

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Геологический факультет

Н. Н. Еремин, Т. А. Еремина

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Учебно-методическое пособие для преподавателей геологических центров
детского образования и школьников, занимающихся в кружках
геологического профиля

Электронное издание

*Допущено УМС геологического факультета МГУ в качестве учебного
пособия для студентов, обучающихся по направлению «Геология»,
и преподавателей геологических кружков*

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 548.0
ББК 26.303
Е 70

Еремин Н. Н., Еремина Т. А.
Занимательная кристаллография
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
148 с.
ISBN 978-5-4439-2154-9

В книге в краткой и доступной для школьников форме изложены основы классической кристаллографии. Материал организован в виде занятий, каждое из которых дополняется контрольными вопросами и упражнениями. В приложениях к пособию приведен дополнительный иллюстративный материал, представлены полезные ссылки на литературу и интернет-ресурсы, разобрана работа кабинета кристаллографии на олимпиаде школьников по геологии в МГУ, а также приведены ответы к упражнениям каждой ступени.

Книга предназначена для школьников, желающих ознакомиться с основами кристаллографии в объеме, достаточном для успешного участия в олимпиадах по геологии, а также для преподавателей геологических кружков.

Подготовлено на основе книги: *Н. Н. Еремин, Т. А. Еремина. Занимательная кристаллография.* — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-74-83.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2154-9

© Еремин Н. Н., Еремина Т. А., 2013
© МЦНМО, 2014

Оглавление

Введение	5
--------------------	---

Ступень № 1

Занятие 1. Место кристаллографии среди естественных наук. Кристалл как объект исследования	7
Занятие 2. Кристалл как геометрическое тело	10
Занятие 3. Основы учения о симметрии. Элементы симметрии. Операции симметрии, возможные в кристаллах	14
Занятие 4. Символика Браве	18
Занятие 5. Классы симметрии кристаллов. Категория. Сингония	21
Занятие 6. Классы симметрии низшей категории	24
Занятие 7. Понятие простой формы. Простые формы кристаллов низшей категории	28
Занятие 8. Практическое занятие. Основы проецирования кристалла. Трафарет для представления. Работа с кристаллом низшей категории	33

Ступень № 2

Занятие 9 (2–1). Сложные элементы симметрии	39
Занятие 10 (2–2). Основные теоремы взаимодействия элементов симметрии	42
Занятие 11 (2–3). Вывод классов средней категории	47
Занятие 12 (2–4). Практическое занятие. Достройка класса симметрии по заданному набору	54
Занятие 13 (2–5). Простые формы тетрагональной и гексагональной сингонии	55
Занятие 14 (2–6). Символика Шёнфлиса. Ее преимущества	64
Занятие 15 (2–7). Облик и габитус кристалла	66
Занятие 16 (2–8). Практическое занятие. Полное описание кристалла низшей или средней категории	68

Ступень № 3

Занятие 17 (3–1). Классы симметрии высшей категории	72
Занятие 18 (3–2). Простые формы кубических кристаллов	75
Занятие 19 (3–3). Международная символика. Ее преимущества	81
Занятие 20 (3–4). Икосаэдрические группы. Объекты икосаэдрической симметрии	85
Занятие 21 (3–5). Предельные группы симметрии — группы физических свойств кристаллов	91
Занятие 22 (3–6). Симметрия и форма реальных кристаллов	94

З а н я т и е 23 (3–7). Гониометрия как метод изучения реальных кристаллов. Практическое занятие: сетка Вульфа	99
З а н я т и е 24 (3–8). Практическое занятие: полное описание кристалла по го- ниометрическим данным	106

Приложения

Приложение 1. Подготовка к олимпиаде школьников по геологии. Типовые задачи кабинета кристаллографии	115
Приложение 2. Изготовление моделей кристаллов различных классов	116
Предметный указатель	128
Рекомендованная литература	131
Полезные интернет-ресурсы	132

Введение

Геология — универсальная наука о Земле, аккумулирующая практически все области знания об окружающем мире. В настоящее время она объединяет более сорока различных направлений. К ним относится и кристаллография — одна из главных фундаментальных наук о веществе Земли. Это наука не только о кристаллах, но и о процессах их образования, их внешней форме, внутреннем строении и физических свойствах; она затрагивает вопросы о процессах, происходящих в глубинах нашей планеты. Поэтому именно кристаллография связывает многие разделы геологии со смежными фундаментальными науками, известными школьникам: физикой, химией, геометрией.

К сожалению, предмет «геология» не преподается в школе. Отдельные мелкие части разрознены по урокам географии и биологии, физики и математики. Таким образом, школьникам попросту практически неоткуда узнать о геологических дисциплинах в их современном состоянии. Конечно, в некоторых центрах детского образования в России есть очень хорошие геологические кружки, но и там этот раздел геологии преподается порой бессистемно, кружки не оснащены наглядными пособиями и зачастую кристаллографию в таких кружках попросту некому преподавать.

Это обстоятельство побудило авторов создать настоящее пособие для школьников, которые приняли решение самостоятельно ознакомиться с основами кристаллографии в объеме, достаточном для успешного участия в школьных олимпиадах по геологии. Среди последних можно выделить Московскую открытую олимпиаду школьников по геологии и олимпиаду «Земля и человек», проводимые ежегодно геологическим факультетом МГУ имени М. В. Ломоносова и Российским государственным геологоразведочным университетом имени Серго Орджоникидзе соответственно.

Авторы стремились изложить трудный и новый для большинства читателей материал максимально простым языком. Однако книга отнюдь не предназначена для легкого и развлекательного чтения. Читателю придется проявить определенное терпение, чтобы освоить некоторые трудоемкие разделы пособия. Авторы надеются, что наградой за терпение будет удовлетворение от дальнейшего изучения кристаллографии — замечательной науки о самых прекрасных творениях неживой природы.

Также это пособие может быть полезно для преподавателей геологических кружков при составлении планов занятий по данной дисциплине. Методически материал пособия разделен на три ступени, соответствующие возрасту школьников: первая ступень ориентирована на школьников 6–8 классов, вторая — на 9–10 классы и третья — на выпускной класс общеобразовательной школы. Каждое занятие дополняется контрольными вопросами и упражне-

ниями, помогающими закреплению пройденного материала. Каждая ступень завершается практическим занятием.

В приложениях к пособию приведен дополнительный иллюстративный материал, который может быть полезен при изучении предмета, представлены полезные ссылки на литературу и интернет-ресурсы, разобрана работа кабинета кристаллографии на олимпиаде школьников по геологии в МГУ, а также приведены ответы к упражнениям каждой ступени. Учитывая тот факт, что для многих читателей будет не просто получить доступ к учебным моделям кристаллических многогранников, в приложениях дополнительно приведены развертки для самостоятельной склейки некоторых модельных кристаллов.

Ступень № 1

Занятие 1

Место кристаллографии среди естественных наук. Кристалл как объект исследования

С кристаллическим веществом люди столкнулись в глубокой древности. Со времен палеолита они добывали камни, использовали их полезные свойства, удивляясь и поражаясь их необыкновенной форме, цвету. Первые письменные упоминания о кристаллах относятся к 500–300 гг. до н. э., а само название «кристалл» произошло от греческого слова «кристаллос» — прозрачный лёд.

Однако люди долгое время не могли объяснить причины удивительно правильной огранки природных кристаллов, порой кристаллам приписывали магическую силу, которая выше возможностей человеческого познания. Геометрия кристаллов казалась таинственной и неразрешимой загадкой. Тем не менее, понемногу накапливалась информация о свойствах кристаллов, об их огранке, что и привело к зарождению кристаллографии. Долгое время кристаллы горного хрусталя принимали за новую, устойчивую к нагреву форму льда, образовавшуюся после «великой стужи». Но после военных походов Александра Македонского (356–323 гг. до н. э.) в страны с жарким климатом, где часто встречались кристаллы других минералов, происхождение кристаллов стали связывать не только с действием холода, а и с силами Божественного Солнца. Отметим, что в то время кристаллами называли лишь прозрачные, хорошо ограненные образования (аквамарин, кварц и т. д.). Впоследствии этот термин был распространен на все прозрачные и непрозрачные «угловатые» тела природной многогранной формы. Таким образом, кристаллография зародилась при наблюдении и изучении природных объектов — минералов и сложенных ими горных пород. Поэтому можно считать, что долгое время эта наука была как бы частью геологии, а точнее минералогии. Лишь со временем кристаллография выделилась в самостоятельную науку, что чаще всего связывают с работами датского естествоиспытателя Николая Стенона, который в середине XVII века высказал ряд предположений о механизмах зарождения и роста кристаллов и впервые сформулировал первый закон кристаллографии — закон постоянства углов:

Хотя кристаллы одного и того же вещества (минерала) могут иметь разную форму, углы между их соответственными гранями остаются неизменными.

На рисунке 1 изображены различные по форме кристаллы кварца, однако если померить углы между гранями, обозначенных буквами a и b (либо a и c),

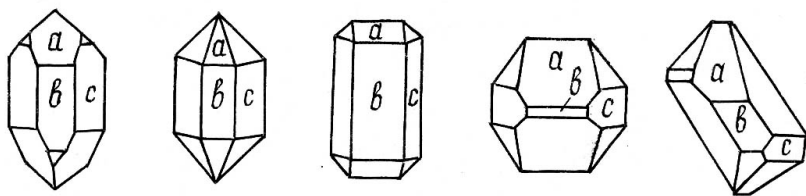


Рис. 1. Кристаллы кварца, иллюстрирующие закон постоянства углов
(из книги «Кристаллография» Роме де Лиля, 1783)

то для всех пяти образцов результат будет одинаков. По этим углам кварц можно отличить от кристаллов другого вещества. Таким образом, внешняя форма является важным диагностическим признаком, позволяющим идентифицировать конкретный минерал. Отметим, что сам Стенон не измерял углы между гранями, а обводил карандашом грани кристаллов кварца и уже на рисунках сравнивал углы между гранями. Прибор для измерения углов между гранями (гониометр, изображенный на рис. 2) появился несколько позднее, во времена французского минералога Жана-Батиста-Луи Роме де Лиля, который заново открыл забытый более чем на сто лет закон постоянства углов.

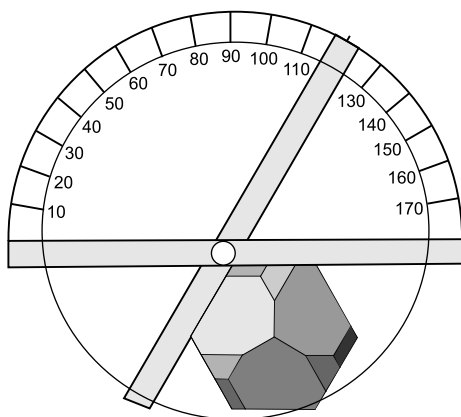


Рис. 2. Прикладной гониометр времен Роме де Лиля

Мир кристаллов поражает своим разнообразием. К настоящему времени открыто более 4500 только минеральных видов, а количество синтетических кристаллических неорганических соединений намного больше и приближается к сотне тысяч. Зная, как «устроены» кристаллы, как их строение связано с химическим составом, можно объяснить и даже предсказать те удивительные свойства кристаллов минералов, которые веками привлекали к себе интерес людей.

Из трех форм организации твердого состояния вещества (кристаллического, аморфного и недавно открытого квазикристаллического) кристаллическое состояние наиболее распространено в природе и характеризуется строго определенным (однородно повторяющимся) расположением слагающих его атомов в пространстве. Отметим, кстати, что принадлежность аморфного тела к твердому состоянию спорно, многие физики считают его жидкостью с очень большой вязкостью.

Что же такое кристалл, с современной точки зрения? Согласно определению, *кристалл — твердое, однородное, анизотропное вещество, способное в определенных условиях самоограняться. Анизотропностью* называют способность кристалла по-разному проявлять одно физическое свойство (твердость, теплопроводность, показатель преломления, спайность и др.) в различных направлениях. Этим кристалл отличается от изотропного стекла (аморфного состояния вещества). Еще одним важным свойством кристаллического вещества, отличающим его от аморфного, является способность кристалла при определенных условиях принимать естественную многогранную форму, т. е. самоограняться. Любой обломок кристалла, попав в соответствующую среду, например, в пересыщенный раствор того же состава, начнет покрываться гранями, в то время как аморфное вещество останется без изменения.

Современные естественные науки немыслимы без знания и широкого использования законов кристаллографии. В наши дни кристаллография — это самостоятельная наука, занимающая почетное место среди других родственных наук; в настоящее время она имеет тесные связи с физикой и химией твердого тела, геохимией, математикой и другими разделами естествознания. Кристаллография находится на стыке таких наук, как математика, геология, минералогия, химия, физика и биология. На пересечении кристаллографии с этими науками возникли промежуточные области знаний. Однако резких границ между ними нет, это система взаимопроникающих и взаимообогащающих друг друга областей знаний.

Таким образом, современная кристаллография включает в себя ряд разделов, тесно связанных с соседними науками. Так, *математическая кристаллография*, возникшая на стыке кристаллографии и математики, создана математиками и кристаллографами-теоретиками. Сюда входит и *геометрическая кристаллография*. Это теоретическая основа кристаллографии: эмпирические данные о форме кристаллических тел, учение о внешней и внутренней симметрии, геометрическая теория кристаллических многогранников, математический аппарат тензорной кристаллофизики и дифракционных методов исследования вещества.

Кристаллохимия изучает взаимосвязь между кристаллическими структурами разных веществ и их химическим составом, характером химической связи, их свойствами. Накопление и обобщение знаний о кристаллах позволяет проследить отдельные принципы их устройства, увидеть, как некоторые типы атомных построек оказываются результатом определенных соотношений размеров атомов и сил их взаимодействия. В этом направлении получил глубокое развитие и во многом заново переосмыслен предмет минералогия. Стали понятны причины многих усложнений состава, казавшиеся ранее ка-

призом природы. В их основе заложен, помимо химического, еще и геометрический принцип.

Физическая кристаллография рассматривает электрические, оптические, механические и другие свойства кристаллов и их зависимость от симметрии и состава. Кристаллофизика рассматривает корреляцию между физическими свойствами и атомной структурой кристаллов. Таким образом, кристаллофизика является теоретической основой новых областей техники, таких как полупроводниковая электроника, пьезотехника, квантовая радиофизика и нелинейная оптика.

Кристаллогенезис — прикладная область кристаллографии, исследующая процессы образования и роста кристаллов. Быстрое развитие техники потребовало большого количества различных кристаллов: для обработки сверхтвердых материалов, полупроводников, кристаллов для лазерных установок, для микроэлектроники, сегнетозлектрики, а также абразивов и, наконец, ювелирных кристаллов. Все это привело к созданию новой отрасли — промышленности выращивания кристаллов. В. И. Вернадский подметил, что «монокристаллы в наше время занимают столь важное место, что XX век можно было бы назвать веком монокристаллов».

Контрольные вопросы

- 1) Как закон постоянства углов помогает диагностировать кристаллы разных минералов?
- 2) Какие различные твердые состояния вещества известны сегодня? В чем особенность кристаллического состояния?
- 3) Что называется кристаллом в современном понимании этого термина?
- 4) Какие разделы современной кристаллографии вам известны? Чем они занимаются?
- 5) С какими науками кристаллография граничит особенно близко?

Занятие 2

Кристалл как геометрическое тело

С древнейших времен наши представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам — удивительным символам симметрии, имеющим необычайно красивые, совершенные и гармоничные формы. Особенно ярко законы симметрии реализуются в кристаллах, которые часто принимают вид многогранных объектов. Что же такое многогранник?

Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников. Среди многогранников можно выделить *выпуклые многогранники*. Многогранник является выпуклым, если любой отрезок, соединяющий две точки, принадлежащие этому многограннику, будет также принадлежать ему полностью.

Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани — правильные равные многоугольники и все двугранные углы равны. В каждой его вершине сходится одинаковое число ребер.

Сразу определимся, что *гранью* мы будем называть плоскую поверхность, ограничивающую наше трехмерное тело, *ребром* — линию пересечения двух граней, а *вершиной* — точку пересечения нескольких ребер.

Первые упоминания о многогранниках встречались еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. История их изучения связана с именами выдающихся мыслителей — Пифагора, Евклида, Архимеда. Пифагор и его ученики считали правильные выпуклые многогранники божественными фигурами. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий философ Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться *платоновыми телами*.

Важное свойство многогранников сформулировал Леонард Эйлер — известный математик, физик и астроном. Швейцарец по происхождению, он с 1727 г. работал в России. Эйлер является автором более 800 работ, оказавших значительное влияние на развитие естественных наук. Он показал, что для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение:

$$\Gamma + B - P = 2.$$

Здесь Γ — число граней, B — число вершин, P — число ребер данного многогранника. Теорему Эйлера историки математики называют *первой теоремой топологии* — крупного раздела современной математики.

Второе важное соотношение гласит, что в любом выпуклом многограннике (в том числе и правильном) сумма всех углов между ребрами, сходящимися в одной вершине, всегда меньше 360° . Посмотрим на рисунок 3. Рассмотрим плоскость $ABCD$, в которой находится точка O (наша вершина). Сколько бы линий (ребер) из центра O мы ни провели, все равно сумма углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ будет равна 360° . Теперь выведем вершину из плоскости. Очевидно, что при бесконечно большом расстоянии от плоскости углы α вырождаются в бесконечно малые углы, следовательно, каждый угол α' будет меньше соответствующего угла α .

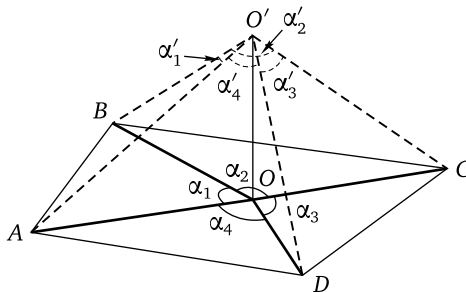


Рис. 3. Сумма всех углов между ребрами, сходящимися в одной вершине внутреннего многогранника, меньше 360°

Доказанное неравенство ограничивает число правильных многогранников до пяти. Давайте это проверим. Какие правильные многоугольники могут сходиться в вершине правильного многогранника?

Первый возможный случай — в одной вершине сходятся три равносторонних треугольника. Внутренний угол каждого треугольника равен 60° . Сумма внутренних углов равна $60^\circ \times 3 = 180^\circ$, что меньше 360° . Мы получили первое правильное платоново тело. Оно называется *тетраэдр* (рис. 4 а). Отметим, что названия платоновых тел имеют греческие корни: «эдра» — грань, «тетра» — четыре. Тетраэдр — это правильный выпуклый четырехгранник. У него четыре вершины и шесть ребер. Как видим, соотношение Эйлера выполняется ($4 + 4 - 6 = 2$). Кстати, тетраэдр представляет собой выпуклый многогранник с **наименьшим** числом граней — тремя плоскостями невозможно ограничить конечную область пространства, а четырьмя можно (иногда).

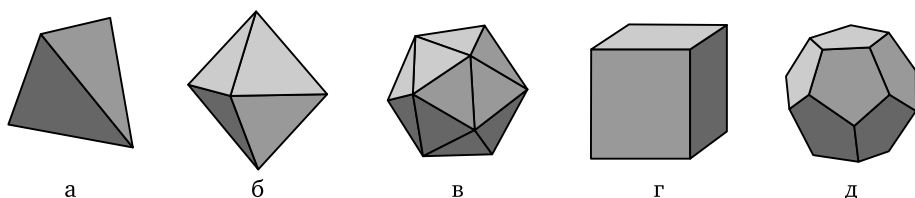


Рис. 4. Пять правильных выпуклых многогранников: а) тетраэдр, б) октаэдр, в) икосаэдр, г) гексаэдр и д) додекаэдр

Увеличим число треугольников, сходящихся в одной вершине, до четырех. В этом случае сумма внутренних углов останется меньше 360° ($4 \times 60^\circ = 240^\circ$), т.е. такой случай имеет право на существование. Такой многогранник называется *октаэдром* («окта» — восемь). Октаэдр имеет шесть вершин и восемь граней (см. рис. 4 б). Несложно подсчитать, что ребер у него 12, в полном соответствии с правилом Эйлера.

Увеличим число правильных треугольников, сходящихся в одной вершине, до пяти. И в этом случае сумма внутренних углов останется меньше 360° ($5 \times 60^\circ = 300^\circ$), т.е. такой случай тоже имеет право на существование. Полученный многогранник называется *икосаэдром* (двадцатигранник по-гречески). У него 12 вершин и 30 ребер (рис. 4 в).

Увеличим число правильных треугольников, сходящихся в одной вершине, до шести. Сумма внутренних углов станет в точности равна 360° . Это означает, что такой случай реализуется только на плоскости (рис. 5 а), и выпуклый

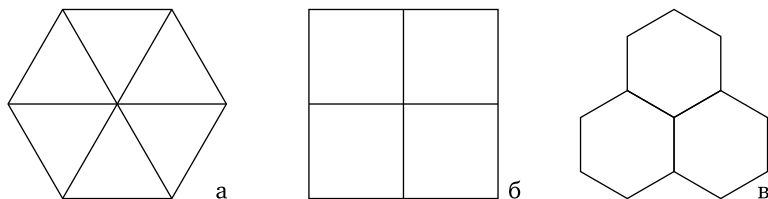


Рис. 5. Возможные варианты укладки правильных многоугольников, приводящие к полному заполнению плоскости: а) соединение шести правильных треугольников, б) соединение четырех квадратов, в) соединение трех шестиугольников

многогранник с числом равносторонних треугольников более пяти, сходящихся в одной точке, невозможен.

Обратимся к квадратным граням. Четыре квадрата уже дают 360° и плоскую фигуру (рис. 5б), следовательно, единственная возможность — соединить в одной вершине три квадрата. Перед нами появится знакомый всем куб, или *гексаэдр* («гекса» — шесть), приведенный на рис. 4г. У куба сумма углов при вершине равна $3 \times 90^\circ = 270^\circ$, вершин у куба 8, а ребер 12.

Рассмотрим правильные пятиугольники. Единственный возможный случай — три правильных пятиугольника, сходящихся в одной вершине. Сумма углов при вершине равна $108^\circ \times 3 = 324^\circ$. Такой многогранник называется *додекаэдром* («додека» — двенадцать). Право же, удивительно, что из пятиугольников тоже можно построить правильный многогранник! У такого додекаэдра (рис. 4д) 20 вершин и 30 ребер.

Рассмотрим правильные шестиугольники. Сочленение трех шестиугольников приведет нас к плоской фигуре типа пчелиных сот (рис. 5в). Это значит, что сложить из шестиугольников, не деформировав их, объемное тело невозможно. Таким образом, правильных многогранников всего пять. Их характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики правильных выпуклых многогранников

Многогранник	Число вершин	Число граней	Сумма В + Г	Число ребер	Число ребер+2	Встречаемость в кристаллах
тетраэдр	4	4	8	6	8	да
гексаэдр	8	6	14	12	14	да
октаэдр	6	8	14	12	14	да
икосаэдр	12	20	32	30	32	только в квазикристаллах
додекаэдр	20	12	32	30	32	только в квазикристаллах

Обратим внимание, что последние две фигуры не могут быть встречены среди кристаллов, так как содержат запрещенные в классической кристаллографии оси пятого порядка (см. ниже). Однако они встречаются среди *квазикристаллов* — недавно открытой формы организации твердых тел с дальним порядком.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое грань, ребро и вершина?
- 2) Почему правильных многогранников всего пять?
- 3) Перечислите все возможные варианты плоского орнамента из одинаковых правильных многоугольников.
- 4) Сформулируйте соотношение Эйлера для многогранников.
- 5) Почему в выпуклом многограннике сумма углов при вершине всегда меньше 360° ?

Упражнения

- 1) Взглянув на рис. 4 и воспользовавшись переводом названия фигуры, рассчитайте количество вершин у додекаэдра и икосаэдра.
- 2) Взглянув на рис. 4 и воспользовавшись переводом названия фигуры, рассчитайте количество ребер у додекаэдра и икосаэдра.

Занятие 3

Основы учения о симметрии. Элементы симметрии. Операции симметрии, возможные в кристаллах

Кристаллография использует свой уникальный метод исследования — метод симметрии. Термин «симметрия» (греч. «соразмерность») ввел, как предполагают, Пифагор. Человечество еще на заре своей культуры имело представление о симметрии и использовало ее в рисунках, в предметах быта, в строительстве. Согласно определению русского кристаллографа Е. С. Федорова, «симметрия — это свойство геометрических тел повторять свои части».

Для того чтобы увидеть симметричное расположение, например, граней или ребер кристалла, следует обратиться сперва к идеализированным моделям кристаллов, где аналогичные грани равны и по площади, и по контурам. Возникновение таких идеально развитых кристаллических многогранников связано с идеальными условиями роста, что возможно в природе крайне редко.

Давайте определим, что такое симметричный объект. Интуитивно мы можем почувствовать, какой объект симметричен, а какой нет. Например, рассмотрим модель резака с тремя одинаковыми лопастями (рис. 6 а). Для того

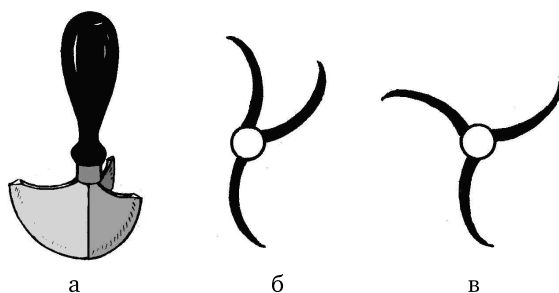


Рис. 6. К определению симметричной фигуры: а) резак, обладающий поворотной осью третьего порядка, б) несимметричная фигура с произвольным расположением лопастей, в) симметричная фигура (лопасти повернуты одна относительно другой на 120°) [15]

чтобы доказать равенство лопастей, следует совместить их друг с другом (вложить). В результате такого вложения можно убедиться в том, что каждой точке одной лопасти соответствует такая же точка другой. Указанное равенство — равенство вложения — называется *конгруэнтным* (греч. «совмещающийся»). Произвольное расположение лопастей резака не сделает его симметричным (рис. 6 б), а закономерное их расположение — сделает (рис. 6 в).

В рассмотренном примере лопасти совмещаются при повороте фигурки на определенный угол (120°). Поворот осуществляется вокруг воображаемой линии, называемой *осью вращения* или *поворотной осью симметрии*. Само же движение (в данном случае вращение), приводящее фигуру или ее части к самосовмещению, называется операцией симметрии.

Введем четкие определения этих понятий.

Симметричная фигура — это объект, который может быть совмещен сам с собой определенными преобразованиями (поворотами, отражениями и т. д.).

Операция симметрии — это преобразование, совмещающее симметричную фигуру с собой (обычно это поворот или отражение).

Элемент симметрии — это вспомогательные геометрические образы (точки, прямые, плоскости), с помощью которых обнаруживается симметрия фигур.

Отметим, что операции и элементы симметрии принято разбивать на 2 рода, в зависимости от характера преобразования. Элементы симметрии первого рода связывают друг с другом конгруэнтно равные части фигур (или сами фигуры). Правые (П) фигуры останутся после преобразования правыми, а левые (Л) — левыми. Примером такой операции симметрии является поворот (на угол в 120° для фигуры на рис. 6 в). Действительно, покрутив (помахав) своей правой рукой, мы **никогда** не сможем добиться, чтобы она превратилась в левую руку. Наименьший угол поворота вокруг такой оси, приводящего фигуру к самосовмещению, называется *элементарным углом поворота* и обозначается буквой α . Величина поворота определяет *порядок оси* n , равный числу самосовмещений при полном повороте на 360° ($n = 360^\circ / \alpha$). Таким образом, на рис. 6 в мы видим действие оси третьего порядка с элементарным углом поворота в 120° .

Элементы симметрии второго рода связывают зеркально равные — *энантиоморфные* (греч. «противоположная форма») — фигуры или их части, например, правые и левые. Самой знакомой для нас операцией симметрии второго рода является отражение в зеркале или отражение поверхностью воды при отсутствии ветра (см. рис. 3 цветной вклейки).

Зеркальная плоскость симметрии задает операцию отражения, при которой правая часть фигуры, отражаясь в плоскости как в двухстороннем зеркале, совмещается с левой ее частью. Объект, обладающий зеркальной плоскостью, разбивается этим элементом симметрии на две зеркально равные — энантиоморфные — части. Для определения наличия зеркальной плоскости в объекте полезно иметь наготове прямоугольное зеркальце. При прикладывании его к объекту отражение должно в точности соответствовать закрываемой части фигуры (рис. 7 б).

Еще одной известной операцией симметрии является отражение в точке, называемой *центр инверсии*. Такое действие знакомо нам по оптической схеме фотоаппарата — объект отражается в фокусе и переворачивается. Из рисунка 8 видно, что такая операция может быть разбита на два действия — отражение в зеркале и последующий поворот на 180° .

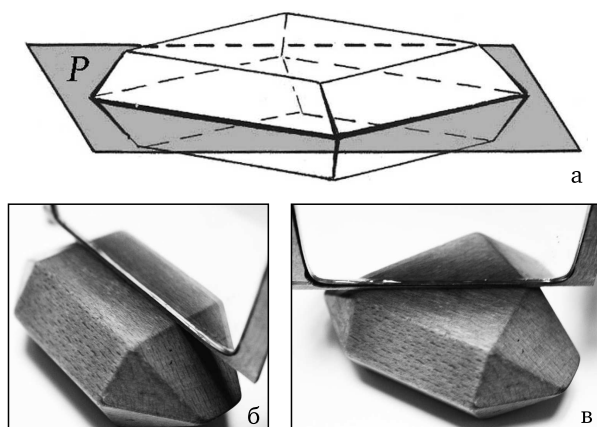


Рис. 7. а) При зеркальном отражении объект делится на две энантиоморфные части; б) зеркало приложено правильно и символизирует наличие в этом месте зеркальной плоскости P ; в) зеркало приложено неверно, зеркальная плоскость по этой линии отсутствует

Если вначале правую (Π) запятую отразить в зеркальной плоскости P , то получим энантиоморфную ей левую (Λ) запятую. После последующего поворота Λ -запятой на 180° плоскость P «свернется» в точку C , по обе стороны от которой в обеих фигурах будут располагаться эквивалентные точки, лежащие

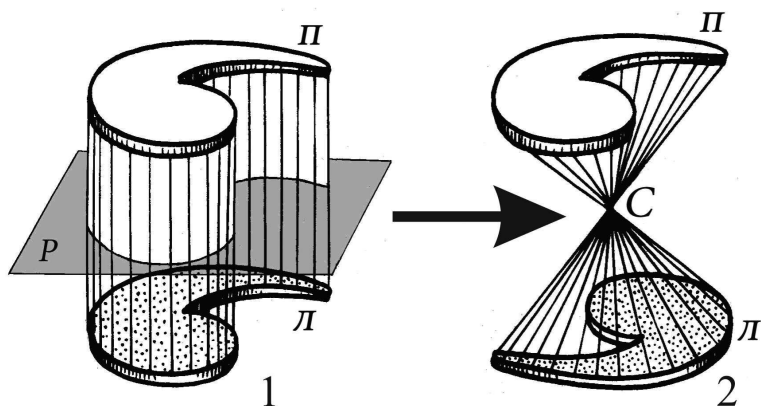


Рис. 8. Демонстрация действия центра инверсии — операции симметрии второго рода

на одной прямой, проходящей через центр симметрии. Расстояния от центра симметрии до обеих точек будет одинаково. Таким образом, исходная правая фигурка на первом этапе последовательного действия отражается в свой левый аналог, который при последующем повороте останется левым. То есть отражение в центре — тоже операция симметрии второго рода!

Рассмотрим плоскую фигуру — квадрат. Его можно разбить на восемь геометрически равных прямоугольных треугольников. Из рисунка 9 видно, что тут присутствуют и операции симметрии первого рода (поворотная ось четвертого порядка) и четыре плоскости отражения. Две из них проходят через вершины квадрата, а две — через середины сторон.

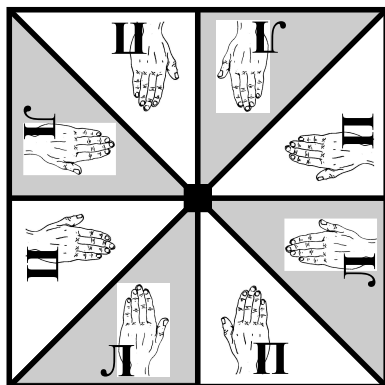


Рис. 9. Разбиение квадрата на восемь равных треугольников, связанных между собой поворотами и отражениями. Правые ладони обозначены буквой «П», левые — буквой «Л»

Теперь зададим себе вопрос: какие операции симметрии можно встретить, описывая кристаллические многогранники? Оказывается, в отличие от других геометрических тел, для кристаллов есть одна особенность, подмеченная еще в древности и сформулированная в виде *основного закона геометрической кристаллографии*: *в кристаллических многогранниках порядок осей ограничен числами $n = 1, 2, 3, 4, 6$, т. е. в кристаллах невозможны оси пятого и выше шестого порядков*. Этот закон был позднее объяснен внутренним периодическим строением кристаллов и связан с тем, что пятиугольниками и n -угольниками с $n > 6$ невозможно заполнить все двумерное пространство без остатка (рис. 10). Действительно, такие многоугольники нельзя упаковать без промежутков либо перекрытий.

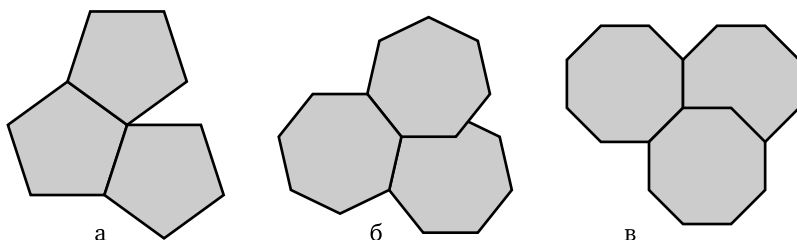


Рис. 10. При упаковке двумерного пространства 5-, 6-, 7-угольниками либо остаются зазоры (а), либо фигуры «захлестывают» друг друга (б–в)

Таким образом, изучая кристаллы, мы можем обнаружить наличие таких элементов симметрии как зеркальная плоскость, центр симметрии (элементы симметрии второго рода), а также поворотные оси первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядка (элементы симметрии первого рода). Заметим, что ось первого порядка задает поворот на 360° (либо на 0° — объект неподвижен и остается самим собой). Этот элемент симметрии сам по себе неинтересен, так как в абсолютно любой, даже самой несимметричной фигуре, существует бесконечное множество осей первого порядка. Эта ось принимается во внимание лишь в том случае, если других элементов симметрии нет.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое симметрия?
- 2) Что такое операция симметрии и элемент симметрии?
- 3) Чем различаются операции симметрии первого и второго рода? Перечислите их.
- 4) Что такое порядок оси и элементарный угол поворота?
- 5) Сформулируйте основной закон геометрической кристаллографии.
- 6) Почему в кристаллах встречаются поворотные оси строго определенных порядков?

Упражнения

1) Посмотрите на фотографию Главного здания МГУ (рис. 1а цветной вклейки). Какие элементы симметрии можно найти? Подумайте, может ли кристалл иметь такой же набор элементов симметрии.

2) Посмотрите (рис. 1б цветной вклейки) на фотографию здания Министерства обороны США (Пентагон). Оцените его симметрию. Может ли кристалл иметь такую симметрию?

3) Опишите кирпич как геометрический симметричный объект (см. рис. 1в цветной вклейки). Какие элементы симметрии вы нашли? Может ли кристалл иметь подобный набор элементов симметрии?

4) Подумайте, ось какого порядка проходит вертикально в Останкинской телебашне (рис. 1г цветной вклейки). Можно ли встретить ось такого порядка в кристаллах?

Занятие 4

Символика Браве

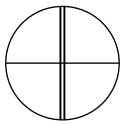
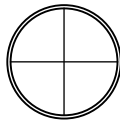
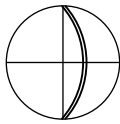
Элементы симметрии имеют свои буквенные и графические обозначения. Первые необходимы для записи всего набора операций симметрии, который присутствует в конкретной геометрической фигуре, а вторые — для точной пространственной привязки того или иного элемента на *проекции*. Построению такой проекции будет посвящено занятие № 8. На этом этапе обучения мы познакомимся с символикой французского кристаллографа Огюста Браве. Ей удобно воспользоваться именно на начальном этапе изучения основ кристаллографии.

В символике Браве (или учебной символике) оси симметрии обозначаются буквами L_n , где подстрочный индекс n соответствует порядку оси. Графически поворотные оси обозначаются прямыми линиями со значками, соответствующими порядку оси: L_6 — , L_4 — , L_3 — , L_2 —  — двуугольник, называемый значком Фюзю. Ось первого порядка L_1 графического значка не имеет, так как в любой фигуре можно в любом месте увидеть ось первого порядка — и графическое изображение будет лишено всякого смысла. Это значит, что формально все тела симметричны и несимметричных фигур в природе нет в принципе. Отметим, что в кристаллографии различают оси *нижшего* ($n = 1$ или 2) и *высшего* ($n = 3, 4, 6$) порядков.

Символьное обозначение зеркальной плоскости — латинская буква P . Графическое изображение плоскости определяется ее положением в пространстве. Если плоскость вертикальная (нормаль к плоскости проходит горизонтально), то плоскость рисуют двойной прямой линией. Если плоскость горизонтальная (нормаль к плоскости вертикальна), то плоскость изображают двойной окружностью. В общем случае наклонного расположения зеркальной плоскости она будет изображаться на чертеже двойной дугой, опирающейся всегда на диаметр окружности.

Центр инверсии обозначается латинской буквой C . Графическим изображением также будет буква C , к которой иногда добавляют точку. Таким образом, вышесказанное можно систематизировать в виде таблицы 2.

Таблица 2. Символьное и графическое изображение элементов симметрии, встречаемых в кристаллах

Операция симметрии	Элемент симметрии, символ	Графическое обозначение
поворот	поворотная ось L_n ($n = 360^\circ/\alpha$), где n — порядок оси, α — элементарный угол поворота	   
отражение	зеркальная плоскость P	   вертикальная горизонтальная наклонная
	центр симметрии (центр инверсии) C	

При описании симметрии кристаллов выявленный комплекс элементов симметрии, называемый *классом* (или *группой*) *симметрии*, записывается в строчку в следующей последовательности:

1) поворотные оси высшего порядка (третьего, четвертого и шестого, в том случае, если они присутствуют),

- 2) поворотные оси второго порядка (если они есть),
- 3) зеркальные плоскости симметрии (если они есть),
- 4) центр инверсии (в том случае, если он есть).

Давайте потренируемся. Возьмем обыкновенный прямоугольный параллелепипед (кирпич, рис. 11) и найдем все его элементы симметрии. Проанализировав кирпич со всех сторон, увидим, что в центре каждой грани кирпича под прямым углом пересекаются две зеркальные плоскости, разрезающие его на две половины. В месте пересечения двух плоскостей перпендикулярно грани выходит ось второго порядка. Таким образом, у кирпича три оси второго порядка и три зеркальные плоскости. Есть ли центр? Для определения наличия центра инверсии используют следующий практический прием: объект (кристалл) следует положить каждой гранью на какую-нибудь ровную поверхность, например, стол. Если для любой грани обнаруживается параллельно расположенная ей грань (такая же по форме, но развернутая на 180°), то кристалл обладает центром инверсии. Если хотя бы для одной грани не найдется такого антипараллельного аналога, то центра не будет. В нашем случае для каждой грани находится аналогичная ей, таким образом, центр есть! Запишем найденные элементы симметрии в строчку: $3L_2 3PC$.

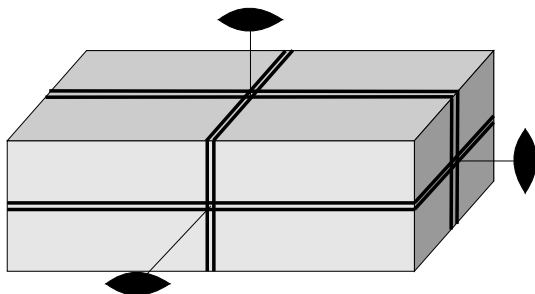


Рис. 11. Определение симметрии прямоугольного параллелепипеда

Это сокращенная запись нашего законченного набора (класса) симметрии в учебной символике Браве. Теперь обратим внимание, что три найденные оси второго порядка и три плоскости неодинаковы: они поворачивают и разрезают наш кирпич по-разному. Это значит, что эти элементы симметрии неэквивалентны. Под *эквивалентными элементами симметрии* мы будем понимать такие элементы, которые связаны между собой другими операциями симметрии кристалла. Внешне это будет проявляться в том, что оси будут входить в кристалл совершенно в одинаковых местах, да и линии разреза плоскостями отражения будут выглядеть одинаково. Таким образом, сокращенная запись не совсем верна — можно подумать, что три найденные оси второго порядка и три плоскости одинаковы, что неверно. Полная запись класса будет выглядеть так:

$$L'_2 L''_2 L'''_2 P' P'' P''' C.$$

Верхние штрихи в символах показывают, что в данном классе симметрии все оси и все плоскости неэквивалентны.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое знак Фюзона?
- 2) Что такое класс симметрии?
- 3) Каков порядок записи элементов симметрии в символике Браве?
- 4) Как определить наличие в фигуре центра инверсии?
- 5) Чем отличаются эквивалентные и неэквивалентные элементы симметрии?
- 6) Чем полная запись класса по Браве отличается от сокращенной записи?

Упражнения

- 1) Запишите в полном и сокращенном виде класс симметрии египетской пирамиды.
- 2) Запишите в полном и сокращенном виде класс симметрии Эйфелевой башни.
- 3) Определите симметрию шестигранной шайбы и запишите в полном виде найденный в ней набор элементов.
- 4) Запишите в полном виде класс симметрии квадрата, изображенного на рисунке 9. Как изменится его симметрия, если считать его трехмерной фигурой (имеющим толщину и, следовательно, изнаночную сторону)?

Занятие 5

Классы симметрии кристаллов. Категория. Сингония

Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, а закономерным образом. Напомним, что полный набор элементов симметрии, строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу, называется *классом симметрии*. И хотя, как мы увидим позже, число классов симметрии бесконечно, в кристаллах, где могут существовать только оси определенных порядков, число классов закономерно сокращается до тридцати двух.

Необходимость фиксировать то или иное направление в кристалле, ту или иную плоскость симметрии (или грань кристалла) заставляет вводить в кристаллах координатную систему. Однако пользоваться одной, наиболее распространенной в геометрии, декартовой системой в кристаллографии неудобно, так как прямоугольная система координат с одинаковыми масштабами по осям не всегда отражает симметрию кристалла. Поэтому в кристаллографии используется такая система координат, в которой координатные оси совмещены с осями симметрии и (или) с нормальными к плоскостям симметрии. При отсутствии или недостаточном количестве таких направлений координатные оси выбираются по ребрам кристалла. Отсюда координатные системы кристаллов различаются своими угловыми характеристиками — углами между осями X, Y, Z : $\alpha = \widehat{YZ}$, $\beta = \widehat{XZ}$, $\gamma = \widehat{XY}$. Отметим, что в кристаллографии используется правая система координат (рис. 12).

Эквивалентность или неэквивалентность координатных осей можно показать в виде единичных векторов — масштабов a, b, c — по соответствующим

координатным осям X , Y , Z . Существуют три возможности соотношений этих масштабов: $a = b = c$, $a = b \neq c$, $a \neq b \neq c$. Эти соотношения позволяют разделить кристаллографические 32 класса симметрии на три группы, называемые категориями. Таким образом, *категория* — это объединение классов симметрии по принципу соотношения масштабных отрезков.

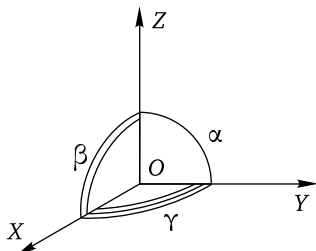


Рис. 12. Применяемая в кристаллографии правая система координат [13]

1. Кристаллы *низшей категории* характеризуются полной неэквивалентностью координатных направлений ($a \neq b \neq c$), которая объясняется отсутствием в них осей высшего порядка (рис. 13 а).

2. Кристаллы *средней категории* характеризуются частичной эквивалентностью координатных осей ($a = b \neq c$), связанной с присутствием в их группах симметрии одной оси высшего порядка (рис. 13 б).

3. Кристаллы *высшей категории* характеризуются полной эквивалентностью координатных осей ($a = b = c$) (рис. 13 в).

