad (4.13)$$

где величины со штрихами определены формулами (4.5); $\alpha = 0$, если F есть абсолютный скаляр и $\alpha = 1$, если F есть аксиальный скаляр⁸.

⁷ Далее рассматриваются инварианты относительно полной ортогональной группы.

⁸ На первый взгляд кажется, что определение (4.13) совпадает с определением, принятым в [82]. Однако это не так. Во-первых, определение ортогонального преобразования неевклидовых объектов в работе [82] вообще не определено. Определение (4.13) используется в [82] для демонстрации того, что аксиальный скаляр не является инвариантом относительно полной ортогональной группы, что находится в радикальном противоречии с точкой зрения, принятой в данной работе.

Рассмотрим функцию

$$\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad (4.14)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — полярные векторы. Согласно классическому определению, функция ψ не является ортогональным инвариантом. В соответствии с определением (4.13), функция ψ — ортогональный инвариант, так как

$$\psi(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' = (\det \mathbf{Q})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\det \mathbf{Q}) \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Другой пример — скалярное произведение полярного $\mathbf{V}$ и аксиального $\boldsymbol{\omega}$ векторов

$$\psi(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.15)$$

Согласно классическому определению, эта функция не является ортогональным инвариантом. В соответствии с определением (4.13), функция (4.15) — ортогональный инвариант. С чисто математической точки зрения это вопрос определения, и здесь нет предмета для дискуссий. Однако ситуация меняется, если мы рассматриваем проблему с физической точки зрения.

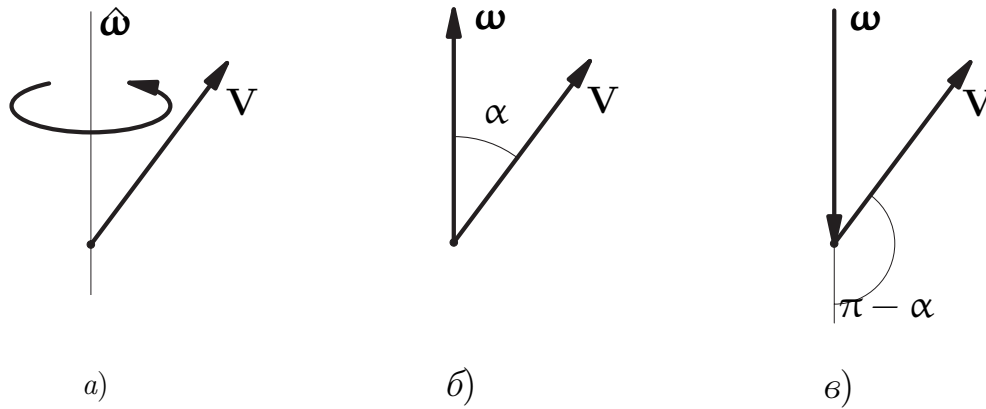


Рис. 4.3. Односпиновая частица: а — физический объект; б — математический образ в правоориентированной системе отсчета; в — математический образ в левоориентированной системе отсчета

Рассмотрим односпиновую частицу (рис. 4.3). Односпиновая частица, изображенная посредством спин-вектора, представлена на рис. 4.3, а. Это изображение не зависит от ориентации системы отсчета. Математический образ, полученный посредством использования аксиального вектора, показан на рис. 4.3, б в правоориентированной системе отсчета и на рис. 4.3, в в левоориентированной системе отсчета. Нетрудно видеть, что

$$(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega})_{\text{R}} \equiv V\omega \cos \alpha = -(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega})_{\text{L}} \equiv -V\omega \cos(\pi - \alpha).$$

Заметим, что природа и физические объекты, например спин-векторы, не зависят от ориентации системы отсчета. Аксиальные векторы — это некие математические объекты, и на них влияет изменение ориентации системы отсчета. Скалярное произведение $(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega})_R$ в правоориентированной системе отсчета не равно скалярному произведению $(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega})_L$ в левоориентированной системе отсчета. Однако оба они соответствуют одному и тому же физическому объекту. По этой причине скалярное произведение (4.15) должно быть названо инвариантом. Этот факт принят во внимание определением (4.13).

Перейдем к обсуждению проблемы инвариантов. Обратим внимание, что в обеих частях уравнения (4.13) символ отображения $\mathbf{F}$ один и тот же. Иными словами, уравнение (4.13) есть функциональное уравнение для определения функции $\mathbf{F}$. Далеко не всякая скалярная функция аргументов (4.12) удовлетворяет уравнению (4.13). Вообще говоря, существует несчетное множество решений уравнения (4.13), но не все они функционально независимы.

Основная проблема здесь заключается в установлении минимального числа инвариантов, через которые могут быть выражены все остальные решения уравнения (4.13). Далее излагается подход, опирающийся на основную идею теории непрерывных групп.

С физической точки зрения проблема инвариантов заключается в следующем: найти минимальное число инвариантов, задание которых фиксирует систему (4.12) с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. Интуитивно число этих инвариантов нетрудно подсчитать.

Сначала рассмотрим частные случаи. Пусть система (4.12) состоит только из одного вектора. Тогда очевидно, что достаточно задать только один инвариант, а именно модуль вектора. Если система состоит из одного симметричного тензора второго ранга, то достаточно задать три инварианта. Например, три собственных числа или три главных инварианта. Если система (4.12) состоит из одного вектора $\mathbf{a}$ и симметричного тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ или, что то же самое, из одного тензора второго ранга общего вида, то необходимо задать шесть инвариантов: три главных инварианта тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ и три координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса, состоящего из собственных векторов тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Здесь возникает, тем не менее, проблема, связанная с неоднозначностью определения собственных векторов тензора. Если все собственные числа тензора различны, то однозначно определяются только диады из собственных векторов, а сами собственные векторы определяются с точностью до выбора их положительных направлений. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в дальнейшем.

Нетрудно подсчитать минимально необходимое число независимых инва-

риантов N_* системы (4.12), задание которых фиксирует эту систему с точностью до поворота в пространстве. Число $N_* = 3m + 3n + 3(n - 1)$, где $3n$ — число главных инвариантов тензоров $A_1, A_2, \dots, A_n$; число $3m$ — число координат векторов $a_1, a_2, \dots, a_m$ относительно собственных векторов, например, тензора⁹ A_1 ; число $3(n - 1)$ — число углов, фиксирующих собственные векторы тензоров $A_2, \dots, A_n$ относительно тройки собственных векторов тензора A_1 . Далее принимается, что $m + n \geq 1$. Обратим внимание, что справедлива связь числа независимых инвариантов N_* с числом координат N , выражаемая формулой

$$N_* = N - 3, \quad N > 3. \quad (4.16)$$

Указанное является очевидным с интуитивной точки зрения. Тем не менее в литературе, например в [80], указывается другое число необходимых инвариантов. Поэтому необходимы формально строгие доказательства утверждения (4.16). Одна из возникающих здесь проблем состоит в предположении, что все собственные числа тензора A_1 различны, а сам тензор A_1 оказывается выделенным. Хотелось бы иметь такие инварианты, в которые все тензоры $A_1, A_2, \dots, A_n$ входили бы равноправно. Подчеркнем, что определение размерности базиса инвариантов и определение наиболее подходящих инвариантов, составляющих базис, — суть разные проблемы, которые могут рассматриваться отдельно. Так и следует поступать, причем определение наиболее подходящих инвариантов в работе не доведено до необходимого уровня общности и строгости.

Теорема. *Размерность N_* базиса инвариантов системы (4.12) связана с числом N координат объектов, входящих в систему (4.12), следующими формулами*

$$N_* = 1 \text{ при } m = 1, n = 0; \quad N_* = N - 3 \quad (4.17)$$

во всех остальных случаях.

Доказательству этой теоремы посвящены следующие разделы данной главы.

4.4. Основное уравнение теории инвариантов

Определение (4.13) инварианта системы (4.12) содержит в себе произвольный ортогональный тензор Q . Введем в рассмотрение семейство ортогональных тензоров $Q(\tau)$, непрерывно зависящее от вещественного параметра

⁹ В предположении, что все собственные числа этого тензора различны.

τ . Можно доказать¹⁰, что существует такой вектор $\boldsymbol{\omega}(\tau)$, что справедливы равенства

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{Q}(\tau) = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{Q}(\tau), \quad \mathbf{Q}(0) = (-1)^\beta \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \neq \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

где $\beta = 0$, если $\mathbf{Q}(\tau)$ есть собственно ортогональный тензор, и $\beta = 1$ в противном случае. Аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ будем условно называть вектором угловой скорости. Настоящий вектор угловой скорости вводится только для тензоров поворота, в то время как равенство (4.18) справедливо для любого ортогонального тензора. Считая в определении (4.13) ортогональный тензор $\mathbf{Q}(\tau)$ зависящим от τ , видим, что левая часть (4.13) зависит от τ , а правая часть — не зависит. Отметим, что определитель $\det \mathbf{Q}(\tau)$ для непрерывного семейства постоянен и не зависит от τ .

Продифференцируем обе части равенства (4.13) по параметру τ . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}'_i} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{A}'_i}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}'_i} \cdot \frac{d\mathbf{a}'_i}{d\tau} = 0. \quad (4.19)$$

Производные от скалярной функции по векторному и тензорному аргументам определяются по правилу

$$dF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \right)^T \cdot d\mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i} \cdot d\mathbf{a}_i. \quad (4.20)$$

Пример. Пусть дана скалярная функция

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dF = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{b} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T \cdot d\mathbf{A}.$$

Согласно (4.20) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.$$

Данный пример демонстрирует, как вычисляются производные от скалярной функции по векторному и тензорному аргументам.

Вернемся к обсуждению общего случая. Дальнейшая цель заключается в преобразовании уравнения (4.19). Используя равенство (4.18), вычисляем производные

$$\frac{d\mathbf{a}'_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{a}'_i, \quad \frac{d\mathbf{A}'_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{A}'_i - \mathbf{A}'_i \times \boldsymbol{\omega}(\tau)$$

¹⁰ Доказательство аналогично доказательству, используемому при введении вектора угловой скорости в работе [50].

и переписываем уравнение (4.19) в виде

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}'_i} \right)^T \cdot (\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{A}'_i - \mathbf{A}'_i \times \boldsymbol{\omega}(\tau)) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}'_i} \cdot (\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{a}'_i) = 0. \quad (4.21)$$

Учтем равенства

$$\mathbf{a}'_i(0) = (-1)^\beta (-1)^{\beta \delta_i} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{A}'_i(0) = (-1)^{\beta \gamma_i} \mathbf{A}_i,$$

где $\delta_i = 0$ для полярных векторов $\mathbf{a}_i$ и $\delta_i = 1$ для аксиальных векторов $\mathbf{a}_i$; $\gamma_i = 0$ для полярных тензоров $\mathbf{A}_i$ и $\gamma_i = 1$ для аксиальных тензоров $\mathbf{A}_i$. Полагая $\tau = 0$ в равенстве (4.21) и используя указанные ранее соотношения, получаем¹¹

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \right)^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_i \times \boldsymbol{\omega}_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{a}_i) = 0. \quad (4.22)$$

Получили линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Это уравнение должно выполняться для любого вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, т. е. оно эквивалентно трем скалярным уравнениям. Поэтому любой скалярный инвариант системы тензоров (4.12) должен удовлетворять трем дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. Удобнее работать с уравнением (4.22), если обе его части разделить на модуль вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Тогда получим равенство

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \right)^T \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_i \times \mathbf{m}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{a}_i) = 0, \quad (4.23)$$

которое должно выполняться для любого единичного вектора $\mathbf{m}$. Замечательно то, что в уравнение (4.23) не попали параметры β , δ_i , γ_i . Это означает, что ни сами инварианты, ни базисный набор инвариантов не зависят от типов рассматриваемых тензоров. Таким образом, любой ортогональный инвариант должен удовлетворять скалярному уравнению (4.23), которое в дальнейшем

¹¹ При выводе уравнения (4.22) использовались преобразования:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}'_i} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial ((\det \mathbf{Q})^{\delta_i} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_i)} \right|_{\tau=0} = \left((\det \mathbf{Q})^{\delta_i} \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i} \right) \Big|_{\tau=0} = (-1)^{\beta \delta_i} (-1)^\beta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i},$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}'_i} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial ((\det \mathbf{Q})^{\gamma_i} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}^T)} \right|_{\tau=0} = \left((\det \mathbf{Q})^{\gamma_i} \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \cdot \mathbf{Q}^T \right) \Big|_{\tau=0} = (-1)^{\beta \gamma_i} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i},$$

справедливость которых основана на том, что тензор $\mathbf{Q}$ — ортогональный. (Примеч. ред.)

будем называть *основным уравнением теории инвариантов*. Но это скалярное уравнение должно выполняться при произвольном выборе вектора $\mathbf{m}$. Можно исключить этот вектор из уравнения (4.23), и тогда получим векторное уравнение следующего вида:

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \right)^T \cdot \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_i \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i} \right)^T \right]_{\times} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i} \times \mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

где вектор $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ называется векторным инвариантом тензора второго ранга. Векторное уравнение (4.24) эквивалентно трем скалярным уравнениям, каждому из которых должен удовлетворять ортогональный инвариант. Однако последние три уравнения не всегда являются независимыми. Если среди аргументов (4.12) содержатся два вектора или имеется хотя бы один тензор второго ранга, отличный от единичного, то все три скалярных уравнения являются независимыми.

Уравнение (4.24) есть система трех линейных уравнений в частных производных первого порядка. В качестве независимых переменных в нем выступают координаты векторов и тензоров системы (4.12). Так что это уравнение определено в пространстве размерности N . Искомая функция $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ зависит от N аргументов. Теория линейных уравнений в частных производных детально разработана [70, 93]. Можно сказать, что каждое из скалярных уравнений системы (4.24) уменьшает число независимых переменных на единицу. Число оставшихся независимых переменных это и есть число функционально независимых инвариантов, которое, таким образом, равно числу N скалярных функций (координат) в системе (4.12) минус число независимых уравнений в системе (4.24). Именно это и утверждается в формулировке теоремы. Мы не будем приводить полное формальное доказательство этой теоремы. По существу требуемое доказательство содержится в теории уравнений с частными производными первого порядка [70, 93].

Рассмотрим несколько конкретных примеров, на которых можно ясно понять содержание теоремы и путь ее доказательства. Но предварительно на простом примере, показывающем используемую далее технологию, проиллюстрируем известную в теории обыкновенных дифференциальных уравнений теорему: *система дифференциальных уравнений n -го порядка имеет не более $n-1$ функционально независимых интегралов*.

Рассмотрим пример одномерного линейного осциллятора, поведение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x. \quad (4.25)$$

Хорошо известно, что система (4.25) имеет только один интеграл, а именно интеграл энергии. Покажем технологию получения этого интеграла в нужной для последующих выкладок форме. Систему (4.25) перепишем в эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{a}} = -\omega \mathbf{k} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad (4.26)$$

где векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ составляют стандартный ортонормированный базис. Решение векторного уравнения (4.26) имеет вид

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(-\omega t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_0, \quad \dot{\mathbf{Q}}(-\omega t \mathbf{k}) = -\omega \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(-\omega t \mathbf{k}),$$

где вектор $\mathbf{a}_0$ определяется по начальным условиям, а тензор $\mathbf{Q}(-\omega t \mathbf{k})$ есть тензор поворота, определенный выражением (4.7). Для получения интеграла системы (4.26) необходимо исключить тензор поворота $\mathbf{Q}(-\omega t \mathbf{k})$ из приведенного решения. В данном случае это исключение очевидно

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = \text{const}. \quad (4.27)$$

Это и есть интеграл энергии. Любой другой интеграл векторного уравнения (4.26) является функцией интеграла энергии. Рассмотрим теперь несвязанную между собой систему двух одинаковых осцилляторов. Для второго осциллятора имеем уравнение

$$\dot{\mathbf{b}} = -\omega \mathbf{k} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{Q}(-\omega t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{b}_0, \quad (4.28)$$

которое вполне аналогично уравнению (4.26). Векторное уравнение (4.28) также допускает только интеграл энергии $\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t)$. С другой стороны, если совокупность уравнений (4.26) и (4.28) рассматривать как систему, то последняя имеет четвертый порядок и, следовательно, должна иметь три независимых интеграла. Действительно, в соответствии с (4.4) и (4.28) имеем еще один независимый интеграл

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \text{const}.$$

Таким образом, любой интеграл F системы (4.26) и (4.28) является функцией построенных трех интегралов: $F = F(\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t), \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t))$. Конечно, приведенный пример вполне элементарен и может быть рассмотрен другими и более простыми способами. Однако он позволяет ясно понять используемый далее подход.

4.5. Базисные инварианты конкретных систем тензоров

4.5.1. Базисный инвариант вектора

В этом случае уравнение (4.24) принимает совсем простой вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} & \Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{a}_1 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_2} - \mathbf{a}_2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_1} &= 0, \\ \mathbf{a}_2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_3} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_2} &= 0, \quad \mathbf{a}_1 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_3} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_1} = 0, \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\mathbf{a}_i$ суть координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно какого-либо ортогонального базиса.

Последнее уравнение в системе (4.29) является следствием двух предыдущих. Поэтому в данном случае имеем только два независимых уравнения, которым должен удовлетворять любой ортогональный инвариант вектора

$$\mathbf{a}_1 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_2} - \mathbf{a}_2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_1} = 0, \quad \mathbf{a}_2 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_3} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_2} = 0. \quad (4.30)$$

Получили два уравнения в частных производных первого порядка для одной и той же функции. Поэтому нужно найти общее решение первого из этих уравнений, а затем потребовать, чтобы оно удовлетворяло второму уравнению. Нахождение общего решения уравнения в частных производных первого порядка хорошо известно [70]. Для этого необходимо составить характеристическую систему для первого из уравнений (4.30)

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{ds} = -\mathbf{a}_2, \quad \frac{d\mathbf{a}_2}{ds} = \mathbf{a}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} (\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2) = 0, \quad (4.31)$$

где $\mathbf{a}_i(\mathbf{s})$ есть параметрическое задание кривой в трехмерном пространстве координат $\mathbf{a}_i$; $\mathbf{s}$ — параметр. Получившаяся линейная система второго порядка с постоянными коэффициентами имеет два независимых решения и только один интеграл, который можно получить исключением переменной $\mathbf{s}$ из упомянутых двух независимых решений. Практически, конечно, интегралы строятся не так. Важно лишь то, что имеется ровно один независимый интеграл. При этом любая функция этого интеграла сама является интегралом. В данном случае удобно выбрать интеграл, который указан в последнем равенстве (4.31). Таким образом, общее решение первого уравнения из системы (4.31) имеет вид

$$F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = f(\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2, \mathbf{a}_3).$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (4.30), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial a_3} - 2a_3 \frac{\partial f}{\partial q} = 0, \quad q \equiv a_1^2 + a_2^2.$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\frac{dq}{ds} = -2a_3, \quad \frac{da_3}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} (q + a_3^2) = 0.$$

Опять получили систему второго порядка, которая имеет ровно один независимый интеграл, в качестве которого можно выбрать $q + a_3^2$. Таким образом, всякий ортогональный инвариант вектора может быть выражен как функция модуля этого вектора

$$F(\mathbf{a}) = f(q, a_3) = g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}).$$

В этом случае сформулированная ранее теорема доказана. С интуитивной точки зрения она, конечно, вполне очевидна и была доказана еще О. Коши.

Докажем полученный результат на основе уравнения (4.23). В данном случае уравнение (4.23) и соответствующая ему характеристическая система имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}. \quad (4.32)$$

Характеристическая система, т. е. последнее уравнение в (4.32), имеет третий порядок и, следовательно, два независимых интеграла, которые очевидны и даются выражениями

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \text{const}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \text{const}.$$

Последний интеграл зависит от произвольного вектора $\mathbf{m}$ и потому нас не интересует. Очевидно, второй подход значительно короче, и потому именно он будет использован в дальнейшем.

Теперь необходимо показать, что два вектора, имеющие одинаковые модули, могут быть совмещены поворотом. Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, модули и типы которых совпадают, т. е. они либо оба полярны, либо оба аксиальны. Сравнивать модули полярных и аксиальных векторов бессмысленно. Известно, что наиболее общим линейным преобразованием вектора, не меняющим его модуля, является ортогональное преобразование. Это означает, что для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедлива связь

$$\mathbf{a} = (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1,$$

где $\alpha = 0$ для полярных векторов и $\alpha = 1$ для аксиальных векторов. Это не совсем то, что нам нужно. В *Проблеме II* требуется, чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ переводились друг в друга чистым поворотом, т. е. посредством собственно ортогонального тензора. Здесь следует обратить внимание на то, что тензор $\mathbf{Q}$ в последнем равенстве определен неоднозначно. В самом деле, это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{a} = (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot (\det \mathbf{S})^\alpha \mathbf{S} \cdot \mathbf{b}, \quad (\det \mathbf{S})^\alpha \mathbf{S} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

где тензор $\mathbf{S}$ принадлежит к группе симметрии вектора $\mathbf{b}$. Таким образом, имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{b}, \quad \det \mathbf{Q}_* = [\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S})]^{1+\alpha} = 1.$$

Выполнения последнего равенства всегда можно добиться подходящим выбором элемента симметрии.

4.5.2. Базисные инварианты системы трех полярных векторов

Найдем минимально полную систему ортогональных инвариантов системы трех полярных векторов¹² $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. В этом случае для любого ортогонального инварианта $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ уравнение (4.23) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{b}} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{b}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{c}) = 0. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) эквивалентно трем независимым скалярным уравнениям, которые нетрудно выписать. Функция $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ зависит от девяти скалярных аргументов (координат векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$). Каждое из уравнений системы (4.33) позволяет уменьшить число аргументов на единицу. Таким образом, любой ортогональный инвариант системы трех полярных векторов может быть выражен как функция шести аргументов, которые, в свою очередь, являются инвариантами. Далее мы будем работать непосредственно с уравнением (4.33). Характеристическая система для уравнения (4.33) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{c}. \quad (4.34)$$

¹² Система трех полярных векторов интересна, главным образом, с теоретической точки зрения. Однако необходимость определения базисных инвариантов других систем векторов часто возникает при выводе определяющих уравнений. В частности, в нелинейной теории стержней возникает задача определения базисных инвариантов двух векторов, один из которых полярный (вектор деформации растяжения-сдвига), а другой аксиальный (вектор деформации изгиба-кручения). Аналогичная задача возникнет и при написании определяющих уравнений для нелинейной модели электромагнитного поля, представленной в шестой главе книги. (*Примеч. ред.*)

Получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому полное решение системы (4.34) строится без труда. Покажем это на примере первого уравнения системы (4.34). Решение ищем в виде

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{g}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{a} + \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{ds},$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m})$ есть тензор поворота вокруг $\mathbf{m}$ на угол s . Подставляя предыдущее соотношение в первое из уравнений системы (4.34), получаем, что вектор $\mathbf{g}$ постоянен. Аналогично строятся решения второго и третьего уравнений системы (4.34). Таким образом, общее решение системы (4.34) имеет вид

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{c}(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{c}_0, \quad (4.35)$$

где векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ суть произвольные постоянные векторы. Чтобы получить искомые интегралы системы (4.34), необходимо исключить переменную s из решений (4.35). Проще всего исключать весь ортогональный тензор $\mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m})$. В данном случае легко строятся десять интегралов, из которых три зависят от произвольного вектора $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_0$$

и нас не интересуют. Здесь учтено, что вектор $\mathbf{m}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m})$, т. е. удовлетворяет условию $\mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) = \mathbf{m}$.

Еще семь инвариантов дают следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, & I_2 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, & I_3 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, & I_4 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ I_5 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, & I_6 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, & I_7 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Заметим, что по принятой в литературе терминологии интеграл I_7 не является инвариантом. Между инвариантами (4.36) существует связь

$$I_7^2 \equiv \begin{vmatrix} I_1 & I_4 & I_5 \\ I_4 & I_2 & I_6 \\ I_5 & I_6 & I_3 \end{vmatrix}.$$

Эта связь не позволяет однозначно найти инвариант I_7 , но какой-либо из инвариантов I_1, I_2, I_3 находится однозначно, и его, в принципе, можно исключить из системы (4.36). Если, например, $I_2 I_3 - I_6^2 \neq 0$, то можно исключить инвариант I_1 . Обратим внимание, что для системы трех векторов существует не более шести функционально независимых базисов. Шесть инвариантов

$I_1, I_2, \dots, I_6$ в (4.36) функционально независимы. Тем не менее они не образуют базиса на множестве инвариантов. Эту особенность функциональных пространств, отличающую их от векторных пространств, следует иметь в виду.

На рассмотренном примере трех векторов ясно видно различие между постановками, указанными во введении под названиями *Проблема I* и *Проблема II*. В первом случае возможно псевдоскаляры не считать инвариантами, как это и принято в литературе. Тогда инварианты $I_1 - I_6$ образуют базис на множестве инвариантов, являющихся абсолютными скалярами. Но при этом возникают следующие ограничения. Во-первых, три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ должны быть либо все полярными, либо все аксиальными. В противном случае среди инвариантов $I_1 - I_6$ будут содержаться аксиальные скаляры. Тогда *Проблема I* теряет смысл. Во-вторых, даже если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ полярны, то фиксация инвариантов $I_1 - I_6$ не определяет эту тройку векторов с точностью до жесткого поворота в пространстве, т. е. *Проблема II* не разрешима. Приведем простой пример. Наряду с тройкой векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, рассмотрим тройку векторов

$$\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}, \quad (\mathbf{E} - 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} / |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Эта тройка векторов также состоит из полярных векторов. Инварианты $I_1 - I_6$ для обеих троек векторов совпадают. Тем не менее рассматриваемые тройки векторов невозможно совместить посредством жесткого поворота. Инварианты (4.36) для рассматриваемых троек векторов различаются.

Итак, утверждается, что совпадение инвариантов (4.36) для двух троек векторов гарантирует совпадение этих троек векторов с точностью до жесткого поворота. Хотя этот факт интуитивно совершенно очевиден, его строгое доказательство требует некоторых рассмотрений, которые в литературе отсутствуют. Пусть даны две тройки векторов

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_* = \mathbf{a}\mathbf{m}, \quad \mathbf{b}_* = \mathbf{b}\mathbf{n}, \quad \mathbf{c}_* = \mathbf{c}\mathbf{p}.$$

Считаем, что инварианты $I_1 - I_3$ для этих троек совпадают, т. е. модули рассматриваемых векторов соответственно равны. Фиксация модулей векторов определяет их с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{Q}_b \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c} \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{p}, \quad (4.37)$$

где $\mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b, \mathbf{Q}_c$ суть произвольные ортогональные тензоры. Совпадение инвариантов $I_4 - I_6$ дает уравнения для нахождения тензоров $\mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b, \mathbf{Q}_c$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}_a^T \cdot \mathbf{Q}_b \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}_a^T \cdot \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_b^T \cdot \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Отсюда немедленно следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_a^T \cdot \mathbf{Q}_b &= \mathbf{S}_{(m,1)} \cdot \mathbf{S}_{(n,1)}, & \mathbf{Q}_a^T \cdot \mathbf{Q}_c &= \mathbf{S}_{(m,2)} \cdot \mathbf{S}_{(p,1)}, \\ \mathbf{Q}_b^T \cdot \mathbf{Q}_c &= \mathbf{S}_{(n,2)} \cdot \mathbf{S}_{(p,2)}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где ортогональные тензоры $\mathbf{S}_{(m,k)}$, $\mathbf{S}_{(n,k)}$, $\mathbf{S}_{(p,k)}$ являются элементами симметрии векторов $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$, соответственно. Из равенств (4.39) получаем, что эти элементы симметрии должны удовлетворять условию

$$\mathbf{S}_{(n,1)}^T \cdot \mathbf{S}_{(m,1)}^T \cdot \mathbf{S}_{(m,2)} \cdot \mathbf{S}_{(p,1)} = \mathbf{S}_{(n,2)} \cdot \mathbf{S}_{(p,2)}. \quad (4.40)$$

Теперь равенства (4.37) с учетом равенств (4.38)–(4.40) принимают вид

$$\mathbf{a} = a \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{b} = b \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m,1)} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{c} = c \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m,2)} \cdot \mathbf{p},$$

где тензоры $\mathbf{S}_{(m,1)}$, $\mathbf{S}_{(m,2)}$ являются двумя произвольными элементами симметрии вектора $\mathbf{m}$. Каковы бы ни были эти элементы симметрии и каков бы ни был ортогональный тензор $\mathbf{Q}_a$, инварианты $I_1 - I_6$ для двух рассматриваемых троек векторов совпадают. Однако различие между ними не сводится к жесткому повороту. Потребуем теперь, чтобы инварианты I_7 для этих троек векторов совпадали. Это требование ведет к необходимости выполнения равенства

$$\det \mathbf{Q}_a \det \mathbf{S}_{m,1} (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}_{(m,1)}^T \cdot \mathbf{S}_{(m,2)} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p}.$$

Это равенство выполняется только в том случае, когда

$$\det \mathbf{Q}_a \det \mathbf{S}_{(m,1)} = 1; \quad \mathbf{S}_{(m,1)} = \mathbf{S}_{(m,2)}.$$

Таким образом, пришли к равенствам

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_*, \quad \mathbf{b} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}_*, \quad \mathbf{c} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{c}_*, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m,1)},$$

где $\mathbf{Q}_a$ есть произвольный ортогональный тензор, $\mathbf{S}_{(m,1)}$ есть такой элемент симметрии вектора $\mathbf{a}$, что тензор $\mathbf{P}$ является собственно ортогональным тензором. Что и требовалось доказать.

4.5.3. Базисные инварианты симметричного тензора второго ранга

Необходимо доказать, что любой ортогональный инвариант симметричного тензора второго ранга может быть выражен как функция главных инвариантов, т. е. доказать, что последние составляют базис на множестве инвариантов¹³. Разумеется, этот факт общеизвестен. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ есть ортогональный

¹³ Данная задача находит приложение в классической нелинейной теории упругости. (Примеч. ред.)

инвариант. Тогда он должен удовлетворять уравнению (4.23), которое при $\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{n} = 1$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}\right)^T \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{m}) = 0.$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}(s)}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{A}(s) - \mathbf{A}(s) \times \mathbf{m}. \quad (4.41)$$

Получили систему шестого порядка, которая имеет ровно пять независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбранного единичного вектора $\mathbf{m}$. Общее решение системы (4.41) находится без труда и имеет вид

$$\mathbf{A}(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{sm}) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{sm}) \Rightarrow \mathbf{A}^k(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{sm}) \cdot \mathbf{A}_0^k \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{sm}), \quad (4.42)$$

где $\mathbf{A}_0$ есть тензор произвольных постоянных.

Из решения (4.42) немедленно вытекают пять независимых интегралов системы (4.41). Они имеют вид

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{A}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{A}^2, \quad I_3 = \text{tr } \mathbf{A}^3, \quad I_4 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}, \quad I_5 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{m}.$$

Таким образом, любой интеграл системы (4.41) может быть представлен как функция этих пяти интегралов: $f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$. Нетрудно доказать, что функция $f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$ является ортогональным инвариантом $F(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$, т. е. она является решением уравнения (4.24) только в том случае, когда она не зависит от величин I_4, I_5 . Иными словами, доказано, что любой ортогональный инвариант $F(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$ является функцией вида $F(\mathbf{A}) = f(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3)$.

Осталось показать, что два симметричных тензора с одинаковыми собственными числами отличаются только поворотом. По теореме о спектральном разложении симметричных тензоров второго ранга имеем

$$\mathbf{A} = \sum A_i \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{A}^* = \sum A_k \mathbf{d}_k^* \otimes \mathbf{d}_k^*,$$

где тройки векторов $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_k^*$ ортонормированы, но могут иметь разные ориентации. Поэтому имеем

$$\mathbf{d}_m^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_m = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

где $\mathbf{Q}$ есть ортогональный тензор. Если $\det \mathbf{Q} = 1$, то теорема справедлива. Если $\det \mathbf{Q} = -1$, то $\mathbf{Q}$ можно представить в виде произведения тензора поворота и тензора инверсии $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{E})$. Используя это разложение, получаем

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{E})^T \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T,$$

т. е. теорема также справедлива. Этот результат, конечно, хорошо известен, хотя обычно не доказывается, и широко используется в нелинейной теории упругости.

4.5.4. Базисные инварианты совокупности вектора и тензора второго ранга

Рассмотрим систему¹⁴, состоящую из вектора $\mathbf{a}$ и симметричного тензора второго ранга $\mathbf{A}$. Основное уравнение теории инвариантов (4.23) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{m}) = 0. \quad (4.43)$$

По обычным правилам выписываем характеристическую систему для уравнения (4.43)

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{m}.$$

Получили систему девятого порядка, которая имеет не более восьми независимых интегралов, из которых только шесть не зависят от произвольного

¹⁴ Задача определения базисных инвариантов совокупности вектора и симметричного тензора второго ранга возникает, например, при выводе нелинейных определяющих уравнений для редуцированной среды Коссера. (В модели редуцированной среды Коссера не учитываются моментные взаимодействия, но тензор напряжений считается несимметричным. В уравнении баланса кинетического момента векторный инвариант тензора напряжений компенсируется за счет динамических слагаемых. Внутренняя энергия редуцированной среды Коссера зависит от одного полярного несимметричного тензора, или, что то же самое, от полярного симметричного тензора и аксиального вектора.) Эта же задача возникнет и при обобщении на нелинейный случай классической теории пьезоупругости. (В классической теории пьезоупругости энергия зависит от симметричного тензора деформаций и вектора напряженности электрического поля.) Более общая задача определения базисных инвариантов совокупности вектора и несимметричного тензора второго ранга (или, что то же самое, совокупности двух векторов и симметричного тензора второго ранга) возникает, в частности, при выводе нелинейных определяющих уравнений для среды Кельвина — среды, обладающей только вращательными степенями свободы. Подробнее о среде Кельвина см. главу 7, подраздел 7.3.3. (Примеч. ред.)

вектора $\mathbf{m}$. Для получения интегралов можно выписать общее решение характеристической системы

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m}) \cdot \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{A}(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m}) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(s\mathbf{m}).$$

Исключая отсюда ортогональный тензор, получаем следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_k &= \text{tr } \mathbf{A}^k; & I_4 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, & I_5 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \\ I_6 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{a}, & I_7 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (4.44)$$

где k принимает значения 1, 2, 3. Здесь выписаны семь интегралов, но между ними имеется одна связь. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть тройку векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{a}$ и выписать для нее инварианты типа (4.36). В результате получим следующее уравнение:

$$I_7^2 = \begin{vmatrix} I_4 & I_5 & I_6 \\ I_5 & I_6 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a} \\ I_6 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{a} \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

В определителе (4.45) инварианты $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{a}$ следует выразить через инварианты $I_1 - I_6$ с помощью тождества Кели–Гамильтона.

Обратим внимание на то, что учет инварианта I_7 является необходимым и его нельзя отбросить. Чтобы убедиться в этом, достаточно наряду с системой $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ рассмотреть систему

$$\mathbf{S}_{(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}, \quad \mathbf{S}_{(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{A})}^T = \mathbf{A},$$

где тензор $\mathbf{S}_{(\mathbf{A})}$ принадлежит группе симметрии тензора $\mathbf{A}$. Можно показать, что эти две системы в общем случае не сводятся одна к другой посредством поворота. Вместе с тем, различие в инвариантах для этих систем заключено только в инварианте I_7 . Можно также показать, что если инвариант I_7 обращается в нуль, то две обсуждаемые системы переводятся друг в друга поворотом. Отметим, что в книге [81], с. 37, указываются только инварианты $I_1 - I_6$, задание которых не решает *Проблему II*. В книге [81], но в главе, написанной Э. Спенсером [82], указываются все семь инвариантов, но они рассматриваются как инварианты относительно собственно ортогональной группы. При этом наличие связи между инвариантами (4.44) не отмечается. Здесь уместно заметить, что если $\mathbf{a}$ является аксиальным вектором, то все инварианты $I_1 - I_7$ являются абсолютными скалярами, т. е. подчиняются обычному определению инварианта относительно полной ортогональной группы.

Оставшиеся два интеграла уже зависят от вектора $\mathbf{m}$ и имеют вид

$$I_8 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}, \quad I_9 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}.$$

Поскольку нас интересуют только интегралы, не зависящие от произвольного вектора $\mathbf{m}$, то любой ортогональный инвариант системы $\mathbf{a}, \mathbf{A}$ может быть выражен через семь указанных инвариантов, на которые наложена одна функциональная связь.

Несколько сложнее показать, что фиксация инвариантов (4.44) фиксирует систему $\mathbf{a}$ и $\mathbf{A}$ с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. Рассмотрим две системы $\mathbf{a}, \mathbf{A}$ и $\mathbf{a}_*, \mathbf{A}_*$. Типы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_*$, а также тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_*$ должны совпадать. Если у этих систем инварианты $I_1 - I_4$ совпадают, то имеем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\det \mathbf{Q}_a)^\alpha \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{a}_* = \alpha (\det \mathbf{Q}_a)^\alpha \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{m}, \\ \mathbf{a}_* &= \alpha \mathbf{m}, \quad \mathbf{A} = (\det \mathbf{Q}_A)^\beta \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где α есть модуль вектора $\mathbf{a}$; $\mathbf{m}$ — произвольный единичный вектор; $\alpha = 0$, если $\mathbf{a}$ полярен, и $\alpha = 1$, если $\mathbf{a}$ — аксиален; $\beta = 0$, если $\mathbf{A}$ полярен, и $\beta = 1$, если $\mathbf{A}$ — аксиален; собственные числа тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_*$ совпадают; $\mathbf{Q}_a$ и $\mathbf{Q}_A$ суть произвольные ортогональные тензоры. Тензоры $\mathbf{Q}_a$ и $\mathbf{Q}_A$ должны быть такими, чтобы инварианты $I_5 - I_7$ для двух рассматриваемых систем совпадали. Сначала рассмотрим инвариант I_5

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \alpha^2 (\det \mathbf{Q}_A)^\beta \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_a^T \cdot \mathbf{Q}_A. \quad (4.47)$$

Аналогичное представление имеем для инварианта I_6 . Фиксация этих инвариантов ведет к условиям

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{Q}_A)^\beta \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{m} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{m}, \\ (\det \mathbf{Q}_A)^\beta \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{m} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Необходимо найти общий вид ортогонального тензора $\mathbf{Q}$, удовлетворяющего условиям (4.48). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\det \mathbf{Q}_A)^\beta, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \equiv \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \\ \mathbf{h} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

В принятых обозначениях условия (4.48) принимают вид

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{A}_* - \mathbf{h} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{A}_*^2 - \mathbf{H} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.50)$$

Дальнейший ход рассуждений зависит от величины ε . Анализ проведем для случая полярного тензора $\mathbf{A}_*$, т. е. для случая $\varepsilon = 1$. Примем, что собственные числа тензора $\mathbf{A}_*$ различны, а единичный вектор $\mathbf{n}$ представим в базисе главных осей тензора $\mathbf{A}_*$

$$\mathbf{n} = n_k \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{m} = m_k \mathbf{d}_k.$$

Тогда уравнения (4.50) после несложных преобразований принимают вид

$$(A_3 - A_2)n_3^2 = (h - A_1) + (A_1 - A_2)(1 - n_1^2);$$

$$(A_3^2 - A_2^2)n_3^2 = (H - A_1^2) + (A_1^2 - A_2^2)(1 - n_1^2).$$

Решая эту систему, получаем

$$n_1 = \pm m_1, \quad n_2 = \pm m_2, \quad n_3 = \pm m_3.$$

Отсюда видим, что вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{m}$ преобразованиями симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Иными словами, для тензора $\mathbf{Q}$ получаем представление

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_{(\mathbf{m})} \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{A})} \Rightarrow \mathbf{Q}_a = \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})} \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{A})},$$

где $\mathbf{S}_{(\mathbf{m})}$ есть элемент симметрии вектора $\mathbf{m}$; $\mathbf{S}_{(\mathbf{A})}$ — элемент симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Итак, если инварианты $I_1 - I_6$ зафиксированы, то для систем $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{a}_*$, $\mathbf{A}_*$ вместо (4.46) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [\det(\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})})]^\alpha \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})} \cdot \mathbf{a}_*, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})}^\top \cdot \mathbf{Q}_a^\top. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Наконец, требование сохранения инварианта I_7 ведет к условию

$$[\det(\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})})]^{1+\alpha} = 1.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ полярен, т. е. $\alpha = 0$, то тензор $\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{m})}$ обязан быть тензором поворота. Если вектор $\mathbf{a}$ аксиален, то инвариант I_7 не дает ничего нового и достаточно задать только шесть первых инвариантов из списка (4.44). При этом система $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ задается с точностью до жесткого поворота. В самом деле, если $\mathbf{Q}_a$ есть тензор поворота, то достаточно принять $\mathbf{S}_{(\mathbf{m})} = \mathbf{E}$. Если определитель тензора $\mathbf{Q}_a$ отрицателен, то достаточно принять $\mathbf{S}_{(\mathbf{m})} = -\mathbf{E}$. Обратим внимание на то, что тензор инверсии является элементом симметрии как произвольного симметричного тензора второго ранга, так и элементом симметрии произвольного аксиального вектора.

4.5.5. Базисные инварианты системы двух симметричных тензоров

Рассмотрим систему двух симметричных тензоров второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Этот случай часто встречается в приложениях¹⁵. В литературе считается, что базисная система инвариантов дается следующими десятью инвариантами:

$$\begin{aligned} I_k^A = \operatorname{tr} \mathbf{A}^k; \quad I_k^B = \operatorname{tr} \mathbf{B}^k; \quad x = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \\ y = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}; \quad z = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2; \quad u = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где k принимает значения 1, 2, 3. Заметим, что в литературе оба тензора считаются полярными или, что то же самое, евклидовыми. Здесь это предположение не принимается, и тензоры могут быть как полярными, так и аксиальными. Фактически для приложений интересен, главным образом, случай, когда один тензор полярен, а другой — аксиален. Но именно для этого случая приводимые в литературе результаты, строго говоря, неприменимы. Впрочем, случай двух симметричных тензоров встречается вообще редко. Наиболее интересен случай двух тензоров общего вида, один из которых полярен, а другой аксиален. Далее рассматриваются симметричные тензоры с целью упростить сравнение с известными результатами.

Согласно рассматриваемой теореме система двух симметричных тензоров допускает не более девяти независимых инвариантов. Следовательно, указанные в списке (4.52) десять инвариантов не могут быть независимыми. Иными словами, между инвариантами (4.52) должна существовать одна функциональная связь, которая не очевидна и в литературе не приводится. Использование переполненной системы инвариантов возможно, но может приводить к недоразумениям. Поэтому необходимо либо сократить список (4.52) на один инвариант, либо указать связь, существующую между ними.

Можно непосредственно доказать, что инварианты (4.52) могут быть выражены через девять других инвариантов, а именно инварианты x , y , z , u могут быть выражены через первые шесть инвариантов из списка (4.52) и три инвариантных параметра, которые будут указаны далее. Точнее говоря, они могут быть выражены через четыре параметра, между которыми существует

¹⁵ Задача определения базисных инвариантов совокупности двух симметричных тензоров второго ранга возникает, например, при описании фазовых или структурных превращений, когда образование новой фазы сопровождается возникновением собственной деформации превращения. Также дополнительный тензор, характеризующий внутренние изменения в структуре материала, возникает, например, при описании химических реакций и биологического роста тканей. (*Примеч. ред.*)

очевидная связь. Докажем этот факт. При этом ограничимся случаем, когда собственные числа у каждого из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ различны.

Пусть $\mathbf{a}_k$ суть собственные векторы тензора $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{b}_m$ суть собственные векторы тензора $\mathbf{B}$. Считаем, что латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, но правило суммирования по повторяющемуся индексу далее не принимается. При необходимости суммирование будет явно указываться. В отличие от собственных векторов, собственные диады симметричного тензора находятся однозначно.

Например, для собственных диад тензора $\mathbf{A}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_k &= \alpha_k \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{A}); & \alpha_k^{-1} &= (A_k - A_i)(A_k - A_j); \\ \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{A}) &\equiv \mathbf{A}^2 - (I_1^A - A_k)\mathbf{A} + A_k^{-1}I_3^A \mathbf{E}; & i \neq j \neq k \neq i, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где A_k суть собственные числа тензора $\mathbf{A}$. Аналогичные представления имеем для собственных диад тензора $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m \otimes \mathbf{b}_m &= \beta_m \mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{B}); & \beta_m^{-1} &= (B_m - B_n)(B_m - B_p); \\ \mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{B}) &\equiv \mathbf{B}^2 - (I_1^B - B_m)\mathbf{B} + B_m^{-1}I_3^B \mathbf{E}; & m \neq n \neq p \neq m, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где B_m суть собственные числа тензора $\mathbf{B}$.

По равенствам (4.53) и (4.54) получаем систему девяти равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m)^2 &= \alpha_k \beta_m [\mathbf{u} + (A_k - I_1^A)(B_m - I_1^B)\mathbf{x} - \\ &- (I_1^B - B_m)\mathbf{y} - (I_1^A - A_k)\mathbf{z} + (B_m I_1^B - 2J_B) A_k^{-1} I_3^A + \\ &+ (A_k I_1^A - 2J_A) B_m^{-1} I_3^B + 3(A_k B_m)^{-1} I_3^A I_3^B]; \\ 2J_A &= (\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2), & 2J_B &= (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Четыре инварианта $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{u}$ входят в систему (4.55) линейно, и их можно рассматривать как неизвестные величины. Тогда получаем систему девяти уравнений относительно четырех неизвестных. Можно убедиться, что ранг матрицы этой системы равен четырем. Следовательно, четыре указанных инварианта можно выразить через собственные числа тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и девять чисел $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m$, на которые наложено шесть связей

$$\sum_{m=1}^3 (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m)^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^3 (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m)^2 = 1.$$

Наличие этих связей позволяет выразить девять чисел $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m$ через три параметра. С этой целью введем в рассмотрение тензор поворота [50], выраженный через вектор поворота

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \cos \theta \mathbf{E} + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad (4.56)$$

где θ есть модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Введем в рассмотрение ортонормированный базис $\mathbf{i}_k$, фиксированный в системе отсчета. Тогда имеем

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{i}_k; \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{i}_k; \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k, \quad (4.57)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{Q}_A^T$. Используя (4.56) и (4.57), получаем

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m = \cos \theta \delta_{km} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \theta_k \theta_m + \frac{\sin \theta}{\theta} \sum_{s=1}^3 e_{mks} \theta_s, \quad (4.58)$$

где e_{mks} есть символ перестановки. Используя (4.58), получаем

$$\theta^2 \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k = \theta_k^2 + \cos \theta (\theta^2 - \theta_k^2); \quad (4.59)$$

$$(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_m)^2 - (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_k)^2 = \frac{4 \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3} \theta_1 \theta_2 \theta_3. \quad (4.60)$$

При выводе (4.60) использовался тот факт, что числа k, m, s являются четной перестановкой чисел 1, 2, 3, т. е. выполняются равенства $e_{kms} = 1$, $\theta_k \theta_m \theta_s = \theta_1 \theta_2 \theta_3$.

Покажем, что инварианты x, y, z, u действительно выражаются через компоненты вектора поворота и собственные числа тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. При доказательстве этого факта в правой части системы (4.55) можно отбросить слагаемые, зависящие только от собственных чисел¹⁶, и переписать систему (4.55) в виде трех независимых систем

$$\begin{aligned} u_1 - (B_2 + B_3) y_1 &= a_{11}, & u_1 - (B_1 + B_3) y_1 &= a_{12}, \\ u_1 - (B_1 + B_2) y_1 &= a_{13}; \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} u_2 - (B_2 + B_3) y_2 &= a_{21}, & u_2 - (B_1 + B_3) y_2 &= a_{22}, \\ u_2 - (B_1 + B_2) y_2 &= a_{23}; \end{aligned} \quad (4.62)$$

¹⁶ Допустим функция y является решением уравнения $g(y) = F(a, b) + f(a)$, где a и b — параметры. Нужно доказать, что y зависит только от параметра a . Если доказано, что решение уравнения $g(y) = F(a, b)$ является функцией вида $y = y(a)$, то и решение исходного уравнения также будет функцией вида $y = y(a)$. (Примеч. ред.)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 - (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3)\mathbf{y}_3 &= \mathbf{a}_{31}, & \mathbf{u}_3 - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3)\mathbf{y}_3 &= \mathbf{a}_{32}, \\ \mathbf{u}_3 - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{y}_3 &= \mathbf{a}_{33}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

В системе (4.61)–(4.63) введены новые переменные

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u} - (\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_p)\mathbf{z}; \quad \mathbf{y}_m = \mathbf{y} - (\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}, \quad (4.64)$$

причем $m \neq n \neq p \neq m$. Кроме того, приняты обозначения

$$\mathbf{a}_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_k / (\alpha_i \beta_k).$$

Решения систем (4.61)–(4.63) даются формулами

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{a}_{mm} + \frac{\mathbf{B}_n + \mathbf{B}_p}{\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_p} (\mathbf{a}_{mn} - \mathbf{a}_{mp}); \quad \mathbf{y}_m = \frac{\mathbf{a}_{mn} - \mathbf{a}_{mp}}{\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_p}, \quad (4.65)$$

где числа m, n, p образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3. Решая систему (4.64), выражаем искомые инварианты через переменные $\mathbf{y}_m$ и $\mathbf{u}_m$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2}; & \mathbf{y} &= \mathbf{y}_3 + \frac{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2); \\ \mathbf{z} &= \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2}; & \mathbf{u} &= \mathbf{u}_3 + \frac{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Используя равенства (4.65), окончательно получаем

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3) [(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2)^2 + (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3)^2].$$

Аналогичные формулы получаются и для остальных инвариантов. Следует заметить, что фактически инварианты $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ однозначно выражаются через четыре числа $\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2, \theta_1\theta_2\theta_3$, между которыми существует очевидная связь $\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2 = (\theta_1\theta_2\theta_3)^2$.

Указанная процедура, хотя и доказывает теорему, но является слишком громоздкой и малонаглядной. Поэтому приведем другую схему рассуждений.

Для построения базисной системы инвариантов будем следовать описанной процедуре, опирающейся на основное уравнение теории инвариантов (4.23), которое в данном случае можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{m}) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \right)^T \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{m}) = 0. \quad (4.66)$$

Уравнение (4.66) должно выполняться для любого вектора $\mathbf{m}$. Характеристическая система для уравнения (4.66) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{m}; \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{m}. \quad (4.67)$$

Получили систему двенадцатого порядка, имеющую не более одиннадцати независимых интегралов, среди которых нас интересуют интегралы, не зависящие от произвольно выбираемого вектора $\mathbf{m}$. Очевидно, что должно быть ровно девять таких интегралов: две тройки собственных чисел тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и три угла, фиксирующих положение тройки главных осей одного тензора относительно главных осей другого тензора. К сожалению, работать с упомянутыми углами непосредственно довольно затруднительно. Хотелось бы найти алгебраические инварианты, которые определяют эти углы. Будем рассуждать следующим образом. Если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соосны, т. е. их главные оси совпадают, то достаточно задать только две тройки главных инвариантов этих тензоров. Нетрудно доказать, что скалярное произведение двух симметричных тензоров второго ранга перестановочно только в том случае, когда эти тензоры соосны; наоборот, если скалярное произведение двух тензоров перестановочно, то эти тензоры соосны.

Введем в рассмотрение антисимметричный тензор

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{r} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{\times}, \quad (4.68)$$

который иногда называют коммутатором тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Вектор $\mathbf{r}$ характеризует несоосность тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и будет называться вектором несоосности. Из (4.68) вытекает тождество

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \quad (4.69)$$

которое будет широко использоваться в дальнейшем без ссылки на него. Легко убедиться, что из уравнений (4.67) и (4.68) выводится уравнение для вектора несоосности

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{m} \times \mathbf{r}. \quad (4.70)$$

Общее решение уравнений (4.67) и (4.70) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}_0, & \mathbf{A}(s) &= \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{s}\mathbf{m}), \\ \mathbf{B}(s) &= \mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{s}\mathbf{m}). \end{aligned} \quad (4.71)$$

В принципе, нетрудно выписать девять независимых интегралов системы (4.67) и (4.70). Например, таковыми являются первые девять инвариантов из списка (4.52). Добавление к ним еще одного интеграла заведомо приводит к системе интегралов, между которыми существует функциональная связь. Однако характер этой связи не всегда позволяет однозначно выразить добавленный интеграл через уже введенные. Собственно, именно требование

однозначного выражения всех инвариантов через базисную систему инвариантов и вносит главную трудность в решение проблемы инвариантов. С примером такого рода мы уже встречались, когда рассматривали систему трех векторов. Эту проблему в общем случае довольно трудно формализовать. Фактически она решена только при рассмотрении полиномиальных инвариантов. Однако использование исключительно полиномиальных инвариантов не имеет под собой никаких физических оснований. Существенным недостатком использования полиномиальных инвариантов является то, что часто приходится использовать переполненную систему инвариантов. Кроме того, инварианты, эквивалентные с чисто алгебраической точки зрения, отнюдь не эквивалентны с физической точки зрения. Например, система инвариантов, указанная в списке (4.52), заведомо не слишком удачна. Действительно, эти инварианты нельзя задавать независимо друг от друга. Пусть, например, $\text{tr} \mathbf{A}^2 = 0$. Это возможно только в том случае, когда $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Поэтому предпочтительнее пользоваться так называемыми главными инвариантами симметричного тензора второго ранга. Именно их мы и возьмем в качестве первых шести инвариантов системы двух симметричных тензоров второго ранга

$$\begin{aligned} I_1^{\mathbf{A}} &= \text{tr} \mathbf{A}, & I_2^{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2], & I_3^{\mathbf{A}} &= \det \mathbf{A}, \\ I_1^{\mathbf{B}} &= \text{tr} \mathbf{B}, & I_2^{\mathbf{B}} &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr} \mathbf{B}^2], & I_3^{\mathbf{B}} &= \det \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Система инвариантов (4.72) однозначно определяет собственные числа $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, соответственно. Как известно, главные инварианты можно задавать произвольно и независимо друг от друга. Пусть даны две системы тензоров $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $(\mathbf{A}_*, \mathbf{B}_*)$. Если инварианты (4.72) у этих двух систем совпадают, то и сами тензоры совпадают с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_B^T.$$

Обратимся к рассмотрению вектора несоосности (4.68). Нетрудно установить формулу для модуля вектора несоосности

$$r^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2) - \text{tr}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2]. \quad (4.73)$$

Покажем, что если рассматривается система двух соосных тензоров, то она фиксируется с точностью до жесткого поворота заданием инвариантов (4.72) и условия $r = 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$\mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T \cdot \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_B^T - \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_B^T \cdot \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T = \mathbf{0}.$$

Отсюда немедленно вытекают два равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* - \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_A^T \cdot \mathbf{Q}_B. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Согласно первому уравнению тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит к группе симметрии тензора $\mathbf{B}_*$, а согласно второму равенству этот же тензор принадлежит и к группе симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Поэтому имеем равенства¹⁷

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{S},$$

где ортогональный тензор $\mathbf{S}$ принадлежит к группам симметрии обоих тензоров $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{B}_*$. В обоих случаях имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T,$$

что и требовалось показать. Таким образом, инвариант (4.73) имеет четкий физический смысл, и его нужно добавить к списку инвариантов (4.72). Из соображений здравого смысла все инварианты, которые необходимо добавить к списку (4.72), должны обращаться в нуль при обращении вектора несоосности (4.68) в нулевой вектор. Последнее имеет место при обращении инварианта (4.73) в нуль.

Осталось найти еще два инварианта, которые фиксируют положение вектора несоосности относительно тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Для этого достаточно указать еще один независимый вектор, характеризующий несоосность тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. В качестве кандидатов на эту роль можно рассмотреть четыре вектора. Два из них определяются формулами

$$(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B})_{\times} = (\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2)_{\times} = (\text{tr } \mathbf{B}) \mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}.$$

Можно убедиться, что инварианты, образованные с помощью этих двух векторов, не решают проблемы. Большой интерес представляет вектор

$$\boldsymbol{\rho} = \left[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \right]_{\times} = \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}. \quad (4.75)$$

¹⁷ Тензоры $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{B}_*$ соосны. Согласно первому уравнению (4.74) тензоры $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T$ соосны. Тогда тензоры $\mathbf{B}_*$ и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T$ соосны, и, следовательно, тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит к группе симметрии тензора $\mathbf{B}_*$. Согласно второму уравнению (4.74) тензоры $\mathbf{B}_*$ и $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}$ соосны. Тогда тензоры $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}$ соосны, и, следовательно, тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит к группе симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. (Примеч. ред.)

Наконец, можно рассмотреть вектор

$$[\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2]_{\times} = (\text{tr } \mathbf{A} \text{ tr } \mathbf{B}) \mathbf{r} - [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ tr } \mathbf{B} + \mathbf{B} \text{ tr } \mathbf{A}] \cdot \mathbf{r}.$$

Видим, что этот вектор является линейной комбинацией трех предыдущих и может не рассматриваться. Если оба тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не вырождены, то можно выбрать любой из трех векторов $(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B})_{\times}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2)_{\times}$ и $\boldsymbol{\rho}$. Но если хотя бы один из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ вырожден, то ситуация меняется. Более того, эти векторы не равнозначны, если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковый собственный вектор $\mathbf{m}$. В этом случае из (4.68) следует, что вектор несоосности сонаправлен с вектором $\mathbf{m}$, т. е. $\mathbf{r} = r\mathbf{m}$. Поэтому имеем

$$(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B})_{\times} = (\text{tr } \mathbf{A} - A_m) r \mathbf{m},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2)_{\times} = (\text{tr } \mathbf{B} - B_m) r \mathbf{m}.$$

Эти векторы не дают нам новой информации и не добавляют ничего к инвариантам (4.72) и (4.73). Вектор (4.75) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\boldsymbol{\rho} = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2]_{\times} = [\text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - A_m B_m] r \mathbf{m},$$

т. е. этот вектор уже содержит новую информацию. В частности, он фиксирует новый инвариант $\text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Поэтому в качестве двух оставшихся инвариантов можно выбрать следующие два:

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho} = \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}; \quad (4.76)$$

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} = [\text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]^2 r^2 - 2 \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}.$$

Обратим внимание на существование тождества, вытекающего из (4.69),

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}. \quad (4.77)$$

На первый взгляд кажется, что вместо инвариантов (4.76) можно взять инварианты

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}; \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}. \quad (4.78)$$

Нетрудно убедиться, что инварианты (4.78) не решают проблемы. Действительно, пусть один из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является диадой. Например, пусть $\mathbf{B} = B\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$. Тогда имеем

$$\mathbf{r} = B\mathbf{m} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

В этом случае инварианты (4.78) нам ничего не дают и остаются только инварианты (4.72) и (4.73), которых недостаточно, чтобы зафиксировать систему тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с точностью до жесткого поворота. Убедиться в этом можно, если рассмотреть случай двух диад. Инварианты (4.76) сводятся в рассматриваемом случае к заданию двух инвариантов

$$\mathbf{r}^2 \quad \text{и} \quad \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Нетрудно убедиться, что задание этих инвариантов в совокупности с инвариантами (4.72) полностью решает проблему, когда один из тензоров системы является диадой. Кажется очевидным, что девять инвариантов (4.72), (4.73) и (4.76) решают проблему во всех случаях, хотя полное доказательство этого факта требует довольно утомительных вычислений. Отметим только следующее обстоятельство. Если вектор несоосности найден, то он тождественно удовлетворяет тождеству (4.77). Однако если заданы только инварианты (4.73) и (4.76), то тождество (4.77) нужно выдвигать в качестве дополнительного условия. Это обстоятельство станет ясным, если заметить, что в инварианты (4.76), помимо вектора $\mathbf{r}$, входит инвариант $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, который отдельно не задается. Подчеркнем, однако, что использование тождества (4.77) отнюдь не эквивалентно заданию дополнительного инварианта, поскольку это условие действует внутри каждой из систем тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ в отдельности.

Теперь необходимо показать, что задание девяти инвариантов (4.72), (4.73) и (4.76) фиксирует систему тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с точностью до жесткого поворота. Доказательство этого факта приведем только для случая, когда одна система тензоров может быть получена из другой путем непрерывного перехода. Иными словами, проблема идентификации систем тензоров не рассматривается.

Пусть даны две системы тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$. По ним вычисляются векторы $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{r}_*$, $\boldsymbol{\rho}_*$. Задание инвариантов (4.73) и (4.76) определяет векторы $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ с точностью до жесткого поворота

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}; \quad \boldsymbol{\rho}_* = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\rho}; \quad \det \mathbf{P} = 1.$$

Задание инвариантов (4.72) определяет тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_A^T; \quad \mathbf{B}_* = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_B^T.$$

Сделаем замену переменных

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1; \quad \mathbf{Q}_B = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2.$$

По определению вектора несоосности (4.68) имеем

$$\mathbf{A}_* \cdot \mathbf{B}_* - \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{A}_* = -\mathbf{r}_* \times \mathbf{E}.$$

Подставляя сюда приведенные ранее представления, после простых преобразований получаем уравнение

$$\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2^T - \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T = -\mathbf{r} \times \mathbf{E}.$$

Обратим внимание, что это уравнение не содержит тензор поворота $\mathbf{P}$ и утверждает симметрию некоего тензора $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T; \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Это уравнение эквивалентно одному векторному уравнению

$$\mathbf{D}_\times = (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2^T)_\times - \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (4.79)$$

Используя определение (4.75), получаем уравнение¹⁸

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{r} = (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{r}, \quad \text{tr } \mathbf{D} = \text{tr } (\mathbf{A}_* \cdot \mathbf{B}_*) - \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.80)$$

Уравнения (4.79) и (4.80) служат для определения тензоров $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$. Рассмотрим непрерывное преобразование от системы $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ к системе $\mathbf{A}_*, \mathbf{B}_*$, определяемое тензорами $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}_1(s)$ и $\mathbf{Q}_2(s)$, причем значение параметра $s = 0$ отвечает системе $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, а значение параметра $s = 1$ соответствует системе $\mathbf{A}_*, \mathbf{B}_*$. Нетрудно убедиться, что тензоры

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{S}_{AB} \cdot \mathbf{S}_A; \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{S}_{AB} \cdot \mathbf{S}_B, \quad (4.81)$$

где ортогональные тензоры $\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_{AB}$ и $\mathbf{S}_r$ суть произвольные элементы симметрии тензоров $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{r}$, соответственно, являются решением уравнений (4.79) и (4.80). Действительно, при преобразовании (4.81) для тензора $\mathbf{D}$ имеем представление

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_r^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \mathbf{D} = 0.$$

¹⁸ Доказательство формул (4.80). Согласно (4.75), $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})_\times = (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{r} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}$. Известно, что $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, следовательно, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})^T$. Тогда $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})_\times = \mathbf{0}$. Следовательно, $(\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}$. Выражение для $\text{tr } \mathbf{D}$ следует непосредственно из определения тензора $\mathbf{D}$. (Примеч. ред.)

Вычисляя векторный инвариант тензора $\mathbf{D}$, получаем

$$\mathbf{D}_\times = (\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_r^T)_\times - \mathbf{r} = (\det \mathbf{S}_r) \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Иными словами, уравнение (4.79) выполнено. Осталось выяснить, при каких условиях выполнено уравнение (4.80). Имеем цепочку равенств

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_r^T \cdot \mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = [(\det \mathbf{S}_r) \mathbf{S}_r - \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}.$$

Согласно этому равенству уравнение (4.80) выполняется только в том случае, когда либо $\mathbf{S}_r = \mathbf{E}$, либо вектор $\mathbf{r}$ является собственным вектором тензора $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}.$$

Последняя альтернатива весьма редка, но она встречается. Например, если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются диадами. В типичном случае реализуется первая альтернатива $\mathbf{S}_r = \mathbf{E}$.

Можно доказать, что представления (4.81) являются наиболее общим решением уравнений (4.79) и (4.80). К сожалению, доказательство требует довольно утомительного анализа частных случаев и потому здесь не приводится. Приведем только идею доказательства. Рассматриваем тензоры $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}_1(s)$ и $\mathbf{Q}_2(s)$ как непрерывные функции параметра s , дифференцируем уравнения (4.79) и (4.80) по этому параметру и исключаем производные от тензоров поворота с помощью уравнений Пуассона

$$\frac{d\mathbf{Q}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1, \quad \frac{d\mathbf{Q}_2}{ds} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что “угловые” скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ постоянны. Поэтому получившиеся уравнения можно записать при $s = 0$ и использовать начальные условия для тензоров поворотов. В результате вместо уравнений (4.79) и (4.80) получим следующие линейные уравнения для скоростей:

$$[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}_1) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}_2)]_\times = \mathbf{0}. \quad (4.82)$$

$$2[\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)] \mathbf{r} = [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}_1) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}_2)] \cdot \mathbf{r}. \quad (4.83)$$

Получили систему двух линейных однородных уравнений относительно “угловых” скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Она всегда имеет тривиальные решения, но возможны и нетривиальные решения, связанные с симметриями тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Анализ сводится к нахождению общего решения уравнений (4.82) и (4.83) и последующему нахождению тензоров поворота по найденным угловым скоростям.

4.5.6. Базисные инварианты системы трех тензоров

В качестве последнего примера рассмотрим систему трех симметричных тензоров второго ранга $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. С прикладной точки зрения этот случай не очень интересен, но он наиболее активно обсуждался в литературе [80, 82, 84–87, 90, 91]. Окончательное решение проблемы определения функционального базиса для инвариантов системы трех тензоров, видимо, так и не было получено в литературе. В работах [86, 87] приводится система базисных инвариантов, состоящая из 21 инварианта. Однако в работе [91] приведен пример, показывающий неполноту этой системы базисных инвариантов. Поэтому в работах [84, 85] приводится значительно большее число инвариантов, которые предлагаются в качестве базиса. Далее излагается другое решение проблемы базисных инвариантов.

Основное уравнение теории инвариантов (4.23) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{A}) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} \right)^T \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{B}) + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{C}) = 0, \end{aligned} \quad (4.84)$$

где $\mathbf{d}$ есть произвольный вектор.

Характеристическая система для (4.84) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{A} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{A}; \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{B} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{B}; \\ \frac{d\mathbf{C}}{ds} = \mathbf{C} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Система (4.85) имеет восемнадцатый порядок и ровно семнадцать независимых интегралов. С физической точки зрения ясно, что только пятнадцать из этих интегралов не зависят от произвольного вектора $\mathbf{d}$. Формально строгое доказательство этого утверждения требует трудоемких вычислений. Тем не менее трудно усомниться в его правильности, поскольку оно очевидно. Поэтому ограничимся только тем, что выпишем систему инвариантов, которая, по нашему мнению, наиболее удобна. С этой целью введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{\times}, \quad \mathbf{r}_2 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{\times}, \quad \mathbf{r}_3 = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})_{\times}; \quad (4.86)$$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2]_{\times}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^2]_{\times}, \quad \boldsymbol{\rho}_3 = [(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})^2]_{\times}. \quad (4.87)$$

Выпишем теперь систему из девятнадцати инвариантов, которая заведомо является переполненной

$$\begin{aligned} I_1^A &= \operatorname{tr} \mathbf{A}, & I_2^A &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2], & I_3^A &= \det \mathbf{A}, \\ I_1^B &= \operatorname{tr} \mathbf{B}, & I_2^B &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{B})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{B}^2], & I_3^B &= \det \mathbf{B}, \\ I_1^C &= \operatorname{tr} \mathbf{C}, & I_2^C &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{C}^2], & I_3^C &= \det \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} I_1^{AB} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1, & I_2^{AB} &= \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1, & I_3^{AB} &= \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1, \\ I_1^{AC} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2, & I_2^{AC} &= \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2, & I_3^{AC} &= \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2, \\ I_1^{BC} &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3, & I_2^{BC} &= \mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}_3, & I_3^{BC} &= \boldsymbol{\rho}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}_3. \end{aligned}$$

Здесь выписаны восемнадцать инвариантов. При этом нельзя забывать о существовании тождеств

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_1; \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_2; \\ \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_3. \end{aligned}$$

К инвариантам (4.88) следует добавить еще один

$$I_{ABC} = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{\times}] \cdot [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{\times}]. \quad (4.89)$$

Этот инвариант играет роль, аналогичную роли смешанного произведения трех векторов. Другие инварианты типа (4.89) можно не учитывать, ибо они выражаются через уже известные. Например,

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{\times} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{\times} - (\operatorname{tr} \mathbf{C}) \mathbf{r}_1 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_1.$$

Система инвариантов (4.88), (4.89) включает девятнадцать инвариантов, хотя требуется только пятнадцать. Если, например, тензор $\mathbf{A}$ имеет различные собственные числа, то последние три инварианта в системе (4.88) можно отбросить. Тогда останется шестнадцать инвариантов, задание которых необходимо для фиксации системы трех тензоров с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. При этом инвариант (4.89) не существен, если рассматриваются непрерывные “деформации” указанной системы тензоров.

Если все собственные числа тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ различны, то вместо последних десяти инвариантов в системе (4.88), (4.89) можно использовать следующие шесть:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1; & I_{11} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2; & I_{12} &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3; \\ I_{13} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2; & I_{14} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3; & I_{15} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3; & I_{16} &= \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Между последними семью инвариантами имеется одна связь. Очевидный изъян системы инвариантов (4.90) в том, что она становится недостаточной, если, например, один из трех тензоров рассматриваемой системы является шаровым. Возможны и другие вырожденные случаи.

Приведем для сравнения систему инвариантов, предложенную в работах [86, 87],

$$\begin{aligned} &\text{tr } \mathbf{A}, \quad \text{tr } \mathbf{A}^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}^3, \quad \text{tr } \mathbf{B}, \quad \text{tr } \mathbf{B}^2, \quad \text{tr } \mathbf{B}^3, \\ &\text{tr } \mathbf{C}, \quad \text{tr } \mathbf{C}^2, \quad \text{tr } \mathbf{C}^3, \quad \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}), \quad \text{tr } (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}), \\ &\text{tr } (\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}), \quad \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2), \quad \text{tr } (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^2), \quad \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2), \quad \text{tr } (\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B}), \\ &\text{tr } (\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{C}), \quad \text{tr } (\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2), \quad \text{tr } (\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{C}^2), \quad \text{tr } (\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B}^2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Неполнота системы инвариантов (4.91) вполне очевидна и быстро была обнаружена [89, 91]. Однако природа неполноты этой системы инвариантов так и не была описана в известных работах. Не было установлено, какие именно элементы в системе трех тензоров не фиксируются инвариантами (4.91). Поэтому остается неясным, сколько именно инвариантов необходимо добавить к системе (4.91).

Как отмечается в работе [81], к системе инвариантов (4.91) следует добавить всего один инвариант

$$\text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (4.92)$$

чтобы система инвариантов была полна, хотя строгое доказательство этого утверждения так и не было приведено.

В работах [84, 85] предлагается использовать еще несколько инвариантов в дополнение к (4.91), (4.92). С другой стороны, система инвариантов (4.91), (4.92) заведомо содержит лишние инварианты.

По-видимому, приемлемое решение этой проблемы невозможно в отрыве от контекста рассматриваемой задачи механики. Использование переполненной системы инвариантов приводит к появлению в теории лишних матери-

альных постоянных, которые принципиально невозможно найти экспериментально¹⁹.

В работе [91] Р. С. Ривлин привел следующий пример двух систем трех тензоров:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} - \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{j}, \\ \mathbf{C}_1 &= 2(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{j}; \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{B}_2 &= (\mathbf{E} - 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \cdot \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{E} - 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Следует обратить внимание на то, что тензор $\mathbf{B}_2$ получен из тензора $\mathbf{B}_1$ с помощью элемента симметрии тензора $\mathbf{A}_1$. Р. С. Ривлин отмечает, что для обеих систем тензоров (4.93) и (4.94) инварианты (4.91) совпадают, но при этом существуют инварианты, которые не совпадают. Например,

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{C}_1) = 5; \quad \text{tr}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_2) = 7.$$

Это означает, что системы тензоров (4.93) и (4.94) не переводятся одна в другую поворотом. Покажем, что инварианты (4.88) и (4.89) для систем (4.93) и (4.94) различаются, т. е. система (4.93) не переводится в систему (4.94) посредством операции поворота. С этой целью вычислим векторы (4.86). Для системы тензоров (4.93) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j}; & \mathbf{r}_2 &= -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; & \mathbf{r}_3 &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}; \\ \boldsymbol{\rho}_1 &= -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}; & \boldsymbol{\rho}_2 &= -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; & \boldsymbol{\rho}_3 &= 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \\ (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{C}_1)_\times &= 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

¹⁹ Подход П. А. Жилина к определению независимых скалярных инвариантов, фиксирующих данную систему тензоров, имеет несколько отличительных особенностей. Первая особенность заключается в том, что на начальном этапе определяется число независимых скалярных инвариантов и только после этого начинается их подбор. Вторая особенность состоит в использовании векторных инвариантов, характеризующих несоосность тензоров данной системы. Благодаря этому методу задача определения независимых скалярных инвариантов системы тензоров отчасти сводится к более простой и наглядной задаче определения независимых скалярных инвариантов системы векторов. Третья особенность подхода П. А. Жилина состоит в использовании разработанной им общей теории симметрии тензорных величин, применимой как для полярных, так и для аксиальных объектов. Это важно даже в случае системы полярных тензоров, поскольку векторы несоосности полярных тензоров являются аксиальными объектами. (*Примеч. ред.*)

Для системы тензоров (4.94) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; & \mathbf{r}_2 &= -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 9\mathbf{k}; & \mathbf{r}_3 &= 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}; \\ \boldsymbol{\rho}_1 &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; & \boldsymbol{\rho}_2 &= -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 9\mathbf{k}; & \boldsymbol{\rho}_3 &= -2\mathbf{i} + 6\mathbf{k}; \\ (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_2)_{\times} &= -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Видим, что векторы несоосности для рассматриваемых систем тензоров существенно различаются. Существенно различаются и инварианты (4.90). В то же время системы инвариантов (4.88), (4.89) различаются только в последнем инварианте.

Заключение

Классическая теория симметрии тензоров и теория тензорных инвариантов применима только для так называемых евклидовых (полярных) тензоров. Между тем, этот случай в приложениях встречается относительно редко, если не считать случая одного симметричного тензора. Значительно чаще встречаются случаи, когда, например, один вектор системы является полярным, а другой аксиальным, как это имеет место в электродинамике. В теории обобщенного континуума Коссера рассматривается ситуация, когда одна мера деформации является полярным тензором, а вторая — аксиальным тензором. Чтобы включить эти случаи в рассмотрение, необходимо модифицировать существующую теорию симметрии, что и сделано в данной главе. Подход, использованный здесь, является в известной мере новым, хотя отдельные аспекты теории ранее рассматривались в теории непрерывных групп. В основе построений лежит новое определение инварианта тензора, которое для евклидовых тензоров переходит в классическое. Далее выводится уравнение в частных производных первого порядка, интегралы которого дают все инварианты рассматриваемой системы тензоров. Сформулирована теорема о минимальном числе функционально независимых инвариантов, составляющих функциональный базис на множестве инвариантов. Приведены примеры конкретных систем тензоров.

Глава 5

Микрополярная теория бинарной среды с приложением к течению волокнистой суспензии¹

Введение

При изготовлении формованием термопластиков, усиленных короткими волокнами, в стадии заливки наблюдается течение с фазовыми переходами. Механические свойства конечного продукта существенно зависят от обусловленных течением распределения и ориентации частиц. Поэтому создание модели течения, которая дала бы возможность предсказать формирование волокнистой микроструктуры, имеет большое значение, в частности, для анализа и конструирования несущих нагрузку элементов.

Данная глава посвящена анализу существующих моделей, описывающих поведение волокнистых суспензий, а также построение модели, в которой процесс заливки трактуется как течение бинарной среды, состоящей из частиц жидкости (жидкая компонента) и взвешенных частиц-фибр (твёрдо-жидкая компонента), при наличии фазовых переходов. Чтобы привлечь внимание явление прилипания частиц жидкости к фибрам, плотность частиц и плотность массы рассматриваются как независимые функции. Жидкая компонента считается неполярной вязкой жидкостью с несимметричным тензором напряжений. Состояние твёрдо-жидкой компоненты описывается антисимметричным тензором напряжений и антисимметричным тензором моментных

¹ Материал этой главы основан на двух статьях [94, 95]: Н. Altenbach, К. Naumenko, Р. А. Zhilin “A Micro-polar theory for binary media with application to flow of fiber suspensions” (Proceedings of XXX Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia, 2003. — P. 39–62), Н. Altenbach, К. Naumenko, Р. А. Zhilin “A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions” (Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2003. Vol. 15, N 6. — P. 539–570). Обе статьи написаны на английском языке. Перевод с английского Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

напряжений. Учитываются силы вязкого трения между компонентами. Чтобы учесть явление прилипания, уравнения движения формулируются для открытой физической системы. Химический потенциал вводится исходя из приведенного уравнения баланса энергии. Второй закон термодинамики формулируется посредством двух неравенств в предположении, что компоненты могут иметь различные температуры². Чтобы принять во внимание фазовые переходы типа *жидкость–твердое тело*, происходящие в процессе течения, предлагается модель сжимаемой жидкости и определяющее уравнение для давления. В заключение формулируется система основных уравнений, численное решение которых должно смоделировать процесс заливки. Обсуждаются частные случаи предложенной системы, которые получаются посредством принятия ограничивающих предположений.

5.1. Современное состояние вопроса

5.1.1. Экспериментальные факты

В последние годы во многих отраслях промышленности, таких как автомобилестроение, производство насосов и так далее, существенно увеличилось использование термопластиков, усиленных короткими фибрами (длина фибры около 0,1–1 мм, диаметр фибры около 0,01 мм, объем фракции фибр 15–40 %) [96–99]. Различные несущие нагрузку элементы (обычно тонкостенные конструкции) изготавливаются из этих материалов методом литьевого формования.

Производственный процесс вызывает особый интерес благодаря высокой автоматизации, относительно короткому времени цикла и низкой стоимости продукции. Кроме того, главное преимущество этого процесса перед другими методами производства композитов заключается в возможности серийного производства предметов с заданной геометрией любой сложности.

Следует отметить, что механические свойства материалов, усиленных частицами, значительно уступают механическим свойствам материалов, усиленных континуальными фибрами. Кроме того, жесткость и прочность усиленных короткими фибрами композитов и тонкостенных конструкций, из-

² Взгляды П. А. Жилина на второй закон термодинамики существенно менялись, и все нюансы его отношения ко второму закону термодинамики нашли отражение в данной книге. Помимо данной главы, о втором законе термодинамики см. также в первой главе (разд. 1.8), во второй главе (подразд. 2.5.3) и третьей главе (разд. 3.4), где отражены взгляды последних лет (2000–2005 гг.), в шестой главе (подразд. 6.5.6), время написания которой в точности не известно. (*Примеч. ред.*)

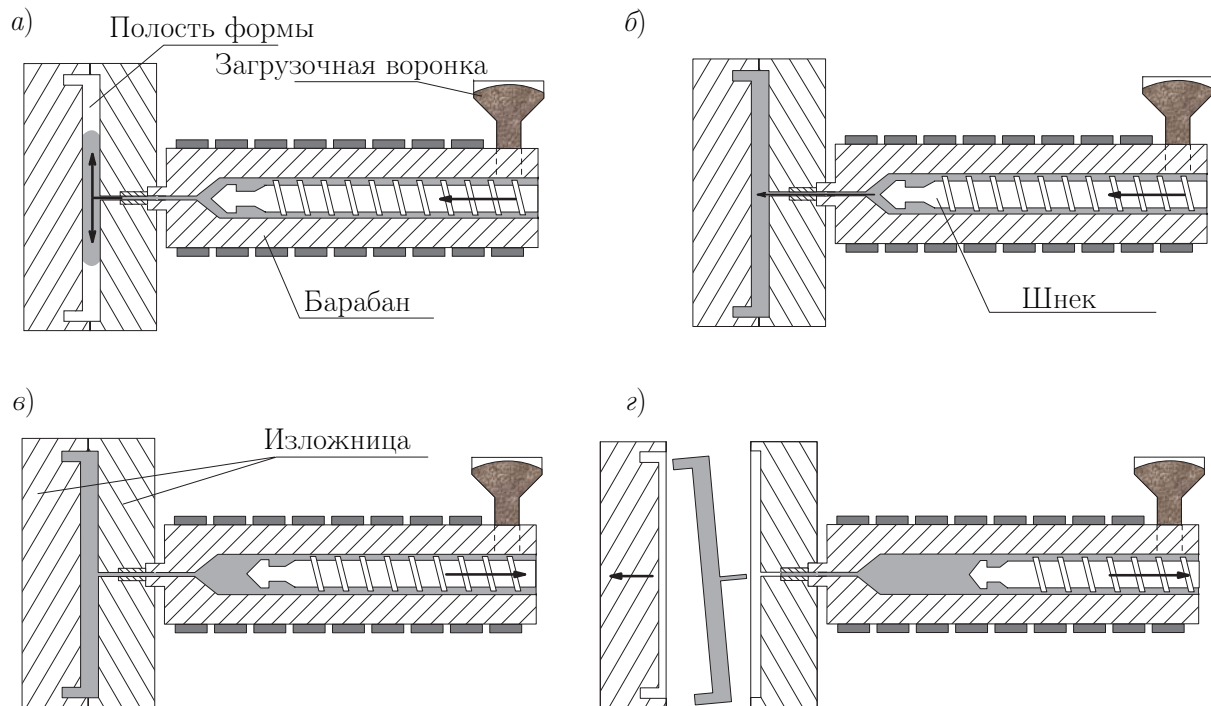


Рис. 5.1. Основные стадии производственного цикла литейного формования:
 а — стадия заливки; б — стадия консервирования; в — стадия охлаждения; з —
 извлечение (подробности см. [97, 103])

готовленных из этих материалов, в значительной степени зависят от ориентации и распределения частиц. Как показывают многочисленные экспериментальные наблюдения, микроструктура ориентации фибр, полученная в результате литейного формования, существенно меняется по пространству внутри детали (см., например, [99–101]). Ориентация фибр и распределение их плотности зависят от многих факторов, включая тип материала, условия производственного процесса и геометрию полости литейной формы (см., например, [102]). Поэтому ключевой шаг в предварительном моделировании несущих нагрузку элементов конструкции заключается в том, чтобы предсказать ориентацию фибр, которая должна получиться в образце при данных производственных условиях.

Рисунок 5.1 схематично иллюстрирует основные элементы машины литейного формования и основные стадии производственного цикла. Во время стадии заливки (рис. 5.1, а) вращающийся шнек движется вперед и толкает расплав в полость литейной формы. После полной заливки формы прикладывается давление и держится посредством шнека на протяжении некоторого периода времени для того, чтобы компенсировать усадочную деформацию

полимера (стадия консервирования; рис. 5.1, б). Во время стадии охлаждения (рис. 5.1, в) литейная форма охлаждается и материал затвердевает. В это же время шнек движется назад, а новая порция материала в гранулированной форме помещается в барабан из загрузочной воронки. Внутри нагретого барабана материал плавится и вращающийся шнек превращает его в однородную массу. После охлаждения формы изложница открывается и деталь извлекается (рис. 5.1, г). Следующий шаг заключается в закрытии изложницы и начале следующего цикла. Детальное описание машины литейного формования, включая ее различные модификации, можно найти в монографиях [97, 103].

Микроструктура ориентации фибр, главным образом, формируется во время стадии заливки и остается неизменной после затвердевания. Можно считать, что начальная ориентация фибр является случайной, так как в литейную форму помещается полимерный расплав, ставший однородным внутри барабана.

Во время стадии заливки поток вязкого полимерного расплава перемещает и вращает взвешенные частицы. Микроснимки поперечных сечений деталей, изготовленных методом литейного формования (см., например, [100, 101]), показывают, что ориентация фибр имеет слоистую структуру. В слое, находящемся в срединной поверхности (центральном слое), фибры в основном выстроены в линию перпендикулярно направлению потока. В слоях, граничащих с боковыми стенками (скин-слоях), фибры, наоборот, лежат в основном параллельно потоку. Вдобавок, для слоев внешней поверхности (оболочечных слоев) обычно обнаруживается более низкая концентрация фибр и их случайная ориентация. Как отмечалось во многих работах (например [100, 102, 104]), такая микроструктура ориентации фибр обусловлена характером поведения потока расплава.

Во время заливки внутри геометрически сложной литейной формы наблюдается нерегулярный, неизотермический поток с движущейся свободной поверхностью. Для того чтобы качественно объяснить течение суспензии, рассмотрим пример радиального ламинарного течения между двумя параллельными пластинами. Представленный на рис. 5.2 эскиз и последующие комментарии отчасти основаны на опубликованных в [104–107] результатах моделирования заливки формы в виде диска с отверстием в центре, а также на наблюдении потока, вызванного микроструктурой фибр [100, 104]. Поскольку толщина формы обычно намного меньше других размеров, формально можно выделить три области течения [106]: область потока в отверстии, область смазки и область фронта потока. Внутри предполагаемой области смазки (см. рис. 5.2) можно пренебречь компонентами скорости в направлении тол-

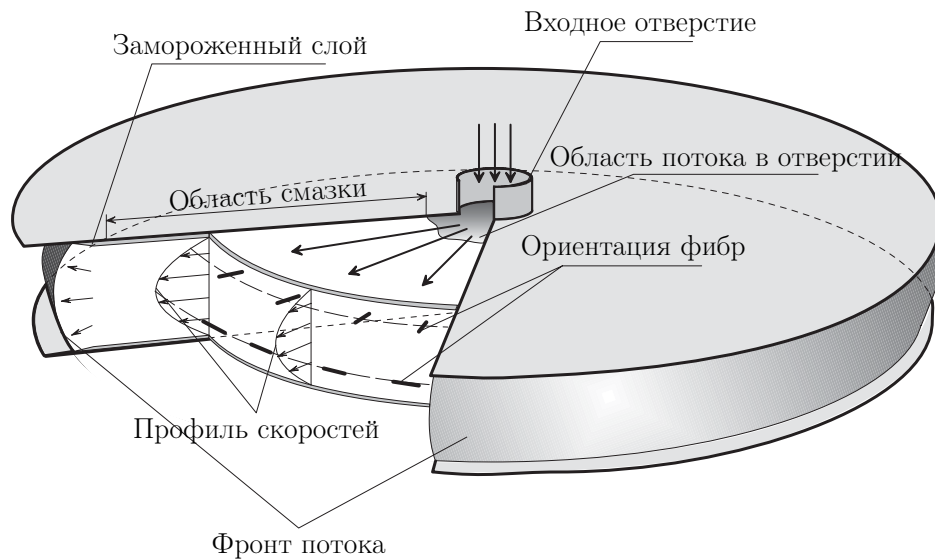


Рис. 5.2. Эскиз радиального ламинарного течения между двумя параллельными пластинами (поток рассматривается как двумерный)

щины и рассматривать поток как двумерный. Предполагая параболический профиль скоростей, можно оценить кинематику движения частиц. В слое срединной поверхности области смазки элементы жидкости находятся в расширяющемся потоке с максимальной скоростью деформации в направлении вдоль окружности. Поэтому можно предположить, что фибра с произвольной ориентацией, оказавшись в форме, переориентируется в направлении, перпендикулярном потоку. С другой стороны, элементы жидкости, граничащие со стенками формы, подвергаются сдвиговому течению в плоскостях радиальных поперечных сечений. Эти сдвиговые движения переориентируют фибры в радиальном направлении.

Ситуация намного сложнее в окрестности фронта потока. Во-первых, как отмечалось во многих работах (например [106, 108]), поведение в области свободной поверхности определяется фонтанным потоком, который переносит элементы жидкости из центральной зоны к стенкам формы. Во-вторых, вследствие более низкой температуры стен формы, за свободной поверхностью (см. рис. 5.2) происходит формирование замороженного (не текущего) слоя. Замороженный слой распространяется в направлении фронта потока. В-третьих, можно предположить, что в зоне свободной поверхности концентрация фибр ниже, чем где бы то ни было внутри области потока. Характер поведения потока в области свободной поверхности ведет к формированию поверхностных слоев с более низкой концентрацией фибр и их случайной

ориентацией. Обсуждаемые процессы дают принципиальное объяснение механизма, отвечающего за формирование короткофибровой микроструктуры. Дальнейшие подробности, касающиеся поведения потока в сложных формах, например, влияние скачкообразного изменения геометрии формы, формирование соединенных линий и так далее, обсуждаются, в частности, в статьях [108–110].

Для того чтобы сосредоточиться на теоретической подоплеке процесса заливки, суммируем некоторые важнейшие свойства поведения потока:

поток неизотермический с фазовыми переходами;

поток нестационарный со свободной поверхностью;

средняя доля объема фибр во взвеси лежит в диапазоне 15–40 % (локальная концентрация фибр зависит от потока и может изменяться внутри области потока, поэтому обычно используемые концепции разбавленной, полуразбавленной или концентрированной суспензий вообще не подходят для описания реального процесса);

полости литейных форм обычно тонкие, так что стенки формы имеют существенное влияние на движение фибр.

Перечисленные факторы могут существенно влиять на формирование создаваемой потоком микроструктуры, которая определяется распределением и ориентацией фибр. Поэтому эти факторы необходимо учитывать в теории, позволяющей описать стадию заливки. Однако, насколько нам известно, в настоящее время нет общей теории, которая способна учесть все перечисленные выше свойства потока суспензии. Наша цель заключается в обсуждении теоретической концепции для предсказания микроструктуры ориентации фибр. В этом разделе содержится краткий обзор моделей, предложенных в последнее время для описания потока волокнистых суспензий. Далее разрабатывается и обсуждается новая теория, согласно которой процесс заливки представляет собой течение бинарной среды с фазовыми переходами.

5.1.2. Моделирование потока, обусловленного волокнистой микроструктурой

Движение эллипсоидальных частиц, погруженных в вязкую жидкость, впервые было рассмотрено Дж. Б. Джефффри в [111]. В литературе по взвесям чаще всего используется именно результат Дж. Б. Джефффри. Однако, применяя этот результат к литевому формованию суспензий, следует принимать во внимание ряд важных ограничений. Без обсуждения процедуры

решения напомним главный результат, полученный Дж.Б. Джеффри. В дальнейшем будет использоваться так называемое прямое тензорное исчисление, которое является стандартным во многих книгах по механике и реологии (см., в частности, [24, 26, 34, 50, 112, 113]).

Согласно предположению Дж. Б. Джеффри, невозмущенный поток (поток без частиц) удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{\Lambda} = \text{const}, & \text{tr } \mathbf{\Lambda} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{V}_0 &= \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{\Lambda}, & \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{d} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}, & \mathbf{d} &\equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V}_0 + \nabla \mathbf{V}_0^T), \\ \text{tr } \mathbf{d} &= 0, & \boldsymbol{\phi} &\equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_0, & \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_0 &= \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\mathbf{V}_0$ — поле скоростей,

$$\mathbf{r}_0 = x_k \mathbf{i}'_k, \quad \mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}'_s = \delta_{ks},$$

и базисные векторы $\mathbf{i}'_k$ неподвижны в системе отсчета. Отметим, что в работе Дж. Б. Джеффри два последних ограничения из (5.1) в явной форме не сформулированы. Однако эти ограничения следуют непосредственно из уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} -\underline{\nabla p} + \mu \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \underline{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}} \right) & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad p &= p_0 = \text{const}, & \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где p — давление; μ и ρ — соответственно вязкость и плотность жидкости. Только подчеркнутые слагаемые в уравнениях (5.2) не являются тождественным нулем. Принимая во внимание, что давление p должно быть ограничено в пространстве, получаем упомянутые выше ограничения. Зададим эллипсоидальные частицы посредством тензора второго ранга $\mathbf{A}_0$

$$\mathbf{A}_0 = a^2 \mathbf{i}'_1 \otimes \mathbf{i}'_1 + b^2 \mathbf{i}'_2 \otimes \mathbf{i}'_2 + c^2 \mathbf{i}'_3 \otimes \mathbf{i}'_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_0^{-1} = a^{-2} \mathbf{i}'_1 \otimes \mathbf{i}'_1 + b^{-2} \mathbf{i}'_2 \otimes \mathbf{i}'_2 + c^{-2} \mathbf{i}'_3 \otimes \mathbf{i}'_3,$$

где числа a , b , c — полуоси эллипсоида. Пусть $\mathbf{i}_k$ — тройка базисных векторов ($\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ks}$), жестко связанных с частицей. Введем тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ эллипсоидальной частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &\equiv \mathbf{i}_k(t) \otimes \mathbf{i}'_k, & \dot{\mathbf{P}}(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{m}}(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{m}(t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{m}_0$; $\mathbf{m}_0$ — произвольный вектор, фиксированный относительно эллипсоида $\mathbf{A}_0$. В этом случае вращающийся эллипсоид задается тензором

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}). \quad (5.4)$$

Поверхность S вращающегося эллипсоида определяется уравнением

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r} = 1; \quad \mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k; \quad \mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_0. \quad (5.5)$$

Дж. Б. Джеффри рассматривал следующую задачу: найти решение квазистатического уравнения Навье–Стокса

$$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathbf{V}(\mathbf{t})|_S = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{r}_S(\mathbf{t}) \quad \text{и} \quad \mathbf{V}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{V}_0, \quad \text{когда} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Дж. Б. Джеффри решил уравнения (5.6), (5.7) и вычислил момент, действующий на частицу. Полагая этот момент равным нулю, Дж. Б. Джеффри определил угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ частицы в следующей форме:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi} + (\text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d})_{\times}. \quad (5.8)$$

Это инвариантная форма уравнений (36) из работы Дж. Б. Джеффри [111]. Подчеркнем, что постоянный вектор $\boldsymbol{\phi}$ и постоянный тензор $\mathbf{d}$ определены через вектор $\mathbf{V}_0$ посредством уравнений (5.1). Однако тензор $\mathbf{A}$ содержит неизвестный тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$. Для того чтобы найти $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, необходимо решить левую задачу Дарбу (см. Приложение С, разд. С.3)

$$\dot{\mathbf{P}} = \left[\boldsymbol{\phi} + (\text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d})_{\times} \right] \times \mathbf{P}.$$

Домножив это уравнение на вектор $\mathbf{m}_0$, получим формулировку результата Дж. Б. Джеффри через произвольный вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$, жестко связанный с эллипсоидом

$$\dot{\mathbf{m}}(\mathbf{t}) = \left[\boldsymbol{\phi} + (\text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d})_{\times} \right] \times \mathbf{m}(\mathbf{t}). \quad (5.9)$$

Более привычную форму уравнения (5.9) можно получить в случае, когда тензор $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ трансверсально изотропный и вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ — ось симметрии

тензора $\mathbf{A}$. Положив $\mathbf{a} = \mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{c}^2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{a}^2 (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{2\mathbf{a}^2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2} (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}); \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d})_{\times} &= (\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2) \mathbf{m} \times \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}; \\ (\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d})_{\times} &= \frac{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2} \mathbf{m} \times \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений уравнение (5.9) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{m}} = \left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2} \mathbf{m} \times \mathbf{d} \cdot \mathbf{m} \right) \times \mathbf{m}. \quad (5.10)$$

Воспользовавшись уравнением (5.1) и исключив вектор $\boldsymbol{\Phi}$ из уравнения (5.10), получим самую популярную форму результата Дж. Б. Джеффри

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{d} - \boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{m} + \frac{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2} (\mathbf{m}^2 \mathbf{d} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m}). \quad (5.11)$$

где $\mathbf{m} = |\mathbf{m}|$. При $\mathbf{m} = 1$ вместо уравнения (5.11) получим

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{d} - \boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{m} + \frac{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m}), \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} \equiv \nabla \mathbf{V}_0, \quad 2\mathbf{d} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^T.$$

Это точно та форма уравнения Дж. Б. Джеффри, которая используется во многих работах по волокнистым суспензиям (см., например, [105, 109, 110, 114–116]). Заметим, что вектор $\mathbf{V}_0$ удовлетворяет очень строгим ограничениям, перечисленным в (5.1), и нет доказательств того, что уравнение (5.12) можно использовать в других случаях. Соблюдая точность, следует отметить, что (5.9)–(5.12) не представлены в статье Дж. Б. Джеффри. Однако необходимая теоретическая основа для вывода этих уравнений была хорошо известна в начале XIX столетия. В выводе уравнений (5.9)–(5.12) есть один существенный результат, а именно выражение (5.8) для угловой скорости, которое было получено Дж. Б. Джеффри. Таким образом, уравнения (5.9)–(5.12) можно рассматривать как уравнения Дж. Б. Джеффри.

Далее мы можем перейти к обсуждению приложений результата Дж. Б. Джеффри в литературе по рассматриваемому вопросу. Во-первых, вместо

уравнений (5.12) используются уравнения

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{d} - \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{m} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m}); \quad (5.13)$$

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \nabla \mathbf{V}; \quad 2\mathbf{d} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^T,$$

где предполагается, что вектор $\mathbf{V}$ — актуальная скорость потока без каких-либо ограничений, кроме $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Во-вторых, предполагается, что решением уравнения (5.13) с начальным условием $|\mathbf{m}(0)| = 1$ является единичный вектор (см., например, [116], с. 257). Однако легко доказать, что эти допущения справедливы не для любого случая. Ограничение $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ должно быть связано с уравнением (5.13) как дополнительное условие.

В пионерских работах по моделированию литьевого формования (см., например, [104]) направления фибр определяются путем численного интегрирования уравнения Дж. Б. Джеффри для известного поля скоростей. При этом градиент скорости вычисляется посредством решения задачи течения ньютоновской жидкости. Такой подход базируется на предположении, что взаимодействие между частицами пренебрежимо мало. В работе [110], с. 165, Тукер и Адвани указали, что во взаимодействии между частицами сложной структуры эффекты “не джеффриевского” типа наиболее значительно проявляются в задачах о реальных композитных материалах. Общий подход к моделированию процесса заливки заключается в том, чтобы течение волокнистой суспензии рассматривать как течение однокомпонентной анизотропной текучей среды (см., например, [109, 110]). При следовании этому подходу главная проблема состоит в нахождении реологического уравнения, связывающего напряжение, создаваемое движением жидкости, с локальными характеристиками движения. Для вязкой несжимаемой жидкости Дж. Бэтчелор [117] ввел следующее определяющее уравнение:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{\Lambda} = \nabla \mathbf{V}, \quad (5.14)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\mu}$ — тензор вязкости четвертого ранга, определяемый локальным состоянием жидкости. Предложены различные подходы к нахождению частных форм определяющих уравнений. В работе Дж. Бэтчелора [117] обсуждается процедура объемного усреднения для суспензий. Важным пунктом в рассуждении Дж. Бэтчелора является предположение, что силы инерции, связанные с флуктуациями около среднего движения, малы по сравнению с вязкими силами и уравнение движения жидкости приводится к линейному квазистатическому уравнению Стокса. Дж. Бэтчелор

получил следующее выражение для объемного напряжения в суспензии:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mu(\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^T) + \boldsymbol{\sigma}_p. \quad (5.15)$$

Для того чтобы получить парциальное напряжение фракции частиц $\boldsymbol{\sigma}_p$ в уравнении (5.15), следует вычислить поле локальной скорости и поле напряжений в жидкости вокруг частицы. Дж. Бэтчелор обсуждал процедуру усреднения для разбавленных суспензий, т. е. предполагая, что течение вокруг каждой частицы не подвержено влиянию других присутствующих частиц. Основываясь на решении Дж. Б. Джеффри для эллипсоидальной частицы, он получил явное выражение для $\boldsymbol{\sigma}_p$. В конечном счете, Дж. Бэтчелор вычислил тензор вязкости μ в уравнении (5.14) для случая частиц, ориентированных в одном направлении, а также для случайно ориентированных частиц посредством усреднения по всем ориентациям.

Описание современного состояния вопроса о реологии волокнистых суспензий содержится в обзорах [109, 110, 118]. В литературе по реологии различают разбавленные, полуразбавленные и концентрированные суспензии. Пусть погруженные частицы являются тонкими телами вращения с размерами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ и отношением размеров $\mathbf{a}_p = \mathbf{c}/\mathbf{a} > 1$, а ξ — объем фибровой фракции. Суспензию считают разбавленной, когда $\xi\mathbf{a}_p^2 < 1$, полуразбавленной, когда $1 < \xi\mathbf{a}_p^2 < \mathbf{a}_p$, и концентрированной, когда $\xi\mathbf{a}_p^2 > \mathbf{a}_p$. В основе этой классификации лежит тип взаимодействия между частицами, осуществляемого посредством потока волокнистой суспензии (см., например, [109, 110]). В первом случае предполагается отсутствие взаимодействия, во втором — взаимодействие гидродинамической природы и в третьем случае взаимодействие может иметь как гидродинамическое, так и непосредственно механическое происхождение. Фактически, концепции разбавленной или неразбавленной суспензий являются скорее интуитивными предположениями, чем аппроксимациями какой-либо общей определяющей модели. Такая модель не существует. Единственный известный факт — это то, что коммерческие материалы являются неразбавленными (см., например, [110]).