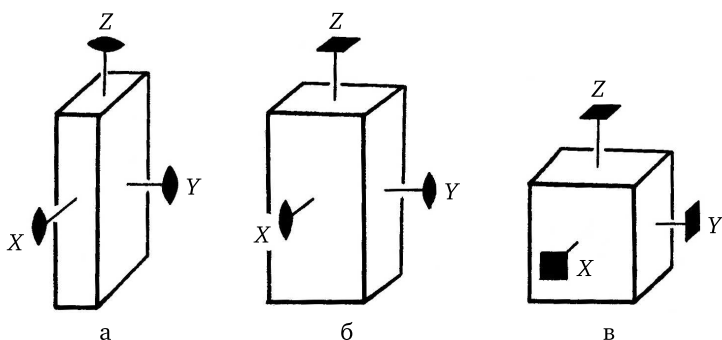


Рис. 13. а) Кристалл низшей категории: все координатные направления различны, нет осей порядка больше чем два; б) кристалл средней категории — есть одна (вертикальная) ось порядка больше двух; в) кристалл высшей категории — несколько осей порядка больше двух [13]

Рассмотрев угловые соотношения в каждой из перечисленных категорий, можно вывести все кристаллографические координатные системы (сингонии). *Сингония* — это объединение классов симметрии внутри категорий по принципу соотношения углов между координатными осями. Таким образом,

классы симметрии, принадлежащие одной сингонии, обслуживаются одной и той же координатной системой. Учение о сингониях было разработано немецким кристаллографом Х. С. Вейсом и австрийским минералогом К. Моосом, автором шкалы твердости минералов.

В низшей категории выделяют три сингонии. Самые низкосимметричные кристаллы характеризуются косоугольной координатной системой общего вида:

$$a \neq b \neq c, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ.$$

Название сингонии с такой косоугольной координатной системой — *триклинная*.

В кристаллах *моноклинной* сингонии косой угол, называемый *углом моноклинности*, всего один:

$$a \neq b \neq c, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma \neq 90^\circ.$$

Отметим, что в настоящее время принято устанавливать кристалл таким образом, чтобы углом моноклинности был именно γ . Такая установка кристалла называется *рациональной*. Менее удобна для дальнейшего описания и изображения кристалла так называемая минералогическая установка (угол моноклинности — β).

Если же система координат кристалла содержит только прямые углы, то сингония будет называться *ромбической*:

$$a \neq b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

В средней категории выделяют две сингонии: *тетрагональную* (греч. «тетра» — четыре) и *гексагональную* (греч. «гекса» — шесть), координатные системы которых обслуживают кристаллы с осями четвертого и шестого (вместе с третьим) порядков соответственно. Координатная система тетрагональной сингонии имеет следующие характеристики:

$$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

Система координат гексагональной сингонии имеет следующие характеристики:

$$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 120^\circ.$$

Обратим внимание на то, что такая координатная система обслуживает кристаллы, имеющие главную ось как третьего, так и шестого порядка. Поэтому внутри гексагональной сингонии выделяют две *подсингонии*: собственно *гексагональную* (если порядок главной оси равен 6) и *тригональную* (если порядок главной оси равен 3). Таким образом, достаточно часто встречающееся в литературе выделение отдельной тригональной сингонии не совсем оправдано.

В высшей категории существует лишь одна сингония — *кубическая*, которая обслуживается правой декартовой системой координат:

$$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

Систематизируем вышесказанное в таблице 3:

Таблица 3. Разделение 32 классов симметрии кристаллов на категории и сингонии

Категория	Степень эквивалентности координатных направлений	Угловые характеристики координатных систем	Сингонии
низшая	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ \neq 120^\circ$	триклинная
		$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma \neq 90^\circ \neq 120^\circ$	моноклинная
		$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	ромбическая
средняя	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	тетрагональная
		$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	гексагональная
высшая	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	кубическая

Контрольные вопросы

- 1) Что положено в основу разделения классов симметрии на категории? Перечислите их.
- 2) Что положено в основу разделения классов симметрии на сингонии? Перечислите их.
- 3) Почему классы с одной осью третьего и шестого порядков объединены в одну сингонию?
- 4) Какой греческой буквой принято обозначать угол моноклинности?

Упражнения

- 1) Приведите примеры бытовых предметов, симметрию которых можно отнести к трем различным категориям.
- 2) Приведите примеры фигур, относящихся к различным сингониям.
- 3) К какой сингонии относятся: а) фигура человека; б) высотное здание МГУ; в) Эйфелева башня?
- 4) У объекта есть ось третьего порядка. К какой категории он может относиться?
- 5) У объекта есть ось второго порядка. К какой категории он может относиться?

Занятие 6

Классы симметрии низшей категории

Напомним, что к низшей категории относятся кристаллы с разными масштабами по трем координатным осям. При этом реализуются три возможных варианта. Первый случай — все углы между осями «неправильные» (не прямые и не 120°). Этот случай соответствует так называемой триклинной сингонии. Если мы видим один «неправильный угол», то сингония будет называться

моноклинной, а если перед нами прямоугольная система координат, то мы имеем дело с ромбической сингонией.

Рассмотрим **триклинную** сингонию. В ней не могут существовать оси выше первого порядка и плоскости. Таким образом, в этой сингонии возможны только 2 случая (два класса симметрии) — «несимметричный кристалл» с осями первого порядка и кристалл с центром отражения. Нарисуем стереографические проекции этих классов (подробно с проецированием мы познакомимся чуть позже, на занятии 8). Для этого на круг, символизирующий вид сверху на сферу, в центр которой помещается исследуемый симметричный объект (рис. 14), наносятся графические изображения элементов симметрии и координатные оси x , y и z . Ось y принято направлять из центра чертежа направо, ось x — вниз в сторону наблюдателя (с соблюдением угла γ между осями), а ось z — в вертикальном или почти вертикальном направлении, что определяется углами α и β .

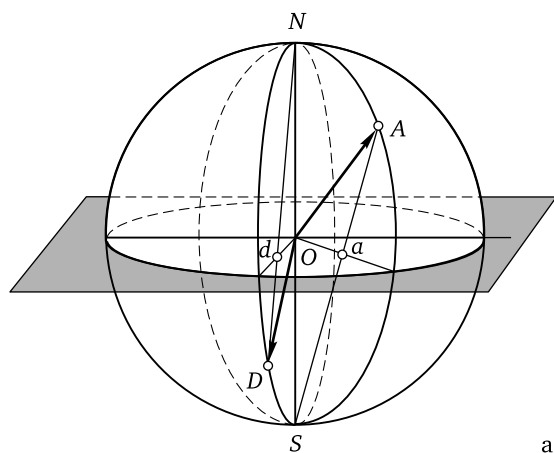
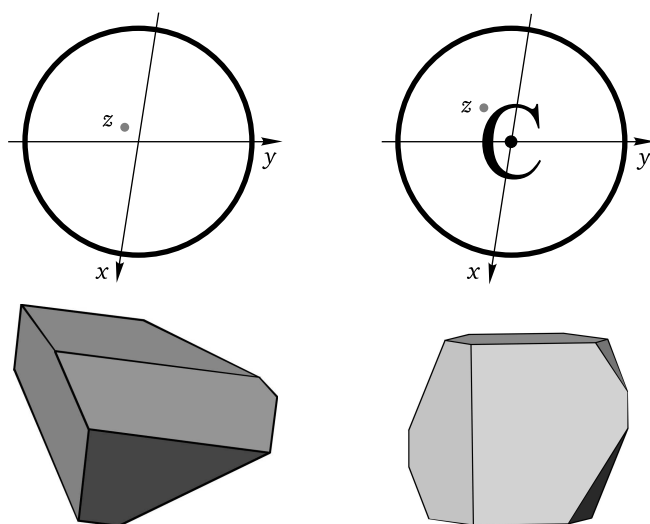


Рис. 14. а) Иллюстрация взаимосвязи положения точек A и D на сфере проекций и их стереографических образов a и d на экваториальной плоскости; б) модель для изучения основ стереографического проецирования

Обратим внимание на то, что в триклинной сингонии все углы произвольные, следовательно, выход оси z будет смещен от начала координат и показан на стереографической проекции точкой (рис. 15).

Напомним, что для определения наличия центра инверсии в кристалле используют следующий практический прием: если поставить кристалл на ровную горизонтальную поверхность любой гранью, то сверху параллельно этой плоскости должна размещаться такая же грань. Если это правило выполняется для всех пар граней, то центр есть. Если хотя бы для одной грани условие не выполняется — центра нет.

Примерами кристаллов триклинной сингонии являются плагиоклазы: альбит и анортит, один из калиевых полевых шпатов — микроклин, известный минерал кианит и многие другие.

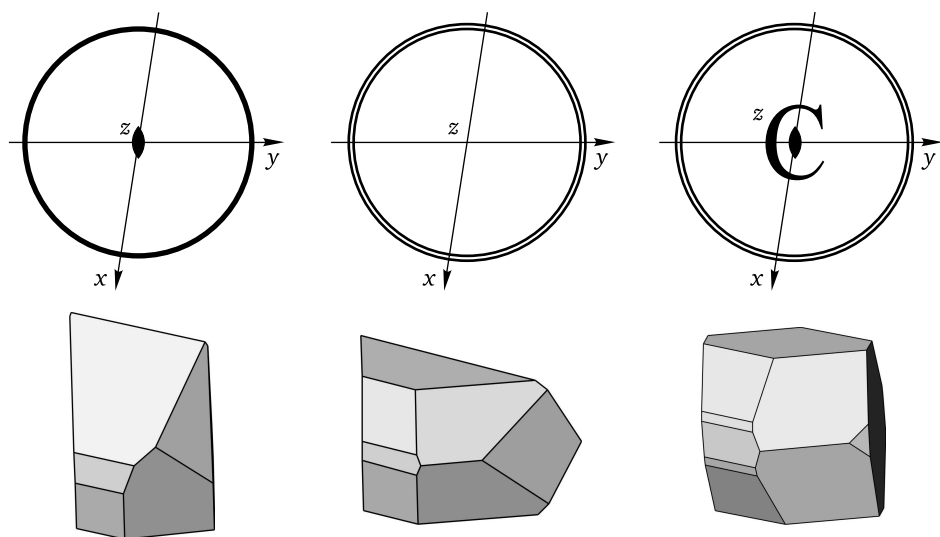


а) проекция и типичный
кристаллик класса L_1

б) проекция и типичный
кристаллик класса C

Рис. 15. Стереографические проекции и кристаллы триклинной сингонии

Рассмотрим **моноклинную** сингонию. Здесь разрешено одному выделенному направлению (обычно его ориентируют вертикально) иметь удваивающий элемент симметрии (ось второго порядка или нормаль к плоскости P).



а) проекция и типичный
кристаллик класса L_2

б) проекция и типичный
кристаллик класса P

в) проекция и типичный
кристаллик класса L_2PC

Рис. 16. Стереографические проекции и кристаллы моноклинной сингонии

Это приводит к трем возможным классам моноклинной сингонии — L_2 , P и L_2PC . Угол моноклинности будет лежать в экваториальной плоскости между осями x и y , а два других угла будут прямыми. Обратим внимание на то, что центр есть только у последнего класса.

В моноклинной сингонии кристаллизуются такие известные минералы, как калиевый полевой шпат ортоклаз, пироксен диопсид, титанит (сфен), слюды — мусковит и биотит.

В **ромбической** сингонии по всем трем взаимно перпендикулярным координатным направлениям располагаются элементы симметрии — оси второго порядка или плоскости (напомним, что плоскость фиксируется положением нормали к ней). Это приводит к трем возможным классам ромбической сингонии — $3L_2$, L_22P и $3L_23PC$. Обратим внимание на то, что центр также присутствует только у последнего класса.

Так как масштабы по всем направлениям различны, то эти элементы симметрии будут неэквивалентными и полные записи этих классов по Браве будут следующие:

$$L'_2L''_2L'''_2, \quad L_2P'P'' \quad \text{и} \quad L'_2L''_2L'''_2P'P''P'''C.$$

Примерами минералов ромбической сингонии являются топаз, все разновидности оливина, кристаллы одной из модификаций серы, разновидность карбоната кальция — арагонит, сульфат барит и многие другие.

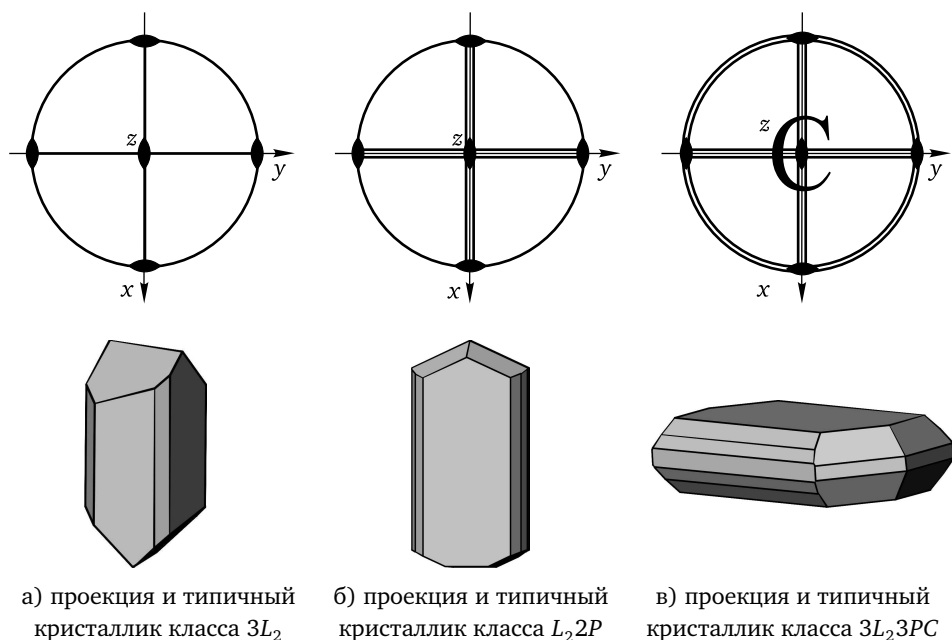


Рис. 17. Стереографические проекции и кристаллы ромбической сингонии

Контрольные вопросы

- 1) Как ориентируются координатные оси при построении проекции класса?
- 2) Сколько всего классов симметрии низшей категории, имеющих центр инверсии? К каким сингониям относятся эти классы?
- 3) Почему в ромбической сингонии сокращенная и полная запись элементов симметрии классов различаются?

Упражнения

- 1) Приведите примеры минералов различных сингоний низшей категории.
- 2) Начертите проекции всех классов моноклинной сингонии.
- 3) Начертите проекции всех классов ромбической сингонии.
- 4) К какому классу симметрии относятся: а) фигура человека; б) высотное здание МГУ? Как в этих фигурах выбрать направления координатных осей?

Занятие 7

Понятие простой формы. Простые формы кристаллов низшей категории

Учение о внешней форме (морфологии) кристаллов — один из разделов кристаллографии. Огранка кристалла является важной характеристикой кристаллического вещества, отличающей кристаллы одного минерала от другого. В природе кристаллы одного и того же вещества могут иметь самую разную форму, при этом одни грани встречаются часто, другие — реже. Присутствие одних и тех же граней в разных кристаллах одного и того же вещества послужило основанием для установления первого основного закона кристаллографии (см. занятие 1). Огранка каждого кристалла строго подчиняется его симметрии, так, внешний вид многогранников низшей категории будет описываться одним из 8 классов, изученных на прошлом занятии. Однако кристалл может ограняться как одинаковыми гранями, так и различными. В этой связи вводится понятие простой формы. *Простая форма* — это совокупность (семейство) граней, связанных между собой симметрическими операциями класса симметрии. Отметим, что грани, принадлежащие одной простой форме, одинаковы по своим физическим свойствам. Для идеальных кристаллов они равны также и геометрически, т. е. обладают одинаковой формой и площадью поверхности.

Зададим себе вопрос: сколько простых форм может быть в одном кристалле? Формально — сколько угодно, на практике — обычно не больше десятка, а чаще всего меньше (рис. 18). Естественно, минимальное число простых форм равно одному, да и то лишь в том случае, если такая форма способна ограничить собой трехмерный объем, образовав своими гранями выпуклый многогранник; в этом случае будем говорить, что форма *замыкает пространство*. Итак, в огранке кристалла могут участвовать грани либо одной простой

формы, либо нескольких, при этом образуются *комбинационные многогранники*.

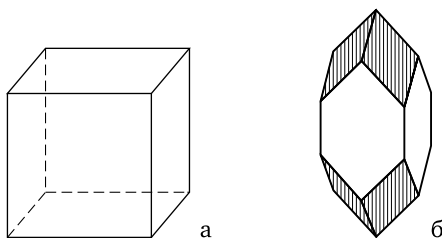


Рис. 18. а) Шестигранный кристалл огранен одной простой формой (куб, или гексаэдр); б) двенадцатигранный кристалл огранен двумя простыми формами (четыре грани принадлежат одной простой форме, а восемь других — к другой)

Легко видеть, что число граней одной простой формы определяется положением исходной грани относительно элементов симметрии класса. Если грань перпендикулярна оси второго порядка, то она этой осью не удваивается, в противном случае грань «ломается» на две.

Простые формы имеют определенные характеристики, используемые при описании. С некоторыми из них мы познакомимся на этом занятии. Форма может быть *закрытой* (рис. 18 а и форма, грани которой показаны темным цветом на рисунке 18 б). Это значит, что в отсутствие других форм она образует замкнутый объем. Если для первого случая это очевидно, то для второго необходимо мысленно удалить светлые грани и понять, что темные грани действительно замыкают пространство только собой. Для этого требуется определенное пространственное воображение. Если форма не замыкает собой пространство, то она будет *открытой*.

Важная характеристика простой формы — *число граней*, из которых она состоит. В кристаллах это число может варьировать от 1 до 48. Каждая простая форма имеет свое название. В основу названий положены в основном греческие слова. В таблице 4 приведены некоторые греческие термины, помогающие давать названия простым формам.

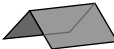
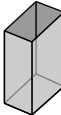
Давайте разберем все классы низшей категории и посмотрим, какие формы в них встречаются. В классе L_1 нет размножающих элементов симметрии, следовательно, любая простая форма будет представлена одной гранью. Такая одногранная форма называется *моноэдром* (попробуйте перевести это название, используя таблицу 4). В другом классе триклинной сингонии C любая грань будет удваиваться центром инверсии, следовательно, каждая простая форма будет состоять из двух граней, параллельных (правильнее даже сказать — антипараллельных) друг другу. Такая простая форма носит название *пинакоид* (вспомним, из чего был изготовлен зарубежный Буратино и как он назывался). Характеристика всех простых форм низшей категории приведена в таблице 5.

В моноклинной сингонии ситуация осложняется тем, что грань может располагаться по-разному относительно удваивающих элементов симметрии

Таблица 4. Некоторые греческие слова с переводами

Название (греч.)	Перевод
гон	угол
моно	один
ди	два
три	три
тетра	четыре
пента	пять
гекса	шесть
окта	восемь
дека	десять
додека	двенадцать
эдра	грань
трапеца	четырёхугольник с двумя неравными и двумя равными сторонами
пинакоид	имеющий вид доски
скалена	косоугольный треугольник

Таблица 5. Простые формы низшей категории

Название формы	Изображение	Число граней	Закрытая или открытая	В каких классах встречается
моноэдр		1	открытая	L_1, L_2, P, L_22P
пинакоид		2	открытая	$C, P, L_2, L_2PC, 3L_2, L_22P, 3L_23PC$
диэдр		2	открытая	P, L_2, L_22P
ромбическая призма		4	открытая	$L_2PC, 3L_2, L_22P, 3L_23PC$
ромбическая пирамида		4	открытая	L_22P
ромбический тетраэдр		4	закрытая	$3L_2$
ромбическая бипирамида		8	закрытая	$3L_23PC$

(рис. 19): параллельно элементу симметрии, перпендикулярно либо произвольно (наклонно).

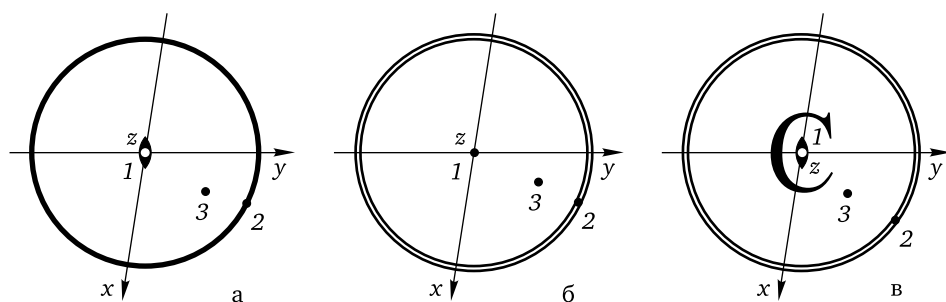


Рис. 19. Принципиально различные положения простых форм в классах моноклинной сингонии: а) три позиции в классе L_2 ; б) в классе P ; в) в классе L_2PC . Грань по отношению к элементу симметрии: 1 — перпендикулярна; 2 — параллельна; 3 — наклонена

В классе L_2 в позиции 1 будет находиться уже известный нам моноэдр, а в классах P и L_2PC он превратится в пинакоид. Пинакоид также будет находиться в позиции 2 в классах L_2 и L_2PC , тогда как в классе P , наоборот, в этой позиции будет находиться моноэдр. В наклонном положении 3 в классах L_2 и P появляются новые открытые формы, которые называются *диэдры*. И, наконец, в классе L_2PC в позиции 3 поселилась еще одна новая открытая простая форма — *ромбическая призма*. Такое название связано с тем, что сечение этой призмы представляет собой ромб.

Рассмотрим три класса ромбической сингонии (рис. 20). В классе $3L_2$ две позиции оккупируют уже известные нам формы — пинакоид (1) и ромбическая призма (2), а третья форма (3) — новая. Перед нами новая четырехгранная закрытая форма, которая называется *ромбическим тетраэдром* (отметим,

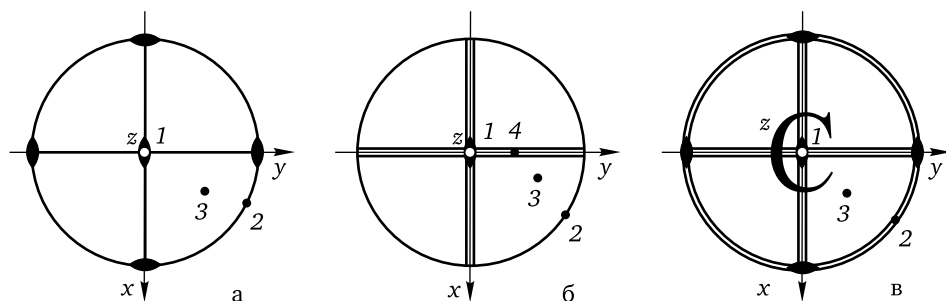


Рис. 20. Принципиально различные положения простых форм в классах ромбической сингонии: а) три позиции в классе $3L_2$; б) в классе L_22P ; в) в классе $3L_23PC$. Грань по отношению к элементу симметрии: 1 — перпендикулярна; 2 — параллельна; 3 — наклонена; 4 — наклонена к одному элементу, но перпендикулярна другому

что 4 грани — это минимальное число, способное закрыть пространство). Грань такого тетраэдра будет представлять собой неправильный треугольник.

В классе L_22P первые две позиции также уже знакомы — это моноэдр (1) и ромбическая призма (2). В наклонном положении относительно элементов симметрии будет располагаться новая открытая форма — *ромбическая пирамида*. Название связано также с тем обстоятельством, что если ее рассечь горизонтальной плоскостью, то мы увидим ромб. В этом классе появится еще одна позиция — наклонная по отношению к оси второго порядка, но не в общей позиции, а перпендикулярная плоскости P (4). Эту позицию занимает диэдр, превращающийся на экваторе в пинакоид.

И, наконец, рассмотрим класс $3L_23PC$. Первые две позиции аналогичны классу $3L_2$ — их заселяют пинакоид и ромбическая призма. В наклонном положении появляется новая восьмигранная закрытая простая форма — *ромбическая бипирамида*. В этом классе (как и в классе $3L_2$) позиция 4 совпадает с позицией 2.

Таким образом, на этом занятии мы познакомились со всеми семью простыми формами, которые встречаются в кристаллах низшей сингонии. Обратим внимание, что только две из них являются закрытыми (ромбический тетраэдр и ромбическая бипирамида). Следовательно, они могут существовать в единственном числе. Остальные пять форм вынуждены сосуществовать с другими, образуя комбинационные многогранники.

Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение простой формы.
- 2) Чем открытая простая форма отличается от закрытой?
- 3) Что такое комбинационный многогранник?
- 4) Перечислите открытые простые формы в низшей категории.
- 5) Какая форма встречается в наибольшем числе классов низшей категории?
- 6) Перечислите формы, которые встречаются только в одном классе низшей категории.

Упражнение

Для четырех рисунков (рис. 21 а–г) назовите простые формы, пронумерованные цифрами от 1 до 8. Дайте характеристику каждой из них (открытая или закрытая форма, число граней).

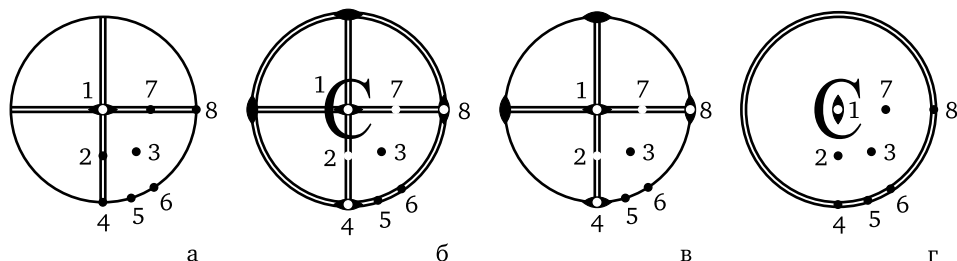


Рис. 21. Рисунки к упражнению занятия 7

Занятие 8

Практическое занятие. Основы проецирования кристалла. Трафарет для представления. Работа с кристаллом низшей категории

Если посмотреть на рис. 22, то увидим, что определения только класса симметрии совершенно недостаточно для полной характеристики кристалла. Различные, не похожие друг на друга объекты могут принадлежать к одному классу симметрии.

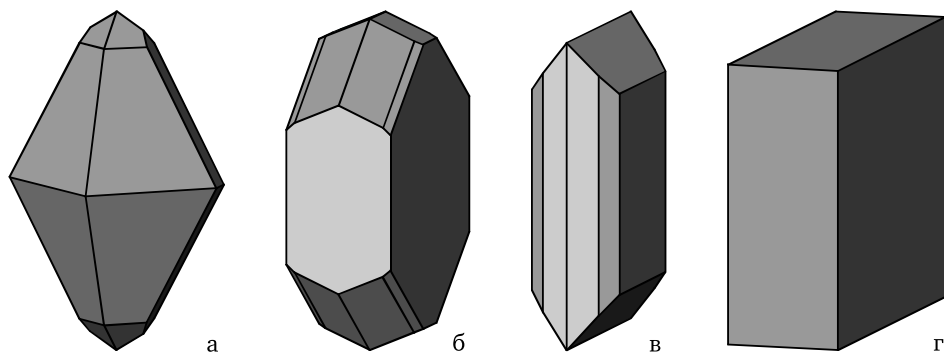


Рис. 22. Кристаллы ромбической серы (а), хризоберилла (б), форстерита (в) и прямоугольный параллелепипед (г) принадлежат к одному классу симметрии $3L_23PC$

Поэтому для полного описания кристалла необходимо не только найти и зафиксировать в пространстве элементы его симметрии, но и зафиксировать положения граней различных простых форм относительно этих элементов симметрии и дать характеристику простым формам. Для этого чертят разнообразные проекции. Частично мы уже познакомились с ними на занятии 6. Разберем сейчас проецирование более подробно. Кристалл описывают в два этапа: стереографическое проецирование элементов симметрии и гномостереографическое проецирование граней.

На первом этапе строят *стереографическую проекцию* элементов симметрии объекта. Напомним, что для этого объект помещается в начало координат (координатная система подчиняется симметрии объекта) и вокруг объекта мысленно проводится сфера (рис. 14). На эту сферу наносятся графические изображения элементов симметрии и координатные оси x , y и z . Такая проекция называется *сферической*. Учитывая, что наша промышленность еще не научилась делать трехмерные тетради, приходится каким-то образом переносить сферу на плоскость. Этот процесс называется переходом от сферической проекции к ее стереографическому образу. Для этого рисуется круг, который символизирует проекцию на экваториальную плоскость нашей сферы. Отметим, что наблюдатель находится в южном полюсе S (рис. 14 а). Напоминаем, что в кристаллографии ось y принято направлять из центра чертежа направо, ось x — вниз в сторону наблюдателя (с соблюдением угла γ между осями),

а ось z — в вертикальном или почти вертикальном направлении, что определяется углами α и β . Тогда точка A на поверхности сферы, изображенная на рис. 14 а (например, выход оси второго порядка) будет проецироваться на круге в точку a . После того как нанесены все объекты верхней полусферы, наблюдатель перемещается в северный полюс N и может аналогично описать нижнюю полусферу. Так, точке D будет соответствовать ее стереографический образ d .

Для практического занятия описания кристаллика силиката оливина (обобщенное название очень важного и распространенного в природе силиката переменного состава с формулой $(\text{Mg,Fe})_2[\text{SiO}_4]$), изображенного в таблице 6 ниже и в таблице А цветной вклейки, нам понадобится трафарет (примерный вид см. на рис. 23). Получить его можно по гиперссылке: <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/trafaret8mm.jpg>. Трафарет необходимо распечатать, наклеить на картон и аккуратно вырезать по контуру окружности. В центре желательно иголкой проткнуть отверстие для отметок остро оточенным карандашом. Не мешают отверстия и в четырех (красных) треугольниках — они пригодятся на следующей ступени обучения.

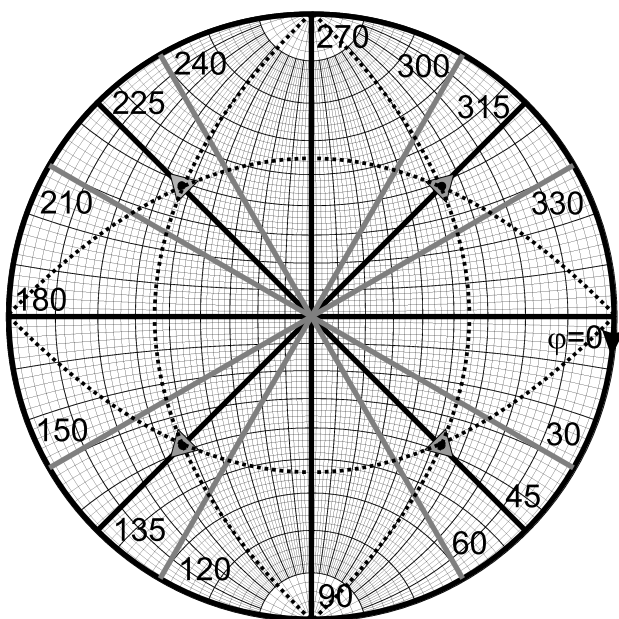
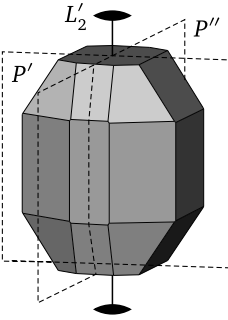
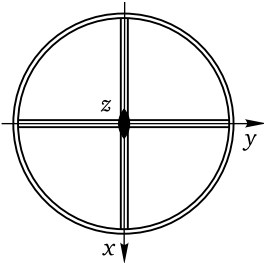
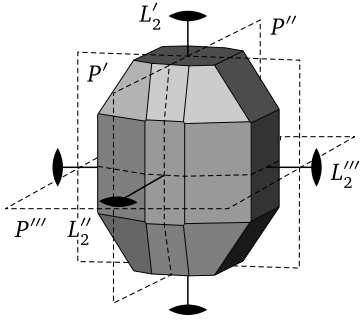
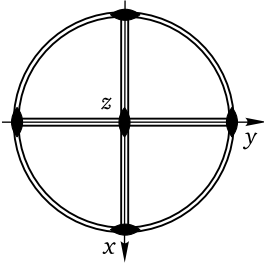
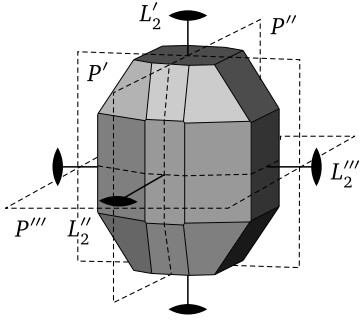
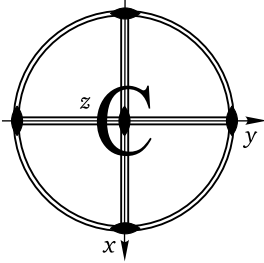


Рис. 23. Трафарет для рисования кристаллов. На практике удобно распечатать этот трафарет диаметром в 8 см, что позволит нанести на круге все элементы симметрии и положения граней даже для достаточно сложных кристаллов. Назначение частой серой сетки на трафарете и других дополнительных линий будет объяснено позднее

После того как трафарет изготовлен, можно приступать к построению стереографической проекции элементов симметрии данного класса. Последовательные шаги приведены в таблице 6.

Таблица 6. Последовательные шаги по описанию кристалла низшей категории (оливина). Часть 1

Кристалл	На проекции изображено	Действия
		1) Используя трафарет, рисуем окружность, наносим на ней выходы координатных осей x, y, z. 2) Наносим графические значки оси L'_2 и плоскостей P_x, P_y.
		3) Наносим графические значки осей L''_2 и L'''_2 и изображение плоскости P_z в виде двойной окружности.
		4) Находим центр и подписываем его на проекции.

Правильнее всего установить кристалл вертикально по тому направлению, где он особенно *анизотропен* (в данном случае — по удлинению). Изучим это направление, посмотрев на кристалл сверху. Без труда находим поворотную ось второго порядка L'_2 и две вертикальные плоскости P' и P'' , разрезающие кристалл на две зеркально равные части. Наносим эти элементы симметрии на проекцию. Ось L'_2 проецируется в начало координат, а плоскости в данном случае будут изображены двойной линией. Обратим внимание, что мы смотрим на проекцию как бы сверху. В этом случае ось z совпадает с осью второго порядка, ось y смотрит направо, а x — вниз (в кристаллогра-

фии принята такая система координат). Плоскость P' тогда будет P_x , так как нормаль к этой плоскости ориентирована по направлению x , а P'' — P_y .

Обязательно изучим экваториальную плоскость. На экваторе всегда много интересного! В нашем случае можно найти еще две оси второго порядка — L'_2 и L''_2 , выходы которых совпадают с направлением x и y , а также еще одну плоскость, которая проходит через экватор. Такая плоскость на проекции будет показана двойной окружностью, а нормаль к ней проходит вертикально, следовательно, это P_z .

Важно! При нанесении L'_2 на круг был нанесен один значок Фюзю (в начале координат), который соответствовал верхнему выходу оси второго порядка. Нанесение нижнего символа не имеет смысла, так как направление уже задано. Однако в случае осей L'_2 и L''_2 оба выхода этих осей находятся в плоскости экватора и видны наблюдателю из южного полюса. Поэтому, чтобы не загромождать чертеж, на стереографической проекции наносят лишь те элементы симметрии, которые располагаются в верхней полусфере и экваториальной плоскости. Этого достаточно. Таким образом, значков Фюзю на чертеже будет пять — два символизируют L'_2 , два — L''_2 и один — L'_2 .

Проверяем наличие центра вышеописанным способом. Нетрудно убедиться, что в данном случае он присутствует. Не забываем подписать его значок на проекции. Итак, первый этап завершен — стереографическая проекция элементов симметрии класса построена. Это класс $3L_23PC$ ромбической сингонии низшей категории (полная запись класса — $L_{2x}L_{2y}L_{2z}P_xP_yP_zC$).

Переходим ко второму этапу — построению на чертеже *гномостереографических* проекций граней всех простых форм. Что это такое? Слово «гномос» означает нормаль (или перпендикуляр). Внимательный исследователь обнаружит в изучаемом кристалле 26 граней. Если строить стереографическую проекцию всех граней, то мы будем вынуждены нарисовать двадцать шесть кривых, символизирующих плоскости граней. Наш чертеж станет абсолютно нечитаемым. Поэтому грани изображаются не стереографическими образами плоскостей (кривыми), а нормальными к ним. А так как нормаль к плоскости — это направление, то грань будет фиксироваться небольшим значком (кружочком), который показывает выход на сферу нормали к этой грани.

Тоже важно! Кристалл совершенно необязательно одинаков и сверху и снизу. Поэтому если при описании элементов симметрии достаточно было показать лишь те элементы, которые видны из южного полюса, то при нанесении нормалей к граням необходимо иметь двух наблюдателей: один смотрит на экваториальную плоскость из южного полюса, а второй — из северного. Гномостереографические проекции тех граней, которые видит первый наблюдатель, рисуются кружками, а тех, которые видит второй, — крестиками. Возникает вопрос: экваториальную плоскость видят оба наблюдателя, какой значок для вертикальных граней (нормали к ним попадают на горизонтальную плоскость) использовать? В этом случае договорились использовать кружки. Таким образом, все грани верхней полусферы и экваториальной плоскости рисуются кружками, а нижней полусферы — крестиками.

Следующие шаги построения показаны в таблице А цветной вклейки.

Шаг 1. Наносим на проекцию две грани простой формы 1. Поскольку обе грани вертикальные, то они будут обозначаться кружками на окружности. Не забываем поставить цифру 1 у каждого кружка. Полезно использовать цветные карандаши, нанося и подписывая каждую простую форму своим цветом — это облегчит чтение проекции. Характеристику простой формы даем в таблице 7.

Таблица 7. Характеристика простых форм кристалла низшей категории (оливина)

№ формы на проекции	Число граней	Закрытая или открытая	Название формы
1	2	открытая	пинакоид
2	2	открытая	пинакоид
3	2	открытая	пинакоид
4	4	открытая	ромбическая призма
5	4	открытая	ромбическая призма
6	4	открытая	ромбическая призма
7	8	закрытая	ромбическая бипирамида

Шаг 2. Наносим на проекцию две грани простой формы 2. Они тоже вертикальные и обозначаются кружками на окружности. Не забываем поставить цифру 2 у каждого кружка. Кружки лучше рисовать цветом, отличным от кружков простой формы 1. Отметим, что перед нами тоже пинакоид, но его грани никак не связаны с гранями пинакоида 1, эти грани различаются по своим физическим свойствам.

Шаг 3. Наносим на проекцию две грани простой формы 3 (пинакоид № 3). Они горизонтальные, следовательно, одна грань видна из северного полюса, а другая — из южного. Поэтому необходимо нанести и кружок, и крестик и не забыть подписать их «3,3».

Шаг 4. Граней простой формы 4 вдвое больше, чем граней формы 2, так как они получаются «разламыванием пополам» формы 2. Перед нами ромбическая призма с сечением в виде ромба. Наносим все 4 кружочка на экваториальную плоскость, причем аккуратно, не нарушая симметрию чертежа, — кружки равноудалены от осей и плоскостей! В принципе, можно нанести первый кружок и убрать модель, а для нанесения остальных трех граней воспользоваться только проекцией, размножая ее элементами симметрии в соответствии с дополнительными стрелками на чертеже.

Шаг 5. Граней простой формы 5 вдвое больше, чем граней формы 3, так как они тоже получаются «разламыванием пополам» исходного пинакоида с превращением его в ромбическую призму. Половина граней находится в северном полушарии, а половина — в южном. Рисуем связанные симметрическими преобразованиями группу из двух кружков и двух крестиков под ними, не забываем дважды подписать их «5,5». Возникает вопрос: как точнее нанести исходный кружок 5, который будем дальше размножать элементами симмет-

рии проекции, убрав кристалл? Для ответа на этот вопрос прижмем к грани торец карандаша и посмотрим, куда смотрит грифель. В нашем случае наклон карандаша чуть ближе к экватору, чем к северному полюсу, следовательно, кружок рисуется несколько ближе к краю круга, чем к началу координат. Более точные способы нанесения положения грани на проекции мы изучим на следующих ступенях обучения.

Шаг 6. Аналогично шагу 5 наносим грани ромбической призмы 6. Четыре грани этой простой формы располагаются на чертеже на плоскости P_y и будут обозначаться двумя парами кружок-крестик, подписанными «6,6». Наклон грани контролируем карандашом. Видно, что проекции граней располагаются ближе к экватору, чем к полюсу.

Шаг 7. Положение нормалей граней последней простой формы не совпадает с выходами осей, грани не лежат на плоскостях симметрии. Это приводит к тому, что грань этой простой формы будет размножаться всеми элементами симметрии класса и число граней будет максимально возможным. Приблизительно определив с помощью карандаша положение одной из граней этой формы в верхней полусфере, наносим по чертежу все остальные семь граней, размножая их элементами симметрии класса. Перед нами ромбическая бипирамида — восьмигранная форма, представленная на чертеже четырьмя парами кружков и крестиков.

Подведем итог практическому занятию. Что мы сделали? Определена симметрия кристаллического многогранника — кристалла оливина — как $3L_23PC$, построена стереографическая проекция класса. Построена гномостереографическая проекция граней. Изученный кристалл представляет собой комбинационный многогранник из семи простых форм. Он ограничен тремя пинакоидами, тремя ромбическими призмами и одной ромбической бипирамидой, общее число граней равно двадцати шести. Характеристика простых форм приведена в таблице 7.

Ступень № 2

Занятие 9 (2–1)

Сложные элементы симметрии

На первой стадии обучения мы познакомились с поворотными осями разных порядков (в том числе кристаллографических), зеркальными плоскостями и центром инверсии. Все эти элементы принято называть *простыми элементами симметрии*, так как каждый из них задает лишь одну симметрическую операцию: поворот, отражение или инверсию в точке. Оказывается, что для описания некоторых кристаллов этих элементов оказывается недостаточно, и для выявления их симметрии потребуются *сложные элементы симметрии*, с которыми мы познакомимся на этом занятии.

Допустим, что в природе существует сложный элемент симметрии, представляющий собой двойную операцию — поворот и последующее отражение в плоскости или поворот и инверсию в точке. Отметим, что промежуточного результата нет, эти две операции симметрии отдельно друг от друга в данном случае не существуют. То есть реально будут существовать только исходная и конечная фигуры, а промежуточная фигура будет воображаемой (мнимой). Нетрудно понять, что такая гипотетическая (пока) операция симметрии будет операцией второго рода (первичный поворот оставит правую фигуру правой, а последующее отражение превратит ее в левую).

Если поворот вокруг некоторой оси будет сопровождаться отражением в зеркальной плоскости, перпендикулярной этой оси, то такую сложную ось будем называть *зеркально-поворотной* осью симметрии. Обозначаются зеркально-поворотные оси в символике Браве символом Φ_n , где подстрочный индекс n соответствует порядку поворотной составляющей этой оси.

Если за поворотом следует инверсия в точке, находящейся на этой оси, то такая сложная ось будет называться *инверсионной*. У нее также есть свой буквенный символ по Браве: I_n , где n — порядок поворотной составляющей.

Давайте теперь зададим сами себе вопрос: а зачем это надо? Нельзя ли эти сложные (на первый взгляд надуманные) преобразования заменить набором простых, уже знакомых нам, элементов симметрии? Действительно ли для описания симметрии некоторых кристаллов простых элементов симметрии недостаточно? Для этого проанализируем все кристаллографические порядки осей и проследим взаимосвязь между зеркально-поворотными, инверсионными и простыми элементами симметрии.

Поскольку поворотная составляющая сложной оси Φ_1 равна нулю, то вторая операция симметрии — отражение в плоскости — оказывается реальной. Таким образом, действие зеркально-поворотной оси первого порядка экви-

валентно отражению в зеркальной плоскости симметрии. Из рисунка 24 а видно, что под правым (П) треугольником, обращенным к нам лицевой (белой) стороной, будет находиться левый (Л) треугольник, обращенный к нам изнаночной (черной) стороной. В результате оба треугольника оказываются связанными горизонтальной зеркальной плоскостью симметрии (она показана двойной линией окружности), что позволяет написать равенство $\Phi_1 = P_{\perp}$.

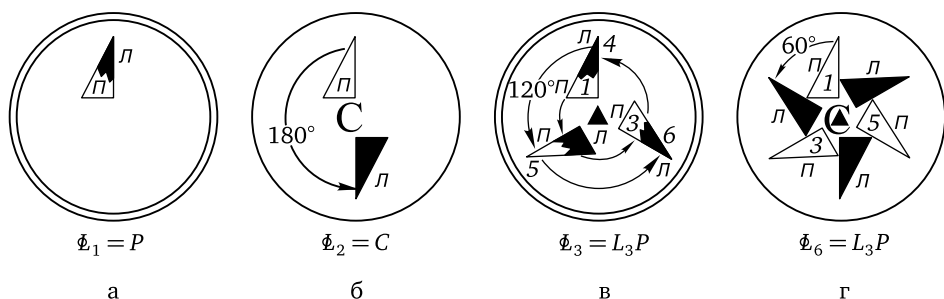


Рис. 24. Иллюстрация замены некоторых сложных осей симметрии простыми элементами симметрии [15]

Поворот на 180° вокруг мнимой оси второго порядка и последующее отражение в перпендикулярной ей плоскости, заданные зеркально-поворотной осью Φ_2 , как видно из рис. 24 б, эквивалентны отражению в центре. Следовательно, и эта сложная ось не является оригинальной; ее действие можно заменить действием простого элемента симметрии — центром инверсии: $\Phi_2 = C$.

Размножение исходной фигуры зеркально-поворотной осью третьего порядка Φ_3 (рис. 24 в) приведет к появлению трех правых белых треугольников, повернутых к нам лицом, и расположенных под ними трех левых черных треугольников, обращенных к нам изнанкой. Проанализировав рисунок, можно убедиться в том, что такая ось может быть заменена действием простых элементов симметрии: реальной поворотной осью третьего порядка и перпендикулярно расположенной к ней зеркальной плоскостью симметрии, т. е. $\Phi_3 = L_3P_{\perp}$.

Действие зеркально-поворотной оси шестого порядка Φ_6 приведет к другому рисунку (рис. 24 г), анализ которого позволяет увидеть, что результат действия и этой сложной оси симметрии аналогичен действию простых элементов симметрии: реальной оси третьего порядка и центра инверсии C , расположенного на этой оси: $\Phi_6 = L_3C$.

А вот зеркально-поворотную ось четвертого порядка Φ_4 невозможно заменить простыми реальными элементами симметрии! Именно поэтому эта ось имеет свое графическое обозначение — темный знак Фюзо в светлом квадрате $\blacksquare$. Более того, она присутствует в реальных кристаллах, что «узаконивает» все учение о зеркально-поворотных осях. На рисунке 25 (а–в) изображено действие этой оси в сравнении с похожими, но отличающимися от нее простыми операциями симметрии.

Перейдем к рассмотрению инверсионных осей симметрии. Нетрудно убедиться в том, что и они могут быть заменены действием простых элементов

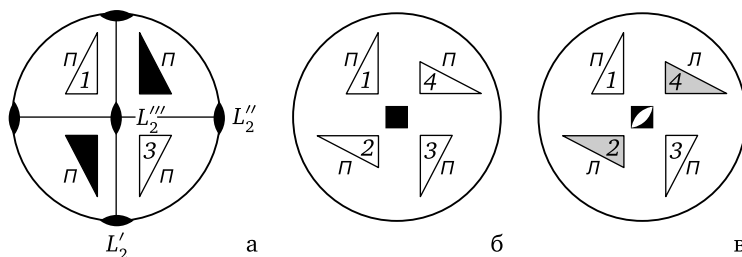


Рис. 25. Иллюстрация действий трех взаимно перпендикулярных осей второго порядка $L_2' L_2'' L_2'''$ (а), поворотной оси четвертого порядка L_4 (б), зеркально-поворотной оси четвертого порядка Φ_4 (в). Лицевые стороны треугольников белые, изнаночные — серые [15]

симметрии, за исключением оси L_4 , результат действия которой оказывается аналогичным действию зеркально-поворотной оси этого же порядка Φ_4 , т. е. $L_4 = \Phi_4$. Отличие в этом случае заключается лишь в очередности получения размножаемых фигур. В качестве одного из упражнений к занятию предлагается начертить чертежи, аналогичные рис. 24, и продемонстрировать следующие равенства: $L_1 = \Phi_2 = C$; $L_2 = \Phi_1 = P_{\perp}$; $L_3 = \Phi_6 = L_3 C$, $L_6 = \Phi_3 = L_3 P_{\perp}$.

К вышесказанному сделаем три важных дополнения.

1) Зеркально-поворотная (инверсионная) ось четвертого порядка реально существует и встречается в кристаллах. Кстати, сейчас принято использовать именно инверсионные оси, а не зеркально-поворотные.

2) Раньше для обозначения инверсионной оси шестого порядка (либо зеркально-поворотной третьего) использовали графический знак . Однако поскольку эти оси можно заменить реальными элементами симметрии — поворотной осью третьего порядка и перпендикулярной к ней зеркальной плоскостью, имеющими на графиках свои условные обозначения, этот знак нет смысла использовать, так как он фактически дублирует их обозначения.

3) Для каждой зеркальной оси имеется свой инверсионный аналог. Из рисунка 26 видно, что П-фигура (1) после операций поворота по часовой стрелке на угол α вокруг оси, выходящей в точке O , и последующего отражения

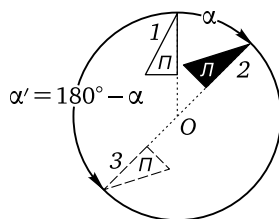


Рис. 26. Зависимость между поворотами вокруг зеркальной (угол поворота α) и инверсионной (угол поворота $\alpha' = 180^\circ - \alpha$) осями симметрии

в перпендикулярной этой оси зеркальной плоскости перейдет в Л-фигуру (2). К такому же результату можно прийти, сначала повернув исходную фигуру 1 в противоположном направлении на дополнительный угол $\alpha' = 180^\circ - \alpha$

(получим фигуру 3), а затем «отразив» ее в точке инверсии O . Можно сформулировать правило: *действие зеркально-поворотной оси с углом поворота α в одну сторону может быть заменено действием инверсионной оси с углом поворота $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ в противоположную сторону.*

Систематизируем всю информацию занятия в виде таблицы 8.

Таблица 8. Сводная информация по сложным осям симметрии

Φ_n	α	L_n	$\alpha' = 180^\circ - \alpha$	Набор простых элементов
Φ_1	$0^\circ (360^\circ)$	L_2	180°	P
Φ_2	180°	L_1	$0^\circ (360^\circ)$	C
Φ_3	120°	L_6	60°	L_3P
Φ_6	60°	L_3	120°	L_3C
Φ_4	90°	L_4	90°	ось уникальна

Из этой таблицы можно сделать один замечательный вывод. Все известные нам элементы симметрии являются ОСЯМИ (обычными и не совсем). Центр инверсии является инверсионной осью первого порядка, а плоскость — инверсионной осью второго порядка. Таким образом, мы живем в мире простых и инверсионных осей симметрии, все операции симметрии являются поворотами. Представляете, по утрам мы смотримся в инверсионную ось второго порядка! На самом деле это достаточно важный вывод, который нам потребуется уже на следующем занятии.

Контрольные вопросы

- 1) Как действует зеркально-поворотная ось симметрии?
- 2) Как действует инверсионная ось симметрии?
- 3) Какими простыми элементами симметрии можно заменить действие инверсионной оси шестого и третьего порядка?
- 4) Какими простыми элементами симметрии можно заменить действие зеркально-поворотной оси первого и второго порядка?
- 5) Почему из всех сложных осей графический символ имеет только ось четвертого порядка?

Упражнения

Продемонстрируйте на чертеже действие: 1) L_1 ; 2) L_2 ; 3) L_3 ; 4) L_4 ; 5) L_6 .

Занятие 10 (2–2)

Основные теоремы взаимодействия элементов симметрии

Итак, мы живем в мире волшебных и обычных осей, осуществляющих операцию поворота. При этом объект наблюдения, допустим, точка выхода на сферу линии нормали к грани, совершает некоторое путешествие по сфере проекций из точки 1 в точку 2 (см. рис. 27) вокруг некоторой воображаемой оси, проходящей через начало координат. Назовем эту операцию симметрии, осуществляющую такое перемещение по сфере, буквой A . Для наглядности да-

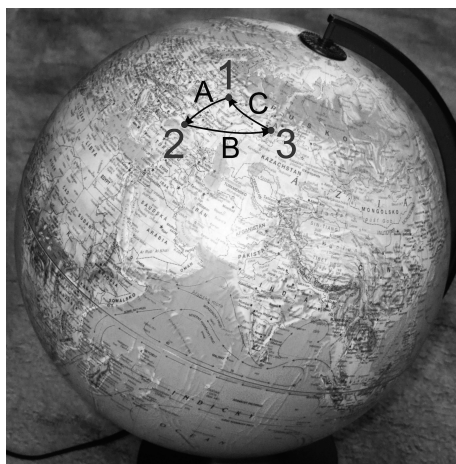


Рис. 27. К доказательству «осевой» теоремы Эйлера. Стрелками показано перемещение студентов при последовательном вращении вокруг пересекающихся в центре Земли поворотных осей симметрии. А, В и С — путь по поверхности Земли: А: Москва — Симферополь, В: Симферополь — Миасс, С: Миасс — Москва соответственно

вайте ощутим себя студентами второго курса геологического факультета МГУ (геохимический поток), сдавшими весеннюю сессию и отправляющимися первого июня на геологическую практику из Москвы в Симферополь. В результате вращения вокруг такой воображаемой оси, протыкающей Землю насквозь и проходящей через ее центр, наша группа студентов перемещается из точки 1 в точку 2 и оказывается в Крыму. Очевидно, место выхода на поверхность этой оси непонятно какого порядка будет где-то в Тихом океане, а другой выход — в Атлантическом.

Подойдем далее к нашему объекту (студентов) следующим вращением вокруг какой-то другой оси. Этой операции симметрии (В) соответствует длительное перемещение на поезде № 142 «Симферополь — Екатеринбург» по поверхности земного шара из точки 2 (Симферополь) в точку 3 (Миасс) на петрографическую практику. Таким образом, наш объект наблюдения (группа студентов) из стартовой точки 1 (Москва) оказался в точке 3 (Ильменский минералогический заповедник в окрестностях Миасса). К концу петрографической практики нашему объекту наблюдения становится совершенно очевидно (и это было строго доказано математиком Леонардом Эйлером), что из точки 3 в точку 1 можно попасть двумя путями. Первый путь — повторить долгий обратный маршрут. Второй путь — осуществить более правильное вращение вокруг третьей оси, обеспечивающей непосредственное перемещение из точки 3 в точку 1 по поверхности сферы. Таким образом, возникает третья операция симметрии, соответствующая перемещению Миасс — Москва (С).

Сформулируем это в виде правила: *две операции симметрии (А и В), встретившись вместе, порождают третью (С). При этом они равноправны: А и С порождают В, В и С — А.*

Более того, в результате последовательно проведенных всех трех операций возникает операция идентичности: студенты изначально были в Москве, в ней в итоге и оказались, правда, уже в августе ($A + B + C = 1$).

Теперь применим это правило для наиболее часто встречающихся комбинаций элементов симметрии в кристаллах. Рассмотрим три частных случая.

Случай 1. ($A = P$, $B = P$). Две плоскости пересекаются под определенным углом, например 90° (рис. 28).

В результате первой операции симметрии исходная правая фигурка отразится в левую. На втором этапе левая фигурка отразится в другой плоскости и станет опять правой. Таким образом, исходная и конечная фигура связаны операцией симметрии первого рода. Нетрудно понять, что это будет ось второго порядка, проходящая по линии пересечения плоскостей. Если рассмотреть этот пример в общем виде, то получится следующее правило:

Если встречаются под углом α две плоскости, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка $360^\circ/2\alpha$.

Например, ось шестого порядка получится, если плоскости встретятся под углом 30° , ось четвертого порядка — 45° , ось третьего — 60° . Обратим внимание, что плоскость 1 и плоскость 2 — это элементы A и B , а ось — элемент C . Это значит, что при наличии P и L_2 , лежащей в этой плоскости, возникнет еще плоскость, перпендикулярная исходной, причем ось L_2 будет проходить по линии их пересечения.

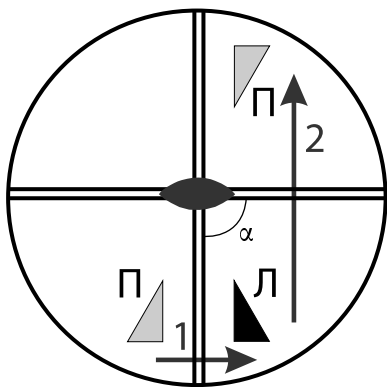


Рис. 28. Две плоскости симметрии, пересекающиеся под углом 90° , порождают ось второго порядка, проходящую по линии их пересечения. Левые фигурки — черные, правые — серые

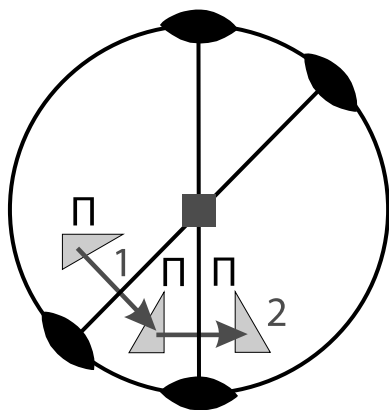


Рис. 29. Две оси второго порядка, пересекающиеся под углом 45° , порождают ось четвертого порядка, проходящую по линии их пересечения и перпендикулярную каждой из них. Все фигурки правые

Случай 2. ($A = L_2$, $B = L_2$). Две оси второго порядка пересекаются под определенным углом, например, 45° (рис. 29). Два последовательных поворота вокруг двух горизонтальных пересекающихся (45°) поворотных осей второго порядка можно заменить результирующей операцией — поворотом вокруг вертикальной оси четвертого порядка, проходящей через точку пересечения

этих осей и расположенной перпендикулярно плоскости, в которой лежат эти оси.

А теперь попробуем в общем виде: *если встречаются под углом α две оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка $360^\circ/2\alpha$.*

Например, ось шестого порядка получится, если две оси L_2 встретятся под углом 30° , ось третьего — под углом 60° , ось второго — под углом 90° . Обратим внимание, что оси L_2 (первая) и L_2 (вторая) — элементы А и В, а порожденная

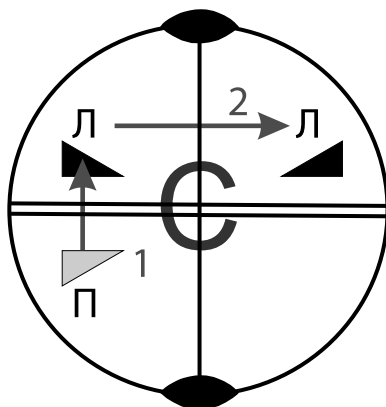


Рис. 30. Ось второго порядка и плоскость, перпендикулярная ей, порождают центр инверсии. Левые фигурки — черные, правые — серые

ось — элемент С. Поэтому при наличии L_4 и L_2 , перпендикулярной L_4 , возникнет еще одна ось L_2 , перпендикулярная L_4 и образующая с исходной L_2 угол в 45° .

Случай 3. ($A = P$, $B = L_2$). Операция отражения в зеркальной плоскости с последующим поворотом вокруг вертикальной оси второго порядка, перпендикулярной этой плоскости, приводит к появлению нового элемента симметрии — центра инверсии С (совпадающего с элементом С).

Это сочетание (L_2 – P – C) очень важно и часто встречается в кристаллах. Обратим внимание, что при наличии центра и плоскости возникнет ось второго порядка, а при наличии центра и оси второго порядка — плоскость. Сформулируем и это правило в общем виде:

Если встречаются под углом α поворотная и инверсионная ось второго порядка, то результатом их взаимодействия будет инверсионная ось порядка $360^\circ/2\alpha$.

Действительно, в нашем случае нормаль к плоскости (она же L_2) составляет угол с поворотной осью в 0° (360°), следовательно, порожденным элементом симметрии будет инверсионная ось первого порядка, то есть центр. На рисунке 31 приведены другие варианты кристаллографических сочетаний поворотной и инверсионной оси второго порядка.

Сформулированные выше три правила называют еще теоремами взаимодействия.

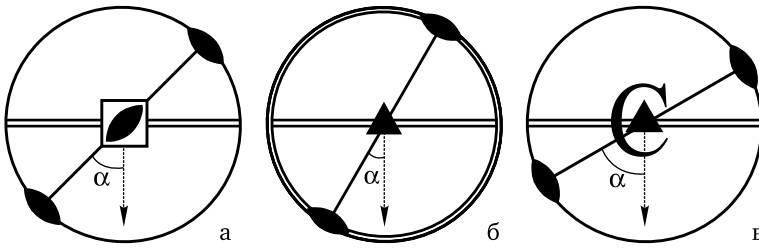


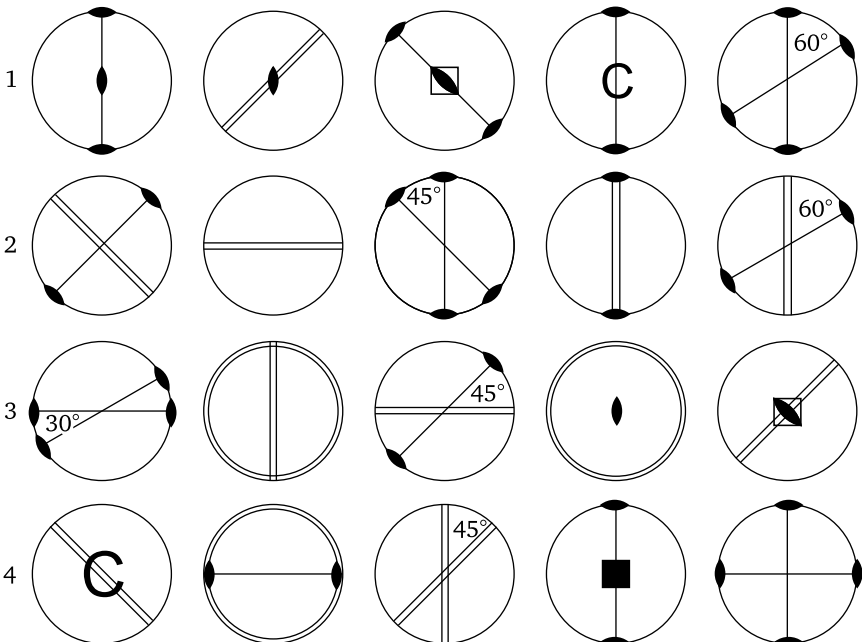
Рис. 31. В результате взаимодействия инверсионной и поворотной оси под углом 45° возникает L_4 (а), под углом 30° — $L_6 = L_3P$ (б), под углом 60° — $L_3 = L_3C$ (в)

Контрольные вопросы

- 1) Две поворотные оси L_2 пересеклись под углом 10° . Что получится в результате?
- 2) Две плоскости пересеклись под углом 36° . Что получится в результате?
- 3) Наблюдается ось шестого порядка и плоскость, в которой лежит эта ось. Что получится в результате их взаимодействия?
- 4) Встретились центр инверсии и поворотная ось второго порядка. Что получится?

Упражнения

Показать на графике результирующий элемент симметрии, возникший при взаимодействии симметрических операций, заданных указанными на проекции элементами симметрии (согласно [13]).



Занятие 11 (2–3)

Вывод классов средней категории

На прошлой ступени обучения мы выяснили, что кристаллы средней категории характеризуются частичной эквивалентностью координатных осей ($a = b \neq c$), связанной с присутствием в их группах симметрии одной оси порядка выше двух (рис. 13 б). Напомним, что в этой категории выделяют две сингонии: тетрагональную и гексагональную, координатные системы которых могут использоваться для описания кристаллов с осями четвертого, а также третьего и шестого порядков соответственно. Координатная система, описывающая тетрагональные кристаллы, имеет следующие характеристики:

$$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ,$$

а для гексагональной сингонии она характеризуется следующими параметрами:

$$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 120^\circ.$$

Еще раз подчеркнем, что эта система координат «обслуживает» кристаллы, имеющие главную ось как третьего, так и шестого порядка. Поэтому внутри гексагональной сингонии выделяют две подсингонии: собственно гексагональную (если порядок главной оси равен 6) и тригональную (если порядок главной оси равен 3).

На этом занятии мы путем взаимодействия операций симметрии между собой выведем все возможные классы, относящиеся к средней категории. Начнем с простейшего случая. Имеется единственная поворотная ось (третьего, шестого или четвертого порядка). На рисунке 32 представлены

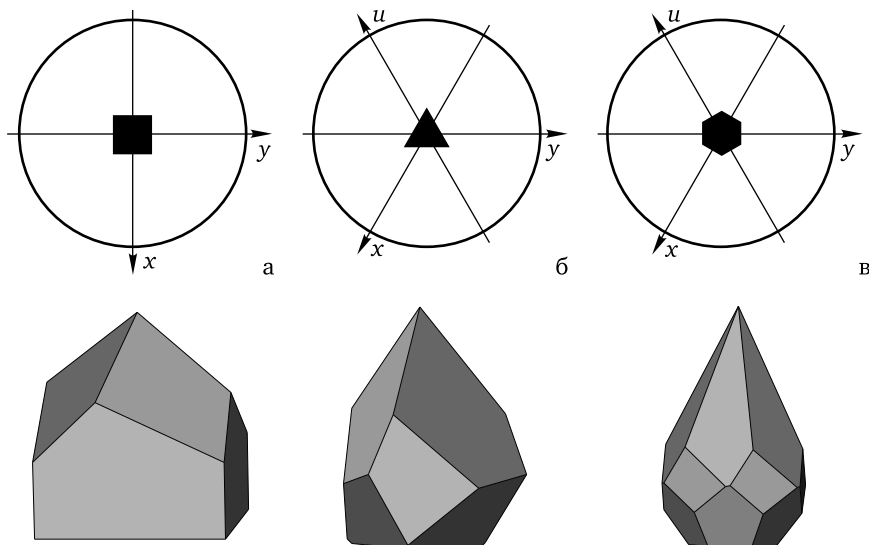


Рис. 32. Стереорафические проекции и типичные кристаллики классов L_n средней категории: а) класс L_4 , б) класс L_3 , в) класс L_6

стереографические проекции этих классов и типичные для этих классов кристаллики. Главную и единственную ось ориентируем вертикально. Обратим внимание, что в координатной системе в гексагональной сингонии появляется еще одна ось (u) в горизонтальной плоскости, перпендикулярная оси z . С осями x и y эта ось u образует угол в 120° . На первый взгляд это глупость: пространство однозначно описывается тремя различными координатными направлениями. Но, как выяснится позже, введение этой дополнительной оси СИЛЬНО облегчает дальнейшую жизнь в кристаллографии; ее введение просто необходимо.

Давайте теперь рассмотрим классы с единственной инверсионной осью четвертого, третьего или шестого порядков. На рисунке 33 представлены стереографические проекции этих классов и типичные для них кристаллы.

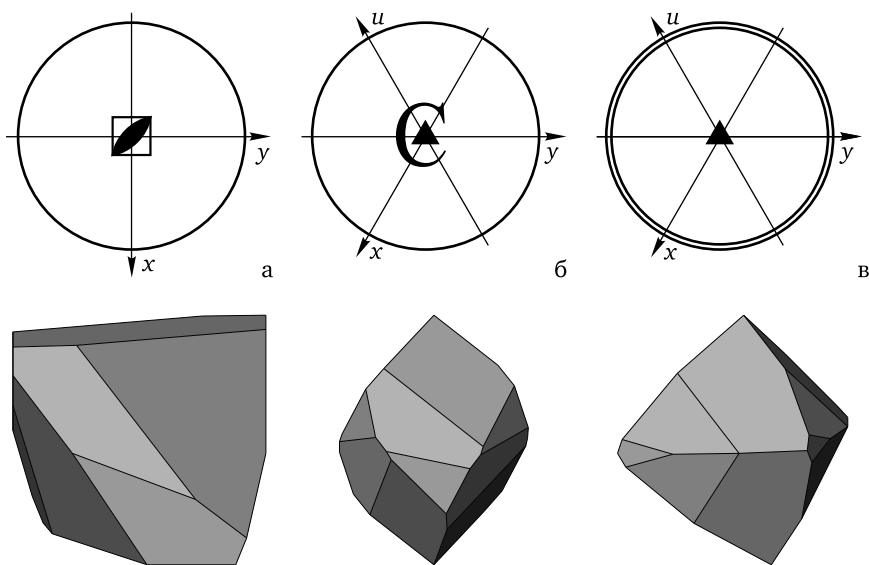


Рис. 33. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов L_n средней категории: а) класс L_4 , б) класс $L_3 = L_3C$, в) класс $L_6 = L_3P$

Теперь введем дополнительную горизонтальную ось второго порядка. Она взаимодействует с вертикальной исходной осью с образованием горизонтальных осей второго порядка под определенным углом к исходной оси (в случае, если исходная ось поворотная) либо с образованием инверсионных осей второго порядка (в случае инверсионной исходной оси). Рассмотрим эти варианты.

$L_4 * L_2$. Ось четвертого порядка, как следует из ее сущности, поворачивает все что угодно на 90° . Введенная горизонтальная ось L_2 также будет повернута на этот угол. В результате взаимодействия $L_4 * L_2$ возникает еще одна система горизонтальных осей под углом 45° к исходным. Получен новый класс L_4L_2 , а более точно — $L_42L'_22L''_2$. Такая запись показывает, что в классе два

сорта осей второго порядка. Стереографическая проекция класса и типичный кристалл изображены на рисунке 34 а.

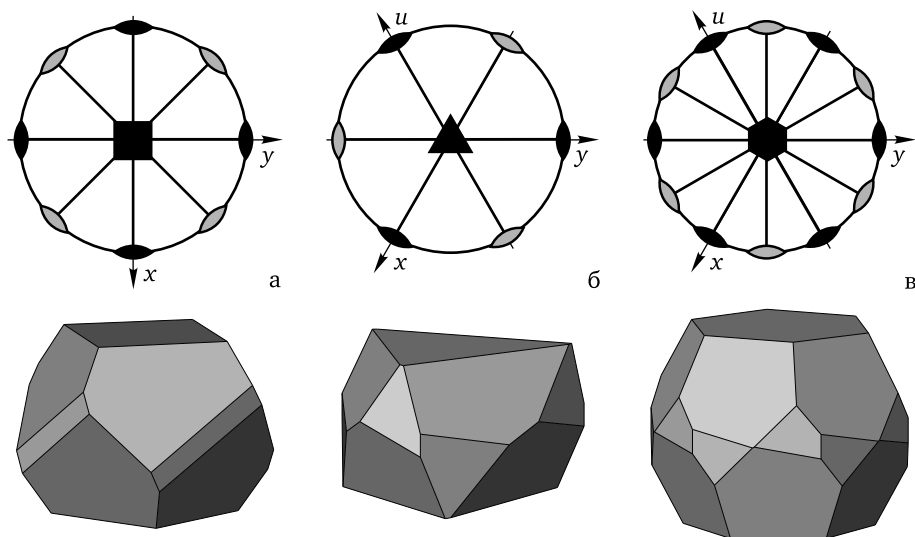


Рис. 34. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов $L_n n L_2$ средней категории: а) класс $L_4 4 L_2$, б) класс $L_3 3 L_2$, в) класс $L_6 6 L_2$.

Порожденные элементы симметрии выделены серым

$L_6 * L_2$. Ситуация аналогична предыдущему случаю. Ось шестого порядка, как следует из ее сущности, поворачивает все что угодно на 60° . Введенная горизонтальная ось L_2 также будет повернута на этот угол, на этот раз дважды. А в результате взаимодействия $L_6 * L_2$ возникает еще одна система из трех горизонтальных осей под углом 30° к исходным. Получен новый класс $L_6 6 L_2$, а более точно — $L_6 3 L'_2 3 L''_2$. Стереографическая проекция класса и типичный кристаллик показаны на рисунке 34 в.

$L_3 * L_2$. Несколько отлична от предыдущих случаев ситуация с таким набором исходных элементов симметрии. Ось третьего порядка поворачивает все что угодно на 120° , в результате получается еще две оси L_2 , эквивалентные исходной. А взаимодействие $L_3 * L_2$ вызовет появление этих же осей! Таким образом, оси второго порядка появляются и как результат поворота, и как результат взаимодействия. Поэтому один знак Фюзю для каждой оси на рисунке 34 б показан черным, а второй — серым цветом, что подчеркивает тот факт, что все три оси второго порядка в этом классе одинаковы и полярны (один конец оси не похож на другой). Сокращенная и полная запись класса по Браве будут в данном случае совпадать: $L_3 3 L_2$.

$L_4 * L_2$. Как следует из теорем взаимодействия, порожденным элементом симметрии в данном случае выступит вертикальная плоскость с углом 45° между ее нормалью и исходной осью второго порядка. Последующее вращение приведет к законченному набору элементов симметрии, который за-

писывается как $L_4 2L_2 2P$. Стереографическая проекция класса и типичный кристалл изображены на рисунке 35 а.

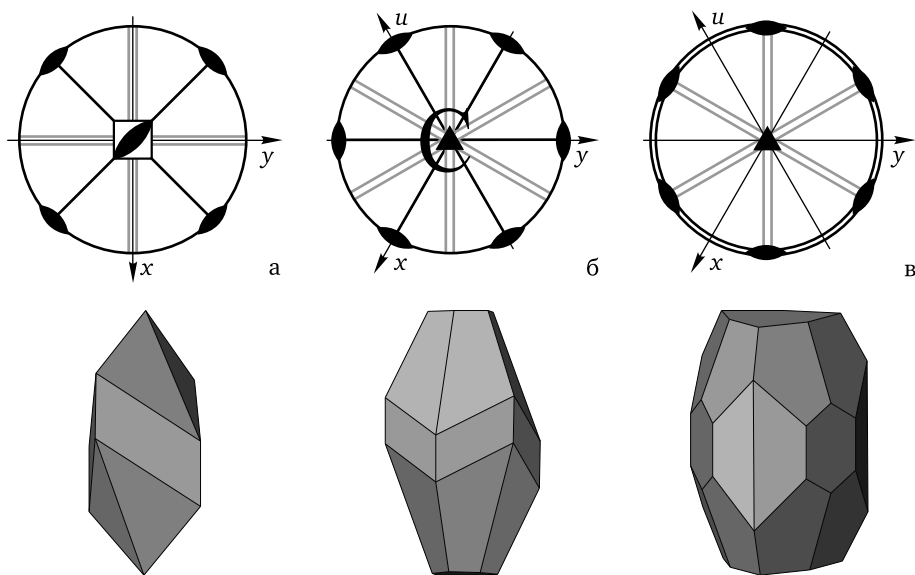


Рис. 35. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов, образованных взаимодействием инверсионных осей и горизонтальных осей второго порядка: а) класс $L_4 2L_2 2P$, б) класс $L_3 3L_2 3P$ ($L_3 3L_2 3PC$), в) класс $L_3 3L_2 4P$ ($L_6 3L_2 3P$). Порожденные элементы симметрии выделены серым

$L_3 * L_2$. Воспользовавшись теоремами взаимодействия, получим результирующий элемент — вертикальную плоскость с углом 60° между ее нормалью и исходной осью второго порядка. Последующее вращение приведет к законченному набору элементов симметрии, который записывается как $L_3 3L_2 3PC$ ($L_3 3L_2 3P$). Стереографическая проекция класса и типичный кристалл приведены на рисунке 35 б.

$L_6 * L_2$. Воспользовавшись теоремами взаимодействия, получим результирующий элемент — вертикальную плоскость с углом 30° между ее нормалью и исходной осью второго порядка. При этом на проекции ось и плоскость будут лежать на одной линии. Последующее вращение приведет к законченному набору элементов симметрии, который записывается как $L_3 3L_2 4P$ ($L_6 3L_2 3P$). Три плоскости вертикальные и равны друг другу (эквивалентны), а одна — горизонтальная и разрезает кристалл пополам совершенно иным способом. Стереографическая проекция класса и типичный кристалл приведены на рисунке 35 в.

Для следующей группы классов средней категории в качестве исходных элементов симметрии выступает вертикальная поворотная ось и горизонтальная плоскость. Один такой вариант уже рассматривался нами на рис. 33 в. Рассмотрим оставшиеся варианты с вертикальной осью четвертого и шестого

порядков. Обратим внимание, что эти оси четные, т. е. они умеют поворачивать объект на 180° . Можно сказать, что в них заложена ось второго порядка, которая осуществит уже известное нам по рисунку 30 взаимодействие L_2-P-C с образованием центра инверсии. Таким образом, получены еще два новых класса — L_4PC и L_6PC . Стереографические проекции этих классов и типичные кристаллы приведены на рисунке 36.

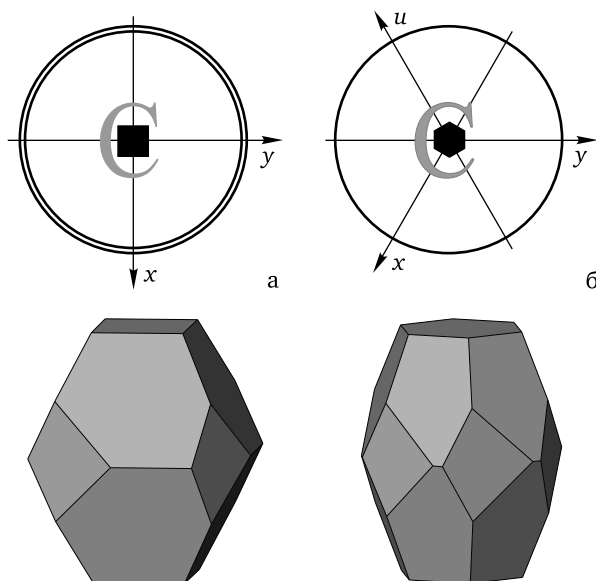


Рис. 36. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов L_nPC средней категории: а) класс L_4PC , б) класс L_6PC . Порожденный центр инверсии выделен серым

Для следующей группы классов средней категории в качестве исходных элементов симметрии выступает вертикальная поворотная ось и зеркальная плоскость, но на этот раз вертикальная. Рассмотрим все три случая.

$L_3 * P$. Ось третьего порядка поворачивает плоскость на 120° , как результат — возникает система из трех одинаковых вертикальных плоскостей. Взаимодействие оси и плоскости должно привести к еще одной системе плоскостей под углом 60° , но они уже есть. То есть ситуация аналогична классу L_33L_2 — результат взаимодействия и результат вращения совпадают. Мы пришли к классу L_33P . Стереографическая проекция класса и типичный кристалл приведены на рисунке 37 а.

$L_4 * P$. Ось четвертого порядка поворачивает плоскость на 90° , как результат — возникает система из двух одинаковых вертикальных плоскостей. Взаимодействие оси и этих плоскостей приводит к еще одной системе плоскостей под углом в 45° градусов к исходным, на рис. 37 б они выделены серыми линиями.

$L_6 * P$. Ось шестого порядка поворачивает исходную плоскость на 60° , в результате появляется система из трех одинаковых вертикальных плоскостей. Взаимодействие оси L_6 и этих плоскостей приводит к еще одной системе плоскостей под углом в 30° к исходным, на рис. 37 в они выделены серыми линиями.

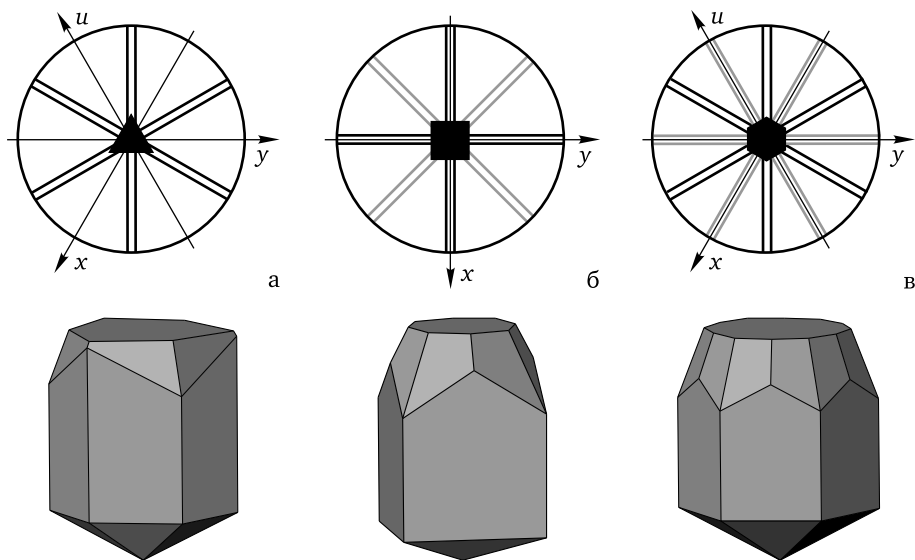


Рис. 37. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов $L_n nP$ средней категории: а) класс $L_3 3P$, б) класс $L_4 4P$, в) класс $L_6 6P$. Порожденные плоскости выделены серым

И наконец, давайте к классам симметрии, изображенным на рисунке 37, добавим в качестве дополнительного порождающего элемента симметрии центр инверсии. В классе $L_3 3P$ произойдет следующее: взаимодействие центра и трех плоскостей приведет к появлению перпендикулярных этим плоскостям осей второго порядка, и мы получим уже известный нам класс $L_3 3L_2 3PC$ (рис. 35 б). В двух других случаях мы получим новые классы.

$L_4 4P * C$. Взаимодействие центра и четырех плоскостей приведет к появлению перпендикулярных этим плоскостям осей второго порядка, а взаимодействие центра и оси второго порядка, заключенной в оси четвертого, приведет к появлению горизонтальной плоскости. Как результат получится новый класс, изображенный на рис. 38 а. Полная запись этого класса выглядит следующим образом: $L_4 2L_2' L_2'' 2P' 2P'' P''' C$.

$L_6 6P * C$. Взаимодействие центра и шести плоскостей приведет к появлению перпендикулярных этим плоскостям осей второго порядка, взаимодействие центра и оси второго порядка, заключенной в оси шестого порядка, также приведет к появлению горизонтальной плоскости. Как результат получится новый класс, изображенный на рис. 38 б. Полная запись этого класса выглядит следующим образом: $L_6 3L_2' 3L_2'' 3P' 3P'' P''' C$.

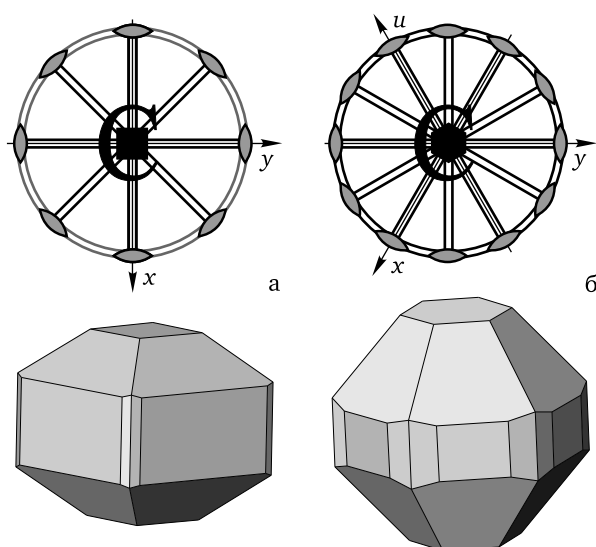


Рис. 38. Стереографические проекции и типичные кристаллики классов L_4L_25PC (а) и L_66L_27PC (б)

Любые дальнейшие комбинации элементов симметрии приведут к уже полученным ранее вариантам.

Итак, подведем итог. Нами выведено 19 классов, относящихся к средней категории, характеризующейся одной вертикальной осью порядка 3, 4 или 6. Из них семь классов относятся к тетрагональной сингонии и двенадцать — к гексагональной. Внутри гексагональной сингонии пять классов относятся к собственно гексагональным, содержащим главную поворотную ось шестого порядка, а семь — к тригональным, у которых главная вертикальная ось третьего порядка.

Насколько важна средняя категория в минералогии? Ответ однозначен — она исключительно важна! В тетрагональной сингонии кристаллизуются такие известные минералы, как важнейший минерал для геохронологии (определения возраста образца) устойчивый миллиарды лет циркон $ZrSiO_4$, рутил TiO_2 и его оловянный аналог касситерит SnO_2 . Отметим что одна из экзотических разновидностей кремнезема SiO_2 (стишовит) также относится к группе рутила. К тетрагональной сингонии относятся также известные рудные минералы халькопирит $CuFeS_2$, вольфенит $PbMoO_4$ и шеелит $CaWO_4$.

Мир гексагональных кристаллов еще более красив и разнообразен. Если спросить любого школьника, занимающегося в минералогическом кружке: «Какой самый известный гексагональный кристалл вы знаете?», — то в 99% случаях вам ответят: «Конечно, кварц SiO_2 !» — и будут неправы. На самом деле самый важный и распространенный гексагональный кристалл — это лед H_2O . Нельзя не назвать берилл и его драгоценную разновидность — изумруд, медный минерал диоптаз, разнообразные по химическому составу минералы группы турмалина, корунд Al_2O_3 , занимающий коробочку № 8 в шкале

твердости Мооса и имеющий драгоценные окрашенные разновидности рубин и сапфир, а также их более мягкий собрат — гематит Fe_2O_3 . Отметим и важнейший в осадочных процессах карбонат кальцит CaCO_3 .

Контрольные вопросы

- 1) Сколько всего классов симметрии относится к средней категории?
- 2) Почему не совсем обоснованно называть тригональную подсингонию сингонией?
- 3) Сколько классов симметрии относится к тригональной подсингонии, а сколько к собственно гексагональной?
- 4) Назовите наиболее известные тетрагональные кристаллы.
- 5) Назовите наиболее известные гексагональные кристаллы.

Упражнения

- 1) Начертите проекции всех классов тетрагональной сингонии.
- 2) Начертите проекции всех классов тригональной подсингонии.
- 3) Начертите проекции всех собственно гексагональных классов.

Занятие 12 (2–4)

Практическое занятие. Достройка класса симметрии по заданному набору

Для практического занятия нам понадобится трафарет (рис. 23), бумага, линейка, остро оточенный карандаш. Возьмем лист бумаги, проведем по трафарету окружность, отметим начало координат (по центральному отверстию на трафарете).

Пример 1. Исходный набор элементов симметрии — две горизонтальные оси второго порядка, пересекающиеся под углом 30° , и центр инверсии. Последовательность действий по достройке класса симметрии приведена в таблице Б цветной вклейки.

Если провести анализ чертежа, то можно убедиться, что любые два элемента симметрии при взаимодействии между собой приведут к появлению уже присутствующих на чертеже элементов. Это означает, что класс симметрии достроен полностью. Мы получили класс L_66L_27PC .

Пример 2. Исходный набор элементов симметрии — две горизонтальные оси второго порядка, пересекающиеся под углом 45° , и горизонтальная плоскость P_x . Последовательность действий по достройке класса симметрии приведена в таблице В цветной вклейки.

Все дальнейшие взаимодействия любых двух элементов симметрии приведут к появлению уже присутствующих на чертеже элементов. Это означает, что класс симметрии достроен полностью. Мы получили класс L_44L_25PC . Отметим, что в обоих рассмотренных примерах последовательность действий можем быть иной, тем не менее мы все равно придем к полученным классам L_66L_27PC и L_44L_25PC .

Упражнения

Какой класс симметрии возникнет, если к исходному классу добавить новый элемент симметрии (см. таблицу ниже)? К какой сингонии будет относиться полученный класс? Записать ход вывода класса и нарисовать его проекцию.

№	Исходный класс	Новый элемент симметрии
а)	$L_2 2P$	горизонтальная плоскость P_z
б)	$3L_2 3PC$	вертикальная плоскость под углом в 45° к исходным плоскостям
в)	$3L_2 3PC$	вертикальная плоскость под углом в 30° к исходным плоскостям
г)	$L_4 4P$	центр инверсии
д)	$L_6 6L_2$	горизонтальная плоскость P_z
е)	$L_6 6L_2$	центр инверсии
ж)	$3L_2$	вертикальная плоскость под углом в 45° к осям второго порядка L_{2x} и L_{2y}
з)	$L_3 3L_2$	центр инверсии

Занятие 13 (2–5)

Простые формы тетрагональной и гексагональной сингонии

На прошлой ступени обучения мы познакомились с понятием простой формы кристалла и познакомились с простыми формами низшей категории: моноэдром, пинакоидом, диэдром, ромбической призмой, ромбическим тетраэдром, ромбической пирамидой и ромбической бипирамидой. Каждая из простых форм помимо названия имела свои характеристики: число граней, открытость-закрытость. На этом занятии мы рассмотрим простые формы, которые встречаются в кристаллах 19 классов средней категории. Однако сначала введем новую характеристику формы. Простая форма по положению может быть в конкретном классе *общей* или *частной*. Форма является частной, если грани этой формы закреплены по отношению к элементам симметрии, то есть

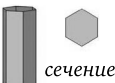
- 1) параллельны оси симметрии или плоскости симметрии;
- 2) перпендикулярны оси симметрии или плоскости симметрии;
- 3) *равнонаклонны* (одинаково наклонены) к одинаковым элементам симметрии.