Для того чтобы принять во внимание взаимодействие между фибрами, а также учесть случайный характер ориентации фибр в зоне входного отверстия, обычно используется подход, связанный с ориентационным осреднением. В качестве примера рассмотрим модель, предложенную Динхом и Армстронгом [119]. Отправной точкой является выражение (5.15) для объемного напряжения. Для того чтобы избежать вычисления полей локального течения вокруг каждой частицы, авторы рассмотрели одиночное тонкое тело, подвергнутое действию частиц в эффективной континуальной среде. Они ис-

пользовали ориентационную функцию плотности вероятности $\psi(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}$ — единичный вектор, связанный с контрольной частицей, а затем учли воздействие окружающей среды на контрольную частицу посредством поверхностной силы, определенной из трансверсально изотропного закона сопротивления. Получившееся в результате выражение можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mu(\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^T) \cdot \cdot \left[{}^{(4)}\mathbf{E} + \frac{n l^2}{12\mu} \zeta_p \mathbf{a}_4 \right]; \quad (5.16)$$

$$\mathbf{a}_4 = \int_{(S)} \Psi(\mathbf{m}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} dS.$$

Здесь n — число частиц в единице объема; l — длина частицы; ζ_p — коэффициент сопротивления, определяемый формулой

$$\zeta_p = \frac{2\pi\mu l}{\ln(2h/d)},$$

где d — диаметр фибры; $h = (nl)^{-1/2}$ для систем, выстроенных в линию, $h = (nl^2)^{-1}$ для случайных систем. В формуле (5.16) тензор ${}^{(4)}\mathbf{E}$ обозначает единичный тензор четвертого ранга, тензор $\mathbf{a}_4$ представляет собой тензор структуры четвертого ранга, который характеризует актуальное состояние ориентации фибр, dS — дифференциальный элемент на единичной сфере. Для того чтобы сформулировать эволюционное уравнение для тензора структуры, необходимо иметь уравнение для функции плотности вероятности. Предположение о том, что механизм взаимодействий между фибрами обусловлен вращательным броуновским движением (см., например, [110]), позволяет применить уравнение типа Смолуховского, (см., например, [120, 121])

$$\dot{\Psi} + \nabla_s \cdot (\Psi \boldsymbol{\omega} - D_r \nabla_s \Psi) = 0; \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (5.17)$$

Здесь точка над буквой обозначает материальную производную; D_r — коэффициент вращательной диффузии и

$$\nabla_s(\dots) = \mathbf{e}_k \epsilon_{ijk} m_i \frac{\partial(\dots)}{\partial m_j}; \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1,$$

где ϵ_{ijk} — символ перестановки. Для моделирования течения волокнистых суспензий уравнение (5.17) модифицируется, исходя из предположения, что D_r — скалярная функция d (см., например, [110]). Кроме того, $\boldsymbol{\omega}$ в уравнении (5.17) трактуется как угловая скорость одиночной частицы. Следуя методу, изложенному в работе [114], подставим результат Дж. Б. Джеффри (5.11)

в уравнение (5.17). Воспользовавшись представлением $\Psi(\mathbf{m})$ в виде ряда по сферическим гармоникам и введя в рассмотрение моменты $\Psi(\mathbf{m})$, получим

$$\mathbf{a}_n = \int_{(S)} \Psi(\mathbf{m}) \mathbf{m}^{\otimes n} dS, \quad n = 2, 4, \dots,$$

где $\mathbf{a}_n$ называются тензорами структуры n -го ранга и $(\dots)^{\otimes n}$ обозначает n диадных произведений. Заменим уравнение (5.17) системой пар эволюционных уравнений для $\mathbf{a}_n$ [114]. При моделировании литьевого формования обычно решаются эволюционные уравнения для $\mathbf{a}_2$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_2 &= (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_2) + \lambda(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d} - 2\mathbf{a}_4 \cdot \cdot \mathbf{d}) - D_r(6\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{E}), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{\Lambda} - \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

тогда как для $\mathbf{a}_4$ используется приближение, чтобы замкнуть систему. Различные типы замыкающих систему приближений можно найти в [109, 114, 122–124]. Заметим, что модель (5.16) в связи с эволюционным уравнением типа (5.18) широко используется при моделировании литьевого формования (см., например, [115, 125]). Тензор $\mathbf{a}_2$ (а в некоторых случаях и тензор $\mathbf{a}_4$) предоставляет информацию об актуальном состоянии ориентации фибр.

В заключение обсудим модели анизотропной жидкости, разработанные в рамках континуальной механики. Основываясь на инвариантности условий Эриксона [126], обоснуем простейшую форму структурной модели для трансверсально изотропной однокомпонентной несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{d} + (\mu_1 + \mu_2\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ 2\mu_3[\mathbf{m} \otimes (\mathbf{d} \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{m}) \otimes \mathbf{m}]; \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{m}} \equiv \dot{\mathbf{m}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{m} = \lambda(\mathbf{d} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m}); \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1.$$

Здесь λ и μ, μ_1, μ_2, μ_3 — константы; $\mathbf{m}$ — единичный вектор; “ $\circ$ ” обозначает производную по времени в системе координат, вращающейся вместе с элементарным объемом. Концепция жидкости Эриксона ассоциируется с анизотропным поведением жидкости с осью анизотропии $\mathbf{m}$, изменяющейся со временем согласно второму уравнению в (5.19). Заметим, что при условии $\lambda = (\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2)/(\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2)$ второе уравнение системы (5.19) формально совпадает с уравнением Дж. Б. Джеффри (5.13) для одиночной частицы. Однако следует отметить, что уравнения (5.19) и (5.13) выводятся на основании разных рассуждений. Кроме того, в континуальной механике структурная модель (5.19) должна вводиться вместе с законами сохранения [127]. Эринген [128, 129] разработал микрополярную теорию анизотропных жидкостей и применил ее к

течению волокнистых суспензий. Важная особенность его теории заключается в модифицированном законе баланса для тензора инерции, отвечающем за явление прилипания жидкости к взвешенным частицам. Предположив, что тензор инерции трансверсально изотропен, Эринген вывел эволюционное уравнение (уравнение (6.4) в [128]), которое совпадает с уравнениями (5.13) и (5.19).

За последние два десятилетия появилось большое количество работ, в которых рассматривается моделирование процесса литьевого формования. Для обзора существующих моделей и их численных реализаций мы сошлемся на [108]. Помимо того, разработано разнообразное коммерческое программное обеспечение, например Moldflow[®] [130], имеющее целью моделирование всего цикла литьевого формования и оптимизацию условий процесса. Несколько лет назад коммерческое программное обеспечение процесса заливки было расширено модулями, позволяющими предсказывать микроструктуру ориентации фибр. Эти модули основаны на обсуждавшихся ранее реологических уравнениях состояния и вычислении ориентации фибр посредством тензоров структуры. Современное состояние исследований, связанных с моделированием течения волокнистых суспензий, представлено в [109, 110], где обсуждается ряд открытых вопросов. Относительно теоретического подхода можно заметить, что нет унифицированной концепции в моделировании взвешенных жидкостей и, как указано в [129], с. 117, “в настоящее время ни одна из частных теорий не является общепризнанной”.

5.1.3. Особенности предлагаемого подхода

Для того чтобы обрисовать суть нашего подхода, введем следующие определения. Пусть $\eta_1(\mathbf{x}, t)$ — плотность частиц жидкости и $\eta_2(\mathbf{x}, t)$ — плотность твердых частиц в данной точке $\mathbf{x}$ инерциальной системы отсчета. Определив dN_1 и dN_2 как число частиц для первой и второй компоненты в контрольном объеме dV , можно записать

$$dN_1 = \eta_1(\mathbf{x}, t)dV, \quad \eta_1 \geq 0; \quad dN_2 = \eta_2(\mathbf{x}, t)dV, \quad \eta_2 \geq 0.$$

Функции $\eta_1(\mathbf{x}, t)$ и $\eta_2(\mathbf{x}, t)$ — основные неизвестные в теории смесей. Функция $\eta_2(\mathbf{x}, t)$ особенно важна, поскольку она характеризует распределение твердых частиц в жидкости. Это распределение будет оказывать влияние на механические свойства материала после завершения процесса. Сильное различие между свойствами двух компонент приводит к необходимости введения разных моделей для каждой из них. Первая компонента — это сово-

купность частиц жидкости, характеризуемая плотностью частиц η_1 и массовой плотностью ρ_1 . В дальнейшем эта компонента будет называться жидкой компонентой. Вторая компонента — это совокупность твердых частиц, характеризуемая плотностью частиц η_2 и массовой плотностью ρ_2 . Далее, делая предположения относительно определяющих уравнений, мы исключим возможность формирования из твердых частиц твердого деформируемого тела. Таким образом, мы предположим, что компонента частиц-фибр ведет себя подобно жидкости. В дальнейшем вторая компонента будет называться твердо-жидкой компонентой.

Жидкую компоненту можно рассматривать как вязкую жидкость с некоторыми дополнительными свойствами. Например, тензор напряжений жидкости в нашей модели будет несимметричным. Для твердо-жидкой компоненты необходимо принять во внимание не только трансляционное движение, но также и вращения. Многокомпонентные смеси изучались во многих работах (см., например, [131, 132], а также цитируемые в них работы). В физико-химической гидродинамике диффузионные процессы играют существенную роль [132]. Именно диффузия определяет относительные скорости компонент посредством законов Фика. В нашем случае эти скорости определяются внешними условиями и вязкими свойствами жидкости. Диффузией можно пренебречь.

Далее кратко обрисуем рассматриваемый круг задач и отличительные особенности нашего подхода:

1) для того чтобы принять во внимание явление прилипания частиц жидкости к твердым частицам, предполагается, что плотность частиц и массовая плотность — независимые функции. Следовательно, уравнения баланса частиц и уравнения баланса массы независимы друг от друга;

2) жидкая компонента считается неполярной вязкой жидкостью, но с несимметричным тензором напряжений;

3) состояние твердо-жидкой компоненты описывается посредством антисимметричного тензора напряжений и антисимметричного тензора моментных напряжений;

4) пусть векторы $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$ — скорости частиц жидкой и твердо-жидкой компонент, соответственно. Предполагается, что $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$, т. е. в нашем подходе компоненты могут скользить друг относительно друга, поэтому учитываются силы трения между компонентами;

5) уравнения движения формулируются для открытых физических систем и содержат дополнительные слагаемые, которые ответственны за явление прилипания;

6) химический потенциал вводится на основе так называемого приведенного уравнения баланса энергии. Наше определение химического потенциала отличается от определений, предложенных в [131, 132]. Если пренебречь прилипанием частиц жидкости к фибрам, химический потенциал будет сохраняться;

7) предполагается, что компоненты могут иметь разные температуры, что может быть важным, если необходимо произвести материал с желаемыми механическими свойствами. Соответственно, температурные поля, вообще говоря, не являются непрерывными. В этом случае традиционная форма второго закона термодинамики, например неравенство Клаузиуса–Дюгема, неприменима. Поэтому предлагается альтернативная формулировка второго закона термодинамики в виде системы двух неравенств. Обсуждается задача моделирования теплообмена;

8) главная цель нашего подхода — описать реальный технологический процесс, в котором смесь имеет стадию затвердевания. Затвердевание имеет место не только в финальной стадии процесса, но также во время заливки вблизи стенок формы. Поэтому для описания процесса не подходят методы, основанные на моделировании суспензий анизотропной несжимаемой вязкой жидкостью. Далее обсуждается модель сжимаемой жидкости с фазовыми переходами типа *жидкость–твердое тело*, причем фазовые переходы описываются посредством предлагаемого определяющего уравнения для давления.

5.2. Кинематические соотношения

Кажется, должно быть очевидно, что в общем случае сплошную среду нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием. Действительно, как известно из экспериментов, частицы, которые были соседями в некоторый момент времени, не обязательно будут занимать соседние положения в любой последующий момент времени. В такой среде можно предполагать возникновение разрывов в направлении касательной к траектории движения или зарождение пор. Для многокомпонентной среды ситуация более сложная, так как различные компоненты могут проскальзывать друг относительно друга и взаимодействовать, при этом взаимодействие происходит между частицами различного вида. Пусть, например, $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \dots$ — некоторые части первой компоненты и пусть $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2, \dots$ — части второй компоненты. Предположим, что в некоторый момент времени взаимодействуют части $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда в другой момент времени могут контактировать другие две части, например $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Из этого следует, что материальное описание, которое

предполагает, что соседние частицы всегда должны оставаться соседними, в общем случае не применимо для многокомпонентной среды. Единственно возможный путь к созданию теории для такой среды связан с использованием чисто пространственного описания. Это означает, что в отличие от материального описания все основные операторы в теории должны определяться прямо в системе отсчета, а не посредством дифференцируемого многообразия. Введение этих операторов обсуждалось в подразделе 3.2.1.

В бинарных смесях обычно предполагается, что одна точка системы отсчета может быть одновременно занята частицами обоих видов (см., например, [132]). Смесь, рассматриваемая в данной работе, состоит из двух компонент. Первая компонента включает частицы вязкой жидкости. Вторая компонента построена из маленьких твердых тел — фибр, которые можно рассматривать как эллипсоиды вращения. Вектор скорости частицы-фибры $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$ будем трактовать как вектор скорости ее центра масс. Заметим, что в теориях смесей обычно предполагается $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$ [132].

Вычисляя материальную производную вектора скорости $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t)$, получаем вектор ускорения частиц жидкости

$$\mathbf{W}_1(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}_1(\mathbf{x}(t), t) + \left(\mathbf{V}_1(\mathbf{x}(t), t) - \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}_1(\mathbf{x}(t), t).$$

В результате вычисления материальной производной вектора скорости $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$ получаем вектор ускорения центра масс частицы-фибры

$$\mathbf{W}_2(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}_2(\mathbf{x}(t), t) + \left(\mathbf{V}_2(\mathbf{x}(t), t) - \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}_2(\mathbf{x}(t), t).$$

Здесь мы использовали определение (3.3), предполагая, что точка наблюдения движется.

Предположим, что частица жидкости и частица-фибра, занимающие в данный момент времени t точку $\mathbf{x}$, при $t_0 \leq t$ располагались в $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_0^*$, соответственно. Векторы перемещений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*$ определяются из скоростей с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{5.20}$$

где использовано обозначение

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t); \quad \det \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) > 0. \tag{5.21}$$

Вычисляя градиент обеих частей второго уравнения (5.20) и принимая во внимание перестановочность оператора градиента и полной производной по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) &= \nabla \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{d}{dt} \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Уравнения, подобные (5.22), можно найти в [24]. Последнее уравнение может быть переписано в эквивалентной форме

$$\nabla \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (5.23)$$

Уравнения (5.23) будут использоваться позже при формулировке приведенного уравнения баланса энергии.

До настоящего момента мы не делали никакого различия между частицами жидкости и частицами-фибрами. Введем в рассмотрение повороты частиц-фибр, которые будут задавать их ориентацию в системе отсчета. Определение этой ориентации является одной из главных целей данной теории. Допустим, что в каждой точке $\mathbf{x}$ системы отсчета задан репер $\mathbf{d}_k$: $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_m = \delta_{km}$. Введем в рассмотрение собственно ортогональный тензор $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, который описывает поворот частицы-фибры, расположенной в момент времени t в точке $\mathbf{x}$, относительно репера $\mathbf{d}_k$. Затем, воспользовавшись определением (3.8), вычислим угловую скорость твердой частицы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}(t), t) + \left(\mathbf{V}_2(\mathbf{x}(t), t) - \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(t), t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}(t), t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь индексы для тензора поворота и угловой скорости опущены, поскольку эти величины определены только для частиц-фибр. Подробнее об определении вектора угловой скорости при пространственном описании см. в подразделе 3.2.1.

5.3. Уравнения баланса частиц и баланса массы

Рассмотрим три различных случая. В первом случае мы предполагаем, что полное число частиц в обеих компонентах остается неизменным. Кажется

очевидным, что такое сильно ограничивающее предположение в реальности не удовлетворяется. Во втором случае мы предполагаем, что полное число фибр остается постоянным, тогда как масса фибр может изменяться благодаря прилипанию к ним частиц жидкости. В этом случае число частиц жидкости изменяется, т. е. плотность частиц жидкости η_1 не константа. С другой стороны, плотность частиц-фибр η_2 остается постоянной, в то время как массовая плотность частиц-фибр изменяется. Наконец, в третьей ситуации как плотность частиц жидкости, так и плотность частиц-фибр изменяется. Это означает, что не только частицы жидкости могут прилипать к фибрам, но также и фибры могут прилипать друг к другу. Прилипание фибр может привести к формированию гранул-кластеров, которые следует рассматривать как новые частицы. Очевидно, что последний случай более реалистичен для концентрированных суспензий. Трудно проконтролировать, насколько важны для кратковременных процессов эффекты, связанные с прилипанием. Кажется, что влияние на процесс течения эффектов прилипания не должно быть значительным в количественном отношении. Тем не менее обсудим все три ситуации отдельно.

Жидкая и твердо-жидкая компоненты имеют постоянный состав. Пусть V — контрольный объем в системе отсчета и граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Тогда для каждой из введенных в рассмотрение компонент можно сформулировать следующие уравнения баланса частиц:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta_1(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \eta_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1 dS = - \int_{(V)} \nabla \cdot (\eta_1 \mathbf{V}_1) dV, \quad (5.25)$$

где $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t)$ — скорость частиц жидкости,

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta_2(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \eta_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2 dS = - \int_{(V)} \nabla \cdot (\eta_2 \mathbf{V}_2) dV, \quad (5.26)$$

где $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)$ — скорость частиц-фибр.

Заметим, что в случае движущейся точки наблюдения в уравнениях (5.25) и (5.26) следует $\mathbf{V}_i$ заменить на $\mathbf{V}_i - \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

В локальной форме уравнения (5.25) и (5.26) записываются следующим образом:

$$\frac{d\eta_1}{dt} + \nabla \cdot (\eta_1 \mathbf{V}_1) = 0; \quad \frac{d\eta_2}{dt} + \nabla \cdot (\eta_2 \mathbf{V}_2) = 0. \quad (5.27)$$

Аналогично уравнениям (5.27) можно сформулировать уравнения баланса массы

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{V}_1) = 0; \quad \frac{d\rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{V}_2) = 0, \quad (5.28)$$

где ρ_1 и ρ_2 — массовые плотности жидкой и твердо-жидкой компонент, соответственно.

Введем следующие обозначения для материальных производных:

$$\frac{\delta_1 f}{\delta t} \equiv \frac{df}{dt} + \left(\mathbf{V}_1 - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \nabla f, \quad \frac{\delta_2 f}{\delta t} \equiv \frac{df}{dt} + \left(\mathbf{V}_2 - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \nabla f, \quad (5.29)$$

где f — произвольная скалярная функция (или любая тензорнозначная функция). С учетом введенных обозначений уравнения (5.27) и (5.28) принимают следующий вид:

$$\frac{\delta_1 \eta_1}{\delta t} + \eta_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0; \quad \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0; \quad (5.30)$$

$$\frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0; \quad \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0. \quad (5.31)$$

Жидкая компонента имеет переменный состав. В этой ситуации плотность жидкой компоненты в выбранной системе отсчета может изменяться не только благодаря течению, но и в результате прилипания частиц жидкости к частицам-фибрам. Частицы жидкости, присоединенные к фибрам, уже нельзя рассматривать как частицы жидкости. Их следует относить к массе фибр. Плотность частиц-фибр может изменяться только вследствие их движения.

Уравнение баланса частиц для жидкой компоненты (5.25) должно быть модифицировано следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta_1(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{(V)} \chi_1(\mathbf{x}, t) dV - \int_{(S)} \eta_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1 dS = \\ &= \int_{(V)} [\chi_1(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\eta_1 \mathbf{V}_1)] dV, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где функция χ_1 — скорость производства (уничтожения) частиц жидкости в данной точке системы отсчета.

Уравнение баланса частиц для фибр остается неизменным. Следовательно, уравнения (5.30) принимают вид

$$\frac{\delta_1 \eta_1}{\delta t} + \eta_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \chi_1; \quad \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0. \quad (5.33)$$

Уравнения баланса массы должны быть модифицированы следующим образом:

$$\frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \chi_{1m}; \quad \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = \chi_{2m}, \quad (5.34)$$

где функции χ_{1m} и χ_{2m} характеризуют скорости производства (уничтожения) массы частиц жидкости и частиц-фибр, соответственно. Поскольку полная плотность массы $\rho = \rho_1 + \rho_2$ изменяется только за счет деформации, уравнение баланса массы для рассматриваемой бинарной среды может быть записано в интегральной форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) dV &= - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_m dS = - \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_m) dV; \\ \rho \mathbf{V}_m &= \rho_1 \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{V}_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Локальная форма уравнения (5.35) имеет вид

$$\frac{\delta_m \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V}_m = 0; \quad \frac{\delta_m f}{\delta t} \equiv \frac{df}{dt} + \left(\mathbf{V}_m - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \nabla f. \quad (5.36)$$

Здесь точка наблюдения $\mathbf{x}(t)$ выбрана одной и той же для обеих компонент. Если мы сложим уравнения (5.34) и затем вычтем из результата уравнение (5.35), то получим

$$\chi_{2m} = -\chi_{1m}, \quad (5.37)$$

т. е. количество массы, приобретенной за единицу времени твердо-жидкой компонентой, равно количеству массы, утраченной за единицу времени жидкой компонентой.

Жидкая и твердо-жидкая компоненты имеют переменный состав. Уравнения баланса частиц можно сформулировать согласно обсуждавшейся ранее методике

$$\frac{\delta_1 \eta_1}{\delta t} + \eta_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \chi_1, \quad \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = \chi_2, \quad (5.38)$$

где функция χ_2 характеризует скорость производства частиц-фибр. Уравнения баланса массы остаются такими же

$$\frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \chi_{1m}, \quad \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = \chi_{2m}, \quad \chi_{2m} = -\chi_{1m}. \quad (5.39)$$

Подчеркнем, что введенные в рассмотрение плотности частиц и массовые плотности — независимые функции. Вследствие этого уравнения (5.38) и

(5.39) являются независимыми. Однако можно предположить, что функции χ_1 и χ_{1m} связаны посредством уравнения $\chi_{1m} = m\chi_1$, где m характеризует массу одной частицы жидкости. Последнее предположение очевидно, так как частицы жидкости не могут формировать кластеры.

Перепишем уравнения (5.38) и (5.39) в скалярной форме, проводя для этого необходимые преобразования. Из уравнений (5.23) следует

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta_i}{\delta t} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t). \quad (5.40)$$

Преобразовав уравнение (5.40) с использованием формулы (3.22), которая справедлива для любого несингулярного тензора $\mathbf{g}_i$, получим

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_i = -\frac{1}{I_3(\mathbf{g}_i)} \frac{\delta_i I_3(\mathbf{g}_i)}{\delta t}; \quad I_3(\mathbf{g}_i) = \det \mathbf{g}_i \quad (i = 1, 2), \quad (5.41)$$

где не подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Воспользовавшись формулами (5.41), запишем уравнения баланса частиц (5.38) и уравнения баланса массы (5.39) в следующем виде:

$$\frac{\delta_i}{\delta t} \left(\frac{\eta_i}{I_3(\mathbf{g}_i)} \right) = \frac{\chi_i}{I_3(\mathbf{g}_i)}; \quad \frac{\delta_i}{\delta t} \left(\frac{\rho_i}{I_3(\mathbf{g}_i)} \right) = \frac{\chi_{im}}{I_3(\mathbf{g}_i)} \quad (i = 1, 2). \quad (5.42)$$

В дальнейшем, главным образом, будем обсуждать вторую ситуацию, предполагая, что число частиц жидкости не сохраняется, тогда как число твердых частиц остается постоянным. Это означает, что мы будем использовать уравнения (5.33), (5.34). В этом случае необходимо сформулировать определяющие уравнения для функций χ_1 , χ_{1m} , χ_{2m} . Функции η_1 и ρ_1 связаны соотношением $m\eta_1 = \rho_1$, где m — масса одной частицы жидкости. Таким образом, имеем

$$m\chi_1 \equiv -\chi, \quad \chi_{1m} \equiv -\chi, \quad \chi_{2m} \equiv \chi, \quad \chi_2 = 0.$$

В результате, три независимых уравнения из (5.33), (5.34) принимают вид

$$\frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = -\chi, \quad \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0, \quad \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = \chi,$$

или

$$\frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = -\chi, \quad \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0, \quad \frac{\delta_2}{\delta t} \ln \frac{\rho_2}{\eta_2} = \frac{\chi}{\rho_2}. \quad (5.43)$$

Отношение ρ_2/η_2 имеет смысл изменения массы одной частицы-фибры.

5.4. Законы динамики Эйлера

Фундаментальные законы при пространственном описании должны формулироваться для открытых систем, т. е. для систем, которые обмениваются с окружающей средой массой, количеством движения, кинетическим моментом, энергией и т. д. Количество движения частиц в контрольном объеме V определяется следующим образом³:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \int_{(V)} (\rho_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) + \rho_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t)) dV(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_m(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Первый закон динамики Эйлера утверждает: “Скорость изменения количества движения произвольной физической системы равна внешней силе, действующей на систему, плюс внешний подвод количества движения в систему”.

Математическая форма первого закона динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{V}_m dV &= \int_{(V)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS - \\ &- \int_{(S)} [\rho_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{V}_1 + \rho_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2) \mathbf{V}_2] dS, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где последний интеграл в правой части выражает внешний подвод количества движения в контрольный объем V .

Используя стандартные аргументы, можно ввести в рассмотрение тензор напряжений $\mathbf{T}$ и получить формулы Коши

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS = \int_{(V)} \nabla \cdot \mathbf{T} dV. \quad (5.46)$$

³ В подразделе 3.2.3 дано более общее определение количества движения (см. формулы (3.39)), справедливое для частиц, обладающих дополнительным тензором инерции, кинетическая энергия которых содержит перекрестное слагаемое. В данной главе подразумевается, что тензор инерции $\mathbf{B}$, отвечающий за перекрестное слагаемое в кинетической энергии, равен нулю. (Примеч. ред.)

При использовании (5.46) уравнение (5.45) приводится к виду

$$\int_{(V)} \left[\frac{d(\rho \mathbf{V}_m)}{dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_2) - \nabla \cdot \mathbf{T} \right] dV = 0.$$

Приняв во внимание (5.34), можно получить локальную форму уравнения (5.45)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho_1 \frac{\delta_1 \mathbf{V}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathbf{V}_2}{\delta t} + \chi_{1m} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2). \quad (5.47)$$

Кроме того, массовую плотность внешней силы $\mathbf{F}$ представим в виде суммы

$$\rho \mathbf{F} = \rho_1 \mathbf{F}_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2,$$

где плотности сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ могут иметь различную природу. Например, твердые частицы могут быть заряженными.

Удобно переписать уравнение (5.47) в форме двух уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}' + \rho_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{Q} &= \rho_1 \frac{\delta_1 \mathbf{V}_1}{\delta t} + \chi_{1m} \mathbf{V}_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{T}'' + \rho_2 \mathbf{F}_2 - \mathbf{Q} &= \rho_2 \frac{\delta_2 \mathbf{V}_2}{\delta t} + \chi_{2m} \mathbf{V}_2, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где $\mathbf{Q}$ — сила взаимодействия между жидкой и твердо-жидкой компонентами и постулируется равенство

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}''. \quad (5.49)$$

Предположение

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_m \equiv \mathbf{V},$$

позволяет получить стандартную форму уравнения (5.47)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}. \quad (5.50)$$

Второй закон динамики Эйлера был установлен в 1771 г. и в настоящее время известен как следующее утверждение: “Скорость изменения кинетического момента для произвольной физической системы равна внешнему моменту, действующему на систему, плюс внешний подвод кинетического момента в систему”.

Введем в рассмотрение кинетический момент бинарной среды⁴

$$\mathbf{K}_2 = \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_2 dV = \int_{(V)} \left[\mathbf{x} \times (\rho_1 \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{V}_2) + \rho_2 \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \right] dV, \quad (5.51)$$

где $\rho_2 \mathbf{J}$ — объемная плотность тензора инерции твердых частиц в актуальном положении. Подчеркнутое слагаемое в уравнении (5.51) называется моментом количества движения.

В интегральной форме второй закон динамики может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_2 dV = & \int_{(V)} (\rho \mathbf{x} \times \mathbf{F} + \rho_2 \mathbf{L}) dV + \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) dS - \\ & - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot [\rho_1 \mathbf{V}_1 \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{V}_1) + \rho_2 \mathbf{V}_2 \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{V}_2 + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})] dS. \end{aligned} \quad (5.52)$$

В уравнениях (5.51) и (5.52) $\mathbf{K}_2$ и $\mathbf{L}$ обозначают плотности кинетического момента и внешнего момента, соответственно.

Введя в рассмотрение тензор моментных напряжений $\mathbf{M}$ и получив для него формулы Коши

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \int_{(S)} \mathbf{M}_{(n)} dS = \int_{(V)} \nabla \cdot \mathbf{M} dV, \quad (5.53)$$

а также приняв во внимание первый закон динамики (5.47), можно получить следующую локальную форму второго закона:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho_2 \mathbf{L} = \rho_2 \frac{\delta_2}{\delta t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \chi_{2m} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (5.54)$$

где $\mathbf{J}$ — массовая плотность тензора инерции в актуальном положении.

Пусть $\mathbf{J}_0$ — массовая плотность тензора инерции в отсчетной конфигурации. Тогда

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t). \quad (5.55)$$

Предположим, что в отсчетной конфигурации все частицы-фибры трансверсально изотропны и имеют одинаковые инерционные свойства.

⁴ В подразделе 3.2.3 дано более общее определение кинетического момента (см. формулы (3.40), (3.41)), справедливое для частиц, обладающих дополнительным тензором инерции $\mathbf{B}$, который в данной главе считается равным нулю. (*Примеч. ред.*)

Соответственно, можно принять

$$\mathbf{J}_0 = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (5.56)$$

где константы λ и μ — моменты инерции твердых частиц, а единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет ось изотропии частиц в системе отсчета.

Вектор $\mathbf{e}$, определяющий направление оси изотропии в отсчетной конфигурации, выбирается произвольно и может быть одинаковым во всех точках системы отсчета, включая точки, которые не заняты частицами-фибрами при $\mathbf{t} = 0$. Тогда начальное распределение тензоров инерции твердых частиц можно представить в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{P}_0(\mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, 0). \quad (5.57)$$

Здесь тензор поворота $\mathbf{P}_0(\mathbf{x}_0)$ определяет начальную ориентацию твердых частиц.

Заметим, что для рассматриваемого производственного процесса распределение начальных ориентаций — случайная функция. Поэтому после решения детерминистической задачи для данного распределения тензора $\mathbf{P}_0(\mathbf{x}_0)$ следует решить задачу статистического усреднения результатов.

Воспользовавшись уравнением (5.56), соотношение (5.55) можно переписать в форме

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mu \mathbf{E} + (\lambda - \mu) \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}'; \quad \mathbf{e}'(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.58)$$

Обсудим характер поведения в процессе течения объемной плотности тензора инерции $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Если принимается во внимание явление прилипания частиц жидкости к фибрам, то этот тензор изменяется. Есть две причины, приводящие к изменению тензора $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Главной является изменение массовой плотности $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Однако с теоретической точки зрения можно предположить, что изменяется также массовая плотность тензора инерции $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, включая и свойства симметрии, и моменты инерции. Кажется очевидным, что этот второй фактор не очень важен для рассматриваемого технологического процесса.

В дальнейшем будем предполагать, что объемная плотность тензора инерции $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ может изменяться только благодаря изменению массовой плотности $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. В таком случае, согласно уравнениям (5.55) и (5.24), получаем

$$\frac{\delta_2}{\delta t} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (5.59)$$

Другой подход обсуждается в работах Эрингена [128, 129], где вместо уравнения (5.59) предлагается использовать уравнение

$$\frac{\delta_2}{\delta t} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

где функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ отвечает за прилипание частиц жидкости к твердым частицам. Эта функция должна быть задана определяющим уравнением. В данной работе мы предпочитаем уравнение (5.59), которое широко применяется в динамике твердого тела и, по существу, было установлено Эйлером. Заметим, что учесть явление прилипания возможно, даже используя уравнение (5.59).

5.5. Уравнение баланса энергии

Каждый фундаментальный закон вводит новое понятие. Первый закон динамики вводит понятие сил, второй закон дает трактовку понятию моментов, которые, в общем случае, не определяются через понятие сил. Третий фундаментальный закон механики — это уравнение баланса энергии. В рамках континуальной механики этот закон играет исключительно важную роль, но его формулировка намного труднее по сравнению с первым и вторым законами. Посредством уравнения баланса энергии вводится много новых понятий. Самое важное из них — понятие внутренней энергии. Общая формулировка уравнения баланса энергии включает новое понятие полной энергии. Однако полную энергию удобно представить в виде суммы кинетической энергии, которая уже определена, и внутренней энергии, которая поглощает все новые понятия, содержащиеся в концепции полной энергии.

Одно из принципиальных предположений в континуальной механике заключается в утверждении, что полная энергия системы является аддитивной функцией массы и, согласно теореме Радона–Никодима из теории множеств [133], может быть представлена в виде интеграла по массе, где масса рассматривается как мера. Кинетическая энергия является, согласно ее определению, аддитивной функцией массы. Следовательно, аддитивность полной энергии ведет к аддитивности внутренней энергии.

Вообще говоря, аддитивность внутренней энергии обеспечивается только для абсолютно непрерывных систем. Однако известный физический мир дискретен. В связи с этим предположение об аддитивности внутренней энергии является серьезным ограничением. Попытки смягчить это ограничение обычно базируются на концепции поверхностной энергии или энергии связи.

В этой главе мы будем следовать традиционному предположению об аддитивности внутренней энергии⁵. В этом случае полную энергию бинарной системы можно представить в виде

$$E = \int_{(V)} \left[\frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2) + \frac{1}{2} \rho_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_1 \mathcal{U}_1 + \rho_2 \mathcal{U}_2 + \rho \mathcal{U}_{12} \right] dV,$$

где $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — массовые плотности внутренней энергии жидкой и твердо-жидкой компонент, соответственно; $\mathcal{U}_{12}$ — энергия взаимодействия между компонентами бинарной смеси.

Уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики, утверждает: «Скорость изменения полной энергии в любой физической системе равна мощности внешних воздействий на систему плюс скорость подвода энергии “не механической” природы, обычно в форме тепла». Трудно дать общее и строгое определение понятию энергии “не механической” природы. Поэтому ограничимся неопределенным утверждением, что энергия “не механической” природы — это та часть энергии, которая подводится в систему не через мощность внешних воздействий.

Уравнение баланса энергии можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \int_{(V)} (\rho_1 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \rho_2 \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho q) dV + \\ & + \int_{(S)} \left(\mathbf{T}'_{(n)} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{T}''_{(n)} \cdot \mathbf{V}_2 + \mathbf{M}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega} + h_{(n)} \right) dS - \\ & - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot \left[\rho_1 \mathbf{V}_1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathcal{U}_1 \right) + \right. \\ & \left. + \rho_2 \mathbf{V}_2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathcal{U}_2 \right) + \rho \mathbf{V}_m \mathcal{U}_{12} \right] dS, \end{aligned} \quad (5.60)$$

⁵ В данной главе П. А. Жилин следует традиционному подходу, считая внутреннюю энергию аддитивной функцией массы. Это существенно отличается от трактовки, принятой в третьей главе (см. подразд. 3.2.6), где внутренняя энергия считается аддитивной функцией числа частиц (см. формулу (3.49) и следующие за ней пояснения). Фактически, только в том случае, когда массовая плотность и плотность частиц связаны между собой тривиальным соотношением $\rho = m\eta$ (постоянная величина m имеет смысл массы одной частицы), принятие для внутренней энергии аксиомы аддитивности по массе ведет к таким же следствиям, что и принятие аксиомы аддитивности по числу частиц. В принципе, все формулы данной главы можно переписать исходя из аксиомы аддитивности внутренней энергии по числу частиц. Используя методологию третьей главы, читатель может сделать это самостоятельно. (Примеч. ред.)

где $\mathbf{q}$ — скорость производства энергии в точке $\mathbf{x}$ системы отсчета; $\mathbf{h}_{(n)}$ — скорость подвода энергии через поверхность S и, кроме того, использовано разложение полного вектора усилий

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{T}'_{(n)} + \mathbf{T}''_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}''.$$

Скорость подвода энергии через поверхность можно записать с использованием правила Стокса

$$\mathbf{h}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}, \quad (5.61)$$

где $\mathbf{h}$ — вектор потока энергии, содержащий в себе все виды энергии, которые не включены в мощность внешних сил и моментов. Заметим, что во многих работах вместо вектора $\mathbf{h}$ используется вектор $(-\mathbf{h})$.

Приняв во внимание уравнения (5.34), (5.36), (5.48) и (5.54), можно получить локальную форму уравнения баланса энергии (5.60)

$$\begin{aligned} & \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{U}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{U}_2}{\delta t} + \rho \frac{\delta_m \mathcal{U}_{12}}{\delta t} = \\ & = \mathbf{T}'^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_1 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{T}''^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_2 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \\ & + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho \mathbf{q} + \\ & + \chi_{1m} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \mathcal{U}_1 \right) + \chi_{2m} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathcal{U}_2 \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Правая часть уравнения (5.62) содержит мощность сил и моментов⁶. Часть этой мощности идет на изменение внутренней энергии. Остальная часть частично сохраняется в теле в форме тепла, а частично излучается во внешнюю среду. Для того чтобы разделить эти части, введем в рассмотрение следующие разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{T}'_e + \mathbf{T}'_f, & \mathbf{T}'' &= \mathbf{T}''_e + \mathbf{T}''_f, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_f, & \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_f, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где индекс “e” обозначает часть, которая не зависит от скоростей, и индекс “f” обозначает остальную часть. В дальнейшем величинами с индексом “e”

⁶ Вывод формулы (5.62) аналогичен выводу формулы (3.54), который можно найти в Приложении D, подраздел D.2.1. Отличие заключается только в том, что при выводе формулы (5.62) используются уравнения баланса массы, содержащие источники членов. (Примеч. ред.)

будут обозначены упругие напряжения. Эти упругие напряжения всегда оказывают влияние на внутреннюю энергию. Величины с индексом “f” могут иметь влияние на внутреннюю энергию, но только посредством дополнительных параметров, подобных энтропии. Эти параметры будут введены позже.

Подставив уравнения (5.63) в уравнение (5.62) получим

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{U}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{U}_2}{\delta t} + \rho \frac{\delta_m \mathcal{U}_{12}}{\delta t} = \\
 & = \mathbf{T}_e'^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_1 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{T}_e''^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_2 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \\
 & \quad + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}_e \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \\
 & \quad + \mathbf{T}_f'^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_1 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{T}_f''^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_2 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \\
 & \quad + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}_f \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho \mathbf{q} + \\
 & \quad + \chi_{1m} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \mathcal{U}_1 \right) + \chi_{2m} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathcal{U}_2 \right).
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Такая форма уравнения баланса энергии бесполезна. Далее мы преобразуем уравнение (5.64) с целью получить так называемое приведенное уравнение баланса энергии. Идея такого преобразования обсуждалась в разделе 3.3.

5.6. Основные материальные предположения

Предположим, что давление является средним, т. е. не будем рассматривать ни супервысоких, ни супернизких давлений. Это означает, что исключаются из рассмотрения фазовые переходы из одного твердотельного состояния в другое и фазовые переходы типа *жидкость–газ*. Однако мы должны принять во внимание фазовые переходы типа *жидкость–твердое тело*. В таком случае можно предположить

$$\mathbf{T}_e' = -p_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}; \quad \mathbf{T}_e'' = -p_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}; \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0}; \quad \mathbf{Q}_e = \mathbf{0}. \tag{5.65}$$

Согласно этому допущению твердые частицы не способны формировать твердые деформируемые тела без влияния сильных внешних нагрузок. В противном случае необходимо принять во внимание девиаторную часть тензора напряжений. Таким образом, в рамках сделанных допущений компонента частиц-фибр ведет себя подобно жидкости.

С интуитивной точки зрения первые три допущения (5.65) кажутся вполне разумными. Последнее допущение (5.65) связано с упругим взаимодействием между жидкой и твердо-жидкой компонентами. Заметим, что уравнение (5.62) включает величину $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_f$. Сила $\mathbf{Q}_e$ характеризует упругое взаимодействие, и ее надо определить таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\mathbf{Q}_e \cdot (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = \frac{d\mathcal{P}}{dt}, \quad (5.66)$$

т. е. упругая сила должна иметь потенциал. Упругое взаимодействие присутствует в природе рассматриваемого явления. Действительно, связанное с движением частиц поле движущих сил следует трактовать, используя уравнение типа (5.66).

В случае бинарной среды правая часть уравнения (5.66) должна выражаться через две различные материальные производные, относящиеся к скоростям $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Эта проблема требует дополнительного исследования. В данном случае мы пренебрежем упругим взаимодействием, положив

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{0}.$$

Воспользовавшись допущениями (5.65) и приняв во внимание уравнения (5.43), приведем уравнение баланса энергии (5.64) к виду

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{U}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{U}_2}{\delta t} + \rho \frac{\delta_m \mathcal{U}_{12}}{\delta t} &= \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \Psi \frac{\delta_2 z}{\delta t} + \\ &+ \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho \mathbf{q} + \mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_1 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \\ &+ \mathbf{T}_f'^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V}_2 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}_f \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Величины Ψ и z в формуле (5.67) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{p_2}{\rho_2} - \mathcal{U}_2 \right) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \frac{p_1}{\rho_1} - \mathcal{U}_1 \right), \\ z &\equiv \ln \frac{\rho_2 \eta_2^0}{\rho_2^0 \eta_2}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

где η_2^0 и ρ_2^0 — отсчетная плотность частиц-фибр и отсчетная массовая плотность частиц-фибр, соответственно.

Кроме того, необходимо сформулировать предположения относительно структуры определяющих уравнений для сил и моментов вязкого трения.

Используем условные обозначения

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V}_1 + \nabla \mathbf{V}_1^T); \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{V}_1 + \nabla \mathbf{V}_1^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{E} \right).$$

Для тензора $\mathbf{T}'_f$ постулируем следующее определяющее уравнение:

$$\mathbf{T}'_f = 2\boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \mathbf{D} + \mathbf{t}' \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{t}' = \eta_2 \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right). \quad (5.69)$$

Здесь вектор $\mathbf{t}'$ характеризует вязкое трение между твердыми частицами и жидкостью. В первом уравнении (5.69) тензор вязкости четвертого ранга $\boldsymbol{\mu}$ должен удовлетворять следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \mathbf{a} &\geq 0, & \mathbf{a} \cdot \cdot \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0}, & \mathbf{E} \cdot \cdot \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0}, & \forall \mathbf{a}, \mathbf{c}, & \text{ где } \mathbf{c} = -\mathbf{c}^T. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Здесь $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ — тензоры второго ранга. Кроме того, если плотность частиц η_2 устремить к нулю, тензор $\boldsymbol{\mu}$ должен стать изотропным. В большинстве работ по суспензиям тензор $\boldsymbol{\mu}$ предполагается трансверсально изотропной функцией $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{D}$, где вектор $\mathbf{e}'$ определяется уравнением (5.58). Более того, традиционный подход предполагает, что различие между суспензией и обычной жидкостью лежит в структуре тензора $\boldsymbol{\mu}$ (см. введение к данной главе). Допустима возможность того, что тензор $\boldsymbol{\mu}$ может зависеть от $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{D}$. Однако такая зависимость не является ключевой в данном случае. С физической точки зрения кажется разумным предположить, что тензор $\boldsymbol{\mu}$ изотропен.

Тензор вязкости второго ранга $\boldsymbol{\mu}_1$ в уравнении (5.69) должен удовлетворять ограничениям

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{a} \geq 0, \quad \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}: |\mathbf{a}| \neq 0, \quad (5.71)$$

где $\mathbf{a}$ — вектор. Кроме того, если плотность частиц η_2 устремить к нулю, вектор $\mathbf{t}'$ должен стать нулевым. Далее предположим, что тензор $\boldsymbol{\mu}_1$ трансверсально изотропен

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \mu_1^1 \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}' + \mu_1^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}'), \quad \mu_1^1 \geq 0, \quad \mu_1^2 \geq 0, \quad (5.72)$$

где вектор $\mathbf{e}'$ определяется уравнением (5.58).

Определяющее уравнение для вязких напряжений в твердо-жидкой компоненте можно записать следующим образом:

$$\mathbf{T}''_f = \mathbf{t}'' \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{t}'' = \eta_2 \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right), \quad (5.73)$$

где тензор второго ранга $\boldsymbol{\mu}_2$ имеет такую же структуру, как и тензор $\boldsymbol{\mu}_1$ (см. уравнение (5.72)). Вектор $\mathbf{t}''$ описывает вязкое трение между твердыми частицами. Очевидно, что вектор $\mathbf{t}''$ должен обращаться в нуль при $\eta_2 = 0$.

Определяющее уравнение для тензора вязких моментных напряжений можно принять в простой форме

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{m} \times \mathbf{E}; \quad \mathbf{m} = -\eta_2 \mu_3 (\nabla \times \boldsymbol{\omega}); \quad \mu_3 \geq 0. \quad (5.74)$$

Наконец, примем следующее определяющее уравнение для силы $\mathbf{Q}_f$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_f &= 2\eta_2 \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1); \quad \boldsymbol{\mu}_{12} = \mu_{12}^1 \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}' + \mu_{12}^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}'); \\ \mu_{12}^1 &\geq 0, \quad \mu_{12}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Подстановка выражений (5.69)–(5.75) в уравнение (5.67) приводит к следующей форме уравнения баланса энергии:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{U}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{U}_2}{\delta t} + \rho \frac{\delta_m \mathcal{U}_{12}}{\delta t} &= \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \Psi \frac{\delta_2 z}{\delta t} + \\ &+ \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + 2\mathbf{D} \cdot \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \mathbf{D} + 2\eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \\ &+ \eta_2 \sum_{i=1}^2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_i \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_i \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_i \right) + \eta_2 \mu_3 |\nabla \times \boldsymbol{\omega}|^2. \end{aligned} \quad (5.76)$$

5.7. Уравнение теплопроводности.

Второй закон термодинамики

Для того чтобы сформулировать так называемое приведенное уравнение баланса энергии, необходимо определить понятия температуры, энтропии и химического потенциала. Как правило, все эти понятия предполагаются хорошо известными [34]. Однако фактически в континуальной механике для них нет удовлетворительных определений. Проблема в том, что невозможно доказать, что температура, введенная в термодинамике и статистической физике, совпадает с температурой в континуальной механике. То же самое можно сказать в отношении энтропии и химического потенциала. В дальнейшем будем использовать подход, обсуждавшийся в третьей главе. Введем новые переменные ϑ_1 , ϑ_2 , $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ такие, что

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + 2\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D} + \\
& + 2\eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \eta_2 \mu_3 |\nabla \times \boldsymbol{\omega}|^2 + \\
& + \eta_2 \sum_{i=1}^2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_i \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_i \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_i \right) = \\
& = \rho_1 \vartheta_1 \frac{\delta_1 \mathcal{H}_1}{\delta t} + \rho_2 \vartheta_2 \frac{\delta_2 \mathcal{H}_2}{\delta t}, \tag{5.77}
\end{aligned}$$

где параметры ϑ_1 и ϑ_2 назовем температурами жидкой и твердо-жидкой фракций, соответственно, а параметры $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ назовем энтропиями этих фракций. Предполагается, что функции ϑ_1 и ϑ_2 могут быть измерены посредством некоторой экспериментальной процедуры. Функции $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ должны быть заданы посредством определяющих уравнений таким образом, чтобы температуры, найденные теоретически, совпадали с температурами, измеренными в результате эксперимента. Из этого следует, что энтропия сама по себе не имеет смысла какой-либо объективной (измеримой) величины. Если мы изменим смысл температуры, то смысл энтропии также изменится. Таким образом, очевидно, что уравнение (5.77) — это скорее достоверное равенство, чем дополнительное предположение. В некотором смысле можно сказать, что правая часть уравнения (5.77) — это обозначение для левой части уравнения (5.77). Уравнение (5.77) называется уравнением теплопроводности.

Воспользовавшись разложениями

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}' + \mathbf{h}''; \quad \rho q = \rho_1 q_1 + \rho_2 q_2,$$

перепишем уравнение (5.77) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{h}' + \rho_1 q_1 + \mathcal{Q} + 2\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D} + \eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \\
& + \eta_2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) = \rho_1 \vartheta_1 \frac{\delta_1 \mathcal{H}_1}{\delta t}; \\
& \nabla \cdot \mathbf{h}'' + \rho_2 q_2 - \mathcal{Q} + \eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \\
& + \eta_2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) + \\
& + \eta_2 \mu_3 |\nabla \times \boldsymbol{\omega}|^2 = \rho_2 \vartheta_2 \frac{\delta_2 \mathcal{H}_2}{\delta t}, \tag{5.78}
\end{aligned}$$

где величина Q имеет смысл теплового обмена между жидкой и твердой жидкой компонентами.

Уравнение (5.77) следует из уравнений (5.78). Эквивалентность уравнения (5.77) и системы (5.78) обусловлена наличием неопределенной величины Q . Заменяя уравнение (5.77) системой двух уравнений (5.78), можно сформулировать второй закон термодинамики в форме двух неравенств.

Количество теплоты, которое накапливается в каждой компоненте, регулируется тепловым обменом Q . Тепловые потоки подчиняются закону Фурье–Стокса

$$\mathbf{h}' = \kappa_1 \nabla \vartheta_1; \quad \mathbf{h}'' = \kappa_2 \nabla \vartheta_2; \quad (5.79)$$

$$Q = -\kappa (\vartheta_1 - \vartheta_2); \quad \kappa_1 \geq 0, \quad \kappa_2 \geq 0, \quad \kappa \geq 0,$$

где κ_1 , κ_2 и κ — коэффициенты теплопроводности.

Неравенства (5.79) не противоречат второму закону термодинамики⁷, который можно сформулировать в форме системы двух неравенств Клаузиуса–Дюгема (см. разд. 3.4),

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho_1 \mathcal{H}_1 dV - \int_{(V)} \left[\frac{\rho_1 q_1}{\vartheta_1} + \frac{Q}{\vartheta_2} \right] dV - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot \left[\frac{\mathbf{h}'}{\vartheta_1} - \rho_1 \mathbf{V}_1 \mathcal{H}_1 \right] dS \geq 0; \quad (5.80)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho_2 \mathcal{H}_2 dV - \int_{(V)} \left[\frac{\rho_2 q_2}{\vartheta_2} - \frac{Q}{\vartheta_1} \right] dV - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot \left[\frac{\mathbf{h}''}{\vartheta_2} - \rho_2 \mathbf{V}_2 \mathcal{H}_2 \right] dS \geq 0. \quad (5.81)$$

В локальной форме неравенства (5.80), (5.81) записываются следующим

⁷ Отношение П. А. Жилина ко второму закону термодинамики со временем изменялось. Все трактовки второго закона термодинамики, относящиеся к различным временным периодам, отражены в данной книге. В первой главе (разд. 1.8), во второй главе (подразд. 2.5.3) и в третьей главе (разд. 3.4) изложены взгляды последних лет (2000–2005 гг.), которые существенно отличаются от общепринятых. В шестой главе (подразд. 6.5.6), время написания которой в точности не известно, развивается подход К. Трусделла, основанный на использовании второго закона термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. В плане отхода от традиционных трактовок данная глава занимает некоторое промежуточное положение. Здесь для получения соотношений Коши–Грина используется тот же подход, что и в третьей главе. Второй закон термодинамики формулируется в виде неравенств Клаузиуса–Дюгема, но, в отличие от традиционного подхода, эти неравенства не используются для получения определяющих уравнений. (*Примеч. ред.*)

образом:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{H}_1}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta_1} (\nabla \cdot \mathbf{h}' + \rho_1 \mathbf{q}_1 + \mathcal{Q}) + \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) - \\ - \chi_{2m} \mathcal{H}_1 + \frac{1}{\vartheta_1^2} \mathbf{h}' \cdot \nabla \vartheta_1 \geq 0; \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{H}_2}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta_2} (\nabla \cdot \mathbf{h}'' + \rho_2 \mathbf{q}_2 - \mathcal{Q}) + \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) + \\ + \chi_{2m} \mathcal{H}_2 + \frac{1}{\vartheta_2^2} \mathbf{h}'' \cdot \nabla \vartheta_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Воспользовавшись уравнениями (5.78), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta_1} \left[2\mathbf{D} \cdots \boldsymbol{\mu} \cdots \mathbf{D} + \eta_2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) + \right. \\ \left. + \eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \right] + \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$+ \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) - \chi_{2m} \mathcal{H}_1 + \frac{1}{\vartheta_1^2} \mathbf{h}' \cdot \nabla \vartheta_1 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta_2} \left[\eta_2 (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \right. \\ \left. + \eta_2 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) + \eta_2 \mu_3 |\nabla \times \boldsymbol{\omega}|^2 \right] + \\ + \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) + \chi_{2m} \mathcal{H}_2 + \frac{1}{\vartheta_2^2} \mathbf{h}'' \cdot \nabla \vartheta_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Неравенства (5.84) и (5.85) являются необходимыми ограничениями. Они должны выполняться всегда и для всех процессов.

Если пренебречь прилипанием частиц жидкости к твердым частицам, т. е. положить $\chi = 0$, то введенные ранее ограничения (5.70), (5.71) и (5.74) для вязкостей, а также (5.79) для теплопроводностей являются достаточными условиями выполнения неравенств (5.84) и (5.85).

В случае $\chi \neq 0$ неравенства (5.84) и (5.85) содержат слагаемые $\chi \mathcal{H}_1$ и $\chi \mathcal{H}_2$. С формальной точки зрения неочевидно, что эти неравенства всегда удовлетворяются. Тем не менее даже в этом случае неравенства (5.84) и (5.85) должны выполняться без существенных ограничений.

5.8. Приведенное уравнение баланса энергии. Соотношения Коши–Грина

Воспользовавшись уравнением (5.77), приведем уравнение (5.76) к виду

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{U}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{U}_2}{\delta t} + \rho \frac{\delta_m \mathcal{U}_{12}}{\delta t} = \\ = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_1 \vartheta_1 \frac{\delta_1 \mathcal{H}_1}{\delta t} + \rho_2 \vartheta_2 \frac{\delta_2 \mathcal{H}_2}{\delta t} + \rho_2 \Psi \frac{\delta_2 z}{\delta t}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Уравнение баланса энергии, записанное в форме (5.86), называется приведенным уравнением баланса энергии. Из уравнения (5.86) становится ясным, как можно задать внутренние энергии $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_{12}$. Простейшая форма соответствующих определяющих уравнений имеет вид

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1(\rho_1, \mathcal{H}_1); \quad \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2(\rho_2, \mathcal{H}_2, z); \quad \mathcal{U}_{12} = \text{const}. \quad (5.87)$$

Подстановка выражений (5.87) в уравнение (5.86) позволяет получить соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1^2 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1}; & p_2 &= \rho_2^2 \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \rho_2}; \\ \vartheta_1 &= \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \mathcal{H}_1}; & \vartheta_2 &= \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \mathcal{H}_2}; & \Psi &= \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Согласно последнему уравнению (5.88) функция Ψ играет роль химического потенциала⁸. Заметим, что представление функции Ψ в виде производной от внутренней энергии фактически является ограничением, наложенным

⁸ Функция Ψ , которая согласно последнему уравнению (5.88) играет роль химического потенциала, отличается от химического потенциала, используемого в литературе по теории смесей. Она также отличается от химического потенциала, который был введен в третьей главе (см. разд. 3.3). Различие подходов к определению химического потенциала, развитых в третьей и пятой главах, означает не изменение взглядов П. А. Жилина на данный вопрос, а его убежденность в том, что химический потенциал можно вводить разными способами. Химический потенциал, так же как энтропия и внутренняя энергия, является неизмеримой величиной. Поэтому никакие физические эксперименты не позволят ответить на вопрос о том, какой способ введения химического потенциала является правильным. Можно обсуждать только целесообразность использования того или иного определения химического потенциала при построении конкретной модели среды. В третьей главе химический потенциал ψ определен как величина, сопряженная плотности частиц η ; физический смысл такого химического потенциала ассоциируется с причиной изменения числа частиц. Химический потенциал Ψ , введенный в рассмотрение в пятой

на зависимость внутренней энергии от переменной z . Действительно, согласно уравнениям (5.68) и (5.88), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial z} = & \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho_2 \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \rho_2} - \mathcal{U}_2 \right) - \\ & - \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \rho_1 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1} - \mathcal{U}_1 \right). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Уравнение (5.89) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных для внутренней энергии. Его можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial x} = & \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathcal{U}_2 \right) - \\ & - \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \rho_1 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1} - \mathcal{U}_1 \right), \quad x \equiv \ln \frac{\rho_2}{\rho_2^0}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Вводя новые переменные

$$\alpha = \frac{z + x}{2} = \ln \left[\frac{\rho_2}{\rho_2^0} \sqrt{\frac{\eta_2^0}{\eta_2}} \right]; \quad \beta = \frac{z - x}{2} = \ln \sqrt{\frac{\eta_2^0}{\eta_2}}; \quad z = \ln \frac{\rho_2 \eta_2^0}{\rho_2^0 \eta_2}, \quad (5.91)$$

вместо уравнения (5.90) получаем

$$\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \alpha} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathcal{U}_2 \right) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \rho_1 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1} - \mathcal{U}_1 \right). \quad (5.92)$$

Соотношения Коши–Грина (5.88) принимают вид

$$\begin{aligned} p_1 = \rho_1^2 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1}; \quad p_2 = \rho_2 \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \alpha}; \\ \vartheta_1 = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \mathcal{H}_1}; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \mathcal{H}_2}; \quad \Psi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

где внутреннюю энергию $\mathcal{U}_2$ следует считать функцией α , β , $\mathcal{H}_2$. Кроме того, эта функция должна удовлетворять условию (5.92).

главе, является сопряженным величине z и ассоциируется с причиной изменения массы частиц-фибр; он относится к твердо-жидкой компоненте. В принципе, при построении модели бинарной среды можно было бы использовать определение химического потенциала, данное в третьей главе. В этом случае химический потенциал относился бы к жидкой компоненте и имел бы смысл причины изменения числа частиц жидкости. (*Примеч. ред.*)

Введем вместо внутренних энергий свободные энергии

$$\mathcal{F}_1(\rho_1, \vartheta_1) = \mathcal{U}_1 - \vartheta_1 \mathcal{H}_1; \quad \mathcal{F}_2(\rho_2, \vartheta_2, z) = \mathcal{U}_2 - \vartheta_2 \mathcal{H}_2. \quad (5.94)$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (5.86) примет вид

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \mathcal{F}_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \mathcal{F}_2}{\delta t} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} - \rho_1 \mathcal{H}_1 \frac{\delta_1 \vartheta_1}{\delta t} - \rho_2 \mathcal{H}_2 \frac{\delta_2 \vartheta_2}{\delta t} + \rho_2 \Psi \frac{\delta_2 z}{\delta t}, \quad (5.95)$$

а соотношения Коши–Грина (5.88) можно придать форму

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1^2 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \rho_1}; & p_2 &= \rho_2^2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \rho_2}; \\ \mathcal{H}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \vartheta_1}; & \mathcal{H}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \vartheta_2}; & \Psi &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

В соответствии с последними уравнениями (5.88) и (5.96) энтропия $\mathcal{H}_2$ не зависит от переменной z . Фактически, имеем

$$\Psi = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta_2 \mathcal{H}_2}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial z} = 0.$$

Соотношения Коши–Грина (5.93), записанные через свободную энергию, для величин p_1 , $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ имеют вид (5.96), а для величин p_2 и Ψ выглядят следующим образом:

$$p_2 = \rho_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha}; \quad \Psi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \beta}. \quad (5.97)$$

Напомним, что давление p_2 характеризует взаимодействие между фибрами. Для рассматриваемых суспензий⁹ можно принять $p_2 = 0$. В этом случае, согласно уравнениям (5.93), (5.97), $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{F}_2$ не зависят от α . Следовательно, внутреннюю энергию $\mathcal{U}_2$ можно найти из уравнения (5.92) следующим образом:

$$\mathcal{U}_2 = \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \rho_1 \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \rho_1} - \mathcal{U}_1 \right). \quad (5.98)$$

⁹ Уравнения, полученные ранее, представляют собой общую теорию, применимую к очень широкому классу бинарных сред. При использовании этой теории применительно к смеси конкретных веществ необходимо дополнить ее физическими гипотезами, отражающими свойства компонент смеси и характер их взаимного влияния. Далее рассматриваются волокнистые суспензии с небольшой концентрацией частиц-фибр; принимается ряд справедливых для этого вида суспензий физических допущений, позволяющих существенно упростить и конкретизировать теорию. (*Примеч. ред.*)

Кроме того, соотношения Коши–Грина принимают вид

$$p_1 = \rho_1^2 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \rho_1}; \quad p_2 = 0; \quad \mathcal{H}_1 = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \vartheta_1}; \quad \mathcal{H}_2 = -\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \vartheta_2}; \quad \Psi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \beta}. \quad (5.99)$$

Здесь функция Ψ имеет точный смысл химического потенциала. Напомним, что химический потенциал обычно определяется как производная от свободной энергии (или от какого-либо другого термодинамического потенциала) по числу частиц в рассматриваемой системе. Однако согласно уравнениям (5.68) и (5.98) химический потенциал Ψ равен нулю¹⁰. Поэтому эффект прилипания частиц жидкости к фибрам можно проигнорировать. Конечно, такое заключение справедливо только в рамках предположения, что твердые частицы не могут формировать деформируемые тела. Это означает, что расстояния между фибрами слишком велики, так что силы межчастичного взаимодействия можно не принимать во внимание. Таким образом, можно принять следующие представления:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(\rho_1, \vartheta_1), \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(\vartheta_2). \quad (5.100)$$

Введем новую переменную

$$\zeta = \frac{\rho_1^0}{\rho_1} - b, \quad b \equiv \frac{\rho_1^0}{\rho_1^*} \simeq 0,7 \div 0,9; \quad \zeta = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_1^*, \quad (5.101)$$

где b — эмпирическая константа; ρ_1^* — верхний предел массовой плотности первой компоненты и ρ_1^0 — соответствующая равновесная массовая плотность при $p = 0$ и $\vartheta_1 = 0$. Конечно, не принимаются во внимание квантовые эффекты. Это означает, что в рассматриваемом случае температура далека от абсолютного нуля. С использованием переменной ζ определяющие уравнения (5.99) можно записать следующим образом:

$$p_1 = -\frac{\partial \rho_1^0 \mathcal{F}_1}{\partial \zeta}, \quad p_2 = 0, \quad \mathcal{H}_1 = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \vartheta_1}, \quad \mathcal{H}_2 = -\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \vartheta_2}, \quad \Psi = 0. \quad (5.102)$$

Параметр ρ_1^0 будет подробно обсуждаться в следующем разделе. В заключение подчеркнем, что исходя из полученных результатов, функцию χ в уравнении (5.43) можно не учитывать.

¹⁰ Равенство нулю химического потенциала Ψ является непосредственным следствием предположения $p_2 = 0$. (Примеч. ред.)

5.9. Определяющее уравнение для давления

Определяющее уравнение для давления внутри жидкости должно быть сформулировано на основании известных экспериментальных фактов. Обычно при моделировании течения суспензий в процессе заливки используется подход, основанный на применении условий несжимаемости (см., например, [105, 106, 109, 110, 115, 125]). Кроме того, в работах теоретического характера стадия отвердевания не исследовалась.

Для того чтобы учесть возможность отвердевания, необходимо модифицировать модель несжимаемой жидкости. Отправным пунктом является определяющее уравнение для давления, предложенное в подразделе 3.8.2,

$$p = p_0 \frac{n}{m-n} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[\left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^m - \left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^n \right] + \frac{c\vartheta_1}{\zeta^k}; \quad (5.103)$$

$$1 < k < n < m, \quad p_0 > 0,$$

где $p \equiv p_1$ — давление в компоненте 1, а параметры p_0 , m , n , k , c , b (постоянные величины) следует определять экспериментально. С физической точки зрения ясно, что константы m , n , k должны быть нечетными целыми числами.

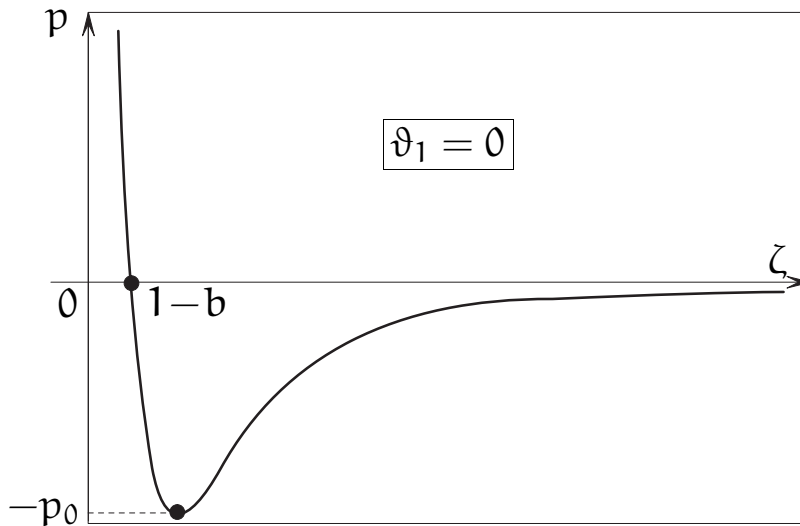


Рис. 5.3. Качественное изменение давления в твердой фазе

Обсудим главные свойства определяющего уравнения (5.103). Во-первых, если температура $\vartheta_1 = 0$, то при давлении $p = 0$ имеет место равенство $\zeta = 1 - b$ или, что то же самое, $\rho_1 = \rho_1^0$ (рис. 5.3). Таким образом, массовая

плотность ρ_1^0 соответствует устойчивому равновесному состоянию материала в твердой фазе. Смысл константы p_0 в уравнении (5.103) следует из выражения

$$p_{\min} = -p_0, \quad \vartheta_1 = 0.$$

Таким образом, p_0 — это предел прочности на разрыв материала в твердом состоянии при низкой температуре. Важно отметить, что у рассматриваемого материала есть конечный предел прочности на разрыв. При давлении ниже $(-p_0)$ материал разрушается. При давлении выше $(-p_0)$ материал может существовать только в твердом состоянии.

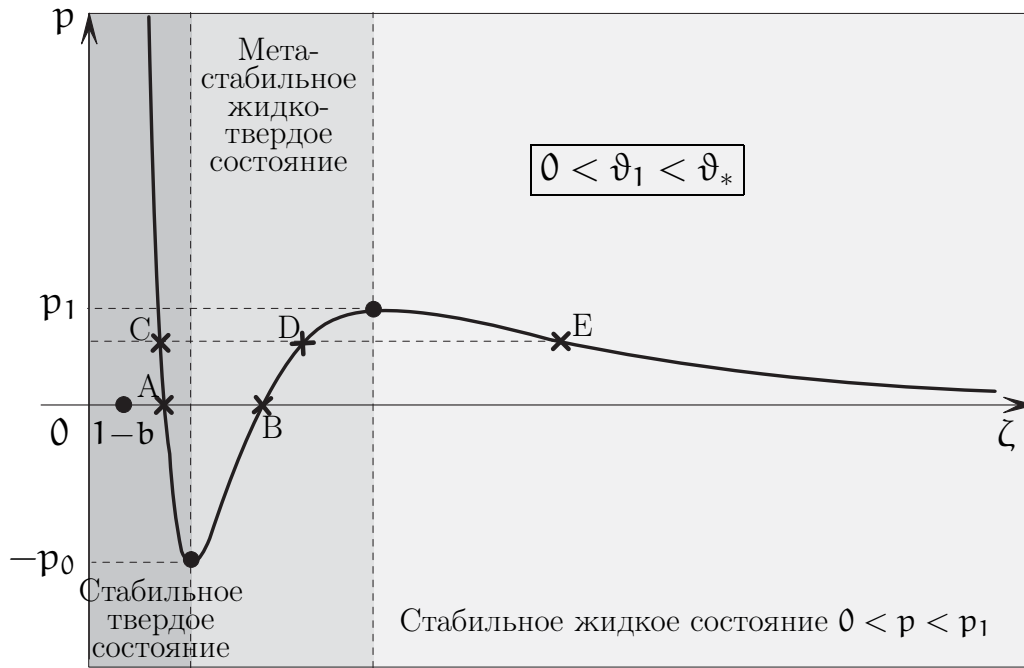
Исследуем случай, когда $0 < \vartheta_1 < \vartheta_*$ (температура ϑ_* будет введена позже). Диаграмма давления, соответствующая уравнению (5.103), представлена на рис. 5.4. Здесь мы имеем два равновесных состояния с безразмерными плотностями ζ_1 и ζ_2 , обозначенные точками A и B , соответственно, $(1 - b < \zeta_1 < \zeta_2)$. Величины ζ_1 и ζ_2 определяются как корни уравнения

$$p_0 \frac{n}{m-n} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[\left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^m - \left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^n \right] + \frac{c\vartheta_1}{\zeta^k} = 0, \quad (5.104)$$

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_*.$$

Первый корень ζ_1 соответствует устойчивому равновесному состоянию материала в твердой фазе. Второй корень ζ_2 соответствует неустойчивому равновесному состоянию материала. Первая зона на рис. 5.4 соответствует устойчивой твердой фазе материала. Давление в этой зоне определяется уравнением состояния (5.103), причем зависимость давления от плотности должна быть проверена экспериментально. Вторая зона на рис. 5.4 соответствует так называемому метастабильному состоянию материала. В этой зоне поведение материала определяется скорее уравнениями движения, а не уравнением состояния. Подчеркнем, что в этой зоне нет статических решений или, что то же самое, есть бесконечно много статических решений. Кроме того, в этой зоне имеется смесь двух фазовых состояний материала — жидкого и твердого. Третья зона на рис. 5.4 соответствует устойчивой жидкой фазе материала. В этой фазе материал может существовать только при давлениях, лежащих в интервале $0 < p < p_1$, где p_1 отмечено на рис. 5.4.

Предположим, что диаграмма, представленная на рис. 5.4, соответствует температуре полимеризации ϑ_p при давлении p_1 . Пусть температура ϑ_p будет постоянной, а давление p меньше, чем p_1 . В таком случае имеется три равновесных состояния, обозначенных на рис. 5.4 точками C , D и E . Два

Рис. 5.4. Качественное изменение давления для $0 < \vartheta_1 < \vartheta_*$

из этих состояний (точки C , E) являются устойчивыми, третье равновесное состояние (точка D) неустойчиво. Будет ли реализовываться одно из двух устойчивых состояний, и какое именно, или будет смесь двух фаз — зависит от начальных условий.

Если температура ϑ_1 возрастает от 0 до значения $\vartheta_1 < \vartheta_*$, тогда предел прочности материала на разрыв p_ϑ убывает до значения

$$p_\vartheta = -p_0 \frac{n}{k} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[\frac{m-k}{m-n} \left(\frac{1-b}{\zeta_s(\vartheta_1)} \right)^m - \frac{n-k}{m-n} \left(\frac{1-b}{\zeta_s(\vartheta_1)} \right)^n \right], \quad (5.105)$$

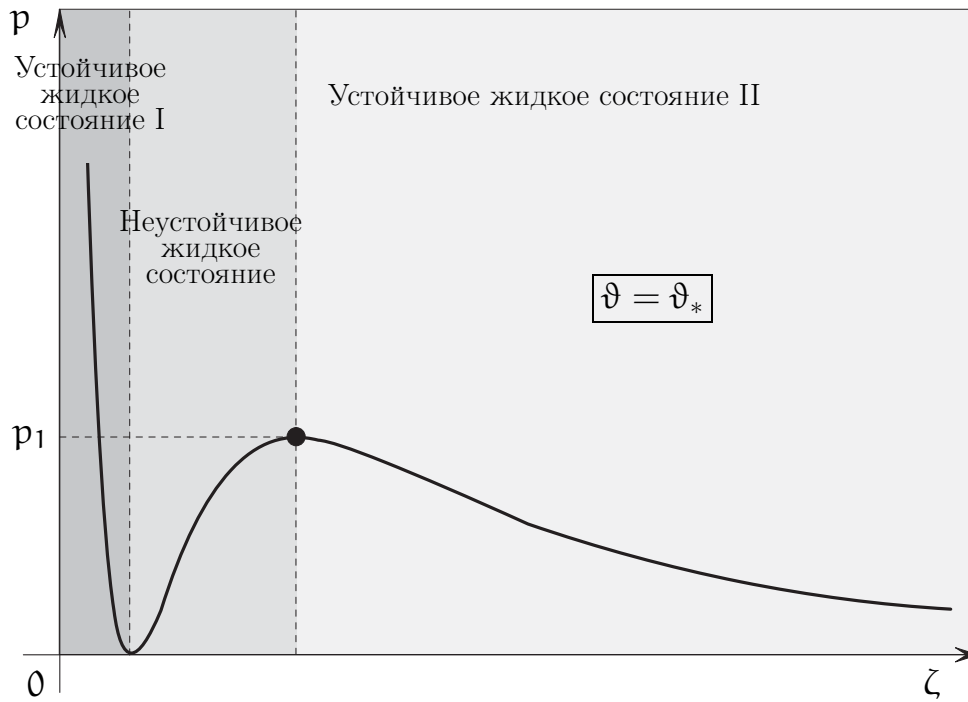
где $\zeta_s(\vartheta_1)$ — наименьший корень уравнения,

$$p_0 \frac{n}{m-n} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[m \left(\frac{1-b}{\zeta_s} \right)^m - n \left(\frac{1-b}{\zeta_s} \right)^n \right] + k \frac{c\vartheta_1}{\zeta_s^k} = 0, \quad (5.106)$$

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_*.$$

Предел прочности материала на разрыв p_ϑ должен находиться экспериментально. Полимеризация жидкой взвеси возможна только при $\vartheta_1 \leq \vartheta_*$.

Определим критическую температуру ϑ_* . Случай $\vartheta = \vartheta_*$ представлен на рис. 5.5. При нулевом давлении существует только одно равновесное состояние. Материал имеет три различных жидких фазы. Если давление p лежит в области $0 < p < p_1$, материал имеет два различных жидких состояния.

Рис. 5.5. Качественное изменение давления для $\vartheta = \vartheta_*$

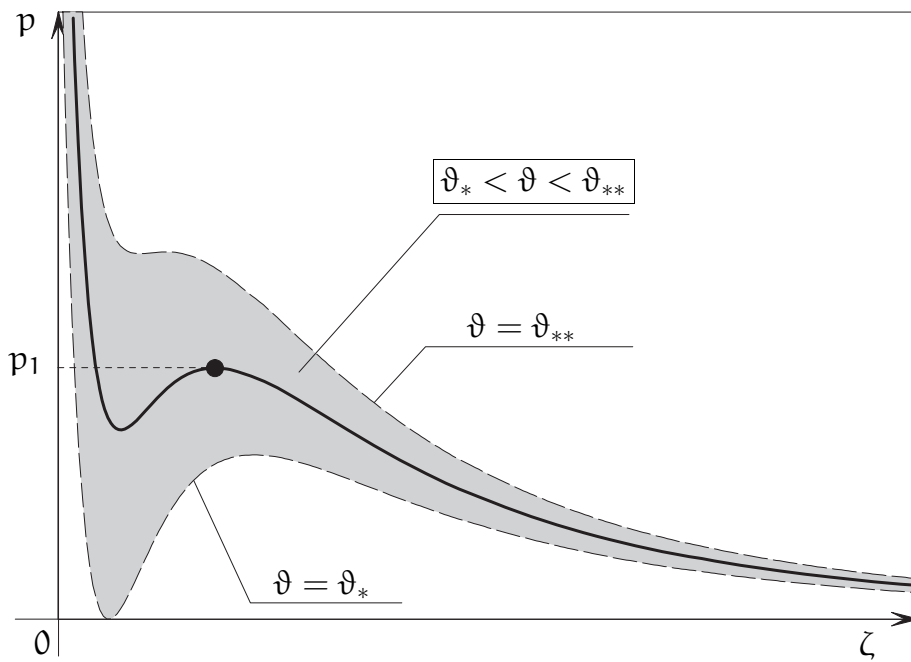
Первая и третья зоны на рис. 5.5 соответствуют двум разным устойчивым жидким фазам. Вторая, промежуточная зона характеризует неустойчивое состояние, которое соответствует смеси двух различных жидких фаз. Если давление p выше p_1 , есть только одна жидкая фаза. Для того чтобы найти плотность ζ_* , соответствующую этому состоянию, и критическую температуру ϑ_* , необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_0 \frac{n}{m-n} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[\left(\frac{1-b}{\zeta_*} \right)^m - \left(\frac{1-b}{\zeta_*} \right)^n \right] + \frac{c\vartheta_*}{\zeta_*^k} &= 0; \\ p_0 \frac{n}{m-n} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left[m \left(\frac{1-b}{\zeta_*} \right)^m - n \left(\frac{1-b}{\zeta_*} \right)^n \right] + k \frac{c\vartheta_*}{\zeta_*^k} &= 0. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Решение этой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \zeta_* &= (1-b) \left(\frac{m-k}{n-k} \right)^{1/(m-n)}; \\ \frac{c\vartheta_*}{(1-b)^k} &= p_0 \frac{n}{m-k} \left(\frac{m}{n} \right)^{n/(m-n)} \left(\frac{n-k}{m-k} \right)^{(n-k)/(m-n)}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Поскольку величины ζ_* и ϑ_* экспериментально измеримы, уравнения (5.108) можно использовать для определения констант m , n , k . Подчеркнем,

Рис. 5.6. Качественное изменение давления для $\vartheta_* < \vartheta_1 < \vartheta_{**}$

что если температура ϑ_1 выше ϑ_* , то, согласно определяющему уравнению (5.103), отвердевание материала невозможно. Критическую температуру ϑ_* можно назвать температурой плавления.

На рис. 5.6 представлена диаграмма давления для случая $\vartheta_* < \vartheta_1 < \vartheta_{**}$. В этом температурном диапазоне материал может существовать в двух жидких фазовых состояниях. Если температура ϑ_1 выше ϑ_{**} , материал имеет только одну жидкую фазу. Напомним, что в данной работе не рассматривается газообразная фаза материала. Различие между газом и жидкостью заключается в том, что для газа силы притяжения с увеличением ζ убывают медленнее, чем для жидкости. Температуру ϑ_{**} можно найти из уравнений

$$\frac{dp}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d^2p}{d\zeta^2} = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями (5.102) и (5.103), получим выражение для свободной энергии

$$\begin{aligned} \rho_1^0 \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 & \left[-\frac{\zeta}{m-1} \left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^m + \frac{\zeta}{n-1} \left(\frac{1-b}{\zeta} \right)^n \right] - \\ & - \frac{1}{k-1} \frac{c\vartheta_1}{\zeta^{k-1}} + \psi(\vartheta_1), \end{aligned} \quad (5.109)$$

где функция $\psi(\vartheta_1)$ должна быть определена для конкретного материала.

Функцию $\psi(\vartheta_1)$ можно найти из уравнения

$$-\frac{\partial \psi(\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} = c_\varepsilon \ln \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0},$$

где c_ε — теплоемкость при постоянной деформации.

Заключение

Данная глава посвящена выводу основных уравнений, описывающих течение волокнистой суспензии в рамках микрополярной модели бинарной среды.

Основными неизвестными рассматриваемой задачи являются ρ_1 и η_2 , ρ_2 . Для этих функций имеем систему уравнений (5.43)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= -\chi_{2m}; & \frac{\delta_2 \eta_2}{\delta t} + \eta_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 &= 0; \\ \frac{\delta_2}{\delta t} \ln \frac{\rho_2}{\eta_2} &= \frac{\chi_{2m}}{\rho_2}, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где функция χ_{2m} должна быть каким-то образом определена. В простейшем случае можно допустить, что $\chi_{2m} = 0$.

Уравнение движения жидкой компоненты — это первое уравнение системы (5.48). С учетом определяющих уравнений (5.69), (5.75), получаем

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 + 2\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}) + \nabla \times \left[\eta_2 \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) \right] + \\ + \eta_2 \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + \rho_1 \mathbf{F}_1 = \rho_1 \frac{\delta_1 \mathbf{V}_1}{\delta t} - \chi_{2m} \mathbf{V}_1. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Уравнение трансляционного движения твердо-жидкой компоненты имеет вид

$$\begin{aligned} -\nabla p_2 + \nabla \times \left[\eta_2 \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) \right] + \\ + \eta_2 \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + \rho_2 \mathbf{F}_2 = \rho_2 \frac{\delta_2 \mathbf{V}_2}{\delta t} + \chi_{2m} \mathbf{V}_2, \end{aligned} \quad (5.112)$$

где парциальное давление p_2 можно считать равным нулю или задать определяющим уравнением, подобным уравнению (5.103).

Уравнение (5.54) для спинорного движения фибр можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\eta_2 \mu_3 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - 2\eta_2 \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_2 \right) - \\ & - 2\eta_2 \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_1 \right) + \rho_2 \mathbf{L} = \rho_2 \frac{\delta_2}{\delta t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \chi_{2m} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (5.113)$$

К приведенным ранее уравнениям (5.110)–(5.113) следует добавить уравнения теплопроводности (5.78) вместе с определяющими уравнениями (5.79), в которых можно положить $\kappa_2 = 0$.

Для того чтобы получить окончательную формулировку основных уравнений, нужно определить объемные силы $\rho_1 \mathbf{F}_1$, $\rho_2 \mathbf{F}_2$ и объемный момент $\rho_2 \mathbf{L}$. Частично они определяются внешними полями, причем обычно это гравитационное поле, которое не создает внешний момент $\rho_2 \mathbf{L}$. Помимо этого, объемные силы и моменты могут возникать из-за наличия ограничивающих стен. Предположим, что объем литейной формы V ограничен поверхностью S . Пусть эта поверхность состоит из двух частей $S = S_0 \cup S_1$, где S_0 — твердая стена и S_1 — входное отверстие, через которое смесь втекает в полость V . Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S , направленный внутрь области V . Пусть s — расстояние вдоль нормали $\mathbf{n}$. Предположим, что воздействие стены может быть описано в терминах внешнего силового поля, которое должно быть учтено посредством объемных сил. Определим объемные силы следующим образом:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{g} + F_0 \left[\left(\frac{s}{l} \right)^{-p} - \left(\frac{s}{l} \right)^{-q} \right] \mathbf{n}; \quad p > q > 0; \quad s \geq 0, \quad (5.114)$$

где $l > 0$ — очень малая константа, имеющая размерность длины.

Заметим, что вообще стены могут создавать не только объемные силы, но и объемный момент, действующий на твердые частицы. Однако мы пренебрегаем этим моментом.

Смесь в жидком состоянии вливается в полость через входное отверстие S_1 и занимает некоторую область V_* , которая изменяется во времени. Граница V_* — это поверхность S_* , которая состоит из трех частей $S_* = S_1 \cup S_0^* \cup S_f$, где S_0^* — та часть S_0 , которая находится в контакте со смесью, и S_f — свободная поверхность смеси. Для всех этих поверхностей нужно сформулировать граничные условия, которые можно представить в традиционной форме для скоростей и давления.

Сравним предложенный подход с существующими теориями. Для этого рассмотрим упрощающие предположения, которые принимаются в существующих теориях. Проделаем это поэтапно.

Первый шаг является простейшим. Предположим, что

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \text{const}, \quad \chi_{2m} = 0. \quad (5.115)$$

В случае $\chi = 0$ согласно уравнениям (5.110)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta t} + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= 0; & \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta t} + \rho_2 \nabla \cdot \mathbf{V}_2 &= 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_m) &= 0, \end{aligned} \quad (5.116)$$

где

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho \mathbf{V}_m = \rho_1 \mathbf{V}_1 + \rho_2 \mathbf{V}_2.$$

Следующее допущение традиционной теории заключается в отсутствии проскальзывания между твердыми частицами и жидкостью. С физической точки зрения это означает, что нормы тензоров вязкого трения стремятся к бесконечности

$$\|\boldsymbol{\mu}_1\| \rightarrow \infty, \quad \|\boldsymbol{\mu}_2\| \rightarrow \infty, \quad \|\boldsymbol{\mu}_{12}\| \rightarrow \infty. \quad (5.117)$$

Так как нормы векторов $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$ и $\mathbf{Q}$ должны быть ограничены, в соответствии с определяющими уравнениями (5.69), (5.73) и (5.75) получим кинематические соотношения

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_m \equiv \mathbf{V}, \quad 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.118)$$

которые обычно принимаются, за исключением, быть может, последнего условия. Однако это условие также должно быть выполнено. С учетом принятых предположений вместо уравнений движения (5.111)–(5.113) получим

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 + 2\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}) + \nabla \times \mathbf{t}' + \mathbf{Q} + \rho_1 \mathbf{F}_1 &= \rho_1 \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}, \\ -\nabla p_2 + \nabla \times \mathbf{t}'' - \mathbf{Q} + \rho_2 \mathbf{F}_2 &= \rho_2 \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}, \quad p_2 \simeq 0, \\ -\eta_2 \mu_3 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - 2\mathbf{t} + \rho_2 \mathbf{L} &= \rho_2 \frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (5.119)$$

где векторы $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$, $\mathbf{Q}$ более не определяются уравнениями состояния. Систему (5.119) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 + 2\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}) + \nabla \times \mathbf{t} + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}; & \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}, \\ -\eta_2 \mu_3 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - 2\mathbf{t} + \rho_2 \mathbf{L} &= \rho_2 \frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Последнее уравнение позволяет выразить вектор $\mathbf{t}$ через скорость $\mathbf{V}$ и ее производные. Вообще говоря, дальнейшие упрощения невозможны. Однако уравнения (5.120) сложнее, чем те, которые используются в традиционной теории.

Чтобы сделать еще один шаг по направлению к традиционной теории, следует предположить, что

$$\mu_3 = 0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \mathbf{0}. \quad (5.121)$$

Условие $\mu_3 = 0$ — гипотеза разбавленной смеси; условие $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ — это гипотеза безынерционности частиц. Теперь имеются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 + 2\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}) + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}; \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Введя единичный вектор $\mathbf{e}'$, связанный с осью симметрии фибры (см. формулы (5.58)), получим

$$\frac{\delta \mathbf{e}'}{\delta t} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{e}' = \frac{1}{2} (\mathbf{e}' \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}'). \quad (5.123)$$

Последнее ограничение — это предположение несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0. \quad (5.124)$$

Это условие означает, что давление более не определяется уравнением состояния, а должно находиться из уравнений движения. Таким образом, фазовые переходы в смеси исключаются из рассмотрения. Заметим, что условие $\rho = \text{const}$ не следует из уравнения (5.124).

Таким образом, после всех предположений получим систему уравнений (5.122)–(5.124). К этим уравнениям следует добавить утверждение, что тензор вязкости $\boldsymbol{\mu}$ — трансверсально изотропная функция единичного вектора

$\mathbf{e}'$ и тензора $\mathbf{D}$. Этот вопрос здесь не обсуждается, так как решение данной задачи хорошо известно.

Очевидно, что система (5.122)–(5.124) не совсем соответствует системе уравнений традиционной теории (см. введение к данной главе). Единственное отличие заключается в том, что уравнение (5.123) не совпадает с уравнением (5.13). Для того чтобы это различие стало более ясным, перепишем уравнение (5.13) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}' &= \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \mathbf{e}' \times \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}' \right) \times \mathbf{e}', \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T).\end{aligned}\tag{5.125}$$

Какое уравнение, (5.123) или (5.125), более правильное? Точный ответ не известен. С одной стороны, кажется, что следует отдать предпочтение уравнению (5.125), поскольку оно содержит параметры частицы. С другой стороны, это кажется странным. Действительно, если предположить, что нет скольжения между твердыми частицами и жидкостью, вращения твердых частиц и жидкости должны быть одинаковыми. Это означает, что форма частицы не должна быть важна. Это верно для уравнения (5.123), но неверно для уравнения (5.125). Заметим, что уравнение (5.123) можно вывести многими способами.

Глава 6

Построение модели электромагнитного поля с позиций рациональной механики¹

Введение

Движения видимых макротел, например планет, и электромагнитные явления знакомы людям с незапамятных времен. Тем не менее теоретические описания этих явлений разработаны с различной степенью полноты и основаны на различных фундаментах. Интенсивные исследования в области электромагнетизма начались в конце XVIII в. К середине XIX в. уже были экспериментально установлены основные законы электромагнетизма, включая закон электромагнитной индукции. Были предложены и теоретические модели, но все они носили описательный характер, т. е. действовали только в частных ситуациях. Положение существенно изменилось после разработки Дж. Максвеллом концепции электромагнитного поля, которая без особых изменений сохранилась до настоящего времени. Можно сказать, что к 1879 г. уже полностью сложилась новая область физики, получившая название электродинамики. Эта область физики включала огромный набор экспериментальных фактов, многие из которых, но далеко не все, успешно объяснялись теорией Максвелла.

Было предпринято много попыток дать механистическое истолкование электромагнитных явлений, но все они при тщательном рассмотрении оказались неудачными. Так сложилась ситуация, которую М. Планк описал следующими словами [135]: “Механическим явлениям, или движениям материальных точек, противостоит как нечто единое, ясно от них отделенное, целое, вся совокупность электрических и магнитных, или электродинамических, явле-

¹ Часть материала данной главы опубликована в статье [134]: Р. А. Zhilin “The main direction of the development of mechanics for XXI century” (Lecture prepared for presentation at XXVIII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia, 2000). Полностью материал этой главы публикуется впервые. (*Примеч. ред.*)

ний. Этими двумя областями исчерпывается вся физика, так как все остальные ее части — акустика, оптика и теплота — могут быть вполне сведены на механику и электродинамику. Окончательное же объединение этих двух последних классов явлений, что представило бы собой увенчание здания теоретической физики, еще придется предоставить будущему”. Данная цитата дает основание полагать, что М. Планк придавал важное значение объединению механики и электродинамики. Эта задача остается нерешенной и в настоящее время.

6.1. Механика и электромагнетизм

Между механикой, с одной стороны, и электродинамикой, с другой стороны, существуют огромные различия. Строго говоря, эти две науки нельзя сопоставлять. В самом деле, механика, как наука, — это не теория каких бы то ни было явлений Природы. Механика — это метод исследования Природы. Мнение о том, что механика имеет ограниченную область применимости, основано, главным образом, на ее фактической неспособности в настоящее время описать целый ряд явлений, известных в экспериментальной физике. Тем не менее никто не доказал, что механика принципиально не способна описать эти явления. Электродинамика, в противоположность механике, — это теория определенного класса явлений Природы. Поэтому на самом деле речь должна идти не об объединении механики и электродинамики, а о включении электродинамики в механику, т. е. об описании электромагнитных явлений на основе принципов механики. Современная теоретическая физика признала эту задачу неразрешимой. Уравнения Максвелла рассматриваются чем-то вроде божественного откровения, не требующего обоснования. Последующее развитие физики все дальше уводило ее от классической механики. В настоящее время главную роль исполняет квантовая физика, которая объявила о “решительном разрыве с классической механикой”.

Следует подчеркнуть, что включение электродинамики в механику менее всего диктуется намерением возвести “венец теоретической физики” (см. [136]). В настоящее время подобная цель выглядит, по меньшей мере, наивно. Существо проблемы носит вполне прагматический, если не сказать утилитарный, характер. Фактически, уже в настоящее время проблемы механики и электродинамики переплелись настолько тесно, что их невозможно разделить. В самом деле, механические свойства деформируемых тел, внутреннее трение в идеальных кристаллах, теория пьезоэлектрических и фер-

ромагнитных материалов², динамика электрических машин и многие другие проблемы не могут рассматриваться без учета взаимодействия “чисто механических” и электромагнитных явлений. Поэтому чрезвычайно важно описывать эти явления на одном языке и в рамках единой непротиворечивой логики. В настоящее время этого нет. Например, известна важнейшая роль, которую играет в электромеханике сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}),$$

где q — заряд; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции; $\mathbf{V}$ — скорость движения заряда. С точки зрения механики это выражение для силы неприемлемо, поскольку оно не удовлетворяет принципу материальной объективности. К сожалению, указанным обстоятельством отнюдь не исчерпывается список претензий к силе Лоренца.

Таким образом, перед механикой, как методом исследования природных явлений, уже давно поставлена очень трудная задача о расширении сферы своего действия на область электромагнитных явлений. Следуя установившимся взглядам, можно, видимо, признать, что в основе теории электромагнитных явлений лежит концепция электромагнитного поля. Для того чтобы применить метод механики к описанию и исследованию электромагнитного поля, прежде всего, необходимо выбрать определенную точку зрения. Необходимо ответить на вопрос: “Что такое электромагнитное поле: некая материальная среда или способ описания взаимодействий между объектами, которые в физике принято называть зарядами?” В зависимости от ответа на этот вопрос механика, будучи именно методом исследования, приведет к совершенно различным теориям. Если электромагнитное поле есть некая среда, то следует использовать методы механики сплошных сред. Если это способ описания взаимодействий между зарядами, то предварительно необходимо определить, что такое заряд. Ответа на последний вопрос в настоящее время никто не знает. Неизвестно даже, является ли заряд формой некоей субстанции или это характеристика некоей формы движения чего-то, или это вообще что-то совершенно иное. Без ясного определения понятия заряда, т. е. без явного включения заряда в одну из основных структур механики, метод механики совершенно бессилён и бесполезен. Поэтому в настоящее время механика имеет шансы на успех только в том случае, если электромагнитное

² Идеи П. А. Жилина относительно теории пьезоэлектрических материалов и теории ферромагнитных материалов содержатся в Приложениях Н и I. Эти теории разрабатывалась П. А. Жилиным совместно с его учениками. Текст данных работ написан не П. А. Жилиным, а его учениками: Я. Э. Колпаковым (пьезоэлектрические материалы) и Е. Ф. Грековой (ферромагнитные материалы). (*Примеч. ред.*)

поле является некоей сплошной средой или, точнее говоря, может моделироваться некоей сплошной средой. Последняя концепция известна очень давно под названием эфира. Тем не менее всякое упоминание об эфире вызывает у физиков-теоретиков нечто вроде аллергии. Профессионалам легко понять причины неприятия концепции эфира. Дело в том, что профессиональных теоретиков не устраивают разговоры об эфире. Необходимы корректные математические формулировки концепции эфира. В этой связи было предпринято много серьезных попыток построить удовлетворительную теорию эфира [137], но все они при внимательном рассмотрении оказались неприемлемыми в теоретическом отношении. Поэтому наименьшим из зол оказалось принятие уравнений Максвелла как данность, без увязки их с какими бы то ни было механическими моделями. Так, собственно, и возник разрыв между механикой и теорией электромагнитных явлений. Вернемся к концепции эфира, рассматриваемого с позиций рациональной механики сплошных сред. Впрочем, термин “эфир” в дальнейшем использоваться не будет, поскольку фактически эфир напоминает “слоеный пирог”. Электромагнитное поле есть только верхний и наиболее грубый слой этого пирога. Вернувшись к старой концепции, следует, прежде всего, уяснить причины неудовлетворительности прежних подходов и способы их устранения. Исторические аспекты этого будут изложены в разделе 6.2. Сформулируем концепцию электромагнитного поля в том виде, в каком она будет реализована далее в рамках рациональной механики.

Итак, будем считать, что электромагнитное поле может моделироваться некоей сплошной средой. Эта среда принципиально отличается по своей структуре от всех рассмотренных ранее. По современной терминологии ее можно назвать жидким кристаллом³. Электромагнитное поле играет огром-

³ Проблемой моделирования электромагнитного поля сплошной средой П. А. Жилин занимался более десяти лет. Им были предложены две принципиально различных модели электромагнитного поля. Первая модель, описание которой можно найти в ранних работах, посвященных этой тематике, в частности, в статье “*Реальность и механика*” 1996 г. [138], основана на трансляционных степенях свободы. Подробное описание этой модели содержится в седьмой главе (разд. 7.2). Там же указывается на принципиальные и неустраняемые недостатки модели, основанной на трансляционных степенях свободы. Вторая модель, частичное описание которой можно найти в статье “*The main direction of the development of mechanics for XXI century*” 2000 г. [134], а полное описание впервые публикуется в данной главе, основана исключительно на вращательных степенях свободы и свободна от недостатков первой модели. Точно оценить временные рамки написания текста данной главы затруднительно, но последняя модификация компьютерного файла относится к марту 2003 г. Более поздних исследований по электродинамике в личном архиве П. А. Жилина нет. (Примеч. ред.)

ную роль в Природе, ибо без его участия мир видимых вещей вообще не смог бы возникнуть. Процесс рождения видимых вещей во многом напоминает сбивание масла из молока. При этом электромагнитное поле играет роль вибратора или болтушки, однако важны не эти метафизические заявления, которые едва ли доказуемы, но одна важная особенность, которая должна быть присуща удовлетворительной модели электромагнитного поля: оно должно обладать собственной энергией для функционирования в качестве вибратора. Классическая модель электромагнитного поля этим свойством не обладает. Основным видом движения в электромагнитном поле являются спинорные движения, игнорируемые в ньютоновской механике. Иными словами, электромагнитное поле есть среда, состоящая из быстровращающихся частиц⁴. Именно посредством энергии вращений частиц электромагнитное поле запасает собственную энергию, хотя оно, кроме того, обладает внутренней энергией, которую принято называть энергией деформации или упругим потенциалом. Поэтому старые теории эфира, основанные на ньютоновской механике, не имели шансов на успех.

Важно подчеркнуть, что электромагнитное поле само по себе не имеет никакого отношения к тому, что в физике принято называть зарядом. В этом серьезное отличие от точки зрения, принятой в физике, согласно которой электромагнитное поле порождается зарядами. Однако заряженные тела вносят возмущения в электромагнитное поле. Если эти возмущения назвать электромагнитным полем, то терминологические расхождения с физикой исчезнут. Мы предпочитаем называть электромагнитным полем саму среду, а не возмущения в ней. Это дает возможность временно отложить обсуждение трудной и спорной проблемы заряда. Все указанное ранее является интуитивным представлением, которое должно быть реализовано на основе строгих методов и принципов рациональной механики.

Тем, кому по тем или иным причинам не нравится концепция эфира в любой ее форме, можно указать на другую трактовку получаемых далее уравнений. Суть трактовки поясним на примере. Допустим, что изучается некое явление, характеризующееся одним параметром x . Пусть в этом явлении параметр x удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t).$$

Тогда, независимо от природы параметра x , можно утверждать, что все обстоятельства, сопровождающие рассматриваемое явление, могут быть истолкованы в терминах груза на пружинке. Совершенно анало-

⁴ Точнее говоря, двухспиновых частиц, которые будут введены позднее.

гично, если построить некую непротиворечивую механическую модель, поведение которой описывается уравнениями, в точности совпадающими с уравнениями Максвелла, то можно в рамках этой модели истолковать все явления, описываемые уравнениями Максвелла. Такое истолкование часто оказывается полезным. Приведем в этой связи высказывание Х. Лоренца [137]: “В последнее время механические объяснения происходящих в эфире процессов все более отступают на задний план. Для многих физиков основной частью теории является точное количественное описание явлений, как, например, данное в уравнениях Максвелла. Однако, даже если стоять на такой точке зрения, механические аналогии все же сохраняют некоторое значение. Они помогают нам думать о явлениях и могут явиться источником идей для новых исследований”.

6.2. Историческая справка и предмет исследования

Далее будут приведены только те исторические факты, которые имеют непосредственное отношение к обсуждаемым вопросам. Соответственно, и оценки, даваемые тем или иным фактам, нужно рассматривать исключительно в контексте того, какое влияние они оказали на ограничение сферы действия механики.

Механика — одна из древнейших наук. Она развивается эволюционным путем без революционных скачков. Метод механики формировался в течение многих столетий трудами многих и многих исследователей и, разумеется, подкреплялся огромным опытным материалом. В основании механики лежат утверждения, которые принципиально не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты экспериментом. В этом состоит важнейшая особенность механики, благодаря которой механика не имеет пределов своей применимости. Недавняя “революция в физике” не оказала и не могла оказать влияния на развитие механики, поскольку “квантовые скачки” были принципиально несовместимыми с логическими основами механики. Вместе с тем, механика того времени не смогла распространить свой метод на электромагнитные и другие явления микромира. Последствия такой “неповоротливости” механики были весьма тяжелыми: к 1930 г. механика фактически утратила статус фундаментальной науки⁵. Существует только один способ вернуть механике статус

⁵ Многие ученые-механики не согласятся с таким утверждением. К сожалению, мировое научное сообщество в целом думает иначе и считает механику прикладной наукой. Впрочем, даже некоторые физики признают механику фундаментальной, но давно закрытым(!) разделом теоретической физики.

фундаментальной науки, который заключается в расширении сферы ее действия на электромагнитные и другие явления микромира. При этом необходимо разрешить старый парадокс: *все знают, что механика не применима к описанию явлений микромира, но никто не может указать, какие именно принципы механики теряют свою дееспособность в микромире*. Есть, разумеется, простое и радикальное разрешение указанного парадокса. Оно заключается в следующем утверждении: классическая механика неприменима в микромире просто потому, что в микромире неприменима классическая логика. Подобная точка зрения утверждается в науке уже много десятилетий. Тем не менее есть противники столь радикальной точки зрения. Наша цель состоит в том, чтобы показать другое разрешение парадокса и ясно выявить утерянный в механике, как, впрочем, и в физике, элемент.

Современная механика ведет свой отсчет от Архимеда, сформулировавшего, помимо прочего, законы равновесия твердых тел. Этих законов было два. Первый относился к равновесию сил, а второй постулировал равновесие моментов и был дан в форме принципа рычага. Относительно последнего и развернулась самая продолжительная в истории современного человечества дискуссия. Конечно, никто не сомневался в правильности принципа рычага Архимеда. Вопрос заключался в его независимости, т. е. в возможности (или невозможности) его доказательства на основе закона равновесия сил. После Архимеда механика развивалась путем решения многочисленных частных задач. Важнейшие достижения принадлежат Галилео Галилею, они общеизвестны, и нет необходимости обсуждать их в данный момент.