Если ни одно из этих условий не выполняется, то простая форма будет являться *общей* и грани этой формы будут произвольным образом наклонены по отношению ко всем элементам симметрии данного класса. Теперь разберем все классы средней категории и посмотрим, какие формы в них

встречаются, есть ли место в этих классах уже известным формам, которые встречались в низшей категории.

Характеристика всех простых форм низшей категории приведена в таблице 9. Отметим, что в таблице в большинстве случаев нельзя указать параметр общей/частная, так как в одном классе одна и та же форма может быть частной, а в другом — общей. Добавим, что в одном классе могут находиться несколько различных по названию частных форм, но общая простая форма будет одна и она будет уникальной для каждого класса. Таким образом, класс симметрии может быть назван по имени своей общей простой формы. Так, например, класс $3L_2$ ромбической сингонии называется ромбо-тетраэдрическим, класс C триклинной сингонии — пинакоидальным и т. д. Поэтому в таблице 9 вводится дополнительный столбец с указанием класса, где описываемая форма является общей.

Таблица 9. Простые формы средней категории

Название	Внешний вид	Число граней	Закрытая/открытая	В каких классах встречается	Общая форма для класса
моноэдр		1	открытая	$L_3, L_4, L_6, L_33P, L_44P, L_66P$	L_1
пинакоид		2	открытая	$L_4, L_3C, L_3P, L_44L_2, L_33L_2, L_66L_2, L_42L_22P, L_33L_23PC, L_33L_24P, L_4PC, L_6PC, L_44L_25PC, L_66L_27PC$	C
тригональная пирамида		3	открытая	L_3, L_33P	L_3
тригональная призма	 сечение	3	открытая	L_3, L_33L_24P, L_33P	нет
тетрагональная пирамида		4	открытая	L_4, L_44P	L_4
тетрагональная призма	 сечение	4	открытая	$L_4, L_42L_22P, L_4PC, L_44P, L_44L_25PC$	нет
тетрагональный тетраэдр		4	закрытая	L_4, L_42L_22P	L_4
гексагональная пирамида		6	открытая	L_6, L_66P, L_33P	L_6
гексагональная призма	 сечение	6	открытая	$L_6, L_33L_2, L_33L_23PC, L_33L_24P, L_6PC, L_66P, L_33P, L_66L_27PC$	нет

Продолжение таблицы 9

дигригональная пирамида		6	открытая	$L_3 3P$	$L_3 3P$
дигригональная призма		6	открытая	$L_3 3L_2, L_3 3L_2 4P, L_3 3P$	нет
ромбоэдр		6	закрытая	$L_3 C, L_3 3L_2, L_3 3L_2 3PC$	$L_3 C$
тригональная бипирамида		6	закрытая	$L_3 P, L_3 3L_2 4P, L_3 3L_2$	$L_3 P$
тригональный трапецоэдр		6	закрытая	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2$
дитетрагональная пирамида		8	открытая	$L_4 4P$	$L_4 4P$
дитетрагональная призма		8	открытая	$L_4 4L_2, L_4 2L_2 2P, L_4 4P, L_4 4L_2 5PC$	Нет
тетрагональная бипирамида		8	закрытая	$L_4 4L_2, L_4 2L_2 2P, L_4 PC, L_4 4L_2 5PC$	$L_4 PC$
тетрагональный скаленоэдр		8	закрытая	$L_4 2L_2 2P$	$L_4 2L_2 2P$
тетрагональный трапецоэдр		8	закрытая	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2$
гексагональная бипирамида		12	закрытая	$L_6 6L_2, L_3 3L_2 3PC, L_3 3L_2 4P, L_6 PC, L_6 6L_2 7PC$	$L_6 PC$
гексагональный трапецоэдр		12	закрытая	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2$

Продолжение таблицы 9

дигексагональная пирамида		12	открытая	$L_6 6P$	$L_6 6P$
дигексагональная призма	 сечение	12	открытая	$L_6 6L_2, L_3 3L_2 3PC,$ $L_6 6P, L_6 6L_2 7PC$	Нет
дитригональная бипирамида		12	закрытая	$L_3 3L_2 4P$	$L_3 3L_2 4P$
тригональный скаленоедр		12	закрытая	$L_3 3L_2 3PC$	$L_3 3L_2 3PC$
дитетрагональная бипирамида		16	закрытая	$L_4 4L_2 5PC$	$L_4 4L_2 5PC$
дигексагональная бипирамида		24	закрытая	$L_6 6L_2 7PC$	$L_6 6L_2 7PC$

Прежде всего рассмотрим классы с единственной поворотной осью четвертого, третьего или шестого порядка (см. рис. 39). В позиции 1 во всех трех классах находится известный нам еще по прошлой ступени обучения моноэдр. В позиции 2 во всех трех классах находятся новые частные открытые

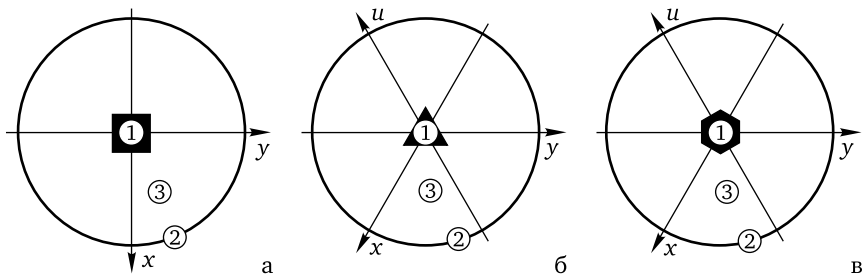


Рис. 39. Принципиально различные положения простых форм в классах L_n средней категории: три позиции а) в классе L_4 , б) в классе L_3 , в) в классе L_6 ; 1 — грань частного положения, перпендикулярная поворотной оси симметрии, 2 — грань частного положения, параллельная оси симметрии, 3 — грань общего положения

простые формы — призмы. Трехгранная призма носит название *тригональной*, четырехгранная — *тетрагональной* и шестигранная — *гексагональная*. Формы общего положения в этих классах носят названия пирамид (*тригональной*, *тетрагональной* и *гексагональной* соответственно). Отметим, что пирамиды не имеют дна, следовательно, тоже являются открытыми форма-

ми. Таким образом, все кристаллы этих классов являются комбинационными многогранниками, так как не имеют форм, способных в одиночку замкнуть пространство.

Рассмотрим классы с единственной инверсионной осью четвертого, третьего или шестого порядка (рис. 40). В позиции 1 во всех трех классах уже находится известный нам пинакоид. В позиции 2 во всех трех классах находятся частные открытые простые формы — призмы: тетрагональная, гексагональная (L_3C) и тригональная (L_3P). А вот в позиции 3 появляются новые закрытые формы, дающие названия этим классам, так как именно в этих классах они являются общими. Общая форма класса L_4 — *тетрагональный тетраэдр*, класса L_3C — *ромбоэдр*, а класса L_3P — *тригональная бипирамида*. Внешне тетрагональный тетраэдр отличается от ромбического тем, что в тетрагональном тетраэдре грани являются равнобедренными треугольниками, а в ромбическом — нет.

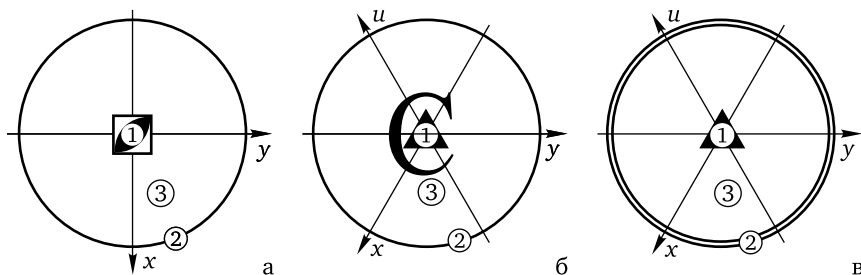


Рис. 40. Принципиально различные положения простых форм в классах L_n средней категории: три позиции а) в классе L_4 , б) в классе $L_3 = L_3C$, в) в классе $L_6 = L_3P$; 1 — грань частного положения перпендикулярна инверсионной оси симметрии, 2 — грань частного положения параллельна инверсионной оси, 3 — грань общего положения

Поговорим об осевых классах $L_n n L_2$. В этих и последующих рассматриваемых классах симметрии на поверхности сферы проекций можно выделить независимый сферический треугольник, который содержит в своих вершинах поворотные или инверсионные оси симметрии. В вышеописанных шести классах этот сферический треугольник вырождался в отрезок, имеющий две крайние точки (параллельную и перпендикулярную оси симметрии) и бесчисленное множество промежуточных. В общем виде невырожденный сферический треугольник содержит три частных простые формы в вершинах, три формы на своих сторонах (чаще всего они будут частными, однако есть исключения). Точки внутри сферического треугольника будут соответствовать общей простой форме. Таким образом, принципиально различных по названию простых форм в любом классе симметрии может быть максимум семь.

В позиции 1 во всех трех классах $L_n n L_2$ находится известный нам пинакоид (см. рис. 41). В позиции 2 во всех трех классах находятся частные открытые простые формы — призмы: тетрагональная, тригональная и гексагональная. В позиции 3, равноудаленной от двух неэквивалентных осей второго порядка, в классе $L_4 4 L_2$ находится *дитетрагональная призма*, она же будет распола-

гаться в позиции 4. Позицию 5 оккупирует новая закрытая форма — *тетрагональная бипирамида*; в этом классе она является частной. Позиции 6 и 7 в этом классе совпадают: здесь располагается общая форма. Почему? Дело в том, что точка 6 в этом классе хоть и равноудалена от осей второго порядка, но эти оси не являются эквивалентными. Перед нами новая простая форма — *тетрагональный трапецоэдр* (для расшифровки названия посмотрим таблицу 4). По этой форме класс L_44L_2 называется тетрагонально-трапецоэд-рическим.

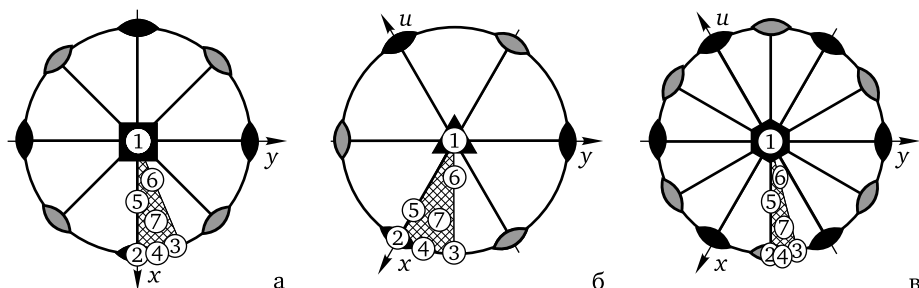


Рис. 41. Принципиально различные положения простых форм в классах $L_n nL_2$ средней категории: а) семь позиций в классе L_44L_2 , б) в классе L_33L_2 , в) в классе L_66L_2 . Штриховкой выделены характеристические сферические треугольники

Аналогичная ситуация наблюдается в классе L_66L_2 . В позиции 3, равноудаленной от двух неэквивалентных осей второго порядка, находится *дигексагональная призма*, она же будет располагаться в позиции 4. Позицию 5 оккупирует новая закрытая форма — *гексагональная бипирамида*; в этом классе она является частной. Позиция 6 и позиция 7 в этом классе совпадают: здесь располагается общая форма. Опять-таки, дело в том, что точка 6 в этом классе хоть и равноудалена от осей второго порядка, но эти оси не являются эквивалентными. Перед нами новая простая форма — *гексагональный трапецоэдр*. По названию этой формы класс L_66L_2 называется гексагонально-трапецоэд-рическим.

Несколько отлична ситуация в классе L_33L_2 . В позиции 3, равноудаленной от двух **эквивалентных** осей второго порядка, находится *гексагональная призма*, но в позиции 4 располагается не она, а другая форма — *дитригональная призма*. Сечение первой является правильным шестиугольником, а сечение второй — нет. В позиции 5 находится тригональная бипирамида, а в позиции 6 — ромбоэдр (в этом классе он является частной формой). Общая форма 7, дающая название классу, называется *тригональным трапецоэдром*.

Очень интересная комбинация форм наблюдается в классах, содержащих главную инверсионную ось и побочные оси в экваториальной плоскости (рис. 42). В позиции 1 во всех этих классах находится пинакоид. В классе L_42L_2P в позиции 2 и 3 наблюдаются тетрагональные призмы (разные), а в позиции 4 — дитетрагональная призма. Позицию 5 оккупирует тетрагональный тетраэдр (в этом классе он является частной формой), а позицию 6 — тетрагональная бипирамида. И, наконец, общая форма в этом классе является

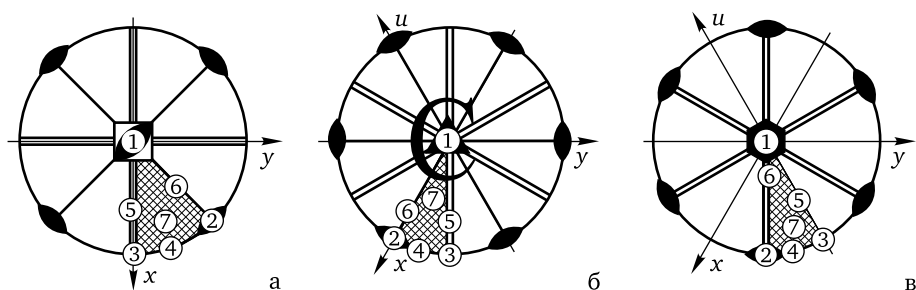


Рис. 42. Принципиально различные положения простых форм в классах средней категории: а) семь позиций в классе L_42L_22P , б) в классе L_33L_23P (L_33L_23PC), в) в классе L_33L_24P (L_63L_23P). Штриховкой выделены характеристические сферические треугольники

новой и уникальной. Она называется *тетрагональный скаленоздр* (перевод названия смотрим в таблице 4).

Разберем не менее интересный класс L_33L_23PC . Позиции 2 и 3 в нем занимают разные гексагональные призмы, а 4 — дигексагональная призма. В позиции 5 встречаем уже знакомый нам ромбоэдр, а в позиции 6 — гексагональную бипирамиду. Простая форма, дающая этому классу название, называется *тригональный скаленоздр*.

В классе L_33L_24P в позиции 2 находится тригональная призма, в позиции 3 — гексагональная, а в позиции 4 — дитригональная призмы. В позиции 5 наблюдается гексагональная бипирамида, а в позиции 6 — тригональная бипирамида. И, наконец, общая форма, дающая название классу, называется *дитригональная бипирамида*.

В двух классах L_nPC (рис. 43) число уникальных позиций сокращается до трех, так как направление обеих осей (поворотной и инверсионной) совпадают. В позиции 1 в обоих классах находится пинакоид. Параллельно осям

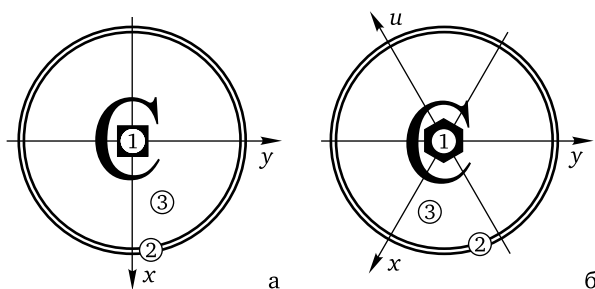


Рис. 43. Принципиально различные положения простых форм в классах L_nPC средней категории: а) три позиции в классе L_4PC , б) в классе L_6PC

в позиции 2 располагаются призмы — тетрагональная и гексагональная соответственно. Общими формами, дающими названия этим классам, являются *тетрагональная* и *гексагональная бипирамиды*.

В классах с вертикальными плоскостями $L_n nP$ число различных простых форм более разнообразно (рис. 44). В позицию 1 возвращаются моноэдры, а в позиции 2 располагаются призмы — тригональная, тетрагональная и гексагональная соответственно. Так как в классах $L_4 4P$ и $L_6 6P$ наблюдается чередование неэквивалентных плоскостей, то позиции 3 и 4 в этих классах одинаковы, в них находятся дитетрагональная и дигексагональная призмы. А вот в классе $L_3 3P$ плоскости одинаковы, следовательно, в точке 3, равноудаленной от плоскостей, находится не дитригональная призма (как в позиции 4), а гексагональная призма.

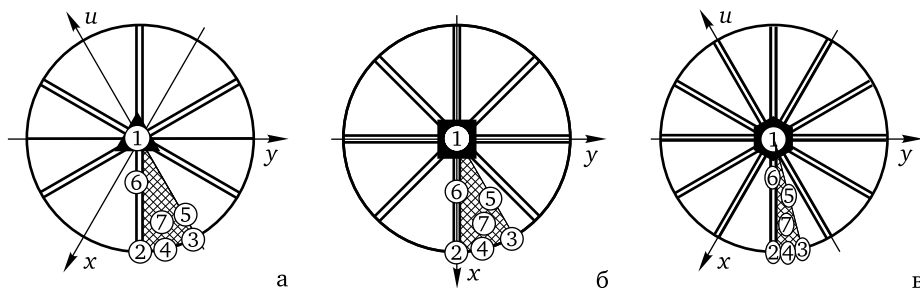


Рис. 44. Принципиально различные положения простых форм в классах $L_n nP$ средней категории: а) семь позиций в классе $L_3 3P$, б) в классе $L_4 4P$, в) в классе $L_6 6P$. Штриховкой выделены характеристические сферические треугольники

Позицию 6 во всех трех классах занимают пирамиды — тригональная, тетрагональная и гексагональная. Позиция 5 в классе $L_3 3P$ — частная, так как она равноудалена от эквивалентных плоскостей. В этой точке наблюдается гексагональная пирамида. Общая форма в этом классе — *дитригональная пирамида*.

Позиции 5 и 7 в классах $L_4 4P$ и $L_6 6P$ одинаковы (точка 5 также является общей, так как хоть и равноудалена, но от неэквивалентных элементов симметрии). В этих позициях располагаются *дитетрагональная* и *дигексагональная пирамиды*, дающие названия этим классам.

И, наконец, рассмотрим самые высокосимметричные классы средней категории — $L_4 4L_2 5PC$ и $L_6 6L_2 7PC$ (рис. 45 а, б).

В этих классах в позиции 1 опять появляются пинакоиды. В позиции 2 находятся тетрагональная и гексагональная призмы. Обратим внимание, что позиции 3 и 4 равнозначны — оси и плоскости, между которыми они находятся, не являются эквивалентными. Таким образом, в классе $L_4 4L_2 5PC$ в этих позициях находится дитетрагональная призма, а в классе $L_6 6L_2 7PC$ — дигексагональная призма. В точке 6 в этих классах находятся тетрагональная и гексагональная бипирамиды соответственно.

Обе точки 5 и 7 являются общими позициями. Здесь располагаются *дитетрагональная* и *дигексагональная бипирамиды*. Первая форма имеет 16 одинаковых граней, а вторая — 24. Это максимальное число граней, принадлежащих одной простой форме для кристаллов средней категории.

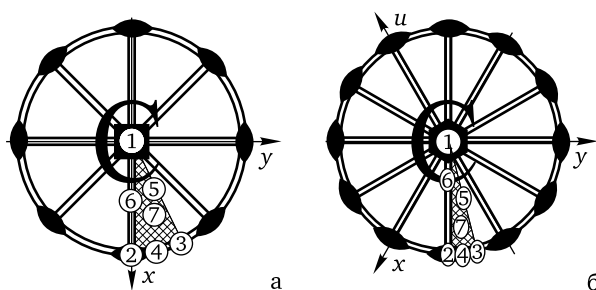


Рис. 45. Принципиально различные положения простых форм в классах $L_4 4L_2 5PC$ (а) и $L_6 6L_2 7PC$ (б). Штриховкой выделены характеристические сферические треугольники

Таким образом, мы познакомились с двадцатью семью простыми формами, которые встречаются в кристаллах средней категории. Две из них (моноклин и пинакOID) встречаются также и в низшей категории, а двадцать пять — только в средней. Пять форм низшей категории (диэдр, ромбический тетраэдр, ромбическая призма, пирамида и бипирамида) не могут присутствовать в кристаллах средней категории. Таким образом, в низшей и средней категории встречаются тридцать две **различные по названию** простые формы. По ссылке <http://cryst.geol.msu.ru/literature/kurs/tetragonal.pps> можно посмотреть анимацию взаимосвязи переходов друг в друга простых форм тетрагональных кристаллов (выполнила в 2011 г. студентка Л. Б. Кудряшова в рамках курсовой работы на кафедре кристаллографии геологического факультета МГУ). Аналогичную анимацию для гексагональных кристаллов (http://cryst.geol.msu.ru/literature/kurs/hex_forms.ppsx) создали студенты Р. Р. Мурзина и А. Б. Буданов в 2012 году.

Контрольные вопросы

- 1) Чем частная простая форма отличается от общей формы?
- 2) В каких классах средней категории все кристаллы являются комбинационными многогранниками?
- 4) Перечислите открытые простые формы средней категории.
- 5) Какая форма встречается в наибольшем числе классов средней категории?
- 6) Перечислите формы, которые встречаются только в одном классе средней категории.
- 7) Какая простая форма тетрагональной сингонии имеет наибольшее число граней?
- 8) Какая простая форма гексагональной сингонии имеет наибольшее число граней?

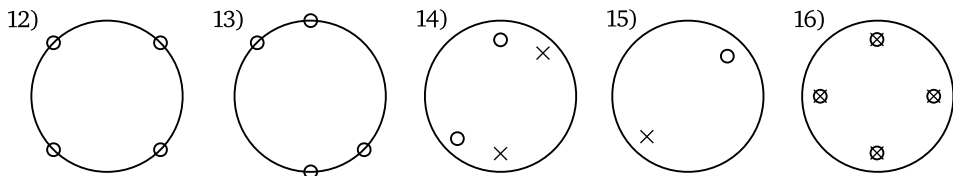
Упражнения

Разберите перечисленные ниже классы. Нарисуйте их стереографические проекции и укажите позиции для различных простых форм, которые могут быть реализованы в этих классах:

1) L_3 , L_4 и L_6 ; 2) $\bar{L}_4$, L_3C и L_3P ; 3) L_33P , L_44P и L_66P ; 4) L_44L_2 ; 5) L_33L_2 ; 6) L_66L_2 ; 7) $\bar{L}_42L_22P$; 8) L_33L_23PC ; 9) L_33L_24P ; 10) L_4PC и L_6PC ; 11) L_44L_25PC и L_66L_27PC .

Для каждого из расположенных ниже рисунков дайте ответы на следующие вопросы.

Какими классами симметрии можно описать расположение указанных граней, принадлежащих одной простой форме? Какая это простая форма — открытая или закрытая? Дайте этой форме название и нанесите элементы симметрии одного из классов на проекцию.



Занятие 14 (2–6)

Символика Шёнфлиса. Ее преимущества

При написании символа последних двух классов по Браве, рассмотренных на прошлом занятии, мы увидели, что даже сокращенная запись всех элементов симметрии достаточно громоздка, не говоря уже о полной записи класса. Символика точечных групп симметрии, предложенная немецким математиком А. Шёнфлисом, значительно более компактна. Кроме того, она позволяет одной буквой с соответствующим нижним индексом не только охарактеризовать весь набор элементов симметрии конкретной точечной группы, но и объединить родственные группы в отдельные семейства. Однако чтобы пользоваться этой широко распространенной в кристаллографии символикой, необходимо владеть правилами взаимодействия элементов симметрии, так как многие элементы в символической Шёнфлиса не пишутся в явном виде, а «спрятаны».

Группы с единственным особым направлением, представленным поворотной осью симметрии L_n , Шёнфлис предложил обозначать заглавной буквой C (циклические группы) с нижним цифровым индексом n , соответствующим порядку этой оси (например $C_4 = L_4$, $C_1 = L_1$). Группы с единственной инверсионной осью симметрии сопровождаются нижним индексом i , например $C_{3i} = \bar{L}_3$, $C_i = \bar{L}_1$.

Если же инверсионной оси предпочитают ее зеркальный эквивалент, то группа с такими осями обозначается S_n (от нем. *spiegel* — зеркало), например, $S_6 = \bar{L}_6 = C_3i (= \bar{L}_3)$, $S_4 = \bar{L}_4 = C_4i (= \bar{L}_4)$; при этом цифровой индекс n всегда отвечает порядку сложной оси.

Группы симметрии с побочными (горизонтальными) — перпендикулярными главному направлению — осями второго порядка обозначаются D_n , где нижний индекс n соответствует не только порядку главной поворотной оси, но и количеству побочных осей второго порядка. Например, запись D_3

следует читать так: «В классе имеется главная вертикальная ось третьего порядка и три оси второго порядка в экваториальной плоскости», т. е. $D_3 = L_3 3L_2$, $D_2 = L_2 2L_2$. Интересно, что в последнем случае любая из осей L_2 может играть роль главной, две другие, перпендикулярные ей, при этом окажутся побочными.

Для обозначения плоскостей симметрии Шёнфлис ввел дополнительные подстрочные буквенные индексы:

v (от нем. *vertical* — вертикальный) — для плоскостей, расположенных вдоль единственной или главной вертикальной оси симметрии ($L_3 3P = C_{3v}$);

h (от нем. *horizontal* — горизонтальный) — для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии ($L_2 PC = C_{2h}$);

s (от нем. *spiegel* — зеркало) — для плоскости неопределенной ориентации, т. е. не фиксированной ввиду отсутствия в группе иных элементов симметрии ($C_s = P$);

d — для вертикальных плоскостей симметрии, делящих пополам угол между побочными осями второго порядка ($D_{3d} = L_3 3L_2 3PC$, $D_{2d} = L_4 2L_2 2P$).

Расшифруем последний символ Шёнфлиса $D_{2d} = L_4 2L_2 2P$. Класс состоит из исходной группы D_2 с добавлением диагональных плоскостей. Таким образом, теоремы взаимодействия элементов симметрии автоматически повысят ранг вертикальной оси до L_4 .

Если же в классе присутствуют и вертикальные, и горизонтальные плоскости, то пишется значок горизонтальной плоскости h (как более важной), которой отдается предпочтение в символе Шёнфлиса ($D_{3h} = L_3 3L_2 3P_v P_h$).

Символика Шёнфлиса оказывается удобной при выводе групп симметрии. Схема вывода 27 кристаллографических классов симметрии средней и низшей категории представлена на рис. 46.

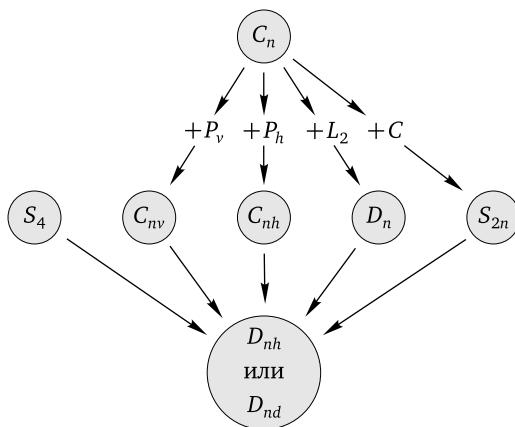


Рис. 46. Взаимосвязь классов симметрии средней и низшей категории

Названия всех классов симметрии по учебной символике, символике Шёнфлиса, по общей простой форме и по международной символике (которая будет рассмотрена позже) приведены в таблице на с. 12–13 цветной вклейки.

Контрольные вопросы

- 1) Как формируется символ Шёнфлиса?
- 2) Что обозначает буквы C , D , S в символе Шёнфлиса?
- 3) В чем преимущества символики Шёнфлиса перед символикой Браве?

Упражнения

- 1) Расшифруйте символы Шёнфлиса C_{2h} и D_{2h} . Запишите указанные классы в символике Браве. К какой категории относятся эти классы?
- 2) Расшифруйте символы Шёнфлиса D_{3h} и D_{3d} . Запишите указанные классы в символике Браве. К какой категории относятся эти классы?
- 3) Расшифруйте символы Шёнфлиса D_6 и C_6 . Запишите указанные классы в символике Браве. К какой категории относятся эти классы?
- 4) Расшифруйте символы Шёнфлиса C_s , C_2 и C_4 . Запишите указанные классы в символике Браве. К какой сингонии относятся эти классы?
- 5) В каком классе симметрии не может быть кристаллов: D_{2d} , D_{3d} , D_{4d} ? Почему?

Занятие 15 (2–7)

Облик и габитус кристалла

На этом занятии мы попытаемся дать еще более детальное словесное описание кристаллического многогранника. Ведь даже описав класс симметрии и те простые формы, которые встречены в огранке, мы не сможем донести до читателя однозначно его характеристические особенности: насколько он неодинаков по разным координатным направлениям, какие формы «главствуют» в огранке и т. д. (см. рис. 47).

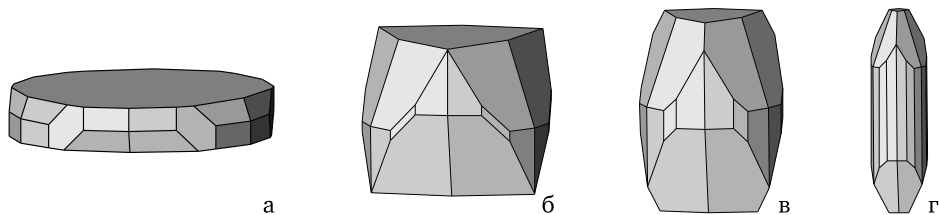


Рис. 47. Четыре кристалла имеют одинаковый набор простых форм и одинаковый набор элементов симметрии (класс D_{3d}), однако различная степень развития простых форм, участвующих в огранке, делает их совершенно не похожими друг на друга

Поэтому в минералогии и кристаллографии при описании внешнего вида кристаллов вводятся два новых термина: *облик* и *габитус*. Термин «облик» характеризует размеры кристалла в различных направлениях. Например, кристаллы алмаза, пирита, гранатов и других минералов кубической сингонии (одинаковые масштабы по всем трем координатным направлениям) имеют *изометричный* облик, т. е. одинаковые размеры во всех направлениях. Если кристалл не относится к высшей категории, но развит во всех направлениях одинаково, то говорят об *псевдоизометричном* облике (рис. 47 б).

Не изометричные в различных направлениях кристаллы могут быть *игольчатого, столбчатого* либо *удлиненного* облика (вытянутыми в вертикальном направлении — рис. 47 в–г). Примерами таких минералов являются силикаты турмалин (переменного химического состава со сложной формулой $(\text{Na,Ca})(\text{Li,Mg,Al})_3(\text{Al,Fe,Mn})_6[\text{BO}_3]_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}](\text{OH})_4$) и берилл $\text{Be}_3\text{Al}_2[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$. Если в вертикальном направлении кристалл развит слабее, то говорят о *таблитчатом, пластинчатом* либо *уплощенном* облике (рис. 47 а). Примерами являются кристаллы гематита Fe_2O_3 и флогопита $\text{KMg}_3[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{F,OH})_2$.

Для еще более детальной характеристики внешней формы кристаллов используется термин «габитус». Он отражает преобладание в их огранке тех или иных простых форм (например, призматический, бипирамидальный). При этом кристаллы минералов одного и того же облика (например, столбчатого) могут иметь различный габитус. Габитус кристаллов является важным диагностическим признаком минералов и часто указывает на условия их генезиса. Для описания габитуса кристалла необходимо, во-первых, правильно определить названия простых форм, участвующих в огранке кристалла. Во-вторых, необходимо оценить их морфологическую значимость (т.е. какую примерно долю общей поверхности кристалла занимают грани этой простой формы). В-третьих, необходимо записать название этого габитуса, перечислив простые формы в порядке убывания морфологической значимости.

Давайте потренируемся. Рассмотрим кристалл класса D_{2d} удлиненного облика, относящегося к тетрагональной сингонии. В его огранке могут принимать участие различные открытые (призмы, пинакоид) и закрытые (тетраэдр, бипирамида, скаленоэдр) простые формы. Их сочетания приводят к разнообразнейшим габитусам, шесть из которых представлены на рис. 48. Нанеся

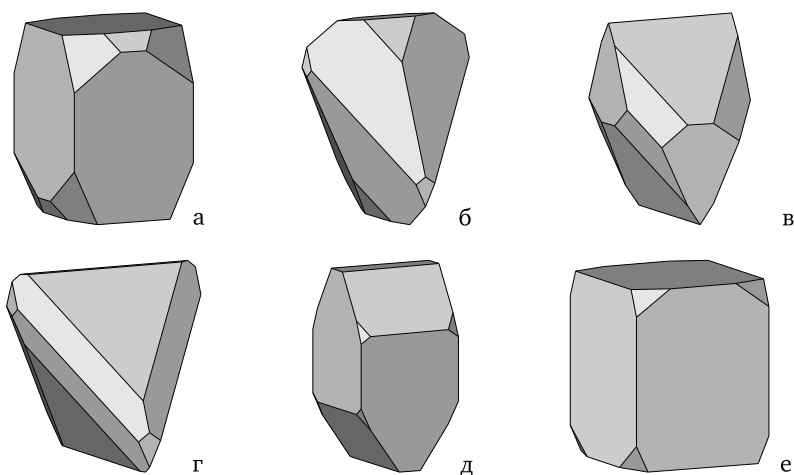


Рис. 48. Кристаллы класса D_{2d} удлиненного облика различного габитуса

на проекцию класса эти формы и определив их названия, получим следующие габитусные ряды (по уменьшению морфологической значимости простых форм):

а) габитус *призматически-пинакоидально-скаленоэдрически-тетраэдрический*;

б) габитус *скаленоэдрически-тетраэдрически-призматически-пинакоидальный*;

в) габитус *тетраэдрически-призматически-скаленоэдрический*;

г) габитус *тетраэдрически-скаленоэдрически-призматический*;

д) габитус *призматически-тетраэдрически-пинакоидально-скаленоэдрический*;

е) габитус *призматически-пинакоидально-скаленоэдрический*.

Обратим внимание на то, что во всех случаях облик — удлинённый.

Таким образом, можно сказать, что при полном описании кристалла совершенно необходимо давать описание его облика и габитуса — это позволит мысленно представить внешний вид образца, даже не имея перед глазами его изображения.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое облик кристалла? Перечислите известные вам облики.
- 2) Что такое габитус кристалла?
- 3) Какая характеристика (облик или габитус) является более подробной?
- 4) Могут ли кристаллы одного облика иметь различный габитус?

Упражнения

1) Подумайте, какие простые формы реальных кристаллов участвуют в их огранке (см. рисунок 2 цветной вклейки); дайте характеристику облика и габитуса.

2) Охарактеризуйте облик и габитус многогранников, приведенных на рисунке 22 (занятие 8).

3) Дополните описание кристалла оливина (занятие 8) характеристикой его облика и габитуса.

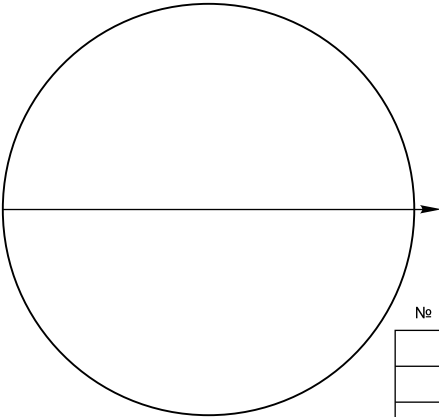
Занятие 16 (2–8)

Практическое занятие. Полное описание кристалла низшей или средней категории

Для выполнения практической работы нам понадобится: несколько цветных карандашей, ручка, линейка, трафарет, изготовленный на прошлой ступени обучения и бланк, приведенный на рисунке 49.

Для тестового задания опишем кристалл, приведенный на рисунке 50.

Напомним, что на первом этапе необходимо определить класс симметрии. Правильнее всего установить кристалл вертикально по особому направлению (в данном случае, по удлинению). Изучим это направление, посмотрев на кристалл сверху (рис. 50 в). Без труда находим поворотную ось третьего порядка L_3 и три одинаковые вертикальные плоскости $3P_v$, каждая из которых разрезает кристалл на две зеркально равные части. Наносим эти элементы симметрии на проекцию. Последовательные шаги описания кристалла приведены в таблице 10 и таблице Г цветной вклейки.



категория a, b, c	
сингония α, β, γ	
символ по Браве	
символ по Шенфлису	
класс по общей форме	

Характеристика простых форм

№	Кол-во граней	Откр./закр.	Частн./общ.	Название

облик _____
габитус _____

Рис. 49. Бланк для описания кристалла

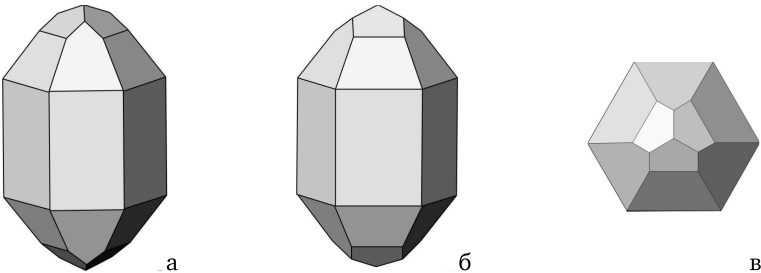
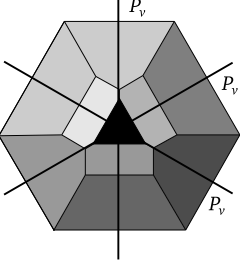
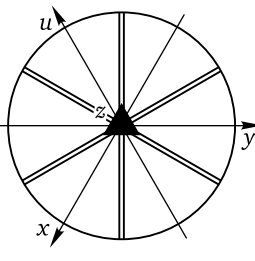
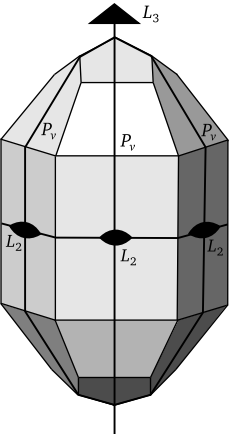
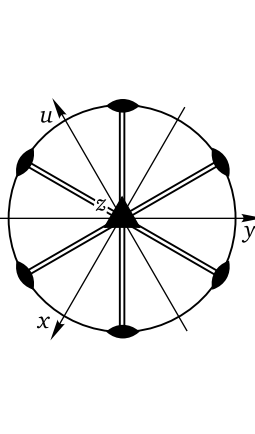


Рис. 50. Внешний вид контрольного кристалла для практической работы

Важно! Обратим внимание на то, как ориентирован кристалл относительно осей x , y и z . Считая плоскости координатными, мы направляем по координатным направлениям **нормали** к этим плоскостям. При этом на чертеже сами плоскости будут находиться **между** координатными осями. Если бы мы нарисовали плоскости, совпадающие с осями координат, то они не были бы координатными.

Обязательно изучим экваториальную плоскость. Помним, что на экваторе бывает много интересного! В нашем случае можно найти еще три оси второго порядка — L'_2 , L''_2 и L'''_2 , выходы которых совпадают с пересечением вертикальных плоскостей и горизонтальной плоскости, которая проходит через экватор. Такая плоскость на проекции будет показана двойной окружностью, а нормаль к ней проходит вертикально, следовательно, это P_z . Убедившись в отсутствии центра инверсии и других элементов симметрии, выписываем название класса по Браве (L_33L_24P) и Шёнфлису (D_{3h}). Итак, перед нами кри-

Таблица 10. Последовательные шаги по описанию контрольного кристалла.
Часть 1

Кристалл	На проекции изображено	Действия
		1) Определив категорию и сингонию, рисуем окружность, наносим на ней выходы координатных осей x, y, u, z. 2) Наносим графические значки оси L_3 и плоскостей P_v.
		3) Наносим графические значки осей $3L_2$ и плоскости P_z в виде двойной окружности. 4) Проверяем наличие центра. Для этого сам кристалл особо и не нужен: так как на чертеже нет сочетания «четная ось перпендикулярна плоскости», то центра нет.

сталл средней категории, гексагональной сингонии тригональной подсингонии.

Переходим ко второму этапу — построению на чертеже гномостереографических проекций граней всех простых форм и запись в бланк их характеристик. Напоминаем, что все грани верхней полусферы и экваториальной плоскости рисуются кружками, а нижней полусферы — крестиками с указанием номера простой формы. Внимательный исследователь обнаружит в изучаемом кристалле 24 грани, относящиеся к 5 различным простым формам. На первый взгляд все призматические грани равны друг другу, но так как нет элементов симметрии, переводящих соседние грани призмы друг в друга, то в огранке кристалла участвуют 2 различные по своим физическим свойствам тригональные призмы, в чем легко убедиться, нанеся их позиции на проекцию (см. таблицу Г цветной вклейки).

Шаг 1. Наносим на проекцию три грани призмы 1 и три грани призмы 2. Все грани лежат в экваториальной плоскости, следовательно, они будут обозначаться кружками на окружности. Не забываем поставить цифры. Характеристики простых форм выписываем в бланк. С правильно заполненным

бланком контрольного кристалла можно будет свериться в ответах к упражнениям.

Шаг 2. Наносим на проекцию грани двух различных бипирамид, располагающихся выше и ниже простой формы 1. Напоминаем, что, так как верхняя и нижняя грань отражаются друг в друга горизонтальной плоскостью, кружок будет находиться строго над крестиком. Важно! Если посмотреть на рисунок, то увидим, что грани этих форм представляют собой четырехугольник в виде трапеции и пятиугольник, тогда как грань тригональной бипирамиды представляет собой равнобедренный треугольник (см. таблицу 9). Это связано с тем, что в комбинационном многограннике грани различных простых форм взаимно «подрезают» друг друга. Поэтому название простой формы можно давать исключительно по ее положению на проекции относительно элементов симметрии класса и ни в коем случае по ее внешнему виду в кристалле!

Шаг 3. Наносим на проекцию грани формы 5 (бипирамида), располагающиеся выше и ниже призмы 2. Даем ей характеристику. Обнаруживаем, что в кристалле нет общей формы. Предположим, мы не помним ее название. Для определения класса по общей форме наносим карандашом точку в общем положении, размножаем ее на проекции и определяем название класса — ди-тригонально-бипирамидальный. Заполняем бланк, подписав название облика и габитуса кристалла.

Вот теперь можно считать, что кристалл описан полностью и практическая работа закончена.

Ступень № 3

Занятие 17 (3–1)

Классы симметрии высшей категории

На этом занятии, используя взаимодействие операций симметрии, мы выведем все возможные классы, относящиеся к высшей категории. Напомним, что кристаллы высшей категории характеризуются полной эквивалентностью координатных осей ($a = b = c$). Все углы между координатными осями прямые. Такая сингония называется кубической. Равенство координатных осей приводит к тому, что равнонаклонно к координатным направлениям возникает ось третьего порядка. Если размножить ее элементами симметрии, проходящими в координатных направлениях, то получим четыре наклонные оси третьего порядка, равноудаленные от осей x , y и z . На трафарете, который мы изготавливали на первой ступени обучения, эти позиции осей третьего порядка отмечены красными треугольниками.

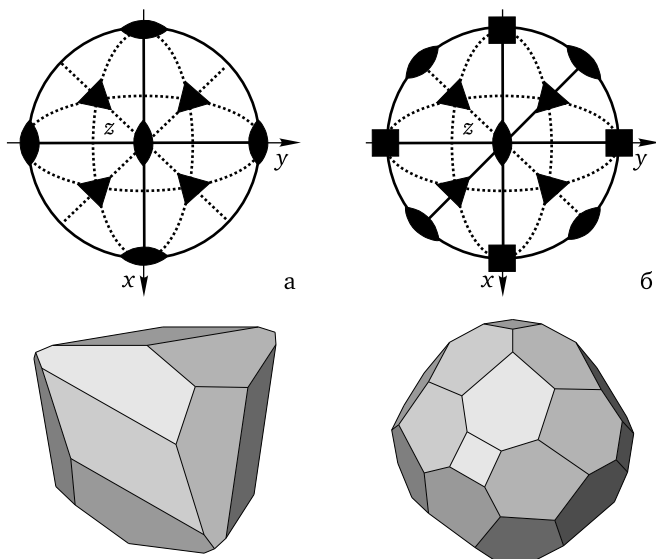


Рис. 51. Стереографическая проекция и типичный кристалл:
а) класса E ($3L_2 4L_3$), б) класса O ($3L_4 4L_3 6L_2$)

Таким образом, минимальный набор элементов симметрии, возможный в кубических кристаллах, представлен координатными осями второго поряд-

ка и наклонными третьего. Такой набор осей $3L_24L_3$ Шёнфлис обозначил буквой T (см. рис. 51а), так как он встречается в известном нам правильном многограннике — тетраэдре. Как нетрудно догадаться, осевой набор октаэдра $3L_44L_36L_2$ Шёнфлис обозначил буквой O (см. рис. 51б). Давайте выясним, какие еще наборы элементов симметрии могут встретиться в кубических кристаллах.