В целом, механика до Ньютона продолжала оставаться собранием многих важных, но мало связанных между собой фактов. Ньютон был первым, кто поставил задачу построения механики как науки первых принципов. В качестве первых принципов Ньютон предложил в словесной формулировке три закона движения, но он не считал их достаточными для общего построения механики. Например, в работе [40], с. 301, Ньютон писал: “*Vis inertiae* есть пассивный принцип, посредством которого тела пребывают в их движении или покое, получают движение, пропорциональное приложенной к ним силе, и сопротивляются настолько же, насколько сами встречают сопротивление. По одному этому принципу в мире еще не могло бы произойти движение. Был необходим некоторый иной принцип, чтобы привести тела в движение, и раз они находятся в движении — требуется еще один принцип для сохранения движения. Ибо из различного сложения двух движений вполне ясно, что в мире не всегда имеется одно и то же количество движения. Если два шара, соединенные тонким стержнем, вращаются вокруг их общего центра тяже-

сти равномерным движением, в то время как центр равномерно движется по прямой линии, проведенной в плоскости их кругового движения, то сумма движений двух шаров в том случае, когда шары находятся на прямой линии, описываемой их общим центром тяжести, будет больше, чем сумма их движений, когда они находятся на линии, перпендикулярной к этой прямой. Из этого примера ясно, что движение может получаться и теряться”. Это важное высказывание относится к 1717 г. (опубликовано в 1719 г., т. е. спустя 30 лет после выхода в свет “Математических начал натуральной философии”). Данную цитату необходимо тщательно проанализировать, поскольку она дает ясное представление о состоянии развития механики в начале XVIII в. Кроме того, важно ознакомиться с работами И. Бернулли [32], опубликованными после 1726 г., а также с книгой Ж. Даламбера [139].

Следует обратить особое внимание на тот факт, что даже через пятьдесят лет после выхода в свет “Математических начал” нельзя обнаружить ничего похожего на то, что в настоящее время принято называть ньютоновской механикой. После этого едва ли кто-нибудь сможет поверить утверждению Э. Маха [8] о том, что после Ньютона в механике не было предложено ничего принципиально нового. Это утверждение, к сожалению, получило очень большое распространение среди физиков.

Программная идея Ньютона о построении механики на основе первых принципов сыграла огромную стимулирующую роль в развитии механики. Первая реализация этой идеи принадлежит Л. Эйлеру. То, что в настоящее время называется ньютоновской механикой, было создано Эйлером в период с 1732 по 1755 г. Прежде всего, Л. Эйлер впервые перевел механику на язык дифференциальных уравнений и разработал методы их интегрирования. В результате, метод механики обрел совершенно новое качество. Далее, в работе “Открытие нового принципа механики” [140] Эйлер дал новую и гораздо более сильную форму первому закону динамики⁶. Этот закон распространял второй закон Ньютона, применимый для материальных точек, на произвольные тела. В то время Эйлер полагал, что указанный принцип можно рассматривать “как единственный фундамент всей механики и других наук, которые трактуют о движении произвольных тел” (см. работу [141]). С помощью предложенного принципа Эйлеру удалось впервые рассмотреть задачу о вращении твердого тела. Тем не менее в работах того времени Эйлер рассматривал понятие момента как производного от понятия силы. Только

⁶ Современную форму законов динамики Эйлера, отличающуюся, конечно, от оригинальных формулировок, можно найти во второй главе. В частности, из современной формулировки в качестве следствия вытекает третий закон Ньютона.

значительно позднее Эйлер осознал в полной мере, что ньютоновская механика принципиально неполна и потому ограничена. Первоначально это выяснилось в работах позднего Эйлера по теории стержней, в которых он осознал, что существует понятие момента в чистом виде, т. е. момента, не определяемого через понятие силы. Позднее Эйлер применил новое понятие момента при формулировке второго закона динамики. В 1776 г. Л. Эйлер публикует мемуар “Новый метод определения движения твердых тел” [17], в котором впервые появляются формулировки двух независимых друг от друга законов динамики.

Здесь мы подошли к центральному вопросу, который необходимо обсудить подробнее. В ньютоновской механике исследуется только одна форма движений тел, а именно трансляционные движения, которые описывают изменение положений точечных тел в пространстве. Соответственно в ньютоновской механике определено только понятие силы. Связи между силами и движениями устанавливаются посредством так называемых определяющих уравнений, выражающих наши интуитивные представления и данные опыта. Типичным определяющим уравнением в ньютоновской механике является закон всемирного тяготения. Все остальные характеристики механического поведения тела определяются через них на основе первого закона динамики. Введение независимого момента в корне меняет ситуацию. В механике все переменные появляются в виде сопряженных пар. Силам отвечают перемещения, т. е. трансляционные движения. Независимым моментам отвечают так называемые спинорные⁷ движения, при которых точечное тело меняет свою ориентацию в пространстве, хотя его положение в пространстве может оставаться неизменным. Спинорные движения тела управляются вторым законом динамики Эйлера. Механику, основанную на двух законах динамики Эйлера, будем называть эйлеровой механикой.

Так получилось, что величайшее открытие Л. Эйлера оставалось невостребованным почти два столетия⁸ несмотря на то, что спинорные движения играют колоссальную роль в Природе. На макроуровне главную роль исполняют трансляционные движения, и именно этим определяется доминирующее положение ньютоновской механики в инженерных расчетах и задачах небесной механики. Однако, чем глубже мы погружаемся в микромир, тем мень-

⁷ Этот термин не является общепринятым и вводится во избежание смешения с термином “вращательное движение”. Последнее зачастую является трансляционным. Например, вращение Земли вокруг Солнца — это трансляционное движение, но вращение Земли вокруг собственной оси — это спинорное движение.

⁸ Значительное развитие динамики твердого тела и теории гироскопических систем имело скорее прикладное значение и мало сказалось на фундаментальных основах физики.

шую роль играют трансляционные движения и тем большую роль начинают играть спинорные движения. Именно игнорирование спинорных движений в ньютоновской механике явилось главной причиной неприменимости механики к описанию явлений микромира и, в частности, электромагнетизма. Думается, что при соответствующем учете спинорных движений современная и, особенно, квантовая физика имела бы совсем другой вид⁹.

Важную роль открытия Эйлером независимости второго закона динамики, видимо, осознал только Ж. Лагранж, но он не захотел с этим согласиться. По существу, вопрос сводился к проблеме доказательства независимости принципа рычага Архимеда. Если его можно доказать на основе ньютоновской механики, т. е. на основе равновесия сил, то второй закон динамики Эйлера не является независимым законом Природы. Не случайно поэтому значительную часть обширного введения к своей “Аналитической механике” [142] Ж. Лагранж посвятил именно доказательству принципа рычага Архимеда. Лагранж подверг критике многие известные к тому времени доказательства принципа рычага Архимеда и предложил новое доказательство. При этом, как стало ясно в начале XX в., Лагранж допустил принципиальную ошибку¹⁰, последствия которой ощущаются вплоть до настоящего времени. Что касается самого Лагранжа, то он счел возможным ограничиться рамками ньютоновской механики и сумел придать ей весьма изящную форму. Однако красота лагранжевой механики была отравленной: многие стали ошибочно думать, что вся механика сводится к тому, чтобы выучить выражения для кинетической и потенциальной энергии и далее использовать лагранжевы формализм. До некоторой степени это даже правильно. Беда в том, что в нетривиальных случаях лагранжева механика не дает никаких намеков на то, откуда взять правильные выражения для кинетической и потенциальной энергий. Во многих случаях, например для открытых систем, лагранжева механика вообще не применима, о чем многие и не подозревают.

В дальнейшем лагранжева механика была усилена Гамильтоном. Механика Лагранжа–Гамильтона стала олицетворением механики в современной теоретической физике, где она играет двоякую роль. С одной стороны, когда

⁹ В седьмой главе (см. подразд. 7.3.3) построена модель сплошной средой специального вида, основанная на вращательных степенях свободы. Показано, что распространение возмущений в этой среде описывается уравнениями, представляющими собой комбинацию уравнений Шредингера и Клейна–Гордона. Таким образом, дана механическая интерпретация уравнения Шредингера. (*Примеч. ред.*)

¹⁰ Лагранж использовал соображения симметрии относительно поворота, которые, как известно ныне, эквивалентны условию баланса моментов, т.е. второму закону динамики Эйлера.

физики говорят об ограниченности классической механики, то они имеют в виду именно механику Лагранжа–Гамильтона. С другой стороны, в основе современной квантовой физики лежит формализм Лагранжа–Гамильтона с добавлениями к нему правил квантования. К сожалению, физики не сознают, что механика Лагранжа–Гамильтона является красивой одеждой для механики и не более того. Поэтому сама по себе механика Лагранжа–Гамильтона не может служить основой для построения новых физически содержательных моделей реальных объектов. Именно это обстоятельство породило следующее заявление М. Планка [143]: “Сегодня мы должны осознать, что ... рамки классической динамики ... оказались слишком узкими для того, чтобы включить все те физические явления, которые не поддаются непосредственному наблюдению посредством наших грубых органов чувств. Доказательство этого заключения даются нам кричащим противоречием между классической теорией и экспериментом, которое проявилось в универсальных законах теплового излучения”. Разумеется, под классической динамикой М. Планк понимал механику Лагранжа–Гамильтона.

Между тем, фундаментальная механика в XIX–XX столетиях развивалась, главным образом, на основе принципов, предложенных Галилеем, Ньютоном, Эйлером. Основное внимание уделялось не аналитической механике систем с конечным числом степеней свободы, где царствовала механика Лагранжа–Гамильтона, а механике сплошных сред. При этом одновременно развивались теории одномерных (нити, струны, стержни), двумерных (пластины и оболочки) и трехмерных сред. Трехмерные среды в XIX в. первоначально развивались (А. Навье, О. Коши, С. Пуассон, Дж. Грин и др.) без учета вращательных степеней свободы, т. е. без учета моментных напряжений.

К этому времени относятся и первые механические модели электромагнитного поля, известные под названиями различных теорий эфира и описанные в книге Х. Лоренца [137]. Как известно, все эти модели эфира оказались неудачными. В них отчетливо наблюдается стремление авторов ввести спинорные движения, но делается это неправильно. К тому же, в то время моменты, как самостоятельные сущности, практически не применялись в физике, хотя теории стержней и оболочек, известные в тот период времени, уже включали, наряду с силами, независимые моменты.

Моментные напряжения в трехмерных средах впервые были введены братьями Эжени и Франсуа Коссера в 1909 г. в книге [59]. Однако сделано это было достаточно формально и без убедительных приложений. Поэтому прошло еще полстолетия, прежде чем теории с независимыми моментными на-

пряжениями начали интенсивно развиваться. К настоящему времени по этим теориям и их приложениям опубликованы сотни работ, ссылки на многие из которых можно найти, например, в книге [144]. Отметим только основные особенности механики сплошных сред с учетом вращательных степеней свободы.

Хотя спинорные движения были введены, по существу, еще Эйлером, тем не менее в механике сплошных сред они были введены относительно недавно [67, 68, 145]. В этих работах спинорные движения вводились на основе тензора поворота, основные свойства которого и его различные представления¹¹ описаны в работах [2, 50]. Краткое изложение основных принципов эйлеровой механики содержится во второй главе. В седьмой главе дано истолкование электродинамики Максвелла в терминах классической механики и показана ее недостаточность, например для описания структуры атома¹².

Чтобы избежать разного рода недоразумений, рассмотрим основные термины. Введение инерциальных систем отсчета описано в разделе 2.1 данной книги (см. также работу [149]). Ньютоновская механика включает в себя законы динамики безспиновых частиц. Состояние частицы определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}(t)$, вектора количества движения $m\dot{\mathbf{R}}(t)$, полной энергии $E = K + U_p$, где кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}$, внутренняя энергия $U_p = \text{const}$. Изменение количества движения определяется вектором силы $\mathbf{F}$. Кроме того, имеются производные величины: вектор момента количества движения $\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}}$, вектор момента силы $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$. В ньютоновской механике допустимы только центральные силы. Основной моделью в ньютоновской механике является модель линейного осциллятора, задаваемого уравнением

$$m\ddot{\mathbf{R}} + c\mathbf{R} = 0. \quad (6.1)$$

Другие аспекты ньютоновской механики можно не отмечать.

Эйлерова механика включает в себя законы динамики односпиновых частиц. Движение таких частиц определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}(t)$ и тензором поворота $\mathbf{P}(t)$. Скорости находятся с помощью уравнений

¹¹ Методика описания спинорных движений посредством тензора поворота была предложена П. А. Жилиным в работе [146] и получила развитие в работах [31, 147, 148]. Об описании спинорных движений посредством тензора поворота см. Приложение С. (*Примеч. ред.*)

¹² Об истолковании электродинамики Максвелла в терминах классической механики см. раздел 7.2, где проводится аналогия между уравнениями Максвелла и уравнениями классической безмоментной теории упругости. (*Примеч. ред.*)

(2.11), (2.12)

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t); \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t),$$

где второе уравнение носит имя Пуассона [2, 50]. Полная энергия E частицы имеет вид $E = K + U_p$, где кинетическая энергия K определяется квадратичной формой (2.15)

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right),$$

причем коэффициенты этой формы, т. е. тензоры второго ранга $m\mathbf{B}$ и $m\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$), называются тензорами инерции в актуальном положении, скаляр m есть масса частицы. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам (2.14)

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^T(t); \quad \mathbf{C} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{P}^T(t),$$

где $m\mathbf{B}_0$, $m\mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т. е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$.

Векторы количества движения $\mathbf{K}_1$ и кинетического момента $\mathbf{K}_2$ вводятся посредством равенств (2.17), (2.18), согласно которым количество движения $\mathbf{K}_1$ — линейная форма скоростей

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{V}} = m (\mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

а кинетический момент $\mathbf{K}_2$ — это линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле

$$\mathbf{K}_2 = \underline{\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \underline{\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1} + m (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

где подчеркнутый член называется моментом количества движения, а второе слагаемое называется собственно кинетическим моментом или динамическим спином.

В эйлеровой механике изменение количества движения определяется силой $\mathbf{F}$, а изменение кинетического момента определяется вектором момента $\mathbf{M}$, который вычисляется по правилу (2.35)

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{L},$$

где вектор $\mathbf{L}$ называется собственно моментом¹³, который в общем случае не выражается через силу $\mathbf{F}$.

¹³ Подробнее об аксиоматике воздействий в эйлеровой механике см. раздел 2.3. (*Примеч. ред.*)

Первый и второй законы динамики в эйлеровой механике имеют вид (2.54), (2.64) и для закрытых тел формулируются следующим образом [17]:

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{F}; \quad \dot{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{M} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}. \quad (6.2)$$

Более детальное описание можно найти в разделе 2.5.

Основной моделью в эйлеровой механике является модель твердотельного осциллятора¹⁴, т. е. твердого тела на упругом основании. На необходимость построения этой модели указывали многие ученые еще сто лет тому назад, но построена она была только в работах [147, 148]. В простейшем случае уравнения движения твердотельного осциллятора имеют вид [147, 148]

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{c} \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0}; \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}); \\ g &= \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\mathbf{J}$ — момент инерции; $\mathbf{c}$ — жесткость; $\boldsymbol{\theta}$ — вектор поворота [2, 50], причем $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$. Мы видим, что даже в простейшем случае уравнения (6.3) имеют значительно более сложный вид, чем уравнение (6.1) для обычного осциллятора. Поскольку именно эта модель должна играть центральную роль при описании многих явлений микромира, то легко понять, что эти описания по необходимости окажутся сложнее или, по крайней мере, более непривычными, чем это было в ньютоновской механике. Правда, для плоских колебаний мы имеем $\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. В таком случае уравнение (6.3) совпадает с уравнением (6.1). Заметим, что уравнение (6.3) соответствует только вращательным степеням свободы, т. е. тело имеет фиксированную точку. В общем случае мы имеем некую комбинацию уравнений типа (6.1) и (6.3).

Говоря об эйлеровой механике, необходимо отметить вклад К. Трусделла [14, 25], который изучил работы Эйлера, опубликованные после 1766 г., и сделал их достоянием научного сообщества.

Механика многоспиновых частиц будет рассмотрена в следующем разделе.

¹⁴ О модели твердотельного осциллятора см. Приложение С. В этом же приложении содержатся необходимые сведения о математическом аппарате, который используется при описании кинематики многоспиновых частиц. (*Примеч. ред.*)

6.3. Многоспиновые частицы

6.3.1. Кинематика многоспиновых частиц

Многоспиновая частица $\mathcal{A}$ является сложным объектом, состоящим из несущего тела $\mathcal{A}_0$ с встроенной в него системой роторов $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Пусть радиус-векторы $\mathbf{R}_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) определяют положения центров масс тел $\mathcal{A}_i$. Пусть $\mathbf{P}_i$ есть тензоры поворота тел $\mathcal{A}_i$. Через m_i обозначим массы тел $\mathcal{A}_i$. Примем, что множество точек, положение которых определено радиус-векторами $\mathbf{R}_i$, является абсолютно твердым телом, хотя сама многоспиновая частица таковым, конечно, не является. Если роторы внутри несущего тела осесимметричны, а их оси фиксированы относительно несущего тела, то многоспиновую частицу можно назвать гиростатом. Для простоты именно этот случай будет рассматриваться далее. Тогда имеем

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R} + \mathbf{P}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_i; \quad \mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_i; \quad m = \sum_{i=0}^N m_i, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор центра масс частицы $\mathcal{A}$, векторы $\boldsymbol{\rho}_i$ суть векторы, определяющие положения центров масс тел $\mathcal{A}_i$ относительно центра масс частицы $\mathcal{A}$ в отсчетном положении. Таким образом, движение многоспиновой частицы $\mathcal{A}$ определяется заданием $3(N+2)$ скалярных функций

$$\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{P}_0(t), \quad \mathbf{P}_1(t), \quad \mathbf{P}_2(t), \quad \dots \quad \mathbf{P}_N(t). \quad (6.5)$$

Трансляционная и угловые скорости частицы находятся посредством следующих уравнений:

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \dot{\mathbf{P}}_i(t) = \boldsymbol{\omega}_i(t) \times \mathbf{P}_i(t). \quad (6.6)$$

В дальнейшем будем считать, что роторы $\mathcal{A}_i$ являются телами вращения с осями симметрии $\mathbf{n}'_i$, которые предполагаются фиксированными относительно несущего тела $\mathcal{A}_0$. Поэтому можем записать

$$\mathbf{n}'_i = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.7)$$

где векторы $\mathbf{n}_i$ заданы в отсчетном положении. Тензор поворота $\mathbf{P}_0$ может быть записан во многих, но эквивалентных между собой формах

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Q}(\psi_1 \mathbf{n}_1) = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{Q}(\psi_2 \mathbf{n}_2) = \dots = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{Q}(\psi_N \mathbf{n}_N) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{T}_i = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i), & \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $\mathbf{Q}(\psi_i \mathbf{n}_i)$ суть повороты вокруг осей $\mathbf{n}_i$ на угол ψ_i ; $\mathbf{T}_i$ есть тензор наклона, т. е. тензор поворота вокруг оси, ортогональной оси $\mathbf{n}_i$. Для тензоров поворота $\mathbf{P}_i$ имеем аналогичные представления

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{Q}(\varphi_i \mathbf{n}_i). \quad (6.9)$$

Поскольку оси $\mathbf{n}_i$ фиксированы относительно несущего тела $\mathcal{A}_0$, то справедливы равенства

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{S}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i).$$

При этом уравнения (6.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{Q}(\varphi_i \mathbf{n}_i) = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}(\beta_i \mathbf{n}_i); \\ \beta_i &= \varphi_i - \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где β_i есть угол поворота ротора $\mathcal{A}_i$ относительно несущего тела $\mathcal{A}_0$. Таким образом, движение многоспиновой частицы определяется заданием $N+6$ скалярных функций, т. е. она имеет $N+6$ степеней свободы. Далее будут использованы обозначения

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}_0. \quad (6.11)$$

Используя теорему сложения угловых скоростей [2, 50] для композиции поворотов (6.10), получаем выражения для угловых скоростей роторов

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}_i \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad \mathbf{n}'_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.12)$$

6.3.2. Кинетическая энергия многоспиновой частицы

Кинетическую энергию K_i тела $\mathcal{A}_i$ определим квадратичной формой¹⁵

$$K_i = m_i \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right), \quad (6.13)$$

где $m_i \mathbf{C}_i$ есть центральный тензор инерции тела $\mathcal{A}_i$ в отсчетном положении. Тензор инерции несущего тела $\mathbf{C}_0$ может быть произвольным, тензоры инерции роторов трансверсально изотропны

$$m_i \mathbf{C}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i + \mu_i (\mathbf{E} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.14)$$

¹⁵ Об определении кинетической энергии тела общего вида см. подраздел 2.2.2. (*Примеч. ред.*)

где λ_i , μ_i суть аксиальный и экваториальный центральные моменты инерции ротора $\mathcal{A}_i$, соответственно. Из соотношений (6.10), (6.11) и (6.14) следует

$$\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^\top = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (6.15)$$

Скорости центров масс роторов можно выразить через скорость центра масс всей частицы и угловую скорость несущего тела с помощью формул (6.4)

$$\mathbf{V}_i = \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}). \quad (6.16)$$

Используя соотношения (6.16), выражение для кинетической энергии (6.13) переписываем в виде

$$\begin{aligned} K_i = m_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \\ + \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \lambda_i \dot{\beta}_i^2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где приняты обозначения

$$\tilde{\mathbf{C}}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^\top - (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}), \quad \mathbf{B}_i = -(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{E}. \quad (6.18)$$

При $i = 0$ последние два слагаемых в формуле (6.17) отсутствуют.

Полная кинетическая энергия $K(\mathcal{A})$ многоспиновой частицы $\mathcal{A}$ дается выражением

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}) = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\dot{\beta}_i^2 + 2 \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где тензор инерции $m\mathbf{C}_*$ имеет вид

$$m\mathbf{C}_* = \sum_{i=0}^N m_i (\mathbf{C}_i - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)), \quad (6.20)$$

а векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_i$ определяют соответственно центры масс частицы $\mathcal{A}$ и тел $\mathcal{A}_i$ в отсчетном положении. В равенстве (6.20) учтено очевидное тождество

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{B}_i = \mathbf{0}.$$

6.3.3. Количество движения многоспиновой частицы

Количество движения $\mathbf{K}_{1i}$ тела $\mathcal{A}_i$ вычисляется по его кинетической энергии с помощью формул¹⁶

$$\mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{V}_i} = m_i \mathbf{V}_i = m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R})) = m_i (\mathbf{V} + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (6.21)$$

Полное количество движения $\mathbf{K}_1(\mathcal{A})$ многоспиновой частицы $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{K}_{1i}(\mathcal{A}_i) = m \mathbf{V} + \left(\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{B}_i \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = m \mathbf{V}. \quad (6.22)$$

6.3.4. Кинетический момент многоспиновой частицы

Кинетический момент $\mathbf{K}_{2i}$ тела $\mathcal{A}_i$ определяется выражением¹⁷

$$\mathbf{K}_{2i} = \mathbf{R}_i \times \mathbf{K}_{1i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i}. \quad (6.23)$$

Используя формулы (6.4), (6.12), (6.14), (6.15), (6.21), нетрудно получить

$$\mathbf{K}_{2i} = m_i \left(\mathbf{R}_i \times \mathbf{V} + (\mathbf{R}_i \times \mathbf{B}_i + \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^T) \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad \beta_0 = 0. \quad (6.24)$$

Кинетический момент $\mathbf{K}_2(\mathcal{A})$ всей частицы $\mathcal{A}$ определяется по формуле

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{K}_{2i} = m (\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad (6.25)$$

где тензор $m \mathbf{C}_*$ определен выражением (6.20).

6.4. Фундаментальные законы механики для многоспиновых частиц

Многоспиновая частица имеет $N + 6$ степеней свободы, которые определяются следующими функциями:

$$\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{P}(t), \quad \beta_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.26)$$

Для отыскания этих функций необходимо сформулировать соответствующее число уравнений, роль которых выполняют фундаментальные законы

¹⁶ Об определении количества движения тела общего вида см. подраздел 2.2.2. (Примеч. ред.)

¹⁷ Об определении кинетического момента тела общего вида см. подраздел 2.2.2. (Примеч. ред.)

механики, их общую формулировку можно найти в разделе 2.5. В основаниях механики положены четыре утверждения, которые принято называть фундаментальными законами. К ним относятся: первый и второй законы динамики Эйлера, уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики, и неравенство производства энтропии, или второй закон термодинамики¹⁸. Следует обратить внимание на тот фундаментальный факт, что наименование законов этим утверждениям присвоено по традиции. На самом деле это некие логические утверждения, указывающие путь или, если угодно, метод исследования проблем Природы и техники. Эти логические утверждения принципиально не могут быть опровергнуты никакими опытными фактами. Поэтому область их применимости не имеет ограничений, и их можно использовать при любых скоростях движения как в макромире, так и в микромире, включая проблемы типа излучения черного тела. Многие физики не соглашались со сказанным, как это видно, например, из приведенной в разделе 6.2 цитаты М. Планка. Вместе с тем, никто из физиков до сих пор не указал, что именно в этих законах неправильно или имеет ограниченную область применимости.

Фундаментальные законы формулируются исключительно в инерциальных системах отсчета, подробное рассмотрение которых можно найти в разделе 2.1.

6.4.1. Первый закон динамики Эйлера

Рассмотрим произвольное тело $\mathcal{B}$, состоящее из $\mathfrak{n}$ многоспиновых частиц. Через $\mathcal{B}^e$ обозначим окружение тела $\mathcal{B}$, т. е. всю вселенную за вычетом самого рассматриваемого тела $\mathcal{B}$. Тогда первый закон динамики гласит:

В инерциальной системе отсчета скорость изменения количества движения тела $\mathcal{B}$ равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e)$, действующей на тело $\mathcal{B}$ со стороны его окружения $\mathcal{B}^e$, плюс скорость подвода количества движения в тело $\mathcal{B}$.

В математической записи первый закон имеет вид (2.54)

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}). \quad (6.27)$$

¹⁸ Взгляды П.А. Жилина на второй закон термодинамики существенно менялись. В данной главе изложены идеи, близкие к традиционным и являющиеся развитием подхода К. Трусделла. В первой главе (разд. 1.8), во второй главе (подразд. 2.5.3) и третьей главе (разд. 3.4) отражены взгляды последних лет (2000–2005 гг.), существенно отличающиеся от общепринятых. В пятой главе (разд. 5.7) излагается точка зрения, занимающая некоторое промежуточное положение между традиционной трактовкой и взглядами последних лет. (Примеч. ред.)

Определение сил и их свойства описаны в разделе 2.3. Если тело $\mathcal{B}$ есть материальная точка и $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, то первый закон динамики совпадает со вторым законом Ньютона. В общем случае, первый закон динамики значительно сильнее второго закона Ньютона. В частности, из него в качестве следствия вытекает третий закон Ньютона для закрытых тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т. е. тел, не обменивающихся массой,

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}). \quad (6.28)$$

Следует обратить внимание, что центральность сил при этом не обязательна и не имеет смысла. Если тела $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются материальными точками и, кроме того, выполняется второй закон динамики Эйлера, то справедливо равенство

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B) = \mathbf{0}, \quad (6.29)$$

т. е. силы являются центральными. Хотя все сказанное должно быть общеизвестным, тем не менее недоразумения встречаются здесь очень часто.

Рассмотрим один, но весьма типичный пример различия в рассуждениях, используемых физиками и механиками¹⁹. Пусть даны две материальные точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с массами $m_A \ll m_B$. Пусть тело $\mathcal{A}$ движется со скоростью $\mathbf{V}_A$ и налетает на покоящееся тело $\mathcal{B}$. Физики рассуждают следующим образом. Считая рассматриваемую систему точек изолированной, выписываем закон сохранения количества движения

$$m_A \mathbf{V}_A = m_A \mathbf{V}_A^+ + m_B \mathbf{V}_B^+, \quad (6.30)$$

где плюсами помечены скорости после удара. Закон (6.30) многократно проверялся во многих экспериментах. Было установлено, что при малых скоростях $\mathbf{V}_A$ он выполняется с высокой степенью точности, а при скоростях $\mathbf{V}_A$, сравнимых со скоростью света в пустоте, закон (6.30) нарушается. Его справедливость практически восстанавливается, если принять, что масса m_A зависит от скорости по принятому в релятивистской физике закону. Этот факт рассматривается в физике, как одно из доказательств зависимости массы от скорости. Столь простое устранение возникшего противоречия с экспериментом вполне устраивает большинство физиков. Однако для механика подобный способ рассуждений неприемлем, ибо с точки зрения рациональной механики масса не может зависеть от скорости, поскольку она, по определению, является объективным скаляром и потому не зависит от выбора системы

¹⁹ Ни в данном месте, ни в последующем тексте автор не имеет намерения критиковать или давать оценки подходам, используемым в физике. Речь идет только о расхождении в исходных позициях.

отсчета. Поэтому трактовка результатов эксперимента, даваемая в физике, не приемлема в рамках рациональной механики, которая должна найти свое объяснение результатам эксперимента.

С качественной точки зрения все выглядит достаточно понятно: поскольку закон (6.30) не выполняется, то допущение об изолированности рассматриваемой системы является неверным, т. е. на движущуюся частицу действуют какие-то силы. Чтобы выявить эти силы, необходимо принять во внимание, что известные эксперименты проводились с заряженными частицами, скорости которых доводились до нужных значений электромагнитным воздействием, которое затем выключалось. В физике считается, что электромагнитное поле порождается внешними источниками, при выключении которых оно исчезает²⁰ и, следовательно, ни на что не действует.

С точки зрения механики данный эксперимент показывает, что, даже при отсутствии внешних источников, электромагнитное поле присутствует. Именно оно и воздействует на движущуюся заряженную частицу, причем это воздействие эквивалентно кажущемуся росту массы. Вопрос, следовательно, сводится к построению механической модели электромагнитного поля и изучению его взаимодействия с “видимым веществом”. К сожалению, сделать это значительно сложнее, чем ввести зависимость массы от скорости, но иного в механике не дано.

6.4.2. Второй закон динамики Эйлера

Второй закон динамики Эйлера гласит:

Скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{B}$, вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту, вычисленному относительно той же опорной точки и действующему на тело $\mathcal{B}$ со стороны его окружения $\mathcal{B}^e$, плюс скорость подвода кинетического момента в тело $\mathcal{B}$.

В математической форме второй закон имеет вид (2.64)

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{B}). \quad (6.31)$$

Дальнейшие подробности о понятии момента и способах его вычисления можно найти в разделе 2.3. Для закрытых тел на основании второго закона (6.31) легко доказывается равенство

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{A}). \quad (6.32)$$

²⁰ Поле, создаваемое самой заряженной частицей, на частицу не действует.

Если тело $\mathcal{B}$ является системой материальных точек, то из (6.31) следует, что силы взаимодействия между точками системы по необходимости являются центральными. Поэтому, если эксперименты показывают, что силы взаимодействия между объектами системы не центральны, то эти объекты не могут считаться материальными точками. Так обстоит дело в теориях для некоторых типов кристаллов. Пусть тело $\mathcal{B}$ является многоспиновой частицей. Тогда первый и второй законы дают нам шесть уравнений. В этой связи необходимо сформулировать еще N дополнительных уравнений. Для этого необходимо рассмотреть уравнения движения внутренних роторов многоспиновой частицы.

Уравнения движения роторов $\mathcal{A}_i$

$$\dot{\mathbf{K}}_{1i} = \mathbf{F}_i; \quad \dot{\mathbf{K}}_{2i} = \mathbf{M}_i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.33)$$

где $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{M}_i$ суть сила и момент, действующие на ротор $\mathcal{A}_i$ со стороны несущего тела $\mathcal{A}_0$. Представим момент $\mathbf{M}_i$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{L}_i, & \mathbf{L}_i &= L_i \mathbf{n}'_i + \mathbf{L}_i^*; \\ \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{L}_i^* &= 0; & L_i &= -\nu_i(\dot{\beta}_i - \Omega_i); & \nu_i &> 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $\Omega_i = \text{const}$ и $\nu_i = \text{const}$ являются параметрами частицы²¹. Преобразуем уравнения баланса кинетического момента роторов с учетом уравнений баланса количества движения. В результате получим

$$(\mathbf{P}_i \cdot m_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i)^\cdot = L_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.35)$$

Умножая (6.35) скалярно на $\mathbf{n}'$ и учитывая все указанное ранее, без труда получаем следующие N уравнений:

$$\lambda_i \left(\dot{\beta}_i + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}'_i \right)^\cdot + \nu_i \left(\dot{\beta}_i - \Omega_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.36)$$

Уравнения (6.27), (6.31), (6.36) дают полную систему уравнений движения многоспиновой частицы.

Второй закон динамики не входит в базисные законы современной теоретической физики, что имеет далеко идущие последствия. Рассмотрим простой

²¹ Момент, имеющий структуру $L_i = -\nu_i(\dot{\beta}_i - \Omega_i)$, применительно к инженерным задачам принято называть моментом двигателя ограниченной мощности. Мощность двигателя характеризуется параметром ν_i . Параметр Ω_i определяет номинальную угловую скорость, до которой разгоняется ротор под действием момента двигателя ограниченной мощности. (*Примеч. ред.*)

пример²². Возьмем несколько абсолютно твердых тел с одинаковыми тензорами инерции и одинаковой внешней формой. Допустим далее, что эти тела могут свободно вращаться вокруг неподвижной точки, относительно которой вычислялись тензоры инерции. Начальные условия для всех тел примем одинаковыми. Тогда наблюдаемые вращения всех тел будут совершенно одинаковыми. Измерим теперь реакции на опорах. В результате обнаружим, что они у всех тел различны. Причина состоит в том, что реакции на опорах определяются движением центра масс тела²³. Тела, имеющие одинаковые тензоры инерции и одинаковую внешнюю форму, могут иметь различное расположение центров масс. Именно по этой причине реакции оказались разными.

В данном примере и механики, и физики пришли бы к одинаковым выводам, и, разумеется, ни о каком крушении классической динамики речи бы не пошло. Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Реакции определяются движением центра масс, но само это движение **полностью** определяется вторым законом динамики Эйлера, который игнорируется в квантовой физике. В результате, если аналогичный эксперимент проводится в микромире, то движение центра масс (никто ничего не знает о центре масс электрона или протона) попадает в категорию ненаблюдаемых величин, в то время как силы (реакции связи) и сами вращательные движения попадают в категорию наблюдаемых величин. В квантовой физике устанавливаются связи между наблюдаемыми величинами [150], т. е. в данном случае между вращательными движениями и реакциями на опорах. Более того, если речь идет об элементарной частице, рассматриваемой как точечное тело, то ее трансляционное движение вообще отсутствует, но силы возникают. Вывод, к которому приходят физики, гласит, что в микромире классическая динамика терпит крах.

Вообразим теперь немного более сложную ситуацию. Пусть опорные точки рассматриваемых тел связаны жесткими связями, силы в которых (реакции на опорах или реакции связей) можно измерять. Тогда обнаружится возникновение огромных сил (при достаточно высоких скоростях вращения), которые не порождены трансляционными движениями. В таких случаях физики опять говорят о чисто квантовомеханических эффектах, не предсказываемых классической динамикой. На этом простом, хотя и гипотетическом, примере хотелось показать, как могут возникать всякого рода странности при игнорировании второго закона динамики. Именно игнорирование спинорных

²² Пример служит только для иллюстрации способа рассуждений, принятого в квантовой физике.

²³ Подробнее об этом примере см. подраздел 2.5.2. (*Примеч. ред.*)

движений, на которых держится весь микромир, и второго закона динамики привело к отказу от классической механики и созданию квантовой физики.

6.4.3. Уравнение баланса энергии

Первые два закона динамики относительно просты в приложениях. Этого нельзя сказать о третьем и четвертом законах механики, которые больше известны под именами первого и второго законов термодинамики. Здесь существует целый ряд еще не решенных проблем²⁴, связанных с понятиями внутренней энергии, температуры и энтропии. Оставим обсуждение этих проблем²⁵ и ограничимся только формулировками законов термодинамики. В частности, уравнение баланса энергии сводится к утверждению:

Скорость изменения полной энергии тела $\mathcal{B}$ равна мощности внешних воздействий $\mathbf{N}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e)$ плюс скорость подвода энергии “немеханического происхождения”.

В дополнение к уже введенным понятиям здесь появляется новое понятие полной энергии, которая обычно представляется в виде суммы кинетической энергии тела $\mathcal{B}$ и его внутренней энергии. Поскольку кинетическая энергия тела полностью определена, то проблема сводится к определению внутренней энергии. Во многих, но далеко не во всех, случаях решение этой проблемы известно. Существуют серьезные затруднения и с полным формальным определением энергии “немеханического происхождения”. Вообще говоря, это та энергия, которой тело $\mathcal{B}$ обменивается со своим окружением в дополнение к обмену энергией через посредство мощности внешних воздействий. Обычно это происходит в форме тепловой энергии, но это не обязательно так. Просто для иллюстрации приведем математическую форму уравнения баланса энергии применительно к одной многоспиновой частице

$$(\mathbf{K} + \mathcal{U}_p)' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} + \delta, \quad (6.37)$$

где $\mathcal{U}_p$ есть внутренняя энергия частицы; δ есть скорость подвода энергии “немеханического происхождения” в частицу. Для “стандартных” частиц²⁶

²⁴ В учебниках теоретической физики создается впечатление, что здесь все ясно. Однако принятый там уровень строгости неприемлем для рациональной механики.

²⁵ О понятиях внутренней энергии, температуры и энтропии см. раздел 1.8, а также подразделы 2.5.3 и 3.2.6. (*Примеч. ред.*)

²⁶ Под “стандартной” здесь понимается частица, которая не может деформироваться. Частица, содержащая внутренние роторы, которые могут свободно вращаться относительно несущего тела, обладает дополнительной кинетической энергией. На внутреннюю энергию наличие роторов не влияет. (*Примеч. ред.*)

внутренняя энергия сохраняется постоянной, т. е. $\mathcal{U}_p = \text{const.}$ Это означает, что частица не содержит внутренних накопителей энергии типа упругих элементов. В таком случае легко вычислить величину δ . В самом деле, умножая (6.27) на вектор $\mathbf{V}$ и так далее, получаем

$$\dot{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - \sum_{i=1}^N \nu_i \dot{\beta}_i (\dot{\beta}_i - \Omega_i). \quad (6.38)$$

Из сравнения уравнений (6.38) и (6.37) видим

$$\delta = - \sum_{i=1}^N \nu_i \dot{\beta}_i (\dot{\beta}_i - \Omega_i). \quad (6.39)$$

Величина δ порождается внешним источником энергии, например электрическим прибором. Все, указанное ранее, крайне схематично и просто перечисляет моменты, на которые следует обратить внимание. Второй закон термодинамики будет введен в дальнейшем.

6.5. Континуум многоспиновых частиц

6.5.1. Кинематика сплошной среды

В последующем электромагнитное поле моделируется некоей сплошной средой, заполняющей все пространство. Видимо, можно считать, что оно в некотором смысле неподвижно в абсолютном пространстве Ньютона. Тем не менее у нас нет возможности ввести такую систему отсчета, которая была бы неподвижна относительно электромагнитного поля²⁷. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, с помощью которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно электромагнитного поля. Поэтому в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные области электромагнитного поля. Это означает, что при построении теории электромагнитного

²⁷ Электромагнитным полем П. А. Жилин называет некоторую материальную субстанцию (эфир), математическая модель которой до настоящего времени в рациональной науке не обсуждалась. То, что в литературе называется электромагнитным полем и описывается уравнениями Максвелла, П. А. Жилин считает возмущением в эфире. Поскольку все экспериментальные факты относятся к электромагнитному полю в классическом понимании (т. е. к возмущению в эфире в трактовке П. А. Жилина), мы не располагаем данными, позволяющими определить скорость движения самого эфира относительно Земли. Поэтому у нас нет возможности ввести такую систему отсчета, которая была бы неподвижна относительно эфира. (*Примеч. ред.*)

поля необходимо использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред. Понятие материальной производной подробно обсуждалось в подразделе 3.2.1. Ее определяет формула (3.3).

Рассмотрим сплошную среду, целиком заполняющую односвязную или многосвязную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может и покоиться, в то время как система отсчета движется относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, где вектор $\mathbf{x}$ задает точку системы отсчета. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ определяет скорость той частицы среды²⁸, которая в данный момент времени t находится в точке $\mathbf{x}$.

Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (6.40)$$

Пусть $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ есть тензор поворота частицы, находящейся в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t . Чтобы найти угловую скорость этой частицы, воспользуемся определением (3.8). В результате получим следующую модификацию уравнения Пуассона:

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (6.41)$$

Присутствие в этом определении скорости $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ вносит дополнительные осложнения при написании уравнения баланса энергии, как это будет видно в дальнейшем.

²⁸ Хорошо известно, что электромагнитное поле описывается уравнениями в частных производных. Согласно представлениям рациональной механики уравнениями в частных производных описываются процессы, происходящие в сплошной среде (материальной среде с распределенными параметрами). В данном разделе строится модель среды, состоящей из многоспиновых частиц, совершающих нарастающие во времени повороты. Очевидно, что при таких движениях нарушается сплошность среды. Поэтому при обсуждении динамических процессов говорится не о движении элементарного объема среды, а о движении частиц. Использование пространственного описания стирает грань между сплошной и дискретной средой и дает возможность описывать движение дискретной среды уравнениями в частных производных. (*Примеч. ред.*)

6.5.2. Интегральная и локальная формы закона сохранения частиц

Обратимся к рассмотрению закона сохранения частиц. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть Z есть данное множество многоспиновых частиц. Пусть V есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. Граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Пусть далее $\eta(\mathbf{x}, t) dV$ есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} \in V$ в актуальный момент времени t

$$\eta(\mathbf{x}, t) \geq 0.$$

Закон сохранения частиц в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\eta \mathbf{V}) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) dV. \quad (6.42)$$

Учитывая произвольность выбора области интегрирования, получаем локальную форму закона сохранения частиц

$$\frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) = 0. \quad (6.43)$$

С использованием материальной производной это уравнение принимает вид²⁹

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} + \eta \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \eta)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (6.44)$$

6.5.3. Интегральная и локальная формы первого закона динамики

Количество движения частиц, находящихся в области V , определяется следующим выражением:

$$\mathbf{K}_1 = \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathbf{K}_1(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathbf{K}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (6.45)$$

²⁹ В третьей и пятой главах рассматриваются процессы, связанные с возникновением и уничтожением частиц (см. подразд. 3.2.2 и разд. 5.3), а также изменением массы частиц (см. разд. 5.3). При описании этих процессов уравнение баланса частиц и уравнение баланса массы формулируются как независимые законы, причем в самом общем случае оба этих уравнения содержат источниковые члены, т. е. не являются законами сохранения. В данной главе строится модель среды, в которой частицы не возникают и не уничтожаются, а массы частиц не изменяются и, следовательно, плотность массы ρ связана с плотностью части тривиальным соотношением $\rho = m\eta$, где m — постоянная величина, имеющая смысл массы одной частицы. Поэтому для целей данной главы достаточно формулировки одного закона сохранения — закона сохранения частиц. (*Примеч. ред.*)

где $\mathbf{m} = \text{const}$ есть масса частицы, находящейся в точке $\mathbf{x}$ в актуальный момент времени, величина $\mathbf{m}\eta$ есть плотность массы. Массовая плотность количества движения $\mathbf{K}_1$ определена выражением (6.22).

Первый закон динамики Эйлера записывается в виде равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta \mathbf{m} \mathbf{K}_1 dV = \int_{(V)} \eta \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS - \int_{(S)} \eta \mathbf{m} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{K}_1 dV, \quad (6.46)$$

где $\mathbf{F}$ есть внешняя сила, приходящаяся на одну частицу, последнее слагаемое определяет подвод количества движения в область V , который имеет место, например, за счет движения системы отсчета относительно среды. Как показано в подразделе 3.2.4, при пространственном описании применимы стандартные методы введения тензора напряжений и других, подобных ему величин. Повторив рассуждения подраздела 3.2.4, введем в рассмотрение тензор напряжений

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (6.47)$$

Таким образом, имеем

$$\int_{(V)} \left[\frac{d}{dt} (\eta \mathbf{m} \mathbf{K}_1) - \eta \mathbf{F} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) \mathbf{m} \mathbf{K}_1 + \eta \mathbf{m} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{K}_1 - \nabla \cdot \mathbf{T} \right] dV = 0.$$

В локальной форме первый закон динамики принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \eta \mathbf{F} = \eta \mathbf{m} \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}. \quad (6.48)$$

6.5.4. Интегральная и локальная формы второго закона динамики

Кинетический момент частиц, находящихся в области V , определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 = & \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{m} \mathbf{K}_2(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathbf{K}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \times \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \\ & + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (6.49)$$

где массовая плотность кинетического момента $\mathbf{K}_2$ определена выражением (6.25).

Запишем второй закон динамики Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta m \mathcal{K}_2 dV &= \int_{(V)} \eta (\mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \\ &+ \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) dS - \int_{(S)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 dS, \end{aligned} \quad (6.50)$$

где $\mathbf{L}$ есть внешний момент, приходящийся на одну частицу. Стандартные рассуждения позволяют получить формулу Коши для тензора моментных напряжений

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad (6.51)$$

и локальную форму второго закона

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t), \quad (6.52)$$

где через вектор $\mathcal{L}$ обозначен динамический спин одной частицы

$$m \mathcal{L} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot m \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t), \quad (6.53)$$

тензор $m \mathbf{C}_*$ определен выражением (6.20). К этому уравнению необходимо добавить уравнения движения роторов (6.36), которые при пространственном описании принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t) \right) + \nu_i \left(\frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} - \Omega_i(\mathbf{x}) \right) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.54)$$

6.5.5. Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии

Полная энергия частиц, попадающих в область V в системе отсчета, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} E &= \int_{(V)} \eta (m \mathcal{K} + \mathcal{U}) dV, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ &+ \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[\left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} \right)^2 + 2 \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}'_i \right], \end{aligned} \quad (6.55)$$

где $\mathcal{K}, \mathcal{U}$ суть плотности кинетической и внутренней энергий, соответственно, причем плотность кинетической энергии определена выражением (6.19).

Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики для произвольной сплошной среды записывается в форме равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta(m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \eta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + q) dV + \\ + \int_{(S)} (\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega} + h_{(n)}) dS - \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dS, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где тепловой поток $h_{(n)}$ выражается через вектор потока тепла $\mathbf{h}$ по закону Фурье–Стокса (3.52)

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}.$$

В локальной форме уравнение баланса энергии записывается в следующем виде³⁰:

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \\ + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

В такой форме уравнение баланса энергии еще мало о чем говорит. В частности, отсюда не видно, от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме:

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right), \quad (6.58)$$

где тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются первой и второй мерой деформации, соответственно. При пространственном описании введение мер деформации часто оказывается весьма не простой процедурой. Если эту процедуру делать корректно, то сразу выяснится, что меры деформации отнюдь не являются чисто геометрическими параметрами, а зависят от свойств материала. Указанное

³⁰ Вывод формулы (6.57) аналогичен выводу формулы (3.54), который можно найти в Приложении D, подраздел D.2.1. Отличие заключается только в том, что при выводе формулы (6.57) используются уравнения движения роторов (6.54) и выражение для плотности кинетической энергии (6.55), содержащее дополнительные слагаемые, характеризующие движение роторов. (*Примеч. ред.*)

оказывается важным, например, при описании неупругих материалов. В данном случае нет необходимости выполнять обсуждаемую процедуру в общем виде. Для электромагнитного поля она будет описана далее. Из уравнения (6.58) видно, что внутренняя энергия зависит от тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, но это уравнение нуждается в дальнейших преобразованиях.

6.5.6. Приведенное неравенство диссипации энергии

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики или неравенство производства энтропии. В основании второго закона термодинамики лежит экспериментальный факт, согласно которому вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, и потому она полностью может быть учтена и переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это глобальная характеристика, которую принципиально нельзя локализовать. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т. е. в неучитываемую, Вселенную. Если внимательно проанализировать рассмотренное, то можно прийти к выводу, что второй закон термодинамики утверждает существование эфира вообще и электромагнитного поля в частности. Отсюда следует невозможность последовательного введения понятия температуры без привлечения электромагнитного поля.

Второй закон термодинамики будем использовать в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема–Трусделла [25]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta \mathcal{H} dV + \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \mathcal{H} dS \geq \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dV + \\ + \int_{(V)} \frac{1}{\vartheta} \left[\eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) \right] dV, \end{aligned} \quad (6.59)$$

где функция $\mathcal{H}$ есть плотность энтропии; ϑ — температура. В локальной форме это неравенство сводится к следующему:

$$\eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \geq \frac{1}{\vartheta} \left[\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) \right] - \frac{1}{\vartheta^2} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta. \quad (6.60)$$

Исключая отсюда тепловые слагаемые с помощью уравнения баланса энергии (6.57), получаем приведенное неравенство диссипации

$$\eta\vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \geq \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} - \mathbf{T}^\top \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{M}^\top \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta. \quad (6.61)$$

Если в рассмотрение ввести плотность свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, то этому неравенству можно придать вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \mathbf{T}^\top \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{M}^\top \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (6.62)$$

Приведенное неравенство диссипации должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Поскольку в это неравенство никакие внешние параметры не входят, то оно налагает ограничения на определяющие уравнения среды³¹. Чтобы воспользоваться этим неравенством, его необходимо преобразовать к виду, аналогичному (6.58),

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \mathbf{T}^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} - \mathbf{M}^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (6.63)$$

6.6. Классическая электродинамика Максвелла

Прежде чем обратиться к рассмотрению общей теории, полезно посмотреть, как получаются классические уравнения Максвелла.

Примем следующие предположения, которые весьма ограничительны, но в последующем они будут существенно ослаблены

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \eta = \text{const}. \quad (6.64)$$

В рассматриваемом случае материальная производная совпадает с полной производной по времени. Кроме того, будем рассматривать только изотермические (или адиабатические) процессы.

³¹ Отношение П. А. Жилина ко второму закону термодинамики со временем изменялось. В данной главе изложены идеи, близкие к традиционным и являющиеся развитием подхода К. Трусделла. Изложение взглядов П. А. Жилина на второй закон термодинамики, относящихся к 2000–2005 гг., можно найти в первой главе (разд. 1.8), во второй главе (подразд. 2.5.3) и третьей главе (разд. 3.4). Эти взгляды существенно отличаются от общепринятых. В пятой главе (разд. 5.7) излагается точка зрения, занимающая промежуточное положение между традиционной трактовкой и идеями 2000–2005 гг. Тот факт, что в данной, шестой, главе используется подход, близкий к традиционному, обусловлен, видимо, тем, что соответствующие разделы были написаны П. А. Жилиным до того, как он разработал существенно новый подход, используемый в третьей главе. В Приложении F, написанном Е. А. Ивановой, демонстрируется использование метода третьей главы применительно к сплошной среде, рассматриваемой в данной главе. (*Примеч. ред.*)

Тензор моментных напряжений будем считать антисимметричным

$$\mathbf{M} = \varpi^{-1} \mathbf{B} \times \mathbf{E}, \quad \varpi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \varpi^{-1} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (6.65)$$

где вектор $\mathbf{B}$ будем называть вектором магнитной индукции; ϖ — размерная константа. При этих ограничениях первый закон динамики Эйлера (6.48) превращается в тождество, а второй закон динамики Эйлера (6.52) принимает вид

$$\varpi^{-1} \nabla \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{d\mathcal{L}}{dt}. \quad (6.66)$$

Уравнение баланса энергии принимает совсем простой вид

$$\eta \frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\varpi^{-1} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (6.67)$$

Кинетический момент примем в простейшей из всех возможных форм

$$m\mathcal{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \varpi c^2 \eta m \mathcal{L}, \quad c = \text{const}. \quad (6.68)$$

Вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, введенный вместо вектора кинетического момента частицы, будем называть вектором напряженности электрического поля; константа c — скорость света в вакууме.

Наконец, примем, что повороты частиц являются малыми. Тогда вектор угловой скорости вычисляется по вектору малого поворота $\boldsymbol{\theta}$ посредством простейшей формулы [2, 50]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \varpi c^2 \eta \lambda \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}. \quad (6.69)$$

Подставляя (6.68) в уравнение (6.66), получаем

$$\nabla \times \mathbf{B} + \varpi \eta \mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dt}. \quad (6.70)$$

Именно это уравнение было впервые выведено Дж. Максвеллом, причем роль внешнего момента у Максвелла играл ток. Уравнение баланса энергии (6.67) с учетом (6.69) принимает вид

$$\eta \frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\varpi^{-1} \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \times \boldsymbol{\theta}. \quad (6.71)$$

Для внутренней энергии также примем простейшее представление

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \kappa |\nabla \times \boldsymbol{\theta}|^2, \quad \kappa = \text{const} > 0. \quad (6.72)$$

Тогда для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, согласно (6.71), получим³²

$$\mathbf{B} = -\omega\eta\kappa \nabla \times \boldsymbol{\theta}. \quad (6.73)$$

Подставив (6.69) и (6.73) в (6.70), можно получить дифференциальное уравнение для вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$

$$\kappa (\Delta \boldsymbol{\theta} - \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{L} = \lambda \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2}. \quad (6.74)$$

Однако можно действовать иначе. Исключая вектор поворота из выражений для вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, получаем следующее уравнение неразрывности:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \kappa = \lambda c^2. \quad (6.75)$$

В физике это уравнение известно под именем закона индукции Фарадея. Именно с него начиналась электродинамика Максвелла. Сам Максвелл предложил уравнение (6.70), в котором роль момента $\omega\eta\mathbf{L}$ играет ток³³:

$$\omega\eta\mathbf{L} = -\mu_0 \mathbf{j} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j},$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока; μ_0 — магнитная постоянная; ε_0 — электрическая постоянная.

³² Следствием определяющего уравнения (6.73) является закон Гаусса для магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. (*Примеч. ред.*)

³³ Если, следуя общепринятым представлениям, согласно которым плотность тока есть скорость протекания заряда сквозь единицу площади, принять закон сохранения заряда $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt}$, можно показать, что следствием уравнения (6.70) является закон Гаусса $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Действительно, вычислив дивергенцию обеих частей уравнения (6.70) и приняв во внимание соотношение $\omega\eta\mathbf{L} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}$, получим $\frac{d(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}})}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j}$. Проинтегрировав по времени последнее уравнение с учетом закона сохранения заряда, получим закон Гаусса. Как отмечается в подразделе 7.2.1, по Максвеллу, ток не обязательно связан с движением зарядов. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку закон сохранения заряда является необходимым условием разрешимости уравнений Максвелла. В подразделе 7.2.2 представлены модифицированные уравнения Максвелла, для которых вполне допустимо вместо закона сохранения заряда использовать закон изменения заряда $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{h}$, где $\mathbf{h}$ — объемная плотность скорости подвода заряда в рассматриваемую систему. Модифицированные уравнения Максвелла можно получить при специальном выборе момента $\omega\eta\mathbf{L}$. (*Примеч. ред.*)

Как видим, при рассматриваемом подходе уравнение (6.75) не выражает какого-либо физического закона, а является просто уравнением совместности. Выпишем теперь уравнения (6.70) и (6.75) в виде системы и в том порядке, как это принято в физике

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{d\boldsymbol{\mathcal{B}}}{dt}, \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} + \omega\eta\mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dt}. \quad (6.76)$$

Пришли к уравнениям, которые по форме совпадают с классическими уравнениями Максвелла в трактовке Хевисайда. Имеется, впрочем, одно различие: в правых частях уравнений Максвелла, используемых в физике, стоят частные производные по времени, что невозможно с точки зрения механики, поскольку операторы частного дифференцирования по времени необъективны³⁴. Об этом обстоятельстве еще пойдет речь позднее.

Таким образом, ранее была рассмотрена некая сплошная среда. Используя стандартные рассуждения механики сплошных сред, мы вывели для нее все основные соотношения и получили замкнутую систему уравнений, которая по своему виду совпала с уравнениями Максвелла, причем влияние заряда на поле учитывается вектором $\omega\eta\mathbf{L}$.

По воззрениям, принятым в современной теоретической физике, уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле, которое в свою очередь является некоей абстракцией, дающей удобное описание электромагнитных взаимодействий, но не имеющей материального носителя. Подобная точка зрения принципиально отличается от точки зрения, которая была выдвинута М. Фарадеем и реализована, по мере возможностей того времени, Дж. Максвеллом. Как было отмечено во введении, наша точка зрения совпадает с позицией Фарадея и Максвелла. Обратимся к обсуждению полученных уравнений.

Во-первых, полное внешнее сходство полученных уравнений с уравнениями Максвелла не означает, что они полностью эквивалентны. Фактически уравнения (6.76) более информативны. В самом деле, в классических уравнениях неясен тип векторов $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Известно только, что если $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ полярен, то $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ аксиален, и наоборот. Считается [151], с. 75, что выбор типа вектора напряженности электрического поля условен и может быть сделан произвольно. В современной физике принято, что вектор напряженности электрического поля полярен. Отмеченный произвол отсутствует в уравнениях (6.76),

³⁴ Вопрос о том, почему в уравнениях Максвелла частные производные по времени следует заменить полными производными, подробно обсуждается в разделе 7.1. (*Примеч. ред.*)

где вектор $\mathbf{\mathcal{E}}$ однозначно аксиален, а вектор $\mathbf{B}$ полярен³⁵. Отсюда вытекают важные следствия. В частности, если посмотреть на формулу Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{\mathcal{E}} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$, то сразу видим, что либо сама формула Лоренца неприемлема, либо заряд является аксиальным скаляром, т. е. является некоей характеристикой вращательного движения. В данной работе проблема заряда не обсуждается, но указанное свойство заряда будет принципиально важным при построении теории взаимодействия электромагнитного поля с веществом.

Во-вторых, предлагаемые уравнения показывают, что говорить об их инвариантности относительно преобразований Галилея или преобразований Лоренца совершенно бессмысленно³⁶, ибо они справедливы в одной и только одной системе отсчета, которая неподвижна относительно электромагнитного поля. Это следует из ограничения (6.64).

В-третьих, уравнения (6.76) имеют ясную механическую интерпретацию. Это важно в силу следующих соображений. Допустим, что по тем или иным причинам нас не удовлетворяют классические уравнения Максвелла и в них нужно внести какие-то изменения. Это отнюдь не гипотетическое допущение, ибо известно, что классические уравнения не позволяют построить последовательную теорию атома³⁷. Следовательно, изменения нужны, но что именно нужно менять? Классические уравнения не дают никакого ответа на этот вопрос. Наличие механической интерпретации не только дает направление уточнений, но и показывает их настоятельную необходимость, что и будет сделано в следующем разделе. Отметим, что механическую интерпретацию собственно уравнений Максвелла можно дать и в рамках ньютоновской механики, как это показано в разделе 7.2, различие которого с данным

³⁵ В данной модели электромагнитного поля аксиальность вектора напряженности электрического поля обусловлена тем, что он пропорционален вектору кинетического момента, который является аксиальным. В модели электромагнитного поля, основанной на трансляционных степенях свободы (см. разд. 7.2), произвол в определении типа вектора напряженности электрического поля также отсутствует. В этой модели вектор напряженности электрического поля однозначно полярен, а вектор магнитной индукции — аксиален. Ответ на вопрос о типе вектора напряженности электрического поля и вектора магнитной индукции можно дать только на основании экспериментальных фактов. В настоящее время фактов, однозначно подтверждающих одну или другую версию, нет. Поэтому формально обе теории имеют право на существование. П. А. Жилин отдавал предпочтение теории, изложенной в данной главе. Именно эта теория является более поздней по времени создания. (*Примеч. ред.*)

³⁶ Вопрос об инвариантности классических уравнений Максвелла и модификаций этих уравнений, основанных на замене частных производных по времени полными производными, обсуждается в подразделах 7.1.3, 7.1.4. (*Примеч. ред.*)

³⁷ По этому поводу можно посмотреть книги по квантовой физике. Некоторые соображения можно найти в седьмой главе.

исследованием заключается в том, что в разделе 7.2 вектор поворота заменен вектором перемещения. При этом возникает одна проблема. В самом деле, допустим, что в формуле (6.69) мы заменили вектор $\lambda\theta$ на вектор перемещения $\mathbf{u}$. Тогда в электростатике вектор перемещения линейно зависит от времени и нарастает во времени до бесконечности, что никому не может понравиться. Возрастание во времени вектора поворота не противоречит здравому смыслу, поскольку частица вращается, не меняя своего положения в пространстве.

В-четвертых, механический смысл уравнений (6.76) дает ответ на вопрос: “Как может Земля двигаться сквозь упругую среду, какой по существу является светonosный эфир?” (Лорд Кельвин, 1900 г.). Ранее была рассмотрена среда, которая по построению является упругой, но она не может оказывать силового воздействия на тела, поскольку эта среда может взаимодействовать с другими телами только посредством моментов.

6.7. Общая нелинейная теория электромагнитного поля

Ранее мы рассмотрели классическую электродинамику и видели, что для ее получения пришлось принять значительные ограничения. Например, ограничение $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ исключает возможность замены системы отсчета. Поэтому необходимо рассмотреть более общую ситуацию. Примем следующие допущения:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{D}} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{V} = \text{const.} \quad (6.77)$$

Последнее ограничение не препятствует замене инерциальных систем отсчета. При принятых ограничениях из закона сохранения частиц следует, что плотность частиц удовлетворяет условию³⁸

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x} - \mathbf{V}t).$$

В частности, для однородной среды имеем $\eta = \text{const}$. Первый закон динамики (6.48) при условии $\eta \mathbf{F} = \mathbf{0}$ принимает вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{D}} = \mathbf{0}. \quad (6.78)$$

Это равенство налагает ограничение на симметричную часть тензора напряжений, который в дальнейшем нам не понадобится. Важно только то, что тензор напряжений в среде самоуравновешен, т. е. такая среда не оказывает

³⁸ О решении уравнения баланса частиц в случае $\mathbf{V} = \text{const}$ см. в подразделе 3.2.2. (Примеч. ред.)

силового воздействия на другие тела. Второй закон динамики (6.52) принимает вид

$$\omega^{-1} (\nabla \times \mathbf{B} - 2\mathbf{D}) + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (6.79)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только двухспиновых частиц, т. е. частиц, состоящих из несущего тела и ротора. Тогда для кинетического момента вместо (6.53) будем иметь представление

$$m\mathcal{L} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot m\mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \lambda_r \frac{\delta \beta(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (6.80)$$

где λ_r — осевой момент инерции ротора; β — угол поворота ротора относительно несущего тела.

Примем, что несущее тело частицы обладает трансверсально изотропным тензором инерции с осью изотропии $\mathbf{n}$, совпадающей с осью вращения ротора. Кроме того, будем считать, что центры масс несущего тела и ротора расположены на прямой $\mathbf{n}$. В таком случае тензор инерции $m\mathbf{C}_*$, определенный формулой (6.20), принимает вид

$$m\mathbf{C}_* = \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (6.81)$$

где приняты обозначения

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_r, \quad \mu = \mu_0 + \mu_r + m_0 l_0^2 + m_r l_r^2, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = l_0 \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_r = l_r \mathbf{n},$$

индекс 0 относится к несущему телу, а ротору отвечает индекс r . В принятых обозначениях кинетический момент (6.80) можно представить в следующей форме:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \omega c^2 \eta m\mathcal{L} = \omega c^2 \eta \left[\mu \boldsymbol{\omega} + \left((\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}') + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta t} \right) \mathbf{n}' \right], \quad (6.82)$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n},$$

где вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ по-прежнему будем называть вектором напряженности электрического поля. К уравнению (6.79) необходимо добавить уравнение движения ротора

$$\lambda_r \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}' \right) + \nu \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right) = 0, \quad (6.83)$$

где ν и Ω_0 суть заданные параметры.

Обратимся к приведенному неравенству диссипации (6.62). С учетом допущений (6.77) оно принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - 2\omega^{-1} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega} + \omega^{-1} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (6.84)$$

Теперь необходимо преобразовать это выражение к виду (6.63). Из уравнения (6.41) имеем

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} \cdot \mathbf{P}^T \right]_{\times}. \quad (6.85)$$

Нетрудно доказать тождество³⁹, справедливое для любого вектора $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (6.86)$$

Несколько сложнее обстоит дело с преобразованием слагаемого, содержащего множитель $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$. Будем действовать следующим образом. Введем в рассмотрение тензор второго ранга $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, называемый второй мерой деформации, посредством уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi^s} \mathbf{P} &= \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \\ \nabla &\equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial \chi^s}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_{\times}, \end{aligned} \quad (6.87)$$

где вектор $\mathbf{f}$ называется вторым вектором деформации. Справедливы уравнения интегрируемости⁴⁰

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \chi^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \chi^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (6.88)$$

Уравнение Пуассона (6.41) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (6.89)$$

Откуда получаем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (6.90)$$

Используя свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\Omega}$ получаем равенство⁴¹

$$\nabla \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.91)$$

³⁹ Доказательство тождества (6.86) можно найти в Приложении D, подраздел D.2.2. (Примеч. ред.)

⁴⁰ Доказательство формулы (6.88) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.1. (Примеч. ред.)

⁴¹ Доказательство формулы (6.91) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.2. (Примеч. ред.)

Исключая отсюда вспомогательный вектор $\mathbf{\Omega}$ с помощью уравнения (6.90) и используя уравнение (6.88) после некоторых преобразований, получаем⁴²

$$\nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (6.92)$$

Откуда для ротора вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^T - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_{\times}, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_{\times}. \quad (6.93)$$

Последние два равенства справедливы для любого вектора $\mathbf{V}$. Нам они понадобятся при $\mathbf{V} = \text{const}$. Теперь приведенному неравенству диссипации энергии (6.84) можно придать вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \omega^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}] \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ + \omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Наконец, используя тождество (6.86), получаем окончательный вид приведенного неравенства диссипации энергии

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0, \quad (6.95)$$

где вектор $\mathbf{a}$ определяется формулой

$$\mathbf{a} \equiv \omega^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}]. \quad (6.96)$$

Дальнейший ход рассуждений является стандартным для механики сплошных сред [25]. Примем следующие определяющие уравнения для рассматриваемой среды:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta), \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \vartheta), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta). \quad (6.97)$$

Теперь нетрудно вывести соотношения Коши–Грина. Согласно (6.97) имеем

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \frac{\delta \vartheta}{\delta t}. \quad (6.98)$$

⁴² Доказательство формулы (6.92) можно найти в Приложении D, подраздел D.1.2. (Примеч. ред.)

Подставляя это равенство в (6.95), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\varpi^{-1} \mathbf{B} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \right) \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{P} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^{\top} \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \\ & + \eta \left(\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right) \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Левая часть неравенства (6.99) является линейной формой материальных производных от аргументов, которые линейно независимы. Поэтому выполнение этого неравенства возможно при условии, что коэффициенты при материальных производных равны нулю. Исключение составляет коэффициент при материальной производной от тензора поворота: он не обязан равняться нулю. Действительно, согласно модифицированному уравнению Пуассона (6.41) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота следующего вида⁴³:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^{\top} \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Таким образом, для выполнения неравенства (6.99) необходимы следующие соотношения Коши–Грина:

$$\mathbf{B} = -\varpi \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}; \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}; \quad \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{P} = -\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (6.101)$$

Последнее соотношение необходимо преобразовать, чтобы исключить из него произвольный симметричный тензор $\mathbf{A}$. Для этого необходимо сначала скалярно умножить это соотношение на тензор $\mathbf{P}^{\top}$ справа, а затем вычислить векторный инвариант от обеих частей получившегося равенства. В результате получим следующее соотношение для вектора $\mathbf{D}$:

$$2\mathbf{D} = -\varpi \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} \right)_{\times} + \varpi \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \varpi \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}. \quad (6.102)$$

В данном случае было использовано обозначение (6.96). Теперь приведенное неравенство диссипации сводится к простому неравенству

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (6.103)$$

⁴³ Доказательство тождества (6.100) можно найти в Приложении D, подраздел D.2.5. (Примеч. ред.)

Запишем уравнение баланса энергии (6.57) с учетом соотношений (6.77), (6.86), (6.93)

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \varpi^{-1} \mathbf{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Приняв во внимание первое и третье из соотношений (6.101), перепишем (6.104) в виде

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Учитывая (6.98) и второе из соотношений (6.101), получаем

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \quad (6.106)$$

Используя соотношение $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, получаем уравнение теплопроводности

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \quad (6.107)$$

Чтобы завершить построение нелинейной модели электромагнитного поля, осталось задать конкретный вид свободной энергии. Следует, впрочем, отметить, что задание свободной энергии как функции тензора поворота частиц среды часто бывает затруднительным. Значительно удобнее пользоваться понятием вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$, который связан с тензором поворота следующей формулой (см. подразд. С.5):

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \exp[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E}]. \quad (6.108)$$

В Приложении С доказаны формулы, которые при переходе от полных производных по времени к материальным производным выглядят следующим образом:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}, \quad (6.109)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2}\mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \\ \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}\mathbf{R}^2, \\ \mathbf{R} &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \theta = |\boldsymbol{\theta}|, \quad \det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)}.\end{aligned}\tag{6.110}$$

Используя представление для угловой скорости через материальную производную от вектора поворота, приведенное неравенство диссипации (6.94) переписываем в виде

$$\begin{aligned}\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{t}} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta \mathbf{t}} + \omega^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}] \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta \mathbf{t}} + \\ + \omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{t}} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0.\end{aligned}\tag{6.111}$$

Свободную энергию можно считать функцией аргументов $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{f}$, ϑ . Тогда для вектора $\mathcal{D}$ вместо (6.102) получим соотношение

$$2\mathcal{D} = \omega \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) + \omega \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \omega \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}.\tag{6.112}$$

Остальные соотношения Коши–Грина остаются без изменений.

В заключение выпишем сводку основных уравнений среды, моделирующей электромагнитное поле. Впрочем, полученные уравнения лучше рассматривать как некую заготовку, которую можно использовать для различных целей. Чтобы называть их уравнениями электромагнитного поля, необходимо дать электромагнитные истолкования всем введенным величинам. К основным относятся следующие уравнения.

Второй закон динамики принимается в виде двух уравнений (6.79) и (6.83), где вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ определяется уравнением (6.82)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{B} - 2\mathcal{D} + \omega \eta \mathbf{L} &= \frac{1}{c^2} \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\delta \mathbf{t}}, \\ \lambda_r \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \left(\frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}' \right) + \nu \left(\frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} - \Omega_0 \right) &= 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}} &= \omega c^2 \eta \left[\mu \boldsymbol{\omega} + \left((\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}') + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} \right) \mathbf{n}' \right], \quad \mathbf{n}' = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{6.113}$$

Только первое из уравнений (6.113) представляет собой одно из уравнений Максвелла, в котором учтено слагаемое $(-2\mathcal{D})$, отвечающее за джоулево тепло [135]. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ будем называть вектором напряженности электрического поля и вектором магнитной индукции, соответственно. В классической теории вектор $(-2\mathcal{D})$ связывается с вектором $\mathbf{E}$ известным определяющим уравнением. В рассматриваемой теории это не так.

Соотношения Коши–Грина имеют вид (6.101), (6.112), уравнение теплопроводности (6.107) остается в прежнем виде

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D} &= \varpi\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) + \varpi\eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \varpi\eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \\ \mathbf{B} &= -\varpi\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \\ \eta\vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} &= \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (6.114)$$

Наконец, к этим уравнениям следует присоединить кинематические и геометрические уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}, \\ \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, \\ \nabla \mathbf{P} &= \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}_{\times}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Система уравнений (6.113)–(6.115) замкнута при условии, что задана конкретная зависимость свободной энергии от параметров состояния ϑ , $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{f}$. В представленном виде система уравнений (6.113)–(6.115) описывает нелинейную модель жидкокристаллической среды. Чтобы эта среда моделировала электромагнитное поле, необходимо использовать некие дополнительные данные, включая результаты экспериментальных исследований и интуитивные соображения. Что касается экспериментальных исследований, то на рассматриваемом этапе они более чем затруднены. В самом деле, в экспериментах всегда рассматривается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Но для этого необходимо разработать основные принципы такого взаимодействия, что в настоящий момент еще не сделано. Впрочем, один экспериментальный факт, относящийся непосредственно к электромагнитному полю, нам известен — это закон электромагнитной индукции Фарадея. В матема-

тической форме он имеет вид⁴⁴

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t). \quad (6.116)$$

Если считать, что этот закон является абсолютно точным, то он налагает очень жесткие ограничения на всю теорию. Действительно, из уравнения (6.116) следует, что векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции должны порождаться одним вектором $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E} = \nabla Q(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{x} - \mathbf{V}t) + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.117)$$

Как нетрудно убедиться⁴⁵ с помощью представления (6.113), вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ нельзя представить в виде (6.117). Отсюда следует альтернатива: либо закон электромагнитной индукции (6.116) не является абсолютно точным, либо вся рассматриваемая теория не описывает электромагнитного поля. При условии, что верна первая из этих двух возможностей, закон электромагнитной индукции Фарадея справедлив только приближенно и не для самого электромагнитного поля, а для возмущений, распространяющихся в электромагнитном поле. Поэтому для общей теории, описываемой уравнениями (6.113)–(6.115), нельзя требовать выполнения закона Фарадея (6.116). Уравнения для возмущений, распространяющихся в электромагнитном поле, будут выведены в следующем разделе.

6.8. Линейные уравнения электромагнитного поля

Как отмечалось во введении, терминология, принятая в данной работе, отличается от терминологии, принятой в современной физике. В данной ра-

⁴⁴ Первое из уравнений (6.116) является естественным обобщением на нелинейный случай уравнения $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$. Второе из уравнений (6.116) получается следующим образом. Вычислив дивергенцию обеих частей первого из уравнений (6.116), получим $\nabla \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = 0$. Учитывая, что $\mathbf{V} = \text{const}$, последнее уравнение можно переписать в виде $\frac{\delta(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\delta t} = 0$. Решение этого уравнения в случае постоянной скорости (см. подразд. 3.2.2) имеет вид $\nabla \cdot \mathbf{B} = f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t)$. (Примеч. ред.)

⁴⁵ Согласно формулам (6.113), (6.115) выражение для вектора напряженности электрического поля имеет вид $\mathbf{E} = \omega c^2 \eta \left([\mu \mathbf{E} + (\lambda - \mu) \mathbf{n}' \mathbf{n}'] \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta t} \mathbf{n}' \right)$. Это выражение не приводится к виду (6.117), поскольку коэффициенты при производных $\frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}$ и $\frac{\delta \beta}{\delta t}$ не являются константами. (Примеч. ред.)

боте электромагнитным полем называется эфир. Далее будут выведены уравнения для возмущений, распространяющихся в эфире. Именно эти уравнения соответствуют уравнениям, которые в современной физике принято называть уравнениями электромагнитного поля.

Рассмотрим стационарное состояние среды, которое характеризуется постоянством следующих величин:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta t} = \Omega_0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \quad \vartheta = \vartheta_0. \quad (6.118)$$

Кроме того, принимаем, что в невозмущенной среде справедливы ограничения

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (6.119)$$

причем обычно для вектора $\mathbf{B}_0$ принимается нулевое значение. В стационарном состоянии плотность динамического спина $\mathbf{L}_0$ постоянна. Согласно выражениям (6.82) и (6.118)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \omega c^2 \eta m \mathbf{L}_0 = \omega c^2 \eta \lambda_r \Omega_0 \mathbf{n} = \text{const}. \quad (6.120)$$

Значение вектора $\mathbf{L}_0$ должно находиться из эксперимента. Наложим теперь малые возмущения на стационарные состояния. Начнем с тензора поворота $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, который представим в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}, \quad (6.121)$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$ называется вектором малого поворота. Тогда согласно (6.115) имеем

$$\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{f} = \nabla \times \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}. \quad (6.122)$$

Возмущенную скорость вращения ротора можно представить в виде

$$\frac{\delta\beta}{\delta t} = \Omega_0 + \frac{\delta\tilde{\beta}}{\delta t}, \quad (6.123)$$

где $\tilde{\beta}$ есть малая величина. Вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ после линеаризации принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \omega c^2 \eta \left(\lambda_r \Omega_0 \mathbf{n} + \lambda \Omega_0 \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} + \frac{\delta}{\delta t} \left[\mu \boldsymbol{\varphi} + (\lambda \gamma + \lambda_r \tilde{\beta}) \mathbf{n} \right] \right), \quad (6.124)$$

где вектор малого поворота $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$ разложен на две составляющие

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi} + \gamma \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \gamma \equiv \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}. \quad (6.125)$$

Обратимся к линеаризации свободной энергии. Как обычно, будем задавать ее в виде квадратичной формы малых аргументов

$$\begin{aligned} \eta\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}, \vartheta) = & \eta\mathcal{F}_0 + \varpi^{-1}\mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2}\varpi^{-1}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\theta} + \\ & + \varpi^{-1}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2}\varpi^{-1}\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2}\eta\alpha_4(\vartheta - \vartheta_0)^2. \end{aligned} \quad (6.126)$$

В этом представлении связанность тепловых и упругих полей не учитывается. Будем считать, что рассматриваемая среда трансверсально изотропна с осью изотропии $\mathbf{n}$. Тогда очевидно, что справедливы представления

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \alpha_\alpha (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{b}_\alpha \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\alpha = 1, 2), \\ \mathbf{A}_3 &= \alpha_3 \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathcal{B}_0 = \mathbf{b}_0 \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Входящие в выражения (6.127) постоянные подлежат определению из эксперимента. Можно показать, что для выполнения экспериментального закона Фарадея необходимо, хотя и недостаточно, принять следующие условия:

$$\alpha_2 = \mathbf{b}_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \lambda = \mu. \quad (6.128)$$

С учетом представлений (6.127) и (6.128) выражение для свободной энергии переписываем в виде

$$\begin{aligned} \eta\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}, \vartheta) = & \eta\mathcal{F}_0 + \varpi^{-1}\mathbf{b}_0\psi + \frac{1}{2}\varpi^{-1}(\alpha_1\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b}_1\gamma^2) + \\ & + \frac{1}{2}\varpi^{-1}\alpha_2\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2}\eta\alpha_4(\vartheta - \vartheta_0)^2, \quad \psi \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

Линеаризованные соотношения Коши–Грина имеют вид

$$2\mathcal{D} = \varpi \frac{\partial \eta\mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{b}_0 \nabla \gamma - \mathbf{b}_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{n}, \quad \mathcal{B} = -\varpi \frac{\partial \eta\mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}. \quad (6.130)$$

Подставляя сюда выражение (6.129), получаем

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D} &= \alpha_1 \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{b}_1 - \alpha_1) \gamma \mathbf{n} + \mathbf{b}_0 \nabla \gamma - \mathbf{b}_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{n}, \\ \mathcal{B} &= -\mathbf{b}_0 \mathbf{n} - \alpha_2 \mathbf{f}, \quad \mathcal{H} = -\alpha_4 (\vartheta - \vartheta_0). \end{aligned} \quad (6.131)$$

Примем дополнительно необязательные упрощения, которые следовало бы подтвердить экспериментом

$$\mathbf{b}_0 = 0, \quad \alpha_1 = \mathbf{b}_1. \quad (6.132)$$

Тогда определяющие уравнения примут совсем простой вид

$$2\mathcal{D} = \alpha_1 \boldsymbol{\theta}, \quad \mathcal{B} = -\alpha_2 \nabla \times \boldsymbol{\theta}, \quad \mathcal{H} = -\alpha_4 (\vartheta - \vartheta_0). \quad (6.133)$$

С учетом обязательного ограничения (6.128) выражение для вектора электрического поля принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \omega c^2 \eta \left[\lambda_r \Omega_0 \mathbf{n} + \lambda_r \Omega_0 \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n} + \lambda \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} + \lambda_r \frac{\delta \tilde{\beta}}{\delta t} \mathbf{n} \right]. \quad (6.134)$$

Попробуем теперь проверить выполнение закона Фарадея

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta t} &= (\omega c^2 \eta \lambda - \alpha_2) \frac{\delta}{\delta t} \nabla \times \boldsymbol{\theta} + \\ &+ \omega c^2 \eta \lambda_r \Omega_0 \nabla \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) - \omega c^2 \eta \lambda_r \mathbf{n} \times \frac{\delta}{\delta t} \nabla \tilde{\beta}. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Очевидно, что для выполнения закона Фарадея необходимо принять условие

$$\frac{\alpha_2}{\omega \eta \lambda} = c^2, \quad (6.136)$$

где параметр c будем считать скоростью света в пустоте. Однако даже при выполнении этого условия закон Фарадея все еще не выполняется

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta t} = \omega c^2 \eta \lambda_r \Omega_0 \nabla \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) - \omega c^2 \eta \lambda_r \mathbf{n} \times \frac{\delta}{\delta t} \nabla \tilde{\beta}. \quad (6.137)$$

Конечно, можно выполнить закон Фарадея точно, если принять, что параметр Ω_0 и угол $\tilde{\beta}$ равны нулю. В таком случае получаются классические уравнения Максвелла, в которых частные производные по времени заменены на материальные производные. Однако этого делать не следует, поскольку будут утрачены некоторые важные свойства среды, моделирующей электромагнитное поле. Поэтому будем считать, что закон Фарадея выполняется приближенно, т. е. правая часть уравнения (6.137) в некотором смысле мала.

Подставляя (6.133) и (6.134) во второй закон динамики (6.113), получаем уравнение для вектора поворота

$$\begin{aligned} \alpha_2 (\Delta \boldsymbol{\theta} - \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) + \omega \eta \lambda_r \Omega_0 \mathbf{n} \times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} - \alpha_1 \boldsymbol{\theta} + \omega \eta \mathbf{L} &= \\ &= \omega \eta \left(\lambda \frac{\delta^2 \boldsymbol{\theta}}{\delta t^2} + \lambda_r \frac{\delta^2 \tilde{\beta}}{\delta t^2} \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (6.138)$$

Второе уравнение из системы (6.113) после линеаризации принимает вид

$$\lambda_r \frac{\delta^2}{\delta t^2} (\gamma + \tilde{\beta}) + \nu \frac{\delta \tilde{\beta}}{\delta t} = 0. \quad (6.139)$$

Чтобы максимально упростить ситуацию, рассмотрим случай идеального “двигателя” неограниченной мощности. Мощность двигателя характеризуется параметром ν , причем с ростом ν увеличивается мощность двигателя. Для двигателя неограниченной мощности получаем

$$\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\delta \beta}{\delta t} \rightarrow \Omega_0 \Rightarrow \frac{\delta \tilde{\beta}}{\delta t} \rightarrow 0 \Rightarrow \nu \frac{\delta \tilde{\beta}}{\delta t} \rightarrow -\lambda_r \frac{\delta^2 \gamma}{\delta t^2}. \quad (6.140)$$

В таком случае уравнение (6.138) принимает вид

$$\alpha_2 (\Delta \boldsymbol{\theta} - \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) + \omega \eta \lambda_r \Omega_0 \mathbf{n} \times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} - \alpha_1 \boldsymbol{\theta} + \omega \eta \mathbf{L} = \omega \eta \lambda \frac{\delta^2 \boldsymbol{\theta}}{\delta t^2}. \quad (6.141)$$

Дальнейшие упрощения этого уравнения, видимо, невозможны и связаны с утратой принципиально важных свойств среды, которая моделирует электромагнитное поле. Сравнение уравнения (6.141) с классическим уравнением (6.74) показывает их существенное различие. Можно отметить два важных обстоятельства. Первое состоит в том, что классическое уравнение (6.74) является частным случаем уравнения (6.141) и получается из последнего при

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \Omega_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0. \quad (6.142)$$

Поэтому все факты, которые объясняются классическими уравнениями Максвелла, могут быть объяснены и на основе уравнения (6.141). Следует подчеркнуть, что учет любого из параметров (6.142) существенно меняет тип уравнения и потому важен с физической точки зрения. Например, в (6.141) в явном виде входит скорость системы отсчета $\mathbf{V} = \text{const}$. Иными словами, теоретически, на основе экспериментов с электромагнитными явлениями, оказывается возможным определить скорость движения инерциальной системы отсчета относительно электромагнитного поля (эфира). Уравнения Максвелла справедливы только в покоящейся относительно электромагнитного поля среде (что в полной мере не осознано до сих пор) и потому принципиально не позволяют сделать этого. Вопросы, связанные с заменой системы отсчета, требуют детального обсуждения⁴⁶. Параметры Ω_0 и α_1 являются новыми для

⁴⁶ К сожалению, П. А. Жилин не успел завершить это исследование. Раздел, посвященный замене системы отсчета, в данной главе отсутствует. Вопросы, связанные с заменой системы отсчета, детально рассмотрены в седьмой главе, в основу которой положены более ранние работы П. А. Жилина по электродинамике. Общие вопросы замены системы отсчета обсуждаются в подразделе 7.1.2, вопросы замены системы отсчета применительно к классическим уравнениям Максвелла — в подразделе 7.1.4. (Примеч. ред.)

теории электромагнитного поля, но фактически они хорошо известны в квантовой физике, причем, по всей вероятности, можно считать, что с точностью до постоянного множителя $\lambda_r \Omega_0 = \hbar$, где $\hbar$ есть постоянная Планка. Поэтому уравнение (6.141) можно, видимо, считать уравнением квантованного, а не классического электромагнитного поля.

Второе обстоятельство связано с тем, что рассматриваемая модель электромагнитного поля неконсервативна, а электромагнитные явления всегда сопровождаются тепловыми потоками. Это видно из уравнения теплопроводности (6.107), которое при линеаризации с учетом (6.133), (6.140) принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - \eta \lambda_r \Omega_0 \frac{\delta^2 \gamma}{\delta t^2} = -\eta a_4 \vartheta_0 (\vartheta - \vartheta_0), \quad (6.143)$$

$$\mathbf{h} = k \nabla \vartheta, \quad \gamma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}.$$

В данном случае ограничимся простейшей линейной постановкой.

Заключение

В данной главе обсуждалась возможность вывода основных уравнений электродинамики с позиций рациональной механики сплошных сред. Показано, что для этого необходимо рассматривать упругий континуум двухспиновых частиц весьма специального вида. Выведены классические уравнения Максвелла. Обсуждаются причины ограниченности классических уравнений Максвелла. Затем выводятся более общие уравнения, которые предположительно дают более точное описание электромагнитного поля.

Настоящая глава — результат многолетних исканий с целью понять электрические и магнитные явления с точки зрения принципов рациональной механики. Анализ известных фактов показывает, что спинорные движения, которые отсутствуют в ньютоновской механике, совершенно необходимы при описании основных понятий электромагнитного поля. Поэтому разработка теории электромагнитного поля требует, по крайней мере, привлечения эйлеровой механики.

Глава 7

Механика и новейшая физика¹

Введение

Конец столетия можно считать подходящим поводом для обсуждения роли, места и назначения механики в современном естествознании. На рубеже XIX и XX вв. механика составляла фундамент всей физики и преодолевала все возникающие препятствия. Ярким свидетельством тому явилась кинетическая теория газов. Существовали, впрочем, проблемы, которые лорд Кельвин в своей лекции “Тучи XIX века над динамической теорией теплоты и света”, прочитанной 27 апреля 1900 г., охарактеризовал следующими словами [152], с. 25–26: “Красота и ясность динамической теории, согласно которой теплота и свет являются формами движения, в настоящее время омрачены двумя тучами. Первая из них — это вопрос: как может Земля двигаться сквозь упругую среду, какой по существу является светоносный эфир? Вторая — это доктрина Максвелла–Больцмана о распределении энергии”. Не обсуждая самой постановки вопросов, укажем, что в начале XX в. были найдены пути преодоления этих затруднений, но они уводили далеко за пределы классической механики. Так возникла новейшая физика, которая заявила о “решительном разрыве с классической механикой”. Поэтому кажется необходимым дать хотя бы краткое сравнение исходных положений, принятых в механике и новейшей физике. Однако прежде чем проводить какие бы то ни было сравнения, следует четко изложить взгляд механиков на механику, ибо то, как трактуется механика физиками (см., например, работу А. Эйнштейна [154]), мало похоже на механику.

¹ Материал этой главы основан на двух статьях П. А. Жилина [43, 138]: “Реальность и механика” (Труды XXIII летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — СПб., 1996. — С. 6–49), “Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла” (Труды СПбГТУ. — СПб., 1994. — N 448. — С. 3–38). (*Примеч. ред.*)

Механика — это не теория какого бы то ни было явления Природы, но метод исследования Природы. В основах механики нет ни одного закона, который хотя бы в принципе мог быть опровергнут экспериментально. В фундаменте механики лежат логические утверждения, выражающие условия баланса неких величин. Данные утверждения сами по себе не достаточны для построения замкнутых теорий. Для этого необходимо привлекать дополнительные законы, наподобие закона всемирного тяготения, рассматриваемые как экспериментально установленные факты. Эти дополнительные законы могут оказаться недостаточными или даже ошибочными, но отказ от них не влияет на метод механики. Упомянутая незамкнутость механики может, конечно, восприниматься как ее недостаток людьми, которые полагают, что человечество близко к конечному познанию Мироздания. Те, кто способен увидеть Реальность, понимают, как бесконечно далеки люди от возможности правильно описать даже относительно простые проявления Реальности. Поэтому корректный метод изучения Природы по необходимости должен включать в себя заранее неопределенные элементы, манипулируя которыми можно улучшать те или иные теории разного рода явлений и тем самым расширять наши представления о Реальности. Механика устанавливает определенные ограничения на допустимую структуру этих неопределенных элементов, но сохраняет в них достаточно широкий произвол.

После этих кратких замечаний о методе механики полезно сравнить современные позиции механики и новейшей физики, возникшие через 70 лет после объявления физикой о “решительном разрыве с классической механикой”. Краткую сводку исходных положений механики можно найти во второй главе, не претендующей на формальную строгость, но отражающей существо вопроса.

а) Системы отсчета. Это краеугольное понятие в механике характеризуется К. Трусделлом [25], с. 33, как “чистый холст, на котором можно рисовать картины Природы. Этот холст должен быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”. Аналогичный взгляд отстаивал А. Пуанкаре [48]. Прямое несогласие с этой позицией высказывает А. Эйнштейн [155]. Например, в работе [154], с. 280, он пишет: “Теория вводит два рода физических предметов, а именно: 1) масштабы и часы (т. е. системы отсчета. — *П. Ж.*); 2) все остальное, например, электромагнитное поле, материальную точку и т. д. Это в известном смысле нелогично; собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений,

а не считать ее независимой от них”. Иными словами, согласно А. Эйнштейну, нужно сначала нарисовать картину, а только потом подбирать для нее холст. Именно так и поступают в общей теории относительности, причем смысл координат, включающих и время, остается принципиально неопределенным.

Очевидно, что взгляды механики и новейшей физики по этому пункту диаметрально противоположны и несовместимы.

б) Принцип инерции Галилея (GPI). В механике GPI принимается безоговорочно, и отказ от него разрушает все здание механики. Принятие GPI позволяет ввести в рассмотрение инерциальные системы отсчета. Жаль, что этот факт был окончательно осознан и введен в формальные структуры только к 1940 г. Однако на интуитивном уровне он принимался в механике с 1638 г. Так что логические основы механики были укреплены, но сущностное тело механики менять не пришлось. С концепциями новейшей физики GPI принципиально не совместим, ибо он напрямую противоречит специальной теории относительности (см. [149]). Отсюда ясно, что отвергается в физике и понятие инерциальной системы отсчета [156], с. 490. Вместе с тем, А. Эйнштейн и его последователи используют понятие неускоренной системы отсчета, не определяя этого понятия, т. е. ИСО все-таки вводятся. Не следует думать, что это просто упущение. Такова действительно необходимая для новейшей физики постановка вопроса, ибо GPI напрямую противоречит принципу относительности, основанному на преобразовании Лоренца, а обойтись без привлечения неускоренных систем отсчета не удастся.

в) Равномерность хода времени. И. Ньютон был первым, кто попытался дать определение понятия времени, причем он просто постулировал равномерность хода времени. Как определить понятие равномерности, Ньютон не указал, но предположил, что в Природе имеются процессы, позволяющие это сделать. Далее в подразделе 7.3.2 мы еще вернемся к этому вопросу. Детальному обсуждению понятие времени было подвергнуто А. Пуанкаре в 1898 г. (см. [48, 49]). Основной вывод А. Пуанкаре гласит [48], с. 63: “Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла, и можно применять его только условно”. Этот вывод обоснован А. Пуанкаре весьма обстоятельно, но, к сожалению, А. Пуанкаре в принципе неправильно понимал GPI и возводил его в ранг физического закона, причем необоснованного (еще одно условное соглашение). На самом деле это не так, что и было показано С. Зарембой [149], но это важное событие произошло только в 1940 г. Если принять GPI, то время в механике вводится с точностью до линейного преобразования $t \rightarrow kt + t_0$. Важно подчеркнуть, что формальное обоснование равномерности хода вре-

мени в механике с практической точки зрения ровным счетом ничего не изменило в ней, так как при этом не изменилось ни одного закона и ни одного уравнения. А вот новейшей физике упомянутое обоснование наносит невосполнимый логический урон. В новейшей физике требование равномерности хода времени игнорируется и подменяется рассуждениями о синхронизации часов в разных точках системы отсчета. Однако эти рассуждения не имеют отношения к требованию равномерности хода времени. Как бы ни синхронизовали часы, но, прежде всего, они должны идти равномерно. В противном случае такие понятия, как скорость и ускорение, вообще теряют объективный смысл (см. подразд. 2.1.3). Таким образом, и в этом пункте механика и новейшая физика не могут быть приведены в соответствие друг с другом.

г) Принцип относительности. В механике этот принцип выполняется автоматически. Если в какой-либо теории он не выполняется, то такая теория заведомо содержит ошибки. Никакой существенно новой информации из применения принципа относительности в механике извлечь не удастся. Это и не удивительно, ибо взгляд на системы отсчета, как на холст, на котором рисуются картины Природы, немедленно приводит к требованию, чтобы выбор холста не влиял на содержание картины. В частности, для этого необходимо, чтобы в механике использовались исключительно инвариантные дифференциальные операторы, т. е. операторы, не зависящие от выбора системы координат. Основными среди них являются операторы

$$\nabla, \quad \frac{d}{dt}; \quad \nabla \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla.$$

Позиция новейшей физики иная. Соответственно, в ней используются другие операторы

$$\nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla \frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial t} \nabla,$$

где оператор частного дифференцирования по времени не объективен, т. е. зависит от выбора системы координат. Несмотря на то что операторы ∇ и $\partial/\partial t$ не коммутируют, в физике на это не обращается внимания. Именно в силу использования необъективных операторов принцип относительности играет в физике исключительно важную роль, вплоть до того, что позволяет открывать новые законы.

д) Формальная логика. В механике формальная логика не доводится до уровня математической строгости, но явные нарушения формальной логики считаются недопустимыми. В новейшей физике формальная логика объявлена предрассудком, а ее законы часто подменяются рассуждениями о

красоте получаемых уравнений. П. Дирак пишет [150], с. 52: “...мне бы хотелось подчеркнуть новую точку зрения, принадлежащую А. Эйнштейну. Он считал необходимым качеством фундаментальных уравнений присущую им красоту. Эйнштейн впервые высказал эту мысль, и больше чем кто бы то ни было, подчеркивал важность красоты основных уравнений. Вы, конечно, можете спросить: почему уравнения должны обладать необыкновенной красотой? Я не могу ответить на это определенно. Можно лишь сказать, что этот принцип оказался чрезвычайно успешным”. В качестве примера нарушения логики сопоставим три утверждения, одновременно принимаемые в физике: а) энергия E и импульс p сохраняются; б) масса m не сохраняется; в) справедливо равенство

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2},$$

где c — скорость света в пустоте, т. е. универсальная постоянная. Другой пример: перенормировка. П. Дирак пишет [150], с. 152: «Таким образом, большинство физиков совершенно удовлетворены сложившейся ситуацией. Они считают, что квантовая электродинамика стала вполне совершенной теорией и о ней нечего больше беспокоиться. Должен сказать, что мне это в высшей степени не нравится, потому что в такой “совершенной” теории приходится пренебрегать в уравнениях бесконечностями, причем пренебрегать совершенно безосновательно. Это просто бессмысленно математически. В математике величину отбрасывают только в том случае, если она оказывается слишком малой, а не из-за того, что она бесконечно велика и от нее хотят избавиться!» Для механиков отмечу, что перенормировка относится к числу важнейших принципов физики, а приведенные ранее слова произнесены 15 сентября 1975 г., т. е. относительно недавно и отнюдь не в первые годы существования квантовой физики. Отношение к формальной логике разделяет механику и новейшую физику труднопреодолимым барьером. Задачей механики является такое ее развитие, при котором известные в физике результаты получались бы без столь радикальных средств, как отказ от формальной логики.

е) Спинорные движения. В настоящее время уже многим понятно, что спинорные движения являются центральным звеном в устройстве мира. Это известно, по крайней мере, со времен Пифагора. Однако в рациональные науки спинорные движения были введены только Л. Эйлером, но не в полной мере. В механику спинорные движения начали интенсивно внедряться во второй половине XX в., причем указанное внедрение оказалось чрезвычайно естественным и органичным. Если внимательно изучать старые теории эфира, прекрасно описанные в книге Г. Лоренца [137], то бросается в глаза,

что во всех этих теориях содержится попытка ввести спинорные движения. К сожалению, делается это неправильно. В то время единственным способом восприятия спинорного движения являлось представление о нем, как о роторе вектора скорости. На самом деле это не так. К обсуждению спинорных движений мы еще вернемся, а сейчас обратимся к новейшей физике.

Строго говоря, спинорные движения (динамические спины по терминологии, принятой в данной книге) в новейшей физике запрещены, но все-таки используются. Об истории этого вопроса можно прочитать в работе [157]. П. Дирак приводит слова Г. Лоренца, адресованные авторам идеи наличия динамического спина у электрона, голландским физикам Д. Уленбеку и С. Гудсмиту [150], с. 96: “Нет, у электрона не может быть спина. Я и сам об этом думал, но если бы электрон вращался, то скорость на его поверхности превышала бы скорость света. Так что из этого ничего не выйдет”. Хотя в современной физике используются термины “спин” и “магнитный момент” применительно к элементарным частицам, они не имеют отношения к соответствующим понятиям механики: это просто красивые названия для номеров соответствующих гармоник у решений уравнений Шредингера или их обобщений. По нашему мнению, роль спинорных движений в микромире очень велика. Атомная и ядерная энергии — это энергии спинорных движений. Специальная теория относительности запрещает спинорные движения, на что указал П. Эренфест сразу же после появления работы А. Эйнштейна 1905 г. Но в таком случае СТО запрещает почти все, что на самом деле имеет место в Природе.

ж) Экспериментальная проверка результатов теории. Все получаемые в механике результаты должны соответствовать данным эксперимента. Конечно, это трудно, и есть немало экспериментов, результаты которых механика не может корректно описать в настоящее время. Например, ни одна теория пластичности не может правильно описать опыты Треска по экструзии свинца. Существует множество других проблем, не поддающихся в настоящее время теоретическому анализу. Но это не повод для того, чтобы кричать “караул” и выворачивать теорию наизнанку. В конце концов, для того и существует экспериментальная механика, чтобы решать проблемы, недоступные в настоящее время для теории. Так было, так есть и так всегда будет. Типичным для механики является эволюционный путь развития. В результате теория отстает от эксперимента на десятилетия и даже на столетия. Кажется, что это вполне нормально. Совершенно иначе проблему взаимоотношений между экспериментом и теорией решает новейшая физика. Ее формулы устроены таким образом, что позволяют почти автоматически объяснить все

экспериментальные данные. Покажем, как это делается на примере. Допустим, необходимо измерить скорость v_x частицы $\mathcal{A}$. Введем штрихованную систему координат (излюбленный прием физиков), движущуюся со скоростью $u = c - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и пренебрежимо мала в сравнении со скоростью $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Измерим теперь скорость $v_{x'}$ частицы $\mathcal{A}$ в штрихованной системе. Допустим, получится скорость $v_{x'} = -c + \eta$, где $\eta > 0$ — малая величина, например $\eta = 2$ см/с. Вычислим скорость v_x . Имеем по известной формуле [158], с. 30

$$v_x = \frac{u + v_{x'}}{1 + uv_{x'}/c^2} = \frac{c(\eta - \varepsilon)}{\eta + \varepsilon + \varepsilon\eta/c} \simeq c \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon}.$$

Пусть теперь $\varepsilon = 1$ см/с, т. е. $\varepsilon \ll c$. Тогда $v_x = c/3 = 10^{10}$ см/с. Пусть далее $\varepsilon = 3$ см/с, т. е. и здесь $\varepsilon \ll c$. Имеем $v_x = -0,6 \cdot 10^{10}$ см/с. Таким образом, играя пренебрежимо малой величиной ε , можно менять v_x в широких пределах $-0,6 \cdot 10^{10}$ см/с $\leq v_x \leq 10^{10}$ см/с. Трудно ли в таких условиях объяснить любое экспериментально полученное значение v_x ?

Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы сделать вывод о том, что механика уже не является частью физики, как это было сто лет назад.

Следует подчеркнуть, что все указанное ни в коем случае нельзя воспринимать как критику в адрес новейшей физики, ибо критика подразумевает анализ состояния дел в физике, чего нет и в помине. Да и о какой критике может идти речь? Как бы ни относиться к методам, используемым в современной физике, невозможно отрицать тот очевидный факт, что физики еще десятки лет назад нашли правдоподобные ответы на такие вопросы, к решению которых механика только готовится приступить. Сумеет ли механика решить эти проблемы традиционными для нее методами? Это требует доказательств. Предстоит огромная работа. В конечном счете, цель данной работы — привлечь внимание механиков к решению фундаментальных проблем естествознания. Прежде всего, это относится к описанию явлений электромагнетизма и строения атома. Хочется верить, что механика способна внести свой вклад в эти важнейшие вопросы, которые, несмотря на все достижения физики, еще далеки от окончательных решений.