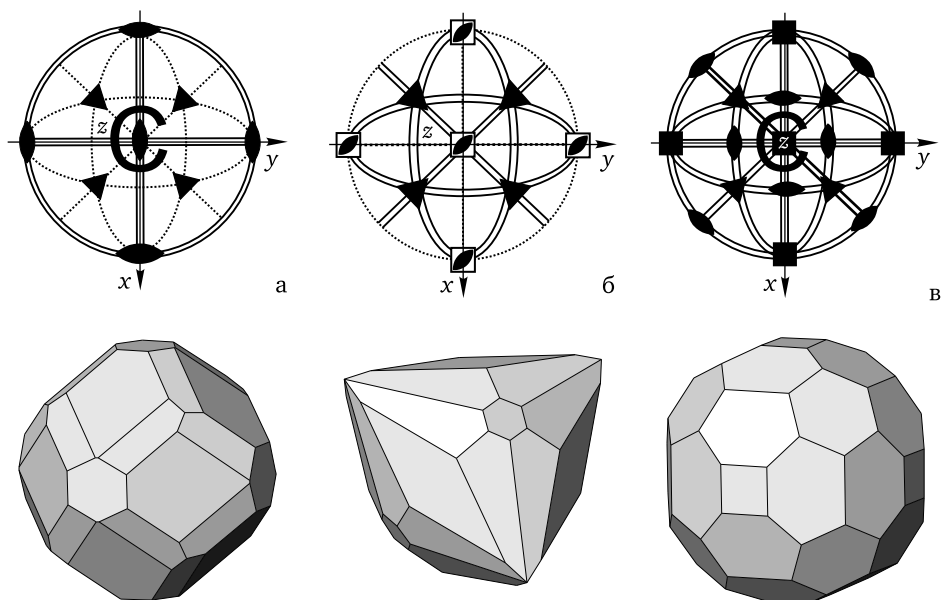


Рис. 52. Стереографическая проекция и типичный кристалл
а) класса T_h , б) класса T_d , в) класса O_h

Возьмем за основу класс T . Добавим к нему центр инверсии. По известной нам теореме взаимодействия (L_2-P-C) появляются три координатные плоскости с возникновением нового класса $3L_24L_33PC$. По Шёнфлису он будет называться T_h (рис. 52а). Отметим, что если ввести в качестве нового элемента симметрии координатную плоскость, то уже центр будет порожденным элементом симметрии, но конечный класс останется тем же — T_h . Иного результата можно достичь, введя плоскость не в координатном, а в диагональном направлении (рис. 52б). Координатные оси второго порядка и наклонные третьего немедленно размножат введенную плоскость. Появится целых шесть диагональных плоскостей. Но это еще не все. Если внимательно посмотреть на чертеж, то увидим, что плоскости (инверсионные оси второго порядка) пересекаются с обычными осями второго порядка под углом в 45° , следовательно, на месте осей второго порядка появятся инверсионные оси четвертого L_4 (см. рис. 31а). Получен новый класс T_d ($3L_44L_36P$). При добавлении любого отсутствующего элемента симметрии (плоскости, центра, оси второго порядка в диагональном положении) к этому классу, равно как и к классам T_h или O , получим самый высокосимметричный набор элементов симметрии

кубических кристаллов — класс O_h ($3L_44L_36L_23P_h6P_dC$), изображенный на рисунке 52 в.

В кубической сингонии кристаллизуются такие известные минералы, как поваренная соль (галит NaCl), алмаз C , сфалерит ZnS , галенит PbS , гранаты, шпинели, флюорит CaF_2 и многие другие.

В целом, если говорить о распространенности минералов различных сингоний в природе, то можно отметить следующее. На настоящий момент в природе известно более 4000 минералов. Среди них резко преобладают кристаллы низшей и средней категорий. Кристаллов триклинной сингонии больше, чем тригональных и гексагональных, а моноклиная сингония выходит в лидеры, намного опережая ромбическую по распространенности.

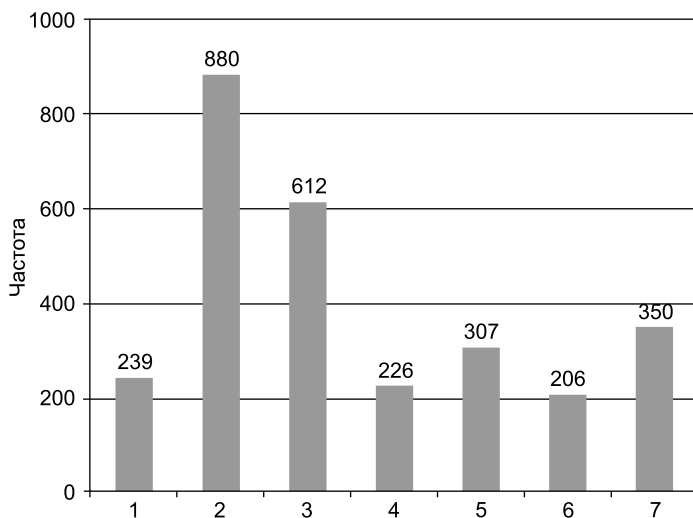


Рис. 53. Распространенность 2900 минералов по сингониям: 1 — триклинная; 2 — моноклиная, 3 — ромбическая, 4 — тригональная подсингония; 5 — тетрагональная; 6 — гексагональная подсингония, 7 — кубическая сингония [17]

Такая неравномерность связана с тем, что большая часть из минеральных видов встречается только в самой поверхностной оболочке Земли — земной коре, образуясь в результате реакций выветривания и изменения горных пород под действием воды, атмосферы и солнечного света. Поэтому они часто включают в свой состав молекулы воды H_2O , уголекислоты CO_2 , гидроксил-группу OH и другие атомные группировки, отличающиеся невысокой собственной симметрией, что приводит к понижению симметрии всего кристалла. В 2003 году В. С. Урусов и Л. Е. Терентьева проанализировали различные банки кристаллических структур минералов и привели гистограмму распространности 2900 минералов по сингониям, изображенную на рисунке 53. Как видно, на долю кристаллов низшей категории приходится более 61% всех минералов, средней категории — более 26%. Доля кристаллов высшей категории — только 12%. Однако отметим, что при изучении минералов глубин Земли доля высокосимметричных кристаллов будет расти.

Контрольные вопросы

- 1) Какой класс симметрии возникнет, если к операциям симметрии класса T добавить центр инверсии?
- 2) Какой класс симметрии возникнет, если к операциям симметрии класса O добавить центр инверсии?
- 3) Сколько всего кубических классов симметрии?
- 4) Какова доля кубических минералов среди всех изученных?
- 5) Назовите наиболее широко известные минералы, относящиеся к кубической сингонии.
- 6) В чем причины резкого преобладания среди минералов кристаллов низших и средних сингоний?

Занятие 18 (3–2) Простые формы кубических кристаллов

Уникальность набора элементов симметрии высшей категории (наличие четырех наклонных осей третьего порядка) приводит к тому, что все простые формы, которые существуют в кубических кристаллах, являются новыми и не встречались нам раньше в кристаллах низшей и средней категории. Более того, они все являются закрытыми формами.

Если взглянуть на изображение любого класса кубической сингонии (рис. 51–52), то можно выявить в каждом из них семь уникальных позиций, в которых находятся различные простые формы (рис. 54). Первая позиция перпендикулярна координатному направлению, в ней находится четная ось (L_2 , L_4 или L_4). Вторая позиция фиксирована осью третьего порядка во всех пяти кубических классах. Третья позиция равноудалена от координатных направлений, в ряде классов через нее проходят диагональные оси второго порядка. Позиция 4 находится между точкой 1 и точкой 3. Эта позиция является частной, хотя бы потому, что она параллельна вертикальной координатной оси L_z . Позиция 5, располагающаяся между точками 1 и 2, также частная, так как равноудалена от эквивалентных осей L_x и L_y . А позиция 6, располагающаяся между точками 2 и 3, равноудалена от эквивалентных осей L_x и L_y , следовательно, также частная. И только позиция 7 является точкой общего положения, в ней будет находиться простая форма, передающая классу свое название.

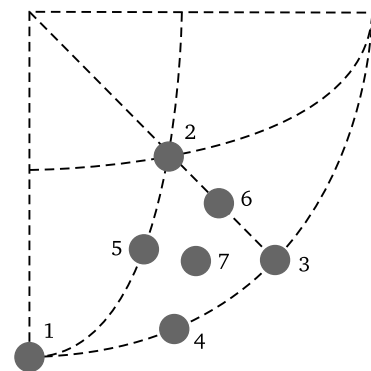


Рис. 54. Семь принципиально разных позиций для простых форм в кубических классах

Названия большинства производных простых форм кристаллов кубической сингонии строятся следующим образом: используя греческие слова из нашего словарика (таблица 4), мы пытаемся сказать одним словом следую-

шую фразу: «что за многоугольник → в каком количестве → на какой форме вырос». Давайте потренируемся. Расшифруем название «*тригон-тетра-гексаэдр*». Переводим: «треугольник → в количестве четырех штук → вырос на исходной грани гексаэдра». То есть перед нами должна появиться простая форма с гранями треугольной формы, при этом грань исходной формы — *гексаэдра* — учетверилась. Следовательно, число граней у этой формы будет равно $6 \times 4 = 24$.

Рассмотрим все пять классов.

1) **Класс *T*** (см. рис. 55). Позицию 1 занимает известный еще древним грекам правильный многогранник — куб, или *гексаэдр*. В позиции 2 (выход оси третьего порядка) находится также известный правильный многогранник — тетраэдр. А вот в диагональной позиции 3 находится неизвестный пока нам двенадцатигранник, грани которого представляют собой ромбы. Он имеет свое уникальное название — *ромбододекаэдр*. Примечательно то, что во всех классах кубической сингонии в позиции 1 будет находиться гексаэдр (отсюда и название сингонии — кубы есть в каждом классе!), а в позиции 3 — ромбододекаэдр.

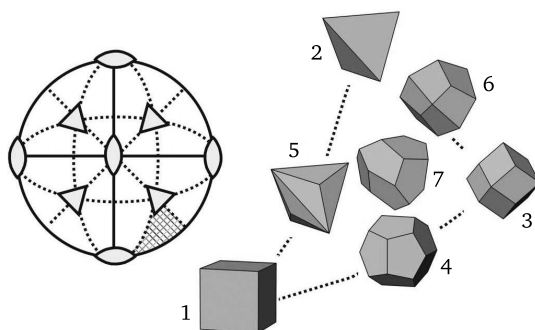


Рис. 55. Простые формы класса *T*: 1 — гексаэдр; 2 — тетраэдр; 3 — ромбододекаэдр; 4 — пентагон-дodeкаэдр; 5 — тригон-три-тетраэдр; 6 — тетрагон-три-тетраэдр; 7 — пентагон-три-тетраэдр (общая). Штриховкой отмечена независимая область на проекции

Как только нормаль к грани сдвинется из позиции 3 в сторону координатного направления 1, четырехугольная грань ромбододекаэдра превратится в пятиугольник. Получится новая форма — *пентагон-дodeкаэдр*. В 2008 г. студент кафедры кристаллографии геологического факультета МГУ А. С. Волков создал компьютерную анимацию, демонстрирующую взаимные переходы всех форм в пяти кубических классах: http://cryst.geol.msu.ru/literature/kurs/2008_01_volkov_demo.pps.

Между тетраэдром и ромбододекаэдром находится *тетрагон-три-тетраэдр* (четырёхугольник → в количестве трех штук → вырос на тетраэдре). Его четырехугольные грани образуются из исходной грани тетраэдра путем разрезания равностороннего треугольника на три равные части. Разрезав треугольник другим способом, можно получить другую форму *тригон-три-тетраэдр* (треугольник → в количестве трех штук → вырос на тетраэдре), эта

форма располагается в позиции 5. И наконец, общая форма 7 представляет собой двенадцатигранник, гранями которого являются неправильные пятиугольники. Форма носит название *пентагон-три-тетраэдр* (пятиугольник → в количестве трех штук → вырос на тетраэдре), а класс T носит название *пентагонтритедраического*. Обратим внимание, что форма общего положения имеет 12 граней. Это значит, что число 12 характеризует так называемую *размножающую способность* данного класса симметрии. Эту величину мы будем определять по числу граней формы общего положения, которая подвергается действию всех операций симметрии изучаемого класса. Теперь мы можем, зная эту величину, определить число граней у любой простой формы в классе. Действительно, точка 2 лежит на оси третьего порядка, следовательно, этой осью не размножается. Значит, число граней формы 2 будет равно $12(\text{размножающая способность класса})/3 = 4$. В точке 1 наблюдается выход оси второго порядка, т. е. число граней этой формы будет равно $12/2 = 6$. В частных позициях 3, 4, 5 и 6 элементов симметрии не наблюдается, следовательно, число граней всех этих простых форм будет равно $12/1 = 12$.

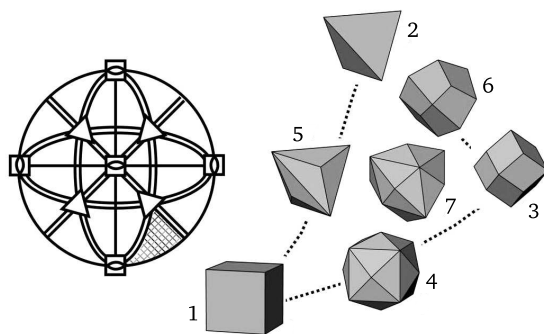


Рис. 56. Простые формы класса T_d : 1 — гексаэдр; 2 — тетраэдр; 3 — ромбододекаэдр; 4 — тетрагексаэдр; 5 — тригон-три-тетраэдр; 6 — тетрагон-три-тетраэдр; 7 — гекса-тетраэдр (общая). Штриховкой отмечена независимая область на проекции

2) **Класс T_d** (см. рис. 56). Нетрудно догадаться, что размножающая способность этого класса выше и равна 24 (вспомним, что этот класс мы вывели, добавив к исходному T -набору удваивающий элемент симметрии — диагональную плоскость). Тогда очевидно, что в позиции 1 будет находиться шестигранная форма, в позиции 2 — четырехгранная форма, а в позициях 5 и 6 — двенадцатигранные формы. Все эти формы уже нам знакомы — это гексаэдр, тетраэдр, тригонтритедраэдр и тетрагонтритедраэдр соответственно. А вот в позиции 4 в этом классе нет элементов симметрии, значит, там находится простая форма, имеющая $24/1 = 24$ грани. Перед нами тригон-тетра-гексаэдр (треугольники → в количестве четырех штук → выросли на грани гексаэдра). Но поскольку тетрагон-тетрагексаэдров и пентагон-тетрагексаэдров нам нигде не попадется, то приставку «тригон-» можно опустить и назвать форму просто *тетрагексаэдр*. Общая форма получается при разрезании исходной грани тетраэдра сразу на 6 треугольников. Перед нами тригон-гекса-тетраэдр

(треугольники → в количестве шести → выросли на грани тетраэдра). Опять-таки, поскольку других гексатетраэдров нет, то приставку тригон- опускают и форму называют просто *гексатетраэдр*, а класс — *гексатетраэдрическим*.

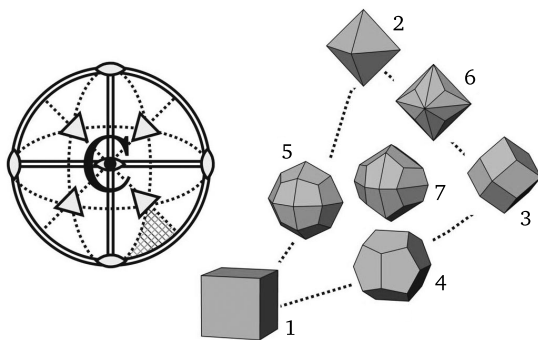


Рис. 57. Простые формы класса T_h : 1 — гексаэдр; 2 — октаэдр; 3 — ромбододекаэдр; 4 — пентагон-дodeкаэдр; 5 — тетрагон-три-октаэдр; 6 — тригон-три-октаэдр; 7 — ди-дodeкаэдр (общая). Штриховкой отмечена независимая область на проекции

3) **Класс T_h** (см. рис. 57). Обратим внимание, что размножающая способность этого класса также равна 24, но плоскости проходят не так, как в гексатетраэдрическом классе. Это значит, что в позиции 4 будет находиться двенадцатигранная форма (пентагондodeкаэдр), а в позициях 5 и 6 новые, не встреченные до сих пор в вышеописанных классах двадцатичетырехгранные формы. Да и в позиции 2 число граней простой формы будет равно $24/3=8$. Перед нами не тетраэдр, а октаэдр — очередное платоново тело! **Важно:** по Шёнфлису этот класс имеет буквенное обозначение T , так как имеет тетраэдрический осевой набор, но форма, приуроченная к оси третьего порядка, — октаэдр.

Поэтому формы 5 и 6 будут основаны на размножении граней уже не тетраэдра, а октаэдра. Первая носит название *тетрагон-три-октаэдр* (четырёхугольники → в количестве трех → выросли на исходной грани октаэдра). Вторая называется *тригон-три-октаэдр* (треугольники → в количестве трех → выросли на исходной грани октаэдра). Общая форма представляет собой удвоенный по всем координатным направлениям (там ведь проходят зеркальные плоскости) 24-гранник. Чтобы подчеркнуть его зеркальную симметрию, его назвали *дидодекаэдр*. Таким образом, класс T_h носит название *дидодекаэдрического*.

4) **Класс O** (см. рис. 58). Если проанализировать стереографическую проекцию класса O , то можно сказать, что в позициях 3–7 будут находиться различные 24-гранники, причем все они, кроме общей формы, нам уже знакомы. В позиции 2 находится октаэдр ($24/3=8$). Форма общего положения носит название *пентагон-три-октаэдр* (пятиугольники → в количестве трех → выросли на исходной грани октаэдра). Класс носит название *пентагонтри-октаэдрического*.

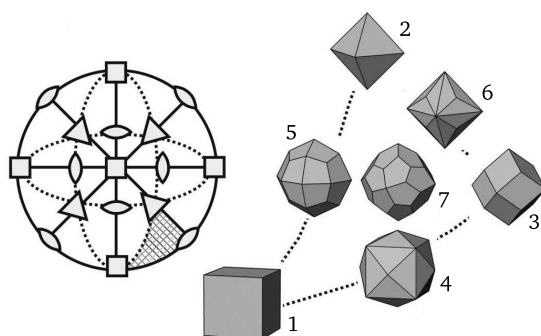


Рис. 58. Простые формы класса O : 1 — гексаэдр; 2 — октаэдр; 3 — ромбододекаэдр; 4 — тетра-гексаэдр; 5 — тетрагон-три-октаэдр; 6 — тригон-три-октаэдр; 7 — пентагон-три-октаэдр (общая). Штриховкой отмечена независимая область на проекции

5) **Класс O_h** (см. рис. 59). Самой высокой симметрией обладают кристаллы этого класса. Действительно, раз этот класс был получен на прошлом занятии путем добавления удваивающего элемента симметрии к классам T_d , T_h или O , обладающим размножающей способностью, равной 24, то простая форма общего положения этого класса будет представлена 48-гранником, причем все грани связаны между собой операциями симметрии! Такая простая форма носит название *гексаоктаэдра* (треугольники (не читается) → в количестве шести → выросли на исходной грани октаэдра), а класс называется *гексаоктаэдрическим*. Все другие формы нам уже знакомы.

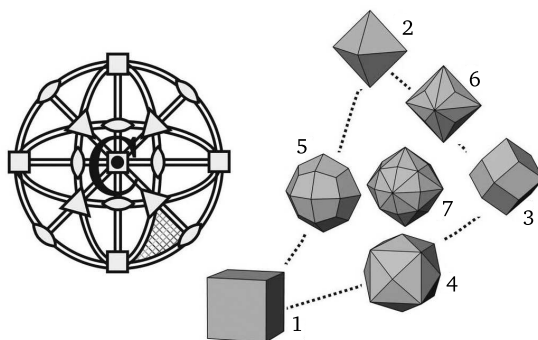


Рис. 59. Простые формы класса O_h : 1 — гексаэдр; 2 — октаэдр; 3 — ромбододекаэдр; 4 — тетра-гексаэдр; 5 — тетрагон-три-октаэдр; 6 — тригон-три-октаэдр; 7 — гексаоктаэдр (общая). Штриховкой отмечена независимая область на проекции

Итак, резюмируем все вышесказанное в виде таблицы 11. К 32 классам низшей и средней категории кубическая сингония добавила еще 15 простых форм. Таким образом, число уникальных простых форм (по названию) равно сорока семи. Еще раз подчеркнем, что никогда кубические формы не встретятся в другой сингонии, равно как любая из форм других сингоний не имеет шанса появиться в кубических кристаллах.

Таблица 11. Простые формы кубических кристаллов

№	Название	Внешний вид	Число граней	В каких классах встречается	Общая форма для класса
1	тетраэдр		4	T, T_d	—
2	гексаэдр		6	T, T_d, T_h, O, O_h	—
3	октаэдр		8	T_h, O, O_h	—
4	ромбододекаэдр		12	T, T_d, T_h, O, O_h	—
5	пентагонритетраэдр		12 (3×4)	T	T
6	пентагондодекаэдр		12	T, T_h	—
7	тригонритетраэдр		12 (3×4)	T, T_d	—
8	тетрагонритетраэдр		12 (3×4)	T, T_d	—
9	тригонтриоктаэдр		24 (3×8)	T_h, O, O_h	
10	тетрагонтриоктаэдр		24 (3×8)	T_h, O, O_h	
11	тетрагексаэдр		24 (4×6)	T_d, O, O_h	
12	пентагонтриоктаэдр		24 (3×8)	O	O
13	дидодекаэдр		24 (2×12)	T_h	T_h
14	гексатетраэдр		24 (6×4)	T_d	T_d
15	гексаоктаэдр		48 (6×8)	O_h	O_h

Контрольные вопросы

- 1) Какие простые формы встречаются во всех классах кубической сингонии?
- 2) Какие простые формы встречаются только в одном классе кубической сингонии?
- 3) Сколько всего различных простых форм встречаются в кубических кристаллах?

4) Какое максимально возможное число граней может принадлежать одной простой форме в кристаллическом многограннике?

5) Сколько различных по названию простых форм может быть найдено в любом кубическом классе симметрии? Почему?

Упражнения

1) К каким классам симметрии относится кристалл, огранка которого представлена комбинацией: а) куба и ромбододекаэдра, б) ромбододекаэдра и пентагондододекаэдра, в) пентагондододекаэдра и тетраэдра?

2) Определить симметрию кристалла, огранка которого представлена комбинацией: а) куба и октаэдра, б) октаэдра и пентагондододекаэдра, в) ромбододекаэдра и тетраэдра?

3) Чему равно минимальное число граней кубического кристалла, представляющего собой комбинацию: а) трех простых форм, б) двух простых форм? К каким классам симметрии относятся такие кристаллы?

4) К каким классам симметрии относится: а) 4-гранный, б) 8-гранный, в) 10-гранный, г) 14-гранный, д) 15-гранный кубический кристалл?

Занятие 19 (3–3)

Международная символика. Ее преимущества

Несмотря на то, что символика Шёнфлиса изящна, компактна и аккуратна, она все-таки не лишена ряда недостатков. Главный из них — отсутствие привязки к координатной системе. Например, символ C_2 не показывает нам, вдоль какой координатной оси направлена единственная ось второго порядка. Поэтому в настоящее время в кристаллографии используется так называемая международная символика, или символика Германа—Могена, которая лишена этого недостатка.

Международный символ класса, так же как и символ Шёнфлиса, достаточно компактен и предполагает знание теорем взаимодействия элементов симметрии. В отличие от символов Браве и Шёнфлиса он четко указывает на ориентацию кристалла относительно выбранных координатных осей. Международный символ состоит в общем случае из трех позиций, на которых регистрируются оси симметрии (поворотные или инверсионные).

Поворотные оси симметрии обозначают арабскими цифрами, соответствующими их порядку — 1, 2, 3, 4, 6. Инверсионные оси обозначаются также цифрой, но с черточкой над ней — $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$. Плоскость (инверсионная ось второго порядка) фиксируется направлением своей нормали и обозначается курсивной буквой m (от английского слова *mirror* — зеркало). Центр инверсии (инверсионная ось первого порядка) обозначается как $\bar{1}$ (читается «один с чертой»).

Если по выбранному направлению располагается и поворотная ось, и нормаль к плоскости, то их записывают в виде дроби: в числителе — ось, в знаменателе — нормаль к плоскости (например, $L_2PC = \frac{2}{m}$). Обратим внимание, что центр в записи отсутствует. Предполагается, что читатель понимает, что

если ось второго порядка перпендикулярна к плоскости, то центр неизменно возникнет (L_2-P-C), то есть центр заложен в записи в неявном, скрытом виде! Опускают в записи и другие элементы, в том случае, если они являются порожденными.

Таким образом, построение международного символа состоит из двух этапов: на первом записываются все элементы симметрии, которые фиксируются по трем особым направлениям, а на втором из записи удаляется избыточная информация о тех элементах, которые могут быть получены путем взаимодействия порождающих элементов, уже присутствующих в символе.

Важно также, что три направления, на которых фиксируются элементы симметрии, **различны** для кристаллов разных категорий.

Низшая категория характеризуется неэквивалентностью всех трех координатных направлений, поэтому международный символ кристаллов триклинной, моноклинной и ромбической сингонии в общем виде состоит из перечисления того, что мы видим по оси x (первая позиция), y (вторая позиция) и z (третья позиция). Давайте потренируемся: группа L_22P в различных установках будет иметь разные символы: $mm2 = 2mm = m2m$ (см. рис. 60).

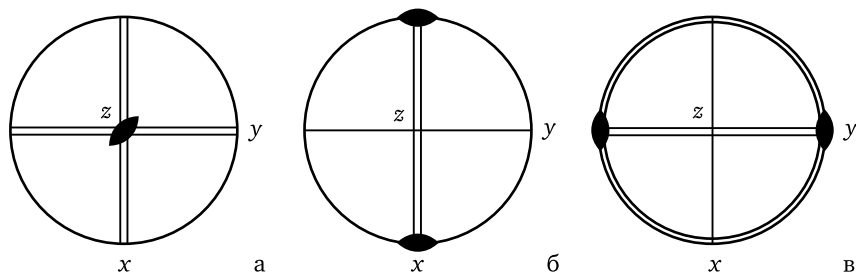


Рис. 60. Зависимость международного символа группы симметрии L_22P от ее ориентации относительно выбранных координатных осей: а) $mm2$, б) $2mm$, в) $m2m$ [15]

Если по какому-либо направлению нет элементов симметрии, то на этой позиции пишется 1 , что помогает понять ориентацию класса. (Например, символ $11\frac{2}{m}$ группы L_2PC соответствует рациональной установке моноклинного кристалла с углом $\gamma \neq 90^\circ$, а символ $1\frac{2}{m}1$ — минералогической установке с углом $\beta \neq 90^\circ$). На этом примере хорошо видно, что международный символ показывает ориентацию кристалла относительно координатного репера, в то время как ни символ Браве этого класса (L_2PC), ни символ Шёнфлиса (C_{2h}) не отражают его установки.

В классах *триклинной сингонии* особых направлений нет. Поэтому в символе заполняется лишь одна позиция, на которой регистрируется ось первого порядка: поворотная — $L_1 = 1$ или инверсионная — $C = \bar{1}$.

Некоторым исключением из логики построения символа служит класс $3L_2$. В международном символе 222 этого класса записываются все три оси второго порядка, несмотря на то что каждая из трех осей является порожденной

двумя остальными. Написание в символе всех осей связано с тем, что они неэквивалентны между собой и нельзя сказать, какая из осей является порожденной, а какая порождающей.

Давайте напишем международный символ ромбобипирамидального класса симметрии $3L_23PC$ (рис. 17). По оси x находим ось второго порядка и нормаль к плоскости. Первая позиция выглядит так: $\frac{2}{m}$. Обратим внимание, что этот набор включает в себя порожденный центр инверсии, таким образом, записывать $\bar{1}$ в символе нет необходимости. По оси y найдем ось второго порядка и нормаль к плоскости (другие). Итого на второй позиции пишем: $\frac{2}{m}$. И, наконец, по оси z находим свой набор $\frac{2}{m}$. Таким образом, полная запись международного символа выглядит так: $\frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$. Кстати, центр возник трижды! Теперь сократим лишние порожденные элементы. Оказывается, мы имеем право не записывать обозначения осей второго порядка, так как сокращенная запись класса mmm содержит их в скрытом виде! Действительно, две любые плоскости породят соответствующую ось второго порядка по линии их пересечения.

Перейдем к средней категории. В международном символе групп симметрии средней категории — тетрагональной и гексагональной сингоний — на первой позиции символа регистрируется особое направление, представленное обязательно присутствующей осью высшего порядка, совмещаемой всегда с координатной осью z . На второй позиции фиксируются направления, совмещаемые с эквивалентными координатными осями $x = y$ ($= u$ в гексагональной сингонии). На последней позиции (диагональной в тетрагональной сингонии или апофемальной в гексагональной сингонии) располагаются особые направления, расположенные по отношению к координатным направлениям под углом $\alpha/2$ (где α — элементарный угол поворота главной оси). Элементы симметрии позиции 3 являются результатом взаимодействия элементов симметрии позиций 1 и 2, но включаются в символ, поскольку являются неэквивалентными по отношению к порождающим элементам.

Для тренировки напишем международный символ дитригонально-бипирамидального класса симметрии L_33L_24P (рис. 35 в). По главной оси z находим ось третьего порядка и нормаль к плоскости. Вспомнив, что это не что иное, как инверсионная ось шестого порядка $L_6 = \Phi_3 = L_3P_\perp$, пишем: $\bar{6}$. По координатным направлениям (если сориентировать элементы симметрии правильно) располагаются нормали к плоскостям, пишем: m . В такой установке по апофемальным направлениям пойдут оси второго порядка. Окончательная запись класса: $\bar{6}m2$. Отметим, что в международных обозначениях классов гексагональной сингонии по традиции для координатных горизонтальных осей предпочтение отдается не осям второго порядка, а нормальям к плоскостям симметрии (m); поэтому стандартной установкой этого класса будет $\bar{6}m2$, а не $\bar{6}2m$.

Перейдем к высшей категории. В классах кубической сингонии все эквивалентные между собой координатные направления ($x = y = z$) регистрируются на первой позиции символа. На второй позиции записывается циф-

ра «3», символизирующая обязательную для всех групп кубической системы четверку осей третьего порядка — $4L_3$. На третьей позиции регистрируются диагональные особые направления, т.е. направления, проходящие по биссектрисам углов между координатными осями. Например: $3L_44L_36L_2 = 432$ (рис. 51б), $3L_44L_36L_23P_h6P_dC = m\bar{3}m$ (рис. 52в). Обратим внимание на последнюю краткую запись элементов симметрии класса O_h . Куда делись все координатные и диагональные оси четвертого и второго порядка? Оказывается, они легко найдутся, если осуществить взаимодействие всех плоскостей m и центра инверсии между собой. Центр инверсии принято записывать на второй позиции. Действительно, раз $L_3 = L_3C$, то приведенная запись содержит информацию о центре. Вышесказанные правила построения символа удобно систематизировать в виде таблицы 12.

Таблица 12. Схема построения международных символов в различных категориях

Категория	Позиция символа		
	I	II	III
	Особые направления		
Низшая ($a \neq b \neq c$)	x	y	z
Средняя ($a = b \neq c$)	z	$x = y (= u)$	$\alpha/2$ -диагональное (или апофемальное)
Вышая ($a = b = c$)	$x = y = z$	3	$\alpha/2$

Контрольные вопросы

- 1) Каковы преимущества международной символики перед символикой Шёнфлиса и Браве?
- 2) Какие направления фиксируются на первом, втором и третьем месте в различных категориях?
- 3) Почему в ромбобипирамидальном классе опускают запись осей второго порядка?
- 4) Какие элементы симметрии принято фиксировать на второй позиции в гексагональных классах?
- 5) Каким образом в международном символе кубических классов фиксируется наличие центра инверсии?

Упражнения

- 1) Записать в учебной символике Браве и Шёнфлиса классы симметрии $\bar{4}3m$ и $\bar{4}2m$. К каким сингониям они относятся? Назвать форму общего положения.
- 2) Расшифровать символы Шёнфлиса C_{2h} и D_{2h} и записать указанные классы симметрии в международной символике и символике Браве. Назвать форму общего положения. К какой категории относятся эти классы?
- 3) Записать в учебной символике Браве и Шёнфлиса классы симметрии 32 и 23 . К каким сингониям они относятся? Назвать форму общего положения.

4) Расшифровать символы Шёнфлиса D_{3h} и D_{3d} и записать указанные классы симметрии в международной символике и символике Браве. К какой категории относятся эти классы? Назвать форму общего положения.

5) Записать в учебной символике Браве и Шёнфлиса классы симметрии 222 и 422. К каким сингониям они относятся? Назвать форму общего положения.

6) Расшифровать символы Шёнфлиса C_{4h} и D_{4h} и записать указанные классы симметрии в международной символике и символике Браве. К каким категориям относятся эти классы? Назвать форму общего положения.

7) Записать в учебной символике Браве и Шёнфлиса классы симметрии $m\bar{3}m$ и $\bar{3}m$. К каким категориям они относятся? Назвать форму общего положения.

Занятие 20 (3–4)

Икосаэдрические группы. Объекты икосаэдрической симметрии

Познакомившись с простыми формами кубических кристаллов, мы обнаружили в таких классах симметрии три (тетраэдр, гексаэдр и октаэдр) из пяти возможных правильных многогранников. В «изгой» попали правильный пентагон-додекаэдр и икосаэдр, что связано с наличием в их классах симметрии осей пятого порядка, которые до недавних пор считались запрещенными в объектах с дальним порядком. Однако недавнее открытие *квазикристаллов*, допускающих существование осей пятого порядка, заставило кристаллографов пристальнее присмотреться к их симметрии.

Читателю на третьей ступени обучения должно быть уже абсолютно очевидно, что элементы симметрии объектов располагаются закономерно по отношению друг к другу. И если студенты-геохимики, перемещающиеся по поверхности земного шара (рис. 27), могут не задумываться о величинах дуг перемещения A , B и C , то для наличия осей вращения (поворотных или инверсионных) с целым n на сферический треугольник 1–2–3, символизирующий поездку Москва — Симферополь — Миасс, накладываются определенные дополнительные условия существования. Как было доказано Эйлером, *угловые расстояния дуг A , B и C должны быть вдвое больше элементарного угла поворота осей, осуществляющих эти повороты*. Если мы хотим, чтобы перемещение $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ по поверхности сферы осуществлялось в результате последовательного вращения вокруг осей целочисленного порядка, то угловые расстояния дуг должны определяться порядком возможных осей. Продемонстрируем это требование, сильно ограничивающее число возможных сферических треугольников, на рисунке 6 цветной вклейки.

Исходная точка 1 в результате поворота вокруг вертикальной оси L_4 перемещается в точку 2, угол поворота 1–О–2 равен 90° . Поворот вокруг экваториальной оси L_2 переместит точку из позиции 2 в позицию 3. Конечное вращение $3 \rightarrow 1$ осуществляет еще одна ось второго порядка. Сферический треугольник, содержащий в вершинах эти оси, выделен на рисунке штриховкой.

Удивительно, но сумма его внутренних углов равна 225° ($45^\circ + 90^\circ + 90^\circ$)! В школе учили про 180° ...

Здесь необходимо осознавать, что тригонометрия на сфере отличается от тригонометрии на плоскости. В любом плоском треугольнике сумма внутренних углов равна 180° , а в сферическом — всегда больше 180° и меньше 540° .

Таблица 13. Допустимые сочетания осей целочисленных порядков

Сочетание порядков осей	Сумма внутренних углов треугольника, в вершинах которого располагаются эти оси	Есть ли такие классы? Пример.
$L_2L_2L_2$	$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ > 180^\circ$	Есть, кристаллографичны. D_2
$L_3L_2L_2$	$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ > 180^\circ$	Есть, кристаллографичны. D_3
$L_4L_2L_2$	$45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ > 180^\circ$	Есть, кристаллографичны. D_4
$L_6L_2L_2$	$30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ > 180^\circ$	Есть, кристаллографичны. D_6
$L_5L_2L_2$	$36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ > 180^\circ$	Есть, «некристаллографичны». Название — на занятии 21
L_7 (и более) L_2L_2	любой малый угол + $+90^\circ + 90^\circ > 180^\circ$	Есть, «некристаллографичны». Название — на занятии 21
$L_3L_3L_2$	$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ > 180^\circ$	T
$L_4L_3L_2$	$45^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 195^\circ > 180^\circ$	O
$L_5L_3L_2$	$36^\circ + 30^\circ + 90^\circ = 186^\circ > 180^\circ$	Есть, «некристаллографичны». Название см. в табл. 14

Исходя из этих ограничений, проанализируем все допустимые сочетания трех осей симметрии с $n > 1$, приводящих к появлению на поверхности «правильных» сферических треугольников (ось первого порядка как-то не особо интересна). Разрешенные варианты приведены в таблице 13.

Первая строка соответствует классам низшей категории, три последующие — тригональным, тетрагональным и гексагональным кристаллам. Про два следующих варианта с главной осью пятого порядка и любого порядка больше шести мы поговорим на следующем занятии. Очевидно, что кристаллов с такой симметрией не бывает. Два варианта ниже отвечают тетраэдрическому и октаэдрическому осевому набору и кубическим классам симметрии. Мы их тоже уже знаем. Вариант $L_6-L_3-L_2$ дает сумму углов, равную 180° , и соответствует плоскому многоугольнику. А вот вариант $L_5-L_3-L_2$ разрешает существование многогранников, причем высокосимметричных! Давайте попробуем разобраться в этом сочетании осей. Для этого возьмем за основу известный нам класс T .

Введем в строго определенном месте (рис. 61 а) еще одну ось третьего порядка. Размножим ее осью L_{2z} , получим еще одну ось L_3 (рис. 61 б). Но если

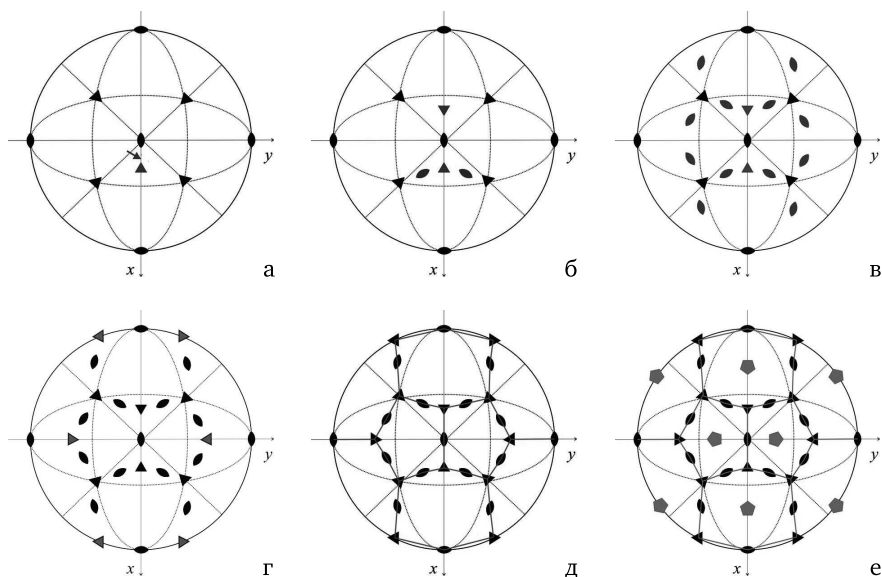


Рис. 61. Последовательность вывода группы Y

размножить операций поворота вокруг введенной L_3 исходную L_{2z} , то обнаружим, что размноженные оси второго порядка равноудалены от исходной L_3 , содержащейся в тетраэдрическом осевом наборе, и нововведенной (рис. 61 б). Теперь мы можем размножить с помощью новых и старых L_3 все присутствующие оси L_2 ; как результат получится двенадцать новых осей второго порядка (рис. 61 в). Ничто нам не мешает всеми пятнадцатью осями второго порядка размножить оси L_3 (рис. 61 г). Обратим внимание, что на рисунке изображено двенадцать значков L_3 , но некоторые оси проецируются на экватор, где рисуются оба выхода. Если проанализировать чертеж, то станет понятно, что осей третьего порядка стало 10. А теперь взглянем на рисунок 61 д. Удивительно, но сфера проекций разделилась на 12 секторов, оконтуренных чередующимися осями L_3 и L_2 . Если соединить выходы осей L_3 прямыми отрезками (ребрами), то мы получим правильный пентагон-додекаэдр! В центре сектора автоматически возникают оси L_5 в количестве шести. Итого мы получили новую группу $Y: 6L_5 10L_3 15L_2$. Если подсчитать размножающую способность этого класса, то получится цифра 60 (32 класса симметрии кристаллических многогранников начали нам потихоньку завидовать).

Эту группу часто рисуют, выбирая направление экваториальной плоскости перпендикулярно не L_2 , а L_3 или L_5 (см. рис. 62). Красиво во всех вариантах, не так ли?

Нельзя ли повысить симметрию этой группы? Конечно, можно, но только одним способом — введением центра. Введенный центр провзаимодействует по нашему любимому закону (L_2-P-C) с пятнадцатью L_2 с появлением

пятнадцати плоскостей, перпендикулярных осям второго порядка. Получится новый класс Y_h , обладающий немыслимой для кристаллов размножающей способностью $60 \times 2 = 120$.

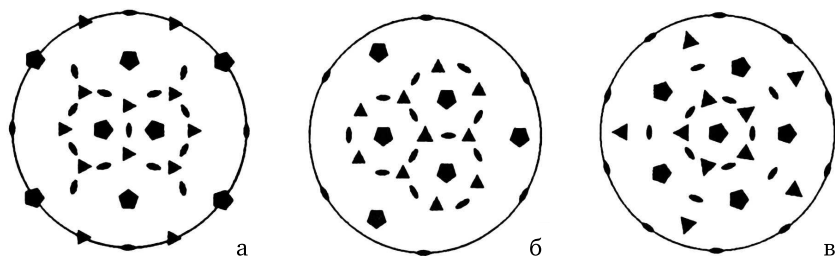


Рис. 62. Различные ориентировки группы икосаэдрической симметрии Y

Введение всех остальных элементов симметрии приведет к катастрофе — элементы симметрии начнут лавинообразно размножать друг друга. Как результат получится нечто, с чем мы познакомимся на следующем занятии.

А что с простыми формами? Очевидно, что такой уникальный набор элементов симметрии обеспечит существование новых, неизвестных нам до сих пор простых форм. Действительно, это так. Взглянем на рисунок 63. Видно,

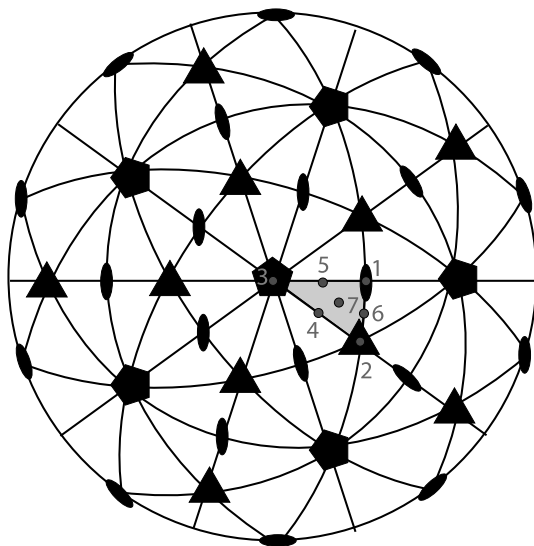


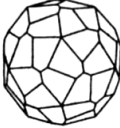
Рис. 63. Семь принципиально различных позиций для простых форм в икосаэдрических классах Y и Y_h : 1 — позиция на оси второго порядка; 2 — позиция на оси третьего порядка; 3 — позиция на оси пятого порядка; 4, 5, 6 — частные позиции, потому что они равноудалены от эквивалентных осей; 7 — позиция общего положения

что независимый сферический треугольник околнурен осями L_2 , L_3 и L_5 , следовательно, число простых форм в каждом классе будет равно 7. Но новых

форм будет не 14, а 8. Это связано с тем, что все частные позиции 1–6 в классах Y и Y_h будут занимать одинаковые (по названию) простые формы и только формы общего положения будут различаться. Действительно, в классе Y общая форма будет представлена 60-гранником, а в классе Y_h — 120-гранником.

Названия, внешний вид и характеристики икосаэдрических форм приведены в таблице 14.

Таблица 14. Простые формы икосаэдрических классов симметрии

№	Число граней	Употребляемое в литературе название	Учебное название	Изображение
1	30	ромбический триаконтаэдр	триаконтаэдр	
2	20	икосаэдр	икосаэдр	
3	12	пентагондодекаэдр	пентагондодекаэдр (правильный)	
4	60	триаксис-икосаэдр	тетрагон-три-икосаэдр	
5	60	пирамидальный додекаэдр	тригон-пента-додекаэдр	
6	60	пирамидальный икосаэдр	тригон-три-икосаэдр	
7 (Y)	60	пентагональный пентагон-изоэдр	пентагон-пента-додекаэдр	
7 (Y_h)	120	гексаксис-икосаэдр	тригон-дека-додекаэдр	

Теперь зададим себе вопрос: а насколько эта тема интересна человеку, изучающему кристаллы? Оказывается, интересна! Во-первых, безусловно, этот интерес обусловлен квазикристаллами. Официально открытые в 80-е годы XX века, квазикристаллы произвели настоящую революцию в теории симметрии высокоорганизованной неживой материи (в настоящее время известны сотни видов квазикристаллов, имеющих точечную симметрию икосаэдра, а также 10-, 8- и 12-угольников). Сейчас ученые рассматривают различные возможности их практического применения. Перспективным является направление увеличения механической прочности сплавов, содержащих квазикристаллы, — ведь они абсолютно изотропны к механическим воздействиям (проявляют одинаковые упругие свойства во всех направлениях).

Во-вторых, икосаэдрическая симметрия присутствует в нанотрубках (углеродных цилиндрах толщиной в один атом) и фуллеренах (стабильных каркасных молекулах углерода, состоящих из 60 и более атомов).

В-третьих, икосаэдрическая симметрия присутствует внутри кристаллических структур, особенно среди соединений бора, который, в силу своих свойств, стремится окружить себя пятью ближайшими соседями.

В-четвертых, многие представители живой природы, например, вирусы, в силу многих причин также подчиняются икосаэдрической симметрии.

Ну и напоследок. Все видели на экранах футбольный мяч. Тысячи людей видят его «в натуре», на стадионе. Все знают, что покрышки мяча состоят из белых и черных фигурок (конечно, если это простой мяч, а не *джамбулани*). Но, как ни странно, лишь немногие могут с уверенностью сказать, из каких именно многоугольников он сделан. Даже футболисты колеблются, вспоминая, из пяти- или шестиугольников он состоит. Для людей, изучающих кристаллографию, все предельно ясно. Это геометрический аналог фуллерена C_{60} , являющийся комбинационным 32-гранником с гранями икосаэдра и додекаэдра (рис. 64).



Рис. 64. Футбольный мяч — комбинация икосаэдра и додекаэдра

Чтобы оценить многообразие объектов икосаэдрической симметрии, см. также с. 16 цветной вклейки.

Контрольные вопросы

- 1) Какие простые формы являются уникальными для каждого класса икосаэдрической симметрии?
- 2) Существуют ли простые формы, которые можно встретить и в икосаэдрических, и в кубических классах?
- 3) Как называется простая форма класса Y , нормаль к которой совпадает с выходом оси второго порядка (третьего, пятого)?
- 4) Какое максимально возможное число граней может принадлежать к одной простой форме в икосаэдрическом многограннике?
- 5) Сколько различных по названию простых форм может быть найдено в любом икосаэдрическом классе симметрии? Почему?
- 6) В чем различия кубического и икосаэдрического пентагондодекаэдра? Можно ли считать их одной простой формой?
- 7) Приведите примеры объектов икосаэдрической симметрии.

Упражнения

- 1) Чему равно минимальное число граней у квазикристалла, огранка которого представляет собой комбинацию: а) трех простых форм, б) двух простых форм?
- 2) Чему равно максимальное число граней у квазикристалла, огранка которого представляет собой комбинацию: а) трех простых форм, б) двух простых форм, в) одной простой формы?
- 3) Назовите простые формы квазикристаллов: а) 32-гранного, б) 42-гранного, в) 50-гранного.

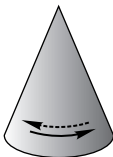
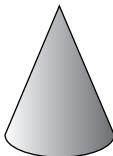
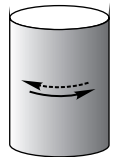
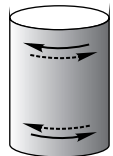
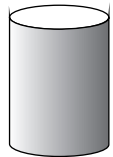
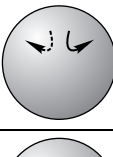
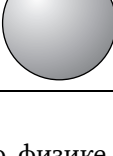
Занятие 21 (3–5)

Предельные группы симметрии — группы физических свойств кристаллов

Обратим внимание, что в таблице 13 присутствуют еще два не рассмотренных до сих пор случая — $L_5-L_2-L_2$ и L_7 (и более)– L_2-L_2 . Такие объекты, содержащие одну «некристаллографическую» ось, часто встречаются нам среди объектов живой природы (рис. 4 цветной вклейки). Такая подмеченная особенность живых организмов привела многих ученых к мнению, что они тем самым защищают себя от перехода в «мертвое», кристаллическое состояние, протестуют против «кристаллического оцепенения».

А какой же максимальный порядок может быть у вертикально ориентированной оси для сферического треугольника L_7 (и более)– L_2-L_2 ? Ответ прост — любой. Представим себе, что нам надо разделить арбуз поровну на 30 человек. Для простоты сначала разрежем его по экватору, а потом северное и южное полушарие поделим на 15 равных долек. С увеличением числа желающих полакомиться порядок оси будет все время возрастать (а толщина дольки уменьшаться). В конце концов, мы придем к одной из так называемых *предельных групп симметрии*, в которых существует хотя бы одна бесконечная ось симметрии.

Таблица 15. Пределные группы симметрии Кюри

№	Символ группы	Энантио-морфизм	Полярность	Геометрический образ	Название
1	∞	Да	Да		группа вращающегося конуса
2	∞m	Нет	Да		группа покоящегося конуса
3	∞ / m	Да	Нет		группа вращающегося цилиндра
4	$\infty 2$	Да	Нет		группа скрученного цилиндра
5	$\infty / m m m$	Нет	Нет		группа покоящегося цилиндра
6	∞ / ∞	Да	Нет		группа вращающегося шара
7	$\infty / \infty m$	Нет	Нет		группа покоящегося шара

Великий ученый, нобелевский лауреат по физике 1903 года Пьер Кюри показал, что существует всего 7 таких групп, каждая из которых наглядно изображается определенной геометрической фигурой, имеющей соответствующий набор элементов симметрии (таблица 15).

1. Группа ∞ содержит одну поворотную ось симметрии бесконечного порядка. Ее геометрический образ — *вращающийся конус*. Так как верхуш-

ка конуса и его основание различаются, то группа будет *полярной*. Это означает, что вдоль главного направления северный и южный полюс различаются по своим характеристикам. Группа также *энантиоморфна* (есть правые и левые разновидности), потому что конус может вращаться как вправо, так и влево. Она является конечным членом эволюционного ряда $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4 \rightarrow L_5 \rightarrow L_6 \rightarrow L_7 \rightarrow \dots \rightarrow L_\infty$, содержащего как известные нам классы низшей и средней сингонии, так и классы, запрещенные в классической теории симметрии, имеющей в качестве объектов только кристаллы. Но ведь никто не мешает нам изготовить на станке, к примеру, додекагональную пирамиду?

2. Что же произойдет, если мы остановим вращение конуса? Очевидно, останется полярность, но пропадет «правизна — левизна». При этом появляются бесконечное число вертикальных плоскостей, разрезающих конус на две равные половинки. Эта группа будет иметь симметрию *неподвижного конуса* и символ ∞t (набор элементов — ось симметрии бесконечного порядка и бесконечное число вертикальных плоскостей симметрии). Очевидно, что эта группа есть конечный продукт эволюции групп C_{nv} .

3. Давайте к группе ∞ добавим горизонтальную экваториальную плоскость. Понятно, что при этом пропадает полярность севера и юга, но сохраняется возможность вращения. Геометрический образ группы — *вращающийся цилиндр*, а символ ∞ / t — ось бесконечного порядка, поперечная плоскость симметрии. Центр симметрии, кстати, тоже будет, так как бесконечная ось содержит в себе ось второго порядка, и, следовательно, наш любимый закон ($L_2 - P - C$) снова работает. Группа является конечным продуктом эволюции серии групп C_{nh} .

4. Конечным продуктом эволюции осевых групп D_n является группа $\infty 2$ (ось симметрии бесконечного порядка и бесконечное число экваториальных осей второго порядка). Геометрический образ группы — *скрученный цилиндр* (концы закручены в разные стороны). Не очень, правда, понятно, из какого материала можно изготовить такой предмет, ведь даже резиновый цилиндр при скручивании рано или поздно порвется на экваторе. Но тем не менее такая группа есть, и в ней есть правые и левые разновидности.

5. Если остановить это безобразное (с точки зрения любого привычного материала) скручивание и перейти к *группе покоящегося цилиндра*, то сразу появятся плоскости — одна экваториальная и много-много вертикальных. Символ группы ∞ / tmm (одна ось бесконечного порядка, одна горизонтальная и бесконечное множество вертикальных плоскостей симметрии, бесконечное число осей второго порядка и, конечно, центр инверсии).

6. До сих пор мы рассматривали предельные группы, получаемые эволюцией кристаллографических (и не совсем) групп с выделенным вертикальным направлением. Пора бы обратиться к кубическим классам симметрии... А что будет, если мы введем новую ось, к примеру, второго порядка в группу T не в строго определенном месте (таких мест всего два — один вариант приводит к группе O , а второй — к группе Y), а в произвольном? Произойдет практически симметрическая катастрофа: новые и старые элементы симметрии начнут лавинообразно размножать друг друга, процесс пойдет неуправляемо

(похоже на атомную бомбу, не так ли?) и в итоге получим группу с символом, приводящим в ужас даже математиков — ∞/∞ . На самом деле этот символ обозначает всего лишь бесконечное множество осей бесконечного порядка. Геометрический образ — шар, но *вращающийся* влево или вправо (группа энантиоморфна!).

7) А что будет, если такой шар остановить? Ответ известен! Сразу появятся плоскости, их тоже будет бесчисленное множество. А центр? Безусловно, он тоже появится, причем бесчисленное число раз. Геометрический образ — *покоящийся шар*. Попробуем написать символ группы: $\infty/\infty m$. Центр «спрятан» в символе бесчисленное число раз.

Теперь зададим себе вопрос: а зачем все это, может, это неинтересно для кристаллографии? Оказывается, еще как интересно! Дело в том, что эти группы описывают симметрию всех возможных физических свойств кристаллов: механических, электрических, магнитных и т. д. Таким образом, предельные группы симметрии исключительно важны для физической кристаллографии. С примерами разнообразных физических свойств кристаллов, описываемых конкретными предельными группами, можно ознакомиться по наглядным пособиям на цветной вклейке.

Важно то, что симметрия любого физического свойства кристаллов включает в себя все элементы симметрии точечной группы кристалла, наблюдаемые визуально (физические свойства кристалла равны по симметрии или более симметричны, чем его огранка). Этот постулат носит название *принципа Неймана*.

Контрольные вопросы

- 1) Сколько всего предельных групп? Сколько групп с симметрией C_{nv} ?
- 2) Почему живые организмы предпочитают оси некристаллографических порядков?
- 3) Какие предельные группы имеют правые и левые разновидности?
- 4) Сформулируйте принцип Неймана.
- 5) Сколько осей симметрии у шара? Какого они порядка?
- 6) Сколько осей симметрии у покоящегося конуса? Есть ли у него плоско-сти? Если да, то сколько их?
- 7) Есть ли центр у группы $\infty 2$, у группы ∞ /mmm ?

Занятие 22 (3–6)

Симметрия и форма реальных кристаллов

Небезызвестный уже нам Пьер Кюри на основе многочисленных наблюдений сформулировал очень важный постулат — *принцип суперпозиции*, который гласит, что в результате наложения нескольких явлений различной природы, каждое из которых обладает своей собственной симметрией, в одной и той же системе сохраняются лишь совпадающие элементы симметрии этих явлений. Что же это означает?

Рассмотрим как пример наложение квадрата с симметрией $L_4 4P$ и треугольника с симметрией $L_3 3P$ (рис. 65). Наложим их друг на друга и предпо-

жим, что они прозрачные. В результате наложения (суперпозиции) выживут лишь общие элементы симметрии, итоговая фигура будет обладать симметрией с единственной совпадающей плоскостью P .

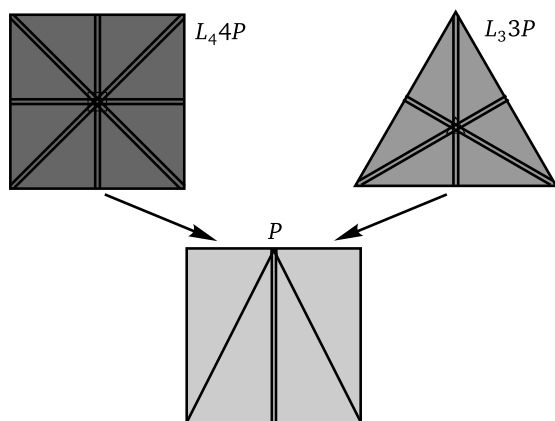


Рис. 65. Демонстрация принципа суперпозиции Кюри: в результате наложения двух фигур — квадрата с симметрией $L_4 4P$ и треугольника с симметрией $L_3 3P$ остается только общий элемент симметрии — P

Какой важный и неутешительный вывод приходится сделать из этого постулата? В реальных условиях для выращивания идеальных кристаллов все оказывается достаточно неприятно: симметрия неизбежно понижается, хотя бы под действием закона всемирного тяготения (рис. 66). Не забудем и то,

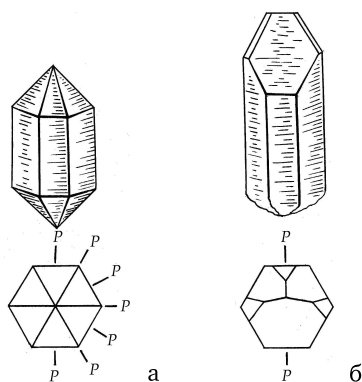


Рис. 66. Вид сбоку и сверху на кристаллы кварца, выросшие вертикально (а) и наклонно (б) по отношению к поверхности Земли. В первом случае направление роста совпадает с направлением вектора силы тяжести, и кристалл приобретает практически собственную симметрию, а во втором — векторы роста и силы тяжести не совпадают, и в кристалле реализуется лишь единственная плоскость симметрии [13]

что кристалл растет исключительно медленно и за время его роста условия меняются неоднократно. Неудивительно, что существенное время на орбите

международных космических станций космонавты проводят за выращиванием кристаллов в «тепличных условиях».

Известный советский минералог и геохимик А. Е. Ферсман писал: «Кристалл неизменно несет на себе следы предыдущих моментов своего существования, и по его форме, по скульптуре его граней, мелочам и деталям его поверхности мы можем читать его прошлое». Таким образом, огранка и форма реальных кристаллов, хотя и нарушают его внутреннюю идеальную красоту, дают ответы на целый ряд вопросов, на которые идеальная модель ответить не может. Например, почему одни кристаллы одного и того же минерала многогранны, а другие нет; как связана внешняя форма кристаллов с их внутренним строением; в каких условиях рос тот или иной кристалл; чем вызваны искажения формы и симметрии реальных кристаллов и т. д. На все эти вопросы пытаются получить ответ, с одной стороны, специалисты по росту кристаллов, чтобы иметь возможность их искусственного получения. С другой стороны, проблема интересна геологам: ведь огранка кристаллов может быть успешно использована даже для направленных поисков полезных ископаемых, так как в силу многих причин грани определенных простых форм по-разному развиваются в различных физико-химических условиях.

Учение о росте кристаллов — исключительно сложная часть кристаллографии, задача выращивания кристалла определенной формы зависит от огромного числа факторов. Коснемся лишь основных из них. Главнейший фактор, определяющий огранку, — внутреннее строение кристалла, так как внешняя форма кристалла является отражением его внутреннего строения. Наблюдения этой взаимосвязи привели в начале XX века к *правилу Кюри—Вульфа*: наиболее развитыми на поверхности кристалла являются грани с наименьшими скоростями роста. В чем суть этого правила? Если посмотрим на рисунок 67, то заметим, что исходные кристаллы слева и справа одинаковы.

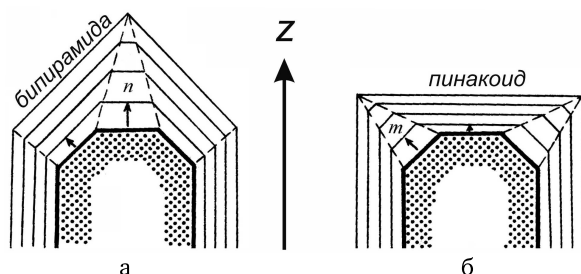


Рис. 67. Иллюстрация правила Кюри—Вульфа: быстро растущие грани кристалла исчезают из огранки в процессе роста

Однако, в силу определенных причин (например, состав среды) в первом случае быстрее растут грани пинакоида (n), а во втором — бипирамиды (m). Это приводит к тому, что рано или поздно два кристалла станут абсолютно непохожими: быстро растущие грани обоих образцов исчезают из огранки, и их габитус будет определяться теми формами, чьи скорости роста наименьшие в каждом конкретном случае.

Форма кристалла часто искажается и не соответствует строго кристаллической структуре. Многие из вас выращивали в домашних условиях поваренную соль и заметили, что кристаллы NaCl чаще всего растут в виде кубиков. Однако кристаллы, лежащие на дне *кристаллизатора* (сосуда, в котором происходит рост), приобретают уплощенную форму, что связано с неравномерным поступлением питающего раствора к одной из граней гексаэдра, являющегося основанием, что приводит к замедлению ее роста. Таким образом, в природных условиях даже грани одной простой формы могут развиваться по-разному! Ослабить такое влияние можно непрерывным перемешиванием раствора или вращением самого кристалла в растворе, что обеспечивает более равномерное поступление питательного материала ко всем граням растущего кристалла.

Кристаллы очень чутко реагируют на многочисленные внешние факторы (температуру, давление, симметрию и химизм среды) не только изменением своего габитуса, но и появлением ряда других признаков, анализ которых может дать информацию об истории их развития — *онтогении*. Под этим термином принято понимать раздел минералогии, посвященный изучению происхождения кристаллических индивидов и их развитию в процессе роста. Отметим, что сам термин был заимствован из биологии, где означает историю индивидуального развития. Признаки, указывающие на историю развития кристалла, называются *типоморфными признаками*.

Одним из таких признаков может быть появление на гранях *штриховки*. Хорошо известна штриховка призматических граней кристаллов кварца SiO_2 (рис. 68 а), образованная фрагментами граней ромбоэдра. Известна также штриховка на гранях пирита FeS_2 (рис. 68 б). Штрихи, параллельные ребрам куба, представляющие собой фрагменты граней пентагондодекаэдра, указывают не только на истинную симметрию кристаллов пирита (T_h), но и на быструю смену условий кристаллизации при их образовании: кристаллы пирита осадочного происхождения обычно имеют гладкие грани, а гидротермального — образованы гранями с четкой штриховкой.

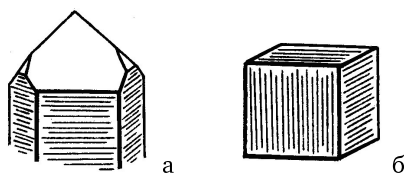


Рис. 68. Характерная штриховка на гранях кварца (а) и пирита (б)

Реальную симметрию кристаллов можно выявить также по *фигурам растворения*, образующимся под действием смены условий на неблагоприятные для роста. Этот процесс можно смоделировать в лабораторных условиях: подобрав соответствующий растворитель и нанеся его капли на разные по симметрии грани кристалла, получим, как результат растворения поверхности кристалла, *фигуры травления*, отличающиеся по форме и указывающие на их истинную симметрию (рис. 69). Оказывается, только гексаэдров — пять разных!

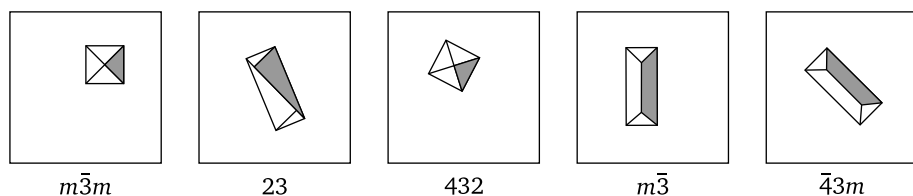


Рис. 69. Схематическое представление фигур травления на гранях гексаэдра различных кубических классов

Все эти и многие другие явления приводят к тому, что в природе можно встретить кристаллы самых причудливых форм. При различных отклонениях от идеальных условий, например, в загрязненных или сильно пересыщенных средах, вырастают экзотические образования. К ним можно отнести *скелеты*, *дендриты*, *сферолиты* и многие другие.

Скелетные и дендритные кристаллы развиваются в условиях исключительно быстрого роста и наличия избытка питающего вещества, из которого строится кристалл. Главной причиной образования таких форм является то, что к выступающим частям кристалла — вершинам и ребрам — подток питающего вещества более интенсивен, чем к остальным граням, которые в результате отстают в росте. Кристалл быстро наращивает свою массу ценой искажения формы. Наиболее эффектным примером скелетных форм служат снежинки (рис. 70), каждая из которых является одним кристаллом. Если снежинку поместить в подходящие условия, то она может принять форму выпуклого многогранника гексагональной симметрии.

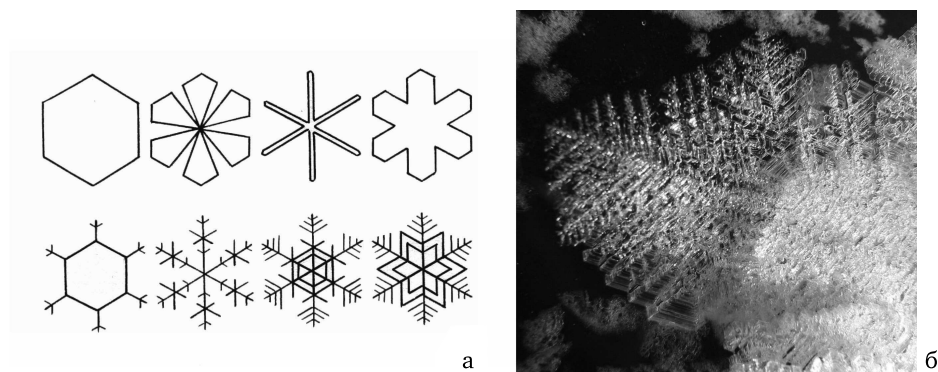


Рис. 70. а) Схематическое изображение снежинок различной формы, б) дендриты льда (фото И. Ю. Егорова)

Дендриты характерны для кристаллов самородных металлов — золота, меди, серебра и других веществ. Это и «ледяные узоры» на окнах, и широко известные ветвистые образования окислов марганца.

Своеобразными формами минеральных выделений являются сферолиты. Их образование связывают с расщеплением монокристаллов в процессе роста

(рис. 71). Сферолиты характерны для минералов состава CaCO_3 — кальцита и арагонита.

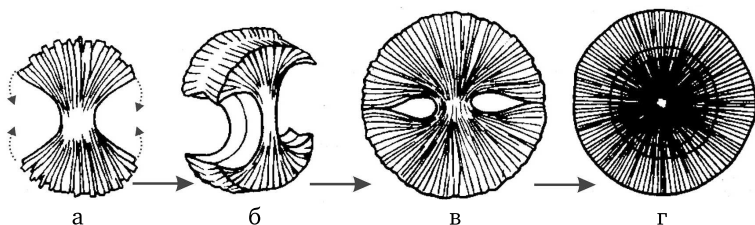


Рис. 71. Схема образования сферолитов

Таким образом, можно сделать вывод о том, что форма кристалла определяется, с одной стороны, его внутренним строением, которая диктует все многообразие возможных простых форм, а с другой — внешними условиями, ограничивающими это многообразие. И форма растущего природного кристалла представляет собой результат взаимодействия этих двух факторов.

Контрольные вопросы

- 1) Сформулируйте принцип суперпозиции Кюри.
- 2) Сформулируйте правило Кюри—Вульфа.
- 3) Что такое онтогенез?
- 4) Что такое типоморфные признаки? Какие типоморфные признаки вы можете перечислить?
- 5) Приведите примеры сферолитов, дендритов и скелетных форм роста.

Упражнения

- 1) Изобразите схематически фигуры травления на гранях тетраэдра и октаэдра из различных классов кубической сингонии.
- 2) Изобразите схематически фигуры травления на гранях ромбодекаэдра во всех пяти классах кубической сингонии.
- 3) Продемонстрируйте (с помощью фигур травления) разницу в симметрии шести частных форм в обоих икосаэдрических классах.

Занятие 23 (3–7)

Гониометрия как метод изучения реальных кристаллов.

Практическое занятие: сетка Вульфа

Как было показано на прошлом занятии, внешняя среда достаточно искусно маскирует истинную симметрию кристалла. Это приводит к тому, что грани одной простой формы, равные по своим физическим характеристикам, геометрически могут сильно отличаться в реальном кристалле друг от друга, что может привести к ошибкам в определении симметрии кристалла. В этой связи визуального осмотра образца может оказаться недостаточно, следовательно приходится определять положения граней и симметрию более

строгим образом, а не «на глазок», как мы делали на практических занятиях 8 и 16.

Вспомним, что еще Н. Стенон отметил важность измерения углов между гранями для диагностики минерала, а первый прибор для измерения таких углов (гониометр) был создан под руководством Роме де Лиля. Современные гониометры позволяют не только определять углы между гранями, но и определять их сферические координаты. Таким образом, нормаль к каждой грани получает свои координаты (аналог GPS-отметки), что строго фиксирует ее положение, но не на местности, а на сфере проекций. Это помогает определять симметрию даже очень небольших кристаллов (гониометры, входящие в состав современных приборов, позволяют определять координаты граней образцов размером в десятые и сотые доли миллиметра), а также кристаллов с неравномерно развитыми гранями, группировать грани по принадлежности к разным простым формам и так далее.

Каждая точка на сфере проекций имеет две координаты (как в географии) — широта (обозначается греческой буквой ρ) и долгота (обозначается греческой буквой φ). Однако в кристаллографии и географии эти координаты снимаются несколько различными способами: в кристаллографии широта отсчитывается не от Гринвичского меридиана, а от меридиана, совпадающего с положительным выходом оси u . Этот меридиан выбирается в качестве нулевого ($\varphi = 0^\circ$, он же имеет $\varphi = 360^\circ$). Таким образом, каждая точка на сфере имеет долготу от 0° до 360° . Широта (координата ρ) отсчитывается по меридиану, проведенному через исследуемую точку A (рис. 72 а) в направлении от северного полюса N к южному полюсу (S). Широта на северном полюсе равна 0° , на экваторе $\rho = 90^\circ$, а на южном полюсе $\rho = 180^\circ$ (первооткрыватели Южного полюса Р. Скотт и Р. Амундсен были бы слегка удивлены).

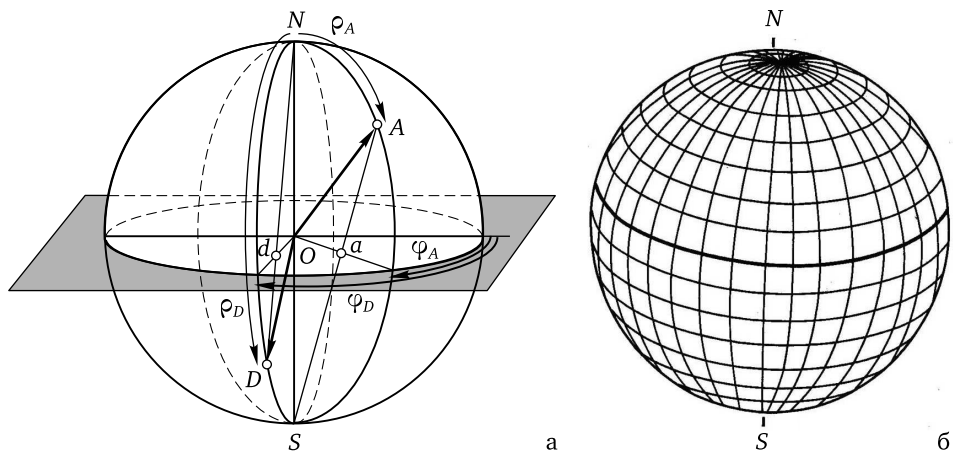


Рис. 72. а) Измерение сферических координат точек A и D в верхней и нижней полусфере; б) градуировка сферы проекций системой меридианов и параллелей

Обратим внимание, что рис. 72 представляет собой усложненный вариант рис. 14 а, где показано, каким образом отсчитываются сферические координаты

ты для точек A и D . Отметим, что для точки A координата $\rho < 90^\circ$, так как она находится в верхнем полушарии, а для точки D координата $\rho > 90^\circ$ (южное полушарие). Всю сферу проекций градуируют с помощью систем меридианов и параллелей подобно градусной сетке на глобусе (рис. 72 б).

Таким образом, используя гониометрические данные, можно осуществить точное проецирование кристалла — построить стереографические проекции элементов симметрии и нанести гномостереографические проекции его граней. Для этого используют специальные трафареты — сетки, позволяющие графически без дополнительных расчетов решать многие задачи геометрической кристаллографии.

В кристаллографической практике наиболее широкое применение получила сетка, предложенная профессором Московского университета Г. В. Вульфом и названная его именем. С помощью сетки Вульфа можно, используя сферические координаты φ и ρ (результат гониометрических исследований), строить стереограммы кристаллов, наносить проекции граней и ребер, определять между ними углы и решать другие задачи.

Посмотрим на трафарет, который был нами изготовлен на первой ступени обучения (рис. 23). На нем в виде частой серой сетки изображена именно сетка Вульфа (рис. 73) в уменьшенном размере. В восьмисантиметровом исполнении ей пользоваться несколько затруднительно. Поэтому для

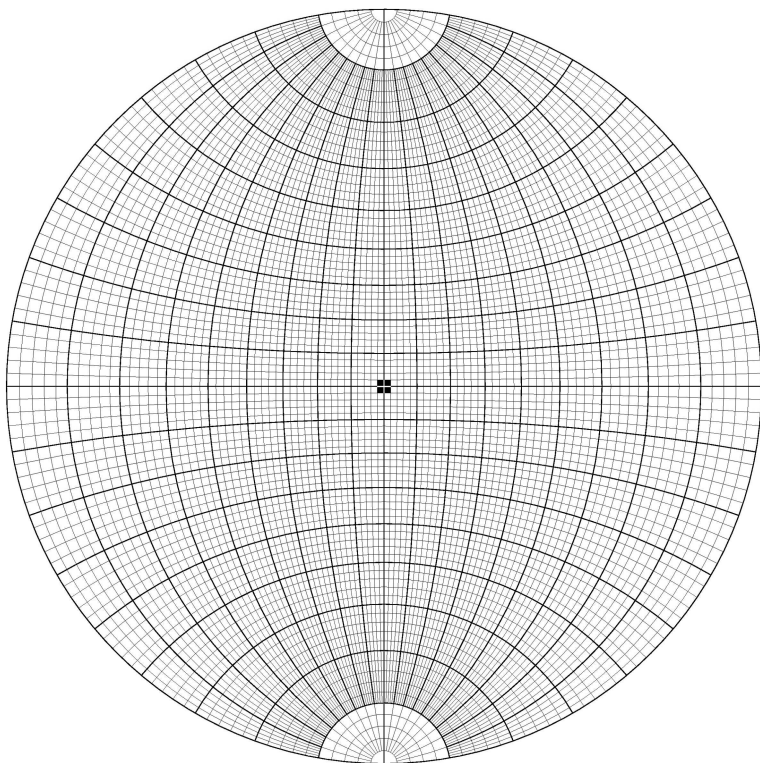


Рис. 73. Сетка Вульфа

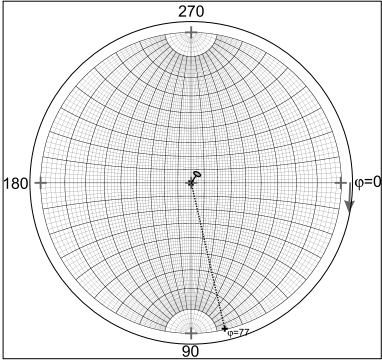
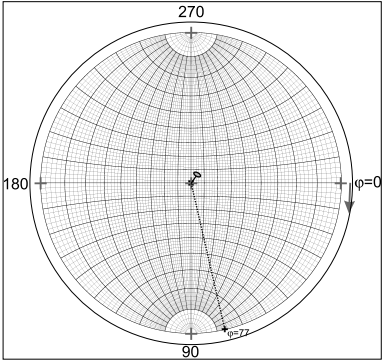
практических занятий нам понадобится сетка большего размера (принято пользоваться кругом диаметром 20 см). Скачать ее можно по гиперссылке: http://cryst.geol.msu.ru/yaroslav/Wulff_nets/Wulff10sm.zip. В таком разрешении с системой маркированных через 2° меридианов и параллелей погрешность работы будет составлять всего 1°.

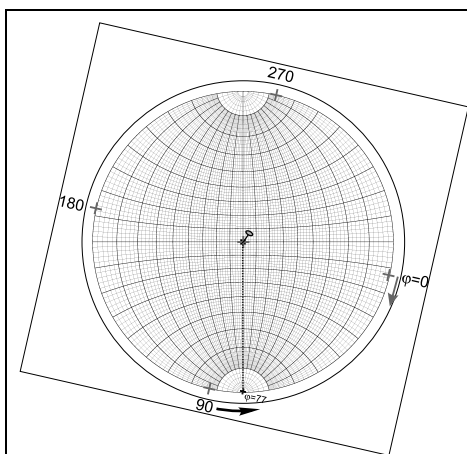
Трафарет необходимо распечатать, наклеить на картон и аккуратно вырезать по контуру окружности, оставив на картоне поля не менее 5 мм. В центре желательно иголкой проткнуть отверстие. После того как трафарет изготовлен, можно приступать к решению гониометрических задач. На этом занятии мы научимся точно наносить на проекцию точки, заданные сферическими координатами, а также определять углы между ними (Н. Стенон нам бы остро позавидовал, ведь у него под рукой не было сетки Вульфа).

Для практических занятий нам понадобится калька формата А4, так как все построения с использованием сетки Вульфа проводятся на кальке, положенной сверху на трафарет.

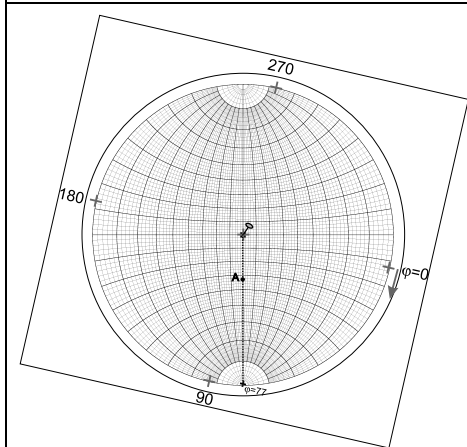
Задача №1. Построение проекций точек, заданных сферическими координатами: $A(\varphi = 77^\circ, \rho = 33^\circ)$, $B(\varphi = 77^\circ, \rho = 113^\circ)$. Последовательность шагов решения этой задачи приведена в таблице 16.

Таблица 16. К решению задачи №1

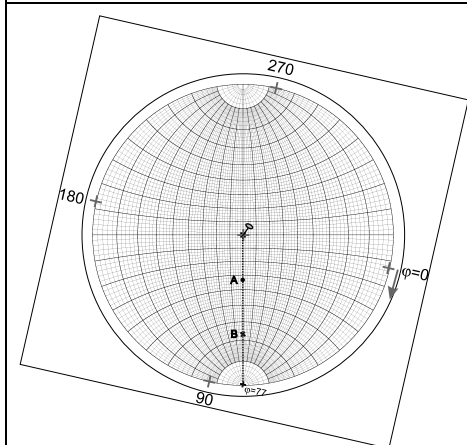
Иллюстрация	Описание
	Помещаем сверху на трафарет лист кальки и фиксируем центр круга иголкой. Рисками на кальке обозначаем пересечения прямых меридианов ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270°) с экватором ($\rho = 0^\circ$). Риски лучше подписать. Они помогут нам всегда точно вернуть кальку в исходное положение.
	Отсчитываем значение долготы, которая в данной задаче для точек А и В одинакова ($\varphi = 77^\circ$), по окружности сетки Вульфа в направлении часовой стрелки. После чего делаем засечку на окружности, соответствующую $\varphi_A = \varphi_B$.



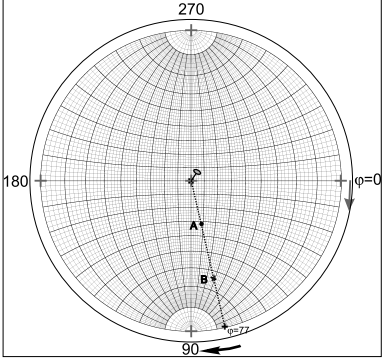
Вращением кальки (не нарушая при этом центрировки) совмещаем нанесенную засечку с любым (лучше ближайшим) из прямых меридианов сетки, имеющих $\varphi = 0^\circ$, 90° , 180° или 270° . В данном случае быстрее всего воспользоваться прямой линией с $\varphi = 90^\circ$.



Откладываем координату $\rho_A = 33^\circ$ от центра сетки по диаметру в сторону засечки. Помним, что линии проведены через 2° , следовательно, искомая точка будет между линиями. Помним, что грани верхней полусферы ($\rho < 90^\circ$) и вертикальных граней ($\rho = 90^\circ$) обозначаются кружками. Наносим небольшой кружок, который является гномостереографической проекцией грани A, заданной сферическими координатами.



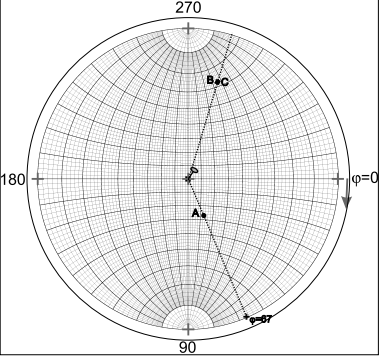
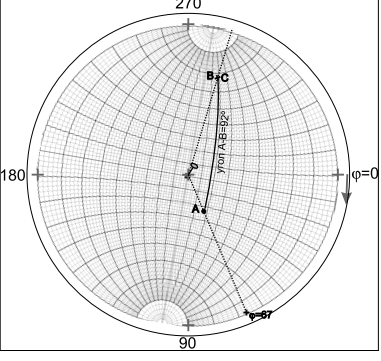
Откладываем координату $\rho_B = 113^\circ$ от центра сетки по диаметру в сторону засечки. Помним, что линии проведены через 2° , следовательно, искомая точка будет также между линиями. Так как координата $\rho > 90^\circ$, то величина угла, превышающая 90° ($113^\circ - 90^\circ = 23^\circ$), откладывается по этому диаметру, но уже в обратном направлении — от окружности к центру круга. Грань обозначается крестиком, так как принадлежит нижней полусфере. Наносим небольшой крестик, который является гномостереографической проекцией грани B.

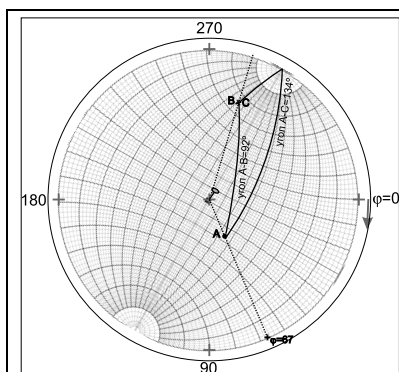


Каждой нанесенной точке (границы) присваивается номер или буквенное обозначение. После этого не забываем вернуть кальку в исходное положение, используя опорные риски. Задача решена.

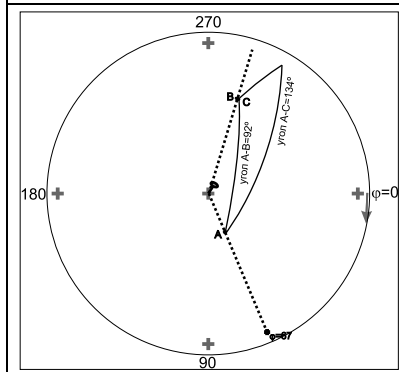
Задача № 2. Измерение угла между точками, заданными сферическими координатами φ и ρ : $A(67^\circ, 31^\circ)$, $B(287^\circ, 67^\circ)$ и $A(67^\circ, 31^\circ)$, $C(287^\circ, 113^\circ)$ (здесь и далее подразумевается угол между двумя направлениями, заданными сферическими координатами). Последовательность шагов решения этой задачи приведена в таблице 17.

Таблица 17. К решению задачи № 2

Иллюстрация	Описание
	Помещаем сверху на трафарет лист кальки и фиксируем центр круга иглой. Рисками на кальке обозначаем пересечения прямых меридианов ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270°) с экватором ($\rho = 0^\circ$). По схеме, приведенной в таблице 16, наносим положения точек A , B и C . Возвращаем кальку в исходное положение.
	Вращением кальки точки A и B выводятся на один меридиан. Поскольку значения координат ρ для обеих точек меньше 90° , то точки принадлежат одной (верхней) полушфере. Отсчет угла между точками производится по отрезку меридиана сетки Вульфа, заключенного между ними. Рисуем карандашом эту дугу. В данном случае угол между точками A и B равен 92° .



Поскольку точки A и C принадлежат разным полусферам, то их необходимо вращением кальки вывести на два симметричных меридиана сетки. Из двух возможных углов (дающих в сумме 360°) выбирают, естественно, меньший, который равен в данном случае 134° . Рисуем карандашом эту дугу.



Возвращаем кальку в исходное положение, используя опорные риски. Подписываем на дугах величины углов. Смотрим на наше творчество на кальке, убрав сетку Вульфа.

Важно! Следует иметь в виду, что если две точки (например, A и B) являются гномостереографическими проекциями граней, то угол $\alpha = 92^\circ$ между ними не что иное, как угол между нормальными к этим граням. Угол же между самими гранями соответствует дополнителю углу, т. е. $180^\circ - \alpha$ (рис. 74). В нашем случае угол между гранями A и B составит $88^\circ = 180^\circ - 92^\circ$.

Подведем итог занятию. Что мы сделали? Изготовлена сетка Вульфа — графический трафарет, помогающий решить ряд задач геометрической кристаллографии. С его помощью мы научились наносить координаты точек по заданным сферическим координатам, а также измерять углы между этими точками с точностью до 1 градуса.

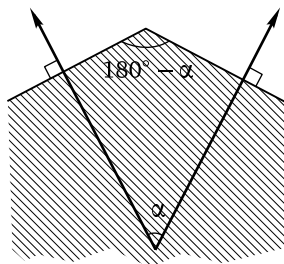


Рис. 74. Иллюстрация взаимосвязи угла между нормальными к граням (α) и угла между гранями ($180^\circ - \alpha$)

Контрольные вопросы

- 1) Чем система сферических координат, принятая в кристаллографии, отличается от географических координат?
- 2) Как в кристаллографии определяется долгота?

3) Как в кристаллографии определяется широта? Чему равна широта точек южного полушария?

4) Что такое сетка Вульфа? Какие задачи и с какой точностью можно решать с ее помощью?

5) Как связаны между собой углы между гранями и углы между нормалью к граням?

Упражнения

Измерьте углы между следующими тройками точек и нанесите дуги на кальку.

№	$A, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$B, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$C, \varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$A, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$B, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$C, \varphi^\circ - \rho^\circ$
1	43 – 114	33 – 124	65 – 171	17	113 – 163	59 – 29	315 – 58
2	15 – 47	245 – 100	235 – 96	18	254 – 104	36 – 42	58 – 9
3	135 – 170	300 – 111	95 – 105	19	71 – 158	126 – 111	116 – 150
4	37 – 18	272 – 136	69 – 87	20	275 – 32	90 – 88	239 – 146
5	217 – 141	276 – 138	35 – 17	21	260 – 172	236 – 29	158 – 22
6	241 – 10	2 – 11	132 – 169	22	183 – 87	336 – 60	4 – 3
7	181 – 24	222 – 87	57 – 154	23	64 – 126	359 – 20	21 – 99
8	138 – 169	28 – 97	65 – 85	24	345 – 139	311 – 3	109 – 91
9	160 – 156	342 – 156	209 – 171	25	6 – 88	274 – 143	3 – 117
10	7 – 142	36 – 35	153 – 123	26	11 – 169	180 – 11	314 – 23
11	353 – 178	190 – 170	146 – 86	27	349 – 175	110 – 57	101 – 133
12	108 – 31	281 – 93	39 – 22	28	342 – 36	81 – 15	73 – 103
13	153 – 118	313 – 50	277 – 49	29	331 – 90	100 – 153	71 – 17
14	166 – 33	55 – 112	33 – 156	30	156 – 108	118 – 50	301 – 25
15	323 – 112	183 – 17	44 – 54	31	177 – 149	63 – 70	299 – 174
16	338 – 87	53 – 86	105 – 16	32	31 – 151	40 – 79	328 – 169

Занятие 24 (3–8)

Практическое занятие: полное описание кристалла по гониометрическим данным

На прошлом занятии мы познакомились с некоторыми приемами точного проецирования нормалей к граням с помощью специального трафарета — сетки Вульфа. Прежде чем приступить к итоговому практическому занятию — полному описанию кристалла по данным гониометрии — необходимо добавить следующую полезную информацию.