7.1. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла

Со времени создания электродинамики Максвелла прошло примерно 130 лет. Уравнения Максвелла широко применяются в механике, в частности, в

электромеханике. Нельзя, однако, сказать, что состояние проблемы в целом может быть признано удовлетворительным в логическом отношении. До сих пор уравнения Максвелла не вписываются естественным образом в структуры механики. Более того, принято считать, что между электродинамикой Максвелла и классической механикой существует фундаментальное различие, ибо уравнения Максвелла инвариантны относительно группы Лоренца, а уравнения классической механики — относительно группы Галилея. Долгое время справедливость сказанного не подвергалась тщательному логическому анализу с позиций рациональной механики, хотя вопросов накопилось довольно много. Прежде всего, как вообще могло случиться, что между механикой и электродинамикой возникло фундаментальное расхождение? Какие именно аксиомы механики противоречат законам электродинамики? Ответ хотелось бы видеть столь же ясным, как в геометрии, где точка бифуркации между евклидовой и неевклидовой геометриями лежит в V постулате. В конце концов, Максвелл создал свою электродинамику в 1861–1864 гг., когда идеи классической механики играли господствующую роль. От каких из них отказался Максвелл? Или какие новые идеи, не совместимые с существующими, он внес? Бесспорно, Максвелл открыл действительно новую идею, осознавать которую начали только через столетие, но в чем ее противоречие с классической механикой? Возникшая в XX в. специальная теория относительности, казалась бы, ответила на все эти вопросы. Но нельзя забывать, что специальная теория относительности дает всего лишь возможную интерпретацию, которая несовместима с классической механикой. В данном случае интерес представляет несовместимость самой электродинамики с исходными аксиомами механики, а это не одно и то же. Рассмотрим такой, например, вопрос.

Известно, что в основаниях электродинамики и многих разделов механики лежат волновые уравнения. Каким же образом одно и то же уравнение оказывается инвариантным относительно разных групп преобразований в зависимости от области приложений?

Имеется множество других вопросов, но вряд ли их стоит перечислять. Не лучше ли просто повнимательнее приглядеться к уравнениям Максвелла и только после этого продолжать задавать вопросы? Однако здесь возникает затруднение. Чтобы прояснить его, процитируем Л. И. Мандельштама [153]: “Неправильно полагать, что теория относительности перевернула наши понятия о времени и о пространстве в том смысле, что на место старых и четких понятий она поставила такие же новые. Это не так. Одна из больших заслуг теории относительности состоит в том, что она показала, что основные поня-

тия, которыми оперировали раньше — во всяком случае, в известной части, — вовсе не были определены, что многие высказывания не имели вообще никакого смысла”. Аналогичной точки зрения придерживаются и многие другие крупные физики. Справедливы ли эти претензии к классической механике? К сожалению, по форме, а не по существу, они справедливы: в большинстве учебников по механике вопросы пространства и времени действительно излагаются крайне небрежно. Как будет показано далее, расхождение во взглядах физики и рациональной механики на электродинамику и многие другие прилегающие вопросы лежит именно на этом “элементарном” уровне. Поэтому необходимо начать с обсуждения исходной позиции рациональной механики. Разумеется, в изложенном нет претензий на новизну, но и конкретных ссылок дать невозможно.

7.1.1. Системы координат и их замена

Введение инерциальных систем отсчета² фундаментально опирается на принцип Галилея, и в этом смысле инерциальные системы отсчета являются не только математическими конструкциями, но и физическими понятиями. Все физические законы формулируются именно в системах отсчета, и во всех инерциальных системах отсчета их формулировки не различаются между собой. В рамках одной и той же системы отсчета можно использовать сколь угодно различных систем координат как подвижных, так и неподвижных относительно тела отсчета. Если математическое время в разных системах отсчета может меняться только в рамках преобразования (2.5), то координатное время может выбираться как угодно, в том числе и различным в разных точках системы координат. Никакой произвол в выборе системы координат вообще не сказывается на объективном содержании физического закона, меняется только координатная форма представления физического закона.

Утверждение. *Многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и др.) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат.*

Ввиду сказанного ясно, что смешение понятий систем отсчета и систем координат совершенно недопустимо. Тем не менее в литературе по физике и механике, особенно в изданиях 20–30-летней давности, не говоря уже о более старых изданиях, упомянутое смешение встречается часто. Во избежание каких бы то ни было недоразумений приведем описание понятия системы

² Об инерциальных системах отсчета см. раздел 2.1. (Примеч. ред.)

координат. При введении системы отсчета были использованы отсчетный репер $\{O, e_k\}$, отсчетная матрица g_{mn} и отсчетные координаты x^k . Только после этого и обретают смысл расстояния и направления в теле отсчета. И репер $\{O, e_k\}$, и матрица g_{mn} , и координаты x^k в данном теле отсчета зафиксированы раз и навсегда, ибо они и порождают само тело отсчета. Отсчетные координаты идентифицируют точки тела отсчета, но при желании можно изменить способ идентификации. Важно только помнить, что все точки тела отсчета уже имеют собственные имена, которые никуда и никогда не исчезают. Ситуация здесь та же, что и у людей. Один и тот же человек может получить много удостоверений личности, но он останется одним и тем же человеком.

Определение. *Системой координат в теле отсчета называется система идентификации точек данного тела отсчета.*

Для идентификации точек тела отсчета необходимо каждой такой точке сопоставить тройку чисел так, чтобы каждой точке отвечала бы одна и только одна тройка чисел, и наоборот, чтобы каждой тройке чисел отвечала бы одна и только одна точка тела отсчета. Обозначим через y^i упомянутую тройку чисел

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^i(x, t) \Rightarrow x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t) \equiv x^i(y, t). \quad (7.1)$$

Здесь используется подвижная система координат y^i , т. е. используется система идентификации, зависящая от времени. В дальнейшем можно забыть о существовании формул (7.1) и пользоваться заменами систем координат вида

$$\begin{aligned} y^{k'} &= y^{k'}(y^1, y^2, y^3, t) \equiv y^{k'}(y, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow y^k &= y^k(y^{1'}, y^{2'}, y^{3'}, t) \equiv y^k(y', t). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Именно по отношению к заменам (7.2) определяются законы преобразования координат векторов и тензоров высшего ранга. Поскольку выбор системы координат полностью произволен, принимается специальная аксиома, которая, впрочем, всегда подразумевалась, но никогда не рассматривалась отдельно. Для данной работы целесообразно выделить эту аксиому.

Принцип объективности. *Все физические величины и физические законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

В частности, вектор положения какой-либо точки тела отсчета не зависит от выбора подвижной (или неподвижной) системы координат

$$r(x) = x^k e_k = x^k(y, t) e_k \equiv r(y, t). \quad (7.3)$$

Точка $\mathbf{r}$ неподвижна в теле отсчета, хотя ее координаты (не отсчетные) y^k могут меняться во времени. Базисные векторы системы координат y^k находятся стандартным образом

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial y^k} = \frac{\partial x^p(\mathbf{y}, t)}{\partial y^k} \mathbf{e}_p. \quad (7.4)$$

По ним находится метрический тензор системы y^k

$$a_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k = \frac{\partial x^s(\mathbf{y}, t)}{\partial y^i} \frac{\partial x^p(\mathbf{y}, t)}{\partial y^k} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_p = \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} g_{sp}. \quad (7.5)$$

По матрице a_{ik} находится взаимная (обратная) матрица a^{mp} и векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^p(\mathbf{y}, t)$

$$a_{ik} a^{kp} = \delta_i^p, \quad \mathbf{r}^p(\mathbf{y}, t) = a^{pm}(\mathbf{y}, t) \mathbf{r}_m(\mathbf{y}, t). \quad (7.6)$$

Введем оператор-градиент

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^k(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^k, \quad \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{r}_k \cdot \nabla. \quad (7.7)$$

Этот оператор не зависит от выбора подвижной системы y^k . Пусть дана частица $\mathcal{A}$, движущаяся относительно тела отсчета. Ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ является функцией времени. Скорость частицы относительно тела отсчета определяется стандартным образом

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}_A(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{y}_A(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{r}(\mathbf{y}_A(t), t)}{\Delta t}. \quad (7.8)$$

Прежде чем вычислить производную (7.8), найдем скорость точки системы координат y^k с фиксированными координатами y_*^k . Эта точка (не материальная) движется относительно тела отсчета. Ее вектор положения определяется вектором $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)$, а скорость определяется по формуле

$$\mathbf{V}_* = \frac{d\mathbf{r}_*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)}{\partial t}. \quad (7.9)$$

Таким образом, частная производная по времени от вектора положения $\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)$ определяет скорость точки системы координат с координатами $\mathbf{y}_*$. Никакого отношения к скорости движения материальных частиц она не имеет и сама по себе ни в один физический закон входить не может. Теперь формулу (7.8) можно представить в виде

$$\mathbf{V}_A = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y_A^k} \frac{dy_A^k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{dy_A^k}{dt} \mathbf{r}_k^A. \quad (7.10)$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет скорость точки системы координат $\mathbf{y}_A^k$, а второе — скорость материальной точки A относительно этой точки системы координат. Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, заданное в каждой точке $\mathbf{r}$ тела отсчета как функция времени. Изменение поля в данной точке тела отсчета выражается производной от $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, имеем формулу

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

так как точка $\mathbf{r}$ тела отсчета неподвижна, т. е. в этом случае нет разницы между полной и частной производными по времени. Ситуация меняется, если тензорное поле рассматривается не как функция точки тела отсчета и времени, а как функция подвижных координат и времени

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}(\mathbf{y}, t), t) = \mathbf{B}(\mathbf{y}(t), t). \quad (7.11)$$

Здесь соблюдается строгое согласие с требованиями математики, и символ функции при переходе к новым аргументам меняется. В физике и механике обычно этого не делают, так как значения функций $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{y}(t))$ совпадают. В дальнейшем будем придерживаться обычных для механики обозначений, т. е. писать $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{y}(t), t)$. Однако в следующем далее выражении будут использованы более точные формулы (7.11):

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{d\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt}.$$

Вспоминая последнюю из формул (7.7), записываем

$$\frac{d\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt} \mathbf{r}_k \cdot \nabla \mathbf{B}.$$

Заметим, что точка $\mathbf{r}(\mathbf{y}(t), t)$ в соответствии с (7.3) неподвижна относительно тела отсчета, поэтому имеем

$$\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt} \mathbf{r}_k = \mathbf{0}.$$

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \cdot \nabla \mathbf{B} \equiv \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{V}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad (7.12)$$

где $\mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$ — скорость точки с фиксированными координатами $\mathbf{y}^k$ относительно тела отсчета. В механике сплошных сред (например, в гидромеханике) координаты $\mathbf{y}^k$ выбираются вмороженными в среду и закрепляются за

одними и теми же материальными частицами. В этом случае (и только в этом!) производная, стоящая в правой части (7.12), называется локальной производной поля $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)$, первое слагаемое в правой части (7.12) называется конвективной производной. Материальную производную обозначают символом

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \equiv \frac{\delta \mathbf{A}(\mathbf{r}(\mathbf{y}), t)}{\delta t}.$$

Тогда (7.12) можно переписать в виде³

$$\frac{\delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\delta t} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Если, например, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$ — скорость частицы жидкости, то $\frac{\delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\delta t}$ есть ее ускорение. Формула (7.12) вполне стандартная, но она слишком важна для дальнейшего, чтобы ограничиться просто ссылкой. Ранее мы использовали замены системы координат (7.1), которые были неподвижны относительно тела отсчета, но время в этих преобразованиях не затрагивалось. Во многих разделах механики используются и более общие координатные системы, в которых преобразуются не только пространственные координаты, но и время, а именно используются координаты $\mathbf{y}^k, \tau$

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^k(x^1, x^2, x^3, t) = \mathbf{y}^k(x, t), \quad \tau = \tau(x, t), \quad (7.13)$$

где величина τ называется координатным временем. Относительно преобразования (7.13) выдвигается только одно обязательное условие — взаимно однозначная обратимость (7.13)

$$x^k = x^k(\mathbf{y}, \tau), \quad t = t(\mathbf{y}, \tau). \quad (7.14)$$

Математическое время t и координатное время τ отнюдь не равноценны. Во все физические законы входят именно производные по t , от которых можно при желании перейти к производным по координатному времени τ . Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Можно записать

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{A}(x(\mathbf{y}, \tau), t(\mathbf{y}, \tau)) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \tau),$$

³ В данном подразделе обсуждается определение материальной производной, принятое в гидродинамике. В подразделе 3.2.1 можно найти более общее определение материальной производной, введенное в рассмотрение П. А. Жилиным. В том случае, когда координаты $\mathbf{y}^k$ выбираются замороженными в среду и закрепляются за одними и теми же материальными частицами, формула П. А. Жилина для материальной производной совпадает с формулой, принятой в гидродинамике. (*Примеч. ред.*)

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (7.15)$$

Производная

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau(x, t)}{\partial t} = f(x, t) = F(y, \tau) \quad (7.16)$$

вычисляется по (7.13), а затем с помощью (7.14) переписывается через переменные y^k и τ . Здесь, если и возникают какие-либо сложности, то они носят чисто технический характер. Это обычные математические операции замены переменных, и настаивать на их особом физическом смысле не стоит. Преобразования Лоренца полностью укладываются в схему (7.13), (7.14), поэтому все уравнения классической механики инварианты (в некотором смысле) относительно преобразования Лоренца, а также относительно значительно более общих групп преобразований. Оператор дифференцирования по математическому времени d/dt есть инвариантный оператор, т. е. оператор, не зависящий от выбора системы координат. Напротив, оператор частного дифференцирования по математическому времени $\partial/\partial t$ зависит от выбора системы координат, и потому оператор $\partial/\partial t$ сам по себе не может входить в какое-либо уравнение, претендующее на физический смысл иначе, чем в виде комбинации (7.12). Легко доказывается коммутативность операторов ∇ и d/dt

$$\nabla \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla \quad \Rightarrow \quad \nabla \frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial t} \nabla. \quad (7.17)$$

Неравенство (7.17) есть прямое следствие зависимости оператора $\partial/\partial t$ от выбора системы координат. Максвелл при введении тока смещения использовал свойство (7.17), откуда очевидно, что он использовал оператор d/dt , но не оператор $\partial/\partial t$, как это утверждается в современных учебниках физики.

7.1.2. Замена систем отсчета

Замены систем координат описываются формулами (7.1), (7.3) или более общими формулами (7.13), (7.14). Эти замены не налагают никаких ограничений на форму физических законов, если они записаны в векторном или тензорном виде. Если используется координатная форма записи физических законов, то, разумеется, эта форма меняется при переходе одной системы координат к другой. Например, инвариантный дифференциальный оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \quad (7.18)$$

имеет различный вид в декартовой и цилиндрических системах координат, хотя он порожден инвариантным оператором-градиентом ∇ , определенным формулой (7.7). Совершенно иначе обстоит дело с заменами систем отсчета. Как уже отмечалось, понятие тензора любого ранга вводится только в каждой системе отсчета отдельно. Никакие операции между тензорами, заданными в разных системах отсчета, невозможны. Поэтому замена системы отсчета включает в себя предварительную операцию переноса тензора из одной системы в другую. Далее будет описана операция переноса вектора. Поскольку тензоры высших рангов являются элементами тензорных произведений векторных пространств, то, определив операцию переноса вектора, определяют и операцию переноса тензора любого ранга.

Пусть даны две системы отсчета S и S_* , которые не обязательно инерциальны, но используют математическое время, т. е. часы, оттарированные в инерциальной системе отсчета. Пусть S -система порождена отсчетным репером $\{O, e_k\}$, отсчетной матрицей g_{ik} и отсчетными координатами x^k . Система S_* порождена теми же объектами, снабженными звездочками: $\{O_*, e_k^*\}$, g_{ik}^* , x_*^k . Найдем движение S_* -системы относительно S -системы. Пусть в какой-то момент времени $t = 0$, принимаемый за начало отсчета времени, начало O_* системы S_* занимает положение точки $\tilde{O}$ в S -системе и определяется в ней вектором $r_{\tilde{O}}$. Пусть векторы e_k^* при $t = 0$ занимают положения векторов $\tilde{e}_k$ в S -системе. Тогда репер $\{\tilde{O}, \tilde{e}_k\}$, заданный в S -системе, будет играть ту же роль, что репер $\{O_*, e_k^*\}$ в S_* -системе. Пусть вектор r_* задает положение точки $\mathcal{A}_*$ с координатами x_*^k в S_* -системе. Тогда вектор $\tilde{r} = x_*^k \tilde{e}_k$, откладываемый от точки $\tilde{O}$, будет задавать точку $\tilde{\mathcal{A}}$ в S -системе, положение которой относительно репера $\{\tilde{O}, \tilde{e}_k\}$ точно такое же, как положение точки $\mathcal{A}_*$ относительно репера $\{O_*, e_k^*\}$. Пусть начало O_* системы S_* движется произвольно относительно S -системы, и ее движение в S -системе задается вектором положения $a(t)$, причем $a(0) = r_{\tilde{O}}$. Тогда положение точки $\mathcal{A}_*$ системы S_* в произвольный момент времени задается следующим вектором положения в S -системе:

$$r(\mathcal{A}_*, t) = a(t) + Q(t) \cdot (x_*^k \tilde{e}_k), \quad (7.19)$$

где ортогональный тензор $Q(t)$:

$$Q(t) \cdot Q^T(t) = Q^T(t) \cdot Q(t) = E, \quad \det Q = 1, \quad Q(0) = E \quad (7.20)$$

определен в S -системе, как и векторы $a(t)$ и $\tilde{e}_k$, и задает поворот S_* -системы относительно S -системы.

Определение. Преобразование (7.19), определяющее движение S_* -системы относительно S -системы, называется заменой системы отсчета.

Преобразование (7.19) играет очень важную роль в механике, ибо многие физические величины, как, например, внутренняя энергия системы, не зависят от выбора системы отсчета и потому должны быть инвариантны относительно замены системы отсчета. Данное требование позволяет установить допустимый вид зависимости внутренней энергии от величин, определяющих ее. Эта техника очень хорошо разработана и широко применяется, но здесь рассматриваться не будет. Пусть точка $\mathcal{A}_*$ движется относительно S_* -системы, и закон ее движения задан функциями $\mathbf{x}_*^k(\mathbf{t})$. Тогда вектор $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{x}_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{e}}_k$ задает движение точки $\tilde{\mathcal{A}}$ в S -системе точно таким, каким видит наблюдатель в S_* -системе движение точки $\mathcal{A}_*$. А вот наблюдатель в S -системе видит движение этой же точки $\mathcal{A}_*$ системы S_* как движение точки в S -системе, определяемое вектором положения

$$\mathbf{r}(\mathcal{A}_*, \mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{e}}_k). \quad (7.21)$$

Дифференцируя (7.21) по времени, получаем скорости и ускорения точки $\mathcal{A}_*$ относительно S -системы. Векторы

$$\mathbf{V}_* = \dot{\mathbf{x}}_*^k(\mathbf{t}) \mathbf{e}_k^*, \quad \mathbf{W}_* = \ddot{\mathbf{x}}_*^k(\mathbf{t}) \mathbf{e}_k^* \quad \left(\dot{\mathbf{f}} \equiv \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{t}} \right) \quad (7.22)$$

задают скорость и ускорение точки $\mathcal{A}_*$ в S_* -системе. Векторы

$$\tilde{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{x}}_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \tilde{\mathbf{W}} = \ddot{\mathbf{x}}_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{e}}_k$$

задают скорость и ускорение точки $\tilde{\mathcal{A}}$ относительно репера $\{\tilde{\mathbf{O}}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ точно такими, какими видит наблюдатель в S_* -системе величины (7.22). Однако скорость и ускорение точки $\mathcal{A}_*$ относительно S -системы определяются по более сложным формулам, вытекающим после дифференцирования (7.21) по времени

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}_*) = \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathcal{A}}) + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{e}}_k. \quad (7.23)$$

Последнее слагаемое в (7.23) обычно записывается в другой форме, с учетом уравнения Пуассона,

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{t}),$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ называется вектором угловой скорости S_* -системы относительно S -системы.

Исключая из (7.23) тензор $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t})$ с помощью уравнения Пуассона, а вектор $\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_*^k \tilde{\mathbf{e}}_k$ с помощью уравнения (7.21), получаем окончательное выражение для скорости точки $\mathcal{A}_*$ относительно S -системы

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}_*) = \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times [\mathbf{r}(\mathcal{A}_*, \mathbf{t}) - \mathbf{a}(\mathbf{t})] + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \quad (7.24)$$

Выражение (7.24) также играет важную роль при установлении структуры многих характеристик физических систем, так как очень часто эти характеристики не должны зависеть от замены системы отсчета, т. е. менять своего вида при любом виде векторов $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ и ортогонального тензора $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$. Для инерциальных систем отсчета выражения (7.21) и (7.24) упрощаются, ибо

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 \mathbf{t}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad (7.25)$$

и принимают вид

$$\mathbf{r}(\mathcal{A}_*) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{V}(\mathcal{A}_*) = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathcal{A}}). \quad (7.26)$$

Первое из этих выражений называется преобразованием Галилея, а принцип относительности Галилея утверждает независимость (инвариантность) всех физических законов относительно преобразования (7.26). В механике это ограничение почти всегда выполняется автоматически. Правда, из требования инвариантности уравнения баланса энергии относительно преобразования (7.26) вытекает закон сохранения массы для закрытых систем, но многие воспринимают этот результат как самоочевидный. Имеется ряд других следствий, но все они носят достаточно тривиальный характер. Значительно более содержательные результаты дает требование инвариантности по отношению к преобразованию (7.21), (7.23). Однако это требование можно предъявить *не ко всем* физическим величинам и законам. Большинство физических величин зависит известным образом от выбора системы отсчета (кинетическая энергия, количество движения, кинетический момент и т. д.), но ни одна физическая величина не может зависеть от выбора системы координат (принцип объективности).

Замечание. Ранее мы определили операцию переноса вектора единым образом. При этом оказалась скрытой одна важная деталь: на самом деле выбор репера $\{\tilde{\mathbf{O}}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ в $\mathcal{S}$ -системе можно осуществлять произвольно, а единственное ограничение состоит в том, что должны выполняться условия $\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_m = g_{km}^*$.

7.1.3. Волновое уравнение. Идея ковариантности

Известно, что в основаниях классической электродинамики и, например, линейной динамической теории упругости лежат волновые уравнения. Принято считать, что в электродинамике волновое уравнение инвариантно относительно группы Лоренца, а в теории упругости волновое уравнение инвариантно относительно группы Галилея. Истолкование этого странного факта

почему-то в литературе отсутствует. Ясно, что между волновыми уравнениями в электродинамике и в теории упругости существует какое-то различие, которое надо четко установить и проанализировать. В электродинамике волновое уравнение имеет вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (7.27)$$

В динамической теории упругости волновое уравнение записывается в форме

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Phi}{dt^2}. \quad (7.28)$$

На самом деле постоянные c в (7.27) и (7.28) различны. Кроме того, в динамической теории упругости имеется не одно, а два волновых уравнения типа (7.28) с различными значениями постоянной c . Поэтому во избежание недоразумений на уравнение (7.28) будем смотреть так: именно в такой форме было бы записано уравнение (7.27), если бы оно использовалось в рациональной механике. Частные производные по времени в механике встречаются сами по себе, а не в виде комбинации (3.4) только в том случае, когда смыслы полной и частной производной по времени совпадают. А это имеет место только при использовании систем координат, неподвижных относительно тела отсчета. В этом случае никакого различия в уравнениях (7.27) и (7.28) нет — они абсолютно идентичны. Однако при использовании подвижных координат уравнения (7.28) и (7.27) различаются самым существенным образом. В современной электродинамике отдают предпочтение уравнению (7.27), а в рациональной механике — уравнению (7.28). Едва ли можно сомневаться в том, что Дж. Максвелл отдал бы предпочтение уравнению (7.28), ибо только так и понимались все производные по времени в третьей четверти XIX в. Выясним, какое из уравнений (7.27) или (7.28) правильное с точки зрения рациональной механики и почему. Ответ прост: уравнение (7.28) удовлетворяет принципу объективности, а уравнение (7.27) — не удовлетворяет. Поэтому в рациональной механике уравнение (7.27) неприемлемо. Почему физики считают уравнение (7.27) приемлемым, должны ответить они сами. Чтобы проиллюстрировать невыполнение принципа объективности для уравнения (7.27), рассмотрим простой пример. Сначала выберем неподвижную декартову систему координат x, y, z в теле отсчета и возьмем функцию

$$\Phi = (x, y, z, t) = Ax, \quad A = \text{const}. \quad (7.29)$$

Очевидно, что эта функция является решением как уравнения (7.27), так и уравнения (7.28). Решение (7.29) имеет простой физический смысл: в физи-

ке — это электростатический потенциал между двумя параллельными однородно заряженными плоскостями, а в теории упругости — это перемещение точек однородного слоя, растягиваемого постоянными нормальными напряжениями. Совершенно ясно, что решение (7.29) должно оставаться решением и при использовании любой другой системы координат, в том числе и подвижной.

Введем подвижную систему координат

$$x' = a \cos \omega t + x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (7.30)$$

Очевидно, что решение (7.29) должно остаться решением и в системе координат со штрихами

$$\Phi(x' - a \cos \omega t', y', z', t') = A(x' - a \cos \omega t') \equiv \Phi'(x', y', z', t'). \quad (7.31)$$

Функция $\Phi'(x', y', z', t')$ должна удовлетворять уравнениям

$$\Delta' \Phi' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2}, \quad \Delta' \Phi' = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Phi'}{dt'^2} \quad (t' \equiv t). \quad (7.32)$$

Оператор Лапласа Δ' в системе координат со штрихами всегда совпадает с таковыми в исходной системе: $\Delta' = \Delta$. Поэтому левые части уравнений (7.32) обращаются в нуль для функции (7.31). Вычислим правые части:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} = A a \omega^2 \cos \omega t' \neq 0;$$

$$\frac{d\Phi'}{dt'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = A a \omega (-\sin \omega t + \sin \omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \Phi'}{dt'^2} = 0.$$

Таким образом, функция Φ' не удовлетворяет первому из уравнений (7.32), а второму — удовлетворяет, как это и должно быть в соответствии с принципом объективности. Заметим, что речь идет о заменах системы координат, а не систем отчета, где требуется дополнительное обоснование того, как связаны скалярные функции Φ и Φ_* , заданные в разных системах отсчета. Итак, с точки зрения рациональной механики уравнения (7.27) можно использовать только в неподвижных системах координат. Поэтому рассматривать вопрос о том, как ведет себя уравнение (7.27) при преобразованиях Лоренца, можно только в чисто математическом, но не в физическом понимании, ибо преобразованиями Лоренца вводятся в рассмотрение подвижные координаты. Уравнение (7.28) сохраняет свой математический и физический смысл при любых преобразованиях координат. Как это следует делать, указано в подразделе 7.1.1.

Обсудим идею ковариантности основных уравнений физики при преобразованиях системы координат. Трудно понять, почему этой идее придается столь большое значение в физике. Ведь ясно с самого начала, что идея ковариантности не может играть значительной роли в физике. Например, из дифференциальной геометрии хорошо известно, что инвариантные, т. е. не зависящие от выбора системы координат, дифференциальные операторы не обладают свойством ковариантности. Почему в физике, помимо инвариантности основных уравнений, нужно требовать еще и ковариантности этих уравнений? Согласимся на время с идеей ковариантности и посмотрим, относительно каких линейных преобразований координат и времени уравнение (7.27) обладает свойством ковариантности. Последняя означает, что уравнение (7.27), записанное в двух различных системах координат x_1, x_2, x_3, t и x'_1, x'_2, x'_3, t' , имеет совершенно одинаковый вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_3'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2}, \quad (7.33)$$

где

$$\Phi [x_1(x', t'), x_2(x', t'), x_3(x', t'), t(x', t')] \equiv \Phi'(x'_1, x'_2, x'_3, t'). \quad (7.34)$$

Напомним, что в данном случае речь идет о чисто математических операциях, лишенных физического смысла, так как уравнение (7.27) справедливо только для неподвижных относительно тела отсчета систем координат. Здесь же в рассмотрение вводятся подвижные системы координат. Далее удобнее будет предварительно сделать линейную замену независимых переменных

$$y_1 = x_1 - ct, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_1 + ct. \quad (7.35)$$

Очевидно, что такая замена переменных допустима, так как невырожденные линейные преобразования образуют группу. В новых переменных уравнения (7.33) принимают вид

$$4 \frac{\partial F}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} = 0, \quad 4 \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1' \partial y_4'} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2} = 0, \quad (7.36)$$

где

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi \left(\frac{y_1 + y_4}{2}, y_2, y_3, \frac{y_4 - y_1}{2c} \right) \equiv F(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

а связь отображений F и F' та же, что и в (7.34).

Выясним, при каких линейных заменах переменных вида

$$\begin{aligned} y'_1 &= \alpha y_1 + \beta_* y_4, & y'_2 &= y_2, \\ y'_3 &= y_3, & y'_4 &= \beta y_1 + \gamma y_4 \quad (\alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0) \end{aligned} \quad (7.37)$$

будут справедливы уравнения (7.36). Имеем легко проверяемое тождество

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} &= 4 \left(\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2} \right) + \\ &+ 4(\alpha\gamma + \beta\beta_*) \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1' \partial y_4'} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2} = 0. \end{aligned}$$

Для справедливости (7.36) необходимо выполнение равенств

$$\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2} = 0, \quad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1. \quad (7.38)$$

Поскольку в общем случае функция F' не может одновременно удовлетворять двум разным уравнениям (второму из (7.36) и (7.38)), окончательно для определения постоянных $\alpha, \beta, \beta_*, \gamma$ получаем систему

$$\alpha\beta_* = 0, \quad \gamma\beta = 0, \quad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1, \quad \alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0. \quad (7.39)$$

Эта система имеет всего два семейства решений:

$$\alpha \neq 0, \quad \gamma = 1/\alpha, \quad \beta = \beta_* = 0; \quad (7.40)$$

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta \neq 0, \quad \beta_* = 1/\beta. \quad (7.41)$$

Возвращаясь от переменных y_1, y_2, y_3, y_4 к переменным x_k, t , получаем два набора линейных преобразований координат, удовлетворяющих принципу ковариантности

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} x_1 + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} ct, & x'_2 &= x_2, & x'_3 &= x_3, \\ t' &= \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} t + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \frac{x_1}{c}; \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1 + \beta^2}{2\beta} x_1 + \frac{1 - \beta^2}{2\beta} ct, & x'_2 &= x_2, & x'_3 &= x_3, \\ t' &= -\frac{1 + \beta^2}{2\beta} t - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \frac{x_1}{c}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

где α и β — любые вещественные числа, отличные от нуля. Очевидно, что преобразования (7.42) и (7.43) отличаются. Преобразование Лоренца есть частный случай преобразования (7.42), получающийся только при положительных α с помощью замены

$$\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) / \left(1 + \frac{v}{c}\right)}. \quad (7.44)$$

Таким образом, уравнение (7.27) ковариантно не только относительно преобразований Лоренца, но и относительно более общих преобразований (7.42), (7.43), полное истолкование которых здесь не затрагивается. Выделять из (7.42) и (7.43) только одно преобразование Лоренца без достаточных к тому оснований несколько некорректно.

Итак, волновое уравнение, записанное в форме (7.28), инвариантно как относительно преобразования Галилея, так и относительно значительно более общих замен систем координат (но не систем отсчета!). Волновое уравнение в форме (7.27) может использоваться в физике только в том случае, когда система координат неподвижна относительно инерциального тела отсчета. Ковариантность этого уравнения относительно преобразований Лоренца есть чисто математический факт, не переносимый на физические явления.

7.1.4. Уравнения Максвелла

Далее рассматриваются уравнения Максвелла в пустоте, ибо включение токов требует обсуждения вопросов, не имеющих прямого отношения к рассматриваемой теме. В современной физике уравнения Максвелла в пустоте записываются в виде

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.45)$$

В механике эти уравнения записывались бы несколько по-иному

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.46)$$

Так же, как и в случае с волновыми уравнениями, различие заключается в том, что в (7.45) входят частные производные по времени, а в (7.46) — полные производные по времени. Если используются неподвижные системы координат, то уравнения (7.45) и (7.46) не различаются. Однако при использовании подвижных координат эти уравнения существенно различаются. Именно это

различие и приводит к тому, что для уравнений (7.45) принцип относительности Галилея не выполняется, а для уравнений (7.46) выполняется. С точки зрения механики уравнения (7.45) в общем случае подвижных координат неприемлемы, так как они не удовлетворяют принципу объективности. Покажем это на простом примере. Рассмотрим электрическое поле бесконечно длинного однородно заряженного цилиндра. Как известно, в цилиндрической системе координат оно имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad A = \text{const.} \quad (7.47)$$

Решение (7.47) удовлетворяет как уравнениям (7.45), так и уравнениям (7.46). Введем в рассмотрение пульсирующую цилиндрическую систему координат

$$r' = (2 + \cos \omega t)r, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (7.48)$$

Решение (7.47) в штрихованной системе координат имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{A(2 + \cos \omega t')}{r'} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (7.49)$$

Сами векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при этом, разумеется, не меняются. Подставляя (7.49) в (7.45) и (7.46), убеждаемся, что левые части этих уравнений обращаются в нуль, так как левые части (7.45) и (7.46) не зависят от выбора системы координат. Обращаются в нуль и правые части уравнения (7.46), так как они тоже не зависят от выбора подвижной системы координат, не меняющей времени: $t' = t$. А левые части уравнений (7.45) в нуль не обращаются, так как

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\omega A \sin \omega t}{r'} \mathbf{e}_r \neq \mathbf{0},$$

т. е. уравнения (7.45) не выполняются. Но замена (7.48) — это всего лишь тривиальный способ изменения представления решения. Физическое содержание задачи от этого не зависит. Поэтому уравнения (7.45) применимы только при использовании системы координат, неподвижных относительно тела отсчета. Отсюда следует, что, во-первых, уравнения (7.45) и не должны удовлетворять принципу относительности Галилея и, во-вторых, физически бессодержательно рассматривать вопрос о том, как они ведут себя по отношению к преобразованию Лоренца. Невозможно сомневаться в том, что Дж. Максвелл в качестве своих уравнений признал бы именно (7.46), но не уравнения (7.45). Каким образом объясняют в литературе по физике переход от уравнений (7.46) к уравнениям (7.45)? В большинстве случаев вообще не объясняют.

В учебнике [159], с. 233, после “правильно” записанного уравнения (29), которое совпадает с первым из уравнений системы (7.46), следуют слова: “Так как $\mathbf{B}$ может зависеть от положения и от времени, мы напомним $\partial\mathbf{B}/\partial t$ вместо $d\mathbf{B}/dt$ ”. Однако, как подробно показывалось в подразделе 3.2.1, формула (3.4), замена $d\mathbf{B}/dt$ на $\partial\mathbf{B}/\partial t$ допустима только при использовании неподвижных систем координат.

Обратимся к обсуждению принципа относительности Галилея применительно к уравнениям Максвелла. В принципе относительности речь идет о разных системах отсчета, а не о разных системах координат. Различие здесь принципиально и неустранимо. Например, вектор скорости частицы $\mathbf{A}$ относительно какой-то системы отсчета имеет определенное значение, не зависящее от системы координат. Однако скорость одной и той же частицы в различных инерциальных системах отсчета выражается совершенно разными векторами — формула (7.26). Они различаются не только по направлению, определяемому по отношению к отсчетному реперу, но и по модулю. Часто приходится читать, что классическая механика — это механика малых скоростей. Может быть, в каком-то смысле (пока не ясном) такое выражение и правильно. Однако в рациональной механике нет понятий больших и малых скоростей. Всегда найдутся такие инерциальные системы отсчета, относительно которых скорость одной и той же частицы может быть в один и тот же момент времени и сколь угодно большой, и сколь угодно малой.

Возвращаясь к сравнению понятий замен систем координат и систем отсчета, замечаем, что первое из них носит чисто формальный характер, а второе является физическим утверждением, содержащим в себе правило соответствия между одними и теми же величинами, заданными в разных системах отсчета. В этом смысле есть разные величины. В механике применяется аксиома о том, что масса частицы не зависит от выбора системы отсчета. Именно поэтому масса в механике не может зависеть от скорости. Кинетическая энергия частицы, также являющаяся скалярной величиной, тем не менее, зависит от выбора системы отсчета. То же самое можно сказать о векторах и тензорах. Поэтому прежде чем выяснить справедливость (или несправедливость) принципа Галилея, необходимо указать правило, связывающее одни и те же физические величины, заданные в разных системах отсчета. Если говорить об уравнениях Максвелла, то следует указать, как связаны векторы электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей, заданные в разных системах отсчета. Трудность в том, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вообще говоря, зависят от скоростей движения зарядов. Скорости зарядов различны по отношению к разным системам отсчета. Поэтому может показаться, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$

должны быть не индифферентными, т. е. зависеть от выбора системы отсчета. Однако нужно иметь в виду следующее. Рассмотрим частицу $\mathcal{A}_1$. Пусть ее скорости в инерциальных S -системе и S_* -системе выражаются векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_1^*$, соответственно. Как известно, связь между этими векторами дается формулой

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}_1, \quad (7.50)$$

где $\mathbf{V}_0$ — скорость S_* -системы относительно S -системы, представленная в S -системе. Как видим, в (7.50) входит вектор $\mathbf{V}_0$, что и указывает на неиндифферентность вектора скорости. Рассмотрим еще одну частицу $\mathcal{A}_2$, для нее справедливо такое же соотношение (7.50), как для $\mathcal{A}_1$. Найдем относительную скорость частицы $\mathcal{A}_2$ относительно частицы $\mathcal{A}_1$:

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}_1) = \tilde{\mathbf{V}}_2 - \tilde{\mathbf{V}}_1. \quad (7.51)$$

Таким образом, относительные скорости частиц оказываются уже индифферентными векторами, т. е. векторами, безразличными к выбору системы отсчета.

Примем к сведению, что электромагнитное поле связано не с движением зарядов вообще, а только с движениями зарядов относительно друг друга. Это так, ибо в противном случае нейтральных тел вообще не существовало бы. Поскольку относительные скорости индифферентны (безразличны) к выбору инерциальных систем отсчета, то можно думать, что и векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны быть индифферентными. Пусть поле характеризуется векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в S -системе и векторами $\mathbf{E}_*$ и $\mathbf{B}_*$ в S_* -системе. Примем аксиому.

Аксиома Е1 (Г. Герц). *Векторы электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей индифферентны, т. е. их значения в разных системах отсчета S и S_* связаны соотношением⁴*

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{B} = (-1)^\alpha \tilde{\mathbf{B}}, \quad (7.52)$$

где $\alpha = 0$, если S -система и S_* -система имеют одинаковые ориентации; $\alpha = 1$, если они имеют разные ориентации.

Эта аксиома не может быть опровергнута логическими доводами, хотя ее экспериментальное опровержение, видимо, возможно, но крайне маловероятно. Заметим, что опыты Майкельсона и их модификации к замене систем

⁴ Аксиома Герца предполагает, что вектор электрического поля полярен, а вектор магнитного поля аксиален. Напомним, что в шестой главе предложена модель электромагнитного поля, согласно которой вектор электрического поля следует трактовать как аксиальный вектор, а вектор магнитного поля — как полярный вектор. (Примеч. ред.)

отсчета, равно как и к замене систем координат, не имеют никакого отношения. Запишем уравнения Максвелла (7.46) в S_* -системе. Для этого следует поставить у всех величин, входящих в (7.46), звездочки. Далее перенесем эти уравнения в соответствии с указаниями раздела 7.1.2 в S -систему. В результате получим

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathcal{E}} &= -\frac{d\tilde{\mathcal{B}}}{dt}, & \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{E}} &= 0, \\ (-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathcal{B}} &= \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt}, & \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

В уравнениях (7.53) принято, что $c_* = \tilde{c}$, т. е. при переносе скаляра из одной системы отсчета в другую он не меняется (это верно даже для тех скаляров, которые зависят от выбора системы отсчета, т. е. не следует путать операцию переноса, как чисто формальную вещь, с операцией замены системы отсчета, которая будет рассмотрена далее). Множитель $(-1)^\alpha$ в (7.53) появился вследствие того, что в разноориентированных системах отсчета векторное произведение определяется по-разному. Только теперь приступим к операции замены системы отсчета. Уравнения (7.53) выражают в S -системе то, что видит наблюдатель в S_* -системе. Наблюдатель в S -системе видит не (7.53), а уравнения (7.46). Замена системы отсчета сводится к тому, что необходимо провести замену системы координат в (7.53) в соответствии с требованием Галилея (7.26) и требованиями аксиомы E1, т. е. условиями (7.52). Очевидно, что при этом справедливы равенства $\nabla = \tilde{\nabla}$, $c = \tilde{c}$, так как они выполняются для любых замен систем координат как подвижных, так и неподвижных. Подставляя (7.52) в (7.53) и учитывая тождества $\nabla = \tilde{\nabla}$, $c = \tilde{c}$, приходим к уравнениям (7.46). В этом и состоит принцип относительности Галилея. Никакой пользы из этого факта извлечь не удастся, как, впрочем, этого и следовало ожидать. Напомним, что Герц уже получал обобщение уравнений Максвелла, удовлетворяющее принципу относительности Галилея.

7.2. Классическая безмоментная теория упругости и уравнения Максвелла

7.2.1. Механика и классическая электродинамика

Второй эфир⁵ (или второе поле) — это электромагнитное состояние материи, которое в современной физике описывается уравнениями Максвелла.

⁵ О втором эфире см. подраздел 7.3.2. (Примеч. ред.)

Поэтому можно было бы ожидать, что динамика второго эфира должна подчиняться уравнениям Максвелла. Однако это не так. Уравнения динамики второго эфира значительно сложнее уравнений Максвелла и качественно от них отличаются⁶.

На данный момент наша цель — описание классических уравнений Максвелла и их интерпретация в терминах механики⁷. Именно с электродинамики берет начало точка зрения, что механистическое описание мира принципиально ограничено и непригодно для изучения электромагнитных процессов. В дальнейшем данная точка зрения будет опровергнута.

В современной физике считается, что уравнения Максвелла являются чем-то вроде божественного откровения и потому просто постулируются. Их каноническая запись имеет следующий вид [160], с. 76:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j},\end{aligned}\tag{7.54}$$

где ρ — плотность заряда; $\mathbf{j}$ — плотность тока, т. е. скорость протекания за-

⁶ Общая нелинейная теория динамики второго эфира (электромагнитного поля в трактовке П. А. Жилина) построена в шестой главе, раздел 6.7. То, что в современной физике описывается уравнениями Максвелла, согласно трактовке П. А. Жилина, принятой в шестой главе, является возмущением в эфире (электромагнитном поле). Уравнения для возмущений, распространяющихся в электромагнитном поле, выведены в разделе 6.8. (*Примеч. ред.*)

⁷ Здесь под интерпретацией в терминах механики подразумевается модель, основанная на трансляционных степенях свободы. Проблемой моделирования электромагнитного поля сплошной средой П. А. Жилин занимался более десяти лет. Им были предложены две принципиально различных модели электромагнитного поля. Шестая глава посвящена построению математической модели электромагнитного поля, основанной исключительно на вращательных степенях свободы. Разработка математического описания данной модели относится к 2000–2003 гг. Модель, основанная на вращательных степенях свободы, в полной мере отражает взгляды П. А. Жилина на электромагнитное поле, которые он высказывал и в более ранних работах, но реализовал только в последние годы. В ранних работах, посвященных электродинамике, в частности в статье “*Реальность и механика*” 1996 г., предложена модель, основанная на трансляционных степенях свободы. Именно эта модель рассматривается в данном разделе. Редакционная коллегия сочла необходимым включить в книгу описание данной модели отнюдь не для того, чтобы продемонстрировать еще одну возможность механической интерпретации уравнений Максвелла. Дело в том, что на примере этой модели обсуждаются важнейшие вопросы, касающиеся уравнений Максвелла, которые оставлены без внимания в шестой главе, а именно наличие в уравнениях Максвелла бесконечной скорости распространения сигнала и отсутствие асимптотического перехода от электродинамики к электростатике, а также возможный путь решения этих проблем. (*Примеч. ред.*)

ряда сквозь единицу площади; ϵ_0 — электрическая постоянная. Здесь дается современная версия, отличная от точки зрения Максвелла: по Максвеллу, ток не обязательно связан с движением зарядов. Последнее обстоятельство, как будет показано далее, весьма существенно. Из (7.54) следует условие разрешимости

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.55)$$

Замечание. Физики предпочитают называть уравнение (7.55) законом сохранения заряда и считать его законом Природы. С точки зрения механики никаких законов сохранения в общем случае не существует, но есть уравнения баланса неких величин. В частности, локальное уравнение баланса заряда имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{h}, \quad (7.56)$$

где $\mathbf{h}$ — объемная плотность скорости подвода заряда в рассматриваемую систему. Даже если в Природе в целом существуют некие законы сохранения, то для рациональной науки они абсолютно бесполезны, поскольку мы никогда не рассматриваем и никогда не сможем рассмотреть Природу в целом. Механика и физика исследуют весьма ограниченные материальные системы, которые могут обмениваться со своим окружением чем угодно, например зарядом. Только в очень узком классе изолированных систем появляются законы сохранения. Таким образом, уравнение (7.55) ни в коем случае нельзя трактовать как закон Природы — это именно необходимое условие разрешимости классических уравнений Максвелла. Оно перестанет быть таковым для модифицированных уравнений Максвелла, рассмотренных в следующем подразделе, и для них вполне допустимо использовать (7.56) вместо (7.55).

“Что касается вывода уравнений Максвелла, то с течением времени стали смотреть на дело так, что эти уравнения невозможно вывести из уравнений механики даже ценой каких бы то ни было обобщений, и большинство современных теоретиков сейчас твердо стоят на той точке зрения, что эти уравнения и не надо выводить, что их надо рассматривать как очень удачное, почти идеально точное описание электромагнитных процессов”. Эта цитата извлечена из довольно старой и далеко не бесспорной книги [161], с. 155–156. Тем не менее она вполне точно отражает и современную позицию. Даже беглого взгляда на систему (7.54) достаточно, чтобы усомниться в ее непогрешимости. Прежде всего, вызывает сомнение трактовка тока, согласно которой вектор $\mathbf{j}$ есть скорость протекания заряда сквозь единицу площади. Если это так, то система (7.54) переопределена и в общем случае неразрешима. Это следует из

того факта, что для шести координат векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ имеем восемь уравнений (ρ и $\mathbf{j}$ — заданы!). Правда, третье уравнение в (7.54) является следствием трех остальных, если это условие выполнено в какой-либо момент времени. Так что фактически в (7.54) содержится семь уравнений для шести неизвестных. Этого противоречия можно избежать, если отказаться от приведенной ранее трактовки тока $\mathbf{j}$. Какие из этого вытекают следствия, будет показано в подразделе 7.2.3. Однако главные претензии к системе (7.54) заключаются в тех следствиях, которые дает механическая интерпретация системы (7.54). С этой целью перепишем систему (7.54) в другом (но эквивалентном) виде.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{u}$ такой, что

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (7.57)$$

Допустимость введения такого вектора следует из второго и третьего уравнений системы (7.54). Известно, что любой вектор $\mathbf{u}$ можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{\Phi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi} = 0, \quad (7.58)$$

где потенциал φ определен с точностью до произвольной функции координат, т. е. прибавление к φ произвольной функции координат не меняет ни электрического, ни магнитного полей. Согласно первому уравнению системы (7.54) и уравнениям (7.57)–(7.58)

$$\Delta \varphi = q, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (7.59)$$

где функция q также определена с точностью до произвольной функции координат. Таким образом, осталось выполнить только четвертое уравнение в (7.54). Для этого ток $\mathbf{j}$ представим в виде

$$\mathbf{j} = \nabla \varphi_* + \nabla \times \mathbf{\Phi}_*, \quad \varphi_* = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi}_* = 0. \quad (7.60)$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение в (7.54), получаем

$$\Delta \mathbf{\Phi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{\Phi}_* = 0. \quad (7.61)$$

Нетрудно убедиться, что система (7.57)–(7.61) в точности эквивалентна системе (7.54). Причем эта система допускает простую механическую интерпретацию. Обратим внимание, что согласно (7.60) ток не обязательно порождается движением зарядов. Впрочем, и в последнем случае можно трактовать

ток как движение зарядов, если электромагнитное поле представить себе состоящим из двух сред, одна из которых есть континуум отрицательно заряженных частиц, а вторая — континуум положительно заряженных частиц, причем суммарная плотность заряда равна нулю. В этом случае ток есть движение одной среды относительно другой. При такой трактовке вакуум вообще не существует.

Сравним уравнения электродинамики с уравнениями линейной динамической теории упругости [162]. Для удобства сравнения приведем эти уравнения к аналогичной форме. Напомним, что для уравнений теории упругости, в отличие от уравнений электродинамики, доказаны при достаточно общих предположениях теоремы существования решений.

Запишем сначала группу уравнений, которые в электродинамике и в теории упругости выглядят одинаково:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0. \quad (7.62)$$

В электродинамике вектор $\mathbf{u}$ — это потенциал для электрического $\boldsymbol{\varepsilon}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей. В теории упругости $\mathbf{u}$ — это вектор малых смещений, причем $\boldsymbol{\varepsilon}$ — безразмерная скорость, взятая с обратным знаком, а $\mathbf{B}$ — ротор вектора перемещений, с которым в теории упругости обычно не работают, но можно работать и с ним.

Вторая группа уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \nabla \varphi_* + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}_* & \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi}_* &= 0, & (\text{электродинамика}); \\ \frac{1}{\mu} \mathbf{F} &= \nabla \tilde{\varphi} + \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\Phi}}, & \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}} &= 0 & (\text{теория упругости}) \end{aligned} \quad (7.63)$$

не требует комментариев, кроме констатации, что ток $\mathbf{j}$ в электродинамике аналогичен объемной силе $\mathbf{F}$ в теории упругости.

Третья группа уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \boldsymbol{\Phi}_* & (\text{электродинамика}); \\ \Delta \boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} &= -\tilde{\boldsymbol{\Phi}} & (\text{теория упругости}), \end{aligned} \quad (7.64)$$

четвертая группа уравнений выглядит так

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = q, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \varphi_* = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{электродинамика}); \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \tilde{\varphi} \quad (\text{теория упругости}). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Здесь $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_*$, $c_2^2 = \mu/\rho_*$; ρ_* — массовая плотность среды; λ и μ — постоянные Ламе. Скорости c_1 и c_2 определяют скорости волн расширения и сдвига, соответственно, причем положительность энергии деформации требует выполнения неравенства $c_1^2 > 4c_2^2/3$.

Аналогия уравнений (7.64) является очевидной, если принять

$$c_2 \longleftrightarrow c, \quad \tilde{\Phi} \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \Phi_*.$$

Наибольшие различия содержатся в уравнениях (7.65). Собственно, именно эти уравнения и определяют различия между электродинамикой и механикой. В физике это трактуется как невозможность механистического истолкования электродинамики и, соответственно, как ограниченность механики. Естественнее, однако, считать, что некая странность содержится в уравнениях электродинамики, а вовсе не в уравнениях механики. В самом деле, смысл уравнения (7.65), относящегося к теории упругости, вполне очевиден, а потенциал φ существует для всякой величины $\tilde{\varphi}$, т. е. для любой объемной силы $\mathbf{F}$. В электродинамике это не так. Ток $\mathbf{j}$ не может быть произвольно задан, но вычисляется (частично) по потенциалу φ . В противном случае задача электродинамики может стать неразрешимой. А это обстоятельство заставляет усомниться в “почти идеально точном описании электромагнитных процессов” уравнениями Максвелла. Указанного, однако, мало. В отличие от теории упругости потенциал φ в электродинамике не является решением волнового уравнения. А это означает, что потенциал φ в электродинамике устанавливается мгновенно во всем пространстве. Иными словами, в уравнениях Максвелла содержится бесконечная скорость распространения сигнала, что находится в вопиющем противоречии со специальной теорией относительности.

Таким образом, СТО и электродинамика Максвелла не совместимы. Само собой разумеется, что в неустранимом противоречии с СТО находятся и уравнения теории упругости из-за наличия в них двух скоростей распространения сигнала. Да и вообще любая теория, содержащая более одной скорости распространения волн, несовместима с СТО.

Для более ясного проявления аналогии в уравнениях (7.65), относящихся к электродинамике и теории упругости, перепишем уравнения электродинамики в эквивалентной форме⁸

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q - \frac{1}{\varepsilon_0 c_*^2} \varphi_*, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi_* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (7.66)$$

где c_* — константа, имеющая размерность скорости.

Первое из этих уравнений вполне аналогично уравнению (7.65), относящемуся к теории упругости, если принять

$$c_1 \longleftrightarrow c_*, \quad \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \tilde{\varphi} \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 c_*^2} \varphi_* - q.$$

Теперь уже легко установить аналогию между объемной силой $\mathbf{F}$ и током и зарядом⁹

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{F} \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j} - \left(\frac{c_*}{c}\right)^2 \nabla q.$$

Принять связь $\varphi_* = \varepsilon_0 \partial^2 \varphi / \partial t^2$ означает принудительно задать часть объемной силы, что, конечно, мало убедительно в механике, как, впрочем, и в электродинамике. Тем не менее механистическое истолкование уравнений классической электродинамики теперь очевидно, и на нем больше можно не останавливаться.

Ситуация становится совсем простой, если отсутствуют заряды и токи, а в теории упругости отсутствуют объемные силы. В этом случае уравнения (7.65) принимают вид

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{электродинамика}), \quad \Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{теория упругости}).$$

Уравнение теории упругости переходит в соответствующее уравнение электродинамики при $c_1 \rightarrow \infty$. При этом уравнения Максвелла становятся

⁸ Второе и третье уравнения системы (7.66) совпадают со вторым и третьим уравнениями системы (7.65). Согласно третьему уравнению (7.66) последние слагаемые в левой и правой частях первого уравнения (7.66) взаимно уничтожаются, так что это уравнение совпадает с первым уравнением системы (7.65). (Примеч. ред.)

⁹ Данная аналогия верна при условии $\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_*}{c}$. В общем случае имеет место аналогия

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{F} \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{\varepsilon_0 c_*^2} \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \left(\frac{c_*}{c}\right)^2 \right] \nabla \varphi_* - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \nabla q.$$

идентичными уравнениям колебаний несжимаемой среды, что и было отмечено самим Максвеллом [163], с. 784.

В заключение подчеркнем, что механические аналогии для уравнений Максвелла оказались достаточно простыми и хорошо знакомыми всем механикам.

7.2.2. Модифицированные уравнения Максвелла

Как отмечалось ранее, классические уравнения Максвелла имеют серьезный недостаток, а именно в них заключена бесконечная скорость распространения сигнала. К сожалению, это не единственный и далеко не самый важный недостаток классических уравнений, но об этом речь пойдет в дальнейшем. Здесь же приведем модифицированную систему уравнений Максвелла, в которой все сигналы распространяются с конечной скоростью. Для этого достаточно отказаться от связи, выражаемой вторым уравнением из (7.66). Тогда получим систему

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0; \quad (7.67)$$

$$\Delta \boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \boldsymbol{\Phi}_*; \quad (7.68)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q - \frac{1}{\varepsilon_0 c_*^2} \varphi_*, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad c_*^2 > \frac{4}{3} c^2, \quad (7.69)$$

при этом ток выражается формулой

$$\mathbf{j} = \nabla \varphi_* + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}_*, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi}_* = 0. \quad (7.70)$$

Системе (7.67)–(7.70) можно придать более привычный для электродинамики вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\rho_*}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_*, \end{aligned} \quad (7.71)$$

где

$$\rho_* = \rho + \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_* - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right), \quad \mathbf{j}_* = \mathbf{j} - \nabla \left(\varphi_* - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right). \quad (7.72)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнения (7.69), (7.70), чтобы получить замкнутую систему.

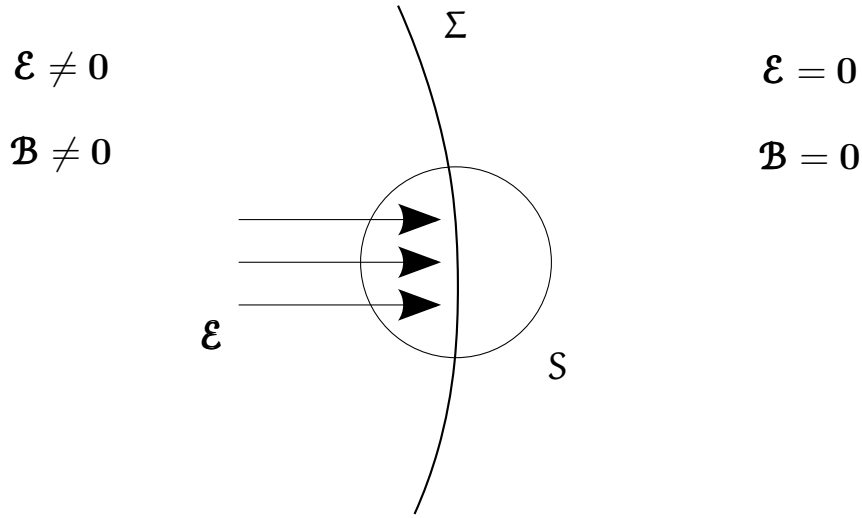


Рис. 7.1. Волновой фронт

По внешнему виду система (7.71) весьма похожа на систему (7.54), но смысл ее существенно отличается. Особенно это заметно в областях, где ρ и $\mathbf{j}$ равны нулю

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_* = C(t), \quad \Phi_* = 0.$$

В этом случае по классической системе (7.54) имеем, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. По существу, именно в этом уравнении содержится бесконечная скорость распространения сигнала. В самом деле, вообразим следующую ситуацию. Пусть при $t > 0$ существует два одинаковых по величине, но разных по знаку точечных заряда, которые при $t \leq 0$ находились в одной точке. В этом случае при $t \leq 0$ имеем $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$. Пусть далее в момент времени $t = 0$ заряды начинают разбегаться. Нетрудно убедиться, что в этом случае потенциал φ обязан быть отличным от нуля при $t > 0$. Если бы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ были представлены волнами, то была бы область, удаленная от зарядов, где поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ еще не возникли. Эта область отделена от области, где поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ уже возникли, некоей подвижной поверхностью Σ , называемой волновым фронтом (рис. 7.1).

Выберем теперь замкнутую область, ограниченную поверхностью S . Согласно классическим уравнениям внутри S имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Для поперечных волн эти условия выполнены везде, в том числе и внутри S , т. е. для $\mathbf{B}$ и части $\mathbf{E}$, представленной поперечной волной, эти условия

выполнены. Но потенциал φ не может быть поперечной волной, следовательно, на фронте волны $\nabla \cdot \mathbf{\varepsilon}$ не может обращаться в нуль, ибо что-то входит внутрь S , но ничего из нее не выходит. Противоречие исчезает, если принять, что φ не волна и для φ нет волнового фронта. Так оно и есть в классической электродинамике — потенциал φ мгновенно устанавливается во всем пространстве. В модифицированной системе даже при отсутствии зарядов и токов $\nabla \cdot \mathbf{\varepsilon} \neq 0$. В следующем подразделе будут представлены задачи, где все отмеченные обстоятельства будут видны совершенно отчетливо.

Модифицированная система (7.67)–(7.70) не может быть хуже классической, ибо последняя содержится в первой как частный случай. Наиболее “странной” особенностью системы (7.67)–(7.70) является то, что в ней присутствуют волны, распространяющиеся со скоростью $c_* > c$. В следующем подразделе будет показано, что электростатические поля устанавливаются именно с помощью этих волн. Поэтому модифицированная система уничтожает пропасть между электростатикой и электродинамикой, присущую классическим уравнениям Максвелла, в которых электростатика никогда не может быть получена из динамической задачи и существует как бы сама по себе. В математическом отношении система (7.67)–(7.70), можно сказать, безупречна. Но насколько реальны волны, описываемые уравнением (7.69), и чему равна скорость c_* , пока еще не установлено. Если основываться на интуиции, существование продольных волн (7.69) не вызывает никаких сомнений, ибо в противном случае возникают проблемы, решение которых не представляется возможным.

В экспериментальном плане существование волн, распространяющихся быстрее света, также неоспоримо. Этот факт был впервые установлен Н. А. Козыревым [164], а затем подтвержден со всей возможной тщательностью академиком М. М. Лаврентьевым и его сотрудниками [165, 166]. Суть эксперимента Козырева состоит в следующем. Он разработал датчик, который позволяет фиксировать разного рода излучения, не вдаваясь в природу этих излучений. С помощью этого датчика Козырев фиксировал потоки излучений от звезд. Когда он направлял телескоп на видимую звезду, то фиксировал локальный максимум интенсивности излучения. Но самое поразительное состояло в том, что еще более интенсивное излучение Козырев фиксировал в тот момент, когда он направлял телескоп в то место неба, где звезда должна находиться в данное время и, соответственно, еще не видна. Свет от нее придет к нам только в далеком будущем.

Можно соглашаться или не соглашаться с объяснением этого явления Н. А. Козыревым. Однако неоспоримым является факт существования излу-

чений, распространяющихся со скоростью, намного превышающей скорость света. Разумеется, нет твердых оснований считать, что именно эти излучения описываются уравнением (7.69), но в принципе нельзя исключить такую возможность. В любом случае необходимо проведение специальных экспериментов по проверке системы (7.67)–(7.70) и определению скорости c_* . Важно, что все экспериментальные данные, объяснимые с помощью классических уравнений, заведомо могут быть объяснены и модифицированными уравнениями.

Итак, модифицированная система не уступает классической, а теоретически превосходит ее. Тем не менее фундаментальная полнота как классической, так и модифицированной систем уравнений кажется более чем сомнительной. Интуиция подсказывает, что явления магнетизма, если и описываются частично этими системами, то описываются неполно и в значительно искаженной форме.

Не будем вдаваться во все детали и ограничимся только очевидными замечаниями, доказывающими фундаментальную неполноту уравнений Максвелла. Для этого нужно принять во внимание факты, твердо установленные экспериментальной физикой.

Первый факт. Взаимодействие между ядром и электронами атома должно носить электромагнитную природу и потому описываться уравнениями электродинамики.

Второй факт. Всякий атом обладает смешанным дискретно-непрерывным спектром, который определяется экспериментально.

Стремление объяснить эти два факта привело к созданию квантовой физики. Мы полагаем, что цельность атома и его строение (но не строение ядра или электронов) должны объясняться на основе уравнений второго эфира, т. е. уравнений электродинамики, но, конечно, не классической. Из механики известно (см., например, [167]), что смешанные спектры появляются в задачах весьма специального вида при наличии двух основных факторов. Первый: наличие безграничной среды, оператор для которой имеет непрерывный спектр, лежащий выше некоторой частоты (частоты отсечки). Роль этой безграничной среды играет второй эфир¹⁰.

Примерами уравнений, заданных в безграничной среде и имеющих частоту отсечки, являются, например, уравнения (7.121) или уравнения колебаний бесконечной балки (струны) на упругом основании.

Для того чтобы в уравнениях электродинамики для безграничной среды появилась частота отсечки, необходимо включить в рассмотрение спинорные

¹⁰ О втором эфире см. подраздел 7.3.2. (*Примеч. ред.*)

движения, которые и ответственны за явления магнетизма. Иными словами, динамика второго эфира описывается уравнениями, которые определенным образом объединяют систему (7.67)–(7.70) с уравнениями типа (7.121).

Второй фактор: дискретный спектр появляется ниже частоты отсечки, если в поле оператора с непрерывным спектром внести дискретные частицы, роль которых играют ядра и электроны. Если ядро и электроны внести в классическое или модифицированное электромагнитное поле, то никаких дискретных (отделенных) частот не появится, поскольку и система (7.54) и система (7.67)–(7.70) не имеют частот отсечек. Последние появляются в волноводах, но это уже не безграничная среда.

Таким образом, для объяснения строения атома уравнения электродинамики должны быть существенно изменены. Именно это и делается в квантовой электродинамике, но существуют и другие пути, не выходящие за рамки классической механики.

7.2.3. Иллюстративные задачи

Сходство и различие между классической и модифицированной системами уравнений проще всего увидеть на решениях конкретных задач. Сходство будет полным в тех задачах, в которых отсутствует продольный потенциал φ , т. е. электромагнитное поле описывается только поперечными волнами. Различие будет неустранимым в тех задачах, когда начальные и краевые условия требуют наличия потенциала φ , определяющего продольную волну.

В уравнения электродинамики входят как полярные векторы, так и аксиальные¹¹. Полярными являются векторы

$$\mathbf{E}, \quad \mathbf{u}, \quad \nabla\varphi, \quad \mathbf{j}, \quad \nabla\varphi_*, \quad \nabla \times \mathbf{\Phi}, \quad \nabla \times \mathbf{\Phi}_*,$$

аксиальными являются векторы

$$\mathbf{B}, \quad \mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{\Phi}_*.$$

Напомним определения групп симметрии полярных и аксиальных векторов.

¹¹ В соответствии с используемой механической аналогией, вектор электрического поля считается полярным, а вектор магнитного поля — аксиальным, как это и принято в классической электродинамике. Напомним, что в шестой главе, где используется другая механическая аналогия, тип векторов электрического и магнитного полей определяется иначе, а именно: вектор электрического поля аксиален, вектор магнитного поля полярен (разд. 6.6). (Примеч. ред.)

Определение. Группой симметрии вектора $\mathbf{a}$ называется множество ортогональных решений уравнения

$$(\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad (7.73)$$

где $\alpha = 0$, если $\mathbf{a}$ полярный; $\alpha = 1$, если $\mathbf{a}$ аксиален. В (7.73) вектор $\mathbf{a}$ задан, а ортогональные тензоры $\mathbf{Q}$ ищутся. Это прямая задача. Обратная задача: по известным элементам симметрии, т. е. тензорам $\mathbf{Q}$, найти общий вид вектора $\mathbf{a}$, имеющего данные тензоры $\mathbf{Q}$ своими элементами симметрии. При этом центральную роль играет принцип Кюри–Неймана [151], позволяющий заранее определить отдельные элементы симметрии (не всю группу симметрии) изучаемого объекта¹².

Принцип Кюри–Неймана. *Группа симметрии причины является подгруппой группы симметрии следствия.*

Определение группы симметрии и принцип Кюри–Неймана будут использованы далее.

1. Задача Р. Фейнмана. Даны две непроводящие плоскости с поверхностными плотностями заряда σ_0 и $(-\sigma_0)$, соответственно. Плоскости приложены друг к другу вплотную, так что суммарная плотность заряда равна нулю. Ось, ортогональную этой плоскости, обозначим через z . В моменты времени $t \leq 0$ плоскости были неподвижны, так что поле отсутствовало $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$.

В момент времени $t = 0$ плоскость σ_0 начинает двигаться вдоль второй (неподвижной) плоскости с зарядом $(-\sigma_0)$ со скоростью

$$\mathbf{v}(t) = v_0 [1 - e(t)] \mathbf{i}_1, \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi \frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0, \quad (7.74)$$

где $\mathbf{i}_1$ — орт оси x — определяет направление движения, ортогональное $\mathbf{i}_3$ — орту оси z .

В данной задаче плотность заряда отсутствует, но ток имеется

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma_0 v_0 \delta(z) [1 - e(t)] \mathbf{i}_1.$$

Краевыми условиями являются условия отсутствия излучения на бесконечности ($z \rightarrow \pm\infty$).

В данной задаче плоскости $y = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной симметрии, а плоскости $x = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной антисимметрии. Это означает, что любой полярный вектор $\mathbf{a}$, встречающийся в

¹² Подробнее о теории симметрии полярных и аксиальных объектов см. раздел 4.2. (Примеч. ред.)

данной задаче, должен иметь вид $\mathbf{a} = \mathbf{a}(z, t) \mathbf{i}_1$, а любой аксиальный вектор $\mathbf{b}$ должен иметь вид $\mathbf{b} = \mathbf{b}(z, t) \mathbf{i}_2$ ¹³. Поставленная задача есть почти точная формулировка задачи, рассмотренной Р. Фейнманом [160], с. 82–88. Переход к задаче Фейнмана происходит при $\tau \rightarrow 0$. Нетрудно убедиться, что в данной задаче потенциалы φ и φ_* обязаны равняться нулю. Это означает, что классическая и модифицированная системы в данной задаче совпадают, причем потенциалы Φ_* и Φ имеют вид

$$\Phi_* = \Phi_*(z, t) \mathbf{i}_2, \quad \Phi = \Phi(z, t) \mathbf{i}_2.$$

Для $\Phi_*(z, t)$ получается выражение

$$\Phi_*(z, t) = -\sigma_0 v_0 \theta(z) [1 - e(t)], \quad \theta(z) = \begin{cases} 1/2, & z > 0, \\ -1/2, & z < 0. \end{cases}$$

Уравнение (7.61) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \sigma_0 v_0 \theta(z) [1 - e(t)]. \quad (7.75)$$

Начальные условия однородны

$$\Phi(z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.76)$$

Для векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ имеем представления

$$\mathcal{E} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_1, \quad \mathcal{B} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \mathbf{i}_2. \quad (7.77)$$

Ясно, что справедливо равенство $\Phi(z, t) = -\Phi(-z, t)$, т. е. $\mathcal{E}$ — четная, а $\mathcal{B}$ — нечетная функция z . Решение задачи (7.75), (7.76) не представляет затруднений, и его можно не выписывать.

¹³ Здесь в соответствии с классической трактовкой считается, что вектор $\mathcal{E}$ полярен, а вектор $\mathcal{B}$ аксиален. В шестой главе предложена модель электромагнитного поля, согласно которой вектор $\mathcal{E}$ аксиален, а вектор $\mathcal{B}$ полярен. В этом случае вектор электрического тока $\mathbf{j}$ должен быть аксиальным. Следовательно, плоскости $y = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной антисимметрии, а плоскости $x = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной симметрии. Это означает, что любой полярный вектор, например вектор магнитного поля, должен иметь вид $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z, t) \mathbf{i}_2$, причем $\mathcal{B}(z, t)$ — нечетная функция z , а любой аксиальный вектор, например вектор электрического поля, должен иметь вид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(z, t) \mathbf{i}_1$, причем $\mathcal{E}(z, t)$ — четная функция z . Следовательно $\Phi_* = \Phi_*(z, t) \mathbf{i}_2$ и $\Phi = \Phi(z, t) \mathbf{i}_2$, причем $\Phi(z, t) = -\Phi(-z, t)$, т. е. окончательный результат получается такой же, как и при классической трактовке. Аналогичные рассуждения можно провести в отношении других задач, рассмотренных в данном подразделе. Во всех задачах изменение типа векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ не влияет на окончательный результат. (Примеч. ред.)

В этой задаче различие между классической и модифицированной системами отсутствует, и они равноправны.

Оставшиеся задачи этого подраздела уже будут иметь существенные различия, и для каждой из них будут приведены решения с учетом трех различных точек зрения.

2. Электромагнитное поле заряжаемой плоскости. Некоторые факты, присущие классической электродинамике, вызывают немалое удивление у человека, воспитанного в традициях классической механики. Прежде всего, это касается электростатики, которая входит в электродинамику как бы сама по себе. В механике любая статическая задача получается предельным переходом от соответствующей динамической задачи. Статическое состояние устанавливается в теле посредством тех или иных волн. В электродинамике это не так: электростатическое поле устанавливается мгновенно во всем пространстве.

Другой факт. Р. Фейнман пишет [160], с. 78: “Законы физики не дают ответа на вопрос: что случится, если заряд внезапно возникает в этой точке, какие будут при этом электромагнитные эффекты? Ответ дать нельзя, потому что наши уравнения утверждают, что такого не происходит. Если бы это случилось, нам понадобились бы новые законы, но мы не можем сказать какими бы они были...”. Для механика все это звучит странно. В механике внезапно прикладывают неизвестно откуда взявшиеся силы и наблюдают реакцию системы на эти силы. Более того, от основных уравнений требуется, чтобы они были разрешимы при произвольно заданных внешних силах независимо от возможности существования подобных сил. Заряды и токи в электродинамике являются аналогами объемных сил в теории упругости. Поэтому с позиций механика удовлетворительная электродинамическая теория просто обязана давать однозначный ответ на вопрос Р. Фейнмана.

Простейшей задачей, позволяющей проанализировать указанные обстоятельства, является задача о нахождении электромагнитного поля заряжаемой плоскости. Рассмотрим непроводящую плоскость $z = 0$. Пусть ее поверхностная плотность заряда меняется по закону

$$\sigma(t) = \sigma_0 [1 - e(t)], \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0.$$

Здесь плоскость заряжается за время τ от нулевого значения плотности до значения σ_0 , если считать, что величина $\exp(-2\pi) = 1,87 \cdot 10^{-3}$ пренебрежимо мала в сравнении с 1. При $t \leq 0$ электрическое и магнитное поля отсутствовали. В данной задаче имеется два семейства плоскостей зеркаль-

ной симметрии $\mathbf{x} = \text{const}$ и $\mathbf{y} = \text{const}$. Поэтому все аксиальные векторы в этой задаче равны нулю:

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \Phi = 0, \quad \Phi_* = 0.$$

При этом вектор электрического поля определяется выражением

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}(z, t) \mathbf{i}_3 \Rightarrow \varphi = \varphi(z, t) \Rightarrow \varphi_* = \varphi_*(z, t).$$

Теперь возможны три разных точки зрения.

Первая: заряд и ток заданы, причем ток определяется движением зарядов. В этом случае имеем

$$\rho = \sigma_0 \delta(z) [1 - e(t)], \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Здесь условие разрешимости (7.55) не выполнено, и задача не имеет решения.

Вторая: заряд задан, но ток $\mathbf{j}$ подлежит определению. Эту позицию излагали многие физики, но она кажется уязвимой, так как в этом случае классическая система (7.54) не замкнута, хотя, как в данной задаче, в некоторых случаях она имеет однозначное решение. В самом деле, согласно (7.59) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{\sigma_0 \delta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} &= -\frac{\sigma_0 \theta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right], \quad \theta(z) = \begin{cases} 1/2, & z > 0, \\ -1/2, & z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда согласно (7.60) для тока имеем выражение

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} \mathbf{i}_3 = -\frac{2\pi\sigma_0\theta(z)}{\tau} e(t) \mathbf{i}_3.$$

Для электрического поля $\mathcal{E}$ имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_3 = \frac{\sigma_0 \theta(z)}{\varepsilon_0} [1 - e(t)] \mathbf{i}_3. \quad (7.78)$$

В этом случае получаем ток $\mathbf{j}$, хотя в области $z \neq 0$ никаких зарядов не содержится. Кроме того, согласно (7.78) электрическое поле $\mathcal{E}$ (как и ток $\mathbf{j}$) возникает мгновенно во всех точках пространства.

Третья точка зрения состоит в решении модифицированной системы уравнений (7.67)–(7.70). В данном случае и заряд, и ток считаются заданными, причем ток $\mathbf{j}$ равен нулю, так как никакого движения зарядов нет:

$\varphi_* = 0$. Уравнение (7.69) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\sigma_0 \delta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right].$$

Очевидно, что потенциал $\varphi(z, t)$ является четной функцией z , причем он непрерывен при переходе через плоскость $z = 0$, а его первая производная терпит скачек

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=+0} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right] \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right].$$

Для электрического поля $\mathcal{E}$ имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_3 \equiv \mathcal{E}(z, t) \mathbf{i}_3, \quad \mathcal{E}(z, t) = -\mathcal{E}(-z, t).$$

Для функции $\mathcal{E}(z, t)$ получили задачу

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \quad \mathcal{E}(z, t)|_{z=+0} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} [1 - e(t)], \quad \mathcal{E}(z, 0) = 0. \quad (7.79)$$

Решение уравнения (7.79) представимо в форме Даламбера–Эйлера

$$\mathcal{E}(z, t) = \psi(z - c_* t) + f(z + c_* t), \quad z > 0,$$

где $f(s)$ определена при $0 \leq s < \infty$, а функция $\psi(s)$ определена на всей оси $-\infty < s < \infty$. Поскольку излучение на бесконечности отсутствует, то $f(s) \equiv 0$. Согласно начальному условию (7.79) функция $\psi(s)$ обращается в нуль при положительных значениях аргумента. По краевому условию (7.79) получаем

$$\psi(-c_* t) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} [1 - e(t)] \Rightarrow \psi(s) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[1 - e\left(-\frac{s}{c_*}\right) \right], \quad s \leq 0.$$

Итак, для $\mathcal{E}(z, t)$ получили выражение

$$\mathcal{E}(z, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[1 - \exp\left(2\pi \frac{z - c_* t}{c_* \tau}\right) \right], & z \leq c_* t; \\ 0, & z \geq c_* t. \end{cases} \quad (7.80)$$

Теперь можем сравнить решения (7.78) и (7.80). Формула (7.78) определяет, что при $t \geq \tau$ во всей области $z \geq 0$ устанавливается электростатическое решение

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}, \quad (7.81)$$

причем оно устанавливается сразу во всем пространстве. Решение (7.80) показывает, что электростатическое решение (7.81) устанавливается при $t \geq \tau$ только в области $z < c_*(t - \tau)$, но при $z > c_*t$ оно отсутствует. Поэтому модифицированная система показывает, что электростатическое решение устанавливается прохождением продольной волны, что полностью согласуется со здравым смыслом.

3. Электромагнитное поле растущего точечного заряда. Пусть в данной точке (начале координат) тела отсчета возникает заряд, меняющийся по закону

$$Q(t) = Q_0[1 - e(t)], \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi\frac{t}{\tau}\right), \quad t \geq 0$$

и называемый точечным источником. Требуется построить возмущение, вносимое этим источником в электромагнитное поле. Физики предпочитают это возмущение называть собственно электромагнитным полем. Поставленную задачу, но при произвольном законе $Q(t)$ рассматривает Р. Фейнман [160], с. 145–147. Читатель может сравнить решение, представленное далее, с тем, что обосновывает Р. Фейнман.

Задача обладает сферической симметрией, т. е. имеет две плоскости зеркальной симметрии. Это означает, что все величины, выражаемые аксиальными векторами, должны обращаться в нулевые векторы

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Phi}_* = \mathbf{0}.$$

Сначала попытаемся решить эту задачу по классической системе (7.54) в предположении, что ток есть движение зарядов. Поскольку никаких движущихся зарядов здесь нет, то $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Решение строим в сферической системе координат. Тогда $\mathbf{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(r, t) \mathbf{e}_r$. Поскольку дивергенция $\mathbf{\mathcal{E}}$ при $r \neq 0$ равна нулю, то имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + \frac{2}{r} \mathcal{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}.$$

По теореме Гаусса находим $C(t)$ и поле $\mathbf{\mathcal{E}}$

$$\mathbf{\mathcal{E}} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (7.82)$$

Согласно последнему из уравнений (7.54) находим $\partial \mathbf{\mathcal{E}} / \partial t = \mathbf{0}$. Следовательно, по классической системе (7.54) и при $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ решения не существует, так как $dQ/dt \neq 0$. Р. Фейнман рассматривает именно этот случай, поэтому представленное им решение — формула (21.13) — решением не является.

Если принять искусственную точку зрения, что ток не обязательно связан с движением зарядов, но определяется как дополнительное неизвестное, то решение у классической системы имеется, так как согласно последнему уравнению в (7.54) и (7.82) имеем

$$\mathbf{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dt} \mathbf{e}_r.$$

Несмотря на то что теперь имеется формальное решение, оно все равно неудовлетворительно с физической точки зрения, так как мгновенно возникает во всем пространстве.

Рассмотрим эту задачу, используя модифицированную систему (7.67)–(7.70). Здесь ток считается движением зарядов, т. е. $\mathbf{j}$ задан. В данной задаче имеем

$$\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \varphi_* = 0, \quad \Phi_* = \mathbf{0}.$$

Для потенциала $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ имеем уравнение (7.69)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + q; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Это уравнение перепишем для функции $\psi(z, t) = \partial \varphi / \partial t$

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (7.83)$$

Электрическое поле вычисляется по формуле

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r.$$

В данном случае теорема Гаусса в классическом варианте не работает. Окружим начало координат малым шаровым объемом V_r , где $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$. Умножим обе части (7.83) на dV_r и проинтегрируем по области V_r . Тогда получим

$$\int_{V_r} \Delta \psi dV_r = \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_r} \psi dV_r - \frac{1}{\varepsilon_0} Q_0 [1 - e(t)]. \quad (7.84)$$

Используя теорему о дивергенции, имеем

$$\int_{V_r} \Delta \psi dV_r = \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \nabla \psi dS_r = - \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathcal{E} dS_r.$$

Устремляя в (7.84) радиус r шара к нулю, получаем равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathcal{E} dS_r = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} [1 - e(t)], \quad (7.85)$$

которое заменяет теорему Гаусса.

Запишем уравнение (7.83) в области $r \neq 0$. Получим

$$\frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c_*^2} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad r\psi(r, t) = f(r - c_*t),$$

где учтено, что на бесконечности излучение не приходит. Поскольку при $t = 0$ поле отсутствовало, то $f(s) = 0$ при $s \geq 0$. Следовательно, функция $f(r - c_*t)$ отлична от нуля только при отрицательных значениях аргумента $s = r - c_*t$, т. е. в области $r < c_*t$. Таким образом, для поля $\mathbf{E}$ получили волновое представление

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(r - c_*t)}{r} \right] \mathbf{e}_r = \left[\frac{f(r - c_*t)}{r^2} - \frac{f'(r - c_*t)}{r} \right] \mathbf{e}_r.$$

Теперь имеем

$$\int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E} dS_r = 4\pi [f(r - c_*t) - rf'(r - c_*t)].$$

Подставляя данное выражение в (7.85), получаем

$$f(-c_*t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} [1 - e(t)],$$

откуда находятся значения f при отрицательных значениях аргумента.

Окончательно имеем следующее решение:

$$\mathbf{E}(r, t) = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} \frac{1}{r} \left[1 - \exp \left(2\pi \frac{r - c_*t}{c_*\tau} \right) \right], & r \leq c_*t; \\ 0, & r \geq c_*t. \end{cases} \quad (7.86)$$

Согласно решению (7.86) при $t > \tau$ в области $r < c_*(t - \tau)$ устанавливается квазистатическое решение (7.82), даваемое классической системой в предположении, что ток отличен от нуля. В решении (7.86) ток отсутствует.

4. Электромагнитное поле двух заряженных разбегающихся линий. Задачи 2 и 3 достаточно ясно иллюстрируют различие между классической и модифицированной системами, но в них заряды возникали ниоткуда, что опровергают физики. Поэтому рассмотрим задачу, удовлетворяющую требованию сохранения заряда. Рассмотрим две однородно заряженные линии с линейной плотностью заряда σ и $(-\sigma)$. При $t < 0$ эти линии совпадали и покоились, поэтому при $t < 0$ электромагнитное поле отсутствовало, $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{B} = 0$. Ось y декартовой системы направим вдоль заряженных линий. В

момент времени $t = 0$ линии начинают двигаться вдоль оси z с одинаковой скоростью, но в разные стороны. Скорость точки $y = 0$ линии с плотностью σ определяется законом

$$v(t) = v(t) \mathbf{i}_3 = v_0 [1 - e(t)] \mathbf{i}_3, \quad e(t) \equiv \exp \left(-2\pi \frac{t}{\tau} \right).$$

Скорость линии с плотностью $(-\sigma)$ равна $(-v(t))$.

Вектор положения точки $y = 0$ линии с плотностью σ определяется выражением

$$\mathbf{r}(t) = \zeta(t) \mathbf{i}_3 = v_0 \left[t - \frac{\tau}{2\pi} (1 - e(t)) \right] \mathbf{i}_3, \quad v(t) = \dot{\zeta}(t).$$

Для плотности заряда и тока имеем формулы

$$\rho = \sigma \delta(x) [\delta(z - \zeta) - \delta(z + \zeta)],$$

$$\mathbf{j} = \sigma v(t) \delta(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)] \mathbf{i}_3.$$

В данной задаче плоскости $y = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной симметрии. Поэтому все полярные векторы должны иметь вид $\mathbf{a} = a_1(x, z, t) \mathbf{i}_1 + a_3(x, z, t) \mathbf{i}_3$, а все аксиальные векторы допускают представление $\mathbf{b} = b(x, z, t) \mathbf{i}_2$. Таким образом, для потенциалов имеем

$$\varphi = \varphi(x, z, t), \quad \Phi = \Phi(x, z, t) \mathbf{i}_2, \quad \varphi_* = \varphi_*(x, z, t), \quad \Phi_* = \Phi_*(x, z, t) \mathbf{i}_2.$$

Для потенциалов φ_* и Φ_* имеем систему уравнений, следующую из уравнения (7.70)

$$\frac{\partial \varphi_*}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} = \sigma v(t) \delta(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)],$$

или в другой форме

$$\Delta \varphi_* = \sigma v(t) \delta(x) [\delta'(z - \zeta) + \delta'(z + \zeta)] = -\partial \rho / \partial t, \quad (7.87)$$

$$\Delta \Phi_* = \sigma v(t) \delta'(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)].$$

Согласно уравнениям (7.87) φ_* и Φ_* отличны от нуля всюду в пространстве. Именно это обстоятельство затрудняет вывод о характере решения.

Проще всего устанавливается волновой характер магнитного поля, поскольку для него имеем

$$\mathbf{B} = -\Delta \Phi = -\Delta \Phi \mathbf{i}_2 = \mathcal{B}(x, z, t) \mathbf{i}_2.$$

Теперь согласно уравнению (7.61) и второму уравнению (7.87)

$$\Delta \mathcal{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} = \frac{\sigma v(t)}{\varepsilon_0 c^2} \delta'(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)].$$

Волновой характер $\mathcal{B}(x, z, t)$ очевиден, так как в правой части стоят сосредоточенные на линиях $x = 0$, $z = \zeta(t)$ и $z = -\zeta(t)$ воздействия. Вне этих линий $\mathcal{B}$ представляется решением волнового уравнения, т. е. $\mathcal{B}$ — это волны, поскольку начальные условия для $\mathcal{B}$ однородны. Важно, что $\mathcal{B}$ отлично от нуля только в области $x^2 + z^2 < c^2 t^2$ (см. [168]), т. е. магнитное поле распространяется не мгновенно. Сказанное верно как для классической, так и для модифицированной систем, причем магнитное поле, определяемое по обеим системам, одинаково.

Для электрического поля ситуация сложнее: классическую и модифицированную системы надо рассматривать отдельно.

Сначала рассмотрим классическую систему. Для нее электрическое поле заведомо не носит волнового характера согласно уравнению

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \delta(x)}{\varepsilon_0} [\delta(z - \zeta) - \delta(z + \zeta)].$$

Отсюда видим, что не только $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$ не является волной, но и само $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ возникает сразу во всем пространстве. Это означает, что некоторая часть $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ возникает мгновенно сколь угодно далеко от источника возмущений, т. е. налицо бесконечно большая скорость распространения сигнала. Теперь обратимся к модифицированной системе. Потенциалы φ и Φ удовлетворяют волновым, но неоднородным уравнениям (7.69) и (7.68). При этом в их правых частях содержатся потенциалы φ_* и Φ_* , которые отличны от нуля во всем пространстве. Поэтому неверно было бы утверждать, что φ и Φ локализованы в области $x^2 + z^2 < c^2 t^2$.

Чтобы убедиться в волновом характере электрического поля, найденного по модифицированной системе, необходимо переписать последнее в терминах вектора $\mathbf{u}$. После несложных преобразований систему (7.67)–(7.70) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{c_*^2 - c^2}{c^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{c_*^2}{c^2} \nabla q - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}.$$

Дифференцируя это уравнение по времени и переходя от $\mathbf{u}$ к $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, получаем

$$\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{c_*^2 - c^2}{c^2} \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{c_*^2}{\varepsilon_0 c^2} \nabla \rho + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (7.88)$$

В данном случае характер $\mathcal{E}$ очевиден. Левая часть этого уравнения есть хорошо известный оператор динамической теории упругости. Правая часть уравнения (7.88) содержит воздействия, сосредоточенные на подвижных линиях. Задачи такого типа хорошо изучены [162], и их решениями являются волны, расходящиеся от подвижных линий. Если $v_0 < c$, то эти волны локализованы в области $x^2 + z^2 < c_*^2 t^2$. Поскольку $c_* > c$, электрическое поле в данный момент времени распространяется дальше, чем магнитное, причем в области $c^2 t^2 < x^2 + z^2 < c_*^2 t^2$ существуют только продольные волны, не порождающие магнитного поля. Таким образом, в качественном отношении решения модифицированной системы значительно лучше соответствуют здравому смыслу, нежели решения классической системы.

7.3. Рациональная механика и квантовая физика

7.3.1. Реальность и Наука: два метода познания

Целью всякой науки является познание Реальности. При этом наука исследует не Реальность саму по себе, а некие упрощенные модели Реальности. Приближение к истинной Реальности осуществляется путем расширения модели. Однако, чтобы построить модель, как минимум, необходимо знать, что мы собственно собираемся моделировать. Иными словами, необходимо иметь априорное представление о Реальности. Получается заколдованный круг: чтобы познать Реальность, необходима Наука, а чтобы создать Науку, необходимо знание Реальности. К счастью, решение этой, казалось бы неразрешимой, проблемы заложено в самой природе человеческого ума, который имеет две качественно различные категории: интуицию и интеллект. Поскольку оба эти термина сильно перегружены, то необходимо указать смысл, который приписывается им в данной работе.

Интуиция — это способность человека к прямому восприятию окружающего нас мира, которая отнюдь не сводится к пяти основным органам чувств. Это хорошо сознают поэты, музыканты, художники и другие представители творческих профессий. Интуиция, как и любая другая способность человека, хорошо поддается тренировке, однако требует постоянных целенаправленных усилий.

Интеллект — это способность человека к логическим суждениям, основанным на априорных знаниях, заложенных в “память” интеллекта. Практически точным аналогом интеллекта является мощный современный компьютер.

Основные недостатки интеллекта в следующем. Во-первых, никакие принципиально новые открытия не могут совершаться на основе чистого интеллекта, как это подробно объяснял А. Пуанкаре. Во-вторых, интеллект может легко приводить к серьезным ошибкам. В самом деле, любой программист знает, что даже самый незначительный сбой в программе или малейшая неточность во входной информации может привести к сколь угодно большой ошибке на выходе. Именно поэтому, даже в наши дни повального увлечения интеллектуальным методом, практически ни одно жизненно важное решение не принимается на основе чисто интеллектуального подхода. В механике и физике интеллектуальный метод с большим успехом используется последние 300 лет. Причины этого успеха в том, что интеллект был добавлен к высоко развитой интуиции, которая была присуща всем выдающимся ученым вплоть до последней четверти прошлого столетия. Успех, достигнутый в результате соединения интуиции с интеллектом, был ошибочно приписан интеллекту.

В результате произошла большая переоценка возможностей интеллектуального метода. Это нашло отражение в постановке Д. Гильбертом знаменитой шестой проблемы об аксиоматизации физических наук. По существу вся теоретическая физика XX в. строится именно интеллектуальным методом. Недостаточность интеллектуального подхода хорошо сознавал один из самых выдающихся интеллектуалов Анри Пуанкаре, что подтверждают его работы [48]. Нам кажется, что главный смысл его работ до сих пор не осознан в должной мере, хотя он более, чем прозрачен: с точки зрения чистого интеллекта наука есть не что иное, как набор условных соглашений, и не более того. Кто только не критиковал А. Пуанкаре за его конвенционализм. Однако критики не поколебали систему аргументации А. Пуанкаре и вообще ломались в открытую дверь, ибо никто не видел трагизма ситуации лучше самого Пуанкаре, и он мучительно искал выход из создавшегося тупика, но не нашел его.

По иронии судьбы А. Пуанкаре следует назвать основным творцом метода новейшей физики. Именно Пуанкаре “развязал руки” новому поколению физиков, продемонстрировав условность науки. Ирония в том, что сам Пуанкаре, настаивая на интеллектуальной условности науки, все-таки твердо стоял на том, что за интеллектуальной условностью стоит нечто, не позволяющее свободе научного поиска превращаться в научный произвол. Новейшая физика посчитала подобную позицию А. Пуанкаре предрассудком и сохранила только его доказательства условности научных соглашений. Причина неудачи А. Пуанкаре вполне очевидна. Как и большинство современных ученых, А. Пуанкаре явно недооценил принципиальную неустранимость интуи-

ции из основ любой рациональной науки, включая математику. Это тем более удивительно, что А. Пуанкаре обладал глубочайшим интуитивным умом, он даже мягко критиковал Д. Гильберта за его стремление изгнать интуицию из математики. Для ученых-механиков ценность и необходимость интуитивного представления об объекте и процессах, в которых участвует этот объект, никогда не вызывала сомнений. На этапе выбора модели, т. е. написания основных уравнений, логика принимает лишь косвенное участие. Только после написания уравнений логика вступает в свои неограниченные права.

В принципе возможно использовать интуитивный и интеллектуальный методы познания независимо друг от друга. Интуитивное познание имеет тот недостаток, что ему невозможно обучить кого бы то ни было. Однако именно интуитивный метод лежит в основе составления научных моделей. Чисто интеллектуальный подход может создавать видимость научных открытий, но по существу он бесплоден. Особую популярность в последние десятилетия приобрела философия “черного ящика”, которая относится к достижениям интеллектуального метода. Казалось, что этот путь может привести к успеху. Однако на проверку оказалось, что “черный ящик” хорош только в том случае, когда он прозрачен, т. е. его содержимое заранее известно. Достоинством интеллектуального метода является то, что его достижениям легко обучать учеников.

Интеллектуальный метод охарактеризуем словами А. Эйнштейна: “Наука является созданием человеческого разума с его свободно изобретенными идеями и понятиями”.

Интуитивный метод познания лучше всего характеризуется словами Сократа. При интуитивном познании “душа взбирается на высочайшую наблюдательную башню бытия”.

Наш главный тезис: никакое истинное развитие науки невозможно без непосредственного участия интуиции, а свободно изобретенных идей и понятий не существует в природе.

7.3.2. Метафизические представления о строении физического мира

Как уже подчеркивалось, интуитивное представление о какой-то части Реальности должно предшествовать созданию той или иной математической модели этой части Реальности. Для механиков данное утверждение кажется самоочевидным. Для физиков, занимающихся разработками теорий для объектов, не поддающихся непосредственному восприятию человеком, высказы-

ный тезис является, мягко говоря, спорным. Мы должны быть благодарны физикам за то, что они испытали другой подход, в котором математическая модель предшествует интуитивному образу, причем последний вообще не обязателен. Сейчас можно подвести некоторые итоги этого небывало интенсивного интеллектуального опыта. На начальном этапе успехи сыпались как из рога изобилия, но они относились к простейшим ситуациям. При переходе к более сложным системам, т. е. к ситуациям, где интуиция отказывала уже по-настоящему, трудности стремительно нарастали. Как бы то ни было, но интеллектуальный опыт физиков не дает убедительного опровержения высказанному в начале этого подраздела тезису. Во всяком случае, именно отсутствие интуитивного представления об электромагнитном поле, заряде и электричестве не позволило механике включить эти объекты в свои структуры, а вовсе не мифические пороки, приписываемые механике физиками.

В данном случае наша цель — описание схематического строения физического мира в том виде, как его можно понять при изучении разного рода метафизических учений, а также внимательном прочтении трудов М. Фарадея [169] и Дж. Максвелла [163]. На данном этапе гарантировать, что изученное понято правильно, видимо, невозможно. Во многих деталях в литературе содержатся весьма заметные расхождения, что характерно для наблюдений на интуитивном уровне. По принятой терминологии то, что изложено далее, называется гипотезой. Научной ценностью эта гипотеза будет обладать только тогда, когда мы облечем ее в форму математических уравнений, научимся их применять, а результаты не будут противоречить известным экспериментальным данным. При этом дух и традиции механики требуют придерживаться позиции Г. Герца [7], с. 23: “При зрелом познании в первую очередь должна учитываться логическая чистота; только логически чистые картины должны проверяться в отношении их правильности, только правильные картины — в отношении их целесообразности”.

Следует добавить, что “логически чистой картине” предшествует интуитивный образ того, что мы собираемся логически чисто описать. Этот интуитивный образ в свою очередь не должен быть слишком сложным для возможностей рациональной науки на рассматриваемом этапе ее развития. Например, интуитивные представления о Миров у Пифагора и Платона были несравнимо сложнее (и правильнее), чем у Галилео Галилея. Центр Вселенной, по Пифагору, размещался далеко за пределами солнечной системы, а в основе физического мира лежало то, что в дальнейшем описывается под названием четвертого эфира. Архимед пользовался уже упрощенной схемой — гелиоцентрической системой [170]. Геоцентрическая система Птолемея была

насильственно внедрена (как единственно возможная) церковью в IV в. после Рождества Христова. Возможности рациональной науки отражать интуитивные (сильно упрощенные) представления стали достаточными исключительно в эпоху Возрождения.

В настоящее время возможности рациональной науки значительно возросли. Соответственно появилась возможность попытаться описать методами рациональной науки уже значительно более сложные интуитивные представления о Реальности. Именно такие интуитивные представления и будут изложены в этом подразделе.

В традициях метафизических учений всякую сущность принято делить на семь градаций. Седьмой градацией Космоса является Физический Мир (Мир плотный, седьмой космический эфир, космическое твердое тело). Физический Мир, в свою очередь, делится на семь градаций, называемых эфирами. Каждый из этих эфиров имеет дискретное строение, т. е. атомную структуру. Плотности этих эфиров заметно различаются, они как бы вложены один в другой. Эфиры взаимодействуют между собой сложным образом и подчиняются так называемому “закону действия тройной силы в четырех мирах”.

Другое название этого закона — “принцип додекаэдра Пифагора”. Точный смысл этого закона нам неизвестен и упоминается он для того, чтобы читатель мог осознать трудности, возникающие при попытках изучить метафизические учения. Описанию подлежит только то, что поддается анализу методами современной рациональной науки. Итак, Физический Мир расслаивается на семь эфиров.

Первый эфир состоит из быстровращающихся частиц одного сорта образующих как бы кристаллическую решетку. По этой причине его часто именуют “подвижная неподвижность”. Частицы первого эфира неделимы на уровне Физического Мира, а их массы настолько малы, что даже фотоны в сравнении с ними обладают невообразимо огромными массами. Первый эфир практически не ощутим на уровне макромира, но на микрочастицы вплоть до электронов оказывает влияние.

Комментарий. Первый эфир не рассматривается и не упоминается в современной физике. Однако он вовсе не является совершенно незнакомым современной науке. Прежде всего, первый эфир является едва ли не единственным претендентом на то, что субъективно ощущается человеком как время. Вдумаемся в следующее заявление И. Ньютона [45], с. 45: «Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время”... под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту отличную от времени величину, посредством равномерного роста или течения которой

выражается и измеряется время». Существует ли эта “отличная от времени величина”? А если существует, то какую бы природу она могла иметь? Легко понять, что время не может быть связано с какими-либо характеристиками трансляционного движения. Однако, если вообразить, что в каждой точке пространства имеется некое тело, совершающее перманентное вращение, то субъективное ощущение времени становится физической реальностью. Угол, накручиваемый упомянутым телом, как раз и может служить той величиной, о которой говорит Ньютон. Более определенно пишет об этом наш современник Н. А. Козырев в своих работах, посвященных причинной механике [164]. Работы Н. А. Козырева чрезвычайно уязвимы для формальной критики, но стоит заменить в них термин “время” на термин “первый эфир”, как многое в его рассуждениях становится ясным, по крайней мере, на интуитивном уровне. В следующем разделе будет показано, что типичными уравнениями, описывающими первый эфир, являются уравнения Шредингера и Клейна–Гордона.

Второй эфир — электромагнитное состояние материи. Атомы второго эфира являются уже сложными образованиями, но и эти атомы чрезвычайно малы — их массы много меньше массы фотона. Возмущения в этом эфире распространяются со скоростью света и более высокими.

Комментарий. Второй эфир — это то, что в современной физике называется электромагнитным полем. Но стоит подчеркнуть, что, в отличие от воззрений физиков, электромагнитное поле не имеет никакого отношения к зарядам, хотя заряженные микротела (например электроны) вносят сильные возмущения в электромагнитное поле. Типичными уравнениями, описывающими динамику второго эфира, являются уравнения максвелловского типа, но более сложные¹⁴.

Третий эфир, или световое состояние материи. Это, собственно говоря, взвесь мельчайших частиц в электромагнитном поле. Массы этих частиц, называемых фотонами, уже известны, вероятно, достоверно. Они имеют порядок 10^{-65} г. Весьма похоже на то, что свет — это движение упомянутых мельчайших частиц в электромагнитном поле на скорости распространения сигналов во втором эфире. Какие при этом происходят явления, легко представить себе, если рассмотреть движение самолета в атмосфере со скоростью, в точности равной скорости звука. Если третий эфир действительно реален, то корпускулярно-волновая природа света становится самоочевидной.

Четвертый эфир, или тепловое состояние материи. Этот эфир уже

¹⁴ Нелинейные уравнения, описывающие динамику второго эфира (электромагнитного поля), обсуждаются в шестой главе. (*Примеч. ред.*)

достаточно хорошо известен под названием плазмы. Отличие его от плазмы заключено в том, что в плазме недостаточно учитываются спинорные движения (вращательные степени свободы). Именно в этом эфире зарождается то свойство тел, которое проявляется как заряд в последующих эфирах. Однако, например, фрикционное электричество, не имеющее прямого отношения к привычному нам электричеству, объясняется именно на уровне четвертого эфира. Четвертый эфир играет исключительно важную роль во многих метафизических учениях.

Пятый, шестой и седьмой эфиры не нуждаются в комментариях, ибо это газообразное, жидкое и твердое состояние тел, соответственно. Отметим только, что электричество является атрибутом этих эфиров.

В заключение еще раз подчеркнем, что все указанное ранее является не более, чем предположением для рациональной науки. Это можно рассматривать как нулевое приближение к Реальности. Тщательный анализ математических моделей описанных эфиров покажет, насколько они приемлемы, а в чем потребуют значительных уточнений. Данный анализ, конечно, проявит дополнительные возможности интуиции, и тогда возникнет новое приближение к Реальности. Как бы плохи ни были сформулированные представления, они все-таки, за неимением лучших, необходимы для рациональной механики.

7.3.3. Динамика первого эфира. Уравнение Шредингера

Г. Лоренц в заключении книги [137], с. 66, пишет: “В последнее время механические объяснения происходящих в эфире процессов все более отступают на задний план. Для многих физиков основной частью теории является точное количественное описание явлений, как, например, данное в уравнениях Максвелла. Однако, даже если стоять на такой точке зрения, механические аналогии все же сохраняют некоторое значение. Они помогают нам думать о явлениях и могут явиться источником идей для новых исследований”. Эти слова произнесены великим физиком в 1902 г., и, очевидно, для физики это было прощание перед окончательным разрывом с классической механикой. Описание Г. Лоренцом старых теорий эфиров ясно показывает, что они были обречены на неудачу, так как, с одной стороны, все эти теории демонстрируют явное желание их авторов ввести в рассмотрение спинорные движения, но, с другой стороны, подходящий для этого математический аппарат в то время не был разработан. Книга Е. и Ф. Коссера [59], в которой впервые рассмотрены мультиполярные среды, опубликована в 1909 г. Впрочем, и эта книга еще не давала всех необходимых средств. Настоящее развитие мультиполярных

теорий в механике началось после 1958 г.

Для ясного понимания следующего далее необходимо знание мультипольных теорий и материала второй главы. Обратимся к выводу уравнений динамики первого эфира.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета $\mathcal{S}$. Выделим в ней кусочно-гладкую замкнутую поверхность Σ , не имеющую точек самопересечения и фиксированную в $\mathcal{S}$ -системе. Через $n(\Sigma)$ обозначим число частиц, находящихся в данный момент времени t внутри Σ . Как и всегда в феноменологических теориях, число $n(\Sigma)$ не обязательно является целым, что не имеет значения, так как по предположению $n(\Sigma)$ велико. Тогда для $n(\Sigma)$ получаем

$$n(\Sigma) = \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) dV, \quad (7.89)$$

где $\eta(\mathbf{x}, t)$ — объемная плотность частиц; $\mathbf{x}$ — вектор положения точки тела отсчета; V_Σ — объем, заключенный внутри Σ . Включение времени t в $\eta(\mathbf{x}, t)$ показывает, что число частиц внутри Σ переменное. Ранее говорилось, что частицы первого эфира неподвижны в абсолютном пространстве. Поскольку мы пользуемся движущейся $\mathcal{S}$ -системой, то число частиц в Σ переменное. Множество частиц внутри Σ назовем телом $\mathcal{A}$. Кинетическую энергию тела $\mathcal{A}$ представим в виде

$$K(\mathcal{A}) = \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathcal{K}(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (7.90)$$

где $\mathcal{K}$ — массовая плотность кинетической энергии; $\eta m dV$ — масса объема эфира dV ; $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ — тензор поворота частицы; $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ — угловая скорость; $m\boldsymbol{\Theta}_0$ — тензор в отсчетной конфигурации инерции; m и $m\boldsymbol{\Theta}_0$ не зависят ни от $\mathbf{x}$, ни от t , так как все частицы однотипны. Количество движения $\mathbf{K}_1$ и динамический спин $\mathbf{K}_2$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_1 = \mathbf{V} = \text{const}; \\ \mathbf{K}_2(\mathcal{A}) &= \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_2 = \mathbf{x} \times \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (7.91)$$

где $\mathcal{K}_2$ — массовая плотность динамического спина. Напомним, что угловая

скорость $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ при пространственном описании¹⁵ вычисляется с помощью модификации уравнения Пуассона (3.8)

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t).$$

Закон “сохранения” частиц при условии $\mathbf{V} = \text{const}$ принимает вид

$$\frac{\delta \eta(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \equiv \frac{d\eta(\mathbf{x}, t)}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7.92)$$

Уравнение (7.92) показывает, что изменение плотности частиц происходит только за счет движения эфира относительно $\mathcal{S}$ -системы. Если эфир однороден, то

$$\nabla \eta = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

Запишем первый закон динамики Эйлера, считая, что массовые силы отсутствуют

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta m \mathbf{V} dV = \int_{(\Sigma)} \mathbf{T}_{(n)} d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} d\Sigma. \quad (7.93)$$

Второе слагаемое в правой части есть скорость подвода количества движения в тело $\mathcal{A}$; $\mathbf{T}_{(n)} d\Sigma$ — сила, действующая на площадку $d\Sigma$ с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$. Используя стандартные рассуждения, согласно (7.93) с учетом (7.92) получаем

$$\mathbf{T}_{(n)} = -\mathbf{T}_{(-n)}, \quad \mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \quad \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad (7.94)$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений в эфире. Видим, что $\mathbf{T}$ находится из условий статики, что несколько необычно для динамической теории — в этом специфика первого эфира.

¹⁵ Пространственное описание кинематики сплошных сред с вращательными степенями свободы было разработано П. А. Жилиным в 2000–2001 гг. Впервые оно появилось в статье “*The main direction of the development of mechanics for XXI century*”, 2000 г. и получило окончательное развитие в статье “*Основные уравнения теории неупругих сред*”, 2001 г. Данный раздел основан на статье “*Реальность и механика*”, 1996 г., в которой использовалось материальное описание. Чтобы привести данный раздел в соответствие с остальными главами книги, редакционная коллегия сочла необходимым заменить материальное описание пространственным. (Примеч. ред.)

Запишем второй закон динамики Эйлера при условии отсутствия массовых сил:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta m \mathcal{K}_2 dV &= \int_{(V_\Sigma)} \eta \mathbf{L} dV + \\ &+ \int_{(\Sigma)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 d\Sigma, \end{aligned} \quad (7.95)$$

где $\mathbf{M}_{(n)} d\Sigma$ — момент, действующий на площадку $d\Sigma$; $\eta \mathbf{L}$ — объемная плотность внешнего момента; последнее слагаемое есть скорость подвода кинетического момента в тело $\mathcal{A}$.

Используя (7.95) и учитывая (7.94), получаем

$$\mathbf{M}_{(n)} = -\mathbf{M}_{(-n)}; \quad \mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M},$$

где тензор второго ранга $\mathbf{M}$ называется тензором моментных напряжений.

Согласно (7.95) с учетом (7.92), (7.94) получаем локальную форму второго закона динамики

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{t}}; \quad \mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (7.96)$$

Система уравнений (7.94), (7.96) содержит 21 неизвестную функцию (по девять координат $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ и три параметра, определяющие тензор $\mathbf{P}$), т. е. она не замкнута. Для замыкания системы (7.94), (7.96) необходимо привлекать определяющие уравнения. Трудность в том, что мы не знаем, от каких аргументов зависят $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$. Чтобы преодолеть это затруднение, воспользуемся уравнением баланса энергии.

Запишем уравнение баланса энергии, игнорируя массовые силы и тепловые эффекты,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta (m \mathcal{K} + \mathcal{U}) dV &= \int_{(V_\Sigma)} \eta \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} dV + \\ &+ \int_{(\Sigma)} (\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (m \mathcal{K} + \mathcal{U}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (7.97)$$

где $\eta \mathcal{U}$ — объемная плотность внутренней энергии, а последнее слагаемое в правой части (7.97) есть скорость подвода энергии в тело $\mathcal{A}$, возникающее вследствие движения $\mathcal{S}$ -системы.

В локальной форме уравнение (7.97) принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{t}} = \mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (7.98)$$

где учтены уравнения (7.94), (7.96); условие $\mathbf{V} = \text{const}$ и разложение (6.77)

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\times = -2\mathbf{D} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.99)$$

С учетом тождеств (6.85)–(6.92) преобразуем уравнение (7.98) к виду

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{t}} = \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{t}} + \left[\left(\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_\times + \mathbf{D} \right) \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}, \quad (7.100)$$

где тензор деформации $\mathbf{F}$ определяется формулами (6.87)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^s}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s.$$

Теперь легко принять следующие определяющие уравнения:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{F}, \mathbf{P}). \quad (7.101)$$

Учитывая равенство

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{t}} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{t}} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}},$$

уравнение (7.100) переписываем в виде

$$\left(\eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{M} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{t}} + \left[\eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} - \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_\times + \mathbf{D} \right) \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} = 0. \quad (7.102)$$

Получили линейную функцию скоростей $\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{t}}$ и $\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}$, которая должна тождественно обращаться в нуль. Однако в (7.102) не все скорости линейно независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона имеем¹⁶

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} \cdot \mathbf{P}^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

¹⁶ Доказательство этого тождества можно найти в Приложении D, подраздел D.2.5. (Примеч. ред.)

С учетом этого равенства можно утверждать, что для справедливости (7.102) при всех возможных процессах необходимо выполнение соотношений

$$\mathbf{M} = \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}, \quad \left[\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_{\times} + \mathbf{D} \right] \times \mathbf{P} = \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (7.103)$$

Второе из этих равенств после умножения на $\mathbf{P}^T$ справа и вычисления векторного инварианта ($\mathbf{A}_{\times} = \mathbf{0}$) дает

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2} \eta \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \mathbf{F} \right]_{\times}. \quad (7.104)$$

Соотношениями (7.101), (7.103), (7.104) определяются тензор моментных напряжений $\mathbf{M}$ и антисимметричная часть тензора напряжений $\mathbf{T}$. Симметричная часть $\mathbf{T}$ должна находиться по (7.99) и дополнительным определяющим уравнениям. Однако в дальнейшем $\mathbf{t}$ нас интересовать не будет. Обращает на себя внимание тот факт, что $\mathbf{t}$ не влияет на внутреннюю энергию. Удивляться этому не приходится. Здесь можно вспомнить, что внутренняя энергия абсолютно твердого тела не зависит от напряжений в теле.

Ранее была представлена, по существу, общая теория чисто моментной среды, в которой частицы только вращаются, их трансляционные движения обусловлены исключительно движением системы отсчета. Насколько известно, уравнения такого типа получены впервые. (Следует отметить, что теории эфира, представленные в книге Г. Лоренца, не имеют отношения к первому эфиру.) Выведенные уравнения являются более общими, чем это необходимо для первого эфира. Они просто показывают, в каком классе уравнений следует искать динамические уравнения первого эфира. Далее примем значительные ограничения, которые, разумеется, не обязательны с чисто теоретической точки зрения и оправдываются на этапе их построения исключительно интуитивными представлениями. Важно, чтобы эти ограничения не вступали в противоречия ни с формальной логикой, ни со всеми предыдущими рассуждениями.

Прежде всего, примем, что частицы первого эфира обладают трансверсально изотропными тензорами инерции

$$m\Theta_0 = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (7.105)$$

где λ и μ — осевой и экваториальный моменты инерции, единичный вектор $\mathbf{e}$ задает ось изотропии. Вектор $\mathbf{e}$ фиксирован в $\mathcal{S}$ -системе.

Стационарное состояние первого эфира является для нас основным и определяется заданием тензора поворота вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\Omega \mathbf{t} \mathbf{e}) \equiv (1 - \cos \Omega t) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \Omega t \mathbf{E} + \sin \Omega t \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \quad (7.106)$$

где $\Omega = \text{const}$ есть угловая скорость вращения частицы. Тензору поворота (7.106) отвечают угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и тензор деформации $\mathbf{F}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Считаем, что тензору деформации $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ и тензору поворота (7.106) отвечают нулевой тензор $\mathbf{M}$ и нулевой вектор $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\Omega \mathbf{t} \mathbf{e})) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\Omega \mathbf{t} \mathbf{e})) = \mathbf{0}.$$

Эти допущения аналогичны гипотезе натурального состояния в механике сплошных сред. Очевидно, что при стационарном состоянии эфира основное уравнение динамики эфира (7.96) выполняется тождественно. Таким образом, стационарное состояние первого эфира, если он вообще существует, дает нам то, что субъективно воспринимается как время: в каждой точке пространства угол $\alpha = \Omega t$, накручиваемый частицей, по существу не отличим от времени. Может вызвать удивление тот факт, что в пространстве (системе отсчета) появилась выделенная ось $\mathbf{e}$, т. е. появилась определенная анизотропия. Соответствует ли она Реальности? Трудно ответить на этот вопрос, но нельзя и отрицать такую возможность. Например, строение Солнечной системы и Галактик указывает на их стремление расположиться в одной плоскости, а нормаль к этой плоскости, возможно, и дает нам ось $\mathbf{e}$. Можно указать и другие соображения. В любом случае требуется тщательный анализ. Пока рассматриваем все указанное как сугубо теоретическую возможность и не более того.

Обратимся к выводу уравнений, описывающих распространение возмущений в первом эфире. Примем, что эти возмущения малы по норме. Тензор поворота представим в виде композиции поворота (7.106) и малого поворота

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\Omega \mathbf{t} \mathbf{e}), \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (7.107)$$

где ψ , θ , φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, т. е. углы Эйлера, описывающие малый поворот. Малым здесь является только угол нутации θ : $|\theta| \ll 1$.

Выражение (7.107) легко переписать в другом виде [31]

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{e}), \\ \beta &= \Omega t + \psi + \varphi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \theta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (7.108)$$

где вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = 0$) мал по модулю: $|\boldsymbol{\gamma}| = |\theta|$. Малой считается и сумма $\varphi + \psi$.

Нетрудно вычислить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и векторы деформации $\mathbf{F}_s$, отвечающие тензору поворота (7.108),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \Omega \mathbf{e} + \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} + \left(\frac{\delta \psi}{\delta t} + \frac{\delta \varphi}{\delta t} \right) \mathbf{e}, \\ \mathbf{F}_s &= \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial x^s} + \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial x^s} \mathbf{e}.\end{aligned}\tag{7.109}$$

Видим, что $\boldsymbol{\omega}$ содержит большое слагаемое $\Omega \mathbf{e}$, а векторы деформации $\mathbf{F}_s$ малы. Для тензора деформации $\mathbf{F}$ получаем равенство

$$\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\gamma} + \nabla (\varphi + \psi) \otimes \mathbf{e} = \nabla [\boldsymbol{\gamma} + (\varphi + \psi) \mathbf{e}], \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = 0.\tag{7.110}$$

Примем основные допущения, характерные не для всякой моментной среды, а только для первого эфира

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \varphi + \psi = 0.\tag{7.111}$$

Тогда линеаризованное выражение для динамического спина принимает вид

$$m\mathcal{L} = \lambda \Omega \mathbf{e} + \mu \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \lambda \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad m\mathcal{L} \cdot \mathbf{e} = \lambda \Omega = \text{const}.\tag{7.112}$$

Выражения (7.109) принимают вид

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e} + \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\gamma}, \quad \nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + \nabla \boldsymbol{\gamma} \times \Omega \mathbf{e}.\tag{7.113}$$

Уравнение баланса энергии (7.98) переписывается в виде

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + 2\mathbf{D} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega [\mathbf{M}^T \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})].$$

Инвариантность внутренней энергии по отношению к замене системы отсчета приводит к условию, которое в линеаризованном случае дает равенство

$$\mathbf{M}^T \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) = 0.\tag{7.114}$$

Поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + 2\mathbf{D} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}(\nabla \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}).\tag{7.115}$$

Соотношения Коши–Грина (7.103), (7.104) принимают совсем простой вид

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \nabla \boldsymbol{\gamma}}, \quad 2\mathbf{D} = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad (\eta = \text{const}). \quad (7.116)$$

В линейной теории для внутренней энергии можно принять квадратичную форму

$$\eta \mathcal{U} = \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdots \mathbf{A} \cdots \nabla \boldsymbol{\gamma} + \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdots \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (7.117)$$

где тензоры четвертого ранга $\mathbf{A}$, третьего ранга $\mathbf{B}$ и второго ранга $\mathbf{C}$ трансверсально изотропны с осью изотропии $\mathbf{e}$ и удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdots \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdots \mathbf{d}, & \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} &= 0, \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} &= 0, & \mathbf{C} &= \mathbf{C}^T, & \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} &= 0, \end{aligned}$$

причем тензор второго ранга $\mathbf{d}$ здесь произволен. Эти ограничения, очевидно, не уменьшают степени общности (7.117).

Общий вид трансверсально изотропных тензоров, удовлетворяющих приведенным ограничениям, дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_0 \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{e} + A_1 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \\ &+ A_2 (\mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{i}_\alpha) + A_3 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \\ \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{C} = C \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (7.118)$$

где подразумевается суммирование по греческим индексам от 1 до 2. Энергия деформации (7.117) положительно определена, если выполнены неравенства

$$A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad C > 0.$$

Условие (7.114) будет выполнено, если $A_3 = A_1 + A_2$.

Простейшая форма энергии для первого эфира имеет вид

$$\eta \mathcal{U} = \frac{1}{2} A \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdots \nabla \boldsymbol{\gamma}^T + \frac{1}{2} C \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad A > 0, \quad C > 0. \quad (7.119)$$

В этом случае

$$\mathbf{M} = A \nabla \boldsymbol{\gamma}, \quad 2\mathbf{D} = C \boldsymbol{\gamma}. \quad (7.120)$$

Уравнение баланса кинетического момента, т. е. второй закон динамики Эйлера (7.96), в случае (7.120) принимает простой вид

$$A \Delta \boldsymbol{\gamma} - C \boldsymbol{\gamma} = \eta \mu \frac{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}}{\delta t^2} + \eta \lambda \Omega \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} \times \mathbf{e}. \quad (7.121)$$

Приняв условие

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \equiv \frac{d}{dt}, \quad (7.122)$$

уравнение (7.121) можно переписать в виде

$$A \Delta \boldsymbol{\gamma} - C \boldsymbol{\gamma} = \eta \mu \frac{d^2 \boldsymbol{\gamma}}{dt^2} + \eta \lambda \Omega \frac{d \boldsymbol{\gamma}}{dt} \times \mathbf{e}. \quad (7.123)$$

На первый взгляд кажется, что уравнение (7.123) не встречалось ранее в физике. Однако это не совсем так. Запишем уравнение (7.123) в скалярной форме. Представим вектор $\boldsymbol{\gamma}$ в виде разложения по базису

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{i}_1 + \gamma_2 \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \quad |\mathbf{i}_\alpha| = 1$$

и введем функцию

$$\Psi = \gamma_1 + i \gamma_2, \quad i^2 = -1. \quad (7.124)$$

Тогда уравнение (7.123) записывается в виде

$$-\eta \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + i \eta \lambda \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -A \Delta \Psi + C \Psi. \quad (7.125)$$

Если в этом уравнении отбросить первое слагаемое в левой части, то получаем хорошо известное уравнение Шредингера. Если отбросить второе слагаемое, то получаем не менее известное уравнение Клейна–Гордона. Оба уравнения лежат в основаниях квантовой механики. Напомним, что “вывод” этих уравнений в квантовой механике основан на весьма неубедительных для механиков рассуждениях. По сути, единственное оправдание этих уравнений — вытекающие из них результаты.

Более удобной является форма (7.123). Для разделения переменных в (7.123) будем искать его решение в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, t) \cdot \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{p} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}} = -p^2 \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Тогда для вектора $\boldsymbol{\Gamma}$ получаем уравнение

$$A \Delta \boldsymbol{\Gamma} - C \boldsymbol{\Gamma} = -(\eta \mu p^2 - \eta \lambda \Omega p) \boldsymbol{\Gamma}. \quad (7.126)$$

Частные решения этого уравнения ищутся в виде

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_* \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{k}$ называется волновым вектором. Подставляя это выражение в (7.126), получаем дисперсионное уравнение

$$\eta \mu p^2 - \eta \lambda \Omega p - (C + A k^2) = 0, \quad k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

Откуда получаем

$$p_{1,2} = \frac{\lambda\Omega}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\Omega}{2\mu}\right)^2 + \frac{C + Ak^2}{\eta\mu}}. \quad (7.127)$$

Итак, в первом эфире имеется две скорости распространения волн, значительно различающиеся по величине.

Заметим, что угловая скорость Ω существенно входит в (7.123) и именно она, видимо, в первую очередь может претендовать на роль фундаментальной мировой константы.

Можно предположить, что первый эфир играет главную роль в объяснении строения ядер и атомов. Для макротел первый эфир практически не ощутим, если не принимать во внимание особо тонких экспериментов.

Заключение

Данная глава посвящена рассмотрению фундаментальных проблем в электродинамике и теории атома. Главная цель — привлечь внимание ученых-механиков к их анализу. Для решения этих проблем могут использоваться концепции различного рода эфиров. Эти концепции описывались многими великими учеными (Пифагор, Платон, Аристотель, Ньютон, Эйлер, Фарадей, Максвелл и др.). В частности, в данной главе показано, что так называемый первый эфир является сплошной средой специального вида. Распространение возмущений в первом эфире описывается уравнениями, которые представляют собой некоторую комбинацию уравнений Шредингера и Клейна–Гордона. Таким образом, дана строгая механическая интерпретация уравнения Шредингера. Так называемый второй эфир является электромагнитным состоянием материи. Детально обсуждалась классическая электродинамика Максвелла.

Показано, что в общем случае уравнения Максвелла не имеют решения. Если решение существует, то оно состоит из двух частей: волновая часть и электростатическая часть, которая мгновенно распространяется на все пространство. Это означает, что уравнения Максвелла содержат две скорости распространения волн, причем одна из них бесконечна. Следовательно, электродинамика Максвелла не совместима со специальной теорией относительности. Предлагаемая механическая интерпретация уравнений Максвелла немедленно приводит к модифицированным уравнениям Максвелла, обладающим следующими свойствами: 1) решение этих уравнений существует

всегда; 2) скорости распространения сигналов конечны; 3) решение модифицированных уравнений стремится к решению классических уравнений при стремлении второй скорости к бесконечности; 4) если скалярный потенциал равен нулю, то оба решения в точности совпадают. Показано, почему как классическая, так и модифицированная электродинамика не позволяет правильным образом описать структуру атома. Иллюстративные задачи показывают разницу между классической и модифицированной системами.

Двадцатый век продемонстрировал огромный прогресс механики не только в области ее традиционных приложений, но и в области ее фундаментальных основ. Кое-что было просто уточнено, кое в чем механика была расширена в направлениях, указанных Л. Эйлером свыше 200 лет тому назад. В настоящее время возможности рациональной механики возросли настолько, что ей вполне по силам вплотную заняться проблемами электромагнетизма и строения атома. Направление этих исследований мы попытались показать в данной работе. Главные трудности в том, как описать взаимодействие эфиров между собой и взаимодействие эфиров с макротелами.

Первоочередной задачей является ответ на вопрос, что такое заряд, т. е. чем отличается заряженное тело от незаряженного. Разумеется, ответ должен иметь не словесную форму, но должен быть выражен в виде неких формальных структур, задаваемых в механике. Здесь еще все покрыто туманом, рассеять который и должна рациональная механика в грядущем веке.

К сожалению, большинство механиков полагают, что у механики достаточно своих проблем, и потому они самоустраниются от анализа труднейших проблем новейшей физики. Кажется, что это опасная тенденция. Те, кто следят за развитием науки, легко заметят, как стремительно снижается роль и значение механики в исследовательских и образовательных программах. Некоторые исследователи вообще перестали считать механику фундаментальной наукой. Ошибочность подобных воззрений проявится очень скоро, но восстанавливать престиж механики будет нелегко.

Единственный шанс для механики сохранить роль фундаментальной науки состоит в активном внедрении в разработку проблем новейшего естествознания в широком смысле.

Библиографический список

- [1] **Жилин П. А.** Теоретическая механика: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2001. — 146 с.
- [2] **Жилин П. А.** Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. — 340 с.
- [3] **Жилин П. А.** Актуальные проблемы механики / П. А. Жилин. // Сборник статей по материалам докладов на ежегодной международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики”. Т. 1. — СПб., 2006. — 306 с.
- [4] **Zhilin P. A.** Advanced problems in mechanics / P. A. Zhilin. // Selection of articles presented at the Annual International Summer School-Conference “Advanced problems in mechanics”. Vol. 2. — St. Petersburg, 2006. — 271 p.
- [5] **Жилин П. А.** Прикладная механика. Основы теории оболочек: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. — 167 с.
- [6] **Жилин П. А.** Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. — 101 с.
- [7] **Герц Г.** Принципы механики, изложенные в новой связи / Г. Герц. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 386 с.
- [8] **Мах Э.** Механика (историко-критический очерк ее развития) / Э. Мах. — СПб.: Общественная польза, 1909. — 448 с.
- [9] **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм / Б. Сен-Венан. — М.: Физматгиз, 1961. — 518 с.
- [10] **Эйлер Л.** Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи / Л. Эйлер.; ГТТЛ. — М.; Л., 1934. — 600 с.
- [11] **Ляв А.** Математическая теория упругости / А. Ляв.; ОНТИ. — М., 1935. — 674 с.
- [12] **Lord Kelvin (Sir w.Thomson)** Treatise on natural philosophy. Part II / Lord Kelvin (Sir W. Thomson), P. G. Tait. — Cambridge: Univ. Press, 1890. — 527 p.
- [13] **Кирпичев В. Л.** Беседы о механике / В. Л. Кирпичев. — С.-Петербург, 1907. — 371 с.

-
- [14] **Truesdell C.** History of classical mechanics / C. Truesdell. // *Naturwissenschaften*, Springer-Verlag, 1976, p. 63, Part I, p. 53–62; Part II, p. 119–130.
- [15] **Zhilin P. A.** Nonlinear theory of thin rods / P. A. Zhilin. // *Lecture at XXXIII Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. — St. Petersburg, Russia, 2005.
- [16] **Эйлер Л.** Общие принципы движения жидкостей / Л. Эйлер. // *Mem. Acad.roy. sci. et belles-lettres*, Berlin, p. 11, 1755, p. 274–315, 1757. (*Opera omnia*, II — p. 12). (На латинском языке).
- [17] **Эйлер Л.** Новый метод определения движения твердых тел / Л. Эйлер. // *Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop.*, p. 20, 1775, p. 208–238, 1776 (*Opera omnia*, II — p. 9). (На латинском языке).
- [18] **Погребысский И. Б.** От Лагранжа к Эйнштейну / И. Б. Погребысский. — М.: Наука, 1966. — 327 с.
- [19] **Новожилов В. В.** Теория упругости / В. В. Новожилов. — Л., 1969. — 369 с.
- [20] **Кирхгоф Г.** Механика / Г. Кирхгоф. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 402 с.
- [21] **Love A. E. H.** A Treatise on the mathematical theory of elasticity / A. E. H. Love. — Cambridge, 1893, Vol. II. — 327 p.
- [22] **Truesdell C.** The classical field theories, *Encyclopedia of Physics* / C. Truesdell, R. Toupin. — Springer-Verl, 1960. Vol. 1.
- [23] **Пальмов В. А.** Колебания упруго-пластических тел / В. А. Пальмов. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
- [24] **Palmov V. A.** Vibrations of elasto-plastic bodies / V. A. Palmov. — Berlin: Springer, 1998.
- [25] **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М.: Наука, 1975. — 592 с.
- [26] **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
- [27] **Ивенс Г. И.** Механика и термодинамика биологических мембран / Г. И. Ивенс, З. Скейлак. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
- [28] **Гольденвейзер А. Л.** Теории тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
- [29] **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates / P. M. Naghdi. — *Flügge’s Handbuch der Physik*, Bd. VI-2, // Springer-Verlag, 1972. — P. 425–640.
- [30] **Naghdi P. M.** A critical review of the state of finite plasticity / P. M. Naghdi // *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*. — Vol. 41. — 1990. — P. 315–394.
- [31] **Zhilin P. A.** A New approach to the analysis of free rotations of rigid bodies / P. A. Zhilin. // *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)* — S. 76. — 1996. — 4. — P. 187–204.

-
- [32] **Бернулли И.** Избранные сочинения по механике / И. Бернулли.; ОНТИ. — М.; Л., 1937. — 297 с.
- [33] **Green G.** On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media / G. Green. // Trans. Phil. Soc. — Vol. 7. — Cambridge, 1839.
- [34] **Truesdell C.** Rational thermodynamics / C. Truesdell. — Springer-Verlag, New-York, 1984. — 578 p.
- [35] **Сморodinский Я. А.** Температура / Я. А. Смородинский. — М.: Наука, 1987.
- [36] **Терпигорев А. М.** (редактор) Терминология термодинамики / А. М. Терпигорев. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 56 с.
- [37] **Леонтович М. А.** Введение в термодинамику. Статистическая физика / М. А. Леонтович. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
- [38] **Жилин П. А.** Математическая теория неупругости / П. А. Жилин. // Успехи механики. Т. 2. — 2003. — N 4. — С. 3–36.
- [39] **Жилин П. А.** Основные уравнения теории неупругих сред / П. А. Жилин. // Труды XXVIII летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2001. — С. 14–58.
- [40] **Ньютон И.** Оптика / И. Ньютон.; ГИТТЛ. — М., 1954. — 367 с.
- [41] **Жилин П. А.** Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики / П. А. Жилин. // Труды XXII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических систем”. — СПб., 1995. — С. 10–36.
- [42] **Жилин П. А.** Основные положения Эйлеровой механики / П. А. Жилин. // Труды XIX летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2002. — С. 641–675.
- [43] **Жилин П. А.** Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла / П. А. Жилин. // Труды СПбГТУ N 448. — СПб., 1994. — С. 3–38.
- [44] **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. // Собрание трудов А. Н. Крылова. Т. VII. — М.; Л. Изд-во АН СССР, 1936.
- [45] **Ньютон И.** Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых / И. Ньютон. // В кн. Ньютон И. Математические работы; ОНТИ. — М.; Л., 1937. — С. 25–166.
- [46] **Boltzmann L.** Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, Teil I. / L. Boltzmann. — Leipzig, 1897. — 241 p.
- [47] **Боль П.** О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике / П. Боль. // Собрание трудов; под ред. Л. Э. Рейзиня. — Рига: Зинатне, 1974. — С. 73–198.
- [48] **Пуанкаре А.** О науке / А. Пуанкаре. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

-
- [49] **Пуанкаре А.** Измерение времени / А. Пуанкаре. // Избранные труды А. Пуанкаре. Т. III. — М.: Наука, 1974. — 771 с.
- [50] **Жилин П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. — СПб.: Нестор, 2001. — 276 с.
- [51] **Эйлер Л.** Основы динамики точки / Л. Эйлер.; ГИТТЛ. — М.; Л., 1938. — 500 с.
- [52] **Гельмгольц Г.** О сохранении силы / Г. Гельмгольц.; ГИТТЛ. — М.; Л., 1934. — 143 с.
- [53] **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 2 / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М.: Наука, 1983. — 640 с.
- [54] **Куликов К. А.** Вращение Земли / К. А. Куликов. — М.: Недра, 1985. — 159 с.
- [55] **Zhilin P. A.** Phase transitions and general theory of elasto-plastic bodies / P. A. Zhilin. // Труды XXIX летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2002. — С. 36–48.
- [56] **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды / С. К. Годунов. — М.: Наука, 1978. — 303 с.
- [57] **Bruhns O. T.** (editors) Micro- and macrostructural aspects of thermoplasticity / O. T. Bruhns, E. Stein. // Proceedings of the IUTAM Symposium held in Bochum. — Germany, 1997.
- [58] **Поздеев А. А.** Большие упруго-пластические деформации / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
- [59] **Cosserat E. et F.** Theorie des corps deformables / E. et F. Cosserat. — Hermann: Paris, 1909.
- [60] **Kafadar C. B.** Micropolar media — I. The classical theory / C. B. Kafadar, A. C. Eringen. // Int. J. Engng. Sci., Vol. 9. — 1971. — P. 271–305.
- [61] **Eringen A. C.** Theory of micropolar elasticity / A. C. Eringen: in Fracture. Vol. 2, Ed. Liebowitz H. — Academic Press: New York, 1968.
- [62] **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. I / Дж. Ф. Белл. — М.: Наука, 1984. — 597 с.
- [63] **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II / Дж. Ф. Белл. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
- [64] **Хилл Р.** Математическая теория пластичности / Р. Хилл.; ГИТТЛ. — М., 1956. — 407 с.
- [65] **Truesdell C.** The non-linear field theories of mechanics. Encyclopedia of Physics. III / C. Truesdell, W. Noll. — Springer-Verlag, 1965.
- [66] **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 840 с.

- [67] **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек / П. А. Жилин. // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 386. — СПб., 1982. — С. 29–46.
- [68] **Zhilin P. A.** Mechanics of deformable directed surfaces / P. A. Zhilin. // Int. J. Solids Structures. — Vol. 12. — 1976. — P. 635–648.
- [69] **Картан Э.** Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера / Э. Картан. — М.: Изд-во МГУ, 1963. — 367 с.
- [70] **Курант Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
- [71] **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов — М.: Наука, 1979. — 744 с.
- [72] **Френкель Я. И.** Введение в теорию металлов / Я. И. Френкель.; ГИФМЛ. — М., 1958. — 368 с.
- [73] Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом / В. И. Бойко [и др.]. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 287 с.
- [74] **Златин Н. А.** О роли сжимаемости в процессе динамического деформирования пластических тел / Н. А. Златин. // Некоторые проблемы прочности твердого тела: сб. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 222–229.
- [75] **Кузнецов Н. М.** Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах / Н. М. Кузнецов. — М.: Машиностроение, 1965. — 463 с.
- [76] **Жилин П. А.** Модифицированная теория симметрии тензоров и их инвариантов / П. А. Жилин. // Нелинейные проблемы механики сплошных сред: изв. высш. учеб. зав. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. Спецвыпуск. — С. 176–195.
- [77] **Zhilin P. A.** Symmetries and orthogonal invariants in oriented space / P. A. Zhilin. // Proceedings of XXXII Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia. — 2005. — P. 470–483.
- [78] **Гуревич Г. Б.** Основы теории алгебраических инвариантов / Г. Б. Гуревич.; ГТИИ. — М., 1948.
- [79] **Вейль Г.** Классические группы, их инварианты и представления / Г. Вейль. — М., 1947. — 408 с.
- [80] **Спенсер Э.** Теория инвариантов / Э. Спенсер. — М.: Мир, 1974.
- [81] Applications of tensor functions in solid mechanics / J. R. Boehler (ed). — Springer-Verlag: Wien, New York, 1987.
- [82] **Spenser A. J. M.** Isotropic polynomial invariants and tensor functions / A. J. M. Spenser. // In collection: Applications of tensor functions in solid mechanics. J. R. Boehler (ed). — Springer-Verlag: Wien, New York, 1987. P. 141–169.

- [83] **Zheng Q. S.** Theory of representations for tensor functions — a unified invariant approach to constitutive equations / Q. S. Zheng. // *Appl. Mech. Rev.* — Vol. 47, N 11. — P. 545–587.
- [84] **Spenser A. J. M.** The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua / A. J. M. Spenser, R. S. Rivlin. // In collection: *Collected papers of R. S. Rivlin.* — G. I. Barenblat, D. D. Joseph (eds). — Vol. I (p. 1–1424), Vol. II (p. 1425–2828). — Springer-Verlag, New York, Inc. 1997. — P. 1071–1098.
- [85] **Spenser A. J. M.** Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3×3 matrices / A. J. M. Spenser, R. S. Rivlin. // In collection: *Collected papers of R. S. Rivlin.* — G. I. Barenblat, and D. D. Joseph (eds). — Vol. I (p. 1–1424), Vol. II (p. 1425–2828). — Springer-Verlag, New York, Inc. 1997. — P. 1099–1110.
- [86] **Wang C. C.** On representations for isotropic functions, Part I and Part II / C. C. Wang. // *Arch. Rat. Mech. An.* — Vol. 33. — 1969. — P. 249–287.
- [87] **Wang C. C.** A new representation theorem for isotropic functions, Part I and Part II / C. C. Wang. // *Arch. Rat. Mech. An.* — Vol. 36. — 1970. — P. 166–223.
- [88] **Wang C. C.** Corrigendum / C. C. Wang. // *Arch. Rat. Mech. An.* — Vol. 43. — 1971. — P. 392–395.
- [89] **Smits G. F.** On a fundamental error in two papers of C. C. Wang / G. F. Smits. // *Arch. Rat. Mech. An.* — Vol. 36 — 1970. — P. 161–165.
- [90] *Collected papers of R. S. Rivlin* / G. I. Barenblat, D. D. Joseph (eds). — Vol. I (p. 1–1424), Vol. II (p. 1425–2828). — Springer-Verlag, New York, Inc. 1997.
- [91] **Rivlin R. S.** Red herring and sundry unidentified fish in nonlinear continuum mechanics / R. S. Rivlin. // In collection: *Collected papers of R. S. Rivlin.* — G. I. Barenblat, and D. D. Joseph (eds). — Vol. I (p. 1–1424), Vol. II (p. 1425–2828). — Springer-Verlag, New York, Inc. 1997. — P. 2765–2782.
- [92] **Альтенбах Х.** Общая теория упругих простых оболочек / Х. Альтенбах, П. А. Жилин. // *Успехи механики (Advances in mechanics).* — Warszawa, Polska. — 1988. — N 4. — С. 107–148.
- [93] **Эйзенхарт Л. П.** Непрерывные группы преобразований / Л. П. Эйзенхарт; ИЛ. — М., 1947.
- [94] **Altenbach H.** A micro-polar theory for binary media with application to flow of fiber suspensions / H. Altenbach, K. Naumenko, P. A. Zhilin. // *Proceedings of XXX Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”.* — St. Petersburg, Russia, 2003. — P. 39–62.
- [95] **Altenbach H.** A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions / H. Altenbach, K. Naumenko, P. A. Zhilin. // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* — Vol. 15. — 2003. — N 6. — P. 539–570.
- [96] **Glaser S.** Berechnungsverfahren für GFK-Bauteile / S. Glaser, K. V. Diest. // *Kunststoffe.* — Vol. 88. — 1988. — N 4. — P. 537–542.

-
- [97] **Michaeli W.** *Plastics processing* / W. Michaeli. — Munich et al.: Hanser Publishers, 1995.
- [98] **Schmachtenberg E.** *Untersuchung des Langzeitfestigkeitsverhaltens von Pumpenbauteilen aus Kunststoff. Abschlußbericht* / E. Schmachtenberg, N. M. Yazici, O. Schröder. // AIF Forschungsvorhaben, Auftraggeber: WILO GmbH Dortmund, Universität Essen, Institut für Kunststofftechnik und Kunststoffmaschinen. 2000.
- [99] **Whiteside B. R.** *Glass fibre orientation within injection moulded automotive pedal. Simulation and experimental studies* / B. R. Whiteside, P. D. Coates, P. J. Hine, R. A. Duckett. // *Plastics, Rubber and Composites*. — Vol. 29. — 2000. — N 1. — P. 38–45.
- [100] **Bay R. S.** *Fiber orientation in simple injection moldings. Part 2: experimental results* / R. S. Bay, C. L. Tucker. // *Polym. Comp.* — Vol. 13. — 1992. — P. 332–341.
- [101] **Saito M.** *Practical use of statistically modified laminate model for injection moldings* / M. Saito, S. Kukula, Y. Kataoka, T. Miyata. // *Material Science and Engineering*. — Vol. A285. — 2000. — P. 280–287.
- [102] **Hegler R. P.** *Faserorientierung beim verarbeiten kurzfaserverstärkter thermoplaste* / R. P. Hegler // *Kunststoffe*. — Vol. 74. — 1984. — P. 271–277.
- [103] **Menning G.** *Werkzeuge für die kunststoffverarbeitung* / G. Menning. — München et al.: Carl Hanser Verlag, 1995.
- [104] **Vincent M.** *Experimental study and calculations of short glass fiber orientation in a center gated molded disc* / M. Vincent, J. F. Agassant // *Polym. Comp.* — Vol. 7. — 1986. — P. 76–83.
- [105] **Altan M. C.** *Closed-form solution for the orientation field in a center-gated disk* / M. C. Altan, B. N. Rao. // *J. Rheol.* — Vol. 39. — 1995. N 3. — P. 581–599.
- [106] **Bay R. S.** *Fiber orientation in simple injection moldings. Part 1: theory and numerical methods* / R. S. Bay, C. L. Tucker // *Polym. Comp.* — Vol. 13. — 1992. — P. 317–331.
- [107] **Ranganathan S.** *A Simultaneous solution for flow and fiber orientation in axisymmetric diverging radial flow* / S. Ranganathan, S. G. Advani // *J. of Non-Newtonian Fluid. Mech.* — Vol. 47. — 1993. — P. 107–136.
- [108] **Dupret F.** *Modelling and simulation of injection molding* / F. Dupret, A. Couniot, O. Mal, L. Vanderschuren, O. Verhoyen. // In collection: *Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids*. — D. A. Siginer, D. De Kee, R. P. Chhabra (eds.) — Amsterdam et al.: Elsevier, 1999. — P. 939–1010.
- [109] **Dupret F.** *Modelling of the flow of fiber suspensions in narrow gaps* / F. Dupret, V. Verleye. // In collection: *Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids*. — D. A. Siginer, D. De Kee, R. P. Chhabra (eds.) — Amsterdam et al.: Elsevier, 1999. — P. 1347–1398.

-
- [110] **Tucker C. L.** Processing of short-fiber systems / C. L. Tucker, S. G. Advani. // In collection: Flow and Rheology in Polymer Composites Manufacturing. — S. G. Advani (ed.) — Amsterdam et al.: Elsevier, 1994. — P. 147–202.
- [111] **Jeffery G. B.** The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid / G. B. Jeffery. // Proc. R. Soc. London. — Vol. A 102. — 1922. — P. 161–179.
- [112] **Altenbach J.** Einführung in die kontinuumsmechanik. Teubner studienbücher mechanik / J. Altenbach, H. Altenbach. — Stuttgart: Teubner, 1994.
- [113] **Giesekus H.** Phänomenologische rheologie / H. Giesekus. — Berlin et al.: Springer, 1994.
- [114] **Advani S. G.** The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fibers composites / S. G. Advani, C. L. Tucker. // J. Rheol. — Vol. 31. — 1987. — N 48. — P. 751–784.
- [115] **Altan M. C.** Numerical prediction of three-dimensional fiber orientation in hele-shaw flows / M. C. Altan, S. Subbiah, S. I. Güçeri, R. B. Pipes. // Polym. Eng. Sci. — Vol. 30. — 1990. N 14. — P. 848–859.
- [116] **Huilgol R. R.** Fluid mechanics of viscoelasticity / R. R. Huilgol, N. Phan-Thien. — Amsterdam et al.: Elsevier, 1997.
- [117] **Batchelor G. K.** The stress system in a suspension of force free particles / G. K. Batchelor. // J. Fluid Mech. — Vol. 41. — 1970. — P. 545–570.
- [118] **Petrie C. J. S.** The rheology of fibre suspensions / C. J. S. Petrie. // J. Non-Newtonian Fluid Mech. — Vol. 87. — 1999. — P. 369–402.
- [119] **Dinh S. M.** A rheological equation of state for semiconcentrated fiber suspensions / S. M. Dinh, R. C. Armstrong. // J. Rheol. — Vol. 28. — 1984. N 3. — P. 207–227.
- [120] **Brenner H.** Transport mechanics of orientable particles III. Arbitrary particles / H. Brenner, D. W. Condiff. // Rheol. Acta. Vol. 41. — 1971. — P. 228–274.
- [121] **Doi M.** The theory of polymer dynamics / M. Doi, S. F. Edwards. — Oxford et al.: Oxford University Press. — 1988.
- [122] **Advani S. G.** Closure approximations for three-dimensional structure tensors / S. G. Advani, C. L. Tucker. // J. Rheol. — Vol. 34. — 1990. N 3. — P. 367–386.
- [123] **Cintra J. S.** Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation / J. S. Cintra, C. L. Tucker. // J. Rheol. — Vol. 39. — 1995. — N 6. — P. 1095–1122.
- [124] **Munganga J. M. W.** Aspects of the thermodynamic stability of fibre suspension flows / J. M. W. Munganga, B. D. Reddy, K. J. Diatezua. // J. of Non-Newtonian Fluid. Mech. — Vol. 92. — 2000. — P. 135–150.
- [125] **Chung S. T.** Numerical simulation of fiber orientation in injection molding of short-fiber reinforced thermoplastics / S. T. Chung, T. H. Kwon. // Polym. Eng. Sci. — Vol. 35. — 1995. N 7. — P. 604–618.

-
- [126] **Ericksen J. L.** Transversely isotropic fluids / J. L. Ericksen. // *Kolloid-Zeitschrift*. — Vol. 173. — 1960. — P. 117–122.
- [127] **Ericksen J. L.** Anisotropic fluids / J. L. Ericksen. // *Arch. Rational Mech. Anal.* — Vol. 3. — 1960. — P. 231–237.
- [128] **Eringen A. C.** Continuum theory of dense rigid suspensions / A. C. Eringen. // *Rheologica Acta*. — Vol. 30. — 1991. — P. 23–32.
- [129] **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. II: Fluent Media / A. C. Eringen. — New York et al.: Springer, 2001.
- [130] **Kennedy P.** Flow analysis of injection molds / P. Kennedy — Munich et al.: Hanser Publishers, 1995.
- [131] **Faria S. H.** Mixtures with continuous diversity: general theory and application to polymer solutions / S. H. Faria. // *Continuum Mech. Thermodyn.* — Vol. 13. — 2001. — P. 91–120.
- [132] **Probstein R. F.** Physicochemical hydrodynamics / R. F. Probstein. — New York et al.: John Wiley and Sons, 1994.
- [133] **Halmos P. R.** Measure theory / P. R. Halmos. — New York et al.: Springer, 1974.
- [134] **Zhilin P. A.** The main direction of the development of mechanics for XXI century / P. A. Zhilin. // Lecture prepared for presentation at XXVIII Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics”, St. Petersburg, Russia, 2000.
- [135] **Планк М.** Введение в теоретическую физику. Т. 3. Электричество и магнетизм / М. Планк; ОНТИ ГТТИ. — М.; Л., 1934. — 183 с.
- [136] **Девис П.** Суперсила / П. Девис. — М.: Мир, 1989. — 272 с.
- [137] **Лоренц Г.** Теории и модели эфира / Г. Лоренц; ОНТИ. — М.; Л., 1936. — 68 с.
- [138] **Жилин П. А.** Реальность и Механика / П. А. Жилин. // Труды XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических систем”. — СПб., 1996. — С. 6–49.
- [139] **Даламбер Ж.** Динамика / Ж. Даламбер; ГИТТЛ. — М.; Л., 1950. — 343 с.
- [140] **Эйлер Л.** Открытие нового принципа механики / Л. Эйлер. // *Opera omnia*, II–5, 1752 (на латинском языке).
- [141] **Михайлов Г. К.** Леонард Эйлер и его вклад в развитие механики / Г. К. Михайлов. // *Advances in Mechanics*. — Vol. 8. — 1985. — N 1. — P. 3–58.
- [142] **Лагранж Ж.** Аналитическая механика. Т. I. / Ж. Лагранж; ОНТИ. — М.; Л., 1938. — 348 с.
- [143] **Планк М.** Избранные труды / М. Планк. — М.: Наука, 1975. — 788 с.

- [144] **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В. И. Ерофеев. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 328 с.
- [145] **Жилин П. А.** Механика оснащенных деформируемых поверхностей / П. А. Жилин. // Труды IX Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Ленинград, 1973. — Л.: Судостроение, 1975. — С. 48–54.
- [146] **Жилин П. А.** Тензор поворота в описании кинематики твердого тела / П. А. Жилин. // Труды СПбГТУ N 443. — СПб., 1992. — С. 100–121.
- [147] **Жилин П. А.** Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании / П. А. Жилин. // Труды XXIV летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — СПб., 1997. — С. 90–122.
- [148] **Zhilin P. A.** Rigid body oscillator: a general model and some results / P. A. Zhilin. // Acta Mechanica. — Vol. 142. — 2000. — P. 169–193.
- [149] **Zaremba S. R.** réflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle / S. R. Zaremba. // Enseignement Math. — Vol. 38. — 1940. — P. 59–69.
- [150] **Дирак П.** Принципы квантовой механики / П. Дирак. — М.: Наука, 1979. — 480 с.
- [151] **Най Дж.** Физические свойства кристаллов / Дж. Най. — М.: Мир, 1967. — 385 с.
- [152] **Джеммер М.** Эволюция понятий квантовой механики / М. Джеммер. — М.: Наука, 1985. — 379 с.
- [153] **Мандельштам Л. И.** Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Мандельштам. — М.: Наука, 1972. — 437 с.
- [154] **Эйнштейн А.** Автобиографические заметки / А. Эйнштейн. // Собрание научных трудов. Т. IV. — М.: Наука, 1967. — 599 с.
- [155] **Эйнштейн А.** Неевклидова геометрия и физика / А. Эйнштейн. // Сборник “Эйнштейн и развитие физико-математической мысли.” — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 239 с.
- [156] **Эйнштейн А.** Эволюция физики / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. // Собрание научных трудов А. Эйнштейна. Т. IV. — С. 357–543.
- [157] **Беллони Л.** Заметка В. Паули о сверхтонкой структуре, опубликованная в 1924 // Сборник “Физика за рубежом”. — М.: Мир, 1984. — 207 с.
- [158] **Фейнман Р.** Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. Пространство. Время. Движение / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М.: Мир, 1965. — 168 с.
- [159] **Парселл Э.** Берклевский курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм / Э. Парселл. — М.: Наука, 1983. — 415 с.
- [160] **Фейнман Р.** Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М.: Мир, 1966. — 343 с.

-
- [161] **Тимирязев А. К.** Введение в теоретическую физику / А. К. Тимирязев; ГТТИ. — М.; Л., 1933. — 440 с.
- [162] **Новацкий В.** Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 832 с.
- [163] **Максвелл Дж.** Трактат об электричестве и магнетизме / Дж. Максвелл. — М.: Наука, 1989.
- [164] **Козырев Н. А.** Избранные труды / Н. А. Козырев. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. — 445 с.
- [165] **Лаврентьев М. М.** О дистанционном воздействии звезд на резистор / М. М. Лаврентьев [и др.] // ДАН СССР. — Т. 314. — 1990. — N 2. — С. 352–355.
- [166] **Лаврентьев М. М.** О сканировании звездного неба датчиком Козырева / М. М. Лаврентьев [и др.] // ДАН СССР. Т. 323. — 1992. — N 4. — С. 649–652.
- [167] **Абрамян А. К.** Особенность колебаний динамических систем, имеющих несущую конструкцию бесконечной протяженности / А. К. Абрамян, Д. А. Индейцев. // Моделирование в механике; РАН Сиб. Отделение, 982. — Т. 6.
- [168] **Берс Л.** Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. — М.: Мир, 1966. — 351 с.
- [169] **Фарадей М.** Исследования по электричеству / М. Фарадей. // М.: Изд-во АН СССР. Т. I, 1947. — 848 с. Т. II, 1951. — 538 с. Т. III, 1959. — 831 с.
- [170] **Архимед.** Исчисление песчинок (Псаммит) / Архимед; ГТТИ. — М.; Л., 1932.— 104 с.
- [171] **Зубов Л. М.** Тензорное исчисление / Л. М. Зубов, М. И. Карякин. — М.: Вузовская книга, 2006. — 120 с.
- [172] **Лурье А. И.** Теория упругости / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
- [173] **Пальмов В. А.** Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа / В. А. Пальмов. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 109 с.
- [174] **Жилин П. А.** Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней / П. А. Жилин. // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 458. — СПб.: 1995. — С. 56–73.
- [175] **Кривцов А. М.** Деформирование и разрушение твердых микроструктурой / А. М. Кривцов. — М.: Физматлит, 2007. — 304 с.
- [176] **Xiao H.** Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers. // Acta Mech. — Vol. 124. — 1997. — P. 89–105.
- [177] **Голованов А. И.** Кинематика конечных деформаций трехмерных изопараметрических конечных элементов оболочек / А. И. Голованов. // Проблемы прочности и пластичности, вып. 70, 2008. — С. 109–122.

- [178] **Пальмов В. А.** Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел: учеб. пособие / В. А. Пальмов. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. 143 с.
- [179] **Xiao H.** Existence and uniqueness of the integrable-exactly hypoelastic equation $\boldsymbol{\tau}^{\circ*} = \lambda(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ and its significance to finite inelasticity / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers. // *Acta Mechanica*. — Vol. 138. — 1999. — P. 31–50.
- [180] **Xiao H.** Elastoplasticity beyond small deformations / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers. // *Acta Mechanica*. — Vol. 182. — 2006. — P. 31–111.
- [181] **Kolpakov Ja. E.** Generalized continuum and linear theory of piezoelectric materials / Ja. E. Kolpakov, P. A. Zhilin. // *Proceedings of XXIX Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. — St. Petersburg, Russia, 2002. — P. 364–375.
- [182] **Zhilin P. A.** A micro-polar theory for piezoelectric materials / Ja. E. Kolpakov, P. A. Zhilin. // *Lecture at XXXIII Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. — St. Petersburg, Russia, 2005.
- [183] **Gerber E.** Precision frequency control. Vol. 1, 2 / E. Gerber, A. Balato. — Academic Press Inc. 1985.
- [184] **Cady W.** An introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals / W. Cady. — New York, London, 1946.
- [185] **Смагин А. Г.** Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы / А. Г. Смагин, М. И. Ярославский. — М.: Энергия, 1970. — 488 с.
- [186] **Yamaguchi M.** Ultrasonic Properties of PZT Thin Films in UHF-SHF Ranges / M. Yamaguchi, [et al.] // *Proceedings of the IEEE International Frequency Control Symposium*. — 1997. — P. 544–551.
- [187] **Грекова Е. Ф.** Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики / Е. Ф. Грекова, П. А. Жилин // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. вып. по проблемам нелинейной упругости*. — 2000. — С. 25–41.
- [188] **Ericksen J. L.** Exact theory of stress and strain in rods and shells / J. L. Ericksen, C. A. Truesdell. // *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 1958. — N 1. — P. 259–323.
- [189] **Пальмов В. А.** Основные уравнения теории несимметричной упругости / В. А. Пальмов; ПММ. — М., 1964. Т. 28. — С. 401–408.
- [190] **Аэро Э. Л.** Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский; ФТТ. — М., 1965. Т. 2. N 7.
- [191] **Кувшинский Е. В.** Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения / Е. В. Кувшинский, Э. Л. Аэро; ФТТ. — М., 1963. Т. 5, N 9. — С. 2591.
- [192] **Grioli G.** Elasticita asimetrica / G. Grioli. // *Ann. di Math. pura ed appl.* — Vol. 4. — 1960. — N 50.

-
- [193] **Sandru N.** On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity / N. Sandru. // Int. J. Eng. Sci. — Vol. 4. — 1966. — N 1.
- [194] **Cohen H.** Theory of directed surfaces / H. Cohen, C. N. De Silva. // Journal Math. Phys. — 1966. — N 7. — P. 960–966.
- [195] **Gunther W.** Analoge systeme von Schalengleichungen / W. Gunther. // Ing.-Arch. — Vol. 30. — 1961. — P. 160–186.
- [196] **Mindlin R. D.** Effects of couple-stresses in linear elasticity / R. D. Mindlin, H. F. Tiersten. // Arch. Rat. Mech. Anal. — Vol. 11. — 1962. N 5.
- [197] **Toupin R. A.** Elastic materials with couple stresses / R. A. Toupin. // Arch. Rat. Mech. Anal. — Vol. 11. — 1962. — N 5.
- [198] **Eringen A. C.** Nonlinear theory of micro-elastic solids / A. C. Eringen, E. S. Şuhubi. // Int. J. Eng. Sci. — Vol. 2. — 1964.
- [199] **Green A. E.** Directors and multipolar displacements in continuum mechanics / A. E. Green, P. M. Naghdi, R. S. Rivlin. // Int. J. Eng. Sci. — 1965. N 2. — P. 611–620.
- [200] **Green A. E.** A general theory of Cosserat surfaces / A. E. Green, P. M. Naghdi, W. L. Wainwright. // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1965. — N 20. — P. 287–308.
- [201] **Green A. E.** The linear theory of an elastic Cosserat plate / A. E. Green, P. M. Naghdi. // Proc. Cambridge Phil. Soc. — Vol. 63. — 1967. — P. 537–550.
- [202] **Green A. E.** The linear elastic Cosserat surface and shell theory / A. E. Green, P. M. Naghdi. // Int. J. Solid Structures. — 1968. — N 4. — P. 585–592.
- [203] **Eringen A. C.** Theory of micropolar plates / A. C. Eringen. // Z. Angew. Math. Phys. — Vol. 18. — 1967. — P. 12–30.
- [204] **Green A. E.** On superposed small deformations of an elastic Cosserat surface / A. E. Green, P. M. Naghdi. // Journal of Elasticity. — 1971. — N 1. — P. 1–17.
- [205] **Ericksen J. L.** The simplest problems for an elastic Cosserat surface / J. L. Ericksen // Journal of Elasticity. — 1973. — N 2. — P. 101–107.
- [206] **Simmonds J. G.** Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors / J. G. Simmonds, D. A. Danielson. // Journal of Applied Mechanics. — 1972. — N 39. — P. 1085–1090.
- [207] **Филатов С. К.** Новый смешанный тип ротационно-кристаллического состояния вещества на примере парафинов / С. К. Филатов, Е. Н. Котельникова, И. В. Филиппова. // Кристаллография. — М., 1997. — Т. 42, N 4. — С. 665–669.
- [208] **Котельникова Е. Н.** Кристаллохимия ротационных веществ (на примере парафинов) / Е. Н. Котельникова, С. К. Филатов, И. В. Филиппова. // Записки ВМО. — М., 1997. — N 4. — С. 7–29.
- [209] **Ландау Л. Д.** К теории дисперсии магнитной проницаемости в ферромагнитных телах / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. // Физ. журнал. — М., 1935. — Т.8. — С. 153.

- [210] **Brown W. F.** Magnetoelastic interactions / W. F. Brown. — Springer-Verlag: New York, 1966.
- [211] **Maugin G. A.** Deformable magnetically saturated media. I Field equations / G. A. Maugin, A. C. Eringen. // J. Math. Phys. — 1972. — N 13. — P. 143–155.
- [212] **Maugin G. A.** Deformable magnetically saturated media. II Constitutive theory / G. A. Maugin, A. C. Eringen. // J. Math. Phys. — 1972. — N 13. — P. 1334–1347.
- [213] **Tiersten H. F.** Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators / H. F. Tiersten. // J. Math. Phys. — 1964. — N 5. — P. 1298–1318.
- [214] **Maugin G. A.** Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids / G. A. Maugin. — Elsevier Science Publishers: Oxford, 1988.
- [215] **Fomèthe A.** Material forces in thermoelastic ferromagnets / A. Fomèthe, G. A. Maugin. // Continuum Mech. Thermodyn. — 1996. — N 8. — P. 275–292.
- [216] **Eringen A. C.** Electrodynamics of Continua / A. C. Eringen, G. A. Maugin. — Springer-Verlag: New York, 1990.
- [217] **Гаврилов С. Н.** Математическая модель среды Кельвина / С. Н. Гаврилов // Труды XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”; труды XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. ИПМаш РАН. — СПб., 1996. — С. 229–240.
- [218] **Grekova E.** Ferromagnets and Kelvin’s medium: basic equations and magnetoacoustic resonance / E. F. Grekova, P. A. Zhilin. // Proceedings of XXV-XXVI Summer Schools “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”. Vol. 1. IPME RAS. — St. Petersburg, 1998. — P. 259–281.
- [219] **Grekova E. F.** Ferromagnets and Kelvin’s medium: basic equations and wave processes / E. F. Grekova // Journal of Computational Acoustics. — 9(2) — 2001. — P. 427–446.
- [220] **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1992. — 664 с.
- [221] **Дзялошинский И. Е.** Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. I. Неметаллы / И. Е. Дзялошинский. // ЖЭТФ. — М., 1964. — Т. 46, N 4. — С. 1420–1437.
- [222] **Богданов А. М.** К теории магнитных вихрей в легкоосных ферромагнетиках / А. М. Богданов, М. В. Кудинов, Д. А. Яблонский. // ФТТ. — М., 1996. — Т. 31, N 10. — С. 99–104.
- [223] **Григолюк Э. И.** Неклассические теории стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. — М.: Машиностроение, 1973. — 272 с.
- [224] **Дубнов Я. С.** Основы векторного исчисления. Т. 2. / Я. С. Дубнов; ГИТТЛ. — М., 1952. — 415 с.

- [225] **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. / Л. И. Седов. — М.: Наука, 1973. — 536 с.
- [226] **Serwin H.** Quadratic invariants of surface deformation and the strain energy of thin elastic shells / H. Serwin. // J. Math. Phys. — Vol. 4. — 1963. — P. 835–851.
- [227] **Niordson F. I.** A note on the strain energy of elastic shells / F. I. Niordson. // Int. J. Solids Structures. — Vol. 7. — 1971. — P. 1573–1579.
- [228] **Reissner E.** On the foundations of the theory of elastic shells / E. Reissner. // Proc. of the Sym. in the Theory of thin Elastic Shells (Copenhagen, 1967). — Berlin-Heldelberg-New-York, 1969. — P. 15–30.

Приложения

Приложение А

Некоторые этапы развития механики как науки¹

А.1. Предварительные замечания

Это приложение служит дополнением к первой главе книги, главным образом в отношении библиографических данных, касающихся работ ученых, внесших значительный вклад в Механику, особенно в Рациональную Механику. Кроме того, здесь излагается определенный взгляд на развитие науки, в частности механики.

А.2. Первые шаги — древность

До настоящего времени ведутся бурные дискуссии о том, какая наука самая древняя. Если не обсуждать философские или гуманитарные науки, а сосредоточиться только на математике и естественных науках, то можно сказать, что основным толчком развития науки было стремление людей измерить и предсказать явления природы. Очевидно, что развитие естественнонаучных направлений связано с созданием механических моделей тех или иных физических явлений, а при наличии соответствующих математических методов и исследованием этих моделей путем численного моделирования.

¹ Приложение написано Х. Альтенбахом на основе лекций, прочитанных в разных университетах, и статьи: Altenbach, H. Zu einigen Aspekten der klassischen Kontinuumsmechanik und ihrer Erweiterungen / H. Altenbach // Technischer Mechanik. — 1990. — В. 10, Н. 2. — S. 95–105. (*Примеч. ред.*)

При рассмотрении древнегреческих достижений в науке становится понятным, что одним из первых механиков был Архимед². Он занимался многими научными проблемами, но главным образом из области математики и механики. Архимед заложил основы механики, причем основное внимание он сосредоточил на задачах статики твердых тел и жидкостей. Архимед придумал различные механические конструкции, основанные на принципе рычага. Рычаг был известен и до него, но только Архимед изложил соответствующую полную теорию. В итоге можно сделать два вывода: В основе физики стояла механика, и, вообще говоря, с помощью Рациональной Механики можно построить основные физические теории, которые были разработаны до конца XIX в. Первые механические теории принимали во внимание не только силовые воздействия, но также и моментные.

К сожалению, из-за того что в начале был рассмотрен рычаг, и в настоящее время некоторые думают, что моменты связаны с введением силы и плеча. Это приводит к ошибкам в идейном плане. Кроме того, отсюда следуют существенные ограничения, которые не позволяют построить общую механическую теорию для деформируемых тел.

А.3. От периода Ренессанса до века промышленной революции

Во время периода Ренессанса были сделаны первые попытки ускорить темп развития механики в связи с практическими задачами. Большой вклад внес Леонардо да Винчи³, который занимался различными техническими конструкциями. Знаменит его летательный аппарат. В это же время стало ясно, что развитие механики связано с прогрессом математических наук (хотя, помимо этого, нужны еще хорошие эксперименты). К сожалению, в начале периода Ренессанса не было ни дифференциального, ни интегрального, ни тензорного исчисления.

Следующий этап развития связан с небесной механикой, давшей ответы на вопросы, как следует понимать движение планет. Одновременно обсуждались мировоззренческие вопросы, например, были конфликты с церковью по поводу геоцентрической системы мира. Большой вклад в развитие небес-

² Архимед (Αρχιμήδης), 287–212 г. до н. э., Сиракузы. Математик, механик, инженер.

³ Леонардо ди сер Пьеро да Винчи (Leonardo da Vinci), 15 апреля 1452 г., село Анкиано, около городка Винчи, близ Флоренции — 2 мая 1519 г., замок Кло-Люсэ, близ Амбуаза, Турень, Франция; великий итальянский художник (живописец, скульптор, архитектор) и ученый (анатом, математик, физик, естествоиспытатель).

ной механики внес Галилей⁴, который наблюдал за движением небесных тел с помощью созданного им телескопа. В то время представление о недеформируемом твердом теле являлось основной моделью.

Мариотт⁵ изучал в основном вопросы механики жидкостей, давления внутри труб и равновесия жидких тел. Он опубликовал в 1679 г. соотношение между давлением газа и его объемом, которое было найдено ранее Бойлем⁶ и сейчас называется законом Бойля–Мариотта. В механике сплошных сред это соотношение используют в качестве определяющего уравнения.

Следующий этап развития механики связан с именами Гука⁷ и Ньютона⁸. Роберт Гук написал множество работ в разных областях естественных наук. Наибольшую славу ему принесли работы по механике, в которых он ввел закон пропорциональности между нагружением и удлинением. Закон был опубликован в 1676 г. в виде анаграммы: *ceiioinosssttuv*. Причиной такой формы публикации послужило то обстоятельство, что Гук боялся, что его закон кто-то опубликует под своей фамилией. Через некоторое время анаграмма была расшифрована: *ut tensio sic vis* (как удлинение, так и сила). Исааку Ньютону принадлежат работы по математике, физике и астрономии. Его считают одним из создателей интегрального исчисления. Он долго судился с Лейбницем⁹ за право назвать себя первым (Ньютон спор выиграл, но запись интегрального исчисления до сих пор используется в виде, предложенном Лейбницем). Как президент королевского общества (Британская академия наук), он в значительной степени повлиял на развитие науки. Вместе с тем, он и сам был активным ученым. В своей главной публикации “*Математические начала натуральной философии*” (“*Philosophiae Naturalis Principia*

⁴ Галилео Галилей (Galileo Galilei), 15 февраля 1564 г., Пиза, герцогство Флоренция — 8 января 1642 г., Арчетри, Великое герцогство Тосканское; итальянский физик, механик, астроном, философ и математик, заложил фундамент классической механики.

⁵ Эдм Мариотт (Edme Mariotte), 1620 г., Дижон, Бургундия — 12 мая 1684 г., Париж; французский физик и аббат, один из основателей (1666) и первых членов французской Академии наук (l'Académie des Sciences).

⁶ Роберт Бойль (англ. Robert Boyle, ирл. Robaird Ó Bhaoill), 25 января 1627 г., Лизмор, Графство Вотерфорд, Ирландия — 30 декабря 1691 г., Лондон; физик, химик и богослов, один из основателей (1660) и первых членов Королевского общества (Royal Society).

⁷ Роберт Гук (Robert Hooke), 18 июля 1635 г., Фрешуотер, остров Уайт, Англия — 3 марта 1703 г., Лондон; ученик Бойля, физик, химик, биолог, член Королевского общества.

⁸ Исаак Ньютон (Isaac Newton), 25 декабря 1642 г., Вулсторп, Линкольншир, Англия — 2 марта 1726 г., Кенсингтон, Мидлсекс, Англия; физик, математик, астроном, член и президент Королевского общества.

⁹ Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz), 1 июля 1646 г., Лейпциг — 14 ноября 1716 г., Ганновер; математик.

Mathematica”) он изложил закон всемирного тяготения и аксиомы механики, четко показал тесную связь между математикой и механикой. Во многих учебниках до сих пор написано, что Ньютон заложил основы классической механики, а физики считают, что студентам инженерных специальностей излагают теоретическую механику и сопротивление материалов в духе ньютоновской механики. Эта точка зрения не соответствует нынешнему уровню. Механика в духе Ньютона дает правильные результаты для материальных точек. Кинематика материальных точек чисто трансляционная, вращения для них не ощутимы. Переход к телам в рамках механики Ньютона осуществляется таким образом: сначала рассматривается одна точка, потом несколько точек, а потом много точек. Предельный переход, когда число точек стремится к бесконечности, должен дать результаты, которые можно применять к механике твердых тел. Но, как известно, индивидуальная точка имеет три степени свободы (в трехмерном пространстве), а твердое тело шесть. Дискуссия о независимости трансляционных и ротационных движений, сил и моментов, баланса количества движения и баланса кинетического момента и в настоящее время ведется с большой интенсивностью, хотя правильный ответ на эти вопросы можно найти, например, в статье Трусделла¹⁰.

Существенный вклад в науку внесли Якоб Бернулли¹¹ и Леонард Эйлер¹². Они были выдающимися математиками, но вместе с тем искали применения математическим теориям. При этом, анализируя механические задачи, они разрабатывали математические методы их решения. Двухтомное сочинение Эйлера “*Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении*” является примером, подтверждающим указанное. Таким образом, теоретическая механика становится прикладной частью математики.

Обсуждая вклад в науку Бернулли и Эйлера, нельзя не остановиться на их трактовке момента. При изложении теории балок Бернулли обнаружил, что правильное задание краевых условий возможно только с помощью введения момента. Эйлер сделал еще один шаг — в отличие от Ньютона, он предложил два уравнения движения, которые независимы друг от друга. Таким образом, стало ясно, что при изучении движения тел следует различать трансляционные и ротационные движения. Кроме того, если силы являются

¹⁰ Truesdell, C. Die Entwicklung des Drallsatzes / C. Truesdell // Z. Angew. Math. Mech. — 1964. — В. 44, Н. 4/5. — S. 149–158.

¹¹ Якоб Бернулли (Jakob Bernoulli), 27 декабря 1654 г., Базель — 16 августа 1705 г., Базель; швейцарский математик, иностранный член Парижской Академии наук.

¹² Леонард Эйлер (Leonhard Euler), 4 апреля 1707 г., Базель — 7 сентября 1783 г., Санкт-Петербург; математик, механик, астроном, член Петербургской Академии наук, Берлинской Академии наук.

причинами трансляционного движения, то возникает вопрос о причинах ротационных движений. Момент был известен с времен Архимеда, но многие воспринимали его как силу, умноженную на плечо. Со времен Бернулли и Эйлера стало ясно, что момент может быть введен как независимая от сил величина.

Развитие механики в XVIII в. связано с именем французского ученого Лагранжа¹³, который обладал уникальным талантом в области обобщения и синтеза накопленного научного материала. Он представил имеющиеся в то время механические познания в своей книге “*Аналитическая механика*” (“*Mécanique analytique*”). При этом он не только собрал материал из других публикаций, но и внес свой вклад. Например, при изложении “*Аналитической механики*” он установил принцип возможных перемещений. Помимо этого, он создал вариационное исчисление, которое имеет большое значение при решении механических задач. Надо отметить, что Лагранж был сторонником математизации механики — его “*Аналитическая механика*” не содержит рисунков.

А.4. Механика в XX веке

После фундаментальной монографии Лагранжа механика развивалась в двух направлениях. Первое направление — это теоретическая механика, которая тесно связана с познанием в математике. Здесь особенных успехов достигла французская школа математиков, к которой принадлежат такие ученые, как Пуассон¹⁴, Навье¹⁵ и Коши¹⁶. Второе направление связано с прикладными задачами из промышленной практики, решение которых привело к развитию инженерной (или, как ее называют в Германии, технической) механики. Важными подразделами инженерной (технической) механики являются теория пластичности и теория ползучести. Заметный вклад в инженерную механику

¹³ Жозеф Луи Лагранж (фр. Joseph Louis Lagrange, итал. Giuseppe Lodovico Lagrangia), 25 января 1736 г., Турин — 10 апреля 1813 г., Париж; механик, математик, президент Берлинской Академии наук, член Парижской Академии наук.

¹⁴ Симеон Дени Пуассон (Siméon Denis Poisson), 21 июня 1781 г., Питивье, Франция — 25 апреля 1840 г., Со, Франция; математик.

¹⁵ Анри Навье (Henry Navier), 10 февраля 1785 г., Дижон, Франция — 21 августа 1836 г., Париж, Франция; математик, работы по гидромеханике.

¹⁶ Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy), 21 августа 1789 г., Париж, Франция — 23 мая 1857 г., Со, Франция; математик.

внес Кирхгоф¹⁷, разработавший теорию пластин, которую сегодня принято называть классической.

В конце XIX в. появились работы, которые возвращались к концепции Эйлера. Эта концепция опирается на независимость трансляционного и ротационного движений, а также уравнения баланса количества движения и баланса кинетического момента.

Первые работы, посвященные новым моделям механики сплошной среды, связаны с именами лорда Кельвина¹⁸ и Дюамеля¹⁹. Однако наибольший интерес в настоящее время представляют работы братьев Коссера²⁰, основателей нового направления.

Первое сообщение братья Коссера опубликовали в 1896 г., а в 1909 г. вышла их знаменитая монография²¹, в которой с единых позиций излагались различные физические теории. В этой же монографии братья Коссера последовательно проводят точку зрения, что, помимо трансляционных движений, в деформируемых телах следует рассматривать и ротационные движения, причем как независимые от трансляционных.

Толчком к развитию нового направления явился пленарный доклад немецкого математика Давида Гильберта²² на Втором Всемирном математическом конгрессе в 1900 г. В этом докладе Гильберт сформулировал список 23 нерешенных проблем. Из них многие, в том числе *шестая проблема*, до сих пор не решены.

В центре *шестой проблемы* стоят требования аксиоматической формулировки механики. (Сегодня многие трактуют *шестую проблему* как необхо-

¹⁷ Густаф Роберт Кирхгоф (Robert Gustav Kirchhoff), 12 марта 1824 г., Кенигсберг, Пруссия — 17 октября 1887 г., Берлин, Германия; физик.

¹⁸ Уильям Томсон, лорд Кельвин (William Thomson, 1st Baron Kelvin), 26 июня 1824 г., Белфаст, Северная Ирландия — 17 декабря 1907 г., Ларгс, Шотландия; профессор по теоретической физике университета в Глазго, в основном работы по электричеству и термодинамике.

¹⁹ Жан Мари Констан Дюамель (Jean-Marie Constant Duhamel), 5 февраля 1797 г., Сен-Мало, Франция — 29 апреля 1872 г., Париж, Франция; математик и физик, работы по термодинамике и аналитической механике.

²⁰ Франсуа Коссера (François Cosserat), 26 ноября 1852 г., Дуай, Франция — 22 марта 1914 г., Тулузе, Франция; инженер-строитель; Ойжен Коссера (Eugen Cosserat), 4 марта 1866 г., Амиенс, Франция — 31 мая 1931 г., Тулузе, Франция; математик, профессор по дифференциальному и интегральному исчислению в университете Тулуза, директор обсерватории там же.

²¹ Cosserat, E. & F. *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909.

²² Давид Гильберт (David Hilbert), 23 января 1862 г., Велау вблизи Кенигсберга, Пруссия — 14 февраля 1943, Геттинген, Германия; математик, диссертация по теории инвариантов, 35 лет работал в Геттингенском университете.

димось аксиоматического построения физики.) Решению этой проблемы посвящены многочисленные работы, опубликованные в основном после Второй мировой войны. Среди них необходимо отметить докторскую диссертацию (Habilitation) и учебники Георга Гамеля²³.

В настоящее время аксиоматическая механика также называется “рациональная механика”. Основополагающие работы в этом направлении были опубликованы Трусделлом²⁴ и Ноллом²⁵, а также другими учеными. Интенсивная дискуссия о началах рациональной механики развивалась в России после публикации знаменитой монографии Трусделла²⁶. Следует отметить, что русский перевод этой книги вышел на два года раньше²⁷ и был подготовлен под редакцией А. И. Лурье и П. А. Жилина.

²³ Георг Гамель (Georg Hamel), 12 сентября 1877 г., Дюрен, Германия — 4 октября 1954 г., Ландсхут, Германия; математик, ученик Гильберта, профессор Берлинского технического университета, в 1928/1929 гг. ректор, работы по аксиоматическому построению классической механики.

²⁴ Клиффорд Амброз Трусделл III (Clifford Truesdell), 18 февраля 1919 г., Лос-Анджелес, США — 14 января 2000 г., Балтимор, США; математик.

²⁵ Вальтер Нолл (Walter Noll), 7 января 1925 г., Берлин, Германия; математик, работы по классической механике, а также термодинамике, создал теорию простых материалов (A new theory of simple materials // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1972. — V. 52. — P. 62–92).

²⁶ Truesdell, C. A First Course in Rational Continuum Mechanics / C. Truesdell. — New York, Academic Press, 1977.

²⁷ Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики / К. Трусделл. — М.: Мир, 1975.

Основы прямого тензорного исчисления¹

Тензорное исчисление — эффективный математический аппарат, широко используемый в различных областях науки. Существует два подхода к изложению теории тензоров. При координатном подходе под тензором понимается матрица, компоненты которой преобразуются при переходе от одного координатного базиса к другому по определенным формулам. При прямом подходе тензор рассматривается как элемент линейного пространства, полученного специальным перемножением векторных пространств. Ввод базиса в прямом тензорном исчислении позволяет легко перейти к координатной форме записи, поэтому с чисто математической точки зрения оба подхода эквивалентны. Однако при прямой форме записи есть возможность делать большинство преобразований без перехода к координатной записи, используя тождества, записанные в инвариантной форме, что позволяет сделать выкладки более компактными. Таким образом, прямое тензорное исчисление представляет собой математическое средство, с помощью которого формулируются инвариантные соотношения между изучаемыми объектами. Более подробное изложение можно найти, например, в [25, 26, 50, 171–173].

В.1. Определение тензора

Исходный объект при построении прямого тензорного исчисления — векторное ориентированное пространство $\mathcal{L}$, элементами которого являются векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$, (направленные отрезки). Формальное произведение векторов $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ называется диадой ($\otimes$ — обозначает операцию тензорного умножения). Отметим, что тензорное умножение некоммутативно $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

Рассмотрим формальные суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \dots$$

¹ Приложение написано Е. Н. Вильчевской. (Примеч. ред.)

Элементы $\mathbf{A}$ называются тензорами второго ранга, если выполнены условия эквивалентности

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} &= \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \\ (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

На множестве тензоров второго ранга $\mathcal{T}_2$ вводятся линейные операции

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}, & \mathbf{B} &= \mathbf{d} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{h}, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{h}, \\ \alpha \mathbf{A} &= (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} + (\alpha \mathbf{c}) \otimes \mathbf{d} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b}) + \mathbf{c} \otimes (\alpha \mathbf{d}).\end{aligned}\tag{B.2}$$

Нулевым тензором второго ранга называется тензор

$$\mathbf{0} = \mathbf{o} \mathbf{o},\tag{B.3}$$

где $\mathbf{o}$ — нулевой вектор. Представив нулевой вектор в виде

$$\mathbf{o} = 0 \mathbf{a},$$

получим альтернативные представления нулевого тензора

$$\mathbf{O} = \mathbf{o} \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{o}.$$

Формальные суммы формальных произведений трех векторов (триад)

$${}^3\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \dots,\tag{B.4}$$

подчиненных соответствующим соотношениям эквивалентности, называются тензорами третьего ранга, определенными на множестве $\mathcal{T}_3$. Аналогично вводятся тензоры более высоких рангов.

В.2. Операции с тензорами второго ранга

В.2.1. Умножение тензоров

Для упрощения записи представим тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде

$$\mathbf{A} = \sum_k \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_l \mathbf{d}_l \otimes \mathbf{f}_l.\tag{B.5}$$

Скалярные умножения тензора на вектор

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c}), \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.7})$$

результат умножения — вектор.

Векторные умножения тензора на вектор

$$\mathbf{A} \times \mathbf{c} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{c}), \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.9})$$

результат умножения — тензор второго ранга.

Тензорные умножения тензора на вектор

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{c} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{c}, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.11})$$

результат умножения — тензор третьего ранга.

Скалярное умножение тензора на тензор

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{l}}) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}}, \quad (\text{B.12})$$

результат умножения — тензор второго ранга.

Векторное умножение тензоров

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \times \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{d}_{\mathbf{l}}) \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}}, \quad (\text{B.13})$$

результат умножения — тензор третьего ранга.

Тензорное умножение тензора на тензор

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}}, \quad (\text{B.14})$$

результат умножения — тензор четвертого ранга.

Двойное скалярное умножение тензоров²

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \cdot\cdot \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{l}}) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{l}}), \quad (\text{B.15})$$

результат умножения — скаляр.

Двойное векторное умножение тензоров

$$\mathbf{A} \times \times \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \times \times \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{d}_{\mathbf{l}}) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{f}_{\mathbf{l}}), \quad (\text{B.16})$$

результат умножения — тензор второго ранга.

Скалярно-векторное умножение тензоров

$$\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \cdot \times \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{l}}) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{f}_{\mathbf{l}}), \quad (\text{B.17})$$

результат умножения — вектор.

Векторно-скалярное умножение тензоров

$$\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right) \times \cdot \left(\sum_{\mathbf{l}} \mathbf{d}_{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{f}_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{l}}) (\mathbf{b}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{d}_{\mathbf{l}}), \quad (\text{B.18})$$

результат умножения — вектор.

В.2.2. Симметричный и антисимметричный тензоры

Тензором, **транспонированным** заданному тензору $\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{b}_{\mathbf{k}}$, называется тензор, в котором изменен порядок сомножителей во всех диадах

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{a}_{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.19})$$

Симметричный тензор. Симметричным называется тензор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}. \quad (\text{B.20})$$

Возможно другое определение симметричного тензора. Тензор второго ранга симметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{B.21})$$

² Двойные операции умножения можно определить иначе, считая что первый знак относится к первым векторам диады, а второй — ко вторым. Определения (B.15)–(B.18) совпадают с используемыми в основном тексте книги.

Антисимметричный тензор. Антисимметричным называется тензор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}, \quad (\text{В.22})$$

или, иначе, тензор второго ранга антисимметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{В.23})$$

Любой тензор второго ранга $\mathbf{A}$ допускает единственное представление в виде суммы его симметричной $\mathbf{A}^S$ и антисимметричной $\mathbf{A}^A$ частей, причем

$$\mathbf{A}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (\text{В.24})$$

В.2.3. Тензорный базис. Координаты тензора

Всякий тензор второго ранга может быть представлен в виде следующего разложения в ортогональном и нормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{A} = A_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad (\text{В.25})$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. В формуле (В.25) в соответствии с правилом Эйнштейна проводится суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3.

Линейно независимые комбинации $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ называются элементами тензорного базиса. Величины A_{ik} — координаты тензора относительно введенного тензорного базиса.

В.2.4. Единичный тензор и тензор Леви–Чивита

Тензор второго ранга называется **единичным**, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x}. \quad (\text{В.26})$$

Единичный тензор может быть представлен в виде разложения по произвольной ортонормированной тройке векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (\text{В.27})$$

Тензор Леви–Чивита вводится соотношением

$${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}. \quad (\text{В.28})$$

Запишем тензор Леви–Чивита в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$

$${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{e}_k \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) \otimes \mathbf{e}_s = \varepsilon_{kms} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s, \quad (\text{В.29})$$

где ε_{kms} — символы Леви–Чивита, определяемые через смешанное произведение базисных векторов,

$$\varepsilon_{kms} = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_s.$$

В.2.5. Свойства операций умножения

Свойства операций скалярного умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{c};$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A}.$$

Свойства операций векторного умножения тензора на вектор:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{A})^\top = -\mathbf{A}^\top \times \mathbf{c};$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{A} \times \mathbf{d} = -\mathbf{A} \times (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) = -(\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) \times \mathbf{A};$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{A}) = \mathbf{d} \otimes (\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{A};$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{A}.$$

Свойства операций смешанного умножения тензора на диаду:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{d} = \mathbf{A} \times (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) = -(\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A};$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) \times \mathbf{A}.$$

Свойства операций умножения двух тензоров:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top;$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}^\top;$$

$$\mathbf{A}^S \cdot \mathbf{B}^A = 0;$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^S \cdot \mathbf{B}^S + \mathbf{A}^A \cdot \mathbf{B}^A;$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^\top = 0.$$

Тождества, содержащие единичный тензор и тензор Леви–Чивита:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \mathbf{c};$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{c} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{E};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A};$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}.$$

В.2.6. Разложение тензора на шаровую и девиаторную части

След тензора второго ранга. Следом тензора $\mathbf{A} = \sum_k \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_k$ называется скаляр $\text{tr } \mathbf{A}$, вычисляемый по правилу

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k. \quad (\text{B.30})$$

Свойства следа тензора второго ранга

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E};$$

$$\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}^\top;$$

$$\text{tr } \mathbf{A}^A = 0;$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}^\top) = \text{tr}(\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B};$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \text{tr}(\mathbf{c} \times \mathbf{A});$$

$$\text{tr}(\mathbf{b} \times \mathbf{E} \times \mathbf{c}) = -2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c};$$

$$\text{tr}(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{C})) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{tr } \mathbf{C}.$$

Шаровым тензором называется тензор вида $\alpha \mathbf{E}$, где α — вещественное число. Любому тензору $\mathbf{A}$ можно однозначно сопоставить шаровой тензор по правилу

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{E}. \quad (\text{B.31})$$

Девиатором называется тензор, след которого равен нулю. Произвольный тензор можно представить в виде разложения на шаровой тензор и девиатор

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{E} + \mathbf{A}^d. \quad (\text{B.32})$$

В.2.7. Векторный инвариант. Сопутствующий вектор

Векторным инвариантом тензора $\mathbf{A} = \sum_k \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_k$ называется вектор $\mathbf{A}_\times$, вычисляемый по правилу

$$\mathbf{A}_\times = \sum_k \mathbf{a}_k \times \mathbf{b}_k. \quad (\text{B.33})$$

Свойства векторного инварианта

$$(\mathbf{A}^S)_\times = 0;$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{c};$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{A})_{\times} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \operatorname{tr} \mathbf{A}.$$

Для любого антисимметричного тензора $\mathbf{A}^A$ найдется такой вектор $\boldsymbol{\omega}$, что тензор $\mathbf{A}^A$ можно представить в виде

$$\mathbf{A}^A = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}, \quad (\text{B.34})$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется сопутствующим вектором тензора $\mathbf{A}^A$.

Сопутствующий вектор может быть определен по исходному тензору $\mathbf{A}^A$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}_{\times}^A = \frac{1}{2}\mathbf{A}^A \times \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{B.35})$$

В.2.8. Определитель тензора второго ранга

Определителем тензора второго ранга $\det \mathbf{A}$ называется определитель матрицы его координат.

Поскольку определитель тензора является характеристикой инвариантного объекта, то он также не должен зависеть от выбора базиса. Чтобы показать корректность введенного ранее определения, разложим тензор $\mathbf{A}$ по элементам другого ортонормированного тензорного базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Координаты тензора в новом базисе выражаются через координаты тензора в старом базисе по следующей формуле³:

$$\begin{aligned} A'_{mn} &= \mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'_n = \mathbf{e}'_m \cdot (A_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}'_n = \\ &= (\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_n) A_{ik} = \alpha_{mi} \alpha_{kn} A_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Откуда следует, что

$$\det A'_{mn} = \det \alpha_{mi} \det \alpha_{kn} \det A_{ik} = \det A_{ik}. \quad (\text{B.37})$$

Свойства определителя тензора

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A};$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Тензор второго ранга $\mathbf{A}$, определитель которого не равен нулю, называется **неособым** или **невыврожденным**.

³ В координатном тензорном исчислении матрица, которая при переходе от одного координатного базиса к другому преобразуется по этой формуле, определяет тензор второго ранга.

В.2.9. Обратный тензор. Степени тензора

Пусть тензор $\mathbf{A}$ невырожденный, тогда существует, причем единственный, обратный тензор $\mathbf{A}^{-1}$, такой что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (\text{B.38})$$

Свойства обратного тензора

$$\det \mathbf{A}^{-1} = 1 / \det \mathbf{A};$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1};$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}.$$

Степень тензора $\mathbf{A}^n$ определяется как n -кратное умножение тензора $\mathbf{A}$ на себя

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_n. \quad (\text{B.39})$$

Аналогично

$$\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}^{-1}}_n. \quad (\text{B.40})$$

Вычисление обратного тензора может быть проведено разными способами. Один из них основан на **тождестве Кэли–Гамильтона**. Произвольный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{A}^3 + I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.41})$$

где

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}, \quad I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } \mathbf{A}^2), \quad I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}. \quad (\text{B.42})$$

Обратный тензор получается после умножения (B.41) на $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})} (\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}). \quad (\text{B.43})$$

В.3. Линейные отображения

Рассмотрим векторную функцию векторного аргумента $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, переводящую $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Отображение называется линейным, если

$$\mathbf{f}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \alpha, \beta — \text{числа}. \quad (\text{B.44})$$

Любое линейное отображение можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad (\text{B.45})$$

где $\mathbf{A}$ — тензор второго ранга, называемый тензором линейного отображения. Действительно, в базисе $\mathbf{e}_k$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{f}(x_k \mathbf{e}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k) x_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{f}(\mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Поскольку $\mathbf{A}$ — сумма трех диад, то это тензор второго ранга.

Геометрическое истолкование определителя тензора. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — некоторая тройка векторов; $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$ — линейные отображения исходных векторов, тогда

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2) \cdot \mathbf{a}'_3}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3}. \quad (\text{B.47})$$

В.3.1. Ортогональное отображение

Ортогональным отображением называется линейное отображение, не меняющее длину векторов,

$$|\mathbf{a}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad (\text{B.48})$$

откуда следует

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{B.49})$$

таким образом, тензор $\mathbf{Q}$ должен удовлетворять условию

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \quad (\text{B.50})$$

Ортогональным тензором называется тензор второго ранга, удовлетворяющий условию (B.50).

Вычислим определитель ортогонального тензора

$$\det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det \mathbf{E} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1. \quad (\text{B.51})$$

Ортогональные тензоры с определителем, равным единице, называются **собственно ортогональными**, ортогональные тензоры с определителем, равным минус единице, называются **несобственно ортогональными**. В соответствии с формулой (B.47) собственно ортогональные тензоры, не меняя длин векторов и углов между ними, переводят правую тройку векторов в

правую, а левую — в левую, т. е. осуществляют поворот исходной тройки векторов, как жесткого целого. В связи с этим собственно ортогональный тензор также носит название **тензора поворота**. Несобственно ортогональный тензор меняет ориентацию триэдра на противоположную. В этом случае исходные и преобразованные тройки векторов невозможно совместить только поворотами, нужна дополнительная операция — инверсия, определяемая тензором $-\mathbf{E}$.

В.3.2. Тензор поворота

Одним из наиболее простых представлений тензора поворота является следующее. Введем два ортонормированных базиса: исходный $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и новый $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Тогда тензор поворота $\mathbf{P}$, переводящий исходный базис в новый, имеет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (\text{В.52})$$

Рассмотрим действие тензора поворота на вектор $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_m \mathbf{a}_m) = \mathbf{a}_k \mathbf{e}'_k, \quad (\text{В.53})$$

$\mathbf{a}'$ носит название повернутого вектора. Скалярная характеристика вектора, которая не меняется при ортогональных отображениях, называется инвариантом вектора. Согласно (В.53) координаты вектора $\mathbf{a}'$ в новом базисе имеют те же значения, что и в старом, т. е. модуль вектора является его инвариантом.

Аналогично, повернутый тензор определяется соотношением

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}' + \dots + \mathbf{c}' \otimes \mathbf{d}' = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{В.54})$$

или

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{A}_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \cdot (\mathbf{e}'_s \otimes \mathbf{e}_s)^T = \mathbf{A}_{ks} \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_s. \quad (\text{В.55})$$

Термин “повернутый тензор” можно распространить и на тензоры более высокого ранга

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}' \otimes \dots \mathbf{b}' + \dots + \mathbf{c}' \otimes \dots \mathbf{d}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \otimes \dots \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} + \dots + \mathbf{P} \cdot \mathbf{c} \otimes \dots \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}. \quad (\text{В.56})$$

Если повернутый тензор совпадает с исходным для любого тензора поворота, т. е. $\forall \mathbf{P} : \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T$, то такой тензор называется **изотропным**. Примером изотропного тензора является шаровой тензор $\alpha \mathbf{E}$.

Инвариантную (т. е. не связанную с выбором базиса) форму записи тензора поворота дает **Теорема Эйлера**. Произвольный тензор поворота $\mathbf{P}$, отличный от $\mathbf{E}$, допускает единственное представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (\text{B.57})$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}$ и определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота; θ называется углом поворота и считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора $\mathbf{m}$ происходит против хода часовой стрелки. Доказательство теоремы приведено, например, в [50].

Теорема Эйлера дает простой способ вычисления угла поворота θ и неподвижного вектора $\mathbf{m}$

$$\text{tr } \mathbf{P} = 1 + 2 \cos \theta, \quad \mathbf{P} \times = -2 \sin \theta \mathbf{m}. \quad (\text{B.58})$$

Формулы с тензором поворота

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}); \\ \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{P}^\top) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^\top = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}; \\ (\mathbf{P} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{P}^\top &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{P}^\top. \end{aligned}$$

В.3.3. Проекторы и тензоры отражений

Тензор $\mathbf{A}$, рассматриваемый как линейный оператор в пространстве векторов, называется проектором, если выполнены условия

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (\text{B.59})$$

Примерами проекторов являются тензоры

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}; \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные ортогональные векторы.

Результатом действия таких линейных операторов на произвольный вектор $\mathbf{a}$ является в первом случае проекция вектора на прямую, натянутую на вектор $\mathbf{m}$, во втором случае — проекция вектора на плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$.

Проекция вектора $\mathbf{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{m}$, получается в результате действия на вектор $\mathbf{a}$ тензора вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| = 1.$$

Результатом действия на вектор $\mathbf{a}$ тензора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| = 1,$$

является отражение вектора $\mathbf{a}$ от плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{m}$. Тензор $\mathbf{Q}$ — несобственно ортогональный тензор.

В.4. Инварианты тензора

Скалярная функция $f(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$ называется инвариантом тензора, если она выражается одинаковым образом в разных базисах и не зависит от выбора базиса. Иными словами, для нее справедливо равенство⁴

$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = f(\mathbf{A}), \quad (\text{В.60})$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор.

Примерами инвариантов тензора $\mathbf{A}$ являются $\text{tr } \mathbf{A}$, $\text{tr } \mathbf{A}^n$, $\det \mathbf{A}$.

Можно построить неограниченное количество функций, являющихся инвариантами тензора, однако не все они будут функционально независимыми. Можно показать, что симметричный тензор второго ранга имеет не более трех независимых инвариантов. Все остальные инварианты могут быть выражены через выбранные независимые инварианты. Инварианты $I_1(\mathbf{A})$, $I_2(\mathbf{A})$ и $I_3(\mathbf{A})$, входящие в тождество Кэли–Гамильтона, обычно называют **главными инвариантами тензора**⁵. В общем случае тензор второго ранга (несимметричный) имеет шесть независимых инвариантов.

В.5. Спектральное и полярное разложение тензоров

Действие тензора на вектор приводит к повороту (и/или отражению) исходного вектора и изменению его длины. Однако для каждого тензора второго ранга существуют такие векторы, действие тензора на которые сводится только к изменению их длины,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}. \quad (\text{В.61})$$

Такие векторы называются **собственными векторами** тензора $\mathbf{A}$, а числа λ — **собственными числами** или **собственными значениями** тензора

⁴ В четвертой главе книги П. А. Жилин уточняет понятие инварианта, распространяя его на аксиальный скаляр.

⁵ В основном тексте книги обозначение I_2 соответствует не главному инварианту, а следу квадрата тензора $I_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

A. Поскольку наряду с вектором $\mathbf{m}$ равенству (В.61) удовлетворяет любой вектор $\alpha\mathbf{m}$, то для определенности считаем, что $\mathbf{m}$ — единичный вектор.

Собственные числа тензора определяются из уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0, \quad (\text{В.62})$$

где I_i — главные инварианты тензора $\mathbf{A}$. Уравнение (В.62) называется **характеристическим уравнением** для тензора $\mathbf{A}$ и в случае симметричного тензора имеет три вещественных корня. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам тензора, ортогональны. В случае кратных собственных чисел из множества собственных векторов можно выбрать ортогональные.

Если собственные векторы взять в качестве базиса, то справедливо представление

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \lambda_2\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 + \lambda_3\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3. \quad (\text{В.63})$$

Это представление носит название **спектрального разложения** симметричного тензора. Собственные векторы тензора $\mathbf{A}$ называют иногда **главными осями** этого тензора, а представление (В.63) — записью тензора в главных осях.

Если два собственных числа совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то представление (В.63) для симметричного тензора имеет вид

$$\mathbf{A} = \lambda_3\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3 + \lambda(\mathbf{E} - \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3). \quad (\text{В.64})$$

Видно, что любой вектор, ортогональный $\mathbf{m}_3$, является собственным для $\mathbf{A}$. Множество этих векторов образует плоскость, ортогональную $\mathbf{m}_3$.

Если все три собственных числа равны между собой, то тензор $\mathbf{A}$ — шаровой тензор $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E}$. Любой вектор является собственным для шарового тензора.

Симметричный тензор второго ранга называется **положительно определенным**, если для любого вектора $\mathbf{a} \neq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} > 0. \quad (\text{В.65})$$

Используя спектральное разложение тензора, можно показать, что симметричный тензор $\mathbf{A}$ положительно определен только в том случае, когда его собственные числа положительны.

Для положительно определенного тензора можно определить дробные степени тензора

$$\mathbf{A}^\alpha = \lambda_1^\alpha\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \lambda_2^\alpha\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 + \lambda_3^\alpha\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3. \quad (\text{В.66})$$

Для невырожденных несимметричных тензоров часто используется **теорема о полярном разложении**. Любой невырожденный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ представим в виде разложений

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}, \quad (\text{B.67})$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор; $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — симметричные положительно определенные тензоры. Данное представление единственно

$$\mathbf{V} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top)^{1/2}, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A})^{1/2}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Связь между тензорами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (\text{B.68})$$

В.6. Тензорные функции

Тензорной функцией $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ называется отображение, ставящее в соответствие нескольким тензорам различных рангов тензор ранга p .

Например,

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{X}; \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_k, \quad p = k - 1;$$

$$f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}; \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2, \quad p = 0;$$

$$f_3(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2; \quad \mathbf{X}_1 \in \mathcal{T}_m, \quad \mathbf{X}_2 \in \mathcal{T}_n, \quad p = m + n;$$

$$f_4(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2; \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_k, \quad p = 2k - 2.$$

Тензорная функция называется **изотропной**, если ее значение на повернутых аргументах совпадает с повернутым значением функции на старых аргументах при любых поворотах, т. е. для тензора второго ранга справедливо соотношение

$$f(\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{P}^\top) = \mathbf{P} \cdot f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P}^\top, \quad \forall \mathbf{P}. \quad (\text{B.69})$$

Например,

$$f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{P}^\top, \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{P}^\top) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{P}^\top = \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{P} \cdot f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{P}^\top. \end{aligned}$$

В.6.1. Операции дифференцирования

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу осуществляется с помощью обычного правила Лейбница дифференцирования произведения

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \mathbf{a}_k(t) \otimes \mathbf{b}_k(t) \right) = \sum_k \left(\frac{d}{dt} \mathbf{a}_k(t) \otimes \mathbf{b}_k(t) + \mathbf{a}_k(t) \otimes \frac{d}{dt} \mathbf{b}_k(t) \right).$$

Дифференцирование тензорных функций

Пусть $f(\mathbf{X})$ — некоторая тензорная функция, действующая из $\mathcal{T}_k$ в $\mathcal{T}_p$. Если существует такой тензор $\partial f / \partial \mathbf{X} \in \mathcal{T}_{k+p}$, что для любого тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_k$ выполняется соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \odot \mathbf{A}^T = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})|_{\alpha=0}, \quad (\text{B.70})$$

то этот тензор называется производной тензорной функции $f(\mathbf{X})$ по тензорному аргументу $\mathbf{X}$. Символ $\odot$ обозначает операцию полного умножения $((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) \odot (\mathbf{d} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}))$.

Производную тензорной функции $\partial f / \partial \mathbf{X}$ также можно ввести как линейную составляющую ее полного приращения

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \odot d\mathbf{X}. \quad (\text{B.71})$$

Координатное представление производной тензорной функции в некотором базисе $\mathbf{e}_k$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f_{p\dots r}(X_{m\dots n})}{\partial X_{m\dots n}} \mathbf{e}_p \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_n. \quad (\text{B.72})$$

Отметим, что представление (B.72) справедливо только в том случае, если координаты тензора $X_{m\dots n}$ независимы. Например, если функция $f(\mathbf{X})$ — функция симметричного тензора второго ранга, то функция f зависит уже не от девяти, а только от шести независимых аргументов. В этом случае представим координаты функции в виде

$$f(X_{mn}) = f\left(\frac{1}{2}(X_{mn} + X_{nm})\right),$$

и после дифференцирования по каждой из девяти компонент учтем, что $X_{mn} = X_{nm}$. В результате получим

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial X_{mn}} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_m),$$

откуда следует, что производная функции по симметричному тензору — симметричный тензор.

Например,

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{T}_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}^\top = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})|_{\alpha=0} = \mathbf{A} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n; \quad (\text{B.73})$$

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^\top, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{T}_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}^\top = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})|_{\alpha=0} = \mathbf{A}^\top \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}^\top}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{e}_k; \quad (\text{B.74})$$

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{e}_k); \quad (\text{B.75})$$

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{T}_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}^\top &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})|_{\alpha=0} = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 2\mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{A}^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}^\top; \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

$$f(\mathbf{X}) = \text{tr } \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathbf{T}_2,$$

$$\frac{\partial \text{tr } \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}^\top = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})|_{\alpha=0} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \frac{\partial \text{tr } \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{E}. \quad (\text{B.77})$$

Дифференцирование главных инвариантов тензора второго ранга

Любая скалярнозначная изотропная функция симметричного тензорного аргумента является функцией главных инвариантов своего аргумента:

$$f(\mathbf{X}) = f(I_1, I_2, I_3).$$

Таким образом, производная функции f по $\mathbf{X}$ записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{B.78})$$

Поскольку

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{X} - \mathbf{X}^T, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} = I_3 \mathbf{X}^{-T}, \quad (\text{B.79})$$

то окончательно выражение для производной (B.78) принимает вид [26, 171]

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial f}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \frac{\partial f}{\partial I_2} \mathbf{X} + I_3 \frac{\partial f}{\partial I_3} \mathbf{X}^{-1}. \quad (\text{B.80})$$

Дифференцирование скалярнозначной функции

Для скалярнозначной функции тензорного аргумента справедливы формальные правила дифференцирования суммы и произведения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi + \varphi)}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}}, \\ \frac{\partial(\phi \varphi)}{\partial \mathbf{X}} &= \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} + \phi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Замена переменной. Предположим, что функция f зависит от тензора второго ранга $\mathbf{X}$ через $\mathbf{S}(\mathbf{X})$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{B.82})$$

Далее приводится сводка основных формул дифференцирования скалярнозначной функции. Подробный вывод можно найти, например, в приложении к книге [26].