При описании кристалла следует обратить особое внимание на грани, которые пересекаются по параллельным ребрам, особенно если эти ребра наклонные. На самом деле это означает, что нормали к этим граням лежат

в одной плоскости. Такие грани называют *таутозональными*, а плоскость — *зоной* или *поясом*. На проекции зона может выглядеть как диаметр круга проекций (вертикальный пояс, рис. 7б цветной вклейки), сама окружность (горизонтальный пояс, рис. 7в) и, наконец, в общем случае — дуга большого круга (наклонный пояс, рис. 7а). Примерами таких граней являются грани 6 и 7 (рис. 7г). Для нас важно, что таутозональные грани обязательно располагаются на проекции зоны.

Обратим внимание, что грани 7 таутозональны граням 6. Если мысленно убрать из огранки форму 5, то становится очевидным, что и форма 2 также принадлежит этому поясу: 2–7–6–7–2 (на проекции это будет дуга, так как изучаемое ребро наклонно). Одновременно, грани 7 лежат в вертикальной зоне 3–7–4 (это зона горизонтального ребра, по которому они пересекаются). Таким образом, если на первой ступени (таблица А цветной вклейки) мы располагали грань 7 где-то внутри в общем положении, то сейчас необходимо строго фиксировать эту простую форму в точке пересечения двух зон. Правильное положение грани показано на рис. 7г цветной вклейки.

После нанесения на кальку всей гониометрической информации стоит взглянуть на весь получившийся «узор» и выбрать наиболее симметричный из возможных вариантов. В качестве примера рассмотрим 4 точки с координатами ($\varphi^\circ - \rho^\circ$): А: 15 – 40, В: 195 – 40, С: 105 – 140 и D: 285 – 140. Сходность этих пар должна насторожить нас и заставить предположить, что это может быть одна простая форма. Расположение граней напоминает действие инверсионной оси четвертого порядка, а форма похожа на тетрагональный тетраэдр. Не будем обижать ее, неверно называя двумя диздрами А – В и С – D, а уж тем более — четырьмя моноэдрами. Таким образом, необходимо выбирать максимально симметричный случай из всех вариантов. В рассматриваемом примере это, безусловно, тетрагональный тетраэдр. Он, кстати, существует в двух классах — S_4 и D_{2d} . Правильным ответом будет второй, координаты выходов горизонтальных осей второго порядка имеют $\varphi = 60^\circ$ и 150° соответственно. Симметрия понизится до S_4 лишь в том случае, если будет введен в огранку еще один тетрагональный тетраэдр, например с гранями ($\varphi^\circ - \rho^\circ$): Е: 25 – 30, F: 205 – 30, G: 115 – 150 и H: 295 – 150. Таким образом, при выполнении практического задания необходимо фиксировать максимально возможную симметрию!

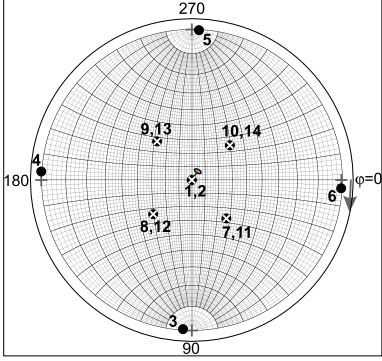
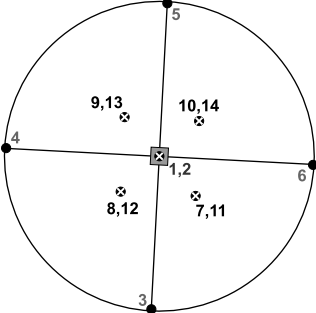
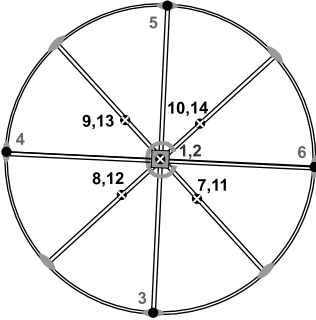
Задача. По сферическим координатам граней ($\varphi^\circ, \rho^\circ$)

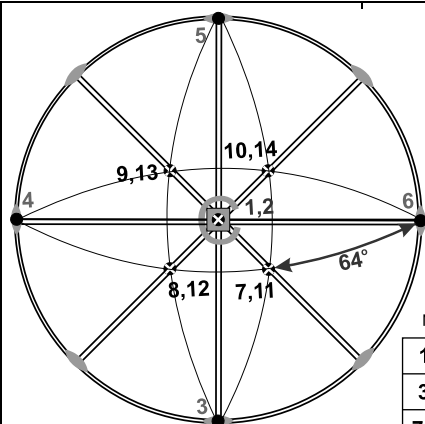
№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$
1	? – 0	8	138 – 38
2	? – 180	9	228 – 38
3	93 – 90	10	318 – 38
4	183 – 90	11	48 – 142
5	273 – 90	12	138 – 142
6	3 – 90	13	228 – 142
7	48 – 38	14	318 – 142

с помощью сетки Вульфа построить стереограмму кристалла, определить его максимально возможную симметрию. Сгруппировать грани по простым формам. Показать на кальке расположение элементов симметрии полученного класса. Дать полное описание кристалла по бланку, приведенному на рис. 49. Может ли этот кристалл быть цирконом ZrSiO_4 , если известно, что в этом минерале угол между гранями бипирамиды и призмы равен 113° ? Таутозо-нальны ли грани 4–7–8–6?

Последовательность решения настоящей задачи приведена в таблице 18.

Таблица 18. К решению задачи из занятия 24 (3-8)

Иллюстрация	Описание
	Наносим на кальку положения всех точек, являющимися нормальными к граням кристалла. Не забываем, что точки нижней полусферы изображаются крестиками, а верхней полусферы и экваториальной плоскости — кружками. Подписываем все точки цифрами от 1 до 14.
	Изучаем чертеж. Анализируем расположение кружков и крестиков. Очевидно, что перед нами три простые формы — одна двугранная (грани 1–2), одна четырехгранная (грани 3–6) и одна восьмигранная (грани 7–14). Убеждаемся в том, что вертикальная ось — L_4 , так как при повороте на 90° мотив расположения наших точек совмещается сам с собой. Наносим вертикальную ось на чертеж.
	Обращаем внимание на то, что грани четырехгранной формы находятся ровно посередине между гранями восьмигранной, следовательно, в этом месте может проходить как вертикальная плоскость, так и горизонтальная ось второго порядка. Максимально возможный по симметрии случай, обеспечивающий такое расположение граней, — D_{4h} . Наносим на проекцию элементы симметрии класса.



облик _____
габитус _____

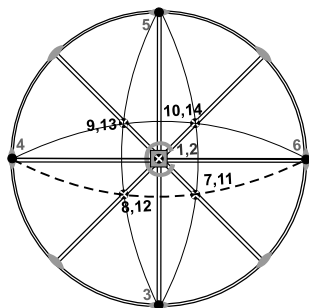
категория a, b, c	средняя
сингония α, β, γ	тетрагональная
символ по Браве	L_4L_25PC
символ по Шенфлису	D_{4h}
класс по общей форме	дитетрагонально-бипирамидальный
международный символ	$4/mmm$

Характеристика простых форм

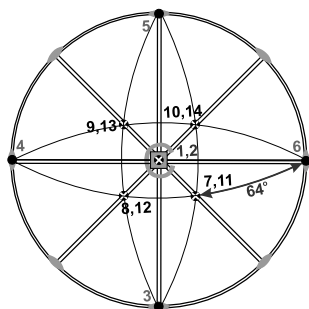
№	Кол-во граней	Откр./закр.	Частн./общ.	Название
1,2	2	откр.	част.	пинакоид
3-6	4	откр.	част.	тетр. призма
7-14	8	закр.	част.	тетр. бипирамида

Оформляем бланк (рис. 49): категория — средняя, сингония — тетрагональная, символ Браве — L_4L_25PC , символ Шёнфлиса — D_{4h} , международный символ — $4/mmm$, класс по общей форме — дитетрагонально-бипирамидальный. Простые формы:

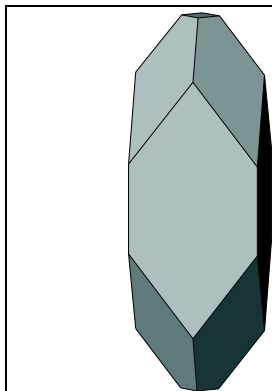
- (1) — 2 грани, открытая, частная, пинакоид;
 (2) — 4 грани, открытая, частная, тетрагональная призма;
 (3) — 8 граней, закрытая, частная, тетрагональная бипирамида.



Для проверки того, лежат ли грани 4–7–8–6 в одной зоне, попытаемся вывести их на одну дугу. Как видно из рисунка, эти грани действительно принадлежат к одному поясу, следовательно, они будут пересекаться по параллельным ребрам.



Проверим, не циркон ли это. Для этого измерим угол между нормальными к грани тетрагональной призмы и тетрагональной бипирамиды (например, 6 и 7). Очевидно, что эти грани имеют общее ребро, так как находятся рядом друг с другом. Измеренный угол между нормальными составляет 64° , т. е. угол между гранями будет равен 116° (см. рис. 74). Учитывая точность измерения углов ($1-2^\circ$), данный минерал не может быть цирконом.



Отметим, что, не наблюдая кристалл визуально, нельзя описать его облик и габитус, они могут варьировать в достаточно широких пределах. Но если бы мы знали, что облик у исследуемого образца игольчатый или вытянутый, то можно было бы сказать с большой уверенностью, что кристалл обладает тетрагонально-призматически-бипирамидально-пинакоидальным габитусом.

Подведем итог нашему заключительному занятию. Мы изучили особенности проецирования и анализа кристалла по данным гониометрических наблюдений. Была построена по сетке Вульфа стереографическая проекция класса симметрии, обеспечивающего такое расположение граней, и гномо-стереографическая проекция нормалей к граням. Дано полное описание кристалла и сделан вывод о том, что изучаемый образец не может быть цирконом (с использованием справочных данных). Проведен дополнительный анализ принадлежности граней различных форм к одному поясу.

Контрольные вопросы

- 1) Что называется зоной?
- 2) Каким образом можно визуально определить грани одной зоны?
- 3) Каким образом можно определить грани одной зоны по сетке Вульфа?
- 4) Максимально или минимально возможный по симметрии случай стоит выбирать при анализе гониометрических данных?

Упражнения

- 1) Построить по гониометрическим данным — сферическим координатам φ° и ρ° граней — стереограмму кристалла, определить его симметрию. Дать набросок общего вида кристалла:

№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$
1	35 – 32	1	112 – 90
2	88 – 32	2	202 – 90
3	215 – 32	3	292 – 90
4	268 – 32	4	22 – 90
5	35 – 148	5	67 – 45
6	88 – 148	6	157 – 45
7	215 – 148	7	247 – 45
8	268 – 148	8	337 – 45
		9	? – 0
		10	? – 180

2) Определите графическим путем, пересекаются ли по параллельным ребрам грани с координатами:

№	$A, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$B, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$C, \varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$A, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$B, \varphi^\circ - \rho^\circ$	$C, \varphi^\circ - \rho^\circ$
1	45 – 55	56 – 61	63 – 66	4	63 – 66	45 – 90	72 – 58
2	90 – 90	45 – 55	76 – 76	5	18 – 58	63 – 37	37 – 45
3	45 – 55	27 – 29	34 – 50	6	63 – 37	45 – 55	56 – 61

3) Октябрь 2023 года. Вы являетесь командиром звездолета Земля — Марс, посланным на разведку месторождений полезных ископаемых активно колонизируемой Красной планеты. Звездолет опустился в районе Лабиринта Ночи (Noctis Labirynthus). Посланный на разведку экипаж принес образцы, среди которых находился темно-коричневый полупрозрачный блестящий многогранник, состоящий из двух различных по форме граней. Проведенные гониометрические исследования дали следующие результаты:

№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$	№	$\varphi^\circ - \rho^\circ$
1	0 – 0	7	95 – 75	13	230 – 105
2	0 – 180	8	130 – 75	14	265 – 105
3	5 – 75	9	140 – 105	15	275 – 75
4	40 – 75	10	175 – 105	16	310 – 75
5	50 – 105	11	185 – 75	17	320 – 105
6	85 – 105	12	220 – 75	18	355 – 105

Проанализируйте огранку, сделайте вывод о принадлежности образца к одному из классов симметрии, назовите простые формы и на основании прилагаемых справочных данных (см. таблицу на следующей странице) определите минерал. Выберите один из возможных вариантов шифрограммы на Землю президенту страны. Как вы можете обосновать свой выбор?

1. Срочно выкупайте данный участок Марса! Найдены минералы кадмия!
2. Нам надо срочно купить этот участок Марса! Найдены минералы молибдена!
3. Мы нашли хризоберилл! Тут могут быть его драгоценные спутники — александрит и изумруд! Активизируем поиски!
4. Нашли темный кристалл, диагностировать не удалось. Я плохо учился в институте десять лет назад. Простите меня, господин президент!
5. Похоже, за нами следят инопланетяне! Мы нашли некристаллическое вещество искусственной огранки. Можно, мы улетим отсюда быстро?
6. Найдены минералы олова! Экспедиция просит внеочередной выходной!

Краткий гониометрический справочник улетающего на Марс космонавта

Минерал	Гониометрическая диагностика
Гринокит CdS	Угловое расстояние между нормальями к граням двух различных гексагональных пирамид составляет 26°
Молибденит MoS_2	Угловое расстояние между верхней и нижней гранью гексагональной бипирамиды равно 98°
Станнин $\text{Cu}_2\text{FeSnS}_4$	Угловое расстояние между ближайшими нормальями к граням тетрагонального скаленоиэдра и тетрагонального тетраэдра равно 15°
Повеллит CaMoO_4	Угловое расстояние между гранями двух различных тетрагональных бипирамид составляет 148°
Хризоберилл Al_2BeO_4	Угловое расстояние между гранями двух различных ромбических бипирамид составляет 138°

Заключение

Итак, наш школьный трехступенчатый курс обучения подошел к концу. Однако это не значит, что читатели, успешно преодолевшие все ступени обучения, уже достигли вершин кристаллографического мастерства. Многие моменты даже геометрической кристаллографии макроскопических объектов авторы намеренно оставили «за кадром», посчитав этот материал сложным для школьников, даже хорошо подготовленных.

Сюда относится, например, раздел, посвященный индексированию грани — присвоению каждой конкретной грани кристалла уникального цифрового символа, а также теория симметрии двойников. Двойники описываются так называемой черно-белой симметрией. А есть еще и цветная симметрия для еще более сложных случаев. Также отметим, что если от макроскопических объектов перейти в атомарное кристаллическое пространство, то перед нами откроется совершенно уникальный высокосимметричный мир, содержащий новые, неизвестные в макромире элементы симметрии. Чтобы заинтриговать читателя, достаточно упомянуть, что в таком пространстве только осей шестого порядка существует шесть разновидностей!

Намеренно достаточно сжато был освещен авторами и раздел, касающийся кристаллогенезиса и форм роста реальных кристаллов, так как его подробное изложение должно основываться на прочных базовых знаниях физики и химии. Поэтому авторы призывают читателя не почитать на лаврах и помнить, что кристаллография — практически неисчерпаемая наука. Перефразируя известную фразу Гете, можно сказать: «Она (кристаллография) дает уму некоторое удовлетворение и является в своих частностях столь разнообразной, что может быть названа неиссякаемой, благодаря чему она прочно и надолго захватывает выдающихся людей». Упомянем лишь некоторых из них: Р. Аюи, Х. Вейс, Э. Митчерлих, Л. Пастер, Д. Менделеев, А. Гадолин, О. Браве, П. Кюри, Л. Зонке, Е. Федоров, А. Шёнфлис, П. Грот, В. Вернадский, М. Лауэ, В. Рентген, отец и сын Брэгги, Г. Вульф, В. Гольдшмидт, Л. Полинг, А. Ферсман, Н. Белов, А. Шубников, Б. Делоне, Г. Бокий и А. Китайгородский. Понятно, что этот список можно расширить во много раз.

Положение современной кристаллографии во многом напоминает роль математики, методы которой используются в многочисленных и разнообразных дисциплинах. Практически все научные и технические достижения последнего времени непосредственно связаны с кристаллографией. Сюда можно отнести компьютерную микроэлектронику, электронную микроскопию, открытие квазикристаллов, явление высокотемпературной сверхпроводимости и т. д. Без знания кристаллографических законов трудно понять и оценить многие новейшие научные открытия. Говоря о роли кристаллографии в со-

временном естествознании, нельзя не упомянуть о воздействии ее принципов упорядоченности и симметрии на самые общие концепции познания природы — фундаментальные физические теории, такие как законы сохранения, теорию элементарных частиц и многие другие, основанные на использовании идей симметрии.

Приложения

Приложение 1

Подготовка к олимпиаде школьников по геологии. Типовые задачи кабинета кристаллографии

Ежегодно в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова в феврале–марте проходит Московская открытая олимпиада школьников по геологии. Основные интеллектуальные состязания проводятся в два тура: теоретический (письменный) и практический (устный). Во время практического тура участники олимпиады проходят через различные кабинеты, в которых члены жюри в устной форме проверяют знания и практические навыки школьников по соответствующим дисциплинам. Один из кабинетов называется «Кристаллография и рост кристаллов». Что же ждет школьников, решивших посетить этот кабинет? Устный тур в кабинете проходит в творческой и доброжелательной обстановке; в комиссию входят преподаватели МГУ (доктора и кандидаты наук), а также аспиранты и магистранты кафедры кристаллографии, которые максимально объективны при выставлении оценки.



Рис. 75. На Олимпиаде школьников в МГУ, 2012 г. © Геологическая школа МГУ

Интеллектуальное испытание в кабинете предусматривает беседу по одному из разделов кристаллографии с проверкой понимания ряда терминов. Дополнительно школьнику предлагается решить задачу на пространственное воображение, а также определить симметрию некоторого объекта. Это может быть идеализированная учебная модель кристаллического многогранника или природный кристалл. Возможны некристаллические многогранники, предметы живой природы, искусственные объекты и т.д. (см. рисунок 5 цветной вклейки). Вопросы в кабинете формулируются для четырех воз-

растных групп участников: I (1–5 классы), II (6–8 классы), III (9–10 классы) и IV (11 класс). Знания в каждом кабинете очного тура оцениваются по десятибалльной шкале от 0 до 10 баллов. Оценка в кабинете кристаллографии для возрастных групп II–IV складывается из трех составляющих: **творческая беседа** (максимум 6 баллов), **задача** (максимум 2 балла) и **определение симметрии объекта** (2 балла). Для младших школьников предусмотрена только творческая беседа.

Типовая задача на пространственное воображение

(ответы приведены в конце пособия)

Возрастная группа II

- а) Какое минимальное число ребер может быть у кристаллического многогранника? Почему?
- б) Сколько вершин у октаэдра?

Возрастная группа III

- а) Перед вами кристаллический выпуклый семигранник. Назовите сингонии, в которых возможна эта ситуация. Сколько сортов граней будет в каждом случае?
- б) Какая геометрическая фигура получится, если соединить между собой точки, являющиеся центрами граней правильного октаэдра?

Возрастная группа IV

- а) Может ли кристалл кубической сингонии, состоящий из двух простых форм, быть 22-гранным? Если да, то перечислите все комбинации форм, удовлетворяющие этому условию.
- б) Назовите класс симметрии, в котором может быть только три пинакоида. Покажите на схематической проекции этот случай.
- в) У какого многогранника больше ребер — у тригон-три-тетраэдра или тетрагон-три-тетраэдра? Проиллюстрируйте решение.

Некоторые вопросы творческой беседы

- 1. Каким образом огранка кристалла позволяет определить его состав? (группа III–IV)
- 2. Как вы понимаете понятие симметрии? (группа II–III–IV)
- 3. Почему групп симметрии, используемых для описания внешней формы кристаллов всего 32? (группа IV)
- 4. Отличия природных и синтетических кристаллов. (группа II–III–IV)
- 5. Что бы вы сделали для улучшения качества кристалла, который растите сами? (группа II–III–IV)

Приложение 2

Изготовление моделей кристаллов различных классов

Для изготовления бумажных моделей кристаллов необходимо распечатать приведенные выкройки (ссылка на оригинал в векторном формате EMF при-

ведена в каждом случае) в необходимом размере на плотной бумаге или тонком картоне. Распечатанную выкройку необходимо аккуратно вырезать макетным ножом или ножницами. Для сгибов по ребрам (выделенным более толстыми линиями) рекомендуется использовать линейку.

2-1. Изготовление модели кристалла берилла

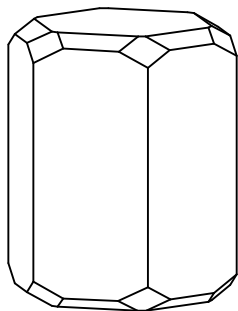
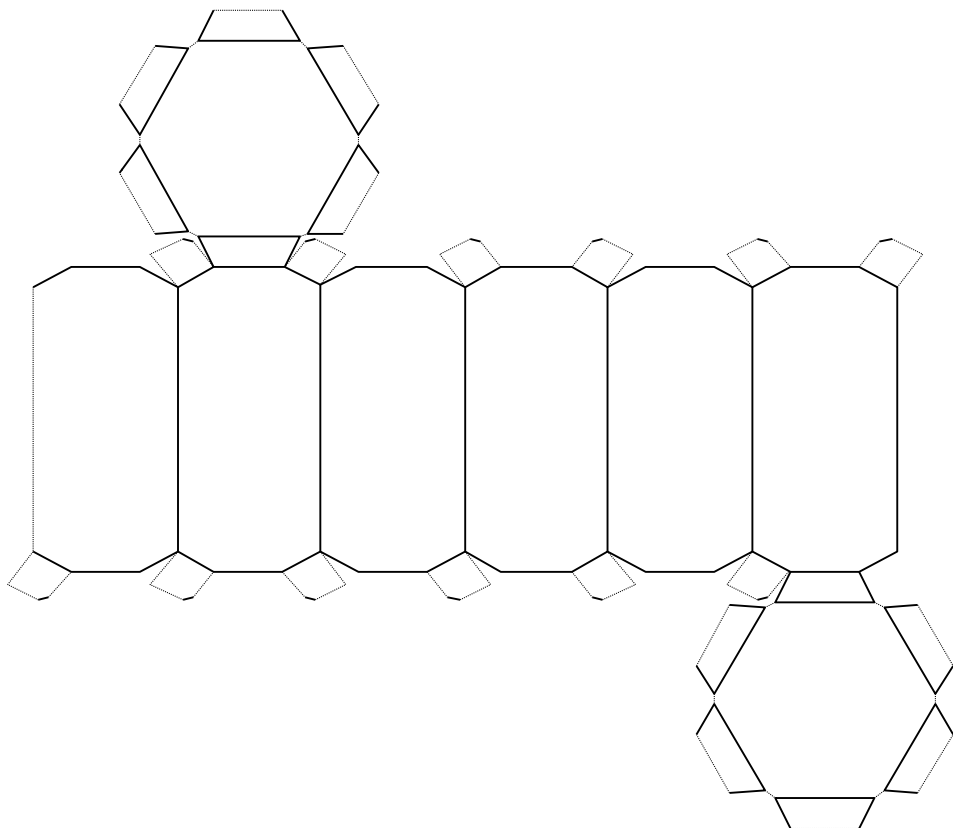


Рис. 76. Слева — готовая модель кристалла берилла, относящегося к классу D_{6h} . В огранке модели представлены 4 простые формы — пинакоид, гексагональная призма и две гексагональные бипирамиды. Внизу — выкройка для изготовления модели. Файл для скачивания — <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/models/01.emf>



2-2. Изготовление модели кристалла кальцита

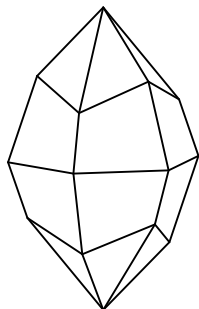
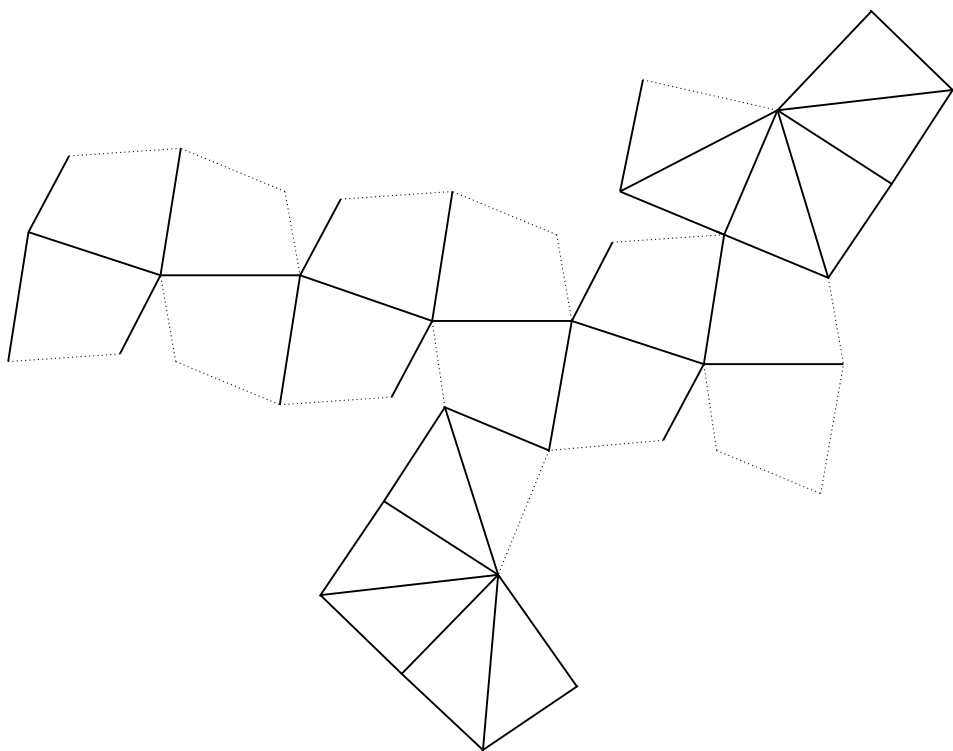


Рис. 77. Слева — готовая модель кристалла кальцита, относящегося к классу D_{3d} . Огранка модели представлена двумя тригональными скаленоэдрами. Внизу — выкройка для изготовления модели. Файл для скачивания — <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/models/02.emf>



2-3. Изготовление модели кристалла рутила

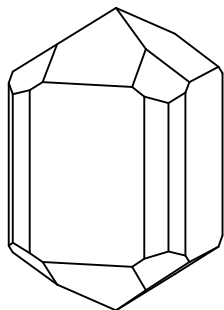
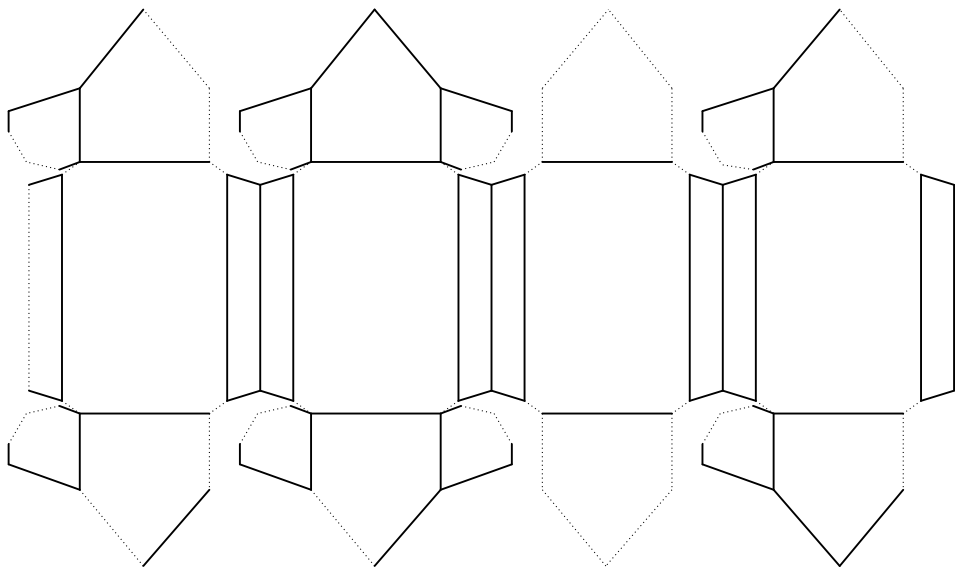


Рис. 78. Слева — готовая модель кристалла рутила, относящегося к классу D_{4h} . В огранке модели представлены 4 простые формы — тетрагональная призма, дитетрагональная призма и две тетрагональные бипирамиды. Внизу — выкройка для изготовления модели. Файл для скачивания — <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/models/03.emf>



2-4. Изготовление модели кристалла пирита

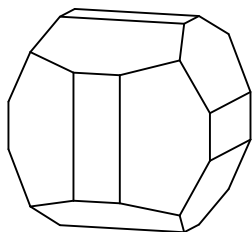
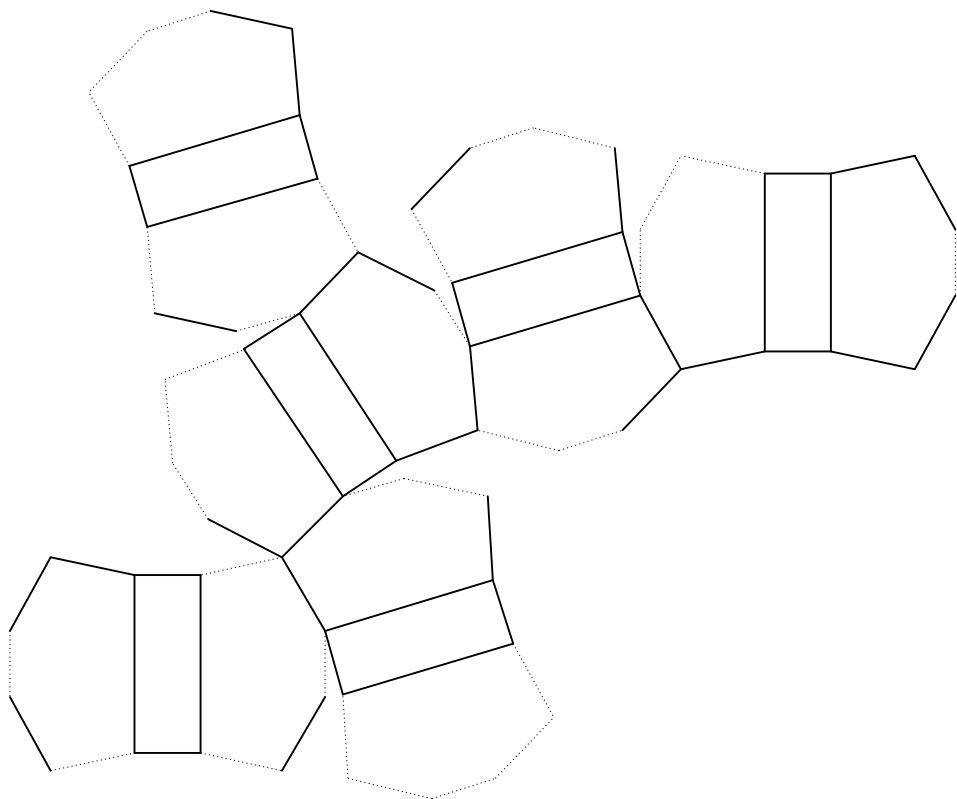


Рис. 79. Слева — готовая модель кристалла пирита, относящегося к классу T_h . В огранке модели представлены 2 простые формы — гексаэдр и пентагондодекаэдр. Внизу — выкройка для изготовления модели. Файл для скачивания — <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/models/04.emf>



Ответы к упражнениям

Ступень 1. Занятие 2

1) Додекаэдр — 12 граней в форме пятиугольника. Вокруг каждой грани — 5 вершин. Каждая вершина связывает 3 грани, следовательно, отношение грань–вершина = $3 : 5$. Число вершин равно $12/3 \times 5 = 20$.

Икосаэдр — 20 граней в форме треугольника. Вокруг каждой грани — 3 вершины. Каждая вершина связывает 5 граней, следовательно, отношение грань–вершина = $5 : 3$. Число вершин равно $20 \times 3/5 = 12$.

2) Додекаэдр — 12 граней в форме пятиугольника. Число вершин подсчитано выше и равно 20. По формуле Эйлера $12 + 20 = P + 2$, следовательно, у додекаэдра 30 ребер.

Икосаэдр — 20 граней в форме треугольника. Число вершин подсчитано выше и равно 12. По формуле Эйлера $20 + 12 = P + 2$, отсюда получаем, что у икосаэдра 30 ребер.

Ступень 1. Занятие 3

- 1) $L_2 2P$, может. 2) $L_5 5P$, не может. 3) $3L_2 3PC$, да, может иметь.
4) Ось бесконечного порядка. Нет, нельзя.

Ступень 1. Занятие 4

- 1) $L_4 4P$, $L_4 2P' 2P''$. 2) $L_4 4P$, $L_4 2P' 2P''$. 3) $L_6 3L_2' 3L_2'' 3P' 3P'' P''' C$.
4) $L_4 4P$, $L_4 2P' 2P''$ поменяется на $L_4 2L_2' 2L_2'' 2P' 2P'' P''' C$.

Ступень 1. Занятие 5

- 3) а) Моноклинная; б) ромбическая; в) тетрагональная.
4) Средняя или высшая. 5) Низшая, средняя, высшая.

Ступень 1. Занятие 6

- 4) а) Класс P ; б) класс $L_2 2P$.

Ступень 1. Занятие 7

а) 1 — моноэдр (открытая, 1 грань), 2, 7 — диэдры (открытые, 2 грани), 3 — ромбическая пирамида (открытая, 4 грани), 4, 8 — пинакоиды (открытые, 2 грани), 5, 6 — ромбические призмы (открытые, 4 грани).

б) 1, 4, 8 — пинакоиды (открытые, 2 грани), 2, 5, 6, 7 — ромбические призмы (открытые, 4 грани), 3 — ромбическая бипирамида (закрытая, 8 граней).

в) 1, 4, 8 — пинакоиды (открытые, 2 грани), 2, 5, 6, 7 — ромбические призмы (открытые, 4 грани), 3 — ромбический тетраэдр (закрытая, 4 грани).

г) 1, 4, 5, 6, 8 — пинакоиды (открытые, 2 грани), 2, 3, 7 — ромбические призмы (открытые, 4 грани).

Ступень 2. Занятие 9

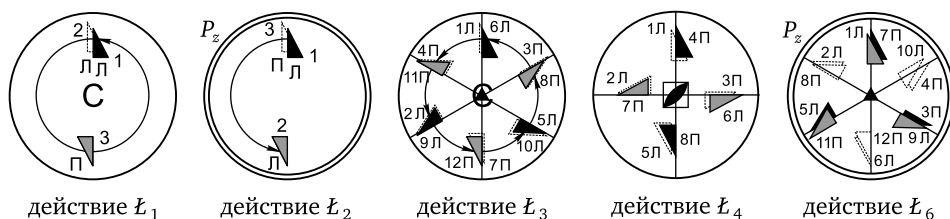


Рис. 80. Схематическое изображение действия инверсионных осей

Ступень 2. Занятие 10

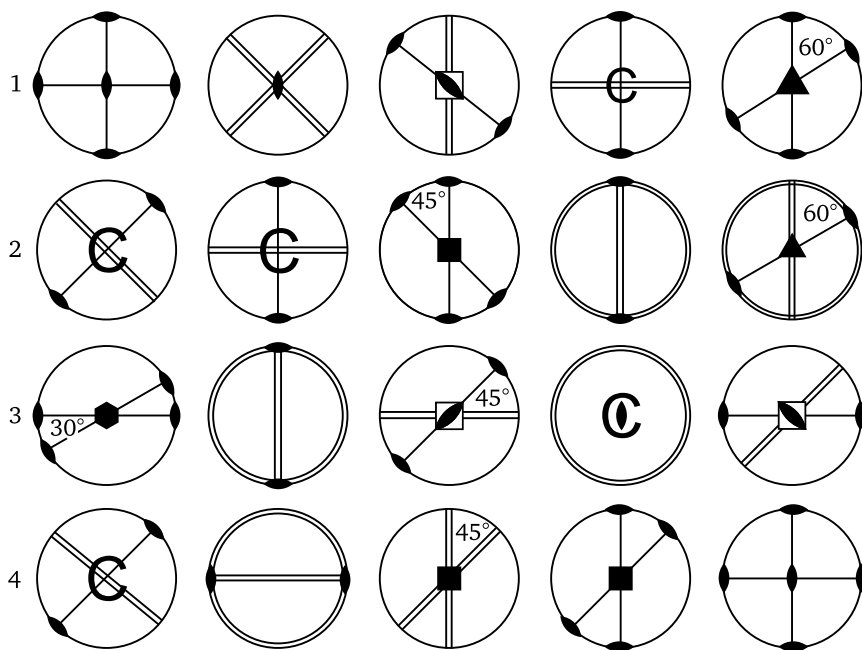


Рис. 81. Ответы к упражнениям занятия 10

Ступень 2. Занятие 12

- а) $3L_23PC$, сингония ромбическая;
- б) L_44L_25PC , сингония тетрагональная;
- в) L_66L_27PC , сингония гексагональная;
- г) L_44L_25PC , сингония тетрагональная;
- д) L_66L_27PC , сингония гексагональная;
- е) L_66L_27PC , сингония гексагональная;
- ж) L_42L_22P , сингония тетрагональная;
- з) L_33L_23PC , сингония гексагональная.

Ступень 2. Занятие 13

12) Тетрагональная призма, открытая. Описывается классами L_4 , $L_4 2L_2 2P$, $L_4 PC$, $L_4 4P$, $L_4 4L_2 5PC$.

13) Ромбическая призма, открытая. Описывается классами $L_2 PC$, $3L_2$, $L_2 2P$, $3L_2 3PC$.

14) Ромбическая призма, открытая. Описывается классами $L_2 PC$, $3L_2$, $L_2 2P$, $3L_2 3PC$.

15) Пинакоид, открытая. Описывается классами C , P , L_2 , $L_2 PC$, $3L_2$, $3L_2 3PC$, L_4 , $L_3 C$, $L_3 P$, $L_4 4L_2$, $L_3 3L_2$, $L_6 6L_2$, $L_4 2L_2 2P$, $L_3 3L_2 3PC$, $L_3 3L_2 4P$, $L_4 PC$, $L_6 PC$, $L_4 4L_2 5PC$, $L_6 6L_2 7PC$.

16) Тетрагональная бипирамида, закрытая. Описывается классами $L_4 4L_2$, $L_4 2L_2 2P$, $L_4 PC$.

Ступень 2. Занятие 14

1) $L_2 PC$ и $3L_2 3PC$. Категория низшая.

2) $L_3 3L_2 4P$ и $L_3 3L_2 3PC$. Категория средняя.

3) $L_6 6L_2$ и L_6 . Категория средняя.

4) P , моноклинная сингония. L_2 , моноклинная сингония. L_4 , тетрагональная сингония.

5) D_{4d} , так как в этом классе присутствует некристаллографическая инверсионная ось восьмого порядка.

Ступень 2. Занятие 15

1а) Пинакодально-гексагонально-призматический габитус. Облик таблитчатый.

1б) Тригонально-скаленоэдрически-ромбоэдрически-призматический габитус. Облик удлиненный.

1в) Гексагонально-призматически-ромбоэдрический габитус. Облик удлиненный.

2а) Облик удлиненный, габитус ромбобипирамидально-призматический.

2б) Облик удлиненный, габитус ромбопризматически-бипирамидальный.

2в) Облик удлиненный, габитус ромбопризматически-пинакоидальный.

2г) Облик удлиненный, габитус пинакоидальный.

3) Облик удлиненный, габитус пинакоидально-ромбопризматически-бипирамидальный.

Ступень 2. Занятие 16

Категория средняя, сингония гексагональная, подсингония тригональная. Класс по Браве — $L_3 3L_2 4P$, по Шёнфлису — D_{3h} , по общей форме — дитригонально-бипирамидальный.

Облик — удлиненный, габитус — тригонально-призматически-бипирамидальный.

№	Число граней	О–З	Ч–О	Название
1	3	открытая	частная	тригональная призма
2	3	открытая	частная	тригональная призма
3	6	закрытая	частная	тригональная бипирамида
4	6	закрытая	частная	тригональная бипирамида
5	6	закрытая	частная	тригональная бипирамида

Ступень 3. Занятие 18

1а) К любому кубическому классу; 1б) T , T_h ; 1в) T .

2а) T_h , O , O_h ; 2б) T_h ; 2в) T , T_d .

3а) $4 + 4 + 6 = 14$ (T , T_d); 3б) $4 + 4 = 8$ (T , T_d).

4а) 4 (в классах T , T_d); 4б) в любом кубическом классе (8 или $4 + 4$);

4в) $4 + 6 = 10$ (в классах T , T_d);

4г) $4 + 4 + 6 = 14$ или $8 + 6 = 14$ (в любом кубическом классе);

4д) ни в каком.

Ступень 3. Занятие 19

1) $\bar{4}3m = 3L_44L_36P = T_d$, сингония кубическая, форма общего положения — гексатетраэдр; $\bar{4}2m = L_42L_22P = D_{2d}$, сингония тетрагональная, кубическая, форма общего положения — тетрагональный трапецоэдр.

2) $C_{2h} = L_2PC = 2/m$, сингония моноклинная, категория низшая, общая форма — ромбическая призма; $D_{2h} = 3L_23PC = mmm$, сингония ромбическая, категория низшая, общая форма — ромбическая бипирамида.

3) $32 = L_33L_2 = D_3$, сингония гексагональная, общая форма — тригональный трапецоэдр; $23 = L_33L_24L_3 = T$, сингония кубическая, общая форма — пентагонитритетраэдр.

4) $D_{3h} = L_33L_24P = \bar{6}m2$, средняя категория, общая форма — дитригональная бипирамида; $D_{3d} = L_33L_23P = \bar{3}m$, средняя категория, общая форма — тригональный скаленоэдр.

5) $222 = 3L_2 = D_2$, сингония ромбическая, общая форма — ромбический тетраэдр; $422 = L_44L_2 = D_4$, сингония тетрагональная, общая форма — тетрагональный трапецоэдр.

6) $C_{4h} = L_4 = 4/m$, категория средняя, общая форма — тетрагональная бипирамида; $D_{4h} = L_44L_25PC = 4/mmm$, категория средняя, общая форма — дитетрагональная бипирамида.

7) $m\bar{3}m = O_h = 3L_44L_36L_29PC$, категория высшая, общая форма — гексоктаэдр; $\bar{3}m = D_{3d} = L_33L_23PC$, категория средняя, общая форма — тригональный скаленоэдр.

Ступень 3. Занятие 20

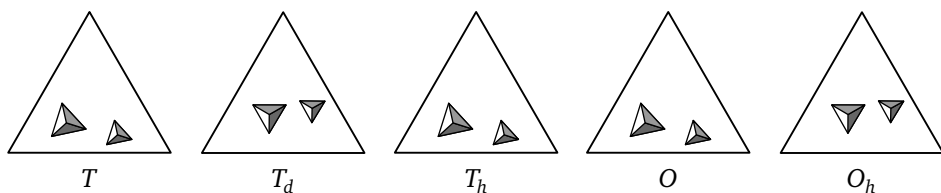
1а) $12 + 20 + 30 = 62$; 1б) $12 + 20 = 32$.

2а) $120 \times 3 = 360$ (три общие формы); 2б) $120 \times 2 = 240^\circ$ (две общие формы); 2в) 120° (общая форма).