Производная $f(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T)$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = 2 \frac{\partial f}{\partial (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T)} \cdot \mathbf{X}, \quad \frac{\partial f}{\partial (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T)} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}^{-1}.$$

Формула связи $\partial f / \partial \mathbf{X}$ с $\partial f / \partial \mathbf{X}^{-1}$

$$\mathbf{X}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = - \frac{\partial f}{\partial (\mathbf{X}^{-1})} \cdot \mathbf{X}^{-T}.$$

Производные билинейных форм $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{b}$

$$\frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{X} \cdot \mathbf{b}.$$

Производные $I_k(\mathbf{X})$ по $\mathbf{X}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}^2} &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^{-\top}, & \frac{\partial I_1(\mathbf{X}^3)}{\partial \mathbf{X}^2} &= \frac{3}{2} \mathbf{X}^\top, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}^2} &= \frac{1}{2} (I_1(\mathbf{X}) \mathbf{X}^{-\top} - \mathbf{E}), & \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}^2} &= \frac{1}{2} I_3(\mathbf{X}) (\mathbf{X}^\top)^{-2}. \end{aligned}$$

Тензорная функция тензорного аргумента

Производная произведения скаляра на тензор $f(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X})$

$$\frac{\partial(f\mathbf{F})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} \otimes \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + f \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{B.83})$$

Производная произведения тензоров второго ранга

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{X}} &= \left(\mathbf{F}_1 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \right) \cdot \mathbf{F}_2 \right) \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

Замена переменной $\mathbf{F}(\mathbf{S}(\mathbf{X}))$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{B.85})$$

Производные степеней $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial \mathbf{X}} &= (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{X}) \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \\ \frac{\partial \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^\top}{\partial \mathbf{X}} &= (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{X}^\top) \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \\ \frac{\partial \mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} &= (\mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{X}) \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \\ \frac{\partial \mathbf{X}^{-1}}{\partial \mathbf{X}} &= -\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{X}^{-1} \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

Производная первого инварианта произведения тензоров

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{B.87})$$

В.7. Тензорные поля

Положение точки в трехмерном евклидовом пространстве определяется радиус-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{e}_k.$$

Полагаем, что это однозначная непрерывная вектор-функция, имеющая по крайней мере три непрерывные производные.

Если каждой точке пространства, определяемой вектором $\mathbf{r}$, ставится в соответствие определенный тензор произвольного ранга $\mathbf{U}$, то говорят, что в пространстве задано **тензорное поле**,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.88})$$

Дифференциал $\mathbf{U}$ может быть записан в виде

$$d\mathbf{U} = d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{U}), \quad (\text{B.89})$$

где $\nabla \mathbf{U}$ — градиент поля $\mathbf{U}$, выражающий линейную часть приращения тензорного поля при перемещении из одной точки в соседнюю с ней. Оператор вычисления градиента ∇ называется **набла-оператором Гамильтона** и в декартовой системе координат может быть записан в форме

$$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (\text{B.90})$$

Например,

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{r} \nabla = \mathbf{E};$$

$$\nabla \mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r};$$

$$\nabla |\mathbf{r}| = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|.$$

Дивергенцией тензорного поля $\mathbf{U}$ называется величина, обозначаемая $\nabla \cdot \mathbf{U}$ или $\text{div } \mathbf{U}$, понижающая ранг тензорного поля на единицу. В случае декартовой системы координат дивергенция тензорного поля вычисляется по формуле

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}. \quad (\text{B.91})$$

Например, дивергенция вектора

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} (a_s \mathbf{e}_s) = \frac{\partial a_k}{\partial x_k}. \quad (\text{B.92})$$

Дивергенция радиус-вектора

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = 3. \quad (\text{B.93})$$

Ротором тензорного поля $\mathbf{U}$ называется величина, обозначаемая $\nabla \times \mathbf{U}$ или $\text{rot } \mathbf{U}$ и в случае декартовой системы координат вычисляемая по формуле

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{e}_k \times \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}. \quad (\text{B.94})$$

Поскольку любой антисимметричный тензор $\mathbf{A}^A$ выражается через сопутствующий вектор $\mathbf{A}^A = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}^A &= \mathbf{e}_s \frac{\partial \Omega_{ks}}{\partial x_k} = \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \\ \nabla \times \mathbf{A}^A &= \nabla \boldsymbol{\omega}^T - \mathbf{E} \otimes \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_1(\nabla \times \mathbf{A}^A) = -2\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ротор радиус-вектора

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k = \mathbf{0}. \quad (\text{B.95})$$

В.7.1. Дифференциальные операции над произведением

Известное правило дифференцирования произведения напрямую распространяется на градиент скалярных величин

$$\nabla(\varphi\phi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi. \quad (\text{B.96})$$

Градиенты произведения скаляра на вектор и скалярного произведения векторов вычисляются аналогично

$$\nabla(\varphi\mathbf{a}) = (\nabla\varphi)\mathbf{a} + \varphi(\nabla\mathbf{a}), \quad (\text{B.97})$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{B.98})$$

Дивергенция произведения скаляра на вектор

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) = \varphi\nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla\varphi. \quad (\text{B.99})$$

Дивергенция векторного произведения векторов

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}). \quad (\text{B.100})$$

Ротор векторного произведения векторов

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \nabla) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \nabla) \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{B.101})$$

Следует обратить внимание на то, что сначала выполняется операция дифференцирования в скобках и только потом скалярное умножение на соответствующий вектор.

Дивергенция диады

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}. \quad (\text{B.102})$$

Ротор диады

$$\nabla \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} - \mathbf{a} \times (\nabla \mathbf{b}). \quad (\text{B.103})$$

Градиент скалярного произведения тензора на вектор

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{A}^T. \quad (\text{B.104})$$

Дивергенция скалярного произведения тензора на вектор

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{b} \nabla). \quad (\text{B.105})$$

Ротор скалярного произведения тензора на вектор

$$\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \times (\mathbf{b} \nabla). \quad (\text{B.106})$$

Дивергенция векторного произведения тензора на радиус-вектор

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}); \quad (\text{B.107})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}, \quad (\text{B.108})$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — сопутствующий вектор антисимметричной части тензора $\mathbf{A}$.

Дивергенция скалярного произведения тензоров

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{B}). \quad (\text{B.109})$$

В.7.2. Двухкратное дифференцирование

Операции дивергенции и градиента используются для введения **оператора Лапласа**

$$\Delta \mathbf{U} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (\text{B.110})$$

В декартовой системе координат он представим в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (\text{B.111})$$

Лапласиан произведения скаляра на вектор определяется формулой

$$\Delta(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \Delta \mathbf{a} + \mathbf{a} \Delta \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \mathbf{a}.$$

Для любого дважды дифференцируемого тензорного поля справедливы следующие соотношения:

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.112})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.113})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}). \quad (\text{B.114})$$

В.7.3. Криволинейные ортогональные координаты

Набла-оператор Гамильтона является инвариантным оператором, поэтому все общие формулы с ним справедливы для любой системы координат. Тем не менее иногда операции дифференцирования удобнее проводить в координатной форме. Наиболее простую форму записи они имеют в декартовой системе координат, но в ряде случаев более естественной является, например, сферическая или цилиндрическая система координат. Далее приведены основные сведения из теории криволинейных координат. Более подробное описание можно найти, например, в [172].

Полагаем, что положение точки в пространстве может быть задано тремя криволинейными координатами q_1 , q_2 и q_3 ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (\text{B.115})$$

Если зафиксировать какие-либо две криволинейные координаты, то выражение (B.115) будет описывать в пространстве координатную линию, соответствующую изменяющейся координате q_s . Векторы $\partial \mathbf{r} / \partial q_s$ представляют собой векторы, касательные к координатным линиям. Длина этих векторов H_s называется коэффициентами Ляме. Триэдр единичных векторов $\mathbf{e}_s$, касательных к координатным линиям и направленных в сторону возрастания q_s , представляет собой векторный базис в принятой системе криволинейных координат. Для ортогональной криволинейной системы координат выполняются условия

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{sk}. \quad (\text{B.116})$$

Оператор Гамильтона в криволинейной системе координат представляется в виде

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_s}{H_s} \frac{\partial}{\partial q_s}. \quad (\text{B.117})$$

Таким образом, операция градиента тензорного поля $\mathbf{U}$ в криволинейной системе координат записывается как

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{U} &= \frac{\mathbf{e}_s}{H_s} \frac{\partial \mathbf{U}_{k\dots m} \mathbf{e}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m}{\partial q_s} = \\ &= \frac{\mathbf{e}_s}{H_s} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{k\dots m}}{\partial q_s} \mathbf{e}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m + \mathbf{U}_{k\dots m} \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q_s} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m + \dots + \mathbf{U}_{k\dots m} \mathbf{e}_k \otimes \dots \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial q_s} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

В (B.118) появились производные ортов $\mathbf{e}_k$ по q_s , определяемые деривационными формулами, которые можно найти, например, в [172].

Цилиндрические координаты

Базисные векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ имеют направления радиусов окружностей, касательных к ним и оси концентрических цилиндров. Коэффициенты Ляме

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\varphi = r, \quad H_3 = H_z = 1. \quad (\text{B.119})$$

Набла-оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{B.120})$$

Деривационные формулы. Отличны от нуля только следующие производные:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r. \quad (\text{B.121})$$

Лапласиан в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.122})$$

Сферические координаты

Базисные векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$ имеют направления радиуса, касательной к меридиану (на юг) и перпендикуляра к плоскости меридиана (на восток), соответственно.

Коэффициенты Ляме равны:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \sin \theta. \quad (\text{B.123})$$

Набла-оператор Гамильтона в сферической системе координат

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{B.124})$$

Деривационные формулы

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_s \sin \theta. \quad (\text{B.125})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\vartheta, & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \mathbf{e}_\varphi \sin \theta, & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \mathbf{e}_\varphi \cos \theta, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -(\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

Лапласиан в сферических координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{B.127})$$

В.7.4. Формула Гаусса–Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Считаем, что во всем объеме задано непрерывно дифференцируемое тензорное поле $\mathbf{U}$. Известная формула Гаусса–Остроградского может быть обобщена на случай тензорного поля

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{U} \, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \, dS. \quad (\text{B.128})$$

Соотношение (B.128) называется формулой Гаусса–Остроградского для тензорных полей или **теоремой о дивергенции**. Также можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \otimes \mathbf{U} \, dV &= \int_S \mathbf{n} \otimes \mathbf{U} \, dS, \\ \int_V \nabla \times \mathbf{U} \, dV &= \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{U} \, dS. \end{aligned}$$

Структура приведенных формул очевидна — набла-оператор Гамильтона в объемном интеграле заменяется на вектор нормали в поверхностном.

Описание спинорных движений и модель твердотельного осциллятора¹

Введение

Известна роль, которую играет обычный осциллятор в ньютоновской механике. В эйлеровой механике аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании. Такая система может быть названа твердотельным осциллятором. Последний необходим при построении динамики мультиполярных сред, но в общем случае в литературе не только не исследован, но даже не описан. Хотя частные случаи твердотельного осциллятора, конечно, рассматривались, например, при анализе ядерного магнитного резонанса, а также в многочисленных работах прикладного характера, но при малых углах поворота.

Во введении к статье [31] описана постановка задач динамики твердого тела в терминах тензора поворота и вводится в рассмотрение вектор поворота, но практически он не применяется. Между тем, определение, например, потенциального момента или задание энергии деформации упругого основания требует применения вектора поворота. Поэтому в разделе С.5 приводится подробное описание вектора поворота и его применений. В разделе С.8 дается вывод уравнений движения твердотельного осциллятора.

¹ Материал приложения основан на книге П. А. Жилина [2] “Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики” (СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2003) и его статье [147] “Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании” (Труды XXIV летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — СПб., 1997. — С. 90–122). (*Примеч. ред.*)

С.1. Тензор поворота в кинематике абсолютно твердого тела

Движение какого-либо тела определяется заданием движений всех частиц (точек), составляющих тело. В общем случае тело состоит из бесконечного набора точек. Поэтому описание его движения бесконечномерно, т. е. требует задания бесконечного набора векторов, зависящих от времени, определяющих положение всех точек тела. Для абсолютно твердого тела ситуация упрощается. Оказывается, что движение любой точки абсолютно твердого тела полностью определено, если известно движение какой-либо одной произвольно выбираемой точки Q тела, называемой полюсом и, кроме того, определен некий тензор второго ранга $\mathbf{P}(t)$, называемый тензором поворота.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, движущееся относительно выбранной системы отсчета. Движение абсолютно твердого тела сводится к трансляциям и поворотам относительно системы отсчета. Выберем в теле какую-нибудь точку Q , которую будем называть полюсом. Выберем еще три точки в теле A_1, A_2, A_3 . Выбор этих точек также произволен, но удовлетворяет ограничению: четыре точки Q, A_1, A_2, A_3 не должны лежать в одной плоскости. Выбранным точкам отвечают три материальных вектора $\overrightarrow{QA_1}, \overrightarrow{QA_2}$ и $\overrightarrow{QA_3}$, которые, очевидно, не лежат в одной плоскости. Выберем теперь какое-либо положение абсолютно твердого тела в системе отсчета. В этом положении полюс Q тела определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{r}_Q$. Ориентация тела в выбранном положении определяется заданием тройки векторов $\mathbf{e}_m$ такой, что

$$\overrightarrow{QA_1} \sim \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{QA_2} \sim \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{QA_3} \sim \mathbf{e}_3. \quad (\text{C.1})$$

Определение. Положение тела, фиксируемое заданием четверки векторов

$$\mathbf{r}_Q, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3, \quad (\text{C.2})$$

называется *отсчетным*.

Положение любой точки S тела в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_Q + x_S^m \mathbf{e}_m \equiv \mathbf{r}_Q + \sum_{m=1}^3 x_S^m \mathbf{e}_m, \quad (\text{C.3})$$

где числа x^1, x^2, x^3 называются материальными координатами.

Точке A_1 отвечают координаты $x^1 = 1, x^2 = x^3 = 0$. Точке A_2 соответствуют координаты $x^1 = 0, x^2 = 1, x^3 = 0$. Точке A_3 соответствуют координаты

наты $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 1$. Координаты x^m позволяют идентифицировать все точки абсолютно твердого тела. Отсчетное положение абсолютно твердого тела может выбираться совершенно произвольно, причем выбор диктуется соображениями удобства и зависит от рассматриваемой задачи. Заметим, что в реальном движении положение рассматриваемого тела может никогда не совпадать с отсчетным положением.

Определение. *Положение тела в данный момент времени называется актуальным.*

Чтобы задать актуальное положение тела, следует задать радиус-вектор $\mathbf{R}_Q(t)$, определяющий положение полюса Q в данный момент времени t , а также тройку векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ такую, что

$$\overrightarrow{QA} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_1(t), \quad \overrightarrow{QB} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_2(t), \quad \overrightarrow{QC} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_3(t).$$

Таким образом, актуальное положение определяется заданием четверки векторов

$$\mathbf{R}_Q(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3(t). \quad (\text{C.4})$$

Актуальное положение произвольной точки S находится по формуле

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + X_S^m \boldsymbol{\varepsilon}_m(t), \quad (\text{C.5})$$

где X_S^m — координаты точки S тела относительно базиса $\boldsymbol{\varepsilon}_m(t)$.

Теорема. *Актуальное положение произвольной точки S абсолютно твердого тела полностью определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{R}_Q(t)$ и собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$ и вычисляется с помощью уравнения*

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \quad (\text{C.6})$$

где тензор второго ранга $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P} = +1 \quad (\text{C.7})$$

и не зависит от выбора ни полюса Q , ни точки S , ни каких бы то ни было других точек абсолютно твердого тела.

Тензор поворота является характеристикой спинорного (вращательного) движения тела и может изучаться как вполне самостоятельный объект, не связанный с абсолютно твердым телом. В книге [50] была доказана теорема Эйлера, утверждающая, что любой поворот может быть реализован как поворот вокруг оси, натянутой на некоторый единичный вектор $\mathbf{m}$, на некоторый угол θ . В математической форме теорема Эйлера выражалась так

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (\text{C.8})$$

Стандартное для данной книги обозначение $Q(\theta \mathbf{m})$ означает поворот на угол θ вокруг оси $\mathbf{m}$. Обратим внимание, что ось поворота не привязана к каким-либо точкам тела или точкам системы отсчета. Фактически осью поворота является любая прямая из семейства параллельных прямых, натянутых на вектор $\mathbf{m}$. На первый взгляд это обстоятельство кажется странным. В самом деле, если, например, цилиндр вращается вокруг собственной оси, то именно ось цилиндра и хотелось бы считать осью поворота, а вовсе не произвольную прямую, параллельную оси цилиндра. Тем не менее определение оси поворота как семейства параллельных прямых не только оправдано, но и необходимо. Представим себе, что рассматривается вращение цилиндра в двух инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. В одной системе отсчета ось цилиндра покоится, и ее естественно назвать осью поворота. В другой системе отсчета ось цилиндра движется и в разные моменты времени совпадает с разными прямыми в системе отсчета. Поворот цилиндра абсолютен и одинаков во всех инерциальных системах отсчета, поэтому и характеристики поворота не должны зависеть от выбора инерциальной системы. Если тщательно обдумать все указанное, станет очевидным, что только данное ранее определение оси поворота является допустимым и совместимым с принципом независимости от выбора системы отсчета.

Достоинством представления (С.8) является то, что оно содержит все необходимые величины в явном виде.

Теорема. *Любой поворот $Q(\theta)$ может быть осуществлен в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых и фиксированных во времени осей $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$*

$$Q(\theta) = Q(\psi(t) \mathbf{m}) \cdot Q(\vartheta(t) \mathbf{e}) \cdot Q(\varphi(t) \mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} / |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \quad (\text{С.9})$$

где углы $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ и $\varphi(t)$ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно.

Если $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, то углы ψ , ϑ и φ называются углами Эйлера, а вектор $\mathbf{e}$ выбирается произвольно, но должен быть ортогонален $\mathbf{n}$.

С.2. Тензор спина и вектор угловой скорости

Основной теоремой кинематики введен в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P}(t)$, посредством которого выражался поворот твердого тела. Вместе с тем, тензор $\mathbf{P}(t)$ не привязан ни к каким точкам твердого тела и живет вполне самостоятельной жизнью, поэтому и изучать его можно совершенно независимо

от твердого тела. По определению тензор поворота удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E}. \quad (\text{C.10})$$

Продифференцируем тождество (C.10) по времени и учтем, что $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, так как $\mathbf{E}$ — постоянный тензор,

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.11})$$

Введем в рассмотрение тензор $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) \quad (\text{C.12})$$

и назовем его левым тензором спина или просто тензором спина. Подставляя (C.12) в (C.11), получаем

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) + \mathbf{S}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^\top(\mathbf{t}) = -\mathbf{S}(\mathbf{t}). \quad (\text{C.13})$$

Итак, тензор спина $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ антисимметричен. Известно [50], что любой антисимметричный тензор, в том числе и тензор спина $\mathbf{S}(\mathbf{t})$, может быть представлен через сопутствующий вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}). \quad (\text{C.14})$$

Определение. Вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$, сопутствующий левому тензору спина $\mathbf{S}(\mathbf{t})$, называется вектором левой угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$.

В дальнейшем эпитет “левый” у угловой скорости будет опускаться, т. е. термины *вектор левой угловой скорости* и *вектор угловой скорости* будут рассматриваться как равнозначные. Кроме того, вместо длинного термина *вектор угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$* , будем использовать более короткий термин — *угловая скорость поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$* . Наряду с тензором $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ можно ввести еще один антисимметричный тензор

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}). \quad (\text{C.15})$$

Определение. Тензор $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$ называется правым тензором спина. Здесь эпитет “правый” должен всегда присутствовать.

Левый и правый тензоры спина связаны соотношением

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}_r(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}). \quad (\text{C.16})$$

Определение. Вектор $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$, сопутствующий правому тензору спина, называется вектором правой угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$,

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (\text{C.17})$$

Между левым и правым векторами угловой скорости существует простая связь, которая немедленно устанавливается с помощью тождества

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}, \quad (\text{C.18})$$

верного для любого вектора $\mathbf{a}$ и любого тензора поворота $\mathbf{P}$. Подставляя (C.14) и (C.17) в (C.16), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{E} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (\text{C.19})$$

Если в отсчетный момент времени $t = \tau$ тензор поворота $\mathbf{P}(\tau)$ обращается в единичный, то из (C.19) получаем совпадение $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ и $\boldsymbol{\Omega}(\tau)$,

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) = \mathbf{P}^T(\tau) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\tau) = \boldsymbol{\Omega}(\tau). \quad (\text{C.20})$$

При решении задач динамики твердого тела используются оба вектора угловой скорости. Уравнение (C.14) удобнее и нагляднее записать в другой форме

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E} \Rightarrow \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t). \quad (\text{C.21})$$

Уравнение (C.21) носит название левого уравнения Пуассона или (в литературе) уравнения Пуассона. Аналогично может быть переписано и уравнение (C.17)

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \mathbf{P}^T(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (\text{C.22})$$

Уравнение (C.22) будем называть правым уравнением Пуассона.

Из левого уравнения Пуассона однозначно вытекает правое уравнение Пуассона, т. е. (C.21) и (C.22) — суть разные записи одного и того же уравнения.

Определение. Прямая, натянутая на вектор левой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, называется левой осью вращения, а прямая, натянутая на вектор правой угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}(t)$, называется правой осью вращения.

Левая ось вращения обычно называется просто осью вращения. Ни в коем случае нельзя смешивать понятия *ось вращения* и *ось поворота*. В общем (типичном) случае эти оси различаются. Иными словами, поворот тела и его вращение происходят вокруг разных осей. Кроме того, следует помнить, что ни ось вращения, ни ось поворота, ни векторы угловых скоростей не связаны ни с какими точками тела. Иными словами, векторы угловых скоростей — суть свободные аксиальные векторы. Ось вращения — это множество параллельных прямых, любая из которых может с равным правом называться осью вращения.

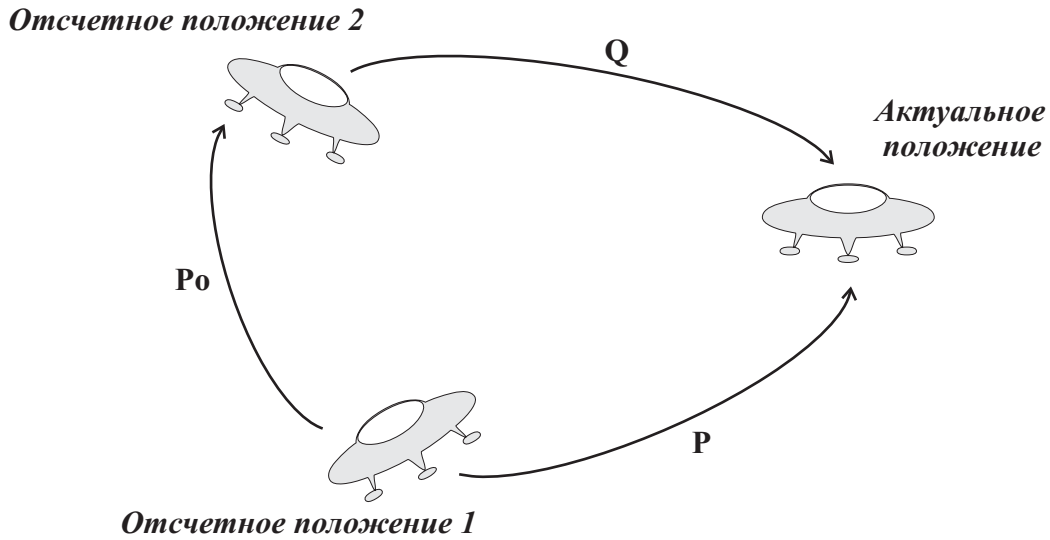


Рис. С.1. Замена отсчетного положения

Если тензор поворота задан, то левый и правый векторы угловой скорости вычисляются относительно легко с помощью уравнений (С.21) и (С.22), которые, вспомнив определение векторного инварианта тензора второго ранга, удобнее переписать в другой форме

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times}; \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) \right)_{\times}. \quad (\text{С.23})$$

Таким образом, введены понятия левой и правой угловых скоростей. Формально, конечно, это допустимо. Но пока что неясно, насколько эти понятия удобны. Заранее это предвидеть трудно. Ситуация прояснится немного позднее, когда будет видно, что именно эти величины будут естественным образом возникать в приложениях. Тем не менее один вопрос следует выяснить немедленно. По определению тензора поворота, он зависит существенным образом от выбора отсчетного положения. Интуиция подсказывает, что вектор угловой скорости при любом разумном определении не должен зависеть от выбора отсчетного положения. Если это не так, то такое определение нельзя признать удовлетворительным. Покажем, что левая угловая скорость действительно не зависит от выбора отсчетного положения, а правая угловая скорость, хотя и зависит от выбора отсчетного положения, но зависит весьма простым и понятным образом. Рассмотрим два различных отсчетных положения тела (рис. С.1).

Пусть тензор поворота $\mathbf{P}$ поворачивает тело из отсчетного положения 1 в актуальное положение, а тензор $\mathbf{Q}$ поворачивает тело из отсчетного по-

ложения 2 в то же самое актуальное положение. Очевидно, что поворот $\mathbf{P}$ может быть осуществлен в виде композиции поворота $\mathbf{P}_0$, переводящего тело из положения 1 в положение 2, и последующего поворота $\mathbf{Q}$. Иными словами, имеем представление

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}_0. \quad (\text{C.24})$$

Используя определение левой угловой скорости (C.23), получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_P(t) &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times} = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T \cdot \mathbf{Q}^T(t) \right)_{\times} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) \right)_{\times} = \boldsymbol{\omega}_Q(t), \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

т. е. левая угловая скорость не зависит от выбора отсчетного положения.

Для правой угловой скорости, согласно (C.20) и (C.25), имеем

$$\boldsymbol{\Omega}_P = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{P}_0^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_Q = \mathbf{P}_0^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_Q, \quad (\text{C.26})$$

т. е. правая угловая скорость зависит от выбора отсчетного положения. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \mathbf{n}(t), \quad |\mathbf{n}(t)| = 1, \quad (\text{C.27})$$

где $\omega(t)$ называется величиной угловой скорости.

Если $\omega(t) > 0$, то вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}(t)$. Иногда в качестве $\mathbf{n}(t)$ выбирают направляющий вектор вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$\mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) / |\boldsymbol{\omega}(t)|. \quad (\text{C.28})$$

В этом случае $\omega(t)$ в (C.27) есть модуль вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$. Представление (C.28) неудобно, так как в этом случае направляющий вектор $\mathbf{n}(t)$ не является в общем случае непрерывной функцией времени: если модуль $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ в какой-то момент времени обращается в нуль, а сам вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ при этом меняет направление на противоположное, то $\mathbf{n}(t)$ скачком меняет свою величину, ибо $|\mathbf{n}(t)| = 1$ при всех t . В представлении (C.27) знак будет менять величина $\omega(t)$, а вектор $\mathbf{n}(t)$ будет меняться непрерывно. Итак, по заданному тензору поворота $\mathbf{P}(t)$ векторы угловых скоростей вычисляются однозначно по формулам (C.23). Сложнее обстоит дело с обратной задачей: по заданному вектору $\boldsymbol{\omega}(t)$ восстановить тензор поворота.

С.3. Определение поворота по угловой скорости

Допустим, что известен левый (правый) вектор угловой скорости. Кроме того, известно, что в момент сравнения $t = \tau$ тензор поворота равен единичному тензору

$$\mathbf{P}(t)|_{t=\tau} = \mathbf{E}. \quad (\text{C.29})$$

Требуется найти тензор поворота, отвечающий вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Запишем уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \quad (t > \tau), \quad (\text{C.30})$$

где $\boldsymbol{\omega}(t)$ считается заданным.

Тензорное уравнение (C.30) эквивалентно девяти скалярным уравнениям первого порядка для координат тензора $\mathbf{P}(t) = P^{mn}(t) \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$. Однако не все эти уравнения являются независимыми. В (C.30) только три уравнения оказываются независимыми. Поэтому система (C.30) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача их интегрирования при определенных начальных условиях типа (C.29) называется задачей Коши. Таким образом, нахождение тензора поворота по заданной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ сводится к интегрированию уравнения (C.30) при начальных условиях (C.29). Эта задача Коши весьма специфична и исследована еще в прошлом веке Жаном Дарбу (1842–1917). Поэтому задачу интегрирования уравнения (C.30) при начальных условиях (C.29) в динамике твердого тела принято называть задачей Дарбу.

Теорема. *Решение задачи Дарбу, т. е. решение уравнения (C.30) при начальных условиях (C.29), существует, единственно и является тензором поворота.*

Доказательство. *Существование и единственность решения задачи Коши, частным случаем которой является задача Дарбу, доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому необходимо доказать только последнее утверждение теоремы, т. е. доказать, что тензор $\mathbf{P}(t)$, являющийся решением уравнения (C.30) и удовлетворяющий условию (C.29), является тензором поворота. Пусть $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяет уравнению (C.30) и начальному условию (C.29). Составим тензор $\mathbf{B}(t)$*

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \mathbf{B}(\tau) = \mathbf{E}, \quad t \geq \tau. \quad (\text{C.31})$$

Здесь учтено, что $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$ в силу (C.29). Продифференцируем (C.31) по времени и воспользуемся уравнением (C.30) для того, чтобы исключить

производные от $\mathbf{P}(t)$ по времени. Получим

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}(t) &= \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^T = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

Таким образом, если тензор $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяет уравнению (С.30), то тензор $\mathbf{B}(t)$ должен удовлетворять уравнению

$$\dot{\mathbf{B}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t), \quad t > \tau. \quad (\text{С.32})$$

Кроме того, $\mathbf{B}(t)$ при $t = \tau$ должен удовлетворять условию (С.31): $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{E}$. Иными словами, для тензора $\mathbf{B}(t)$ также получена задача Коши, решение которой существует и единственно. На первый взгляд, решение задачи (С.32) и (С.31) ничуть не проще, чем решение задачи Дарбу (С.30) и (С.29). Но все дело в том, что решение задачи (С.32) и (С.31) легко угадать. Именно угадать, а не построить на основе каких-либо общих методов. Действительно, очевидно, что тензор $\mathbf{B}(t) = \mathbf{E}$ удовлетворяет как уравнению (С.32), так и начальному условию (С.31). Поскольку решение задачи Коши (С.32) и (С.31) единственно, то тензор $\mathbf{B}(t) = \mathbf{E}$ является единственным решением задачи. Таким образом, получается, что тензор $\mathbf{P}(t)$ при всех t удовлетворяет условию

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \mathbf{E},$$

из которого следует, что тензор $\mathbf{P}(t)$ — ортогонален. Как следствие получаем отсюда условия

$$[\det \mathbf{P}(t)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \det \mathbf{P}(t) [\det \mathbf{P}(t)]' = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(t) = \text{const}.$$

Поскольку при $t = \tau$ имеем $\det \mathbf{P}(\tau) = \det \mathbf{E} = 1$, то $\det \mathbf{P}(t) = 1$ при всех t . Итак, решение задачи Дарбу является тензором поворота.

В качестве момента сравнения τ всегда можно выбрать значение $\tau = 0$, т. е. принять τ за начало отсчета времени. Но это не всегда удобно. Рассмотрим пример (рис. С.2).

Пусть стержень OA подвешен с помощью шарнира в точке O и может совершать движения вокруг O в плоскости чертежа. Пусть на стержень действует поле силы тяжести $\mathbf{g}$. Тогда если стержень слегка отклонить от вертикали и затем отпустить, то он начнет совершать малые колебания около вертикали. Начальное положение стержня (на рис. С.2 это OA) при $t = 0$ отклонено от вертикали. В качестве отсчетного положения удобно принять не

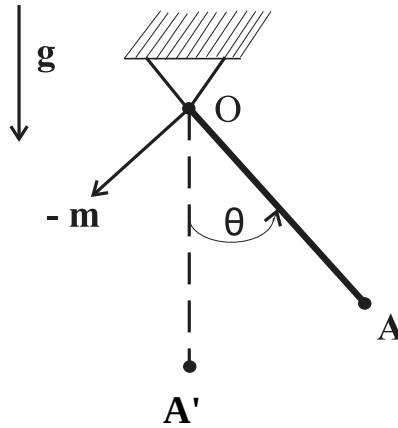


Рис. С.2. Выбор отсчетного положения

это начальное положение, а вертикальное положение стержня. Поэтому принимаем, что при каком-то $\tau < 0$ стержень занимал вертикальное положение и тензор поворота $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$. При $t = 0$ тензор поворота имеет вид

$$\mathbf{P}(0) = (1 - \cos \theta_0) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta_0 \mathbf{E} + \sin \theta_0 \mathbf{m} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{P}_0,$$

где $\mathbf{m}$ — ортогонален плоскости чертежа и направлен “от нас”.

Задача Дарбу в этом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (\text{С.33})$$

Отметим одно свойство задачи Дарбу. На первый взгляд может показаться, что задача (С.33) линейна. Следовательно, ее общее решение должно быть суммой трех частных решений уравнения (С.33). Именно так гласит известная теорема из теории линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Здесь имеется одна тонкость, которая резко меняет ситуацию. Дело, конечно, в начальном условии. Тензор $\mathbf{P}_0$ в (С.33) должен быть тензором поворота. Повороты, как известно, мультипликативны, а вовсе не аддитивны. Поэтому сумма частных решений в данном случае неприемлема. Как построить в таком случае общее решение задачи Дарбу (С.33)? Оказывается, достаточно найти одно частное решение уравнения (С.33), но такое, что оно является тензором поворота. Последнее обстоятельство существенно затрудняет построение решения задачи Дарбу. В частности, оно делает проблематичным численное построение решения, ибо строить численно матрицы, строго удовлетворяющие условиям ортогональности, весьма затруднительно, если вообще возможно. Позднее будет показано, как устранить описанное затруднение. Сейчас ограничимся демонстрацией того, что одного частного

решения уравнения (С.33) без учета начального условия достаточно, чтобы найти общее решение задачи (С.33). Пусть тензор поворота $\mathbf{Q}(t)$ является каким-либо решением уравнения (С.33) без учета начального условия

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t).$$

Тогда тензор поворота

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(0) \cdot \mathbf{P}_0 \quad (\text{С.34})$$

является решением задачи (С.33).

С.4. Угловая скорость композиции поворотов

В приложениях бывает удобно представлять общий поворот $\mathbf{P}(t)$ в виде композиции поворотов

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \mathbf{Q}_2(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\psi}(t)). \quad (\text{С.35})$$

Здесь $\mathbf{Q}_1$ есть первый поворот, а $\mathbf{Q}_2$ — второй поворот. Напомним, что композицию поворотов нельзя понимать так, что сначала, в течение какого-то интервала времени, производится поворот $\mathbf{Q}_1$, а затем, по истечении первого интервала времени, начинает производиться второй поворот $\mathbf{Q}_2$. Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ — это мгновенное действие, происходящее в момент времени t и состоящее в том, что в момент времени t тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ поворачивает тело из отсчетного положения в актуальное. В следующий момент времени $t + \Delta t$ тензор поворота $\mathbf{P}(t + \Delta t)$ переводит тело из отсчетного положения в положение, занимаемое телом в момент времени $t + \Delta t$. Истинное изменение ориентации тела в пространстве описывается не тензором поворота, а его изменением (дифференциалом). Это обстоятельство важно осознать. Полезно поэтому провести аналогию с вектором перемещения $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(t).$$

Вектор $\mathbf{u}(t)$ мгновенно переносит тело из отсчетного положения $\mathbf{r}$ в актуальное положение $\mathbf{R}(t)$. При этом $\mathbf{u}(t)$ сам по себе не показывает истинного движения тела, которое, тем не менее, может быть восстановлено по вектору $\mathbf{u}(t)$

$$d\mathbf{R}(t) = d\mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \int_0^t d\mathbf{u}(t).$$

При этом $d\mathbf{u} = \mathbf{v}dt$, т. е. линейная дифференциальная форма $\mathbf{v}dt$ есть полный дифференциал вектора перемещения. Для поворотов ситуация сложнее. Изменение поворота, согласно уравнению Пуассона, определяется через линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega}dt$

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}dt \times \mathbf{P},$$

но $\boldsymbol{\omega}dt$ не является полным дифференциалом вектора поворота

$$\boldsymbol{\omega}dt \neq d\boldsymbol{\theta}.$$

По существу именно с этим обстоятельством связаны все усложнения, возникающие при описании поворотов.

Вернемся, однако, к композиции поворотов (С.35). Все, относящееся к полному повороту $\mathbf{P}$, справедливо и для составляющих поворотов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$. Допустим, нам известны угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ поворотов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, соответственно,

$$\dot{\mathbf{Q}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1, \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2. \quad (\text{С.36})$$

Как по ним вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ полного поворота $\mathbf{P}$? Ответ дает следующая простая теорема.

Теорема. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ полного поворота $\mathbf{P}$, определенного в виде композиции (С.35), вычисляется по угловым скоростям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ составляющих поворотов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ посредством равенства

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(t). \quad (\text{С.37})$$

Доказательство (С.37) вполне элементарно и получается после дифференцирования (С.35) по времени

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_2(t) \cdot \mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1(t).$$

Заменяя здесь производные от тензоров поворота с помощью уравнений Пуассона (С.36), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1). \quad (\text{С.38})$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1) &= \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \\ &= \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = [(\mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \end{aligned}$$

Учитывая это тождество и равенство (С.35), вместо (С.38) получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = (\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{P}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{P}^T$ справа и вычисляя векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства, приходим к формуле (С.37). Доказательство завершено.

В литературе равенство (С.37), точнее его аналог, называют *теоремой сложения угловых скоростей*. Как уже неоднократно отмечалось, в литературе используется определение угловой скорости, когда в качестве отсчетного положения используется положение в данный момент времени. При таком описании

$$\mathbf{Q}_2(\tau - \mathbf{t})|_{\tau=\mathbf{t}} = \mathbf{E}$$

и равенство (С.37) переходит в традиционную форму сложения угловых скоростей

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_2(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{t}). \quad (\text{С.39})$$

Хотя в этом выражении и стоит аргумент $\mathbf{t}$, тем не менее его нельзя дифференцировать по времени, поскольку здесь $\mathbf{t}$ есть один фиксированный момент времени. Рекомендуются не использовать формулы типа (С.39) и аналогичные ей выражения, апеллирующие к мгновенному состоянию движения. Будучи формально правильными, они служат источником многих недоумений и практически бесполезны. Кроме того, они находятся в трудно устранимом противоречии с интуитивными представлениями. Например, известно, что повороты не коммутируют. Поэтому их угловые скорости должны входить в формулу сложения не равноправно. Это действительно имеет место в (С.37), но в (С.39) этот факт глубоко замаскирован. Далее теорема о сложении угловых скоростей используется исключительно в форме (С.37). Согласно (С.37) для правых угловых скоростей имеем

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_2, \quad (\text{С.40})$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{Q}_2^T \cdot \boldsymbol{\omega}_2.$$

Согласно (С.37) формулы для композиции трех и большего числа поворотов принимают вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \quad (\text{С.41})$$

Тогда имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{Q}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1. \quad (\text{С.42})$$

С.5. Вектор поворота. Тензор-интегратор

Большую роль в динамике твердого тела играет тензор поворота и его представления. Между тем, существуют обширные классы задач, которые без применения вектора поворота трудно даже сформулировать, не говоря об их решении. По этой причине далее приводятся некоторые факты, относящиеся к вектору поворота и его применению. Для тензора поворота справедлива теорема Эйлера (С.8). Часто вместо (С.8) удобнее использовать представление через логарифмический тензор поворота $\mathbf{R}$

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2 = \exp \mathbf{R}, \quad (\text{С.43})$$

где

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}. \quad (\text{С.44})$$

В представлении (С.43), (С.44), в отличие от (С.8), величина θ может рассматриваться как модуль вектора $\boldsymbol{\theta}$, т. е. $\theta = |\boldsymbol{\theta}| \geq 0$. Справедливы формулы

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{Q}, \quad -2 \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}_{\times}. \quad (\text{С.45})$$

Рассмотрим композицию поворотов

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{q}), \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1. \quad (\text{С.46})$$

Вектор поворота композиции вычисляется по формулам

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta + \\ + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}), \quad (\text{С.47})$$

$$2 \sin \theta \mathbf{m} = [\sin \alpha (1 + \cos \beta) - (1 - \cos \alpha) \sin \beta (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})] \mathbf{p} + \\ + [\sin \beta (1 + \cos \alpha) - \sin \alpha (1 - \cos \beta) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})] \mathbf{q} + \\ + [\sin \alpha \sin \beta - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})] \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (\text{С.48})$$

Следует обратить внимание на достаточно сложный характер суммарного угла поворота. Например, если $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, то $\theta = \alpha + \beta$, что вполне естественно. Однако, если $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$, то из (С.47) следует довольно неожиданный вывод: если $\beta = \pi$, то $\theta = \pi$ независимо от угла α . В этом случае от угла α зависит вектор $\mathbf{m}$, который находится по (С.48) после раскрытия неопределенности.

Левая (истинная) $\boldsymbol{\omega}$ и правая $\boldsymbol{\Omega}$ угловые скорости находятся по уравнениям Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (\text{С.49})$$

Важную роль играют формулы, связывающие угловые скорости с производной от вектора поворота

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (\text{C.50})$$

или в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{C.51})$$

причем для тензора-интегратора $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$, играющего роль интегрирующего множителя, справедливы представления

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (\theta \neq 2\pi s), \quad (\text{C.52})$$

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, \quad \det \mathbf{Z} = \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (\text{C.53})$$

Обратим внимание, что сингулярную точку $\theta = 2\pi s$ ($s = 1, 2, \dots$) следует исключить из рассмотрения. Это обстоятельство не должно удивлять. На самом деле модуль вектора поворота может достигать значения 2π только в том случае, если вращение происходит вокруг фиксированной во времени и пространстве оси. Доказательство этого интуитивно очевидного факта неизвестно. Однако легко доказывается, что если $|\boldsymbol{\theta}| \gg 1$, то вращение происходит вокруг фиксированной оси. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть выражение

$$\cos \eta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} = \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}}{\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\theta^4 |\dot{\boldsymbol{\theta}}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}|^2}{\theta^4 |\dot{\boldsymbol{\theta}}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}|^2}.$$

Отсюда видно, что при больших θ^2 справедливы пределы

$$\theta^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \cos \eta \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \eta \rightarrow 0.$$

Это означает, что при больших θ^2 справедливо равенство

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Практика показывает, что в случае неодносных вращений модуль вектора поворота не превышает значения π .

При вычислениях полезны формулы

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{R}^{2k+1} = (-\boldsymbol{\theta}^2)^k \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^{2k} = (-\boldsymbol{\theta}^2)^{k-1} \mathbf{R}^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тензор-интегратор $\mathbf{Z}$ обладает многими замечательными свойствами. Перечислим некоторые из них:

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{Z}^\top = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} \quad (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}). \quad (\text{C.54})$$

Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ является гиротропной функцией вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \forall \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1. \quad (\text{C.55})$$

Если $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, то

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (\text{C.56})$$

Пользуясь (C.54)–(C.56), можно вывести много других тождеств. Например,

$$\mathbf{Z}^{-\top}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}). \quad (\text{C.57})$$

При выводе многих уравнений тождества (C.54)–(C.57) чрезвычайно облегчают выкладки.

В заключение приведем вывод первой из двух формул (C.51). Вычисляя след от обеих частей левого уравнения Пуассона и учитывая (C.45), получаем

$$\text{tr } \dot{\mathbf{P}} = (\text{tr } \mathbf{P})^\cdot = (1 + 2 \cos \theta)^\cdot = -2 \dot{\theta} \sin \theta = \text{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -\frac{2 \sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Отсюда имеем

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \theta \dot{\theta} = \frac{1}{2}(\theta^2)^\cdot = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta})^\cdot = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (\text{C.58})$$

Умножая обе части левого уравнения Пуассона (C.51) скалярно на вектор поворота и учитывая равенство $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta})^\cdot - \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}.$$

Умножая обе части последнего равенства векторно на $\boldsymbol{\theta}$, получаем с учетом (C.58)

$$\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}),$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\theta^2} [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Подставляя сюда выражение (C.43) и учитывая тождество

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E},$$

получаем искомую формулу (C.51).

С.6. Потенциальные или консервативные моменты

Введем понятие консервативного момента, необходимость в котором возникает во многих задачах, но которое, видимо, до сих пор не было введено в общем случае.

Определение. Момент $\mathbf{M}$ называется *потенциальным* или *консервативным*, если существует такая скалярная функция $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$, зависящая только от вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$, что выполняется равенство

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{C.59})$$

Из этого определения немедленно следует, что

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{C.60})$$

Определение. Консервативный момент называется *позиционным*, если он зависит только от вектора поворота в данный момент времени, т. е. в (C.60) следует принять $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$.

Включение в определение консервативного момента слагаемого, зависящего от скорости, оправдывается следующими обстоятельствами. Первое: именно (C.60) следует из определения (C.59). Второе: включение члена, зависящего от скорости, не препятствует сохранению энергии. Третье: включение слагаемого, зависящего от скорости (в котором $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ следует понимать как функционал от векторов поворота и угловой скорости), оказывается необходимым при учете (частичном) инерционных свойств упругого основания.

Для практических целей важными оказываются частные случаи потенциала $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$.

Определение. Потенциал $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$ называется *трансверсально изотропным* с осью изотропии $\mathbf{k}$, если равенство

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{U}(\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{C.61})$$

выполняется для любого тензора поворота $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k})$.

Найдем общий вид трансверсально изотропного потенциала. Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемое семейство тензоров $\mathbf{Q}(\alpha(\tau)\mathbf{k})$, где τ — параметр семейства. Продифференцируем теперь (C.61) по параметру τ и учтем, что левая часть (C.61) от τ не зависит. Тогда получим

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau} = \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}' \right) = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' \equiv \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}.$$

Таким образом трансверсально изотропный потенциал должен удовлетворить условию

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \psi_1 \mathbf{k} + \psi_2 \boldsymbol{\theta},$$

где ψ_1 и ψ_2 — скалярные функции $\boldsymbol{\theta}$. Умножая последнее равенство скалярно на $d\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$dU = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \psi_1 d(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \psi_2 d(\theta^2).$$

Очевидно, что трансверсально изотропный потенциал есть функция двух аргументов

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \theta^2). \quad (\text{C.62})$$

Если $U(\boldsymbol{\theta})$ есть функция только от θ^2 , то такой потенциал называется изотропным. Согласно (C.62) имеем

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k}. \quad (\text{C.63})$$

Следовательно, согласно (C.60) позиционный консервативный момент имеет вид

$$\mathbf{M} = -2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}. \quad (\text{C.64})$$

Для изотропного потенциала в этом выражении сохраняется только первое слагаемое в правой части. Отметим очевидные тождества, справедливые для любого вектора $\mathbf{a}$,

$$(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}.$$

С учетом этих тождеств и равенства (C.64) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{M} &= -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T) \cdot \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{k}$, получим

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (\text{C.65})$$

Это равенство справедливо для любого трансверсально изотропного потенциала. Для изотропного потенциала равенство (C.65) справедливо для любого вектора $\mathbf{a}$, а не только для $\mathbf{k}$.

С.7. Метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров

Поскольку возмущенные тензоры поворота не должны выходить за пределы собственно ортогональной группы, то это налагает определенные ограничения на всю технику метода возмущений. Существует несколько способов возмущения тензоров поворота. Один из них изложен в [174]. В данном случае будет использована другая техника, основанная на том факте, что векторы поворота являются элементами линейного пространства и на их возмущения никаких ограничений не налагается.

Возмущенный тензор поворота определим равенством

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \exp \mathbf{R}_\varepsilon = \exp [\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}], \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (\text{C.66})$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется вариацией вектора поворота. Рассматривая параметр ε как независимую переменную, вводим левую $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ и правую $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$ скорости возмущения:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon. \quad (\text{C.67})$$

Возмущенные угловые скорости вычисляются по тензору $\mathbf{P}_\varepsilon$:

$$\dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (\text{C.68})$$

Выписывая условия интегрируемости (C.67) и (C.68), приходим к уравнениям структуры Картана

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\varepsilon + \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (\text{C.69})$$

Для скоростей возмущения имеем формулы, аналогичные (C.51),

$$\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}. \quad (\text{C.70})$$

Возмущенные угловые скорости находятся по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon.$$

Если $\boldsymbol{\theta}_0$ не зависит от времени (положение равновесия), то

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon. \quad (\text{C.71})$$

Пусть дана функция $f(\varepsilon, t)$. Величина

$$f^*(t) = \left. \frac{\partial f(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

называется первой вариацией функции $f(\varepsilon, t)$. Для первых вариаций тензора поворота и скоростей имеем

$$\mathbf{P}^* = \boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (\text{C.72})$$

где индексами 0 отмечены невозмущенные величины, но $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}|_{\varepsilon=0}$. Аналогичные формулы справедливы для правых величин

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_0 \times \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0 - \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad (\text{C.73})$$

где $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\zeta}|_{\varepsilon=0}$. Если возмущения накладываются на равновесные (статические) состояния, то $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 = 0$. Отметим формулы для первой вариации модуля вектора поворота

$$\boldsymbol{\theta}^* = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}_0. \quad (\text{C.74})$$

С.8. Постановка задачи о твердотельном осцилляторе

Представим себе следующую ситуацию. Пусть дан тонкий стержень, расположенный вдоль орта $\mathbf{k}$. Пусть его нижний конец закреплен от смещений в неподвижной точке $\mathbf{O}$, которую примем за начало в инерциальной системе отсчета. Пусть, наконец, рассматриваемый воображаемый стержень удерживается от поворотов упругим основанием (рис. С.3). Когда стержень направлен вертикально и не повернут вокруг своей оси, упругое основание считается недеформированным. Насадим теперь на воображаемый стержень твердое тело произвольного вида. Тогда воображаемый стержень станет некой материальной осью в теле, упруго заземленной в упругое основание. Положение тела, при котором упругое основание недеформировано, будем называть отсчетным. Тензор инерции тела в отсчетном положении, вычисленный относительно неподвижной точки $\mathbf{O}$, будем обозначать символом $\mathbf{J}$. Тензор $\mathbf{J}$ симметричен и положительно определен. Вектор вертикали $\mathbf{k}$ не обязан совпадать с главной осью $\mathbf{J}$. Ситуация такого рода возникает в динамике неуравновешенных центрифуг. Правда, в дальнейшем считается, что ротор жестко закреплен в статоре. В динамике центрифуг вместо твердого тела нужно рассматривать гиростат, что, конечно, вносит некоторые технические осложнения, но в данном случае эти осложнения совершенно излишни.

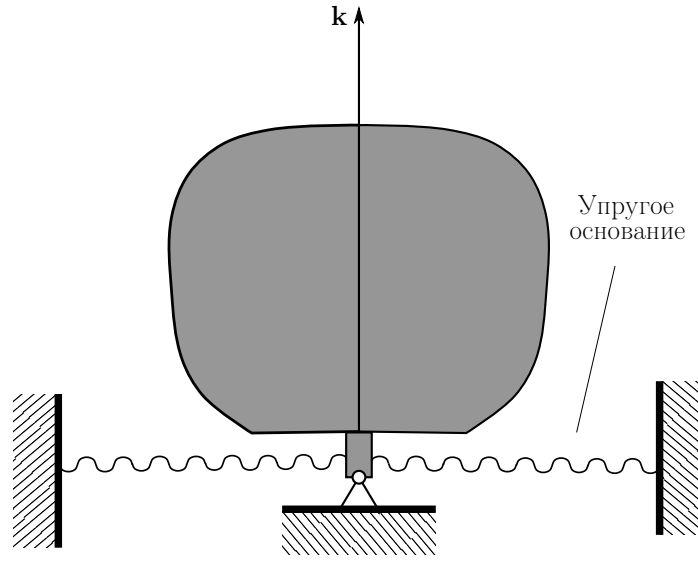


Рис. С.3. Твердое тело на упругом основании

Важное значение имеет случай трансверсально изотропного тензора инерции с осью изотропии $\mathbf{k}$. В этом случае тензор $\mathbf{J}$ имеет вид

$$\mathbf{J} = J_1(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + J_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (\text{C.75})$$

где J_1 , J_3 — экваториальный и осевой моменты инерции, вычисленные относительно осей, проходящих через неподвижную точку O .

В актуальном положении тела, т. е. в положении тела в данный момент времени, тензор инерции находится по формуле

$$\mathbf{J}^{(t)} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T(t) = J_1(\mathbf{E} - \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}') + J_3 \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \quad (\text{C.76})$$

Первый знак равенства здесь относится к тензору $\mathbf{J}$ общего вида, а второй знак равенства относится к трансверсально изотропному тензору инерции. В представлении (C.76) символом $\mathbf{P}$ обозначен тензор поворота тела. Кинетический момент определяется выражением

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = J_1 \boldsymbol{\omega} + (J_3 - J_1)(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}', \quad (\text{C.77})$$

или

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [J_1 \boldsymbol{\Omega} + (J_3 - J_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}]. \quad (\text{C.78})$$

В (C.77) используется левая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а в (C.78) — правая угловая скорость.

Упругое основание характеризуется упругим потенциалом $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда упругий момент, действующий со стороны основания на тело, определяется выражением (C.60)

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{C.79})$$

где последнее слагаемое в правой части в дальнейшем будет игнорироваться. Если потенциал $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ трансверсально изотропен, то выражение (C.79) упрощается (см. (C.63)–(C.64))

$$\mathbf{M}_e = -2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial(\theta^2)} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^\top \cdot \mathbf{k}. \quad (\text{C.80})$$

Оно еще больше упрощается для изотропного основания, у которого $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d^2 \mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a} : |\mathbf{a}| \neq 0, \quad (\text{C.81})$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}} = & 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial(\theta^2)} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial(\theta^2) \partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\theta}) + \\ & + 4 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial(\theta^2) \partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k})} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

Второй закон динамики Эйлера записывается в форме

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}]^\cdot + \mathbf{Z}^\top \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{\text{ext}}, \quad (\text{C.83})$$

где $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ — внешний момент, вычисленный относительно неподвижной точки $\mathbf{O}$. Через правую угловую скорость уравнение (C.83) записывается следующим образом:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}}, \quad (\text{C.84})$$

где использовано тождество (C.57). Внешний момент представим в виде суперпозиции потенциальной и непотенциальной части

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^\top \cdot \frac{d\Pi}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{\text{ex}}. \quad (\text{C.85})$$

Тогда уравнение (С.83) можно переписать в виде

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}]^{\cdot} + \mathbf{Z}^T \cdot \frac{d(\mathcal{U} + \Pi)}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{\text{ex}}, \quad (\text{С.86})$$

а уравнение (С.84) примет вид

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z} \cdot \frac{d(\mathcal{U} + \Pi)}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}. \quad (\text{С.87})$$

К уравнениям (С.86) или (С.87) необходимо добавить одно из двух уравнений связи

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (\text{С.88})$$

а также начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0. \quad (\text{С.89})$$

Основными неизвестными в принятой постановке задачи являются вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ или $\boldsymbol{\Omega}$.

С.9. Движение твердого тела на изотропной упругой опоре

В качестве иллюстрации рассмотрим простейшую задачу о движении твердого тела с шаровым тензором инерции на изотропной упругой опоре

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{E}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\theta^2), \quad \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = 2\mathcal{U}'(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = c(\theta^2) \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{С.90})$$

где штрих означает производную по аргументу θ^2 . Уравнения (С.84) и (С.85) принимают вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{b}\boldsymbol{\omega} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{b}\boldsymbol{\Omega} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \quad (\text{С.91})$$

В уравнения (С.91) добавлен момент трения $\mathbf{M}_f = -\mathbf{b}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{b} = \text{const}$, $\mathbf{b} > \mathbf{0}$. Разумеется, уравнения (С.91) не являются независимыми. К уравнениям (С.91) следует добавить уравнения (С.88)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (\text{С.92})$$

и начальные условия

$$t = 0 : \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}_0) \cdot \boldsymbol{\omega}_0). \quad (\text{C.93})$$

Систему (C.91)–(C.93) можно решать либо с использованием левой угловой скорости (первые уравнения системы), либо с использованием правой угловой скорости (вторые уравнения системы). Система (C.91)–(C.92) существенно нелинейна. Чтобы подчеркнуть различие в подходах к решению этой системы, рассмотрим сначала классический подход. При этом обычно работают с правыми угловыми скоростями. Кроме того, используют какую-либо систему параметров для представления тензора поворота. Воспользуемся системой углов Эйлера

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (\text{C.94})$$

где

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (\text{C.95})$$

Для нахождения вектора поворота через углы Эйлера следует воспользоваться формулами (C.47), (C.48). Тогда система (C.91)–(C.92) эквивалентна следующим трем уравнениям для углов Эйлера ψ , ϑ , φ :

$$\begin{aligned} J[\dot{\beta} - \dot{\psi}(1 - \cos \vartheta)] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta (1 + \cos \vartheta) &= 0, \\ J[\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \vartheta] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta (1 + \cos \beta) &= 0, \\ J[(\dot{\psi} \sin \vartheta) - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

Дополнительно имеем уравнение связи (C.47) для выражения θ через ϑ и β

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \vartheta \cos \beta, \quad \beta = \varphi + \psi. \quad (\text{C.97})$$

В системе (C.96) принято, что $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, т. е. трение отсутствует. Система (C.96), (C.97) очень сложна, и проанализировать ее достаточно полно не удалось.

Показательно, что при выводе (C.96) использовалось априорное представление (C.94) для тензора поворота. Оно допустимо, равно как совершенно правильной является система (C.96), (C.97). Можно было бы воспользоваться какой-либо другой системой углов, но неизменным остался бы априорный характер выбора представления для тензора поворота. Между тем, этот

выбор является чрезвычайно важным. На самом деле в каждой задаче тензор поворота должен представляться только в одной форме, если необходимо получить обозримое решение. Это единственное представление должно не угадываться, а определяться в процессе решения задачи. Именно это обстоятельство подчеркивалось в работе [31], где выбор представления для тензора поворота определялся строением интеграла энергии. Для рассматриваемой системы (С.91)–(С.92) интеграла энергии нет. Однако существуют интегралы другого типа. Покажем, как интегрируется система (С.91)–(С.92).

Из уравнений (С.91) следует, что

$$J(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' + b(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = \exp\left(-\frac{b}{J} t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0). \quad (\text{С.98})$$

Таким образом получили три интеграла. Теперь возможны два случая

$$\text{а) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{б) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

В первом случае решение элементарно, поскольку (С.98) дает

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \lambda(t) \boldsymbol{\theta}(t).$$

Подставляя это выражение в (С.91) и (С.92), получаем

$$J\ddot{\boldsymbol{\theta}} + b\dot{\boldsymbol{\theta}} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \lambda(t) \boldsymbol{\theta}(t).$$

Из второго уравнения этой системы следует, что вектор поворота неизменен по направлению. Поэтому векторные уравнения сразу переписываются в скалярной форме

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \lambda\theta, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \quad (\text{С.99})$$

Второе уравнение этой системы служит для определения функции λ , которая малоинтересна. Первое уравнение легко интегрируется в двух случаях: а) $b = 0$, $c(\theta^2) > 0$ — любая функция; б) $c(\theta^2) = c = \text{const}$ — линейно упругое основание. Качественный анализ системы (С.99) очевиден и хорошо известен.

Обратимся к случаю, когда $\boldsymbol{\omega}_0 \neq \boldsymbol{\Omega}$. Из уравнения (С.92) следует, что

$$g(\theta)(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}). \quad (\text{С.100})$$

С учетом (С.98) это равенство можно переписать в виде

$$g(\theta) \exp\left(-\frac{b}{J} t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}). \quad (\text{С.101})$$

С учетом формул (С.51) правую часть (С.101) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Тогда уравнение (С.101) примет вид

$$\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{b}{J} t\right). \quad (\text{С.102})$$

Согласно (С.102) вектор $\boldsymbol{\theta}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Следовательно, его можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0 / \theta_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (\text{С.103})$$

где $\mathbf{e}$ есть орт вектора $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Согласно (С.103)

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e}. \quad (\text{С.104})$$

Подставляя (С.104) в (С.102), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|}{2(1 - \cos \theta)} \exp\left(-\frac{b}{J} t\right) > 0.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\dot{\psi} = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \dot{\psi}_0 \exp\left(-\frac{b}{J} t\right), \quad \dot{\psi}_0 > 0. \quad (\text{С.105})$$

Получим уравнение для нахождения угла поворота θ . Для этого вычислим правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta} - (1 - \cos \theta) \dot{\psi} \mathbf{e}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (С.91) и проецируя получившееся уравнение на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор $\mathbf{e}$ и вектор $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, получаем три скалярных уравнения. Причем проекции на $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$ оказываются тождествами в силу (С.105), а проекция на $\boldsymbol{\theta}$ дает уравнение для угла поворота θ

$$J(\ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\psi}^2) + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0. \quad (\text{С.106})$$

Если трение отсутствует, т. е. $b = 0$, то уравнение (С.106) с учетом (С.105) допускает решение в квадратурах. При этом, в частности, уравнение (С.106)

показывает существование регулярной прецессии тела на упругом основании. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ постоянна и определяется выражением

$$\dot{\psi}^2 = \frac{c(\theta^2) \theta}{J \sin \theta}, \quad \theta = \text{const.} \quad (\text{C.107})$$

Регулярная прецессия относится к случаю, когда ось поворота и ось вращения тела ортогональны между собой

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0.$$

При наличии трения уравнение (C.106) допускает ясное качественное исследование, но не интегрируется в квадратурах даже для линейного упругого основания, когда $c(\theta^2) = c = \text{const.}$

Согласно (C.103) для тензора поворота имеем представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{e}). \quad (\text{C.108})$$

Очевидно, что это выражение отличается от (C.94), если $\mathbf{e} \neq \mathbf{k}$. При этом углы θ и ψ также являются углами Эйлера, причем угол собственного вращения φ равен $\varphi = -\psi$. Однако выбор осей поворота в (C.108), осуществленный в процессе решения задачи, оказался отличным от выбора осей в (C.94). При принятии (C.94) система (C.96) в общем случае, видимо, не интегрируется. Однако, если в (C.94) принять

$$\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\theta}_0}{|\boldsymbol{\theta}_0|}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0}{|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|}, \quad \varphi = -\psi, \quad \beta = 0, \quad \vartheta = \theta,$$

то система (C.96) сводится к уравнениям (C.105) и (C.106) при $\mathbf{b} = 0$ и интегрируется в квадратурах.

Вывод формул¹

D.1. Формулы с деформационным градиентом

D.1.1. Структуры Картана

Докажем тождество

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (\text{D.1})$$

По определению (3.9)

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q^s} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q^m} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{P}.$$

Вычислим вторые производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q^s \partial q^m} &= \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_s \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q^m}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q^m \partial q^s} &= \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_m \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q^s}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} \right) \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_s \times (\mathbf{F}_m \times \mathbf{P}) - \mathbf{F}_m \times (\mathbf{F}_s \times \mathbf{P}) = \mathbf{0},$$

или

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} \right) \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_m \otimes (\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{F}_s \otimes (\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (\text{D.2})$$

¹ Приложение написано Е. Н. Вильчевской. (*Примеч. ред.*)

Домножив (D.2) справа на $\mathbf{P}^\top$, получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} \right) \times \mathbf{E} + \mathbf{F}_m \otimes \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_s \otimes \mathbf{F}_m = \mathbf{0}. \quad (\text{D.3})$$

Вычислим векторный инвариант (D.3)

$$-2 \left(\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} \right) + \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_s \times \mathbf{F}_m = \mathbf{0},$$

откуда следует соотношение (D.1).

D.1.2. Связь между градиентом вектора угловой скорости и материальной производной от меры деформации

Докажем сначала вспомогательное тождество

$$\nabla \mathbf{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \mathbf{\Omega}. \quad (\text{D.4})$$

Продифференцируем соотношение $\nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}$ по времени

$$\nabla \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (\text{D.5})$$

С другой стороны,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \frac{d\mathbf{P}}{dt} = (\nabla \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{P} + \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q^s}. \quad (\text{D.6})$$

Приравняв (D.6) и (D.5), найдем

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{P} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{P} - \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{F}_s \times \mathbf{P}) + \mathbf{F} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{P}) = \\ &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{g}^s \otimes (\mathbf{F}_s \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{P}) - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{F}_s \times \mathbf{P})) = \\ &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{g}^s \otimes (\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_s \otimes \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{P} = \\ &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{g}^s \otimes (\mathbf{F}_s \times \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{P} = \left(\frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \mathbf{\Omega} \right) \times \mathbf{P}, \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (D.4).

Перейдем к доказательству тождества

$$\nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla V \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{D.7})$$

Исключим из соотношения (D.4) вспомогательный вектор $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$

$$\nabla \boldsymbol{\omega} - \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{F} \times (\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}).$$

Следовательно,

$$\nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{F} + (\nabla \mathbf{F}^\top) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{F} \times (\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \times (\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}) &= \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s \times (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}^k) \otimes \mathbf{F}_k = \mathbf{g}^s \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial q^s} - \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^k} \right) (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{V}) = \\ &= \mathbf{g}^s \otimes \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial q^s} \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^k} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{V} = (\nabla \mathbf{F}^\top) \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{F} \nabla) \cdot \mathbf{V}, \end{aligned}$$

то

$$\nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{F} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{F}.$$

Тождество (D.7) доказано.

D.2. Уравнение баланса энергии

D.2.1. Преобразование уравнения баланса энергии

Выведем формулу

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} + \mathbf{T}^\top \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^\top \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \eta q + \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (\text{D.8})$$

Рассмотрим уравнение баланса энергии

$$\begin{aligned} &\rho \left(\frac{d\mathcal{K}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) + \eta \left(\frac{d\mathcal{U}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{U} \right) + \mathcal{K} \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) + \\ &+ \mathcal{U} \left(\frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} + (\nabla \cdot \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ &+ \mathbf{T}^\top \cdot \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{M}^\top \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Используя определение материальной производной, уравнение баланса массы (3.29) и уравнение баланса частиц (3.20), перепишем уравнение баланса энергии в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta t} + \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} + \mathcal{U} \chi &= (\rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} + (\rho \mathbf{L} + \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times) \cdot \boldsymbol{\omega} - \\ &- \mathbf{T}_\times \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q + \mathbf{T}^\top \cdot \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{M}^\top \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Поскольку из уравнения (3.31) следует, что

$$\chi = -\eta \frac{\delta z}{\delta t}, \quad z \equiv \ln \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t) \eta_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, t)} \right],$$

то, учитывая первый (3.43) и второй (3.47) законы динамики, получим

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} - \rho \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta t} + \rho \frac{\delta \mathcal{K}_1}{\delta t} \cdot \mathbf{V} + \rho \frac{\delta \mathcal{K}_2}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ & + \mathbf{T}^\top \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^\top \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \eta q + \nabla \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Материальная производная кинетической энергии

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta t} = & \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = \\ = & \mathbf{V} \cdot \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\delta(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})}{\delta t} + \frac{\delta(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{V} \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ & + \frac{\delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C})}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right) \cdot \mathbf{V} + \\ & + \left(\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}) \right) \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{V} \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = & \frac{\delta(\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^\top)}{\delta t} = \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} \right)^\top = \\ = & (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

то

$$\mathbf{V} \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Аналогично

$$\frac{\delta \mathbf{C}}{\delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C} - \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta t} = \frac{\delta \mathcal{K}_1}{\delta t} \cdot \mathbf{V} + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta t} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathcal{K}_1}{\delta t} \cdot \mathbf{V} + \frac{\delta \mathcal{K}_2}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{D.10})$$

Подставляя (D.10) в (D.9), получаем формулу (D.8).

D.2.2. Доказательство вспомогательного тождества

Докажем тождество

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (\text{D.11})$$

Подставим в правую часть равенства (D.11) уравнение Пуассона для неподвижной точки наблюдения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^\top \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{P}^\top \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{2} (\mathbf{P}^\top \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E})) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{P}^\top \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}) = -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} (\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{a} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{E}) = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a} - 3\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Тождество (D.11) доказано.

D.2.3. Преобразование выражения, содержащего девиатор тензора напряжений

Докажем тождество

$$\boldsymbol{\tau}_e^\top \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^\top) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta \mathbf{t}} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_\times \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (\text{D.12})$$

С учетом соотношения (3.18) имеем

$$\boldsymbol{\tau}_e^\top \cdot \nabla \mathbf{V} = -\boldsymbol{\tau}_e^\top \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta \mathbf{t}} \cdot \mathbf{g}^{-1} \right) = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^\top) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (\text{D.13})$$

Докажем второе равенство на примере диад

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \cdot \mathbf{A}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{d} = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) &= \text{tr} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega})) = \text{tr} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega}) = \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times, \end{aligned}$$

то, учитывая тождество (D.11),

$$\boldsymbol{\tau}_e^\top \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\tau}_e^\top)_\times = -\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}_\times = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_\times \times \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{t}}, \quad (\text{D.14})$$

где вектор $\boldsymbol{\tau}_\times$ есть векторный инвариант тензора $\boldsymbol{\tau}_e$.

Соотношения (D.13) и (D.14) доказывают формулу (D.12).

D.2.4. Преобразование выражения, содержащего тензор моментных напряжений

Докажем тождество

$$\mathbf{M}_e^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F})_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (\text{D.15})$$

С учетом равенства (3.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}_e^T \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla V \cdot \mathbf{F} \right) = \\ &= \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \text{tr} (\mathbf{M}_e^T \cdot (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega})) - \mathbf{M}_e^T \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Так как справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \times \boldsymbol{\omega})) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{d} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) = \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \times \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})_{\times}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d},$$

то, учитывая тождество (D.11),

$$\text{tr} (\mathbf{M}_e^T \cdot (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega})) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F})_{\times} = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F})_{\times} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}, \quad (\text{D.17})$$

$$\mathbf{M}_e^T \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \right) = (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (\text{D.18})$$

Подставив (D.17), (D.18) в (D.16), получим (D.15).

D.2.5. Ограничение на материальную производную от тензора поворота

Докажем, что для любого симметричного тензора $\mathbf{A}$ должно выполняться соотношение

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0. \quad (\text{D.19})$$

Вычислим свертку модифицированного уравнения Пуассона

$$\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E}$$

с симметричным тензором $\mathbf{A}$. Поскольку $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E}$ — антисимметричный тензор, то

$$(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{A} = \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^\top = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t}.$$

Таким образом, доказано, что для любого симметричного тензора $\mathbf{A}$ должно выполняться соотношение (D.19).

D.2.6. Общий интеграл характеристической системы

Рассмотрим характеристическую систему

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{G}_*. \quad (\text{D.20})$$

Покажем, что тензор $\mathbf{G} = \mathbf{I}_3^{-1/3}(\mathbf{G}_*) \mathbf{G}_*$ является общим интегралом системы (D.20), т. е. этот тензор удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = \mathbf{0}.$$

Вычислим производную

$$\frac{d(\mathbf{I}_3^{-1/3} \mathbf{G}_*)}{ds} = \frac{d\mathbf{G}_*}{ds} \mathbf{I}_3^{-1/3} + \mathbf{G}_* \frac{d(\mathbf{I}_3^{-1/3})}{ds} = \mathbf{G}_* \left(\mathbf{I}_3^{-1/3} - \frac{\mathbf{I}_3^{-4/3}}{3} \frac{d\mathbf{I}_3}{ds} \right). \quad (\text{D.21})$$

Согласно (B.79) и (B.82) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{G}_*} = \mathbf{I}_3 \mathbf{G}_*^{-\top}, \quad \frac{d\mathbf{I}_3}{ds} = \left(\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{G}_*} \right)^\top \cdot \frac{d\mathbf{G}_*}{ds}.$$

Следовательно, в силу (D.20)

$$\frac{d\mathbf{I}_3}{ds} = \mathbf{I}_3 \mathbf{G}_*^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{I}_3 \mathbf{G}_*^{-1} \cdot \mathbf{G}_* = \mathbf{I}_3 \operatorname{tr} \mathbf{E} = 3\mathbf{I}_3. \quad (\text{D.22})$$

Подставив (D.22) в (D.21), получим

$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = \frac{d(\mathbf{I}_3^{-1/3} \mathbf{G}_*)}{ds} = \mathbf{0}.$$

D.3. Определяющие соотношения

D.3.1. Выражение для девиатора тензора напряжений

Получим формулу для девиатора тензора напряжений

$$\boldsymbol{\tau}_e = \frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^\top. \quad (\text{D.23})$$

Соотношение Коши–Грина для девиатора упругой части тензора напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}_e = -\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\top = -\left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\top, \quad \mathbf{G} = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g}. \quad (\text{D.24})$$

Используя (B.83) и (B.86), вычислим производную $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{g}$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g} \otimes \frac{\partial (I_3^{-2/3})}{\partial \mathbf{g}} + I_3^{-2/3}(\mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{g}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m.$$

Согласно (B.79)

$$\frac{\partial (I_3^{-2/3})}{\partial \mathbf{g}} = -\frac{2}{3} I_3^{-5/3} I_3 \mathbf{g}^{-\top} = -\frac{2}{3} I_3^{-2/3} \mathbf{g}^{-\top},$$

тогда

$$\left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g}) \frac{\partial (I_3^{-2/3})}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\top = -\frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E}. \quad (\text{D.25})$$

Для второго слагаемого в производной $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{g}}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \cdot (\mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{g}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^\top = \\ & = \left(\mathbf{e}_m \cdot \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \mathbf{e}_m \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^\top = \\ & = \mathbf{e}_m \cdot \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \mathbf{g}^\top \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^\top + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^\top = \\ & = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^\top + \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top \cdot \mathbf{g}^\top = -2 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^\top. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

В данном случае учтено, что производная по симметричному тензору — симметричный тензор.

Подставив (D.25) и (D.26) в (D.24), получим формулу (D.23).

D.3.2. Выражение для девиатора тензора напряжений в случае изотропного материала

Получим формулу

$$\boldsymbol{\tau}_e = \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} + 2 I_2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - 2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} - 4 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2. \quad (\text{D.27})$$

Воспользуемся представлением для девиатора тензора напряжений (D.23). Поскольку в рассматриваемом случае внутренняя энергия зависит только от инвариантов тензора $\mathbf{G}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} &= \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{G}}, \\ I_1(\mathbf{G}) &\equiv \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{G}, \quad I_2(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Согласно (B.79) и (B.76)

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{G}} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{G}} = 2 \mathbf{G}^\top = 2 \mathbf{G}.$$

Таким образом, учитывая, что $\mathbf{G} = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g}^\top \cdot \mathbf{g}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e &= \frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{E} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} + 2 \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \\ &- 2 I_3^{-2/3} \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}^\top \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} + 2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{g}^\top \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_2} \right). \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$\boldsymbol{\Lambda} = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^\top.$$

и собрав слагаемые при $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\boldsymbol{\Lambda}^2$, получим выражение (D.27).

Приведенное уравнение баланса энергии — альтернативный подход¹

Е.1. О различных способах определения энтропии и химического потенциала

В третьей и пятой главах книги даны два определения химического потенциала, существенно отличающиеся друг от друга (см. разд. 3.3 и 5.8, соответственно). Оба эти определения отличаются от определения химического потенциала, принятого в литературе. Это порождает целый ряд вопросов. Первый и главный вопрос: почему химический потенциал можно вводить разными способами? За этим вопросом логично следует и второй вопрос: можно ли энтропию вводить различными способами? Как отмечалось в третьей главе, нельзя сначала определить внутреннюю энергию, а затем химический потенциал и энтропию; все эти понятия могут быть введены только одновременно. Это означает, в частности, что если мы иначе введем понятия энтропии и химического потенциала, то изменится и смысловое содержание внутренней энергии. Поэтому первые два вопроса порождают третий вопрос: допустимы ли различные способы определения внутренней энергии? Отвечая на поставленные вопросы, прежде всего следует принять во внимание тот факт, что энтропия и химический потенциал, так же как и внутренняя энергия, являются неизмеримыми величинами. Поэтому нет никаких физических экспериментов, которые помогли бы ответить на вопрос, что такое внутренняя энергия, энтропия и химический потенциал. Следовательно, можно утверждать, что перечисленные величины допустимо вводить разными способами. Но, если согласиться с последним утверждением, возникает следующий естественный

¹ Приложение написано Е. Н. Вильчевской и Е. А. Ивановой; при написании раздела Е.3 использовался материал неопубликованной работы П. А. Жилина. (*Примеч. ред.*)

вопрос: какой способ определения этих величин предпочтительнее? Ответ, что это не имеет значения, вряд ли кого-нибудь устроит. По нашему мнению, конструктивным решением проблемы является анализ целесообразности использования того или иного определения энтропии и химического потенциала (а следовательно, и внутренней энергии) при построении конкретной модели среды. Этот анализ должен быть основан на сравнении тех следствий, к которым приводят различные способы определения обсуждаемых величин. Далее мы проводим такой анализ в отношении химического потенциала на примере среды со структурными изменениями.

Е.2. Приведенное уравнение баланса энергии

Рассмотрим уравнение баланса энергии, полученное в третьей главе (см. подразд. 3.2.6),

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} + \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q}. \quad (\text{E.1})$$

Здесь $\mathcal{U}$ есть плотность внутренней энергии; $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ — тензоры силовых и моментных напряжений; $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega}$ — векторы трансляционной и угловой скорости; $\mathbf{q}$ — подвод энергии в единицу времени; $\mathbf{h}$ — вектор потока энергии,

$$z \equiv \ln \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t) \eta_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, t)} \right],$$

где η — плотность распределения частиц; ρ — плотность массы.

Для тензоров силовых и моментных напряжений используем представления, принятые в третьей главе,

$$\mathbf{T} = -(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_f) \mathbf{E} + \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_f, \quad \text{tr } \boldsymbol{\tau}_e = \text{tr } \boldsymbol{\tau}_f = 0, \quad (\text{E.2})$$

где индексом “e” отмечена упругая (не зависящая от скоростей) составляющая напряжений, а индексом “f” обозначена диссипативная часть напряжений. Воспользовавшись (E.2), перепишем уравнение (E.1) в форме

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} - \mathbf{p}_e \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} - \mathbf{p}_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Из уравнения баланса энергии, записанного в форме (E.3), не видно, от каких аргументов зависит внутренняя энергия. Поэтому данное уравнение нуждается в дальнейшем преобразовании к специальному виду, называемому

приведенным уравнением баланса энергии. Как отмечалось в третьей главе, переход от уравнения баланса энергии в форме (Е.3) к приведенному уравнению баланса энергии не является формальным преобразованием, но существенно опирается на интуитивные представления. Подход, разработанный в третьей главе, заключается в следующем. В качестве измеряемых параметров выбирается плотность распределения частиц в пространстве η и температура ϑ . В качестве сопряженных переменных выбирается химический потенциал ψ и энтропия $\mathcal{H}$. Затем принимается равенство (3.58), которое имеет вид

$$\eta\vartheta\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \eta\frac{\delta\psi}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}.$$

С учетом последнего равенства уравнение баланса энергии (Е.3) принимает вид

$$\eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} = \eta\mathcal{U}\frac{\delta z}{\delta t} - p_e \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \eta\vartheta\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \eta\frac{\delta\psi}{\delta t}.$$

Такая форма уравнения баланса энергии называется *приведенным уравнением баланса энергии*.

Заметим, что вместо равенства (3.58) можно принять равенство

$$\eta\vartheta\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \tilde{\psi}\frac{\delta\eta}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \quad (\text{Е.4})$$

или равенство

$$\eta\vartheta\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \eta\bar{\psi}\frac{\delta z}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{Е.5})$$

Величины ψ , $\tilde{\psi}$ и $\bar{\psi}$ имеют различный физический смысл. Однако все они являются величинами, сопряженными плотности частиц η (или переменной z , непосредственно связанной с η), и поэтому могут трактоваться как химический потенциал. Величина ψ введена в рассмотрение в третьей главе. Величина $\tilde{\psi}$ соответствует химическому потенциалу, который обычно рассматривается в литературе. Величина $\bar{\psi}$ соответствует химическому потенциалу, который был введен в рассмотрение в пятой главе данной книги.

Е.3. Об одной трактовке химического потенциала

Введенное в третьей главе равенство (3.58), а также аналогичные ему равенства (Е.4) и (Е.5) представляют собой обобщенные уравнения теплопроводности и диффузии. При этом под диффузией понимается диффузия

безмассовых частиц. Если диффундирующие частицы обладают массой, то сплошную среду следует рассматривать как двухкомпонентную; при описании такой среды необходимо формулировать уравнения динамики как для основной компоненты, так и для диффундирующей. В случае, когда вторая компонента представлена безмассовыми частицами, среду можно рассматривать как однокомпонентную. При этом для описания процесса диффузии вводятся две дополнительные скалярные характеристики — плотность распределения частиц и химический потенциал.

Предположим, что изменение плотности числа частиц связано не с диффузией, а со структурными изменениями, например, с образованием трещин и пор в материале или с процессом консолидации частиц в сыпучей среде. В этом случае второй компоненты в виде безмассовых частиц нет, однако плотность числа частиц и массовая плотность являются независимыми характеристиками среды. Возникает вопрос: есть ли необходимость в этом случае вводить химический потенциал как независимую характеристику состояния среды, или можно этого не делать? Чтобы ответить на поставленный вопрос, проанализируем, к каким следствиям ведет отказ от введения химического потенциала как некоторой дополнительной переменной.

Итак, откажемся от равенств (3.58), (Е.4), (Е.5), содержащих химический потенциал, и примем равенство

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{Е.6})$$

Принимая равенство (Е.6), мы, тем не менее, считаем плотность массы и плотность частиц независимыми величинами. Как показано в третьей главе (см. подразд. 3.2.2), эти величины удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\delta \eta}{\delta t} + \eta \nabla \cdot \mathbf{V} = \chi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta t} = -\frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}, \quad (\text{Е.7})$$

где $\chi(\mathbf{x}, t)$ есть скорость производства частиц в данной точке.

Прежде чем переходить к обсуждению тех следствий, к которым приводит принятие равенства (Е.6), приведем цитату из неопубликованной работы П. А. Жилина, имеющую непосредственное отношение к этому равенству.

“Подобное введение температуры и энтропии может показаться слишком примитивным. Но оно всегда возможно, хотя и лишает энтропию налета романтики и кажущейся фундаментальности. В частности, для введения энтропии равенством (Е.6) не требуется введения понятия равновесного процесса. В этой связи подчеркнем, что принятое определение энтропии, как нетрудно

убедиться, полностью решает все задачи, которые возлагаются на энтропию при ее традиционном введении. Значение нового определения энтропии, по нашему мнению, заключается в ясном осознании ее смысла, что играет важную роль при написании определяющего уравнения для внутренней энергии, поскольку позволяет в полной мере использовать интуитивные представления. Определение энтропии как логарифма вероятности чего-то, не имеющего прямого отношения к рассматриваемым проблемам (в сплошной среде не рассматриваются ни атомы, ни отдельные частицы), напротив, затрудняет использование интуитивных представлений о характере рассматриваемых процессов. По крайней мере, так кажется автору данной работы. Об этом же говорит и огромное количество спекулятивных рассуждений, связанных с энтропией, которые можно встретить в литературе. Разумеется, все сказанное ни в коей мере не умаляет значения, например, кинетической теории газов, где также можно использовать определение (Е.6), но в дополнение к нему можно получить дополнительные результаты и их интерпретации”.

С учетом (Е.6) уравнение баланса энергии (Е.3) принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} - p_e \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}. \quad (\text{Е.8})$$

Проведя преобразования, обсуждавшиеся в третьей главе, приведем уравнение (Е.8) к виду

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} - p_e \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\delta \zeta}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \\ & + \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \end{aligned} \quad (\text{Е.9})$$

где $\mathbf{P}$ — тензор поворота; $\mathbf{F}$ и $\mathbf{g}$ — меры деформации, определенные уравнениями (3.9) и (3.17), соответственно; $\zeta \equiv \rho_0/\rho$.

Из уравнения (Е.9) видим, что внутренняя энергия есть функция следующих независимых аргументов

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(z, \zeta, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}).$$

Заметим, что роль химического потенциала здесь играет сама плотность внутренней энергии. Покажем, что переменную z можно исключить из числа аргументов внутренней энергии. Точнее говоря, зависимость от этой переменной можно учесть в явном виде. Действительно, из уравнения (Е.9) следует

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_*(\zeta, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) \frac{\rho_0}{\eta_0} \exp z \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \frac{\rho}{\eta} \mathcal{U}_*. \quad (\text{Е.10})$$

Подставляя (Е.10) в равенство (Е.9), получаем окончательную форму приведенного уравнения баланса энергии

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta \mathcal{U}_*}{\delta t} = & -\frac{p_e}{\zeta} \frac{\delta \zeta}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \\ & + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \end{aligned} \quad (\text{Е.11})$$

Заметим, что при выводе уравнения баланса энергии (Е.9) использовалась аксиома аддитивности внутренней энергии по частицам. Переход от уравнения (Е.9) к уравнению (Е.11) возможен только в том случае, когда в системе нет безмассовых частиц. При этом не имеет значения, связаны плотность массы и плотность частиц соотношением $\rho = m_0 \eta$ или они являются независимыми характеристиками состояния среды.

Из приведенного уравнения баланса энергии (Е.11) немедленно вытекают соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} p_e = & -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}_*}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\zeta \eta} \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}_*}{\partial \mathcal{H}}, \\ \zeta \boldsymbol{\tau}_e = & -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \zeta \mathbf{M}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (\text{Е.12})$$

а также ограничения, которым должна удовлетворять плотность внутренней энергии,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot \mathbf{g} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \cdot \mathbf{F} = 0, \\ & \left(\frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{Е.13})$$

где $\mathbf{B}$ — произвольный антисимметричный тензор. Подробнее о том, как получаются ограничения на внутреннюю энергию, см. в разделе 3.3.

Обратим внимание на то, что функция $\rho_0 \mathcal{U}_*$ не зависит от $\mathbf{z}$. Это означает, что от плотности частиц зависит только определяющее уравнение для температуры. Уравнение теплопроводности (Е.6) зависит от плотности частиц только за счет слагаемого $\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}$, а химический потенциал, роль которого играет плотность внутренней энергии $\mathcal{U}$, вообще не попадает ни в какие уравнения.

Как отмечалось ранее, при выводе уравнения баланса энергии (Е.9) использовалась аксиома аддитивности внутренней энергии по частицам. По-

скольку температура и энтропия являются энергетическими характеристиками, то предполагая аддитивность внутренней энергии по частицам, логично предположить и аддитивность энтропии по частицам. Именно это предположение приводит к тому, что слагаемое, содержащее температуру и энтропию, входит в уравнение (Е.9) с множителем η . Если, следуя общепринятым идеям, принять аксиому аддитивности внутренней энергии по массе, то логично будет предположить, что энтропия — тоже аддитивная функция массы. Именно так и делается в пятой главе² при введении в рассмотрение температуры и энтропии (см. разд. 5.7).

Итак, вместо равенства (Е.6) примем равенство

$$\rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q_* - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{Е.14})$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (Е.11) примет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta \mathcal{U}_*}{\delta t} = & -\frac{p_e}{\zeta} \frac{\delta \zeta}{\delta t} + \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \\ & + \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \end{aligned} \quad (\text{Е.15})$$

При этом все соотношения Коши–Грина (Е.12), кроме соотношения, связывающего температуру и энтропию, остаются без изменения; последнее приобретает вид

$$\vartheta = \frac{\partial \mathcal{U}_*}{\partial \mathcal{H}_*}.$$

В результате получается, что уравнение теплопроводности (Е.14) вообще не зависит от плотности частиц. Таким образом, при данной постановке задачи влияние механических и тепловых процессов на изменение плотности частиц может быть учтено только посредством задания функции χ (источникового члена в уравнении баланса частиц). Обратное влияние в данной постановке задачи не учитывается.

Е.4. Производство тепла, вызванное структурными изменениями в материале

Рассмотрим уравнение баланса энергии (Е.3). Преобразуем слагаемое $\eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t}$ в правой части этого уравнения, приняв во внимание (Е.7). В резуль-

² Безмассовые частицы в пятой главе не рассматриваются, поэтому нет никакого противоречия с третьей главой.

тате уравнение (Е.3) примет вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & -p_e \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_e^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - \chi \mathcal{U} - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{Е.16})$$

Очевидно, что слагаемое $\chi \mathcal{U}$ представляет собой подвод (отвод) энергии за единицу времени, вызванный структурными изменениями в материале, связанными с изменением плотности частиц.

Введем в рассмотрение температуру и энтропию, приняв равенство

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q - \chi \mathcal{U} - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{Е.17})$$

Очевидно, что (Е.17) отличается от принятого ранее равенства (Е.6) только наличием слагаемого $-\chi \mathcal{U}$. Посмотрим, к каким следствиям приводит данное изменение в определении термодинамических величин.

С учетом (Е.17) приведенное уравнение баланса энергии (Е.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & -\frac{p_e}{\zeta} \frac{\delta \zeta}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \\ & + \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}. \end{aligned} \quad (\text{Е.18})$$

Согласно уравнению (Е.18) внутренняя энергия является функцией следующих независимых аргументов

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\zeta, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}).$$

Из (Е.18) вытекают соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} p_e = & -\eta \zeta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \\ \boldsymbol{\tau}_e = & -\eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T - \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{M}_e = \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (\text{Е.19})$$

а также ограничения, которым должна удовлетворять плотность внутренней энергии $\mathcal{U}$, в точности совпадающие с полученными ранее ограничениями (Е.13) для плотности внутренней энергии $\mathcal{U}_*$.

Заметим, что при таком подходе внутренняя энергия уже не играет роль химического потенциала в том смысле, который приписывался ему в разделе Е.3. Вместе с тем, в уравнении теплопроводности (Е.17) присутствует слагаемое, связанное с изменением плотности частиц, и это слагаемое зависит от внутренней энергии.

Е.5. Сравнение различных подходов

Проведенное исследование показало, что в случае, когда в системе нет безмассовых частиц, но тем не менее плотность числа частиц и плотность массы являются независимыми величинами, можно не вводить в рассмотрение химический потенциал как некоторую дополнительную характеристику состояния среды. При этом, разумеется, нет никаких оснований категорично утверждать, что в подобных ситуациях химический потенциал как дополнительную переменную вводить не нужно. Выбор того или иного подхода должен базироваться на анализе особенностей конкретной задачи и тех возможностей, которые содержат в себе различные подходы.

Проведем сравнение подхода, основанного на уравнениях (3.58), (Е.4), (Е.5), вводящих в рассмотрение химический потенциал как независимую характеристику среды, с подходами, основанными на уравнениях (Е.6) и (Е.17).

Поскольку уравнения (3.58), (Е.4), (Е.5) являются однотипными, рассмотрим, например, уравнение (Е.4). Согласно методу, разработанному в третьей главе (см. разд. 3.5), это уравнение следует переписать в виде двух равенств

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} + Q = \nabla \cdot \mathbf{h}_1 + \eta \mathbf{q}_1 - p_1 \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{Е.20})$$

$$\tilde{\psi} \frac{\delta \eta}{\delta t} - Q = \nabla \cdot \mathbf{h}_2 + \eta \mathbf{q}_2 - p_2 \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (\text{Е.21})$$

В этих уравнениях введено дополнительное слагаемое Q , которое описывает скорость обмена энергиями в процессах теплопроводности и диффузии, и, кроме того, принято $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$; $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$; $p_f = p_1 + p_2$. Для величин $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{q}_i$, p_i ($i = 1, 2$) и Q необходимо сформулировать определяющие уравнения. При этом следует учитывать следующие нюансы.

Если заданы выражение для внутренней энергии и источниковый член в уравнении баланса частиц (Е.7), то уже сформулированы два уравнения для величин η и $\tilde{\psi}$, а именно уравнение баланса частиц и соотношение Коши–Грина, связывающее плотность частиц и химический потенциал. Следовательно, слагаемое $\tilde{\psi} \frac{\delta \eta}{\delta t}$ в уравнении диффузии уже определено, а это означает, что определяющие уравнения для $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{q}_2$, p_2 и Q не могут выбираться произвольно, а должны удовлетворять некоторому ограничению.

Если определяющие уравнения для $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{q}_2$, p_2 и Q и выражение для внутренней энергии заданы произвольно, то величины η и $\tilde{\psi}$, фактически, определяются уравнением диффузии и соответствующим соотношением Коши–Грина. В этом случае уравнение баланса частиц (Е.7) служит для определения источникового члена χ .

Возможен третий вариант: произвольно заданы определяющие уравнения для $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{p}_2$ и Q и выражение для источникового члена χ в уравнении баланса частиц. В этом случае ограничение накладывается на выражение для внутренней энергии.

Выбор функций, которые следует задавать, является проблемой, решение которой не очевидно. Если экспериментальных данных достаточно для того, чтобы сформулировать определяющие уравнения для $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{p}_2$ и Q , то подход, основанный на уравнениях (3.58), (Е.4), (Е.5), видимо, является предпочтительным. Если экспериментальные данные отсутствуют, то следует выбрать подход, не требующий задания большого количества определяющих уравнений. В этом случае представляют интерес два подхода, изложенные в данном Приложении, поскольку они требуют задания только функции χ и не накладывают никаких ограничений на выражение для внутренней энергии. Постановка задачи оказывается проще. Но при этом, разумеется, ряд задач исключается из рассмотрения.

Метод Жилина и метод Трусделла — сравнительный анализ¹

Введение

В механике сплошных сред существует несколько методов получения определяющих уравнений. В данной книге используются и развиваются два из них — метод Трусделла и метод Жилина. Далее мы проведем сравнительный анализ этих двух методов.

Метод Трусделла основан на совместном использовании первого и второго законов термодинамики. Суть этого метода заключается в следующем. Вторым закон термодинамики записывается в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. С помощью уравнения баланса энергии из неравенства Клаузиуса–Дюгема исключается часть тепловых слагаемых, а именно скорость подвода тепла непосредственно в объем среды и дивергенция вектора теплового потока. В результате получается так называемое приведенное неравенство диссипации, которое должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Так как в приведенное неравенство диссипации не входят ни внешние механические воздействия, ни подвод тепла от внешнего источника, это неравенство налагает ограничения на определяющие уравнения среды.

В случае упругой среды условие выполнения приведенного неравенства диссипации позволяет получить соотношения Коши–Грина для тензоров силовых и моментных напряжений и температуры, а также неравенство, налагающее ограничение на выбор определяющего уравнения для вектора теплового потока. Далее, после подстановки в уравнение баланса энергии соотношений Коши–Грина и проведения ряда формальных преобразований, получается уравнение теплопроводности, зависящее от температуры и энтропии,

¹ Приложение написано Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

дивергенции вектора теплового потока и слагаемых, характеризующих скорость подвода тепла непосредственно в объем среды. Уравнение теплопроводности замыкает систему уравнений связанной задачи термоупругости.

Если среда проявляет неупругие свойства, приведенное неравенство диссипации не позволяет формализовать процесс получения определяющих уравнений, а только дает возможность исключить из рассмотрения те определяющие уравнения, которые противоречат второму закону термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. В этом случае для получения определяющих уравнений приходится привлекать другие методы, например, метод реологических моделей или метод теории сред с затухающей памятью. При этом вопрос о формулировке уравнения теплопроводности в том виде, в котором оно получается в задаче термоупругости, остается открытым.

Метод Жилина основан на использовании уравнения баланса энергии и второго закона термодинамики в форме, отличной от неравенства Клаузиуса–Дюгема. Основная идея метода заключается в преобразовании уравнения баланса энергии к специальной форме, называемой приведенным уравнением баланса энергии. В ходе этого преобразования напряжения представляются в виде суммы упругой и диссипативной составляющих, вводятся в рассмотрение температура и энтропия и уравнение баланса энергии разделяется на два уравнения. Одно из этих уравнений — это приведенное уравнение баланса энергии, которое кроме внутренней энергии содержит упругие составляющие тензоров силовых и моментных напряжений, а также температуру и энтропию. Второе — это уравнение теплопроводности, которое содержит температуру и энтропию, диссипативные составляющие тензоров напряжений, дивергенцию вектора теплового потока и слагаемые, характеризующие скорость подвода тепла непосредственно в объем среды.

В отличие от приведенного неравенства диссипации, которое позволяет получить соотношения Коши–Грина только в случае упругой среды, приведенное уравнение баланса энергии в методе Жилина дает возможность получить соотношения Коши–Грина без предположения о том, что среда является упругой. Разумеется, речь идет о соотношениях Коши–Грина для упругих составляющих тензоров напряжений и температуры. Подчеркнем, что в методе Жилина соотношения Коши–Грина получаются без использования второго закона термодинамики. Второй закон термодинамики используется только при написании определяющих уравнений для диссипативных составляющих тензоров напряжений и вектора теплового потока.

Формулировка Жилина второго закона термодинамики отличается от неравенства Клаузиуса–Дюгема и представляет собой совокупность двух

неравенств. Одно этих неравенств можно интерпретировать как утверждение о том, что диссипативные силы не могут совершать положительной работы. Это неравенство налагает ограничение на определяющие уравнения для диссипативных составляющих тензоров напряжений. Второе неравенство можно интерпретировать как утверждение о том, что тепло всегда течет от горячего к холодному. Это неравенство налагает ограничение на определяющее уравнение для вектора теплового потока. Формулировка Жилина второго закона термодинамики является более ограничительной, чем неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое получается из формулировки Жилина следственным переходом.

Свой метод П. А. Жилин разработал в 2001–2005 гг. К этому времени относятся работы, посвященные описанию неупругого поведения сплошных сред, которые положены в основу третьей и пятой глав данной книги. В шестой главе рассмотрен континуум многоспиновых частиц, моделирующий электромагнитное поле, и показано, что принятие ряда упрощающих предположений позволяет свести уравнения динамики данного континуума к классическим уравнениям Максвелла. Эта работа относится к более раннему периоду, и в ней при выводе основных уравнений П. А. Жилин использовал метод Трусделла.

Цель нашего исследования заключается в том, чтобы, во-первых, продемонстрировать возможности метода Жилина применительно к континууму многоспиновых частиц, во-вторых, на этом примере провести сравнительный анализ результатов, полученных методом Трусделла и методом Жилина.

F.1. Приведенное уравнение баланса энергии и уравнение теплопроводности

Далее рассматривается континуум многоспиновых частиц. Поскольку термин “многоспиновая частица” не является общепринятым, его необходимо пояснить. Пусть частица $\mathcal{A}$ состоит из несущего тела $\mathcal{A}_0$ и встроенных в него роторов $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Положения центров масс тел $\mathcal{A}_i$ определяются радиус-векторами $\mathbf{R}_i$. Множество точек, определяемых радиус-векторами $\mathbf{R}_i$, является абсолютно твердым телом. При этом роторы могут вращаться независимо друг от друга и от несущего тела. Частица, имеющая такую структуру, называется многоспиновой частицей. Если роторы осесимметричны, а их оси фиксированы относительно несущего тела, то многоспиновая частица является гиростатом. Именно этот случай рассматривается в шестой

главе и будет обсуждаться в дальнейшем.

В шестой главе для континуума многоспиновых частиц сформулированы уравнение баланса частиц, уравнения баланса количества движения и кинетического момента, а также уравнение баланса энергии. Затем уравнение баланса энергии, с учетом остальных балансовых соотношений, преобразовано к виду (6.57). Именно это уравнение является отправной точкой нашего исследования. Итак, рассмотрим уравнение баланса энергии в форме (6.57)

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \\ & + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right). \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Здесь η — плотность распределения частиц; $\mathcal{U}$ — внутренняя энергия, приходящаяся на одну частицу; $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ — тензоры силовых и моментных напряжений; $\mathbf{V}$ — вектор трансляционной скорости; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости несущего тела; β_i — угол поворота i -го ротора относительно несущего тела; Ω_i и ν_i — параметры частицы (постоянные величины); $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока; $\mathbf{q}$ — подвод тепла в единицу времени, приходящийся на одну частицу.

Правая часть уравнения (F.1) содержит слагаемые, отвечающие за подвод энергии в форме тепла и подвод энергии, обусловленный динамикой внутренних роторов. Кроме того, правая часть уравнения (F.1) содержит мощность силовых и моментных напряжений, часть которой идет на изменение внутренней энергии, часть остается в теле в форме тепла и часть рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, согласно методу Жилина, изложенному в третьей главе, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_f, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_f, \quad (\text{F.2})$$

где индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей (упругая составляющая), а индексом “f” обозначена вся оставшаяся часть напряжений (диссипативная составляющая). Используя разложение (F.2), перепишем уравнение баланса энергии (F.1) в виде

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \\ & + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) + \mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Преобразуем уравнение баланса энергии (F.3) к специальному виду, называемому *приведенным уравнением баланса энергии*. Для этого введем в рассмотрение новые переменные ϑ и $\mathcal{H}$, такие, что

$$\begin{aligned} \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) + \\ + \mathbf{T}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Здесь ϑ — температура; $\mathcal{H}$ — плотность энтропии (энтропия, приходящаяся на одну частицу). Таким образом, температура и энтропия вводятся в рассмотрение как сопряженные величины, причем под температурой подразумевается величина, измеряемая термометром. Уравнение (F.4) — это *уравнение теплопроводности*. Фактически, оно представляет собой определение температуры и энтропии.

С учетом (F.4), уравнение баланса энергии (F.3) принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}. \quad (\text{F.5})$$

Именно эта форма уравнения баланса энергии называется *приведенным уравнением баланса энергии*.

F.2. Соотношения Коши–Грина

Далее примем предположения (6.77)

$$\mathbf{V} = \text{const}, \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{D} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{B} \times \mathbf{E}, \quad (\text{F.6})$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — симметричная часть тензора напряжений; $\mathbf{D}$ — вектор, определяющий антисимметричную часть тензора напряжений; $\mathbf{B}$ — вектор, определяющий тензор моментных напряжений при условии, что последний считается антисимметричным.

Согласно интерпретации, принятой в шестой главе, вектор $\mathbf{B}$ представляет собой вектор магнитной индукции, вектор $\mathbf{D}$ отвечает за джоулево тепло, $\boldsymbol{\omega}$ — константа, введенная для соответствия размерностей. Следует отметить, что в шестой главе рассматривается *упругий* континуум многоспиновых частиц.

Далее, для того чтобы продемонстрировать применение метода в общем случае, откажемся от предположения об упругости среды. С учетом разло-

жений (F.2) перепишем соотношения (F.6) в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_e &= \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{D}_e \times \mathbf{E}, & \boldsymbol{\tau}_e &= \boldsymbol{\tau}_e^T, & \mathbf{M}_e &= \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B}_e \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_f &= \boldsymbol{\tau}_f + \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{D}_f \times \mathbf{E}, & \boldsymbol{\tau}_f &= \boldsymbol{\tau}_f^T, & \mathbf{M}_f &= \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B}_f \times \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (\text{F.7})$$

Подставив (F.7) в (F.4), получим уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned}\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} &= \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) + \\ &+ 2\boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{D}_f \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B}_f \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\quad (\text{F.8})$$

Подставив (F.7) в (F.5), получим приведенное уравнение баланса энергии

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = 2\boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{D}_e \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B}_e \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}.\quad (\text{F.9})$$

Последнее, с учетом соотношений (6.85)–(6.93), преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} &= \left[\boldsymbol{\omega}^{-1} \left(\mathcal{D}_e - \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathcal{B}_e + \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}_e \right) \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \\ &- \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B}_e \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t},\end{aligned}\quad (\text{F.10})$$

где $\mathbf{P}$ — тензор поворота несущего тела; $\mathbf{F}$ и $\mathbf{f}$ — соответствующие меры деформации:

$$\nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_\times. \quad (\text{F.11})$$

Теперь можно определить, от каких аргументов² зависят функции $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}_e$, $\mathcal{B}_e$ и ϑ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \mathcal{U}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \mathcal{H}), & \mathcal{D}_e &= \mathcal{D}_e(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathcal{H}), \\ \mathcal{B}_e &= \mathcal{B}_e(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \mathcal{H}), & \vartheta &= \vartheta(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \mathcal{H}).\end{aligned}\quad (\text{F.12})$$

Согласно (F.12), материальная производная от плотности внутренней энергии вычисляется по формуле

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}.\quad (\text{F.13})$$

² Обратим внимание на то, что вектор $\mathcal{D}_e$ должен зависеть от тензора деформации $\mathbf{F}$, а не только от его векторного инварианта $\mathbf{f}$. Это обусловлено тем, что согласно уравнению (F.10) одно из соотношений Коши–Грина будет получено для выражения в квадратных скобках. Именно это соотношение Коши–Грина позволяет определить вектор $\mathcal{D}_e$. Поскольку выражение в квадратных скобках содержит тензор $\mathbf{F}$, вектор $\mathcal{D}_e$ будет от него зависеть.

Подставляя (F.13) в (F.10), получаем

$$\begin{aligned} & \left[\varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_e - \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathcal{B}_e + \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}_e \right) \times \mathbf{P} - \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right]^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \\ & - \left(\varpi^{-1} \mathcal{B}_e + \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}} \right) \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \eta \left(\vartheta - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}} \right) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

С учетом ограничения на материальную производную от тензора поворота (6.100), из уравнения (F.14) получаем соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_e &= -\varpi \eta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \vartheta = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \\ 2\mathcal{D}_e &= -\varpi \eta \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times + \varpi \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}} - \varpi \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}}. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

В результате, задача определения векторов $\mathcal{B}_e$, $\mathcal{D}_e$ и температуры свелась к заданию плотности внутренней энергии как функции тензора поворота несущего тела, вектора деформации $\mathbf{f}$ и плотности энтропии.

Часто бывает удобнее выбрать в качестве основной переменной не энтропию, а температуру. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение плотность свободной энергии

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}. \quad (\text{F.16})$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (F.10) примет вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} &= \left[\varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_e - \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathcal{B}_e + \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}_e \right) \times \mathbf{P} \right]^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \\ &- \varpi^{-1} \mathcal{B}_e \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t}. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Теперь можно определить, от каких аргументов зависят функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}_e$, $\mathcal{B}_e$ и $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta), \quad \mathcal{D}_e = \mathcal{D}_e(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \vartheta), \\ \mathcal{B}_e &= \mathcal{B}_e(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta). \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Согласно (F.18), материальная производная от плотности свободной энергии вычисляется по формуле

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \frac{\delta \vartheta}{\delta t}. \quad (\text{F.19})$$

Подставляя (F.19) в (F.17), получаем

$$\begin{aligned} & \left[\varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_e - \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathcal{B}_e + \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}_e \right) \times \mathbf{P} - \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right]^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \\ & - \varpi^{-1} \left(\mathcal{B}_e + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \right) \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \eta \left(\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right) \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Согласно (F.20) получаем соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_e &= -\varpi \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \vartheta = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{H}}, \\ 2\mathcal{D}_e &= -\varpi \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times + \varpi \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \varpi \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Уравнения (F.21) по форме совпадают с соотношениями Коши–Грина (6.101), (6.102), полученными в шестой главе.

F.3. Второй закон термодинамики

Формулировка Жилина второго закона термодинамики применительно к рассматриваемому континууму многоспиновых частиц имеет вид

$$2\varpi^{-1} \mathcal{D}_f \cdot \boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1} \mathcal{B}_f \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \geq 0, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (\text{F.22})$$

В качестве простейшего примера определяющих уравнений для векторов $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{B}_f$ и $\mathbf{h}$, не противоречащих неравенствам (F.22), можно предложить следующие:

$$\mathcal{D}_f = \varpi k_1 \boldsymbol{\omega}, \quad \mathcal{B}_f = -\varpi k_2 \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{h} = k_3 \nabla \vartheta, \quad (\text{F.23})$$

где k_1 , k_2 , k_3 — положительные константы. Подчеркнем, что уравнения (F.23) приведены не с целью уточнения модели электромагнитного поля, построенной в шестой главе, а исключительно с целью иллюстрации того, как можно удовлетворить ограничениям, налагаемым вторым законом термодинамики в форме Жилина.

Приняв во внимание уравнение теплопроводности (F.8), нетрудно показать, что следствием неравенств (F.22) является неравенство

$$\eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \geq \frac{1}{\vartheta} \left[\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) \right] - \frac{1}{\vartheta^2} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta. \quad (\text{F.24})$$

Неравенство (F.24) в точности совпадает с локальной формой неравенства Клаузиуса–Дюгема (6.60), приведенной в шестой главе для континуума многоспиновых частиц. Таким образом показано, что неравенство Клаузиуса–Дюгема получается из неравенств Жилина следственным переходом. Это означает, что формулировка Жилина второго закона термодинамики более ограничительна, чем неравенство Клаузиуса–Дюгема.

Домножим неравенство (F.24) на температуру и вычтем из него уравнение теплопроводности (F.8). В результате получим

$$2\varpi^{-1}\mathbf{D}_f \cdot \boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1}\mathbf{B}_f \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (\text{F.25})$$

Неравенства (F.24) и (F.25) эквивалентны. Сравнение неравенств (F.22) и (F.25) делает очевидным отличие формулировки Жилина второго закона термодинамики от формулировки Клаузиуса–Дюгема. Формулировка Жилина требует, чтобы диссипативные силы не совершали положительной работы и тепло не могло течь от холодного к горячему. Формулировка Клаузиуса–Дюгема, в принципе, допускает и то и другое.

Несмотря на то что неравенство (F.25) является другой формой записи неравенства (F.24), в рамках метода Трусделла его получить невозможно, поскольку метод Трусделла не предполагает априорное разделение напряжений на упругие и диссипативные. Заметим, что отказ от разделения напряжений на упругие и диссипативные приводит к тому, что в рамках метода Трусделла в принципе невозможно принять более ограничительную формулировку второго закона термодинамики, подобную неравенствам Жилина.

Заключение

Подводя итог проведенному исследованию, отметим некоторые особенности основных уравнений, получающихся при использовании метода Трусделла и метода Жилина.

Во-первых, в случае упругой среды методом Трусделла и методом Жилина получаются совершенно одинаковые соотношения Коши–Грина. В случае неупругой среды полученные методом Жилина соотношения Коши–Грина (F.21) для упругих составляющих векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ выглядят точно так же, как в случае упругой среды. Несмотря на это, наличие диссипативных составляющих векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ влияет на их упругие составляющие. Это влияние обусловлено тем, что свободная энергия зависит от температуры, а характер изменения температуры определяется, в частности, уравнением

теплопроводности (F.8), в котором содержатся диссипативные составляющие векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$.

Во-вторых, в случае неупругой среды метод Трусделла не дает возможности формализовать процесс составления определяющих уравнений. При использовании метода Жилина остается неформализованной только задача составления определяющих уравнений для диссипативных частей векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$; получение определяющих уравнений для упругих частей векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ сведено к заданию свободной (или внутренней) энергии. В этом состоит преимущество метода Жилина по сравнению с методом Трусделла.

В-третьих, одним из ключевых моментов метода Жилина является получение уравнения теплопроводности в форме (F.8). Подчеркнем, что согласно методу Жилина уравнение теплопроводности получается независимо от того, какая среда рассматривается — упругая или неупругая, тогда как методом Трусделла уравнение теплопроводности в форме, похожей на (F.8), можно получить только для упругой среды. Заметим, что в случае двухспиновых частиц³ при условии $\mathbf{D}_f = \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}_f = \mathbf{0}$ уравнение теплопроводности (F.8) совпадает с уравнением теплопроводности (6.107), полученным в шестой главе для упругой среды методом Трусделла.

Таким образом, в рамках задачи термоупругости метод Жилина, изложенный в третьей главе и использованный здесь применительно к континууму многоспиновых частиц, и метод Трусделла, примененный в шестой главе, дают одинаковые результаты. Различие указанных методов проявляется при учете диссипативных составляющих тензоров напряжений.

³ В шестой главе построена модель среды, состоящей из многоспиновых частиц. Электродинамическая интерпретация предложена для частного случая этой среды — среды, состоящей из двухспиновых частиц. Именно для этого частного случая в шестой главе получено уравнение теплопроводности.

Материальный тензор деформации¹

Введение

Традиционная механика сплошных сред включает в себя: а) теорию напряжений и вывод уравнений движения; б) геометрическую теорию деформаций и введение тензоров деформации; с) определяющие уравнения. Такой подход был введен Л. Эйлером (для одномерной среды) и О. Коши (для трехмерного континуума) с целью описания механического поведения упругих материалов. Часто предполагается, что подход Эйлера–Коши может быть использован и для неупругих материалов; разработано много теорий такого рода. Однако ни одна из них не в состоянии описать совокупность имеющихся экспериментальных результатов. По этой причине многие экспериментаторы полагают, что подход Эйлера–Коши не может быть использован в механике неупругих материалов. Далее на простой дискретной модели проиллюстрированы проблемы, возникающие при больших неупругих деформациях и предложен метод введения материального тензора деформации, предназначенного для решения этих проблем.

G.1. Простейшая дискретная модель неупругого деформирования

Одна из основных проблем в использовании традиционных тензоров деформации состоит в том, что при неупругом деформировании происходит

¹ Приложение написано Е. А. Ивановой и А. М. Кривцовым с использованием оригинального текста П. А. Жилина, который с небольшими поясняющими добавлениями содержится во введении и разделах G.2, G.3 (перевод с английского). Материал приложения основан на докладе: P. A. Zhilin, A. M. Krivtsov. Point mass simulation of inelastic extension process, подготовленном для конгресса ICIAM 95 (the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, Germany, July 3–7, 1995). (*Примеч. ред.*)

существенная перестройка внутренней структуры материала. В частности, понятие материальной линии может терять смысл, в силу того что частицы вещества могут встраиваться между частицами, бывшими ранее ближайшими соседями. Для иллюстрации этого факта рассмотрим деформирование простейшей дискретной системы, состоящей из трех взаимодействующих частиц (материальных точек) (рис. G.1).

Взаимодействие между частицами опишем потенциалом Морзе

$$\Pi(r) = D \left(e^{-2\alpha(r-a)} - 2e^{-\alpha(r-a)} \right), \quad (G.1)$$

где r — расстояние между частицами; D — энергия связи; a — длина связи; α — параметр взаимодействия. Потенциал Морзе — один из простейших потенциалов, применяющихся для качественного описания межатомного взаимодействия. Сила взаимодействия $f(r)$, соответствующая потенциалу Морзе, может быть вычислена как

$$f(r) = -\Pi'(r) = 2\alpha D \left(e^{-2\alpha(r-a)} - e^{-\alpha(r-a)} \right). \quad (G.2)$$

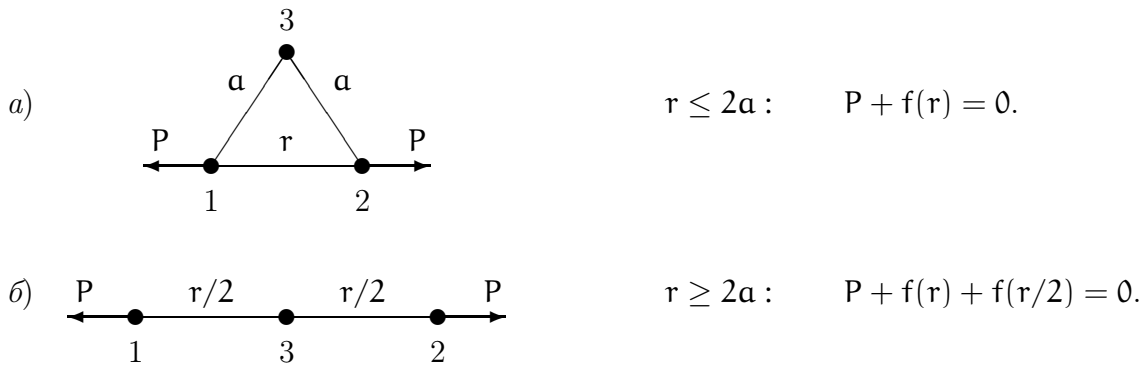


Рис. G.1. Растяжение системы из трех взаимодействующих частиц

При $r < a$ величина $f(r)$ положительна, что соответствует силе отталкивания, при $r > a$ величина $f(r)$ отрицательна, что соответствует силе притяжения, при $r = 0$ сила обращается в ноль. Введем прочность связи f_* — максимальное значение модуля притягивающей силы

$$f_* = \alpha D/2. \quad (G.3)$$

Для трех частиц при отсутствии внешней нагрузки существует единственная устойчивая равновесная конфигурация — в виде равностороннего треугольника со стороной a . Зададим деформирование системы, растягивая квазистатически треугольник вдоль одной из его сторон (см. рис. G.1, а). На

рис. G.1 изображены соответствующие растягивающие силы, модуль их обозначен символом P . Пока длина r растягиваемой стороны не превышает $2a$, система представляет собой равнобедренный треугольник, причем длина боковых сторон остается неизменной и равной a . Фактически, при этом частица 3 не участвует во взаимодействии — силы между ней и частицами основания равны нулю, а сила P определяется исключительно взаимодействием между частицами 1 и 2. Ситуация кардинально меняется, когда r превышает $2a$ (см. рис. G.1, б). В этом случае частица 3 “встраивается” между частицами 1 и 2, а взаимодействие в системе усложняется — теперь уже расстояние между частицей 3 и частицами 1 и 2 превышает равновесное, а следовательно, между ними возникает сила притяжения, вносящая дополнительный вклад в силу P . Соответствующие уравнения равновесия приведены на рис. G.1. Полученная из этих уравнений диаграмма растяжения, построенная при $\alpha a = 3$, представлена на рис. G.2.

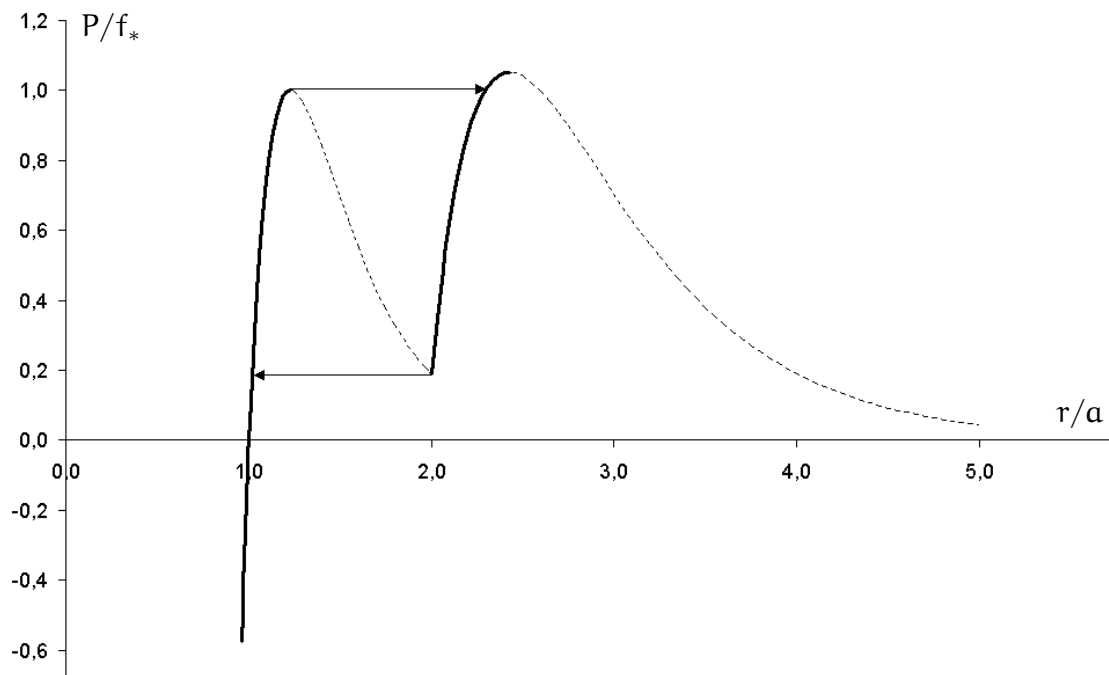


Рис. G.2. Диаграмма растяжения системы из трех взаимодействующих частиц

Найденная зависимость $P(r)$ имеет три экстремума. При мягком нагружении² ниспадающие участки диаграммы неустойчивы (пунктирная линия), а в точках экстремумов возможно возникновение динамических переходных режимов, обозначенных стрелками. Таким образом, уже на простейшей дискретной системе с чисто потенциальным взаимодействием можно наблюдать

² В случае, когда задается нагружающая сила, а не деформация.

аналоги таких эффектов, характерных для макроскопических неупругих систем, как текучесть, остаточная деформация, петля гистерезиса. Исследования более сложных дискретных систем [175], проведенные как аналитически, так и численно, показывают аналогичные результаты, приближающиеся, по мере увеличения числа степеней свободы, к результатам, известным для натуральных макроскопических экспериментов с реальными материалами.

Главный вывод, который можно сделать из данного рассмотрения, состоит в том, что из-за перестройки внутренней структуры такие понятия, как материальный отрезок, могут терять смысл, а вместе с ними теряет смысл и геометрическое определение деформации при сильном неупругом деформировании.

G.2. Континуальное описание

Из предыдущего раздела следует, что при сильном неупругом деформировании материалов тензоры деформации, определенные из чисто геометрических соображений, вообще говоря, не подходят для использования в теории определяющих уравнений. Необходим поиск другого подхода. Опишем идею возможного способа введения тензора деформации неупругого континуума. Запишем уравнение баланса энергии³

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D} + \rho \mathbf{q} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V}^T), \quad (\text{G.4})$$

где точкой обозначена полная производная по времени; $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в актуальной конфигурации; ρ — плотность материала в актуальной конфигурации; $\mathcal{U}$ — массовая плотность внутренней энергии; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений Коши; $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации; $\mathbf{q}$ — скорость подвода тепла, приходящаяся на единицу массы; $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока; $\mathbf{V}$ — вектор скорости. Первое слагаемое в правой части (G.4) называют мощностью напряжений. Примем следующее определение.

Определение. Величина $\mathcal{H}$, на изменении которой совершает работу тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$, называется материальным тензором деформации.

Из определения следует

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\dot{\mathcal{H}} - \mathbf{D}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}: \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T. \quad (\text{G.5})$$

³ В данном приложении используется материальное описание. (Примеч. ред.)

Симметричный тензор $\mathcal{H}$ должен быть объективным, т. е. при наложении жестких движений мы должны получить

$$\mathcal{H}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad (\text{G.6})$$

где $\mathcal{H}_*$ — преобразованный тензор $\mathcal{H}$, полученный после наложения на систему жесткого поворота $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}$. Условию объективности, естественно, удовлетворяют также тензоры $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{D}$:

$$\boldsymbol{\tau}_* = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \mathbf{D}_* = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D}. \quad (\text{G.7})$$

Примем, что соотношение (G.5) остается в силе при наложении жестких движений

$$\boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \mathbf{D}_* = \boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}_*. \quad (\text{G.8})$$

Тогда согласно (G.7) (G.8) получаем тождество

$$\boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}_* = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}. \quad (\text{G.9})$$

Подстановка выражений (G.6), (G.7) для тензоров $\mathcal{H}$ и $\boldsymbol{\tau}$ в тождество (G.9) после несложных преобразований⁴ дает

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}_* \cdot \mathcal{H}_* = \mathcal{H}_* \cdot \boldsymbol{\tau}_*. \quad (\text{G.10})$$

Из (G.10) следует, что собственные векторы тензоров $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathcal{H}$ совпадают. Таким образом, для любого материала тензор $\boldsymbol{\tau}$ является изотропной функцией тензора $\mathcal{H}$. Это означает, что тензор $\mathcal{H}$ должен зависеть от свойств материала и он не может быть найден из чисто геометрического рассмотрения. Это понятно хотя бы из того, что равенство (G.10) должно выполняться для анизотропного материала⁵.

Используя (G.5) введем симметричный тензор $\mathbf{L}$, такой что

$$\dot{\mathcal{H}} + \mathbf{L} = \mathbf{D}, \quad (\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}: \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top). \quad (\text{G.11})$$

⁴ Используется: $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top$ — антисимметричный тензор, тождество $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C}$ и утверждение $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \forall \mathbf{A}: \mathbf{A}^\top = -\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}$.

⁵ Справедливость этого утверждения становится очевидной при переходе к линейной теории. Действительно, в линейной теории соотношение упругости имеет вид $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{C}$ — тензор жесткости; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный тензор деформации, который определяется путем чисто геометрических построений. В случае анизотропного материала главные оси тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ имеют разные направления. Допустим, ставится задача ввести такой тензор деформации $\mathcal{H}$, который был бы соосен тензору $\mathbf{C} \cdot \cdot \mathcal{H}$. Очевидно, что этот тензор деформации должен быть устроен так, чтобы в нем, хотя бы частично, учитывалась анизотропия материала.

Тензор $\mathbf{L}$ заранее неизвестен и зависит от свойств материала. Представим тензор $\mathbf{L}$ в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}^\top = -\mathbf{w}. \quad (\text{G.12})$$

Используя объективность тензоров $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и равенство (G.11), т. е. учитывая, что

$$\dot{\mathbf{H}}_* + \mathbf{L}_* = \mathbf{D}_*, \quad \mathbf{L}_* = \mathbf{w}_* \cdot \mathbf{H}_* - \mathbf{H}_* \cdot \mathbf{w}_*, \quad (\text{G.13})$$

можно показать, что при наложении жестких движений тензор $\mathbf{w}$ должен удовлетворять соотношению

$$\mathbf{w}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (\text{G.14})$$

Подстановка представления (G.12) для тензора $\mathbf{L}$ в равенство (G.11) дает дифференциальное уравнение для материального тензора деформации $\mathbf{H}$

$$\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{D}. \quad (\text{G.15})$$

Тензоры $\mathbf{H}$ и $\mathbf{w}$ в уравнении (G.15) неизвестны. Чтобы их найти, необходимо использовать дополнительные (определяющие) уравнения.

G.3. Материальный тензор деформации в случае упругого изотропного материала

Найдем след тензора $\mathbf{H}$. Для этого вычислим след уравнения (G.15). С учетом тождества $\mathbf{w} \cdot \cdot \mathbf{H} = 0$ получим

$$(\text{tr } \mathbf{H})^\cdot = \text{tr } \mathbf{D} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{V} = -\dot{\rho}/\rho. \quad (\text{G.16})$$

Здесь использовано уравнение неразрывности. Интегрирование соотношения (G.16) дает

$$\text{tr } \mathbf{H} = \ln(\rho_0/\rho) = \ln(1 + \Delta), \quad (\text{G.17})$$

где ρ_0 — плотность недеформированного материала; Δ — кубическая дилатация. Равенство (G.17) справедливо для всех материалов. Однако девиатор тензора $\mathbf{H}$ существенно зависит от свойств материала.

Пренебрежем тепловыми эффектами. Тогда уравнение баланса энергии (G.4) примет вид

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{H}}. \quad (\text{G.18})$$

Рассмотрим упругий материал, т. е. материал, у которого внутренняя энергия и тензор напряжений зависят от деформаций и не зависят от скоростей деформаций. Согласно уравнению (G.18) внутренняя энергия упругого материала имеет вид $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{H})$. Вычислив производную по времени от внутренней энергии и приняв во внимание (G.18), получим

$$\rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{H}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{H}}. \quad (\text{G.19})$$

Покажем, что для изотропного материала соотношение (G.19) выполняется в том случае, когда тензор $\mathbf{H}$ является логарифмической мерой деформации Генки (логарифм правого ядра тензора дисторсии). Действительно⁶, в случае изотропного материала согласно [26]

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{F} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla})^{-1}, \quad (\text{G.20})$$

где $\mathbf{r}$ — отсчетный вектор положения; $\mathbf{F}$ — мера деформации Фингера (обратная мере деформации Альманзи); $W = \rho_0 \mathcal{U}$ — удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации. Для тензора Генки $\mathbf{H}$ имеем [26]

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{V}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}^2. \quad (\text{G.21})$$

Здесь $\mathbf{V}$ — правая мера искажений (правое ядро тензора дисторсии). Подставив соотношения (G.21) в выражение (G.20) для тензора напряжений Коши, получим окончательно

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{H}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}. \quad (\text{G.22})$$

Итак, для упругого изотропного материала тензор напряжений Коши совершает работу на логарифмической мере деформации Генки⁷. Следовательно, согласно введенному ранее определению, мера Генки является материальным тензором деформации для упругого изотропного материала. Известно, что мера Генки часто признается экспериментаторами как наиболее удобный способ описания больших деформаций.

Можно показать⁸, что тензор $\mathbf{w}$ находится однозначно для упругих изо-

⁶ Данное доказательство предложено А. М. Кривцовым, оригинальное доказательство П. А. Жилина не сохранилось. (Примеч. ред.)

⁷ Этот результат был получен П. А. Жилиным и рассказывался его ученикам до 1995 г., однако опубликован в официальной печати он так и не был. В 1995 г. короткая статья с этим результатом была направлена в труды конгресса ICIAM 95, однако была отклонена. В 1997 г. в журнале Acta Mechanica была опубликована статья других авторов [176], в которой был получен тот же результат и представлен как полученный впервые. (Примеч. ред.)

⁸ Доказательство П. А. Жилина этих утверждений не сохранилось. (Примеч. ред.)

тропных материалов; тензоры $\mathbf{J}$ и $\mathbf{w}$ могут быть также определены для материалов с мгновенно затухающей памятью⁹, которые удобны для описания больших пластических деформаций.

G.4. Обсуждение и заключительные замечания

На этом заканчивается оригинальный текст П. А. Жилина, на основании которого готовилось данное приложение. В частных беседах П. А. Жилин указывал, что данный подход может положить основу принципиально новой теории определяющих уравнений. В частности, он указывал, что данный подход позволяет получить тензор деформации, который при периодическом знакопеременном закручивании стержня дает на каждом периоде прирост деформации, что хорошо подходит для описания усталостных явлений.

Позже была опубликована работа [176], в значительной мере коррелирующая с полученными П. А. Жилиным результатами. В этой работе проанализировано использование логарифмической меры деформации Генки $\mathbf{H}$ и доказано, что она является энергетически сопряженной для тензора напряжений Коши (результат, полученный П. А. Жилиным ранее, но оставшийся неопубликованным). Кроме того, в [176] доказано, что $\mathbf{H}$ — единственная мера (тензор) деформации, объективная коротационная производная которой дает тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$. Напомним, что коротационная производная [58, 177] произвольного тензора $\mathbf{A}$ определяется выражением¹⁰

$$\mathbf{A}' = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi}, \quad (\text{G.23})$$

где $\mathbf{\Phi}$ — тензор спина, характеризующий некоторые вращения, связанные с описанием процесса деформирования. Геометрический смысл коротационной производной состоит в том, что она игнорирует изменения тензора, связанные с вращением $\mathbf{\Phi}$. В литературе используется большое количество коротационных производных, различающихся выбором тензора $\mathbf{\Phi}$, в частности, если $\mathbf{\Phi} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V})^A$ (тензор вихря), то (G.23) дает производную Яуманна [26, 178]. Так вот, на протяжении многих лет оставался открытым вопрос, является ли тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ объективной коротационной производной

⁹ Материал, для которого тензор напряжений является функцией производной по времени от тензора деформации (материал дифференциального типа). (*Примеч. ред.*)

¹⁰ Часто используется альтернативная запись, отличающаяся знаком тензора $\mathbf{\Phi}$. Связано это с тем, что, как правило, определение градиента вектора в отечественной и западной литературе отличается транспонированием, и, как следствие, отличается знак тензора спина. (*Примеч. ред.*)

какого-либо тензора деформации, и в работе [176] впервые было показано, что таким тензором может быть только логарифмическая мера $\mathbf{H}$. Кроме того, в [176] был найден соответствующий тензор спина $\Phi^{\log}$, названный авторами логарифмическим, для которого выполняется¹¹

$$\mathbf{H}'^{\log} = \dot{\mathbf{H}} + \Phi^{\log} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \Phi^{\log} = \mathbf{D}, \quad (\text{G.24})$$

где $()'^{\log}$ — логарифмическая производная, также введенная в [176]. Если теперь рассмотреть полученное П. А. Жилиным уравнение для материального тензора деформации (G.15) применительно к $\mathcal{H} = \mathbf{H}$, то из него сразу следует, что используемый в нем антисимметричный тензор есть логарифмический тензор спина: $\mathbf{w} = \Phi^{\log}$.

Рассмотрим еще раз уравнение (G.15). Задачу его решения можно теперь переформулировать так: найти такой объективный тензор $\mathcal{H}$, коротационная производная которого равна тензору скоростей деформации. Фактически, в работе [176] эта задача решена — доказано, что тензором $\mathcal{H}$ является логарифмическая мера Генки $\mathbf{H}$, и найден тензор $\mathbf{w} = \Phi^{\log}$ как некоторая сложная функция¹² тензоров $\mathcal{H}$ и $\mathbf{D}$ [176, 177].

Таким образом, в [176] для тензоров $\mathcal{H}$ и $\mathbf{w}$, определяемых из уравнения (G.15), получены чисто геометрические выражения. Эти результаты оказались очень плодотворным как в нелинейной теории упругости, так и в теории упругопластических сред. В дальнейшем было показано [179], что использование логарифмического тензора деформации и связанного с ним посредством уравнения (G.15) логарифмического тензора спина позволяет корректно сформулировать инкрементальные соотношения упругости гипотупругих сред, широко использующиеся в численных методах. Именно использование указанных тензоров делает уравнения интегрируемыми, позволяя перейти от инкрементальной записи определяющих уравнений к явной, тем самым совмещая понятия гипотупругого и гиперупругого материалов. За границей упругости этот подход позволил построить теорию упругопластических материалов, в которой не требуется разделения тензора деформации на упругую и пластическую составляющие [180]. Наряду с указанными успехами, сохра-

¹¹ Данная запись логарифмической производной отличается от записи, используемой в [176], знаком $\Phi^{\log}$ (см. предыдущую сноску). (*Примеч. ред.*)

¹² Для некоторых частных случаев поля деформаций (например, когда все тензоры $\mathbf{H}$ соосны) тензор $\Phi^{\log}$ вырождается в тензор вихря $(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V})^A$, а логарифмическая производная — в производную Яуманна [58]. Однако в общем случае выражение для $\Phi^{\log}$ значительно сложнее, что связано с наличием двух независимых поворотов — поворота среды и поворота главных осей деформации.

нилось множество нерешенных проблем в описании неупругого деформирования материалов.

Идеи работы [176] отчасти совпадают с идеями П. А. Жилина, но именно отчасти, а не полностью. Суть идеи П. А. Жилина состоит в том, чтобы ввести такой тензор деформации, чтобы: 1) на нем совершал работу тензор напряжений Коши; 2) он был материально объективным; 3) он не обязательно был бы деформацией в классическом смысле. Последнее означает, что этот тензор не обязательно должен быть изотропной функцией тензора дисторсии, а может зависеть от свойств пространственной симметрии материала. В случае упругого изотропного материала, согласно [176], данная задача решается путем чисто геометрических построений. В [176] утверждается, что найдено единственное решение уравнения (G.15), однако решение этого уравнения искалось на множестве классических тензоров деформации. Для тензоров деформации в понимании П. А. Жилина уравнение (G.15), видимо, имеет еще и другие решения. Поясним сказанное на примере упругого анизотропного материала. Тензоры $\mathbf{H} = \mathbf{H}$, $\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^{\log}$ удовлетворяют уравнению (G.15) независимо от того, какой материал рассматривается — изотропный или анизотропный. Однако в случае анизотропного материала данное решение противоречит условию соосности тензора напряжений и тензора деформации (G.10), которое является следствием условий материальной объективности. Чтобы условие (G.10) выполнялось, тензор $\mathbf{H}$ должен иметь структуру, зависящую от свойств симметрии материала. Таким образом, идея П. А. Жилина относительно введения материального тензора деформации, определяемого с использованием уравнения баланса энергии и *свойств моделируемого материала*, еще ждет своего развития.

В более поздних работах по неупругим средам П. А. Жилин отказался от материального описания и использовал только пространственное. Результаты, полученные для материального описания, непосредственно не переносятся на случай пространственного; с математической точки зрения, при переходе к пространственному описанию задача становится более сложной, поскольку в уравнении (G.15) полная производная по времени заменяется на материальную. Однако постановка задачи о нахождении тензора деформации, обладающего указанными ранее свойствами, возможна и при пространственном описании. В заключении к третьей главе данной книги, посвященной неупругим средам, П. А. Жилин пишет о том, что проблема конкретного задания “девиаторной” части энергии осталась нерешенной. Возможно, что одним из путей решения этой проблемы является развитие изложенных в данном приложении идей применительно к пространственному описанию.

Континуум Коссера и пьезоэлектричество¹

Введение

В 1880 г. братья Пьер и Жак Кюри впервые экспериментально продемонстрировали пьезоэлектрический характер поведения ряда кристаллов, включая кварц и сегнетову соль. Прямой пьезоэлектрический эффект возникает, когда деформирование материала вызывает электрическую поляризацию. Обратный пьезоэлектрический эффект возникает, когда вследствие приложения электрического поля материал деформируется. Использование этих взаимосвязанных эффектов позволило электронной индустрии наладить производство множества приборов, таких как пьезоэлектрические кристаллы, фильтры и резонаторы. Таким образом, кристаллические вещества с пьезоэлектрическими свойствами очень полезны с точки зрения их применения для различных научных и промышленных целей.

Современную технику невозможно представить без приборов, работающих на основе пьезоэффекта. Являясь непосредственными преобразователями энергии из электрической в механическую и обратно, такие приборы находят очень широкие сферы применения. Наиболее популярным является применение пластинок, вырезанных из пьезоэлектрического материала под

¹ Приложение написано Е. А. Ивановой и Я. Э. Колпаковым. Материал приложения основан на статье [181]: Ja. E. Kolpakov, P. A. Zhilin “Generalized continuum and linear theory of piezoelectric materials” (Proceedings of XXIX Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia, 2002. — P. 364–375) и лекции [182]: Ja. E. Kolpakov, P. A. Zhilin “A micro-polar theory for piezoelectric materials” (Lecture at XXXIII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. — St. Petersburg, Russia, 2005). (*Примеч. ред.*)

определенным углом, для стабилизации частоты. Современные кварцевые резонаторы, работающие на объемных акустических волнах, позволяют изготавливать генераторы напряжения со стабильностью частоты порядка 10^{-8} в год. Помимо стабилизации частоты, пьезоэлектрические резонаторы широко применяются для фильтрации частот в определенном диапазоне. В области высоких частот (от 60 МГц до 2 ГГц) используются резонаторы на поверхностных акустических волнах (ПАВ), а при еще более высоких частотах применяются резонаторы на тонких пьезоэлектрических пленках. Современный пьезоэлектрический резонатор представляет собой пластинку из материала, обладающего пьезоэлектрическими свойствами и покрытого проводящим слоем металла.

Другая область применения пьезоэлектричества — различные датчики (давления, температуры, ускорения). С помощью пьезоэлектрических датчиков можно измерить, например, давление внутри ствола орудия или двигателя внутреннего сгорания, ускорение космического корабля, температуру в нефтяной скважине или оперативно определить наличие и концентрацию определенных бактерий в окружающей среде. Пьезодатчики имеют большое преимущество перед механическими аналогами: это постоянство нулевой точки, практическое отсутствие потерь на трение, хорошая воспроизводимость показаний, высокая чувствительность, возможность дистанционных измерений. На основе пьезоэлементов создается большое количество медицинской аппаратуры, а также другие приборы: источники и приемники звуковых и ультразвуковых колебаний.

Одним из пьезоэлектриков, которые наиболее часто используются в промышленности, является α -кварц. Его популярность обусловлена распространенностью в природе, относительной простотой изготовления (методом выращивания из щелочного раствора), высокой однородностью. Маленький коэффициент электромеханической связи (0,007) и высокая добротность кварца позволяют использовать его для создания различных устройств, например высокодобротных кварцевых резонаторов. Впервые пьезокристаллы на базе натурального α -кварца были произведены Волтером Кади в 1923 г. К настоящему времени налажено производство пьезокристаллов с существенно улучшенными техническими характеристиками.

Первая попытка построить теорию пьезоэлектричества была предпринята Фойгтом в 1910 г. Сейчас существует несколько теорий пьезоэлектричества. Все известные теории незначительно отличаются друг от друга и сводятся к достаточно сложным системам уравнений. Точные решения этих уравнений можно найти только в частных случаях. Это одна из причин того, что задача

сравнения теоретических и экспериментальных результатов является весьма сложной. В настоящее время считается, что качественных расхождений между теорией и экспериментом нет. Вместе с тем, есть несколько серьезных теоретических проблем, необходимость решения которых требует расширения и обобщения теории пьезоэлектричества.

Первая проблема. В традиционных теориях вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ считается полярным. Однако этот факт не является строго доказанным. В электродинамике выбор типа вектора электрического поля не имеет значения (см., например, [151]). В пьезоэлектричестве тип вектора $\mathbf{E}$ важен. Поэтому далее мы рассмотрим теории, применимые в двух случаях: $\mathbf{E}$ — полярный вектор и $\mathbf{E}$ — аксиальный вектор.

Вторая проблема. Некоторые пьезоэлектрические материалы являются дипольными кристаллами. При создании теорий пьезоэлектричества, описывающих поведение подобных материалов, принципиально важным становится учет вращательных степеней свободы. Далее мы рассматриваем именно такие теории.

Н.1. Классическая теория пьезоэлектричества

Все известные теории пьезоэлектричества [183–185] базируются на классической теории упругости с симметричным тензором напряжений. Далее представлены основные уравнения теории пьезоэлектричества.

Уравнения движения имеют вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad (\text{Н.1})$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений; ρ — объемная плотность массы; $\mathbf{F}$ — массовая плотность внешней силы, действующая на единицу массы; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений.

Уравнение электростатики для кристалла имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (\text{Н.2})$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^p$ — вектор электрической индукции; ε_0 — электрическая постоянная; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля в среде; $\mathbf{P}^p$ — вектор плотности поляризации.

Уравнение баланса энергии представлено в виде

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}, \quad (\text{Н.3})$$

где $\mathcal{U}$ — массовая плотность внутренней энергии; $\mathbf{g}$ — тензор линейной деформации, который равен симметричной части градиента вектора перемещений: $\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$. Далее вводится понятие плотности электрической энтальпии

$$\rho \mathcal{F} = \rho \mathcal{U} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{D}. \quad (\text{H.4})$$

С использованием (H.4) уравнение баланса энергии (H.3) переписывается в виде

$$\rho \dot{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathcal{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{H.5})$$

В линейном приближении плотность электрической энтальпии $\rho \mathcal{F}$ представляется в виде квадратичной формы

$$\rho \mathcal{F} = \rho \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{g} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{H.6})$$

где $\mathbf{C}$ — тензор упругости; $\mathcal{M}$ — тензор пьезоэлектрических модулей; $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. Заметим, что компонентами тензора $\boldsymbol{\epsilon}$ являются абсолютные диэлектрические проницаемости, имеющие размерность электрической постоянной ε_0 . Определяющие уравнения, которые следуют из (H.5), (H.6), имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{M}, \quad (\text{H.7})$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{H.8})$$

Ранее в качестве независимых переменных использовались тензор деформаций и вектор электрического поля. Можно в качестве независимых переменных использовать тензор деформаций и вектор электрической индукции. В этом случае следует вернуться к уравнению баланса энергии в форме (H.3). Задав плотность внутренней энергии в виде квадратичной формы

$$\rho \mathcal{U} = \rho \mathcal{U}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{C}^{(c)} \cdot \mathbf{g} - \mathcal{D} \cdot \mathcal{M}^{(c)} \cdot \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathcal{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(c)} \cdot \mathcal{D}, \quad (\text{H.9})$$

получим определяющие уравнения следующего вида:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{(c)} \cdot \mathbf{g} - \mathcal{D} \cdot \mathcal{M}^{(c)}, \quad (\text{H.10})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathcal{M}^{(c)} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\epsilon}^{(c)} \cdot \mathcal{D}. \quad (\text{H.11})$$

Тензоры $\mathbf{C}^{(c)}$, $\mathcal{M}^{(c)}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{(c)}$ выражаются через $\mathbf{C}$, $\mathcal{M}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ по формулам

$$\mathbf{C}^{(c)} = \mathbf{C} + \mathcal{M}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{-1} \cdot \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^{(c)} = \boldsymbol{\epsilon}^{-1} \cdot \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(c)} = \boldsymbol{\epsilon}^{-1}. \quad (\text{H.12})$$

Знак “звездочка” применительно к тензору третьего ранга $\mathbf{M}$ означает циклическую перестановку базисных векторов в триаде.

Классическая теория описывает большинство известных экспериментальных данных. Вместе с тем, в некоторых случаях наблюдаются разногласия между теорией и экспериментом. Подробную информацию об этом можно найти, например, в статье [186]. Причина разногласий между теорией и экспериментом [186] до конца не понятна. Не исключено, что причина заключается в погрешностях, допущенных в ходе эксперимента и при построении приближенного решения системы (Н.1)–(Н.7). Однако вполне возможно, что для более точного согласования с экспериментальными данными классическая теория (Н.1)–(Н.7) должна быть улучшена в некоторых пунктах. В первую очередь важным представляется учет вращательных степеней свободы, так как целый ряд пьезоэлектрических кристаллов представляет собой дипольную среду.

Н.2. Уравнения баланса для континуума Коссера

Рассмотрим упругий континуум, состоящий из тел-точек — континуум Коссера. Пусть $\mathbf{x}_s$ — материальные (лагранжевы) координаты и пусть $\mathbf{r}(\mathbf{x}_s)$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x}_s)$ — радиус-векторы, определяющие положения точек среды в отсчетной и актуальной конфигурациях, соответственно. Плотность кинетической энергии среды, состоящей из тел-точек, представляется квадратичной формой скоростей

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{Н.13})$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ — вектор перемещений; $\mathbf{J}$ — тензор инерции в отсчетной конфигурации; $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ — тензор поворота (собственно ортогональный тензор); $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости. Здесь и далее мы предполагаем, что вектор перемещений $\mathbf{u}$ мал, т. е. мы рассматриваем линейную теорию. В линейном приближении для тензора поворота $\mathbf{P}$ можно использовать следующую аппроксимацию:

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{Н.14})$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор малого поворота; $\mathbf{E}$ — единичный тензор; $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор, направленный по оси поворота; φ — угол поворота. Воспользовавшись уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \quad (\text{Н.15})$$

и приближенным выражением для тензора поворота (Н.14), получим следующее выражение для вектора угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}}.$$

Плотность количества движения определяется как частная производная от плотности кинетической энергии по трансляционной скорости

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \dot{\mathbf{u}}.$$

Уравнение баланса количества движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS, \quad (\text{Н.16})$$

где $\rho = V^{-1} \sum_V m_i$ — объемная плотность массы (V — материальный объем); $\mathbf{F}$ — массовая плотность внешних сил; $\mathbf{T}_{(n)}$ — вектор напряжений. Справедлива формула

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \quad (\text{Н.17})$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контрольного объема в данной точке; $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши. Применив теорему о дивергенции и приняв во внимание (Н.17), приведем уравнение (Н.16) к виду

$$\int_{(V)} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV = \mathbf{0}. \quad (\text{Н.18})$$

На основании стандартных рассуждений получим локальную форму уравнения баланса количества движения

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{Н.19})$$

Тензор напряжений можно разложить на симметричную и антисимметричную части

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}_\times, \quad (\text{Н.20})$$

где вектор $\mathbf{q}$ определяет антисимметричную часть тензора напряжений. Воспользовавшись представлением (Н.20), перепишем уравнение (Н.19) в форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{q} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{Н.21})$$

Плотность кинетического момента определяется как сумма плотности момента количества движения и плотности собственного кинетического момента, который в свою очередь определяется как частная производная от плотности кинетической энергии по угловой скорости

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}}.$$

При малых $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ выражение для $\mathbf{K}_2$ принимает вид

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{H.22})$$

Уравнение баланса кинетического момента записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{K}_2 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \int_{(S)} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_{(n)} + \boldsymbol{\mu}_{(n)}) dS, \quad (\text{H.23})$$

где $\mathbf{L}$ — массовая плотность внешних моментов; $\boldsymbol{\mu}_{(n)}$ — вектор моментных напряжений. Формула Коши, посредством которой вводится в рассмотрение тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\mu}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (\text{H.24})$$

Воспользуемся формулой (H.24), теоремой о дивергенции и уравнением баланса количества движения (H.21) и путем стандартных преобразований уравнения (H.23) получим локальную форму уравнения баланса кинетического момента

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{q} + \rho \mathbf{L} = \rho \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{H.25})$$

Уравнения (H.21) и (H.25) хорошо известны в теории микрополярных сред.

В дальнейшем будем рассматривать антисимметричный тензор моментных напряжений, задав его с помощью сопутствующего вектора $\mathbf{m}$,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (\text{H.26})$$

Подставив (H.26) в уравнение (H.25), получим

$$\nabla \times \mathbf{m} + \mathbf{q} + \rho \mathbf{L} = \rho \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{H.27})$$

Перейдем к обсуждению уравнения баланса энергии. Интегральная форма этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{(V)} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + \rho \mathcal{U} \right) dV = \\ & = \int_{(V)} \left(\rho \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathcal{Q} \right) dV + \int_{(S)} \left(\mathbf{T}_{(n)} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + h_{(n)} \right) dS. \end{aligned} \quad (\text{H.28})$$

Здесь $\mathcal{U}$ — массовая плотность внутренней энергии; $h_{(n)}$ — скорость подвода энергии через границу объема; $\mathcal{Q}$ — скорость подвода энергии в единицу объема. Воспользовавшись теоремой о дивергенции и соотношением $h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$, где $\mathbf{h}$ — вектор потока энергии, приведем уравнение (H.28) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{(V)} \left[\rho \dot{\mathcal{U}} + (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\rho \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}} - \rho \mathbf{L} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} - \right. \\ & \left. - \mathbf{T}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\phi}} - \nabla \cdot \mathbf{h} - \mathcal{Q} \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Руководствуясь стандартными рассуждениями и приняв во внимание законы динамики (H.21), (H.25), получим локальную форму уравнения баланса энергии

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\phi}} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathcal{Q}. \quad (\text{H.30})$$

Не вызывает затруднений доказательство тождества

$$\mathbf{T}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}},$$

где

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \boldsymbol{\theta} \equiv \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (\text{H.31})$$

Симметричный тензор $\mathbf{g}$ называется тензором линейной деформации, вектор $\boldsymbol{\theta}$ называется вектором сдвига. С учетом приведенного тождества уравнение (H.30) принимает вид

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\phi}} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathcal{Q}. \quad (\text{H.32})$$

Воспользовавшись представлением (H.26) для тензора моментных напряжений, перепишем уравнение баланса энергии (H.32) в форме

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathcal{Q}, \quad (\text{H.33})$$

где использовано обозначение

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (\text{Н.34})$$

Полученные в этом разделе уравнения будут использоваться далее для построения различных версий теории пьезоэлектричества.

Н.3. Модификация классической теории пьезоэлектричества

Обобщенная теория пьезоэлектричества строится на основе линейной моментной теории упругости. Основные уравнения, описывающие механическое поведение среды Коссера, представлены в предыдущем разделе. Для того чтобы наделить этот континуум пьезоэлектрическими свойствами, необходимо учесть влияние электрического поля. Воздействие электрического поля на материальную среду можно моделировать двумя способами: либо посредством распределенных сил и моментов в уравнениях баланса количества движения и кинетического момента, соответственно, либо посредством тех слагаемых в уравнении баланса энергии, которые связаны с энергией немеханического происхождения. Второй способ близок к классическому подходу, и именно он реализован в этом разделе.

Основное отличие разработанной в этом разделе теории от классической заключается в следующем. Поскольку континуум Коссера обладает дополнительными степенями свободы, указанная теория содержит дополнительные тензорные характеристики свойств материальной среды, в том числе и дополнительные тензоры, отвечающие за пьезоэлектрические свойства. При определении структуры тензоров пьезоэлектрических модулей для кристаллов, обладающих различной симметрией, рассмотрены два случая: вектор напряженности электрического поля — полярный и вектор напряженности электрического поля — аксиальный.

Н.3.1. Приведенное уравнение баланса энергии

Уравнение баланса энергии в форме (Н.32) содержит слагаемые $\nabla \cdot \mathbf{h} + \mathcal{Q}$, которые характеризуют обмен энергией немеханического происхождения между соседними частями среды и подвод энергии немеханического происхождения от внешнего источника. Будем считать, что эти слагаемые характеризуют обмен энергией с электрическим полем. Введем в рассмотрение два

вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, такие, что

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \mathcal{Q} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}. \quad (\text{H.35})$$

Здесь векторам $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ придается смысл вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции, соответственно. Подставив (H.35) в (H.32), получим следующую форму уравнения баланса энергии:

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}. \quad (\text{H.36})$$

Согласно уравнению (H.36) объемная плотность внутренней энергии $\rho \mathcal{U}$ зависит от аргументов $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\nabla \boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Во многих случаях вместо вектора $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ удобнее использовать в качестве независимой переменной вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для того чтобы это сделать, так же как и в классической теории пьезоэлектричества, следует ввести в рассмотрение плотность электрической энтальпии (H.4). При использовании (H.4) уравнение баланса энергии (H.36) записывается в форме

$$\rho \dot{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\mathcal{D}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{H.37})$$

Согласно (H.37) плотность электрической энтальпии $\rho \mathcal{F}$ является функцией аргументов $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\nabla \boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$. Следовательно,

$$\rho \dot{\mathcal{F}} = \left(\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \nabla \boldsymbol{\varphi}} \right)^T \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{H.38})$$

Сравнивая уравнения (H.37) и (H.38) и принимая во внимание упругость рассматриваемой среды, получаем соотношения Коши–Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}}, \quad \mathbf{q} = - \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \nabla \boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = - \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{H.39})$$

Далее принимается гипотеза натурального состояния. Это означает, что при нулевых деформациях напряжения отсутствуют. В данном случае плотность электрической энтальпии можно представить в форме

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{F} = & \rho \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \mathbf{g} - \\ & - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^\mu \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Phi}^\times \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + \\ & + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\Phi}^\tau \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{H.40})$$

Тензоры $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, Φ^μ , $\Phi^\times$, Φ^τ и Φ^ε характеризуют физические свойства рассматриваемого материала. На указанные тензоры накладываются определенные ограничения, которые вытекают из условий положительной определенности внутренней энергии.

Подставив выражение (Н.40) в соотношения Коши–Грина (Н.39), получим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M} + \Phi^\tau \cdot \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{Н.41})$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{N} - \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X} - \Phi^\times \cdot \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{Н.42})$$

$$\boldsymbol{\mu}^\tau = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \nabla \varphi} = \mathbf{g} \cdot \cdot \Phi^\tau + \boldsymbol{\theta} \cdot \Phi^\times - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Phi^\varepsilon + \Phi^\mu \cdot \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{Н.43})$$

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \Phi^\varepsilon \cdot \nabla \varphi. \quad (\text{Н.44})$$

Далее, в целях упрощения теории, примем предположение (Н.26). Тогда уравнение баланса энергии (Н.37) приобретает форму

$$\rho \dot{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \mathcal{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{Н.45})$$

Следствием (Н.45) являются соотношения Коши–Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}}, \quad \mathbf{q} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{m} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \mathcal{D} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{Н.46})$$

Для плотности электрической энтальпии вместо (Н.40) примем более простое выражение

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{F} = \rho \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{g} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \chi \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \\ + \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{Н.47})$$

где χ — физическая константа. В результате упрощения формул вместо (Н.41)–(Н.43) получим определяющие уравнения следующего вида:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}, \quad (\text{Н.48})$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{N} - \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X}, \quad (\text{Н.49})$$

$$\mathbf{m} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -\chi \boldsymbol{\gamma}, \quad (\text{Н.50})$$

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \rho \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{M} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{H.51})$$

Для дальнейшей конкретизации теории необходимо определить общий вид тензоров $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{N}$, $\mathcal{M}$, $\mathbf{X}$, что можно сделать, воспользовавшись теорией симметрии.

Н.3.2. Теория симметрии тензорных величин

При использовании теории симметрии необходимо принять во внимание тот факт, что существуют тензорные величины двух типов: полярные и аксиальные. Полярные тензоры не зависят от выбора ориентации в трехмерном пространстве. Аксиальные тензоры меняют знак при изменении ориентации в трехмерном пространстве. В рассматриваемой теории пьезоэлектричества свойства материала характеризуются тензорами различного типа. При этом, как показывает несложный анализ выражения (H.47), тип тензоров $\mathcal{M}$ и $\mathbf{X}$ зависит от типа вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если $\boldsymbol{\varepsilon}$ — полярный вектор, то тензор $\mathcal{M}$ — полярный, а тензор $\mathbf{X}$ — аксиальный. Если $\boldsymbol{\varepsilon}$ — аксиальный вектор, то тензор $\mathcal{M}$ — аксиальный, а тензор $\mathbf{X}$ — полярный. В связи с этим в рассмотренной теории пьезоэлектричества, так же как и в классической теории, тип вектора электрического поля имеет принципиальное значение.

Воспользуемся определением ортогонального преобразования, принятым в четвертой главе.

Определение 1. Ортогональным преобразованием тензора $\mathbf{S}$ ранга k называется тензор $\mathbf{S}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S^{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{S}' &\equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha S^{i_1 \dots i_k} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{i_k}, \end{aligned} \quad (\text{H.52})$$

где $\alpha = 0$, если тензор $\mathbf{S}$ — полярный, и $\alpha = 1$, если тензор $\mathbf{S}$ — аксиальный. Тензор $\mathbf{Q}$ является ортогональным тензором.

Примерами ортогональных тензоров служат тензор инверсии $\mathbf{Q} = -\mathbf{E}$, тензор зеркального отражения

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, и тензор поворота

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{n}) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

где α — угол поворота; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, определяющий направление оси поворота.

Воспользуемся определением группы симметрии тензора $\mathbf{S}$, принятым в четвертой главе.

Определение 2. Группой симметрии тензора $\mathbf{S}$ называется набор ортогональных тензоров $\mathbf{Q}_s$, являющихся решениями уравнения

$$(\det \mathbf{Q})^\alpha \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}, \quad (\text{Н.53})$$

где $\mathbf{S}$ — заданный тензор.

Если известен тензор $\mathbf{S}$, группа симметрии этого тензора находится из решения уравнения (Н.53). Обратная задача возникает, когда известна группа симметрии тензора $\mathbf{S}$ и требуется найти общий вид этого тензора. Именно обратная задача представляет интерес для практических приложений. Как правило, известна группа симметрии реального физического объекта. Для того чтобы определить группу симметрии некоторого тензора, характеризующего свойства этого объекта, необходимо использовать принцип Кюри–Неймана.

Принцип Кюри–Неймана. Группа симметрии причины есть подгруппа группы симметрии следствия.

Рассмотрим конкретный пьезоэлектрический кристалл, например α -кварц. В соответствии с принципом Кюри–Неймана, группа симметрии тензоров, характеризующих механические и физические свойства кристалла, либо совпадает с группой симметрии кристалла, либо шире ее. Дополнительные элементы симметрии могут возникнуть вследствие различных причин, например, как следствие формы кристалла. Так как рассматриваемая среда считается бесконечной и однородной, представляется возможным найти общий вид тензоров $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$, используя инвариантность относительно всех элементов симметрии, свойственных данной структуре. Численные значения физических констант должны быть определены экспериментальным путем.

В качестве примера рассмотрим тензор второго ранга $\mathbf{X}$ и тензор третьего ранга $\mathbf{M}$. Представим их в следующей форме:

$$\mathbf{X} = X^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{M} = M^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Ортогональные преобразования этих тензоров имеют вид

$$\mathbf{X}' = (\det \mathbf{Q})^\alpha X^{ij} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{M}' = (\det \mathbf{Q})^\alpha M^{ijk} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Если $\mathbf{Q}$ является одним из элементов симметрии кристалла, то должны выполняться равенства $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, которые можно записать в виде

$$X^{ij} [(\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j] = 0, \quad (\text{H.54})$$

$$\mathcal{M}^{ijk} [(\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k] = 0.$$

Воспользуемся условиями (H.54) для определения структуры тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$. Пусть некоторый кристалл имеет своим элементом симметрии тензор инверсии $(-\mathbf{E})$. Допустим, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ является полярным вектором. В таком случае тензор $\mathbf{X}$ — аксиальный, тензор $\mathbf{M}$ — полярный и согласно условиям (H.54) $\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{M} = 0$. Это означает, что пьезоэффект для данного типа кристалла невозможен. Если вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ — аксиальный вектор, то тензор $\mathbf{X}$ — полярный, а тензор $\mathbf{M}$ — аксиальный. В этом случае условия (H.54) выполняются тождественно. Это означает, что пьезоэффект для данного типа кристалла возможен. Основываясь на данных фактах, можно предложить способ экспериментального определения типа вектора напряженности электрического поля. Если обнаружится пьезоэлектрический материал с центральной симметрией, тогда можно будет сделать вывод, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ — аксиальный.

Хорошо известно, что существуют пьезоэлектрические материалы с двумя плоскостями зеркальной симметрии. Пусть тензоры

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (\text{H.55})$$

являются элементами симметрии некоторого кристалла. Согласно принципу Кюри–Неймана, эти тензоры должны принадлежать группе симметрии тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$. Если $\mathbf{X}$ — аксиальный тензор, а $\mathbf{M}$ — полярный, то они имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= X^{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + X^{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{M} &= (\mathcal{M}^{113}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathcal{M}^{223}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathcal{M}^{333}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3 + \\ &+ \mathcal{M}^{131}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 + \mathcal{M}^{232}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (\text{H.56})$$

Если $\mathbf{X}$ — полярный тензор, а $\mathbf{M}$ — аксиальный, то эти тензоры могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= X^{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + X^{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + X^{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{M} &= \mathcal{M}^{231}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ \mathcal{M}^{132}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_2 + \mathcal{M}^{123}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{H.57})$$

В классической теории пьезоэлектричества вектор $\mathbf{E}$ считается полярным, и поэтому для тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$ используются выражения (Н.56). Однако, если окажется, что вектор $\mathbf{E}$ — аксиальный, для описания свойств реального кристалла нужно будет использовать выражения (Н.57).

Если группа симметрии кристалла содержит только повороты, то тип вектора $\mathbf{E}$ не имеет значения. Приведем результаты анализа системы (Н.54) для α -кварца, принадлежащего классу 32. У структуры класса 32 есть два элемента симметрии: поворот вокруг оси x_3 на угол $2\pi/3$ и поворот вокруг оси x_1 на угол π . Любой тензор второго ранга, характеризующий свойства α -кварца, например тензор $\mathbf{X}$, имеет следующую структуру:

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{E} + (X_2 - X_1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (\text{Н.58})$$

Любой тензор третьего ранга, характеризующий свойства α -кварца, например тензор $\mathbf{M}$, может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \mathcal{M}_0 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{a} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{b}) + \mathcal{M}_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{c} + \mathcal{M}_2 \mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_3 + \\ & + \mathcal{M}_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{a} = & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{c} = & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (\text{Н.59})$$

Тензор четвертого ранга, характеризующий свойства α -кварца, имеет достаточно сложную форму и содержит 14 независимых компонент. Тензор упругости имеет более простой вид, так как благодаря симметрии тензора напряжений и тензора деформаций он содержит только 6 независимых компонент.

Н.3.3. Простейшая пьезоэлектрическая среда

Выпишем полную систему пьезоэлектрических уравнений. Уравнения динамики выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{q} + \rho \mathbf{F} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \times \mathbf{m} + \mathbf{q} + \rho \mathbf{L} &= \rho \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}}, \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Н.60})$$

Соотношения Коши–Грина имеют вид (Н.46). Обсуждение теории пьезоэлектричества в общей форме применительно к реальным кристаллам в данном случае оставим без внимания. Ограничимся рассмотрением простейшего

выражения для плотности электрической энтальпии

$$\begin{aligned} \rho\mathcal{F} = & \mu \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g} + \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{g})^2 + \frac{1}{2} c \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \chi \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{H.61})$$

В выражении (H.61) в общей форме представлены только те слагаемые, которые связаны с пьезоэффектом. Подставив (H.61) в соотношения Коши–Грина (H.46), получим определяющие уравнения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{g} + \lambda (\text{tr } \mathbf{g}) \mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}, \quad \mathbf{q} = -c \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{X}, \\ \mathbf{m} = -\chi \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{H.62})$$

Тензор и векторы деформации имеют вид

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (\text{H.63})$$

В классической теории пьезоэлектричества применяются уравнения (H.60)–(H.63) при следующих ограничениях:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \chi = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}. \quad (\text{H.64})$$

Таким образом, в уравнения (H.60)–(H.63) пьезоэффект попадает двумя путями, которые связаны с наличием перекрестных членов в выражении для плотности электрической энтальпии (H.61).

Вариант 1: $\boldsymbol{\mathcal{M}} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{0}.$

Этот случай — классический. Здесь пьезоэффект связан с симметричной частью тензора напряжений.

Вариант 2: $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} \neq \mathbf{0}.$

Этот случай — неклассический. Здесь пьезоэффект связан исключительно с антисимметричной частью тензора напряжений. В общем случае и тензор $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, и тензор $\mathbf{X}$ могут быть отличны от нуля.

Пусть группа симметрии пьезоэлектрических свойств содержит тензоры (H.55) и тензор поворота на любой угол вокруг оси $\mathbf{e}_3$.

Если $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — полярный вектор, то тензор $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ — полярный, а тензор $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ — аксиальный. В этом случае тензоры $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{M}} &= [\mathcal{M}_1 \mathbf{E} + (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \otimes \mathbf{e}_3 + \\ &+ \mathcal{M}_3 [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)], \\ \boldsymbol{\mathcal{X}} &= X_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (\text{H.65})$$

Если $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — аксиальный вектор, то тензор $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ — аксиальный, а тензор $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ — полярный. В этом случае тензоры $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{M}} &= \mathcal{M}_1 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}], \\ \boldsymbol{\mathcal{X}} &= X_1 \mathbf{E} + (X_2 - X_1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (\text{H.66})$$

Сравнивая выражения (H.65) и (H.66), мы видим существенное различие между ними. Важно, что это различие может быть установлено экспериментально, а следовательно появляется возможность экспериментального определения типа вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Для того чтобы использовать экспериментальные данные, необходимо решить конкретные задачи. Один из возможных подходов заключается в анализе дисперсионных соотношений. Этот путь ведет к достаточно сложным уравнениям, поскольку построенная теория содержит шесть дисперсионных кривых — три акустических и три оптических. (В классической теории есть только акустические дисперсионные кривые.)

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший случай, когда тензор $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ равен нулю. Рассмотрим два варианта теории.

Вариант 1. Вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — полярный. Тогда соотношения между напряжениями и деформациями (H.62) принимают вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= 2\mu \mathbf{g} + \lambda(\text{tr } \mathbf{g}) \mathbf{E}, \quad \mathbf{q} = -c \boldsymbol{\theta} + X_1 \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{m} &= -\chi \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} + X_1 \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\theta}.\end{aligned}\quad (\text{H.67})$$

Вариант 2. Вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — аксиальный. В этом случае соотношения между напряжениями и деформациями (H.62) представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= 2\mu \mathbf{g} + \lambda(\text{tr } \mathbf{g}) \mathbf{E}, \quad \mathbf{q} = -c \boldsymbol{\theta} + X_1 \boldsymbol{\mathcal{E}} + (X_2 - X_1)(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{m} &= -\chi \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} + X_1 \boldsymbol{\theta} + (X_2 - X_1)(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (\text{H.68})$$

Если направление вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}_3$, то в случае (H.67) пьезоэффекта не будет, а в случае (H.68) он будет иметь место.

Если найдется кристалл со свойствами (Н.68), то будет установлено, что вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ является аксиальным. Данное обстоятельство очень важно с теоретической точки зрения. Очевидно, что дисперсионные кривые в случаях (Н.67) и (Н.68) будут различными. В настоящее время неизвестно, существуют ли пьезоэлектрические кристаллы с подобными свойствами. Но существование таких кристаллов теоретически возможно.

Н.4. Микрополярная теория дипольной пьезоэлектрической среды

В этом разделе рассматривается теория, предназначенная для описания поведения пьезоэлектрических кристаллов, являющихся дипольными кристаллами. Как отмечалось ранее, воздействие электрического поля на кристалл можно моделировать двумя способами: либо посредством распределенных сил и моментов в уравнениях баланса количества движения и кинетического момента, соответственно, либо посредством подвода энергии немеханического происхождения. Далее предлагается теория, которая включает в себя оба механизма взаимодействия материальной среды с электрическим полем. Однако обмен энергией между материальной средой и электрическим полем моделируется здесь иначе, чем в классической теории пьезоэлектричества.

Н.4.1. Модель дипольной частицы

Рассмотрим среду, каждая частица которой является нейтральным диполем с зарядами $q_+ = q$ и $q_- = -q$, способным перемещаться в пространстве и поворачиваться, а также изменять свою величину, т. е. растягиваться или сжиматься. Пусть отсчетное положение диполя (рис. Н.1) определяется следующими величинами: $\mathbf{r}^+$ и $\mathbf{r}^-$ — радиус-векторы зарядов q^+ и q^- , соответственно, $\mathbf{l}_0 = \mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-$ — вектор, определяющий относительное расположение зарядов в диполе, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра диполя. При переходе в актуальное положение заряды q^+ и q^- перемещаются в точки пространства, определяемые соответственно радиус-векторами $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{R}^-$, центр частицы-диполя перемещается в точку, определяемую радиус-вектором $\mathbf{R}$. Вектор, определяющий относительное расположение зарядов в диполе в актуальной конфигурации, вычисляется по формуле $\mathbf{l} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$. Величины, характеризующие перемещения центра диполя и составляющих его зарядов, определяются сле-

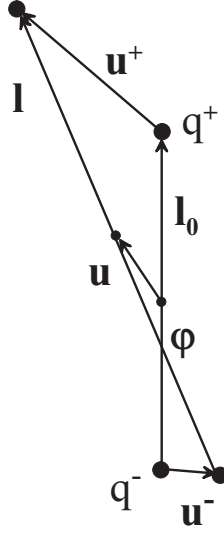


Рис. Н.1. Тело-точка как пара зарядов

дующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}^+ = \mathbf{R}^+ - \mathbf{r}^+, \quad \mathbf{u}^- = \mathbf{R}^- - \mathbf{r}^-. \quad (\text{Н.69})$$

Введем в рассмотрение дипольные моменты частицы в отсчетном и актуальном положениях, обозначив их соответственно $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}$,

$$\mathbf{d}_0 = ql_0 = q(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-), \quad \mathbf{d} = ql = q(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-). \quad (\text{Н.70})$$

Пусть $\mathbf{p}$ — изменение дипольного момента, ξ — относительное изменение абсолютной величины диполя

$$\mathbf{p} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0, \quad |\mathbf{d}| = |\mathbf{d}_0|(1 + \xi). \quad (\text{Н.71})$$

После несложных преобразований получим следующее представление для вектора $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_1 = \xi \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{d}_0, \quad (\text{Н.72})$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор поворота диполя. Формулы (Н.72) получены в предположении малости поворота и растяжения диполя. Такое предположение оправдано, поскольку далее рассматривается линейная теория.

Запишем выражение для скорости подвода энергии, передаваемой диполю через электрическое поле в веществе,

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{F}^+ \cdot \dot{\mathbf{u}}^+ + \mathbf{F}^- \cdot \dot{\mathbf{u}}^-. \quad (\text{Н.73})$$

Воспользовавшись формулой Лоренца для силы, действующей на заряженную частицу, сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{U}} &= q^+ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^+) \cdot \dot{\mathbf{u}}^+ + q^- \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^-) \cdot \dot{\mathbf{u}}^- = \\ &= q (\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^+) - \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^-)) \cdot \dot{\mathbf{u}} + q \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^+) \cdot \frac{1}{2q} \dot{\mathbf{p}} + q \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R}^-) \cdot \frac{1}{2q} \dot{\mathbf{p}} = \\ &= \mathbf{d}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \dot{\mathbf{p}}.\end{aligned}$$

С помощью уравнений (Н.72) вычислим производную от вектора поляризации

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\xi} \mathbf{d}_0 + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{d}_0. \quad (\text{Н.74})$$

Таким образом, скорость подвода энергии имеет вид

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{d}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + (\mathbf{d}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) \dot{\xi}. \quad (\text{Н.75})$$

Н.4.2. Уравнения дипольной пьезоэлектрической среды

Введем в рассмотрение плотность спонтанной поляризации сплошной среды $\mathcal{P}^s$, определив ее следующей формулой,

$$\mathcal{P}^s = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\mathbf{k} \in \Delta V} \mathbf{d}_{0k}}{\Delta V}. \quad (\text{Н.76})$$

Определим плотность пьезоэлектрической поляризации сплошной среды $\mathcal{P}^p$ как предел отношения

$$\mathcal{P}^p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\mathbf{k} \in \Delta V} \mathbf{p}_k}{\Delta V} = \mathcal{P}_1^p + \mathcal{P}_2^p, \quad (\text{Н.77})$$

где

$$\mathcal{P}_1^p = \xi \mathcal{P}^s, \quad \mathcal{P}_2^p = \boldsymbol{\phi} \times \mathcal{P}^s. \quad (\text{Н.78})$$

Вектор $\mathcal{P}^p$ представлен в виде суммы поляризаций, имеющих разную природу: одна часть поляризации связана с поворотом дипольного момента среды, а другая — с изменением его абсолютной величины. Векторы двух составляющих поляризации взаимно ортогональны, и это позволяет однозначно разложить произвольный вектор $\mathcal{P}^p$ по двум указанным типам поляризации.

Воспользовавшись формулой (Н.76), запишем аналог формулы (Н.75) для сплошной среды

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathcal{P}^s \cdot (\nabla \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathcal{P}^s \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + (\mathcal{P}^s \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) \dot{\xi}. \quad (\text{Н.79})$$

Пусть влияние электрического поля представляет собой внешнее воздействие. Тогда мощность этого внешнего воздействия мы можем вычислить двумя способами. С одной стороны, мощность внешних воздействий, приходящихся на единицу объема сплошной среды, равна $\rho(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}})$. С другой стороны, мощность внешних воздействий равна той части скорости подвода энергии $\dot{\mathcal{U}}$, которая зависит от скоростей $\dot{\mathbf{u}}$ и $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. Таким образом, получаем

$$\rho \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathcal{P}^s \cdot (\nabla \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathcal{P}^s \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{H.80})$$

Сравнивая левую и правую части уравнения (H.80), приходим к выводу, что коэффициент при $\dot{\mathbf{u}}$ в правой части уравнения можно отождествить с объемной силой, а коэффициент при $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ в правой части уравнения можно отождествить с объемным моментом

$$\rho \mathbf{F} = \mathcal{P}^s \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \rho \mathbf{L} = \mathcal{P}^s \times \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{H.81})$$

Итак, смысл первых двух слагаемых в правой части выражения (H.79) определен. Последнее слагаемое можно отождествить с величиной $\mathcal{Q}$, характеризующей подвод энергии от внешнего источника (см. уравнение баланса энергии (H.33)),

$$\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{\xi}. \quad (\text{H.82})$$

Уравнения движения (H.21), (H.27) с учетом выражений для объемных сил и моментов (H.81) принимают вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{q} + \mathcal{P}^s \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (\text{H.83})$$

$$\nabla \times \mathbf{m} + \mathbf{q} + \mathcal{P}^s \times \boldsymbol{\varepsilon} = \rho \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{H.84})$$

Введем в рассмотрение вектор электрической индукции $\mathcal{D}$. Воспользовавшись хорошо известной формулой, выразим вектор $\mathcal{D}$ через вектор электрического поля в веществе и вектор плотности пьезоэлектрической поляризации

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{P}^p. \quad (\text{H.85})$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ в формуле (H.85) — это вектор напряженности электрического поля в веществе, который зависит от плотности спонтанной поляризации $\mathcal{P}^s$. Поэтому в выражении для вектора электрической индукции $\mathcal{D}$ второе слагаемое представляет собой плотность пьезоэлектрической поляризации $\mathcal{P}^p$, а не суммарную плотность поляризации $\mathcal{P} = \mathcal{P}^s + \mathcal{P}^p$.

Воспользовавшись формулами (H.77), (H.78), перепишем выражение (H.85) в форме

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \xi \mathcal{P}^s + \boldsymbol{\varphi} \times \mathcal{P}^s. \quad (\text{H.86})$$

Уравнение электростатики (Н.2) с учетом выражения (Н.86) принимает вид

$$\nabla \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E} + \xi \mathbf{P}^s + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{P}^s] = 0. \quad (\text{Н.87})$$

Согласно уравнению (Н.87), принятое в классической теории пьезоэлектричества соотношение Коши–Грина, связывающее между собой $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, в рассматриваемой теории является излишним, и его следует заменить соотношением Коши–Грина, связывающим между собой величину ξ и проекцию вектора $\mathbf{E}$ на вектор плотности спонтанной поляризации. В этом заключается одно из существенных отличий микрополярной теории дипольной пьезоэлектрической среды от классической теории пьезоэлектричества.

Для того чтобы получить соотношения Коши–Грина, проведем следующие преобразования уравнения баланса энергии (Н.33). Представим $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$ в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_f, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_e + \mathbf{m}_f, \quad (\text{Н.88})$$

где $\boldsymbol{\tau}_e$, $\mathbf{q}_e$, $\mathbf{m}_e$ представляют собой упругие (не зависящие от скоростей деформаций) составляющие силовых и моментных напряжений, а $\boldsymbol{\tau}_f$, $\mathbf{q}_f$ и $\mathbf{m}_f$ определяют диссипативные составляющие этих напряжений. Приняв во внимание (Н.88) и выражение для скорости подвода энергии (Н.82), запишем уравнение баланса энергии (Н.33) в форме

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathcal{U}} = & \boldsymbol{\tau}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{q}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}^s) \dot{\xi} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \boldsymbol{\tau}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{q}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \end{aligned} \quad (\text{Н.89})$$

Введем в рассмотрение две скалярных величины ϑ и $\mathcal{H}$, удовлетворяющих уравнению

$$\vartheta \dot{\mathcal{H}} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \boldsymbol{\tau}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{q}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (\text{Н.90})$$

и назовем их температурой и энтропией, соответственно. Для вектора теплового потока $\mathbf{h}$ можно использовать определяющее уравнение

$$\mathbf{h} = k \nabla \vartheta, \quad (\text{Н.91})$$

где k — коэффициент теплопроводности среды. Подставив (Н.91) в (Н.90), получим уравнение теплопроводности

$$k \Delta \vartheta - \vartheta \dot{\mathcal{H}} = -\boldsymbol{\tau}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{q}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{m}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (\text{Н.92})$$

Слагаемые в правой части уравнения (Н.92) характеризуют производство тепла, связанное с диссипативными процессами в кристалле.

Воспользовавшись соотношением (Н.90), перепишем уравнение баланса энергии (Н.33) в форме

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}_e \cdot \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{q}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{m}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^s) \dot{\xi} + \vartheta \dot{\mathcal{H}}. \quad (\text{Н.93})$$

Теперь можно записать соотношения Коши–Грина в следующей форме:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e &= \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}, & \mathbf{q}_e &= -\frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\theta}}, & \mathbf{m}_e &= -\frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^s &= \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \xi}, & \vartheta &= \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{Н.94})$$

Примем гипотезу натурального состояния и представим внутреннюю энергию в виде положительно определенной квадратичной формы

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{U} &= \rho \mathcal{U}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{C}^{(g)} \cdot \mathbf{g} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{C}^{(\theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C}^{(\gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2} C^{(\xi)} \xi^2 + \frac{1}{2} C^{(\mathcal{H})} \mathcal{H}^2 + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{C}^{(\theta g)} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C}^{(\gamma g)} \cdot \mathbf{g} + \xi C^{(\xi g)} \cdot \mathbf{g} + \\ &+ \mathcal{H} C^{(\mathcal{H} g)} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C}^{(\gamma \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \xi C^{(\xi \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathcal{H} C^{(\mathcal{H} \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \\ &+ \xi C^{(\xi \gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathcal{H} C^{(\mathcal{H} \gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + C^{(\xi \mathcal{H})} \xi \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{Н.95})$$

Подставив выражение для внутренней энергии (Н.95) в соотношения Коши–Грина (Н.94), получим определяющие уравнения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e &= \mathbf{C}^{(g)} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{C}^{(\theta g)} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C}^{(\gamma g)} + C^{(\xi g)} \xi + C^{(\mathcal{H} g)} \mathcal{H}, \\ -\mathbf{q}_e &= \mathbf{C}^{(\theta g)} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{C}^{(\theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C}^{(\gamma \theta)} + C^{(\xi \theta)} \xi + C^{(\mathcal{H} \theta)} \mathcal{H}, \\ -\mathbf{m}_e &= \mathbf{C}^{(\gamma g)} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{C}^{(\gamma \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{C}^{(\gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + C^{(\xi \gamma)} \xi + C^{(\mathcal{H} \gamma)} \mathcal{H}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^s &= C^{(\xi g)} \cdot \mathbf{g} + C^{(\xi \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + C^{(\xi \gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + C^{(\xi)} \xi + C^{(\xi \mathcal{H})} \mathcal{H}, \\ \vartheta &= C^{(\mathcal{H} g)} \cdot \mathbf{g} + C^{(\mathcal{H} \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + C^{(\mathcal{H} \gamma)} \cdot \boldsymbol{\gamma} + C^{(\xi \mathcal{H})} \xi + C^{(\mathcal{H})} \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{Н.96})$$

В целях замыкания системы (Н.31), (Н.34), (Н.83), (Н.84), (Н.87), (Н.88), (Н.92), (Н.96) необходимо сформулировать определяющие уравнения для диссипативных составляющих силовых и моментных напряжений $\boldsymbol{\tau}_f$, $\mathbf{q}_f$, $\mathbf{m}_f$.

Следует отметить, что предложенная микрополярная теория дипольной пьезоэлектрической среды не чувствительна к изменению типа вектора напряженности электрического поля. Это обусловлено тем, что во всех уравнениях вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ умножается на вектор плотности спонтанной поляризации $\boldsymbol{\mathcal{P}}^s$. Поскольку вектор плотности поляризации и вектор напряженности электрического поля всегда должны быть векторами одного типа, изменение типа вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ влечет за собой изменение типа вектора $\boldsymbol{\mathcal{P}}^s$. В результате скалярное произведение $\boldsymbol{\mathcal{P}}^s$ на $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ всегда будет полярным скаляром, а векторное произведение $\boldsymbol{\mathcal{P}}^s$ на $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ всегда будет аксиальным вектором.

Н.4.3. Простейшая теория дипольной пьезоэлектрической среды

Пренебрежем инерцией вращения и моментными взаимодействиями, предположив, что $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{m} = \mathbf{0}$. Тогда уравнение баланса кинетического момента (Н.84) примет вид

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\mathcal{P}}^s \times \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (\text{Н.97})$$

Подставив (Н.97) в уравнение баланса количества движения (Н.83), получим

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \nabla \times (\boldsymbol{\mathcal{P}}^s \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^s \cdot \nabla \boldsymbol{\mathcal{E}} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{Н.98})$$

Пренебрежем диссипативными и температурными эффектами. В этом случае с учетом принятого ранее предположения об отсутствии моментных напряжений и соотношения (Н.97) определяющие уравнения (Н.96) принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{C}^{(g)} \cdot \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{C}^{(\theta g)} + \mathbf{C}^{(\xi g)} \xi, \\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^s \times \boldsymbol{\mathcal{E}} &= \mathbf{C}^{(\theta g)} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{C}^{(\theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{C}^{(\xi \theta)} \xi, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}^s &= \mathbf{C}^{(\xi g)} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{C}^{(\xi \theta)} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{C}^{(\xi)} \xi, \end{aligned} \quad (\text{Н.99})$$

где индекс $\mathbf{e}$ у тензора $\boldsymbol{\tau}$ опущен, поскольку диссипативная составляющая отсутствует. За пьезоэффект в определяющих уравнениях (Н.99) отвечают аксиальный тензор третьего ранга $\mathbf{C}^{(\theta g)}$ и полярный тензор второго ранга $\mathbf{C}^{(\xi g)}$. Ранее была определена структура тензоров такого типа для материалов, обладающих определенной симметрией. Воспользуемся этими результатами. Если материал обладает двумя плоскостями зеркальной симметрии (Н.55), то структура тензоров $\mathbf{C}^{(\theta g)}$ и $\mathbf{C}^{(\xi g)}$ определяется формулами (Н.57).

Если группа симметрии материала содержит две плоскости зеркальной симметрии (Н.55) и тензор поворота на любой угол вокруг оси $\mathbf{e}_3$, то структура тензоров $\mathbf{C}^{(\theta g)}$ и $\mathbf{C}^{(\xi g)}$ определяется формулами (Н.66). Если у материала есть два элемента симметрии: поворот вокруг оси $\mathbf{x}_3$ на угол $2\pi/3$ и поворот вокруг оси $\mathbf{x}_1$ на угол π , то структура тензоров $\mathbf{C}^{(\theta g)}$ и $\mathbf{C}^{(\xi g)}$ определяется формулами (Н.58), (Н.59).

Уравнение электростатики (Н.87) с учетом соотношения между углами $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\theta}$ принимает вид

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} + \xi \boldsymbol{\mathcal{P}}^s + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\mathcal{P}}^s + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\mathcal{P}}^s \right] = 0. \quad (\text{Н.100})$$

Таким образом, система уравнений (Н.98)–(Н.100) представляет собой формулировку простейшей теории дипольной пьезоэлектрической среды. Основными неизвестными здесь являются вектор перемещений $\mathbf{u}$, вектор сдвига $\boldsymbol{\theta}$ и величина ξ , характеризующая деформацию диполя.

Н.4.4. Сравнение с классической теорией

Для того чтобы сравнить систему уравнений (Н.98)–(Н.100) с классической теорией пьезоэлектричества, следует получить соотношения, связывающие величины $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ с величинами $\mathbf{g}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Для получения этих соотношений продelaем следующие преобразования. Решим второе и третье уравнения системы (Н.99) относительно величин $\boldsymbol{\theta}$ и ξ . Затем подставим найденные выражения в формулу (Н.99) для $\boldsymbol{\tau}$ и в формулу для $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ — выражение в квадратных скобках в формуле (Н.100). В результате получим

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdots \mathbf{g} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdots \mathbf{g} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{P}}^s \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (\text{Н.101})$$

В данном случае тензоры $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \mathbf{C}^{(g)} - \frac{\mathbf{C}^{(\xi g)} \otimes \mathbf{C}^{(\xi g)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} + \\ & + \left(\mathbf{C}^{(\theta g)*} - \frac{\mathbf{C}^{(\xi g)} \otimes \mathbf{C}^{(\xi \theta)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} \right) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \left(\mathbf{C}^{(\theta g)} - \frac{\mathbf{C}^{(\xi \theta)} \otimes \mathbf{C}^{(\xi g)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{Н.102})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}} = & - \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}^s \otimes \mathbf{C}^{(\xi g)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} + \\ & + \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}^s \times \mathbf{E} + \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}^s \otimes \mathbf{C}^{(\xi \theta)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} \right) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \left(\mathbf{C}^{(\theta g)} - \frac{\mathbf{C}^{(\xi \theta)} \otimes \mathbf{C}^{(\xi g)}}{\mathbf{C}^{(\xi)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{Н.103})$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathcal{P}^s \otimes \mathcal{P}^s}{C^{(\xi)}} \left(1 + \frac{C^{(\xi\theta)} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot C^{(\xi\theta)}}{C^{(\xi)}} \right) - \mathcal{P}^s \times \mathbf{\Lambda} \times \mathcal{P}^s + \\ + \frac{1}{C^{(\xi)}} \left(\mathcal{P}^s \otimes \mathcal{P}^s \times \mathbf{\Lambda} \cdot C^{(\xi\theta)} + \mathcal{P}^s \times \mathbf{\Lambda} \cdot C^{(\xi\theta)} \otimes \mathcal{P}^s \right), \end{aligned} \quad (\text{H.104})$$

где тензор $\mathbf{\Lambda}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{\Lambda} = \left(C^{(\theta)} - \frac{C^{(\xi\theta)} \otimes C^{(\xi\theta)}}{C^{(\xi)}} \right)^{-1}.$$

Знак “звездочка” применительно к тензору третьего ранга $C^{(\theta g)}$ означает циклическую перестановку базисных векторов в триаде.

Сравнительный анализ определяющих уравнений (H.101) и соответствующих уравнений классической теории (H.7), (H.8) показал, что определяющие уравнения для $\boldsymbol{\tau}$ совпадают, а определяющие уравнения для $\mathbf{D}$ отличаются тем, что выражение для $\mathbf{D}$ в мультиполярной теории содержит дополнительное слагаемое, зависящее от ротора вектора перемещений.

Уравнение движения в микрополярной теории (H.98) отличается от классического уравнения (H.1) наличием двух слагаемых, моделирующих воздействие электрического поля. Уравнение электростатики имеет одинаковый вид в обеих теориях.

Заклучение

Микрополярная теория пьезоэлектричества обладает некоторыми важными преимуществами по сравнению с классической теорией.

Во-первых, в этой теории показан способ, посредством которого электрическое поле влияет на материю.

Во-вторых, в рамках указанной теории есть возможность рассматривать неоднородные среды, задавая поле $\mathcal{P}^s(\mathbf{r})$.

Микрополярная теория пьезоэлектричества предназначена для описания процессов, происходящих в полярных пьезоэлектриках, т. е. материалах, у которых вектор спонтанной поляризации $\mathcal{P}^s$ отличен от нуля. Можно существенно упростить микрополярную теорию, исключив из рассмотрения вращательные степени свободы. Однако даже после этого упрощения рассмотренная теория остается несимметричной, чем она, в частности, отличается от классической.

Среда Кельвина и ферромагнетизм¹

Введение

Первые работы, посвященные полярным средам, относятся к концу XIX — началу XX в. (Дюгем, 1894; Э. и Ф. Коссера, 1909). Коссера ввели в рассмотрение упругий континуум, тела-точки которого представляют собой малые абсолютно твердые тела, способные совершать независимые повороты и перемещения [59]. Теория среды построена исходя из постулируемого вариационного принципа. В среде Коссера свободное вращение частиц не допускается. Лорд Кельвин выдвинул концепцию среды, состоящей из гиростатов, которая сопротивлялась бы только угловым деформациям. “Кельвин представил себе модель квазижесткого эфира, построенную из гиростатов. Эта проблема очень сложна. Дело сводилось к отысканию системы, оказывающей сопротивление только деформациям, которые связаны с вращениями. . .” [137]. Математически эта идея Кельвиным не была реализована.

В дальнейшем на многие годы теория полярных сред была забыта. Ее новое рождение началось со статьи К. Трусделла и Дж. Эриксона [188], посвященной 50-летию работы Э. и Ф. Коссера. После этого интерес к полярным средам вновь возрос, и появилось множество работ, посвященных различным вариантам линейной моментной теории упругости [162, 189–205]. В работе [189] построена теория линейной полярной упругой среды и рассмотрено распространение волн в случае изотропии. В работе [162] построена линейная моментная теория термоупругости.

¹ Приложение написано Е. Ф. Грековой и Е. А. Ивановой. Материал приложения основан на статье Е. Ф. Грековой, П. А. Жилина [187] “Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики” (Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. вып. по проблемам нелинейной упругости. — 2000. — С. 25–41). (Примеч. ред.)

Некоторые авторы (см., например, [192, 196]) рассматривали псевдоконтинуум Коссера, тела-точки которого не могут совершать независимые повороты; при этом микровращения моделировались при помощи ротора перемещений.

Существует множество работ, посвященных одномерным и двумерным средам Коссера, при помощи которых моделируются стержни и оболочки, [188, 202, 206]. П. А. Жилиным разработана нелинейная теория двумерной полярной среды [67, 68, 92, 145] — теория неклассических простых оболочек². Предложенный в работах П. А. Жилина метод получения основных уравнений опирается на фундаментальные принципы механики, при этом важную роль играет уравнение баланса энергии, посредством которого определяется вид тензоров деформации. Этот подход применим и при построении трехмерной теории полярной среды.

В природе существуют различные примеры сред, запасающих энергию путем вращения. Так, в работах [207, 208] исследуются парафины, в которых с ростом температуры цепочки атомов начинают вращаться все с большей скоростью. Сначала повороты носят колебательный характер, а затем, начиная с определенной температуры, угловая скорость собственного вращения не меняет знака и возрастает по величине. При этом для наблюдателя, живущего в относительно “медленном” времени, цепочки кажутся осесимметричными.

В магнитных материалах намагниченность связана через гиромагнитное соотношение с кинетическим моментом материального объема среды. Магнитная индукция создает объемный момент, действующий на материальный объем. Таким образом, магнитный материал является полярной средой с немалым кинетическим моментом. Это дает возможность установить аналогию между нелинейной средой Коссера, частицы которой обладают большой скоростью собственного вращения, и упругими ферромагнетиками в состоянии магнитного насыщения. Идея рассмотрения сред с большой угловой скоростью вращения частиц выдвигалась еще в начале века, однако математический аппарат не позволял ее формализовать. В настоящее время теории таких сред построены и применяются для описания магнетиков. Феноменологическая теория деформируемых ферромагнетиков была предложена Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [209] и развита в работах [210–213] и др. Обзор развития теории можно найти в [214]. Из работ, изданных в последние годы, можно упомянуть [215, 216].

Примером среды с частицами, обладающими динамическим спином, может служить нелинейная упругая среда, состоящая из вращающихся частиц с

² О теории неклассических простых оболочек П. А. Жилина см. Приложение J.

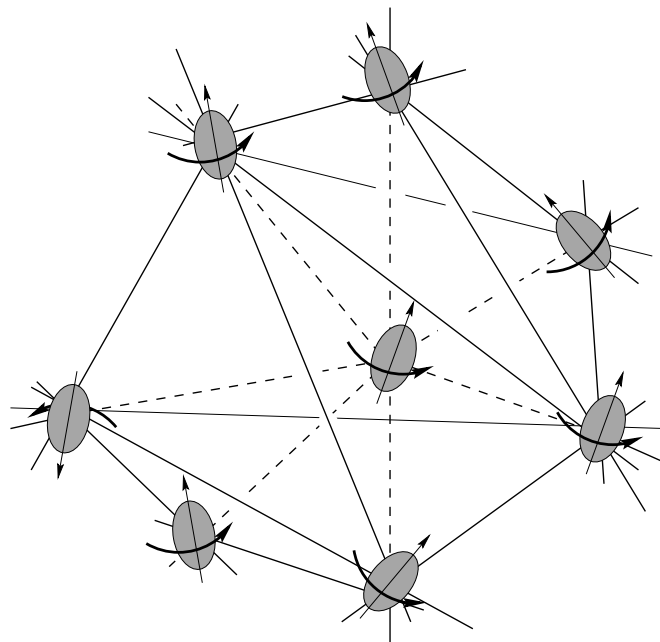


Рис. I.1. Обобщенная среда Кельвина

осевой симметрией (рис. I.1). Тела-точки рассматриваемой среды, в отличие от частиц традиционно рассматриваемой среды Коссера, могут вращаться вокруг собственной оси с большой угловой скоростью. При этом остальные перемещения и повороты будут конечными. Назовем такую среду обобщенной средой Кельвина, поскольку, в отличие от среды Кельвина, она обладает трансляционными степенями свободы и сопротивляется трансляционным деформациям. Уравнения обобщенной среды Кельвина для случая малых перемещений и малых углов нутации, но при условии большой скорости собственного вращения частиц были получены в работах [138,217]. В работе [217] проведено исследование движения среды определенного типа симметрии при условии тождественного равенства нулю трансляционных перемещений. Показано влияние гироскопического члена в сравнении с волновыми процессами в безграничной линейной среде Коссера, исследованными в [189]. Гироскопия приводит к “раздвоению” дисперсионной ветви угловых колебаний, так как вносит в систему асимметрию, в результате чего появляются две различные частоты отсечки.

В данной работе ставится задача рассмотреть ферромагнетики с позиций механики, используя фундаментальные законы. Разумеется, при этом необходимо учитывать природу рассматриваемых взаимодействий. Однако феноменологический подход обладает тем преимуществом, что при его использовании делается минимум предположений о том, каков конкретный вид этих

взаимодействий. Материал рассматривается как “черный ящик”, и его уравнения строятся исходя из нескольких фундаментальных принципов и соображений симметрии. Такой подход обладает, как представляется, максимальной общностью.

Далее демонстрируется аналогия между ферромагнетиками и обобщенной средой Кельвина. Существование этой аналогии позволяет применить метод построения определяющих уравнений полярной среды к ферромагнетикам и получить более общую теорию, чем в [214]. В дальнейшем показано, что уравнения динамики и определяющие уравнения обобщенной среды Кельвина аналогичны уравнениям динамики и определяющим уравнениям упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения и приближении квазимагнитостатики (см. [214]). Взаимное влияние трансляционных и угловых деформаций учитывается в наиболее общей форме, что позволяет описать эффекты, аналогичные магнитоакустическому резонансу в ферромагнетиках, который представляет собой явление возбуждения волн трансляционных перемещений при помощи спиновых волн, и наоборот [218, 219].

I.1. Основные уравнения обобщенной среды Кельвина

I.1.1. Кинематика обобщенной среды Кельвина

Рассмотрим обобщенную среду Кельвина — упругую деформируемую среду, состоящую из вращающихся частиц с осевой симметрией, имеющих и трансляционные, и угловые степени свободы (см. рис. I.1). Тела-точки среды взаимодействуют между собой. Примем, что их взаимодействие определяется лишь геометрической конфигурацией системы в данный момент времени. Учитывая осесимметричность тел-точек, делаем вывод: любое из тел-точек системы может свободно поворачиваться вокруг своей оси симметрии, не испытывая сопротивления со стороны других тел. Напротив, любое изменение ориентации одного из тел-точек, связанное с изменением пространственного положения его оси симметрии, приводит к появлению реактивных усилий и моментов в системе. Руководствуясь таким мысленным представлением, построим теорию обобщенной среды Кельвина с позиций механики сплошных сред.

Обозначим $\mathbf{q}^s$ — материальные (лагранжевы) координаты точки среды, $\mathbf{r}(\mathbf{q}^s)$ и $\mathbf{R}(\mathbf{q}^s)$ — радиус-векторы, определяющие положение тела-точки в от-

счетной и актуальной конфигурациях, соответственно. Обозначим

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{R} \quad (\text{I.1})$$

базисы в отсчетной и актуальной конфигурациях, соответственно. Выберем $\mathbf{r}_i$ ортонормированным. Набла-операторы в отсчетной и актуальной конфигурациях определяются формулами $\nabla = \mathbf{r}^i \partial_i$ и $\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{R}^i \partial_i$, где $\mathbf{r}^i$ и $\mathbf{R}^i$ — соответствующие взаимные базисы. Введем следующие обозначения: $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ — трансляционное перемещение тела-точки; $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ — трансляционная скорость тела-точки.

Свяжем с каждым телом-точкой среды ортонормированный векторный базис $\mathbf{D}_k(q^s)$, “вмороженный” в тело-точку, где $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{m}$ — единичный вектор, направленный по оси тела-точки. Пусть в отсчетной конфигурации $\mathbf{D}_k = \mathbf{d}_k$, $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{m}_0$. Взаимный базис $\mathbf{D}^k$ ($\mathbf{D}^k \cdot \mathbf{D}_i = \delta_i^k$) совпадает с $\mathbf{D}_k$.

Введем в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P} = \mathbf{D}^k \otimes \mathbf{d}_k$, определяющий поворот тела-точки. Очевидно, что $\mathbf{D}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k$ и

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad (\text{I.2})$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Тензор поворота тела-точки можно представить, применяя углы Эйлера [31]

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0). \quad (\text{I.3})$$

Здесь $\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{m}_0$ — взаимно ортогональные векторы, $|\mathbf{l}_0| = |\mathbf{m}_0| = 1$, ψ , θ , φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно. Заметим, что разложение (I.3) сопоставляет каждому тензору поворота три угла Эйлера. Это разложение справедливо для каждого момента времени. Оно означает, что в положении, соответствующем данному моменту времени $\mathbf{t}$, тело могло оказаться, повернувшись вокруг вектора $\mathbf{m}_0$ на угол $\varphi(\mathbf{t})$, затем, отклонив свою ось от вектора $\mathbf{m}_0$ на угол $\theta(\mathbf{t})$ и вновь повернувшись вокруг $\mathbf{m}_0$, уже не совпадающего с осью тела, на угол $\psi(\mathbf{t})$. Реальное движение при этом может происходить совершенно иначе.

Вектор угловой скорости тела-точки $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ есть по определению вектор, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (\text{I.4})$$

Если тензор поворота представлен посредством углов Эйлера (I.3), вектор угловой скорости вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m}_0 + \dot{\theta} \mathbf{l} + \dot{\varphi} \mathbf{m}, \quad (\text{I.5})$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{l} = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{l}_0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{m}_0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = 0.$$

I.1.2. Меры деформации полярной среды

Аналог уравнения Пуассона (I.4) для пространственной координаты q^i записывается следующим образом:

$$\partial_i \mathbf{P} = \Phi_i \times \mathbf{P}. \quad (\text{I.6})$$

Очевидно, что Φ_i характеризуют изменение ориентации тел-точек по пространственным координатам. Это векторы, аналогичные вектору угловой скорости, где вместо времени выступают координаты. В терминах углов Эйлера

$$\Phi_i = (\partial_i \psi) \mathbf{m}_0 + (\partial_i \theta) \mathbf{l} + (\partial_i \varphi) \mathbf{m}. \quad (\text{I.7})$$

Введем *меры деформации* полярной среды общего вида

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r}^i \otimes \Phi_i \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.8})$$

Тензор $\mathbf{A}$ отвечает и за перемещения, и за повороты, тензор $\mathbf{K}$ зависит только от угловой деформации. В дальнейшем будет показано, что эти тензоры естественно возникают при формулировке уравнения баланса энергии. Легко доказать, что

$$\mathbf{K} = -(\nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T) \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P})/2. \quad (\text{I.9})$$

Другое представление для $\mathbf{K}$ можно получить, используя (I.7),

$$\mathbf{K} = (\nabla \psi \mathbf{m}_0 + \nabla \theta \mathbf{l} + \nabla \varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.10})$$

Тела-точки обобщенной среды Кельвина обладают осевой симметрией. В связи с этим, в отличие от упругой полярной среды общего вида, обобщенная среда Кельвина не должна реагировать ни на поворот тела-точки вокруг своей оси, ни на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Следовательно, меры деформации обобщенной среды Кельвина не должны зависеть ни от угла φ , ни от его градиента. Меры деформации обобщенной среды Кельвина, удовлетворяющие этим условиям, будут приведены далее.

I.1.3. Динамические характеристики полярной среды

Пусть $\rho_0(\mathbf{R}, t)$ — объемная плотность массы в отсчетной конфигурации. Тогда объемная плотность массы в актуальной конфигурации имеет вид

$$\rho(\mathbf{R}, t) = (\det \nabla \mathbf{R})^{-1} \rho_0(\mathbf{R}, t). \quad (\text{I.11})$$

Массовая плотность кинетической энергии определяется формулой

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{I.12})$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{P}^T$ — массовая плотность тензора инерции в актуальной конфигурации; $\mathbf{J}_0$ — массовая плотность тензора инерции в отсчетной конфигурации. Поскольку тела-точки обладают осевой симметрией, то $\mathbf{J}$ — трансверсально-изотропный тензор,

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.13})$$

Здесь λ и μ — массовые плотности осевого и экваториального моментов инерции, соответственно.

Массовая плотность количества движения определяется выражением

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{V}. \quad (\text{I.14})$$

Массовая плотность кинетического момента, вычисленного относительно начала инерциальной системы отсчета, определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}_2 = \mathbf{R} \times \mathcal{K}_1 + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.15})$$

Первое слагаемое в формуле (I.15) называется плотностью момента количества движения, второе — плотностью собственного кинетического момента.

I.1.4. Тензоры напряжений. Законы динамики Эйлера

Введем следующие обозначения:

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{R}, t)$ — тензор силовых напряжений Коши; $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ — вектор напряжения, действующий на элементарной площадке поверхности; $\mathbf{n}$ — нормаль к этой поверхности;

$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{R}, t)$ — тензор моментных напряжений, введенный аналогично тензору силовых напряжений; $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}$, где $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{n})}$ — вектор моментного напряжения, действующий на элементарную поверхность с нормалью $\mathbf{n}$;

$\mathbf{Q}(\mathbf{R}, t)$ — массовая плотность внешней силы;

$\mathbf{L}(\mathbf{R}, t)$ — массовая плотность внешнего момента.

Первый закон динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения) для объема V , ограниченного гладкой поверхностью Σ , выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{Q} dV + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau}_{(n)} d\Sigma. \quad (\text{I.16})$$

С помощью традиционных рассуждений уравнение (I.16) приводится к локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{Q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{I.17})$$

Второй закон динамики Эйлера (уравнение баланса кинетического момента) для объема V , ограниченного поверхностью Σ , имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_2 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{Q}) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\mu}_{(n)} + \mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}_{(n)}) d\Sigma. \quad (\text{I.18})$$

С помощью традиционных рассуждений уравнение (I.18) приводится к локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \rho (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})'. \quad (\text{I.19})$$

Далее будет рассматриваться случай, когда плотности моментов инерции λ и $\boldsymbol{\mu}$ малы, угловая скорость собственного вращения $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ велика, так что плотность собственного кинетического момента $\lambda \dot{\boldsymbol{\phi}}$ конечна, а все остальные составляющие вектора собственного кинетического момента много меньше, чем $\lambda \dot{\boldsymbol{\phi}}$. С учетом сделанных предположений, уравнение (I.19) можно переписать в виде

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \rho (\lambda \ddot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{m} + \boldsymbol{\omega} \times \lambda \dot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{m}). \quad (\text{I.20})$$

В дальнейшем будет принято еще одно предположение, а именно: среда не должна реагировать на поворот тела-точки вокруг своей оси и на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Будет показано, что следствием указанных предположений является так называемое “шестое уравнение равновесия”, которое может быть представлено в форме

$$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times}) \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (\text{I.21})$$

Кроме того, предполагается, что проекция внешнего момента $\rho \mathbf{L}$ на вектор $\mathbf{m}$ равна нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае $\ddot{\phi} = 0$ и уравнение (I.20) принимает вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \rho \lambda \dot{\phi} \mathbf{m}. \quad (\text{I.22})$$

Разумеется, уравнение (I.22) представляет собой приближенную форму уравнения баланса кинетического момента.

I.1.5. Нелинейные определяющие уравнения полярной среды

Пусть $\mathcal{U}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ — массовая плотность энергии деформации (внутренней энергии). Будем рассматривать только адиабатические процессы. В этом случае уравнение баланса энергии выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma. \quad (\text{I.23})$$

Воспользовавшись теоремой о дивергенции и законами динамики Эйлера (I.17), (I.19), получим локальную форму уравнения баланса энергии (I.23)

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} - \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.24})$$

Уравнение (I.24) можно преобразовать к виду

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}_*^T \cdot \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\mu}_*^T \cdot \dot{\mathbf{K}}, \quad (\text{I.25})$$

где введены в рассмотрение *энергетические тензоры силовых и моментных напряжений*

$$\boldsymbol{\tau}_* = \nabla \mathbf{R}^{-T} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\mu}_* = \nabla \mathbf{R}^{-T} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.26})$$

Согласно уравнению (I.25), введенные ранее (см. формулы (I.8)) меры деформаций $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$ естественны для описания деформации среды, так как на этих мерах деформации совершают работу энергетические тензоры напряжений.

Мы рассматриваем упругую среду, т. е. такую среду, плотность внутренней энергии которой зависит лишь от мер деформации в данный момент времени и в данной точке: $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{A}, \mathbf{K})$. Формулы (I.25), (I.26) позволяют получить корректные определяющие уравнения [67, 92] нелинейной упругой полярной среды

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{I.27})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (\text{I.28})$$

Таким образом, задав внутреннюю энергию $\mathcal{U}$ как функцию мер деформации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$, можно получить конкретный вид определяющих уравнений.

I.1.6. Нелинейные определяющие уравнения обобщенной среды Кельвина

Поскольку тела-точки обобщенной среды Кельвина обладают осевой симметрией, эта среда не должна реагировать на поворот тела-точки вокруг своей оси и на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Таким образом, энергия деформации обобщенной среды Кельвина не является функцией общего вида от $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$, а подчиняется ограничениям

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \varphi} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.29})$$

Можно найти *приведенные тензоры деформации*, такие, что, если $\mathcal{U}$ зависит лишь от них, ограничения (I.29) удовлетворяются автоматически. Метод, используемый для нахождения приведенных тензоров деформации, был предложен в теории неклассических упругих оболочек [67]. Суть этого метода заключается в следующем.

На первом этапе находятся приведенные тензоры деформации, такие, что, если $\mathcal{U}$ зависит лишь от них, первое уравнение системы (I.29) выполняется автоматически. Для этого первое уравнение (I.29) переписывается в виде

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{m}_0) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{m}_0) = 0. \quad (\text{I.30})$$

При переходе от (I.29) к (I.30) использовалась формула сложного дифференцирования и учитывалось, что $\partial_\varphi \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{m}_0$, $\partial_\varphi \mathbf{K} = \mathbf{K} \times \mathbf{m}_0$.

Характеристической системой для (I.30) будет

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{A} \times \mathbf{m}_0, \quad \frac{d\mathbf{K}}{ds} = \mathbf{K} \times \mathbf{m}_0. \quad (\text{I.31})$$

Первые интегралы³ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I.31) суть решения уравнения в частных производных (I.30), и наоборот [70]. Таким образом, плотность энергии деформации $\mathcal{U}$ есть функция первых интегралов (I.31). Это система обыкновенных дифференциальных урав-

³ Первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений по определению есть функция, производная которой, вычисленная с учетом системы, равна нулю.

нений 18-го порядка, имеющая 17 независимых скалярных первых интегралов [70]. Найдя эти интегралы, мы получим 17 независимых, не зависящих от φ функций от мер деформации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$.

На втором этапе из системы приведенных тензоров деформации, найденных на первом этапе⁴, следует исключить меры деформации, зависящие от $\nabla\varphi$. В результате получится система приведенных тензоров деформации, таких, что, если $\mathcal{U}$ зависит лишь от них, не только первое, но и второе уравнение системы (I.29) выполняется автоматически. Поскольку $\nabla\varphi$ — векторная величина, содержащая три независимые скалярные функции, исключая меры деформации, зависящие от $\nabla\varphi$, мы исключаем три скалярные функции от мер деформации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$. Таким образом, система приведенных тензоров деформации должна содержать 14 независимых скалярных функций.

Далее приведены две из возможных систем приведенных тензоров деформации и соответствующих им нелинейных определяющих уравнений обобщенной среды Кельвина.

Вариант 1. Система тензоров деформации $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{G} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{E})/2 = (\nabla\mathbf{R} \cdot \nabla\mathbf{R}^T - \mathbf{E})/2,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A}^T = (\nabla\psi \otimes \mathbf{m}_0 + \nabla\theta \otimes \mathbf{l}) \cdot \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \nabla\mathbf{R}^T, \quad (\text{I.32})$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 = \nabla\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}.$$

В соотношениях (I.32) в качестве $\tilde{\mathbf{a}}$ можно выбрать как $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0$, так и $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E} \times \mathbf{m}_0$. При этом соответствующие системы тензоров деформации обозначаются $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. В тех случаях, когда имеется в виду любая из систем $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, будем говорить о системе $\mathfrak{A}$.

Определяющие уравнения, которые получаются при использовании системы тензоров деформации $\mathfrak{A}$, имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \nabla\mathbf{R}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{m}_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \right) \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{I.33})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \rho \nabla\mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}}^T \cdot \mathbf{P}^T, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{G}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}).$$

⁴ При нахождении первых интегралов (I.31) считается, что $\nabla\varphi$ и φ являются независимыми в фиксированной точке континуума.

Вариант 2. Система тензоров деформации $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top - \mathbf{E})/2 = (\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^\top - \mathbf{E})/2, \\ \Phi &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{K}^\top = \sin^2 \theta \nabla \psi \otimes \nabla \psi + \nabla \theta \otimes \nabla \theta, \\ \gamma &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}, \quad \alpha = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{m}_0,\end{aligned}\tag{I.34}$$

В соотношениях (I.34) $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0$. Обратим внимание на то, что α представляет собой “перекрестный” вид деформации, определяемый произведением градиента поворота и градиента перемещений, тогда как остальные тензоры деформаций зависят либо от градиентов перемещений, либо от градиентов поворотов.

Определяющие уравнения, которые получаются при использовании системы тензоров деформации $\mathfrak{B}$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau &= \rho \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} \otimes \mathbf{m}_0 + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{P}^\top, \\ \mu &= \rho \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \left(2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{P}^\top, \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}(\mathfrak{G}, \Phi, \gamma, \alpha).\end{aligned}\tag{I.35}$$

Чтобы убедиться в том, что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ содержат все независимые интегралы (I.31), следует учесть тот факт, что число независимых интегралов есть ранг матрицы Якоби [70], состоящей из частных производных от компонент приведенных тензоров деформации по компонентам тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}$. Вычисление показало, что в обоих случаях ранг матрицы Якоби равен 14, т. е. системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ действительно содержат все независимые интегралы (I.31).

I.1.7. Ограничения на тензоры напряжений в обобщенной среде Кельвина

Плотность энергии деформации в обобщенной среде Кельвина должна удовлетворять ограничениям (I.29). Ранее эти ограничения записаны в терминах внутренней энергии и тензоров деформации. Получим формулировку данных ограничений в терминах тензоров напряжений.

Условие, что внутренние напряжения в обобщенной среде Кельвина не могут возникнуть вследствие наличия градиента угла собственного вращения частиц, может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \varphi} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (\text{I.36})$$

Предположение, что внутренняя энергия не зависит от угла φ , позволяет получить уравнение, аналогичное *шестому уравнению равновесия* в теории оболочек [92]:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{m}. \quad (\text{I.37})$$

Нетрудно показать, что следствием ограничений (I.36), (I.37) является уравнение (I.21), которое использовалось при выводе уравнения баланса кинетического момента (I.22).

Заметим, что если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma})$, т. е. $\mathcal{U}$ не зависит от $\boldsymbol{\alpha}$ (см. формулы (I.34)), то

$$\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \boldsymbol{\mu}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{m} = 0. \quad (\text{I.38})$$

В общем случае $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} \neq 0$. Предполагая $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$, мы теряем зависимость внутренней энергии от одного из видов деформации. Такая зависимость может присутствовать в реальности, поскольку не запрещена фундаментальными принципами механики.

I.1.8. Линейная теория обобщенной среды Кельвина

Примем гипотезу натурального состояния, т. е. предположим, что в отсчетной конфигурации напряжения равны нулю.

Пусть углы нутации и перемещения малы

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \quad \mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}. \quad (\text{I.39})$$

Получим линейную теорию из нелинейной. Будем использовать обозначение $[\cdot]_n$ для члена порядка малости n по $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\theta}$ в разложении какой-либо функции.

Согласно (I.8)

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_0 &= \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), & [\mathbf{K}]_0 &= \mathbf{0}, \\ [\mathbf{A}]_1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), & [\mathbf{K}]_1 &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

где введены в рассмотрение тензоры малых деформаций

$$\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{f} = \nabla \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{I.41})$$

Разложим в ряд по малым $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\theta}$ определяющие уравнения (I.33), полагая $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$,

$$[\boldsymbol{\tau}]_0 = \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right]_0 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 \otimes \mathbf{m}_0 \right), \quad [\boldsymbol{\mu}]_0 = \rho_0 \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{I.42})$$

Принимая во внимание гипотезу натурального состояния и гипотезу независимости напряжений от скорости собственного вращения частиц, необходимо исходить из того, что

$$[\boldsymbol{\tau}]_0 = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{\mu}]_0 = \mathbf{0}.$$

Отсюда можно заключить, что

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right]_0 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 \otimes \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.43})$$

Продолжим разложение в ряд (I.33), учитывая (I.41), (I.43),

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}]_1 &= \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right]_1 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \right]_0 \cdot \mathbf{g} + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_1 \otimes \mathbf{m}_0 + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \right]_0 \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} \right), \\ [\boldsymbol{\mu}]_1 &= \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_1 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Положив $\mathcal{U}(\mathbf{g}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma})$ достаточно гладкой в окрестности отсчетной конфигурации и проделав соответствующие выкладки, получим линейные определяющие уравнения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})^T, \\ \boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f})^T. \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Здесь $\mathbf{X} = X^{mnkl} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Y} = Y^{mn\alpha l} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_l$ и $\mathbf{Z} = Z^{\alpha m \beta l} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_l$ — тензоры упругих постоянных:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}^2} \right]_0 + \mathbf{m}_0 \otimes \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G} \partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 + \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \otimes \mathbf{m}_0 \right) \right]_0 + \\
&+ \mathbf{m}_0 \otimes \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{m}_0 \right) \right]_0 + \mathbf{e}_0 \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{m}_0, \\
\mathbf{Y} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{mn} \partial F_{k\alpha}} \right]_0 \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_k + \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \gamma_s \partial F_{k\alpha}} \right]_0 \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_s \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{f}_0, \\
\mathbf{Z} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial F_{m\alpha} \partial F_{k\beta}} \right]_0 \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_k,
\end{aligned} \tag{I.46}$$

где $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{f}_0$ определяются соотношениями

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 = \mathbf{f}_0 \otimes \mathbf{m}_0.$$

Последние соотношения могут быть получены из (I.43) с учетом симметричности тензора деформации Коши–Грина $\mathfrak{G}$.

Линейное приближение для аналога *шестого уравнения равновесия* (I.37) совпадает с линейным вариантом (I.38), поскольку, по нашему предположению, в отсчетной конфигурации $\nabla \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ и правая часть нелинейного варианта аналога *шестого уравнения равновесия* (I.37) равна нулю в линейном приближении. Итак, мы видим, что линеаризованные ограничения (I.37), (I.36) выглядят как

$$[\boldsymbol{\tau}_\times]_1 \cdot \mathbf{m}_0 = 0, \quad [\boldsymbol{\mu}]_1 \cdot \mathbf{m}_0 = 0. \tag{I.47}$$

Ограничения на тензоры упругих модулей, следующие из (I.47),

$$\mathbf{m}_0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{m}_0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{Y} = 0. \tag{I.48}$$

Согласно (I.46) $\mathbf{X} = X^{mnkl} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Y} = Y^{mn\alpha l} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Z} = Z^{\alpha m \beta l} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_l$ удовлетворяют (I.48), в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ первая и последняя пара индексов перестановочны, и нет каких-либо других ограничений на вид этих тензоров.

Приведенные ранее линейные определяющие уравнения можно записать иначе:

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}, \quad [\boldsymbol{\mu}]_1 = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad (\text{I.49})$$

где выражение для внутренней энергии в линейной теории имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdots \mathbf{X} \cdots \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdots \mathbf{Y} \cdots \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{f} \cdots \mathbf{Z} \cdots \mathbf{f} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}^S \cdots \mathbf{T} \cdots \mathbf{g}^S + \mathbf{g}^A \cdots \mathbf{U} \cdots \mathbf{g}^A) + \\ &+ \mathbf{g}^S \cdots \mathbf{W} \cdots \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^S \cdots \mathbf{H} \cdots \mathbf{f} + \mathbf{g}^A \cdots \mathbf{N} \cdots \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{f} \cdots \mathbf{Z} \cdots \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Здесь $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{N}$ — тензоры упругих модулей, удобные для использования. Тензоры $\mathbf{Y} = \mathbf{H} + \mathbf{N}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ ответственны за взаимосвязь между угловыми и трансляционными перемещениями.

Выражения (I.47)–(I.50) можно найти в [217], где предложена линейная теория среды Кельвина.

На первый взгляд может показаться удивительным, что в тензорах $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$ в сумме 15 независимых компонент, в то время как в нелинейной теории существует лишь 14 независимых скалярных мер деформации, от которых может зависеть внутренняя энергия. Дело в том, что в силу ограничений (I.48) не все компоненты $\mathbf{g}$ входят в выражение для $\mathcal{U}$, а именно не играет роли величина $\mathbf{g}_\times \cdot \mathbf{m}_0$: в выражении (I.50) она умножается на нули. Можно было бы вместо $\mathbf{g}$ использовать, допустим, $\mathbf{g}^S$ и $\mathbf{g}^A \cdot \mathbf{m}_0$ и не ставить ограничений типа (I.48) на тензоры упругих модулей.

С формальной точки зрения можно использовать для получения линейных определяющих уравнений систему (I.35) точно так же, как и (I.33) или какие-либо другие нелинейные определяющие уравнения, полученные описанным методом для различных систем мер деформации. Однако процедуру линеаризации гораздо проще провести для (I.33), потому что линейные члены в разложении тензоров деформации $\mathfrak{A}$ не равны нулю и можно совершить переход от (I.44) к (I.45), (I.46). Действительно, $\mathcal{U}$, вообще говоря, не обязана быть достаточно гладкой функцией своих аргументов. Так как линейные по $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\theta}$ члены разложения $\mathfrak{G}$, $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\gamma}$ не равны нулю, предположение о существовании второй производной $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma})$ по своим аргументам в окрестности отсчетной конфигурации равносильно предположению о том, что линейная теория имеет право на существование. Если использовать систему (I.35), то аналогичное предположение о гладкости $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})$ не даст возможности

получить линейную теорию общего вида, так как $[\Phi]_1 = \mathbf{0}$. Использование вместо Φ тензора $\sqrt{\Phi}$ также ничего не даст, поскольку последний не линеаризуем по θ : для малых θ можно записать $\sqrt{\Phi} \approx \sqrt{\nabla\theta \cdot \nabla\theta^T}$. Таким образом, для получения линейной теории при использовании системы (I.35) нельзя предполагать, что $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \Phi, \gamma, \alpha)$ является достаточно гладкой функцией. В связи с этим теоретически получить линейную теорию из нелинейной можно при использовании любой независимой системы тензоров деформации, однако практически осуществить это удобно, используя систему (I.33) или иную систему тензоров деформации, линейные члены которых по $\mathbf{u}$, θ существуют и не равны нулю. Еще раз отметим, что в реальности линейная теория может быть несправедливой и предположения о гладкости $\mathcal{U}$ по каким-либо аргументам, вообще говоря, обосновать невозможно.

Уравнение баланса количества движения в линейной теории выглядит так же, как (I.17). Чтобы записать уравнение баланса кинетического момента, необходимо линеаризовать правую часть уравнения (I.22). Тензоры силовых и моментных напряжений $\mathbf{t}$, $\mathbf{m}$ в левых частях уравнений динамики определяются формулами (I.45).

Линейные уравнения динамики обобщенной среды Кельвина в перемещениях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})^T + \rho \mathbf{Q} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f})^T - (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})_{\times} + \rho \mathbf{L} &= \rho \dot{\theta} \times \lambda \dot{\phi} \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

I.2. Ферромагнетики и обобщенная среда Кельвина

I.2.1. Некоторые сведения об упругих непроводящих ферромагнетиках в состоянии магнитного насыщения

Рассмотрим упругие непроводящие ферромагнетики в состоянии магнитного насыщения. Приведем некоторые факты, которые можно найти в [214–216].

Часто ферромагнитную сплошную среду условно разделяют на два взаимодействующие между собой континуума: континуум решетки — носитель деформации и спиновый континуум, описывающий распределение поля намагниченности. С каждой точкой материальной среды однозначно связан вектор намагниченности или спина, так что спиновый континуум неподвижен относительно континуума решетки. Спиновый континуум чувствителен только к моментным воздействиям, которые могут быть оказаны со стороны решетки.

ки (спин-решеточное взаимодействие) или посредством внешнего магнитного поля.

Далее все фундаментальные законы записываются сразу для материального объема объединенного континуума. При этом используется приближение квазимагнитостатики.

Пусть в каждой точке ферромагнетика заданы перемещение $\mathbf{u}$ и вектор массовой плотности *магнитного момента*⁵ $\mathbf{S}$. Состояние магнитного насыщения — это состояние ферромагнетика, в котором $\mathbf{S} = |\mathbf{S}|$ не меняется в пространстве и времени. *Намагниченность*⁶ представляет собой объемную плотность магнитного момента $\mathbf{M} = \rho \mathbf{S}$.

Объемная плотность собственного кинетического момента ферромагнетика равна

$$\rho \mathbf{S} / \gamma,$$

где γ — *гиромагнитное отношение*⁷ (постоянная величина).

Внешняя магнитная индукция в непроводящем ферромагнетике может создавать как массовую силу, так и массовый момент. Массовая плотность внешней силы, вызванной внешней магнитной индукцией $\mathbf{B}^e$, определяется формулой⁸ [213]

$$\mathbf{Q}^{\text{em}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.52})$$

⁵ Магнитный момент (магнитный дипольный момент) — основная величина, характеризующая магнитные свойства вещества. В соответствии с классической теорией электромагнитных явлений, источниками магнетизма являются электрические макро- и микротоки. Элементарным источником магнетизма считается ток в замкнутом контуре. Магнитным моментом обладают элементарные частицы, атомные ядра, а также электронные оболочки атомов и молекул. Магнитный момент элементарных частиц, согласно представлениям квантовой механики, обусловлен существованием у них спина — собственного кинетического момента.

⁶ Намагниченность — векторная физическая величина, характеризующая магнитное состояние макроскопического физического тела. Определяется как магнитный момент, приходящийся на единицу объема вещества. Намагниченность вещества зависит от величины внешнего магнитного поля, свойств вещества и температуры.

⁷ Гиромагнитное отношение (магнитомеханическое отношение) — отношение дипольного магнитного момента элементарной частицы (или системы элементарных частиц) к ее кинетическому моменту. В классической теории гиромагнитное отношение является коэффициентом пропорциональности между угловой скоростью прецессии магнитного момента, помещенного во внешнее магнитное поле, и вектором магнитной индукции.

⁸ В настоящее время нет общепринятой точки зрения относительно того, как должна выглядеть формула для плотности внешней силы $\mathbf{Q}^{\text{em}}$. Некоторые авторы (см., например, [214, 220]) используют формулу $\mathbf{Q}^{\text{em}} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{S}$. По нашему мнению, формула (I.52) более достоверна.

Массовая плотность внешнего момента, вызванного магнитной индукцией $\mathbf{B}^e$, вычисляется по формуле [213]

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} \times \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.53})$$

*Обменное взаимодействие*⁹ (взаимодействие между спинами, зависящее от их относительного поворота) приводит к близкодействующему моментному взаимодействию. Поверхностная плотность момента, действующего на элементарную поверхность с нормалью $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{n})}^{\text{exc}} = \mathbf{S} \times \mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})}, \quad (\text{I.54})$$

где $\mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})}$ — так называемая “контактная обменная сила”¹⁰. Введем в рассмотрение тензор обменных взаимодействий $\mathbf{\Gamma}$, определяемый уравнением

$$\mathbf{S} \times (\rho \mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{0}. \quad (\text{I.55})$$

Кроме момента, вызванного обменным взаимодействием, в ферромагнетике действуют силы упругости и *спин-решеточный момент*. Последний зависит от направления магнитного момента в данной точке относительно решетки.

⁹ Обменное взаимодействие в магнетизме считается специфически квантовомеханическим эффектом, который проявляется как связь между носителями магнетизма в атомных ядрах, атомах, молекулах, газах и конденсированных средах. Считается, что обменное взаимодействие имеет электростатическое происхождение. Обычно энергия электрического взаимодействия микрочастиц существенно больше энергии магнитного взаимодействия. В классической физике все магнитные свойства микро- и макросистем определяются только магнитными взаимодействиями микрочастиц. В то же время точки Кюри многих ферромагнетиков (т. е. температура, выше которой ферромагнетизм исчезает) порядка 10^2 – 10^3 К, а соответствующие этим температурам энергии в десятки или сотни раз больше любой возможной энергии чисто магнитной связи. Кроме того, опыты Я. Г. Дорфмана (1927) по определению отклонения β -частиц в спонтанно намагниченном ферромагнетике показали, что внутри ферромагнетика нет никакого эффективного поля магнитного происхождения. Эти факты позволили предположить, что ферромагнетизм по своему происхождению не является чисто магнитным эффектом, а обусловлен электрическими силами связи атомных носителей магнетизма в твердом теле.

¹⁰ Обменная сила — это сила межатомного взаимодействия, которая впервые была описана Вернером Гейзенбергом. Она обусловлена тем, что два соседних атома могут обмениваться внешними электронами и эти электроны начинают принадлежать одновременно обоим атомам. Считается, что обменная сила связывает атомы в кристаллической решетке металла и делает их магнитные поля сонаправленными. Упорядоченные магнитные поля соседних атомов взаимно усиливаются, в результате чего образуются магнитные домены.

Уравнение баланса количества движения для элементарного объема V непроводящего ферромагнетика, ограниченного поверхностью Σ , выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{V} dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e + \mathbf{Q}^*) dV + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau}_{(n)} d\Sigma, \quad (\text{I.56})$$

где $\mathbf{Q}^*$ — сила механического происхождения. Локальная форма уравнения баланса количества движения имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e + \rho \mathbf{Q}^* = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{I.57})$$

Уравнение баланса кинетического момента выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho (\gamma^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R} \times \mathbf{V}) dV = \\ = \int_{(V)} \rho (\mathbf{S} \times \mathbf{B}^e + \mathbf{R} \times (\mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e) + \mathbf{R} \times \mathbf{Q}^*) dV + \\ + \int_{\Sigma} (\rho \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(n)} + \mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}_{(n)}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

С учетом соотношений (I.54), (I.55), локальная форма уравнения баланса кинетического момента принимает вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{S} \times \mathbf{B}^e = \rho \gamma^{-1} \dot{\mathbf{S}}. \quad (\text{I.59})$$

Первый закон термодинамики (уравнение баланса энергии) для объединенного континуума в случае адиабатических процессов [214] имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{U}^* \right) dV = \\ = \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{B}}^e) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \rho \boldsymbol{\Gamma}_{(n)} \cdot \dot{\mathbf{S}}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

где $\mathcal{U}^*$ — внутренняя энергия трансляционных деформаций.

Внутренняя энергия $\mathcal{U}$ определяется как

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^* + \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.61})$$

Внешняя сила $\mathbf{Q}$ включает в себя как $\mathbf{Q}^{\text{em}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e$, так и $\mathbf{Q}^*$.

1.2.2. Кинематические соотношения

Поскольку $\mathbf{S} = \text{const}$, для производной вектора $\mathbf{S}$ можно использовать формулу

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}, \quad (\text{I.62})$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения вектора $\mathbf{S}$. Соответственно можно представить вектор $\mathbf{S}$ в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \quad (\text{I.63})$$

где $\mathbf{m}_0$ и $\mathbf{l}_0$ — единичные векторы, причем направление $\mathbf{m}_0$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{l}_0 = 0$. Очевидно, что направление вектора $\mathbf{S}$ определяет тензор поворота $\mathbf{P}$ с точностью до поворота $\mathbf{P}_1$, так как $\mathbf{S}_0$ — неподвижный вектор тензора $\mathbf{P}_1$, поэтому вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m}_0 + \dot{\theta} \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{l}_0 + \dot{\varphi} \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{m}_0, \quad (\text{I.64})$$

определяется с точностью до проекции на вектор $\mathbf{m}$.

1.2.3. Законы динамики для ферромагнетиков.

Сравнение с обобщенной средой Кельвина

Первый закон динамики Эйлера для упругих непроводящих ферромагнетиков (I.57) совпадает с соответствующим законом для обобщенной среды Кельвина (I.17). Необходимо лишь помнить, что внешняя массовая сила $\mathbf{Q}$ включает в себя силы любого происхождения, в том числе электромагнитного.

Левая часть второго закона динамики Эйлера для упругих непроводящих ферромагнетиков (I.59), с точностью до замены $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ на $\boldsymbol{\mu}$, совпадает с левой частью второго закона динамики Эйлера для обобщенной среды Кельвина (I.19) и его приближенного варианта (I.22). Замена $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ на $\boldsymbol{\mu}$ оправдана в силу ограничения (I.36). Вектор внешнего момента $\mathbf{L}$ для ферромагнетика связан с внешней магнитной индукцией соотношением (I.53).

Правые части уравнений (I.59) и (I.19), вообще говоря, различны. Однако мы рассматриваем частный случай обобщенной среды Кельвина, для которого можно установить аналогию.

Пусть плотности моментов инерции тел-точек обобщенной среды Кельвина λ , μ весьма малы, скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$ велика, и внешний массовый момент не имеет проекции на ось тела-точки. В этом случае плотность кинетического момента с точностью до малой величины равна $\lambda \dot{\varphi} \mathbf{m}$, а

его производная по времени (правая часть уравнения баланса моментов) равна $\boldsymbol{\omega} \times \lambda \dot{\mathbf{m}}$, т. е. модуль кинетического момента постоянен с точностью до малой величины. В этом случае второй закон динамики Эйлера для обобщенной среды Кельвина, с точностью до малой величины, записывается в форме (I.22). Плотность кинетического момента в насыщенном ферромагнетике равна $\gamma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{m}$, и в правой части уравнения баланса моментов стоит $\gamma^{-1} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} \mathbf{m}$. Видно, что правые части уравнений (I.59) и (I.22) совпадают с точностью до замены $\lambda \dot{\phi}$ на $\mathbf{S}/\gamma$.

Таким образом, в среде Кельвина все, что связано с трансляционными перемещениями и симметричной частью тензора напряжений, отвечает за решеточный континуум, а все, что связано с динамическими слагаемыми в уравнении баланса кинетического момента, тензором моментных напряжений и несимметричной частью тензора напряжений, которая будет обсуждаться в дальнейшем, отвечает за спиновый континуум.

I.2.4. Аналогия уравнения баланса энергии для ферромагнетиков и обобщенной среды Кельвина

Преобразуем уравнение баланса энергии. Начнем с преобразования выражения для мощности контактной обменной силы $\rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot \dot{\mathbf{S}}$. Воспользовавшись соотношениями (I.55), (I.62), получим

$$\rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) = (\rho \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.65})$$

Далее, продифференцировав выражение (I.61), выразим производную энергии трансляционных деформаций $\mathcal{U}^*$ через производную внутренней энергии $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}^* &= \dot{\mathcal{U}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) \cdot \mathcal{B}^e - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e = \\ &= \dot{\mathcal{U}} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{S} \times \mathcal{B}^e) - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e = \dot{\mathcal{U}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e. \end{aligned} \quad (\text{I.66})$$

С учетом (I.65), (I.66), уравнение баланса энергии (I.60) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{U} \right) dV &= \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \\ &+ \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

Отсюда стандартным методом, учитывая уравнения баланса количества движения и кинетического момента (I.57), (I.59) и условие насыщения (I.62),

получаем локальную форму уравнения баланса энергии для упругого непроводящего ферромагнетика

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} - \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S})^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.68})$$

Сравнив (I.24) с (I.68), видим, что уравнение баланса энергии для полярной среды совпадает с уравнением баланса энергии для упругого ферромагнетика в состоянии магнитного насыщения с точностью до замены тензора моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ на $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$. Заметим, что $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ и есть тензор моментных напряжений в ферромагнетике. Действительно,

$$\mathbf{M}^{\text{exc}} = \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}. \quad (\text{I.69})$$

В то же время тензор моментных напряжений в обобщенной среде Кельвина можно представить как $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$, поскольку независимость внутренней энергии от градиента угла собственного вращения тел-точек приводит к ограничению $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{m} = 0$ (см. (I.36)). Если $\mathbf{m}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\mathbf{S}$, это ограничение позволяет представить $\boldsymbol{\mu}$ в виде $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$, например, если взять

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{m} / S. \quad (\text{I.70})$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в обобщенной среде Кельвина трактуется как угловая скорость вращения тела-точки, а в ферромагнетике — как угловая скорость вращения вектора $\mathbf{S}$. Ферромагнетик “не замечает” поворот вектора намагниченности $\mathbf{S}$ вокруг своей оси, так же как обобщенная среда Кельвина “не замечает” поворот тела-точки вокруг оси симметрии. В связи с этим для ферромагнетика, так же как и для обобщенной среды Кельвина, необходима независимость внутренней энергии от $\boldsymbol{\varphi}$ и $\nabla \boldsymbol{\varphi}$.

Применив для ферромагнетика ту же процедуру, что и для обобщенной среды Кельвина, получим определяющие уравнения, которые в точности совпадают с определяющими уравнениями для обобщенной среды Кельвина. Так, в качестве системы мер деформации можно использовать систему $\mathfrak{A}$ (см. формулы (I.32)), систему $\mathfrak{B}$ (см. формулы (I.34)) или любую полную систему функций этих тензоров. Соответствующие определяющие уравнения приведены в подразделе I.1.6. Если более удобным представляется описывать ферромагнетик в терминах тензора обменных взаимодействий $\boldsymbol{\Gamma}$, то, зная тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$, тензор $\boldsymbol{\Gamma}$ можно найти по формуле (I.70).

I.2.5. Меры деформации и определяющие уравнения ферромагнетиков. Сравнение с обобщенной средой Кельвина

Система мер деформации $\mathfrak{A}$

Сравним систему мер деформации (I.32) и соответствующие ей определяющие уравнения (I.33) с результатами работы [214]. При помощи принципа материальной объективности Ж. Можен устанавливает, что внутренняя энергия упругого непроводящего насыщенного ферромагнетика (при исключении эффектов, связанных с температурой) может зависеть лишь от тензоров

$$\mathfrak{g}, \quad \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T, \quad \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T.$$

Заметим, что $\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = \mathbf{S} \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}$, т. е. этот вектор совпадает с вектором $\mathbf{S} \boldsymbol{\gamma}$ из системы (I.32). Тензор $\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T$ совпадает с $\mathbf{S} \mathbf{F}$ из системы (I.32) при выборе $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \times \mathbf{m}_0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T &= \mathbf{S} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = \mathbf{S} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T = \\ &= \mathbf{S} \mathbf{K} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{S} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Итак, данная система тензоров деформации совпадает с $\mathfrak{A}_2$ с точностью до постоянного множителя $\mathbf{S}$. Соответствующие ей определяющие уравнения (I.33) согласуются с приведенными в монографии [214], если принять ограничение

$$\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0,$$

как это делает Ж. Можен, предполагая, что спин-решеточное взаимодействие обеспечивается при помощи *локальной магнитной индукции*¹¹ $\mathbf{B}^L$:

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M} \mathbf{B}^L \times \mathbf{m}, \quad \mathcal{M} = |\mathcal{M}|.$$

Заметим, однако, что данное ограничение не является следствием каких-либо фундаментальных законов. Для упругого непроводящего ферромагне-

¹¹ В настоящее время в литературе нет четкого и однозначного определения понятия локальной магнитной индукции. Многие авторы используют термин “локальная магнитная индукция” применительно к вектору магнитной индукции $\mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^L$, который складывается из внешней магнитной индукции и дополнительной магнитной индукции $\mathbf{B}^L$, создаваемой магнитными доменами. При этом слово “локальная” просто подчеркивает, что речь идет о векторе магнитной индукции в данной точке сплошной среды и этот вектор магнитной индукции меняется при переходе от точки к точке. Мы, следуя работе [213], локальной магнитной индукцией будем называть вектор $\mathbf{B}^L$, т. е. ту часть магнитной индукции, которая создается самой средой, т. е. континуумом решетки.

тика, как и для обобщенной среды Кельвина, должно выполняться ограничение (I.37) — аналог *шестого уравнения равновесия*. Однако обе части равенства не обязательно должны быть приравнены нулю, как это принимается в теории Можена.

В общем случае, согласно (I.33), векторный инвариант тензора напряжений вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} \right) \times \mathbf{m} - \rho \left(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{a}}^{\top} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla \mathbf{R} \right)_{\times}. \quad (\text{I.71})$$

Первое слагаемое в правой части (I.71) совпадает с $\boldsymbol{\tau}_{\times}$ в теории Можена. Соответствующее ему определяющее уравнение для локальной магнитной индукции выглядит следующим образом:

$$\mathbf{B}^{\text{L}} = -S^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R}. \quad (\text{I.72})$$

Выражение (I.72) получено с учетом соотношения $\mathcal{M} = \rho S$. Второе слагаемое в правой части (I.71) имеет в общем случае как ненулевую проекцию на $\mathbf{m}$, так и составляющую, ортогональную $\mathbf{m}$. Таким образом, выражение (I.72) для $\mathbf{B}^{\text{L}}$ необходимо уточнить:

$$\mathbf{B}^{\text{L}} = -S^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} + \mathbf{m} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right). \quad (\text{I.73})$$

Воспользовавшись формулами (I.71), (I.73), получим следующее выражение для векторного инварианта тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} = -\mathcal{M} \mathbf{B}^{\text{L}} \times \mathbf{m} - \rho \mathbf{m} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot \cdot \mathbf{K}^{\top}. \quad (\text{I.74})$$

Добавочное, по сравнению с теорией Можена, слагаемое появляется, когда спиновые перемещения сложным образом перевязаны с упругими.

Вместо вектора локальной магнитной индукции $\mathbf{B}^{\text{L}}$, можно ввести в рассмотрение вектор эффективного действия среды на магнитный момент тела точки $\mathbf{B}_{*}^{\text{L}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{*}^{\text{L}} = & -S^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) + \\ & + S^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot \cdot \mathbf{K}^{\top} \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

Вектор $\mathbf{B}_*^L$, согласно установившимся в физике традициям, мы не можем назвать вектором локальной магнитной индукции, так как в нем присутствует составляющая, параллельная магнитному моменту тела-точки. Данная составляющая присутствует, если энергия среды зависит от перекрестного вида деформации α . Видимо, эту составляющую можно трактовать как момент, связанный с обменными силами, которые изменились в результате трансляционной деформации континуума решетки и в результате поворота магнитного момента тела-точки относительно континуума решетки. Упоминания об этой составляющей в литературе нам неизвестны. Однако она должна присутствовать в некоторых реальных магнитных материалах. Например, анализ энергии геликоидальных магнитных материалов, предложенной Дзялошинским [221], позволяет заключить, что эта энергия зависит от смешанного вида деформации α . Следовательно, параллельная магнитному моменту тела-точки $\mathbf{S}$ составляющая в векторном инварианте тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}_\times$ не равна нулю.

Воспользовавшись формулами (I.71), (I.75), получим

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M}\mathbf{B}_*^L \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.76})$$

Согласно формуле (I.76) вектор $\mathbf{B}_*^L$ полностью определяет векторный инвариант тензора напряжений, подобно тому как в теории Можена векторный инвариант тензора напряжений полностью определяется вектором локальной магнитной индукции $\mathbf{B}^L$.

Воспользовавшись выражением (I.70) и определяющим уравнением для тензора моментных напряжений (I.33), получим выражение для тензора обменных взаимодействий

$$\boldsymbol{\Gamma} = \rho S^{-1} \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.77})$$

Это выражение отличается от полученного в [214] множителем $\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$. Однако проекция тензора $\boldsymbol{\Gamma}$ на вектор $\mathbf{m}$ справа остается неопределенной. Уравнение (I.77) соответствует выбору $\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$, как это принято и в [214].

Напомним, что в этом подразделе все соотношения получены для системы $\mathfrak{A}_2$, однако, безусловно, можно написать и определяющие уравнения для $\mathfrak{A}_1$. При этом выражения (I.73)–(I.77) несколько изменят вид.

Система мер деформации $\mathfrak{B}$

В монографии [214] в качестве основного варианта используется система тензоров деформации

$$\mathfrak{S}, \quad \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T, \quad \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^T.$$

Сравним эту систему с системой (I.34). Как было показано ранее, вектор $\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T$ отличается от вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на постоянный множитель $\mathbf{S}$. Последний тензор деформаций связан с $\boldsymbol{\Phi}$ соотношением $\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^T = \mathbf{S}^2 \boldsymbol{\Phi}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^T &= \mathbf{S}^2 \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}^T = \mathbf{S}^2 (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m})^T = \\ &= -\mathbf{S}^2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{K}^T = \\ &= -\mathbf{S}^2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{K}^T = \mathbf{S}^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{K}^T = \mathbf{S}^2 \boldsymbol{\Phi}. \end{aligned}$$

Таким образом, система тензоров деформации, предлагаемая в [214], — это система $\mathfrak{G}$, $\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{S}^2\boldsymbol{\Phi}$, отличающаяся от (I.34) тем, что в ней отсутствует вид деформации α .

Как и для обобщенной среды Кельвина, для упругих непроводящих ферромагнетиков можно использовать систему мер деформации $\mathfrak{B}$. При этом соответствующие определяющие уравнения задаются соотношениями (I.35). Исходя из этих соотношений нетрудно написать выражение для векторного инварианта тензора напряжений

$$\boldsymbol{\tau}_\times = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3 \boldsymbol{\Phi}_3 \right) \times \mathbf{m} + \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \boldsymbol{\Phi}_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (\text{I.78})$$

Воспользовавшись (I.78), получим выражение для локальной магнитной индукции

$$\mathbf{B}^L = -\mathbf{S}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3 \boldsymbol{\Phi}_3 \right). \quad (\text{I.79})$$

В соответствии с (I.78), (I.79) векторный инвариант тензора напряжений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M} \mathbf{B}^L \times \mathbf{m} + \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \boldsymbol{\Phi}_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (\text{I.80})$$

Вектор эффективного действия среды на магнитный момент тела-точки $\mathbf{B}_*^L$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_*^L &= -\mathbf{S}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3) \boldsymbol{\Phi}_3 \right) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \\ &\quad - \mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \boldsymbol{\Phi}_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

Векторный инвариант тензора напряжений связан с вектором $\mathbf{B}_*^L$ соотношением (I.76).

Воспользовавшись соотношениями (I.35), (I.70), получим формулу для вычисления тензора обменных взаимодействий

$$\Gamma = \rho S^{-1} \left(2 \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} \cdot \nabla \mathbf{m} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}_3 \times \mathbf{m} \right). \quad (\text{I.82})$$

Определяющие уравнения, полученные в [214], следуют из (I.35), (I.79), (I.80), (I.82) при условии, что рассматривается частный случай $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$. Это условие равносильно предположению $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$, которое и принимается в [214]. Предположение $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$ исключает из рассмотрения возможную зависимость $\mathcal{U}$ от некоего “перекрестного” вида деформации α , определяемого произведением градиента поворота и градиента перемещений. В реальных материалах зависимость внутренней энергии от α может иметь место. Представляется, что учет такой зависимости может оказаться важным при рассмотрении магнитоакустических явлений.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [220] указывают, что для материалов с геликоидальной магнитной структурой представление для $\mathcal{U}$ может включать член

$$\mathbf{m} \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \times \mathbf{m}) = \text{tr} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{-1}).$$

Учитывать подобный член во внутренней энергии предложил И. Е. Дзялошинский [221]. Чтобы обеспечить $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$ (как требует Ж. Можен), необходимо положить $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{G}, \Phi, \gamma)$. В связи с этим в материале, энергия которого зависит не только от $\mathfrak{G}, \Phi, \gamma$, но и от $\text{tr} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{-1})$, условие $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$, вообще говоря, не должно выполняться.

В работе [222] также указывается, что для определенного класса легкоосных ферромагнетиков в энергии содержатся члены, линейные по пространственной производной намагниченности. Они могут, например, иметь вид

$$c \mathcal{M}^2 (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m} \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\nabla} (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m})).$$

Наличие членов подобного вида приводит к возможности существования устойчивых магнитных вихрей в материале. Таким образом, в материалах с ненулевым градиентом вектора намагниченности в натуральном состоянии $\mathcal{U}$ может зависеть от “перекрестного” вида деформации.

1.2.6. Уравнения квазимагнитостатики

Для того чтобы полученная ранее система уравнений стала замкнутой, ее следует дополнить уравнениями квазимагнитостатики

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0, & \overset{\circ}{\nabla} \times \mathbf{H} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \overset{\circ}{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}.\end{aligned}\tag{I.83}$$

Здесь $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, μ_0 — магнитная постоянная.

Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ включает в себя внешнюю магнитную индукцию $\mathbf{B}^e$ и дополнительную магнитную индукцию, создаваемую магнитными доменами. Согласно работе [213],

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^L.$$

Построенная теория справедлива для непроводящих ферромагнетиков. Существенным ограничением является требование отсутствия внешних электрических полей. Иными словами, в данной теории допустимы только электрические поля, индуцированные магнитными; внешнего потенциала быть не должно. Это связано с тем, что при наличии внешнего электрического поля необходимо учитывать намагниченность, возникающую в результате поляризации. В случае, когда электрическое поле индуцировано магнитным, намагниченность, индуцированная поляризацией или током, мала по сравнению с намагниченностью, возникшей в результате воздействия магнитных полей.

1.2.7. Линейная теория ферромагнетиков

Как было показано ранее, получать линейные уравнения удобнее из системы $\mathfrak{A}$, чем из $\mathfrak{B}$, поскольку для малых $\boldsymbol{\theta}$ тензор Φ является малой величиной второго порядка:

$$\Phi \approx \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}^T.$$

Ж. Можен следует иным путем, и его результаты отличаются от (I.45). Поскольку в [214] используется система $\mathfrak{B}$ (с исключенным α), то в выражении для энергии члены более высокого порядка малости, чем квадратичные, сохраняются, чтобы учесть перевязанность спиновых и упругих перемещений

(магнитострикционную и обменно-стрикционную энергию¹²). Это представляется не вполне корректным. При таком подходе тензор $\mathbf{Y}$ неявно полагается равным нулю, а тензор $\mathbf{Z}$, отвечающий за обменную энергию, имеет весьма специальный вид.

Для различных реальных материалов, вероятно, может быть справедлив как тот, так и иной подход, поскольку предположение о справедливости линейной теории нельзя обосновать. Однако будем исходить из этого предположения.

Соотношения линейной теории обобщенной среды Кельвина приведены в подразделе I.1.8. Они дают возможность в наиболее общей для линейной теории форме учесть взаимосвязь магнитной и упругой подсистем. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ соответствует малому вектору поворота спина, $\mathbf{u}$ — малое трансляционное перемещение.

Смысл тензоров постоянных материала в выражении (I.50) для ферромагнетиков может быть интерпретирован следующим образом: $\mathbf{T}$ — гуковский тензор упругости; $\mathbf{U}$ связан с константами магнитной восприимчивости¹³ (отвечает за магнитокристаллическое взаимодействие); $\mathbf{W}$ — тензор пьезомагнитных постоянных¹⁴; $\mathbf{H}$ — тензор обменно-стрикционных постоянных; $\mathbf{N}$ отвечает за слагаемое, входящее в обменную энергию, которое можно было бы назвать обменно-магнитокристаллической энергией; наконец, $\mathbf{Z}$ — тензор ферромагнитных обменных постоянных материала. В теории Може-

¹² Магнитострикция — изменение формы и размеров тела при его намагничивании. Это явление было открыто Дж. Джоулем в 1842 г. В ферро- и ферримагнетиках (Fe, Ni, Co и др.) магнитострикция достигает значительной величины. В антиферро-, пара- и диамагнетиках магнитострикция, как правило, очень мала. Обратное явление — изменение намагниченности ферромагнетика при деформации — называется магнитоупругим эффектом. В теории магнетизма магнитострикцию рассматривают как результат проявления двух основных типов взаимодействий в ферромагнетиках: электрического обменного взаимодействия и магнитного взаимодействия.

¹³ Магнитная восприимчивость определяется как отношение намагниченности единицы объема вещества к напряженности намагничивающего магнитного поля. Реальные объекты могут обладать как положительными, так и отрицательными магнитными восприимчивостями. Примером веществ с отрицательной восприимчивостью могут служить диамагнетики. Положительной восприимчивостью обладают, например, парамагнетики и ферромагнетики.

¹⁴ Пьезомагнитный эффект — это возникновение в веществе намагниченности под действием внешнего давления. Пьезомагнитный эффект может существовать только в веществах, обладающих антиферромагнитной магнитной структурой. Этот эффект принципиально невозможен в пара- и диамагнетиках. Пьезомагнитный эффект возникает тогда, когда под действием приложенного давления магнитная симметрия антиферромагнитного кристалла изменяется таким образом, что в нем появляется слабый ферромагнетизм.

на обменно-магнитокристаллическая и обменно-стрикционная энергия имеют третий порядок малости, а тензор обменных постоянных имеет специальный вид $\mathbf{Z} = z^{mn}(\mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_n)$. Заметим, что тензоры $\mathbf{H}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ ответственны за взаимосвязь трансляционных и спиновых волн. Предлагаемый подход позволяет учесть эту взаимосвязь более полно в линейной теории.

Линейные уравнения динамики совпадают с (I.51). Рассмотрим случай, когда внешняя магнитная индукция $\mathbf{B}^e$ может быть представлена в виде $\mathbf{B}^e = \mathcal{B}_0 \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$, где $\tilde{\mathbf{B}}$ — малая величина; $\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$. Тогда внешний момент $\mathbf{L}$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= S \mathbf{m} \times \mathbf{B}^e = S(\mathbf{m}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}_0) \times (\mathcal{B}_0 \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{B}}) + O(\boldsymbol{\theta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) = \\ &= S(\mathbf{m}_0 \times \tilde{\mathbf{B}} - \mathcal{B}_0 \boldsymbol{\theta}) + O(\boldsymbol{\theta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}). \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

Уравнения динамики (I.51) с учетом (I.41), (I.84), принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{Y} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T + \rho \mathbf{Q} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T - \\ - (\mathbf{X} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{Y} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})_{\times} + \\ + \mathcal{M} \mathbf{m}_0 \times \tilde{\mathbf{B}} - \mathcal{M} \mathcal{B}_0 \boldsymbol{\theta} &= \gamma^{-1} \mathcal{M} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

В данном случае $\mathcal{B}_0$ играет роль “часовой пружины”. Если внешняя магнитная индукция не изменяется по пространственным координатам, то она не дает вклада во внешнюю массовую силу $\mathbf{Q}$.

Отметим, что корректное описание взаимосвязи спиновой и упругой подсистем очень важно для описания магнитоакустического резонанса. Предлагаемая теория позволяет учесть эту взаимосвязь наиболее общим образом, что дает возможность предсказать больше принципиальных возможностей существования магнитоакустического резонанса в материалах с низкой симметрией [219].

Заключение

Построена нелинейная теория обобщенной среды Кельвина. Получены различные варианты полных систем мер деформации, от которых может зависеть плотность внутренней энергии среды. Любая из этих систем содержит

14 независимых функций. Получены соответствующие нелинейные определяющие уравнения и уравнения динамики среды. Особо рассмотрен случай быстрого собственного вращения частиц.

Установлена точная аналогия между основными уравнениями упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии магнитного насыщения и уравнениями рассматриваемой среды для случая быстрого собственного вращения частиц. Показано, что в этом случае математическая форма законов динамики и определяющих уравнений обобщенной среды Кельвина и упругих ферромагнетиков в состоянии магнитного насыщения совпадают. При этом все угловые характеристики соответствуют магнитной подсистеме, а трансляционные — упругой подсистеме. Взаимосвязь угловых и трансляционных перемещений в обобщенной среде Кельвина соответствует магнитоакустическим явлениям в ферромагнетиках.

Существует следующее соответствие характеристик обобщенной среды Кельвина и упругой непроводящей ферромагнитной сплошной среды в состоянии магнитного насыщения.

Единичный вектор $\mathbf{m}$, направленный по оси симметрии тела-точки в актуальной конфигурации, соответствует единичному вектору, направленному по оси магнитного момента $\mathbf{S}$ в ферромагнетике.

Кинетический момент тела-точки связан с магнитным моментом соотношением

$$\rho\lambda\dot{\phi}\mathbf{m} \longleftrightarrow \rho\mathbf{S}/\gamma,$$

где λ — плотность аксиального момента инерции; $\dot{\phi}$ — угловая скорость собственного вращения тела-точки; $\mathbf{S}$ — магнитный момент; γ — гиромагнитное отношение; $\mathbf{S} = |\mathbf{S}|$ — константа материала в состоянии насыщения.

Плотность внешнего массового момента $\mathbf{L}$ связана в ферромагнетике с внешней магнитной индукцией $\mathbf{B}^e$

$$\mathbf{L} \longleftrightarrow \mathbf{B}^e \times \mathbf{S}.$$

Тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ в обобщенной среде Кельвина, зависящий от относительного поворота тел-точек, связан с тензором обменных взаимодействий $\boldsymbol{\Gamma}$ в ферромагнетике

$$\boldsymbol{\mu} \longleftrightarrow -\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}.$$

Спин-решеточное взаимодействие в ферромагнетике соответствует в обобщенной среде Кельвина моменту, зависящему только от ориентации рассматриваемой частицы (как если бы все остальные тела-точки были материальными точками), т. е. оно связано с векторным инвариантом тензора силовых

напряжений $\boldsymbol{\tau}_\times$. При выборе системы тензоров деформации $\mathfrak{B}$ в частном случае, когда $\mathcal{U}$ не зависит от $\boldsymbol{\alpha}$, можно представить

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M}\mathfrak{B}^L \times \mathbf{m},$$

где $\mathfrak{B}^L$ — локальная магнитная индукция в ферромагнетике, определяемая формулой (I.79).

Используемый способ построения определяющих уравнений позволяет в наиболее общей форме учесть взаимодействие магнитной и упругой подсистем как в общем нелинейном случае, так и для малых углов нутации. Для нелинейного случая необходимо учитывать зависимость внутренней энергии от меры деформации, определяемой и градиентом поворота, и градиентом перемещений. Для линейного (по углу нутации и перемещениям) случая необходимо учитывать “перекрестный” член в энергии деформации, зависящий от произведения двух разных мер деформации — градиента поворота и градиента перемещений.

Неклассическая теория упругих оболочек¹

J.1. Основные уравнения теории простых оболочек

Концепция оболочки с приведенными модулями находит широкое применение в практике расчетов оболочечных конструкций сложного внутреннего строения: подкрепленных, перфорированных, многослойных, сетчатых и др. В данном случае цель состоит в формализации инженерных подходов к построению моделей оболочек с приведенными модулями. Рассматривается теория оболочек, в которой неконкретизированными остаются только тензоры инерции и упругости. Они зависят от специфики задачи и подлежат определению. Предлагаемая теория по принятой терминологии [223] является неклассической теорией оболочек типа Тимошенко. Способ определения тензоров инерции и упругости рассматривается на примере однослойных и трехслойных оболочек симметричного строения. Используется термин “простая оболочка”, под ним понимается двумерная деформируемая среда, в каждой точке которой заданы два силовых термина.

J.1.1. Кинематика простых оболочек. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент

Кинематической моделью простой оболочки является материальная поверхность, каждое тело-точка которой есть твердое тело и имеет шесть степеней свободы. Движение тела-точки определяется заданием вектор-функции

¹ Материал приложения основан на статье П. А. Жилина [67] “Основные уравнения неклассической теории оболочек” (Механика и процессы управления: труды СПбГТУ. — СПб., 1982. — N 386. — С. 29–46). Более подробное изложение теории оболочек можно найти в книге [5]. (*Примеч. ред.*)

$\mathbf{R}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, t) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ и ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, где $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ — материальные координаты на поверхности; t — время. Ориентацию частицы будем определять тройкой ортонормированных векторов $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{D}_m = \delta_{km}$. Тогда тензор $\mathbf{P}$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{d}^k(\mathbf{x}); \quad \mathbf{d}^k = \mathbf{d}_k = \mathbf{D}_k(\mathbf{x}, 0). \quad (\text{J.1})$$

Здесь и далее приняты следующие соглашения: а) греческие индексы принимают значения 1, 2; б) латинские — 1, 2, 3; в) используется правило суммирования по разновысоким индексам; г) значение функций в текущий момент времени обозначается прописной буквой, а при $t = 0$ — строчной буквой; д) $\mathbf{E}$ — единичный тензор в трехмерном пространстве; $\mathbf{P}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}$. Линейная и угловая скорости частицы определяется по формулам

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t); \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times}; \quad \dot{f} \equiv \frac{df}{dt}.$$

Базисные векторы в актуальной конфигурации вводятся формулами

$$\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \partial_\alpha \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t).$$

Добавляя к ним вектор единичной нормали $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_\alpha = 0$, получаем базис в трехмерном пространстве. Взаимный базис обозначается через $\mathbf{R}^\alpha$, $\mathbf{N}$: $\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, $\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{N} = 0$. Введем в рассмотрение инвариантные операторы

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{R}^\alpha \otimes \partial_\alpha \mathbf{F}; \quad \nabla \mathbf{F} = \mathbf{r}^\alpha \otimes \partial_\alpha \mathbf{F}.$$

Первый и второй метрические тензоры поверхности

$$\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}^\alpha = A_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta = A^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta;$$

$$\mathbf{B} = -\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{N} = -\mathbf{R}^\alpha \otimes \partial_\alpha \mathbf{N} = B_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta = B^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta.$$

Оба тензора симметричные и плоские, т. е. лежат в касательной плоскости. В данном случае все тензоры определены в трехмерном пространстве — для плоских тензоров нормаль является главной осью с нулевым собственным значением. Тензор $\mathbf{A}$ — ортопроектор: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$; $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Он проецирует произвольный вектор на касательную плоскость. Разложение единичного тензора на ортопроекторы имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{N}(\mathbf{x}, t),$$

где оба слагаемых меняются при движении вдоль поверхности, но сумма неизменна. Масса материальной поверхности определяется через массовую плотность $\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0$ как интеграл по области ΔS поверхности S

$$\Delta m = \int_{\Delta S} \rho(\mathbf{x}, t) dS.$$

Закон сохранения массы позволяет связать плотности в актуальной и в отсчетной конфигурациях

$$\sqrt{A(\mathbf{x}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) = \sqrt{a} \rho_0(\mathbf{x}); \quad A \equiv \det(A_{\alpha\beta}); \quad \mathbf{a} = A(\mathbf{x}, 0).$$

Распределение масс внутри частицы будем характеризовать двумя тензорами инерции: $\rho \Theta_\alpha(\mathbf{x}, t)$. Поскольку частицы — твердые тела, то справедливы формулы

$$\Theta_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \Theta_\alpha^0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t); \quad \Theta_\alpha^0 = \Theta_\alpha(\mathbf{x}, 0). \quad (\text{J.2})$$

Конкретный вид этих тензоров зависит от специфики рассматриваемых задач. Далее они будут вычислены для одного из важнейших классов оболочек.

Полная кинетическая энергия K и ее массовая плотность $\mathcal{K}$ определяются выражениями

$$K = \int_{\Delta S} \rho \mathcal{K} dS; \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta_1 \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Количество движения $\mathbf{K}_1^{(2)}$, кинетический момент $\mathbf{K}_2^{(2)}$, а также их плотности $\mathcal{K}_1^{(2)}$ и $\mathcal{K}_2^{(2)}$ даются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{(2)} &= \int_{\Delta S} \mathcal{K}_1^{(2)} \rho dS; \quad \mathcal{K}_1^{(2)} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{V} + \Theta_1^\top \cdot \boldsymbol{\omega}; \\ \mathbf{K}_2^{(2)} &= \int_{\Delta S} (\mathcal{K}_2^{(2)} + \mathbf{R} \times \mathcal{K}_1^{(2)}) \rho dS; \quad \mathcal{K}_2^{(2)} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \Theta_1 \cdot \mathbf{V} + \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

J.1.2. Тензоры усилий и моментов Коши и Пиолы–Кирхгофа. Уравнения движения в актуальной и отсчетной конфигурациях

“Напряженное” состояние в простой оболочке определяется двумя несимметричными тензорами второго ранга

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha; \quad \mathbf{T}^\alpha = \sqrt{A^{\alpha\alpha}} \mathbf{T}_{(\alpha)}; \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha; \quad \mathbf{M}^\alpha = \sqrt{A^{\alpha\alpha}} \mathbf{M}_{(\alpha)}; \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{T}_{(\alpha)}$ и $\mathbf{M}_{(\alpha)}$ — физические векторы усилия и момента, действующие на единицу длины линий $\mathbf{x}^\alpha = \text{const}$ и моделирующие воздействие среды, находящейся со стороны возрастания координаты $\mathbf{x}^\alpha$; тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ называются тензорами усилий и моментов Коши, соответственно.

Справедливы формулы Коши [68]

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{M}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}; \quad |\mathbf{v}| = 1; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (\text{J.3})$$

Векторы $\mathbf{T}_{(\mathbf{v})}$ и $\mathbf{M}_{(\mathbf{v})}$ действуют по площадкам, задаваемым вектором $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Введем в рассмотрение векторы массовых сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ и моментов $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$.

Постулируем уравнения баланса количества движения и кинетического момента в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta S} \mathcal{K}_1^{(2)} \rho dS = \int_{\Delta S} \rho \mathbf{F} dS + \int_{\Delta S} \mathbf{T}_{\mathbf{v}} dC; \quad (\text{J.4})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Delta S} (\mathcal{K}_2^{(2)} + \mathbf{R} \times \mathcal{K}_1^{(2)}) \rho dS = \\ & = \int_{\Delta S} \rho (\mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}) dS + \int_C (\mathbf{M}_{(\mathbf{v})} + \mathbf{R} \times \mathbf{T}_{(\mathbf{v})}) dC, \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

где C — контур, ограничивающий рассматриваемую часть поверхности ΔS .

Используя теорему о дивергенции [224]

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_*(\mathbf{x}, t) dC = \int_{\Delta S} (\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{F}_* + 2\mathbf{H}\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}_*) dS,$$

где $\mathbf{F}_*(\mathbf{x}, t)$ — произвольное тензорное поле на S ; $2\mathbf{H} = \text{tr } \mathbf{B}$ — средняя кривизна S , и формулы Коши (J.3), уравнения (J.4) и (J.5) записываем в локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega})^\cdot; \quad (\text{J.6})$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho (\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega})^\cdot + \rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{J.7})$$

Если ввести в рассмотрение тензоры усилий и моментов Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{T}_\Pi = \sqrt{\frac{A}{a}} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{M}_\Pi = \sqrt{\frac{A}{a}} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{M},$$

то уравнения движения (J.6) и (J.7) можно записать в отсчетной конфигурации

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_\Pi + \rho \mathbf{F} = \rho_0 (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \boldsymbol{\omega})^\cdot;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_\Pi + (\nabla \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{T}_\Pi)_\times + \rho_0 \mathbf{L} = \rho_0 (\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega})^\cdot + \rho_0 \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

J.1.3. Уравнение баланса энергии и введение тензоров деформации. Соотношения Коши–Грина

Ограничимся только изотермическими (или адиабатическими) процессами. Более общая ситуация рассмотрена в [68]. Постулируем уравнение баланса

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta S} \rho (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dS = \int_{\Delta S} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) dS + \int_C (\mathbf{T}_{(\nu)} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(\nu)} \cdot \boldsymbol{\omega}) dC,$$

куда, помимо прежних, вошла новая функция $\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)$ — плотность внутренней энергии. Этому уравнению можно придать вид [68]

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{T}_*^\top \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \mathbf{M}_*^\top \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times, \quad (\text{J.8})$$

где $\mathbf{T}_*$, $\mathbf{M}_*$ — энергетические тензоры усилий и моментов; $\mathbf{A}^\times$, $\mathbf{K}^\times$ — первая и вторая меры деформации. Справедливы представления

$$\mathbf{T}_* = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^\top \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}; \quad \mathbf{M}_* = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P};$$

$$\mathbf{A}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}; \quad \mathbf{K}^\times = \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{K}_\alpha \cdot \mathbf{P},$$

где векторы $\mathbf{K}_\alpha$ находятся из уравнений

$$\partial_\alpha \mathbf{D}_k = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{D}_k, \quad \partial_\alpha \mathbf{d}_k = \mathbf{k}_\alpha \times \mathbf{d}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_\alpha = -\frac{1}{2} [\partial_\alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top]_\times + \mathbf{k}_\alpha.$$

Для упругих простых оболочек из (J.8) следуют соотношения Коши–Грина

$$\mathbf{T}_* = \sqrt{\frac{A}{a}} \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}^\times}; \quad \mathbf{M}_* = \sqrt{\frac{A}{a}} \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}^\times}. \quad (\text{J.9})$$

Производная от скалярной функции по тензору второго ранга определяется по правилу

$$d\mathcal{U}(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}^\times} \right)^\top \cdot \cdot d\mathbf{A}^\times + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}^\times} \right)^\top \cdot \cdot d\mathbf{K}^\times.$$

J.2. Определение тензоров инерции и ограничения на тензоры усилий моментов

Дальнейшая конкретизация возможна только при более детальном учете специфики рассматриваемых задач. Поэтому рассмотрим частный случай простой оболочки, трехмерным прообразом которой является тонкое тело постоянной толщины. Однородность материала по толщине не обязательна. Считаем, что материал неполярен. В этом случае тензоры инерции можно определить следующим образом. Согласно (J.2) достаточно найти их в отсчетной конфигурации. Последняя описывается вектором

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, z) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + z\mathbf{n}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S; \quad |z| \leq h/2; \quad \mathbf{n} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, 0),$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ задает срединную поверхность S ; h — толщина оболочки. Введем в рассмотрение плоский симметричный тензор

$$\boldsymbol{\mu} = \nabla \mathbf{p} = \mathbf{a} - z\mathbf{b}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0); \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, 0).$$

Через $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ обозначим тензор, являющийся решением системы уравнений

$$\boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} = \mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0};$$

$$\mu \equiv \det(\mathbf{r}^\beta \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_\alpha) = 1 - 2zH + z^2K,$$

где H и K — средняя и гауссова кривизны S . Справедлива формула

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} = (\text{tr } \boldsymbol{\mu})\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu} = (1 - 2zH)\mathbf{a} + z\mathbf{b}.$$

Масса, первый и второй тензоры инерции трехмерной среды, заключенной внутри области $\{\Delta S \times z\}$, где ΔS — область на S , находятся по формулам

$$\Delta m = \int_{\Delta S} \langle \tilde{\rho}_0 \rangle dS; \quad \langle \mathbf{f} \rangle \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{f} \mu dS;$$

$$\Delta \mathbf{I}_1 = \int_{\Delta S} \langle \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tilde{\rho}_0 \rangle dS; \quad \Delta \mathbf{I}_2 = \int_{\Delta S} \langle [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})\mathbf{E} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}] \tilde{\rho}_0 \rangle dS,$$

где $\tilde{\rho}_0$ — плотность трехмерной среды в отсчетной конфигурации. Представляется естественным принять определения

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \langle \tilde{\rho}_0 \rangle; & \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_1^0 &= \lim_{\Delta S} \frac{\Delta \mathbf{I}_1}{\Delta S} = -\langle \tilde{\rho}_0 z \rangle \mathbf{c}; \\ \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 &= \lim_{\Delta S} \frac{\Delta \mathbf{I}_2}{\Delta S} = \langle \tilde{\rho}_0 z^2 \rangle \mathbf{a}; & \mathbf{c} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{J.10}$$

Тензор $\mathbf{c}$ называется дискриминантным, причем $\mathbf{c} = -\mathbf{c}^T$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Согласно (J.10) получим следующие равенства:

$$\Theta_\alpha^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \Theta_\alpha^0 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{Q} \cdot \Theta_\alpha^0 \cdot \mathbf{Q}^T = \Theta_\alpha^0; \quad (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}),$$

где $\mathbf{Q}$ — тензор поворота ($\det \mathbf{Q} = 1$) вокруг нормали $\mathbf{n}$. Выберем $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ так, чтобы $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Выбор $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ ортогональных $\mathbf{D}_3$ — безразличен. Согласно (J.1) имеем представление

$$\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (\text{J.11})$$

Конечно, $\mathbf{D}_3$ может не совпадать с $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$; равенство $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ равносильно принятию гипотез Кирхгофа–Лява. Для оболочек постоянной толщины из неполярного материала можно принять следующие ограничения:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad (\text{J.12})$$

выражающие отсутствие реакции оболочки на поворот материальных волокон, направленных вдоль $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, вокруг своей оси. Согласно (J.2), (J.10) и (J.11) получим тождества

$$\Theta_\alpha \cdot \mathbf{D}_3 = \mathbf{0}; \quad (\Theta_1 \cdot \mathbf{V} + \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{D}_3 + (\mathbf{V} \times \Theta_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{D}_3 = 0,$$

причем доказательство последнего тождества требует некоторых вычислений, которые здесь опускаются. Проецируя уравнение (J.7) и учитывая (J.12), получаем равенство

$$\mathbf{T}_*^T \cdot \cdot (\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{M}_*^T \cdot \cdot (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{0}, \quad (\text{J.13})$$

известное в теории оболочек как шестое уравнение равновесия. Другой способ его получения состоит в требовании инвариантности внутренней энергии относительно преобразования $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}$, где $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ — произвольный тензор поворота вокруг $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t})$.

Первое из уравнений (J.12), а также (J.13) выражают априорные ограничения на тензоры усилий и моментов. Они должны выполняться при всех движениях простых оболочек.

Ж.3. Задание внутренней энергии и введение приведенных тензоров деформации

Внутренняя энергия $\mathcal{U}(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times)$ зависит от двенадцати переменных: компонент тензоров $\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times$. При ограничениях (J.12) и (J.13) число аргументов

можно сократить до девяти. Рассмотрим сначала ограничение (J.13). Подставив в него (J.9), получим уравнение в частных производных первого порядка для функции

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}^\times}\right)^\top \cdot (\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}^\times}\right)^\top \cdot (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}) = 0. \quad (\text{J.14})$$

Характеристическая система для (J.14) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}^\times}{ds} = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}; \quad \frac{d\mathbf{K}^\times}{ds} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{J.15})$$

Вычисляя для нее скобки Пуассона [93], убеждаемся, что она имеет ровно одиннадцать независимых интегралов. Конечно, последние находятся неоднозначно, поскольку любая функция интегралов системы (J.15) сама является ее интегралом. Можно предложить следующую систему интегралов:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^\times - \mathbf{a}); & \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n}; \\ \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times\top} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathfrak{G} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}; & \boldsymbol{\gamma}_1 &= \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (\text{J.16})$$

Произвольная непрерывно дифференцируемая функция $\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_1$ тождественно удовлетворяет (J.14). Первое из уравнений (J.12) можно записать в виде

$$\mathbf{M}_*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_1} = \mathbf{0}.$$

Это условие показывает, что внутренняя энергия зависит только от девяти переменных — компонент тензоров $\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}$. Итак, теория упругих оболочек при ограничениях (J.12) и (J.13) будет построена, если задана функция $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma})$. Тензоры $\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}$ будем называть приведенными тензорами деформации и присвоим им следующие наименования: $\mathfrak{G}$ — тензор растяжений–сдвигов в касательной к срединной поверхности плоскости; $\boldsymbol{\Phi}$ — тензор изгиба–кручения; $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор деформации поперечного сдвига.

При не слишком больших деформациях можно принять квадратичную аппроксимацию для внутренней энергии:

$$\rho_0 \mathcal{U} = \mathbf{T}_0 \cdot \mathfrak{G} + \mathbf{M}_0^\top \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma} + W \quad (\text{J.17})$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mathfrak{G} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathfrak{G} + \mathfrak{G} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \boldsymbol{\Phi} + \\ &+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \mathfrak{G} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\Phi}). \end{aligned} \quad (\text{J.18})$$

Все входящие в (J.17) и (J.18) тензоры являются плоскими и, за исключением тензоров деформации, не зависят от деформации. Поэтому их можно найти по данным линейной теории. Тензоры $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{N}_0$ будем называть тензорами “начальных напряжений”, но они не имеют отношения к “предварительно-напряженным состояниям”. Тензоры четвертого ранга $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, третьего ранга $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ и второго ранга $\mathbf{\Gamma}$ называются тензорами упругих моделей, функция W — энергией деформации. Далее будет установлен вид тензоров упругих моделей при ограничениях: а) материал оболочки трансверсально-изотропен, но не обязательно однороден по толщине; б) касательная плоскость срединной поверхности при $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$ (переход к пластине) является плоскостью симметрии; в) переход к пластине происходит непрерывным образом. Многослойные оболочки не исключаются из рассмотрения.

Ж.4. Линеаризация основных уравнений

В линейной теории нет нужды различать актуальную и отсчетную конфигурации при написании уравнения движения и вычислении тензоров усилий и моментов, а различие между энергетическими и истинными тензорами исчезает.

Вместо ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ можно ввести в рассмотрение [68] вектор малого поворота $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, причем $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}$; $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\times &\simeq \mathbf{a} + \mathbf{e}; & \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} &\simeq \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}; \\ \mathbf{e} &= \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}; & \boldsymbol{\kappa} &= \nabla \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{J.19})$$

Уравнения движения записываются в форме

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} &= \rho(\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}}); \\ \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} &= \rho(\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор малого смещения, а $\boldsymbol{\Theta}_1$ и $\boldsymbol{\Theta}_2$ определены формулами (J.10).

Подставляя (J.19) в (J.16) и линеаризуя, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\top); & \boldsymbol{\gamma} &\simeq \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varphi}; \\ \boldsymbol{\Phi} &\simeq \mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\top). \end{aligned} \quad (\text{J.20})$$

Соотношения Коши–Грина (J.9) в линейном приближении имеют вид

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \mathbf{e}}; \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \mathbf{k}},$$

однако удобнее пользоваться другими представлениями:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}; \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}; \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \mathbf{k}}. \quad (\text{J.21})$$

Подставляя (J.17) в (J.21), получаем

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1;$$

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N}_0 + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \cdot \mathbf{k};$$

$$\mathbf{M}^\Gamma = \mathbf{M}_0^\Gamma + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2.$$

J.5. Ограничения на тензоры упругих модулей и определения групп симметрии

Перечислим ограничения, налагаемые на тензоры упругих модулей соотношениями (J.17)–(J.18) и физическими соображениями о типе тензоров. Не уменьшая общности, можно считать, что тензоры второго ранга $\mathbf{T}_0$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ симметричны; тензор $\mathbf{C}_1$ симметричен и удовлетворяет условию аполярности

$$\mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \mathbf{d}; \quad \mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{c} = -\mathbf{c}^\Gamma, \quad (\text{J.22})$$

где $\mathbf{d}$ — произвольный тензор второго ранга; тензор $\mathbf{C}_3$ — симметричен, т. е. удовлетворяет первому из условий (J.22); тензор $\boldsymbol{\Gamma}_1$ удовлетворяет условию аполярности $\boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Кроме того, все тензоры в (J.17) и (J.18) — плоские.

Важным для дальнейших построений является тип тензоров упругих модулей. Привычными для механики стали полярные и аксиальные векторы. Первые интерпретируются как трансляции, а вторые — как вращения в трехмерном пространстве. Меньше известны аксиальные тензоры высших рангов. Пример: диада $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$, где один вектор полярен, а другой — аксиален. Встречаются, но, видимо, не описаны в алгебре объекты и других типов. Например, второй метрический тензор $\mathbf{b} = -\nabla \mathbf{n}$ не является ни полярным, ни аксиальным. Будем называть его $\mathbf{n}$ -ориентированным, поскольку он зависит от выбора ориентации на прямой, натянутой на вектор нормали $\mathbf{n}$. Дискриминантный тензор $\mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ назовем аксиальным $\mathbf{n}$ -ориентированным. Он

зависит от выбора двух ориентаций: в трехмерном пространстве и на прямой $\pm \mathbf{n}$. В данном случае полярными (не зависящими от выбора ориентации) тензорами являются: $\rho, \mathcal{K}, \mathcal{U}, W, \mathbf{u}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3, \boldsymbol{\Gamma}, \rho \boldsymbol{\Theta}_2$.

Аксиальными (зависящими от выбора ориентации в трехмерном пространстве) тензорами будут: $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_0, \mathbf{C}_2, \rho \boldsymbol{\Theta}_1, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \nabla \mathbf{n} \times \mathbf{n}$ и т. д. Полярными $\mathbf{n}$ -ориентированными являются: $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}; \mathbf{N} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}; \mathbf{N}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1$. Заметим, что $\mathbf{z}\mathbf{b}$ — полярен, а $\mathbf{z}\mathbf{c}$ — аксиален, ибо $\mathbf{z}$ есть $\mathbf{n}$ -ориентированный скаляр. Тип тензора играет важную роль при определении его группы симметрии.

Определение 1. Ортогональным преобразованием $\mathbf{S}'$ тензора k -го ранга $\mathbf{S}$ называется:

$$a) \mathbf{S}' \equiv \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \equiv S^{m_1 \dots m_k} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_k}, \quad \text{если } \mathbf{S} \text{ — полярен;}$$

$$б) \mathbf{S}' \equiv (\det \mathbf{Q}) \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}, \quad \text{если } \mathbf{S} \text{ — аксиален;}$$

$$в) \mathbf{S}' \equiv \delta \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}, \quad \text{если } \mathbf{S} \text{ — } \mathbf{n}\text{-ориентирован;}$$

$$г) \mathbf{S}' \equiv \delta (\det \mathbf{Q}) \bigotimes_1^k \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}, \quad \text{если } \mathbf{S} \text{ — аксиален и } \mathbf{n}\text{-ориентирован.}$$

Здесь $\mathbf{e}_k$ — базис в трехмерном пространстве; $\delta = 1$, если $\mathbf{Q}$ не меняет ориентации на прямой $\pm \mathbf{n}$; $\delta = -1$, если $\mathbf{Q}$ меняет ориентацию на упомянутой прямой. В дальнейшем будут встречаться только такие ортогональные тензоры $\mathbf{Q}$, которые не “поворачивают” $\mathbf{n}$: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = \pm \mathbf{n}$. Поэтому в пунктах в) и г) можно принять $\delta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$.

Определение 2. Группой симметрии (ГС) тензора $\mathbf{S}$ называется множество Q_s ортогональных решений уравнений $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ задан, а ищутся тензоры $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$.

1.6. Связи между двумерными и трехмерными характеристиками

Простая оболочка является моделью, в которой кинематические и динамические переменные вводятся априорно. Однако их можно выразить, хотя и неединственным образом, через характеристики трехмерной среды.

Стандартным образом устанавливаются формулы

$$\mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle, \quad \mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} \mathbf{z} \rangle,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений в трехмерной среде.

Перемещения и повороты можно найти как решения системы

$$\rho(\mathbf{u} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \langle \rho \mathbf{u}_* \rangle; \quad \rho(\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* z \rangle \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{J.23})$$

где $\mathbf{u}_*$ — вектор смещения частиц трехмерной среды.

Если продифференцировать (J.23) по времени, то в левых частях (J.23) будут стоять соответственно плотности количества движения и кинетического момента для модели, а в правых частях — то же для трехмерной среды.

Наконец, формулы для $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}$ имеют вид

$$\rho \mathbf{F} = \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mu^+ \boldsymbol{\tau}_n^+ + \mu^- \boldsymbol{\tau}_n^-; \quad \mu^+ \equiv \mu|_{z=+h/2}; \quad \mu^- \equiv \mu|_{z=-h/2};$$

$$\rho \mathbf{L} = \mathbf{n} \times \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* z \rangle + \frac{h}{2} \mathbf{n} \times (\mu^+ \boldsymbol{\tau}_n^+ - \mu^- \boldsymbol{\tau}_n^-),$$

где $\mathbf{F}_*$ — вектор массовых сил в трехмерной среде; $\boldsymbol{\tau}_n^+$ и $\boldsymbol{\tau}_n^-$ — векторы напряжений, приложенные к верхней и нижней стороне оболочки.

J.7. Определение тензоров упругости и “начальных” напряжений

J.7.1. Группа симметрии простой оболочки. Принцип Кюри–Неймана

Практически вся информация о физических свойствах простой оболочки заключена в энергии деформации $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})$. Поэтому локальной группой симметрии (ЛГС) простой оболочки уместно назвать множество ортогональных преобразований тензоров деформации, оставляющих W неизменной,

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{k}', \boldsymbol{\gamma}'), \quad (\text{J.24})$$

где тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}'$, $\mathbf{k}'$, $\boldsymbol{\gamma}'$ имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^\top; \quad \mathbf{k}' = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}^\top; \quad \boldsymbol{\gamma}' = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (\text{J.25})$$

Ортогональные преобразования (J.25) даны в соответствии с типом рассматриваемых объектов. Согласно (J.24) и (J.17) определением ЛГС простой оболочки является множество ортогональных решений системы уравнений

$$\bigotimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1; \quad (\det \mathbf{Q}) \bigotimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2; \quad \bigotimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_3;$$

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{Q}^\top = \boldsymbol{\Gamma}; \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) \bigotimes_1^3 \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1; \quad (\text{J.26})$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})(\det \mathbf{Q}) \bigotimes_1^3 \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 = \boldsymbol{\Gamma}_2.$$

Предположим, что тензоры упругости известны, тогда можно установить ЛГС. И наоборот, если известна ЛГС, то по (J.26) можно найти структуру тензоров упругости. Задача состоит в установлении хотя бы отдельных элементов ЛГС. В данном случае существенную помощь оказывает принцип Кюри–Неймана [151]: *группа симметрии причины является подгруппой группы симметрии следствия*.

В данном случае ГС “следствия” содержит ГС “причины”, т. е. пересечение групп симметрии: 1) материала, из которого изготовлена оболочка; 2) геометрической формы срединной поверхности в данной точке; 3) внутреннего строения оболочки по толщине (многослойность и т. п.).

Установим сначала ЛГС срединной поверхности в рассматриваемой точке. Поскольку поверхность определяется с точностью до жестких движений заданием первого $\mathbf{a}$ и второго $\mathbf{b}$ метрических тензоров, то ЛГС поверхности находится как множество ортогональных решений системы уравнений

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{a}; \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{b}. \quad (\text{J.27})$$

В общем случае поверхности решениями (J.27) являются только следующие ортогональные тензоры:

$$\mathbf{E}; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \quad (\text{J.28})$$

и их возможные произведения, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — главные оси $\mathbf{b}$. Множество (J.28) содержит весьма мало элементов, в то же время ЛГС “причины” не может быть шире, чем (J.28). Допустим, что (J.28) принадлежит к группе симметрии материала и внутреннего строения. Тогда по принципу Кюри–Неймана (J.28) принадлежит к ЛГС простой оболочки. Это, в свою очередь, возможно только в том случае, когда $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{0}$; $\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{0}$. Принадлежность (J.28) к группе симметрии тензоров $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{\Gamma}$, конечно, упрощает их структуру, но они остаются достаточно сложными. Таким образом, только соображения симметрии оказываются недостаточными для эффективного определения тензоров упругости при сохранении необходимой общности.

Ж.7.2. Структура тензоров упругости для “тонких” простых оболочек

Простая оболочка моделирует трехмерные тела, толщина h которых мала в сравнении с радиусами кривизны срединной поверхности. Ранее малость h в рассуждениях не использовалась. Теперь это стало необходимостью. Тензоры упругости зависят от ряда размерных и безразмерных параметров. Если

материал оболочки изотропен, то они зависят от модуля Юнга E (или от модуля сдвига $G = E/[2(1 + \nu)]$) и коэффициента Пуассона ν . Кроме того, они зависят от h и тензора $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (можно вместо $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ использовать $\mathbf{b}$ — это не меняет результата, но усложняет построения). Можно было бы также предположить зависимость от ρ , $\rho\Theta_1$, $\rho\Theta_2$, но легко доказать обратное. Таким образом, в рассматриваемом случае тензоры упругости есть функции $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(E, \nu, h, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(E, \nu, h, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, $i = 1, 2, 3$. Другие аргументы в $\mathbf{C}_i$ и $\mathbf{\Gamma}$ не входят. Используя П-теорему [225], легко доказываем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \mathbf{C}_1^*(h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu); & \mathbf{C}_2 &= \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)} \mathbf{C}_2^*(h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu); \\ \mathbf{C}_3 &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \mathbf{C}_3^*(h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu); & \mathbf{\Gamma} &= Gh\mathbf{\Gamma}_*(h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu). \end{aligned} \quad (\text{J.29})$$

Безразмерные множители $(1 - \nu^2)^{-1}$ и числовые коэффициенты введены для удобства. Безразмерный тензор-аргумент $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ в (J.29) мал по норме:

$$\|\mathbf{f}\|^2 \equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T; \quad \|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2 = \frac{h^2}{R_1^2} + \frac{h^2}{R_2^2} \ll 1,$$

где R_1, R_2 — радиусы главных кривизн.

Примем теперь допущение, что переход от “искривленной” оболочки к пластине совершается непрерывно. Тогда в окрестности нуля нормы тензора $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ возможны следующие разложения:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\mathbf{C}_1^{(0)} + \mathbf{C}_1^{(1)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2) \right]; \quad (\text{J.30})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 &= \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)} \left[\mathbf{C}_2^{(0)} + \mathbf{C}_2^{(1)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \right. \\ &\quad \left. + (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{C}_2^{(2)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^3) \right]; \end{aligned} \quad (\text{J.31})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3 &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left[\mathbf{C}_3^{(0)} + \mathbf{C}_3^{(1)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \right. \\ &\quad \left. + (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{C}_3^{(2)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^3) \right]; \end{aligned} \quad (\text{J.32})$$

$$\mathbf{\Gamma} = Gh \left[\mathbf{\Gamma}^{(0)} + \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2) \right], \quad (\text{J.33})$$

где тензоры $\mathbf{C}_i^{(k)}, \mathbf{\Gamma}^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3; k = 0, 1, 2$) зависят только от коэффициента Пуассона. В разложения (J.30)–(J.33) вошли только целые степени $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,

ибо только целые степени аксиального тензора имеют физический смысл. Эти допущения менее ограничительны, чем принятые в литературе [226, 227]. В дальнейшем поправками $O(\|\mathbf{hb} \cdot \mathbf{c}\|^2)$ по сравнению с единицей будем пренебрегать, если это не противоречит физическим соображениям. В (J.32) тензор $(\mathbf{hb} \cdot \mathbf{c}) \cdots \mathbf{C}_3^{(2)} \cdots (\mathbf{hb} \cdot \mathbf{c})$ дает слагаемые, выходящие за пределы принятой точности; его назначение — обеспечение положительности энергии деформации. Тензоры $\mathbf{C}_i^{(k)}$ зависят только от материала и строения простой оболочки в данной точке-частице, поэтому их группы симметрии существенно расширяются. Действительно, в данном случае отпадает необходимость рассматривать уравнения (J.27), определяющие ЛГС срединной поверхности. Допустим теперь, что материал оболочки трансверсально-изотропен ($\mathbf{n}$ — ось изотропии), а ее строение таково, что при $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$ касательная плоскость к срединной поверхности является плоскостью симметрии. Тогда группа симметрии “причины”, порождающей тензоры $\mathbf{C}_i^{(k)}$, $\mathbf{\Gamma}^{(k)}$, но не сами тензоры $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{\Gamma}$, содержит

$$\mathbf{Q} = \pm \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{q}; \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{a}; \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (\text{J.34})$$

которые по принципу Кюри–Неймана принадлежат к группе симметрии “следствия” тензоров $\mathbf{C}_i^{(k)}$, $\mathbf{\Gamma}^{(k)}$. Рассмотрим тензор $\mathbf{Q} = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{q}$, содержащийся в (J.34). Аксиальные тензоры $\mathbf{C}_1^{(1)}$, $\mathbf{C}_2^{(0)}$, $\mathbf{C}_2^{(2)}$, $\mathbf{C}_3^{(1)}$, $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ допускают этот тензор своим элементом симметрии только в том случае, если они равны нулю.

Например, для тензора $\mathbf{C}_1^{(1)}$ имеем

$$(\det \mathbf{Q}) \bigotimes_1^6 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_1^{(1)} = -\mathbf{C}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{0} \quad (\det \mathbf{Q} = -1).$$

Таким образом, доказаны равенства

$$\mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{C}_2^{(0)} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{C}_2^{(2)} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{C}_3^{(1)} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{\Gamma}^{(1)} = \mathbf{0}.$$

Поэтому тензоры $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{\Gamma}$ с ошибкой $O(\|\mathbf{hb} \cdot \mathbf{c}\|^2)$ могут быть найдены из экспериментов с пластинами. Тензор $\mathbf{C}_2$ может быть определен только из экспериментов с “искривленными” оболочками. Рассмотрим теперь тензор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{a} - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \quad (\text{J.35})$$

где ортонормированные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ образуют правый трехгранник. Тензор (J.35) осуществляет поворот вектора $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$) на угол θ вокруг $\mathbf{n}$; он содержится в (J.34) и, следовательно, принадлежит группе симметрии

евклидовых тензоров $\mathbf{C}_1^{(0)}$, $\mathbf{C}_2^{(1)}$, $\mathbf{C}_3^{(0)}$, $\mathbf{C}_3^{(2)}$, $\mathbf{\Gamma}^{(0)}$. Это означает, что они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \bigotimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_1^{(0)} &= \mathbf{C}_1^{(0)}; & \bigotimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_3^{(0)} &= \mathbf{C}_3^{(0)}; & \bigotimes_1^8 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_3^{(2)} &= \mathbf{C}_3^{(2)}; \\ \bigotimes_1^6 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_2^{(1)} &= \mathbf{C}_2^{(1)}; & \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{\Gamma}^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{J.36})$$

где $\mathbf{Q}$ определяется формулой (J.35). Тензоры, удовлетворяющие условиям типа (J.36), называются трансверсально-изотропными. Нахождение решения уравнений (J.36) при условии (J.35) не содержит принципиальных трудностей, но требует сравнительно громоздких вычислений. Поэтому ограничимся только окончательными формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [A_1 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + A_2 (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta + \\ &\quad + \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) + A_3 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}]; \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{Eh^2}{6(1-\nu^2)} [B_1 h \mathbf{H} \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + B_2 h \mathbf{H} (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{c}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\beta) + \\ &\quad + B_3 h \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - H \mathbf{c}) + B_4 h (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - H \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} + B_5 h (\mathbf{b} - H \mathbf{a}) \otimes \mathbf{c}]; \\ \mathbf{C}_3 &= \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} [C_1 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + C_2 (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta + \\ &\quad + \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) + (C_3 + h^2 H_1^2 C_4) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]; \\ \mathbf{\Gamma} &= G h \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{a}; \quad 2H_1 = -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (\text{J.37})$$

При выводе этих формул допускалась погрешность $O(\|\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2)$ и учитывалось, что тензоры $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{\Gamma}$ — симметричны. Поскольку $\mathbf{C}_1$ удовлетворяет условию аполярности (J.22), то $A_3 = 0$. Модуль $\mathbf{C}_3$ может быть найден из экспериментов с пластинами, но для них

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{z} \rangle \cdot \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_3 = 0.$$

Дальнейшее упрощение (J.37), видимо, невозможно. Для однослойных оболочек модули A_1 , A_2 , C_1 , C_2 , C_4 , Γ_0 , B_1 , ..., B_5 зависят только от коэффициента Пуассона, а для многослойных симметричного строения оболочек они могут зависеть от относительных модулей упругости материала и относительных толщин слоев.

J.7.3. Структура тензоров “начальных” напряжений

В линейной теории свободная энергия является квадратичным функционалом, а тензоры $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{N}_0$ — линейными функционалами от внешних нагрузок. В локальной теории они могут зависеть только от поверхностных и двух первых моментов объемных нагрузок в данной точке-частице простой оболочки. Приходим к следующим линейным зависимостям общего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{L}_{k1} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ + \mathbf{L}_{k2} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- + \mathbf{L}_{k3} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{k4} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle; \\ \mathbf{P}_1 &\equiv \mathbf{T}_0; \quad \mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{M}_0; \quad \mathbf{P}_3 \equiv \mathbf{N}_0; \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (\text{J.38})$$

где $\mathbf{L}_{\alpha s}$ — тензоры третьего, а $\mathbf{L}_{3s}$ — тензоры второго ранга, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{ps} &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}_{\alpha s} = \mathbf{0}; \\ p &= 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2; \quad s = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \quad (\text{J.39})$$

вектор $\mathbf{m}$ — ортогонален $\mathbf{n}$.

С ошибкой $O(\|\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2)$ тензоры $\mathbf{L}_{ps}$ можно определить из экспериментов с пластинами. Пониженная точность при их определении оправдывается тем, что, как правило, поправка, вносимая $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{N}_0$ в полные тензоры $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, сама является малой. В принципе, не составляет труда найти и более точные формулы для $\mathbf{L}_{ps}$, если использовать технику преобразований, изложенных ранее. Поскольку материал оболочки трансверсально-изотропен, то такими же должны быть и тензоры $\mathbf{L}_{ps}$ (с ошибкой $O(\|\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2)$). Общее выражение таких тензоров с учетом (J.39) имеет вид

$$\mathbf{L}_{1s} = \mathbf{L}_{1s} \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}; \quad \mathbf{L}_{2s} = \mathbf{L}_{2s} \mathbf{c} \otimes \mathbf{n}; \quad \mathbf{L}_{3s} = \mathbf{L}_{3s} \mathbf{a}. \quad (\text{J.40})$$

Дальнейшее упрощение структуры тензоров $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{N}_0$ достигается следующим образом. Произведем отражение от касательной плоскости и запишем закон (J.38) для отражения величин. Он должен остаться тем же, но место $\boldsymbol{\tau}_n^+$ займет $(\boldsymbol{\tau}_n^-)'$, а место $\boldsymbol{\tau}_n^-$ — $(\boldsymbol{\tau}_n^+)'$. Тогда

$$\mathbf{T}'_0 = \mathbf{L}_{11} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^-)' + \mathbf{L}_{12} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+) + \mathbf{L}_{13} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle' + \mathbf{L}_{14} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle'.$$

Используя первое определение ортогонального преобразования и учитывая, что отражение производится тензором $\mathbf{Q} = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{a}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_0 &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_0; \quad (\boldsymbol{\tau}_n^-)' \equiv \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-; \quad \boldsymbol{\tau}_n^{+'} \equiv \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-; \\ \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle' &\equiv \mathbf{Q} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle; \quad \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle' \equiv -\mathbf{Q} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle; \\ \mathbf{T}_0 &= -\mathbf{L}_{11} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- - \mathbf{L}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ - \mathbf{L}_{13} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{14} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{J.41})$$

В данном случае было учтено, что тензоры $\mathbf{L}_{1s}$ имеют вид (J.40). Добиваясь совпадения (J.41) с первой формулой (J.38), получим

$$\mathbf{L}_{11} = -\mathbf{L}_{12} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{11} = -\mathbf{L}_{12}; \quad \mathbf{L}_{1s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{13} = 0.$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для остальных величин. Таким образом, окончательный вид тензоров “начальных” напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= h\mathbf{L}_1 \mathbf{a} [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-)] + \mathbf{L}_1^* \mathbf{a} \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{n} \mathbf{z} \rangle; \\ \mathbf{M}_0 &= h^2 \mathbf{L}_2 \mathbf{c} [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-)] + h^2 \mathbf{L}_2^* \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{c}; \\ \mathbf{N}_0 &= h\mathbf{L}_3 \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-) + \mathbf{L}_3^* \mathbf{a} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{n} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{J.42})$$

где $\mathbf{L}_i$ и $\mathbf{L}_i^*$ — безразмерные “модули”, зависящие для многослойных оболочек только от коэффициента Пуассона. Все они могут быть найдены из экспериментов с пластинами.

J.7.4. Некоторые частные случаи

Важное для приложений значение имеет простейшая теория оболочек, описываемая наименьшим числом отличных от нуля упругих модулей, при которых энергия деформаций остается положительно определенной функцией. Необходимыми условиями положительности являются неравенства

$$A_1 > 0; \quad A_2 > 0; \quad C_1 > 0; \quad C_2 > 0; \quad \Gamma_0 > 0. \quad (\text{J.43})$$

Если все остальные модули в (J.37) принять равными нулю, то условия (J.43) будут достаточными. Для однослойных оболочек из изотропного материала справедливы формулы

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= C_1 + C_2 = 1; \quad A_1 - A_2 = C_1 - C_2 = \nu; \\ \Gamma_0^{(1)} &= \pi^2/12; \quad \Gamma_0^{(2)} = 5/(6 - \nu). \end{aligned} \quad (\text{J.44})$$

Здесь приведены два значения для Γ_0 : $\Gamma_0^{(1)}$ рекомендуется как стандартное, но в задачах с ярко выраженным изгибом целесообразнее использовать $\Gamma_0^{(2)}$. Если принять $\Gamma_0 \rightarrow \infty$, то простейшая теория пластин переходит в теорию Койтера–Сандерса.

Приведем значения упругих модулей для тонких трехслойных оболочек симметричного строения. Примем обозначения: h_1 , E_1 , ν_1 , $G_1 = E_1/2(1 + \nu)$ — полутолщина и модули упругости материала внутреннего слоя (заполнителя);

$h_2, E_2, \nu_2, G_2 = E_1/2(1 + \nu)$ — толщина и модули одного внешнего слоя; $2h = 2(h_1 + h_2)$ — толщина трехслойного пакета, $h_1 = \alpha h$; $h_2 = (1 - \alpha)h$. Тогда модули трехслойной оболочки можно определить по формулам

$$\left[\frac{Eh}{1 - \nu^2} A_1 \right] = \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1} + \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2}; \quad \left[\frac{Eh}{1 - \nu^2} A_2 \right] = \frac{E_1 h_1}{1 + \nu_1} + \frac{E_2 h_2}{1 + \nu_2}; \quad (J.45)$$

$$\left[\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} C_1 \right] = \frac{E_1 h_1^3}{3(1 - \nu_1)} + \frac{E_2 (h^3 - h_1^3)}{3(1 - \nu_2)}; \quad (J.46)$$

$$\left[\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} C_2 \right] = \frac{E_1 h_1^3}{3(1 + \nu_1)} + \frac{E_2 (h^3 - h_1^3)}{3(1 + \nu_2)};$$

$$[Gh\Gamma_0] = \frac{\gamma^2}{h^2} \left[\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} C_2 \right], \quad (J.47)$$

где γ — положительный корень уравнения

$$G_2 \sin[\gamma(1 - \alpha)] \sin[\gamma\alpha] - G_1 \cos[\gamma(1 - \alpha)] \cos[\gamma\alpha] = 0.$$

В (J.45)–(J.47) выражения, стоящие в квадратных скобках, следует понимать как единые символы — только они входят в (J.37).

Модуль $Gh\Gamma_0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{G_1 h_1 G_2 h_2}{4G_1 h_1 + G_2 h_2} \leq [Gh\Gamma_0] \leq \frac{\pi^2}{6} (G_1 h_1 + G_2 h_2). \quad (J.48)$$

Левая часть этого неравенства представляет собой жесткость на поперечный сдвиг, вычисленную по схеме последовательного включения слоев, а правая — по схеме параллельного включения. Если $Gh\Gamma_0$ близка правой части (J.48), то для всего пакета слоев (h — мало) можно применять обычные кинематические гипотезы. В противном случае — нельзя.

Если однослойную оболочку нельзя считать тонкой ($h/R \sim 0,1 - 0,7$), следует учитывать все модули, входящие в (J.37) и (J.42). Они определяются равенствами

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\nu}{2(1 - \nu)}; & L_2 &= \frac{\nu}{12(1 - \nu)}; & L_3 &= 1 - \Gamma_0; & C_4 &= \frac{1 - \nu}{24}; \\ B_1 &= -\frac{\nu(1 + \nu)}{2(1 - \nu)}; & B_2 &= 0; & B_3 &= \frac{1 + \nu}{2}; & B_4 &= -\frac{1 - \nu}{4}; & B_5 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (J.49)$$

Кроме того, к ним следует присоединить формулы (J.44). Приняв (J.44), (J.49), энергия деформации будет положительно определена при выполнении

неравенств

$$h^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 < 12(1 - \nu^2); \quad -1 < \nu \leq \frac{1}{2};$$

$$1 - \nu^2 - \nu \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 > \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 \left[1 - \nu^2 - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 \right].$$

При $\nu^2 \leq 1/2$ эти неравенства практически не налагают ограничений на параметры оболочки.

J.8. Уравнения неразрывности

В работах [68, 228] введены тензоры деформации (J.19), для которых получены уравнения неразрывности. Однако последние при наличии ограничений (J.12) становятся неудобными, поскольку в этом случае тензоры деформации приобретают вид (J.20). Уравнения неразрывности для тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\gamma}$ имеют вид

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})]) + \text{tr} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot [\mathbf{k} + \nabla (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma})]) = 0;$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{k})) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0;$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \text{tr} (\mathbf{k} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = 0.$$

Вследствие принятия гипотез типа Кирхгофа–Лява ($\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$) эти уравнения переходят в общепринятые.

Жилин Павел Андреевич

РАЦИОНАЛЬНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Пряникова*

Технический редактор *А. И. Колодяжная*

Дизайн обложки *Т. М. Ивановой*

Оригинал-макет подготовлен редакционной коллегией

Свод. темплан 2010 г.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, т. 2; 953005 — учебная литература

Подписано в печать 14.11.2011.

Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 47,0.

Тираж 100.

Заказ 8332 б.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.

Издательство Политехнического университета,

член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.

Адрес университета и издательства:

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.