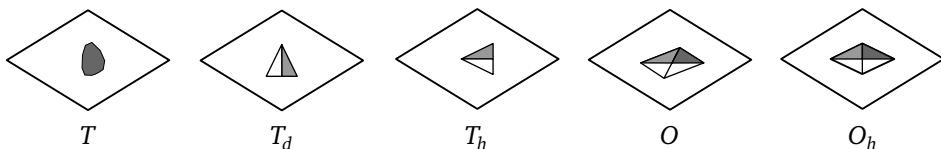
3а) додекаэдр и икосаэдр; 3б) додекаэдр и триаконтаэдр; 3в) икосаэдр и триаконтаэдр.

Ступень 3. Занятие 22

1) Схематичные фигуры травления на гранях тетраэдра и октаэдра:

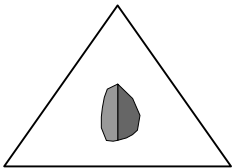
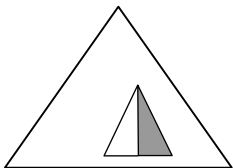
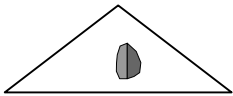
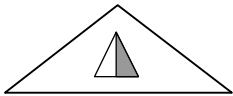


2) Схематичные фигуры травления на гранях ромбододекаэдра:



3) Схематичные фигуры травления на частных икосаэдрических формах:

Форма	Класс Y	Класс Y_h
триаконтаэдр		
икосаэдр		
пентагондодокаэдр (правильный)		
тетрагон-три-икосаэдр		

тригон-пента-додекаэдр		
тригон-три-икосаэдр		

Ступень 3. Занятие 23

№	$A - B$	$A - C$	$B - C$	№	$A - B$	$A - C$	$B - C$
1	13	58	49	17	139	137	69
2	126	129	11	18	134	113	34
3	79	67	136	19	58	21	40
4	144	72	133	20	120	118	121
5	37	158	144	21	144	158	32
6	18	168	171	22	138	90	57
7	69	157	118	23	116	47	80
8	87	92	39	24	136	111	94
9	48	19	31	25	93	29	68
10	110	90	132	26	178	150	32
11	12	96	87	27	125	49	76
12	124	30	103	28	41	101	88
13	160	133	27	29	107	93	137
14	120	157	46	30	68	128	75
15	124	96	67	31	119	35	113
16	75	97	76	32	72	26	97

Ступень 3. Занятие 24

1) Первый кристалл представлен ромбической бипирамидой, класс симметрии mmm , второй кристалл представлен тетрагональной пирамидой, призмой и двумя моноэдрами, класс симметрии — $4mm$.

2) 1, 2, 4, 5 — да; 3, 6 — нет.

3) Правильный вариант ответа — № 5.

Олимпиада школьников

Типовая задача на пространственное воображение

Возрастная группа II

а) Не менее 6, в соответствии с формулой Эйлера; б) 6 вершин.

Возрастная группа III

а) Гексагональная сингония: $(6 + 1)$, $(3 + 3 + 1)$; ромбическая сингония $(4 + 2 + 1)$, $(2 + 2 + 2 + 1)$; моноклинная сингония $(2 + 2 + 2 + 1)$; триклинная сингония $(2 + 2 + 2 + 1)$, $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$.

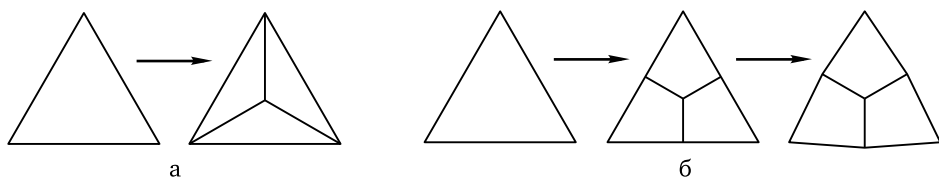
б) Получится гексаэдр.

Возрастная группа IV

а) Нет, не может.

б) Класс D_2 ; грани трех пинакоидов проецируются на выходы осей второго порядка.

в) У тетрагон-три-тетраэдра на 6 ребер больше (24 против 18). Решение:



Эволюция грани тетраэдра при его превращении в тригонритетраэдр (а) и в тетрагонритетраэдр (б)

У тетраэдра шесть ребер. Они сохранились, но на каждой из 4 граней добавилось по три ребра. Итого у тригонритетраэдра 18 ребер: $6 + 4 \times 3$. Может показаться, что во втором случае ответ будет аналогичным, так как на каждой исходной грани также добавляется по три ребра, но это не так. Дело в том, что каждое базовое ребро тетраэдра еще само ломается пополам на два ребра. Итого у тетрагонритетраэдра 24 ребра: $6 \times 2 + 4 \times 3$.

Предметный указатель

Алмаз 74
альбит 25
анизотропность 9, 35
анортит 25
арагонит 27

Барит 27
берилл 53, 67
биотит 27

Вершина 11
вульфенит 53

Габитус 66
галенит 74
галит 74
гексагональная бипирамида 60, 61
— пирамида 58
— призма 58, 60
гексагональный трапецоэдр 60
гексаоктаэдр 79
гексаоктаэдрический класс 79
гексатетраэдр 78
гексатетраэдрический класс 78
гексаэдр 13, 76
гематит 54
гранат 74
грань 11
гриноцит 112
группа вращающегося цилиндра 93
— вращающегося шара 94
— неподвижного конуса 93
— покоящегося цилиндра 93
— покоящегося шара 94
— полярная 93
— скрученного цилиндра 93

Дендрит 98
дигексагональная бипирамида 62
— пирамида 62
— призма 60
дидодекаэдр 78

дидодекаэдрический класс 78
диопсид 27
диоптаз 53
дитетрагональная бипирамида 62
— пирамида 62
— призма 59
дитригональная бипирамида 61
— пирамида 62
— призма 60
диэдр 31
додекаэдр 13

Закон постоянства углов 7
знак Фюзю 19
зона 107

Изумруд 53
икосаэдр 12

Кальцит 54
касситерит 53
категория 22
— высшая 22
— низшая 22
— средняя 22
квазикристалл 13, 85
кварц 53
кианит 25
класс симметрии 19, 21
комбинационный многогранник 29
конгруэнтность 14
корунд 53
кристалл 9
кристаллизатор 97
кристаллогенезис 10
кристаллография геометрическая 9
— математическая 9
— физическая 10
кристаллохимия 9
Кюри—Вульфа правило 96

Лед 53

Международный символ 81

микроклин 25
 многогранник 10
 — выпуклый 10
 — правильный 10
 молибденит 112
 моноэдр 29
 мусковит 27

Нанотрубка 90**Облик 66**

— игольчатый 67
 — изометричный 66
 — пластинчатый 67
 — псевдоизометричный 66
 — столбчатый 67
 — таблитчатый 67
 — удлинённый 67
 — уплощённый 67
 октаэдр 12
 оливин 27, 34
 онтогенез 97
 операция симметрии 15
 ортоклаз 27
 основной закон геометрической кристаллографии 17
 ось вращения 15
 — высшего порядка 19
 — низшего порядка 19
 — симметрии зеркально-поворотная 39
 — — инверсионная 39
 — — поворотная 15

Пентагондодекаэдр 76, 89

пентагонпентадодекаэдр 89
 пентагонтриоктаэдр 78
 пентагонтриоктаэдрический класс 78
 пентагонритетраэдр 77
 пентагонритетраэдрический класс 77
 первая теорема топологии 11
 пинакоид 29
 пирит 97
 платоновы тела 11
 повелит 112
 подсингония гексагональная 23
 — тригональная 23
 порядок оси 15
 пояс 107

предельная группа симметрии 91

принцип Неймана 94
 — суперпозиции 94
 проекция 18
 — гномостереографическая 36
 — стереографическая 33
 — сферическая 33
 простая форма 28
 — — закрытая 29
 — — общая 55
 — — открытая 29
 — — частная 55

Равнонаклонность 55

размножающая способность 77
 ребро 11
 ромбическая бипирамида 32
 — пирамида 32
 — призма 31
 ромбический тетраэдр 31
 ромбододекаэдр 76
 ромбоэдр 59
 рубин 54
 рутил 53

Сапфир 54

символика Германа—Могена 81
 — Шёнфлиса 64
 симметричная фигура 15
 симметрия 14
 сингония 22
 — гексагональная 23
 — кубическая 23
 — моноклиная 23
 — ромбическая 23
 — тетрагональная 23
 — триклиная 23
 скелет 98
 станнин 112
 стишовит 53
 сфалерит 74
 сферолит 98

Таутозональные грани 107

тетрагексаэдр 77
 тетрагональная бипирамида 60, 61
 — пирамида 58
 — призма 58
 тетрагональный скаленоедр 61
 — тетраэдр 59

тетрагональный трапецоэдр 60
тетрагонтрииикосаэдр 89
тетрагонтриоктаэдр 78
тетрагонтритетраэдр 76
тетраэдр 12
типоморфный признак 97
титанит 27
топаз 27
тригональная бипирамида 59
— пирамида 58
— призма 58
тригональный скаленоэдр 61
— трапецоэдр 60
тригондекадодекаэдр 89
тригонпентадодекаэдр 89
тригонтетрагексаэдр 76
тригонтрииикосаэдр 89
тригонтриоктаэдр 78
тригонтритетраэдр 76
турмалин 53, 67

Угол моноклинности 23

Фигуры растворения 97

фигуры травления 97
флюорит 74
форстерит 33
фуллерен 90

Халькопирит 53
хризоберилл 33, 112

Центр инверсии 15
циклические группы 64
циркон 53

Число граней простой формы 29

Шеелит 53
шпинель 74
штриховка 97

Элемент симметрии 15
элементарный угол поворота 15
элементы симметрии простые 39
— — сложные 39
— — эквивалентные 20
энантиоморфность 15, 93

Рекомендованная литература

1. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1972.
2. Ферсман А. Е. Занимательная минералогия (книга издавалась неоднократно различными издательствами).
3. Костов И. Кристаллография / Пер. с болгарского. М.: Мир, 1965.
4. Веннинджер М. Модели многогранников Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
5. Тарасов Л. Этот удивительно симметричный мир. М.: Просвещение, 1982.
6. Escher M. C. His life and complete graphic work. New York: Abradale Press, 1982.
7. Уиттекер Э. Кристаллография / Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
8. Шаскольская М. П. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1984.
9. Загальская Ю. Г., Литвинская Г. П., Егоров-Тисменко Ю. К. Кристаллография. М.: Изд-во МГУ, 1992.
10. Иванова Т. К., Дорохова Г. И. Мир кристаллов. М.: Изд-во музея землеведения МГУ, 1997.
11. Кузмичева Г. М. Основные разделы кристаллографии. М.: Изд-во МИТХТ, 2002.
12. Чупрунов Е. В. Задачи по кристаллографии. М.: Физматлит, 2003.
13. Егоров-Тисменко Ю. К. Кристаллография и кристаллохимия. М.: Изд-во КДУ, 2005.
14. Расцветаева Р. К. Сказки о минералах. М.: Изд-во Нижегородского ГУ, 2008.
15. Егоров-Тисменко Ю. К. Руководство к практическим занятиям по кристаллографии. М.: Изд-во МГУ, 2010.
16. Лорд Э. Э., Маккей А. Л., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов / Пер. с англ. М.: Физматлит, 2010.
17. Урусов В. С., Еремин Н. Н. Кристаллохимия. Краткий курс. М.: Изд-во МГУ, 2010.
18. Ворошилов Ю. В., Павлишин В. И. Основы кристаллографии и кристаллохимии. Рентгенография кристаллов. Киев: Изд-во КНТ, 2011.

Полезные интернет-ресурсы

1. <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/> — страница учебного курса «Кристаллография» геологического факультета МГУ.
2. <http://cryst.geol.msu.ru/entrant/> — страница для абитуриентов кафедры кристаллографии геологического факультета МГУ.
3. http://www.shapesoftware.com/00_Website_Homepage/ — программы для визуализации кристаллических структур и моделей кристаллов.
4. <http://www.mindat.org/> — минералогическая база данных (включая рентгенограммы, трехмерные модели простых форм и т.д.).
5. <http://database.iem.ac.ru/mincryst/> — MINCRYST — кристаллографическая база данных.
6. <http://www.kristall2000.de/index-Dateien/Informationen.htm> — программа для рисования кристаллов и изготовления их разверток.
7. <http://www.jcrystal.com/products/krystalshaper/> — еще одна программа для визуализации кристаллов и изготовления их разверток.
8. <http://www.webmineral.com/help/Forms.shtml> — готовые выкройки кристаллов всех 32 классов симметрии.
9. <http://www.geokniga.org/tests/2156> — тесты по кристаллографии на портале «Геокнига».
10. <http://geoschool.web.ru/olympiad/> — страница Московской открытой олимпиады школьников по геологии.
11. <http://cryst.geol.msu.ru/olimpiada/index.php> — страница кабинета кристаллографии на Московской открытой олимпиаде школьников по геологии.
12. <http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/inter/> — интерактивные тесты по кристаллографии.

Рис. 1. К упражнениям 1–4 занятия 3



а



в



б



г

Рис. 2. К упражнению 1 занятия 15 (2–7)



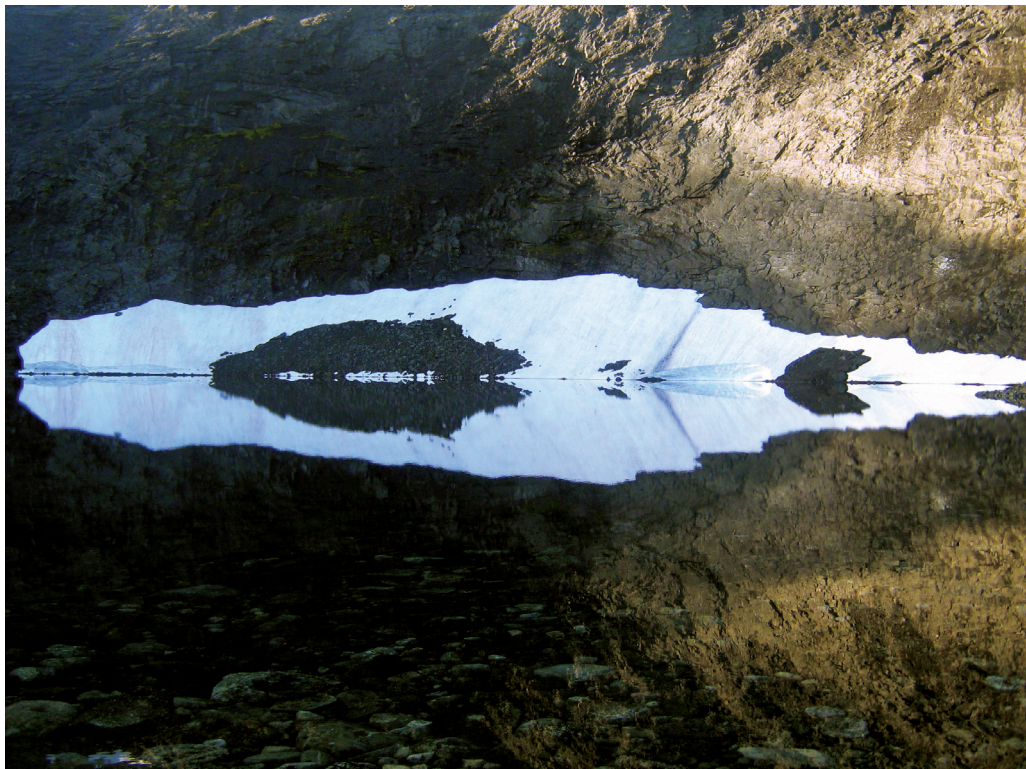
а



б

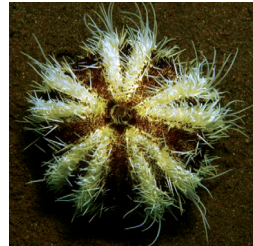
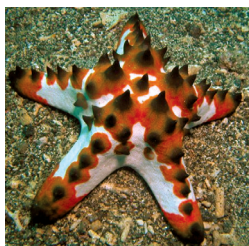


в



Гладкая поверхность воды – элемент симметрии второго рода.
Озеро Горное, массив Ловозерские тундры, Мурманская область, Россия.
Фотография М.А. Глазковой

Рис. 4. К занятию 21 (3–5)

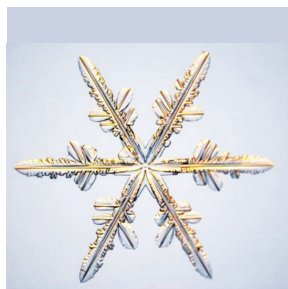


Живые организмы уважают оси некристаллографических порядков

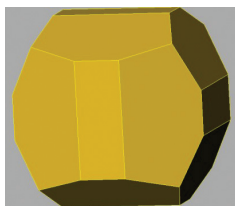
Определение симметрии объекта

(модель кристалла, природный минерал, некристаллический многогранник, предмет живой природы, искусственный предмет)

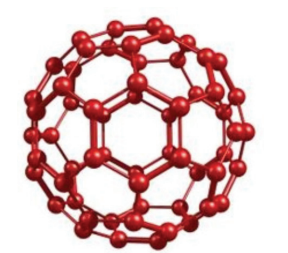
**Типовые
объекты**
(возрастная
группа II)



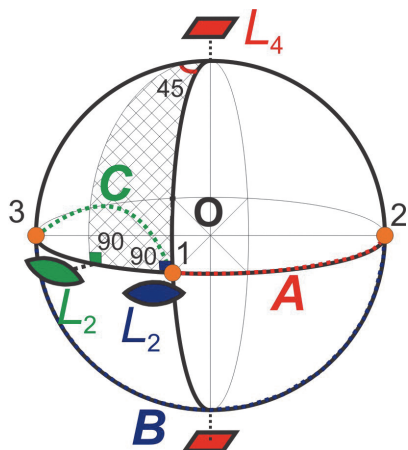
**Типовые
объекты**
(возрастная
группа III)



**Типовые
объекты**
(возрастная
группа IV)

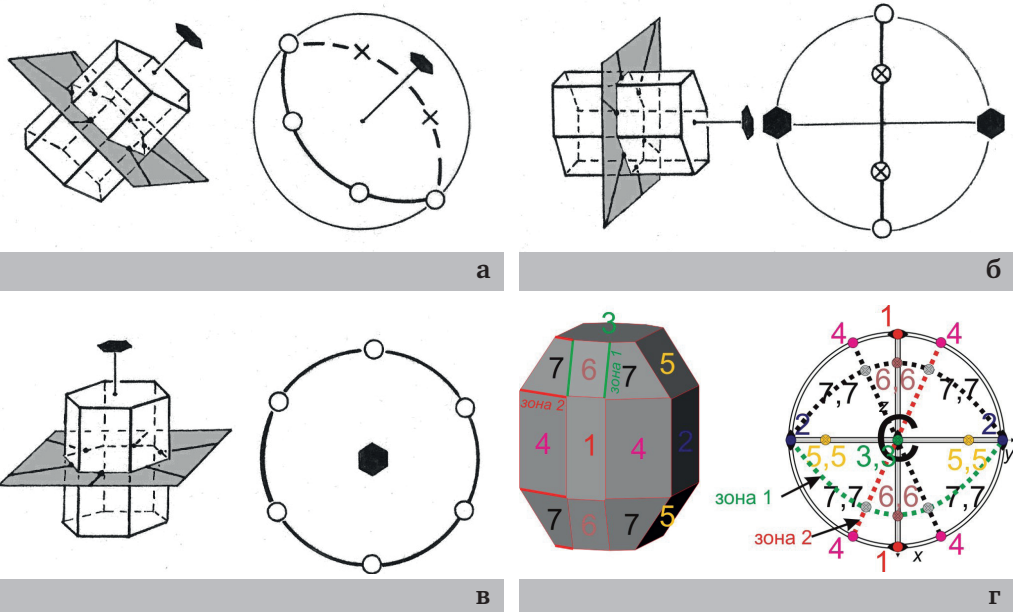


Типовые объекты для определения симметрии



К взаимосвязи углов поворота осей и перемещения точки по поверхности сферы. А, В и С – путь, пройденный точкой в результате последовательного поворота вокруг осей L_4 , L_2 и L_1 , соответственно. Сферический треугольник с углами 45°, 90° и 90° (сумма внутренних углов 225°) выделен штриховкой.

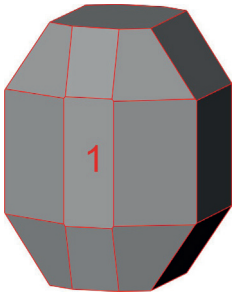
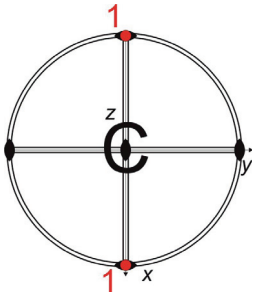
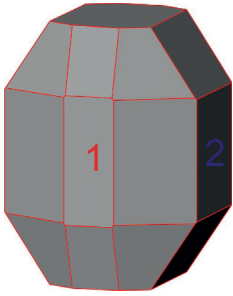
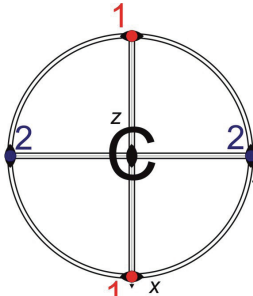
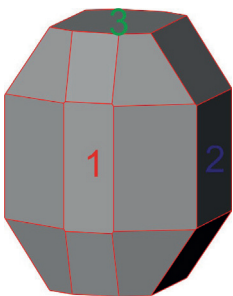
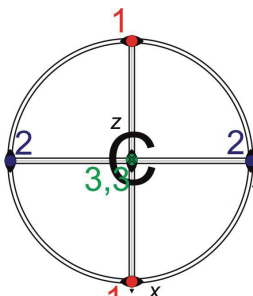
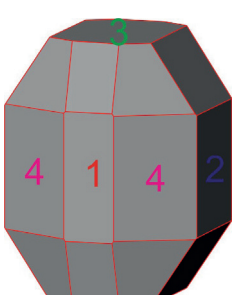
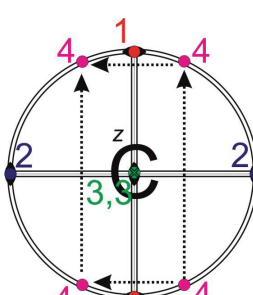
Рис. 7. К занятию 24 (3–8)

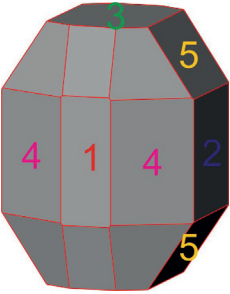
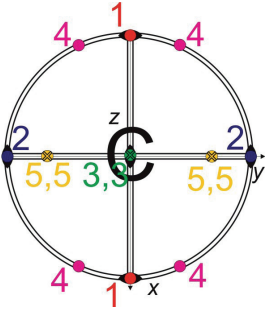
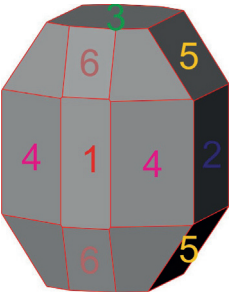
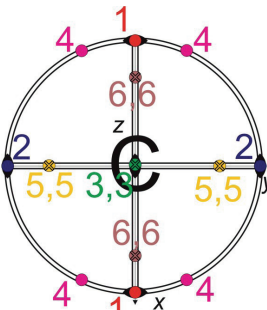
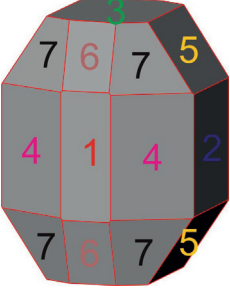
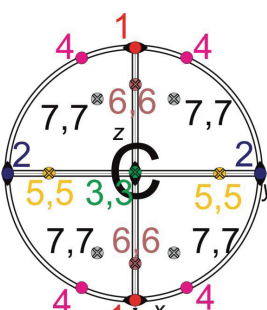


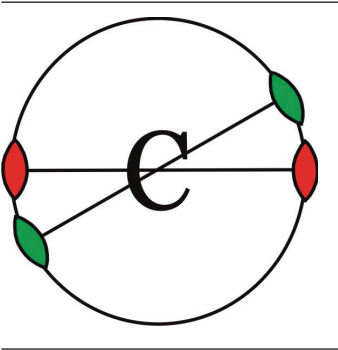
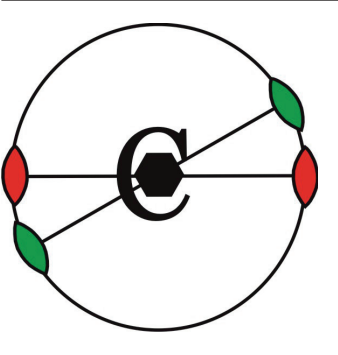
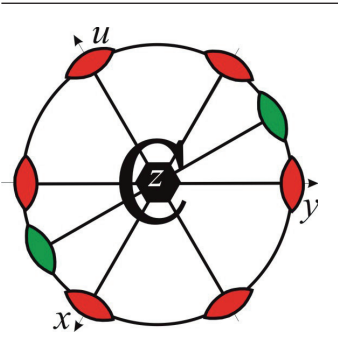
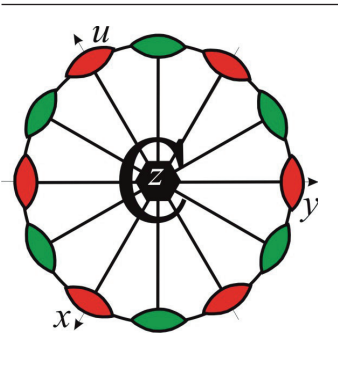
Проецирование граней: а) расположенных в наклонной зоне и связанных между собой осью шестого порядка; б) расположенных в вертикальной зоне; в) расположенных в горизонтальной зоне; г) правильное положение граней простой формы № 7 кристалла оливина (таблица А цветной вклейки) на пересечении зон

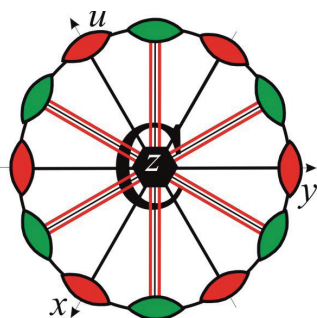
Таблица А. К занятию 8.

Последовательные шаги по описанию кристалла низшей категории (оливина).
Часть 2

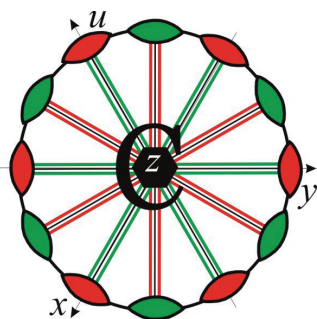
Кристалл	На проекции изображено	Примечание
		Вид проекции после шага 1.
		Вид проекции после шага 2.
		Вид проекции после шага 3.
		Вид проекции после шага 4.

Кристалл	На проекции изображено	Примечание
		Вид проекции после шага 5.
		Вид проекции после шага 6.
		Конечный вид проекции кристалла оливина

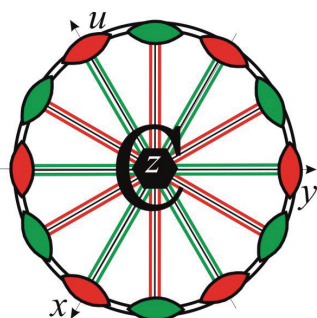
На чертеже изображено	Комментарии
	Наносим на чертеж исходные элементы симметрии – центр и 2 оси второго порядка. Обозначаем их разным цветом. Одну ось ориентируем по направлению y, вторую — под углом 30° к ней, воспользовавшись рисками на трафарете.
	Осуществим взаимодействие двух осей второго порядка. Вспоминаем, что если встречаются под углом α две оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка $360^\circ/2\alpha$. В нашем случае возникает вертикальная ось шестого порядка. Наносим ее на чертеж.
	Ось шестого порядка вращает красные оси второго порядка на 60°. Получим еще две красные оси, ориентированные по координатному направлению x и y. Нанесем их на чертеж, заодно обозначим и оси координат.
	Аналогично получим еще две зеленые оси второго порядка, ориентированные по диагональным направлениям, которые в данном случае являются еще и апофемальными (апофемой называется перпендикуляр, опущенный из центра правильного многоугольника на одну из его сторон). Нанесем их на чертеж.



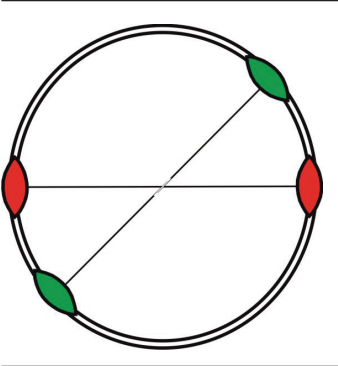
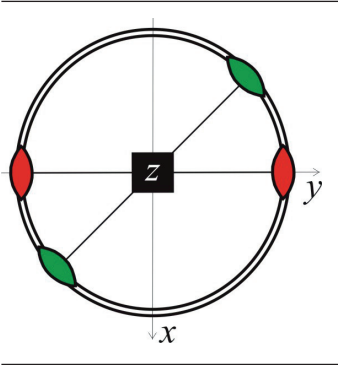
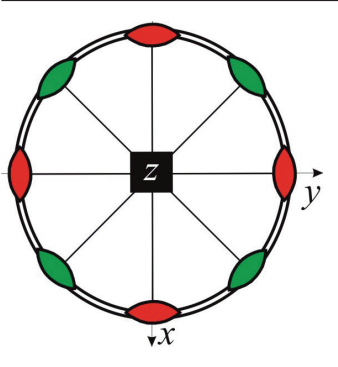
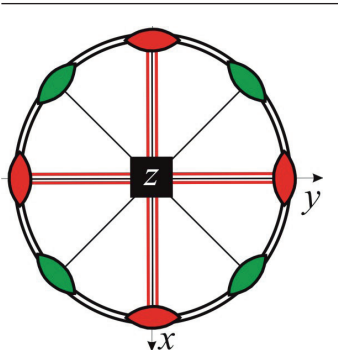
Вспомним, что у нас имеется центр инверсии и «магическое» сочетание (L_2 – P – C), являющееся частным случаем взаимодействия поворотной и инверсионной осей. При наличии центра и оси второго порядка возникает перпендикулярная оси плоскость. Применим это правило к красным осям и центру. Получим три красных плоскости. Наносим их на чертеж.



Теперь применим это правило к зеленым осям второго порядка и центру. Получим три зеленых плоскости. Наносим их на чертеж. Обратим внимание, что координатные оси второго порядка лежат в апофемальных плоскостях, а апофемальные оси — в координатных плоскостях.



Обратим внимание, что вертикальная ось шестого порядка является четной – осуществив тройной поворот вокруг нее на элементарный угол в 60° , мы получим вращение на 180° . Это означает, что «внутри» оси шестого порядка (равно как и внутри любой другой четной оси) заложена ось второго порядка. Осуществим уже известное нам взаимодействие центра и этой оси второго порядка с появлением горизонтальной плоскости. Рисуем эту плоскость. Эта операция записывается следующим образом: $L_2(\text{ в } L_6) \times C = P_z$.

На чертеже изображено	Комментарии
	Наносим на чертеж исходные элементы симметрии – плоскость P_z и 2 оси второго порядка. Обозначаем их разным цветом. Одну ось ориентируем по направлению y, вторую – под углом 45° к ней, воспользовавшись рисками на трафарете.
	Осуществим взаимодействие двух осей второго порядка. В нашем случае возникает вертикальная ось четвертого порядка, перпендикулярная исходным осям второго порядка и проходящая через линию их пересечения. Наносим ее на чертеж, заодно обозначим и оси координат прямоугольной координатной системы.
	Ось четвертого порядка вращает красную и зеленую оси второго порядка на 90°. Получим еще две оси – одну красную и одну зеленую. Нанесем их на чертеж. У нас получилось две группы осей второго порядка – координатные, совпадающие с координатными осями x и y (показаны на чертеже красным цветом), и диагональные (показаны на чертеже зеленым цветом).
	Осуществим взаимодействие: координатная ось второго порядка (красная) – горизонтальная плоскость. В результате получим вертикальную плоскость, нормаль к которой ориентирована по координатному направлению (x или y). При этом ось будет лежать на линии пересечения исходной горизонтальной и порожденной вертикальной плоскости. Наносим на чертеж две полученные координатные вертикальные плоскости.

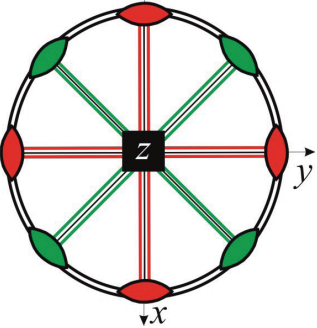
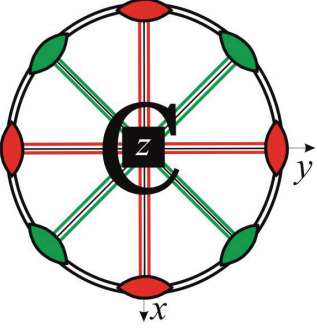
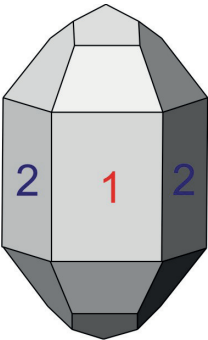
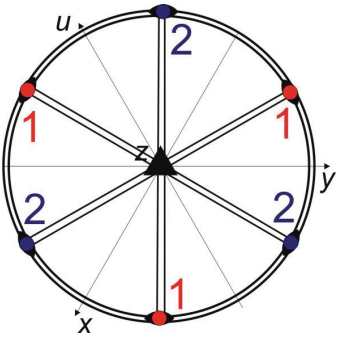
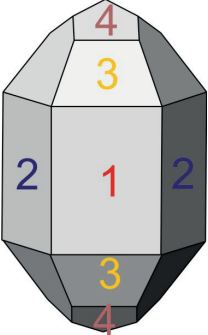
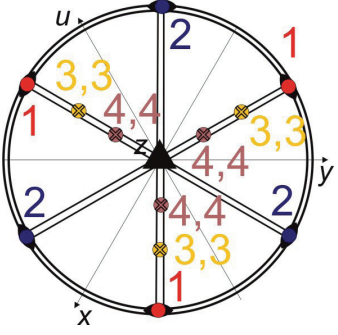
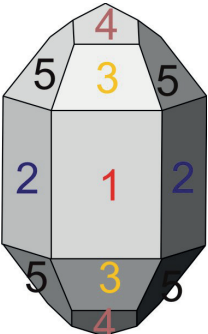
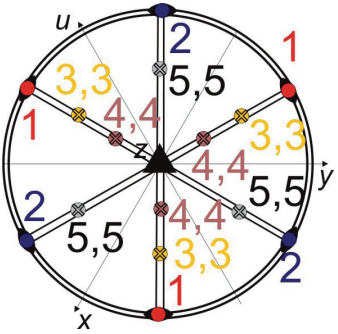
На чертеже изображено	Комментарии
	Аналогично осуществим взаимодействие диагональных осей второго порядка (зеленых) с горизонтальной плоскостью. В результате получим две вертикальные плоскости, нормали к которым ориентированы по диагональным направлениям. Наносим на чертеж две новые диагональные зеленые плоскости.
	Вертикальная ось четвертого порядка четная, следовательно, «внутри» нее заложена ось второго порядка. Осуществим известное нам взаимодействие горизонтальной плоскости и перпендикулярной ей оси второго порядка с появлением центра. Подписываем его на чертеже. Эта операция записывается следующим образом: $L_2(\text{в } L_4) \times P_z = C$. Обратим внимание, что этот центр можно получить еще четырьмя способами: взаимодействием между собой любой из двух красных осей L_2 и перпендикулярной ей красной плоскости либо взаимодействием одной из двух зеленых осей L_2 и перпендикулярной ей плоскости.

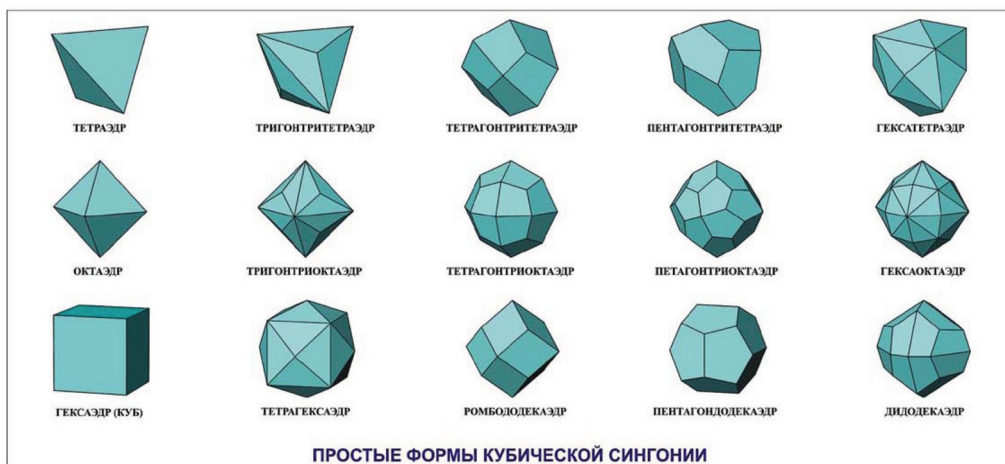
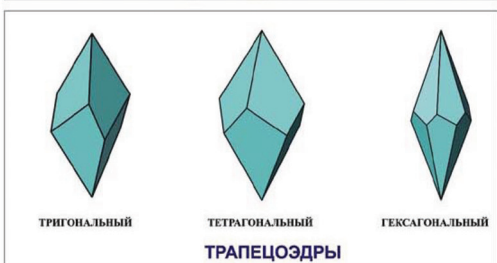
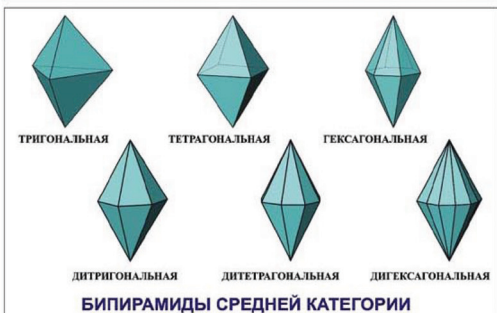
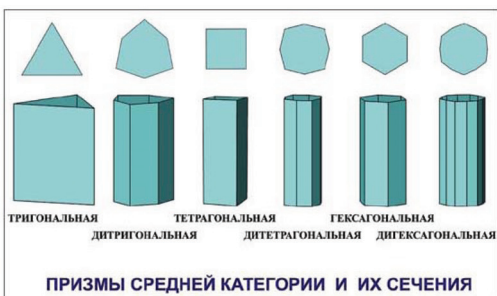
Таблица Г. К занятию 16 (2–8).
 Последовательные шаги по описанию контрольного кристалла.
 Часть 2

Кристалл	На проекции изображено	Примечание
		Вид проекции после шага 1.
		Вид проекции после шага 2.
		Вид проекции после шага 3.

32 класса симметрии кристаллов

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$		ВЫШАЯ $a = b = c$	
	Тригональная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
C_n	C_1 L_1 1 монотр	C_2 L_2 2 осевой дигр		C_4 L_4 4 пирамида (тетр.)	C_3 L_3 3 пирамида (триг.)	C_6 L_6 6 пирамида (гекс.)	
	C_i C $\bar{1}$ пинакод	C_s P σ плоскостной дигр		C_{4i} C_4 $\bar{4}$ тетраэдр (тетр.)	C_{3i} C_3 $\bar{3}$ ромбоэдр		
C_{ni}							
D_n			$3L_2$ D_2 222 тетраэдр (ромб.)	L_4L_2 D_4 422 тетраэдр (тетр.)	L_3L_2 D_3 32 триг.эдр (триг.)	L_6L_2 D_6 622 триг.эдр (гекс.)	$3L_4L_2$ T 23 тетрагон-три-тетраэдр
							$3L_4L_2$ O 432 тетрагон-три-октаэдр

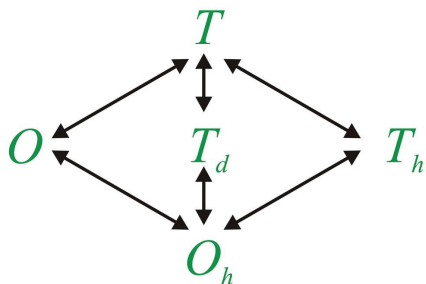
47 простых форм кристаллов



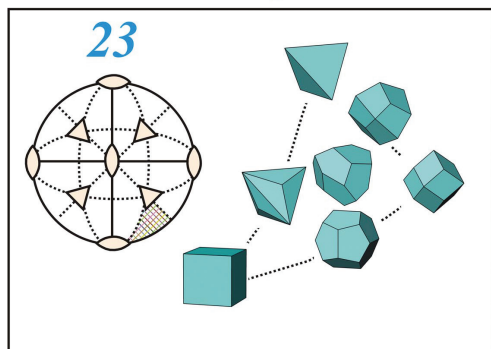
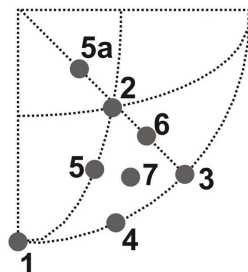
Стенд кафедры кристаллографии геологического факультета МГУ:
<http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/47form.jpg>.
 Оригинал формата А0 доступен в электронном виде по запросу

Простые формы кубических кристаллов

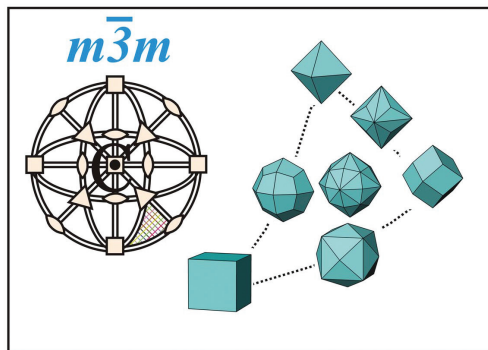
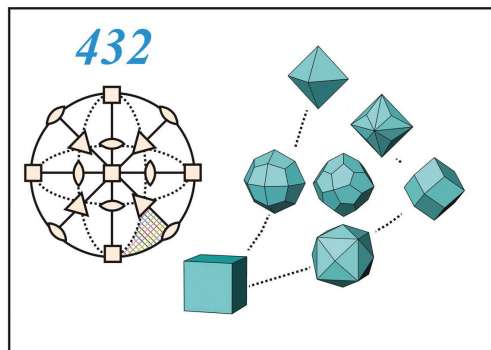
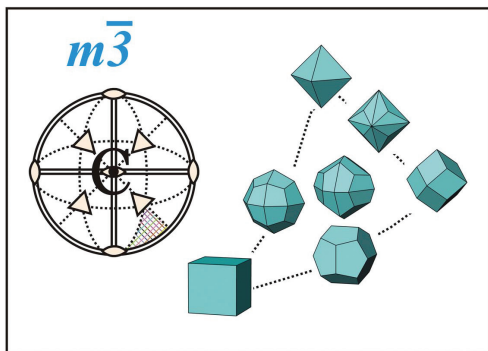
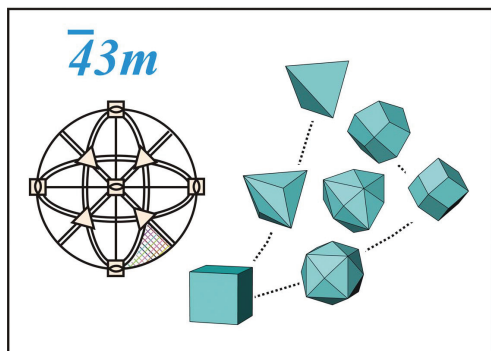
К занятию 18 (3–2)



- 1 - {100}
- 2 - {111}
- 3 - {110}
- 4 - {hk0}
- 5 - {hkk}
- 5a - {hhl} |>h
- 6 - {hhl} |<h
- 7 - {hkl}



	1	2	3	4	5	6	7	
	100	111	110	hk0	hkk	hhl	hkl	
T	Гексаэдр	Тетраэдр	Ромбододекаэдр	Пентагон додекаэдр	Тригон тригексаэдр	Тетрагон тригексаэдр	Пентагон тригексаэдр	
T_d				Тетрагексаэдр			Гекса тетраэдр	
T_h		Октаэдр		Пентагон додекаэдр	Тетрагон триоктаэдр	Тригон триоктаэдр	Дидододекаэдр	
O				Тетра гексаэдр			Пентагон триоктаэдр	Гексоктаэдр
O_h								



Стенд кафедры кристаллографии геологического факультета МГУ:
http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/cubic_a4.jpg.

Оригинал формата A0 доступен в электронном виде по запросу

Предельные группы симметрии Кюри

Группы Кюри являются обобщениями конечных точечных групп при условии, что порядок оси симметрии стремится к бесконечности.

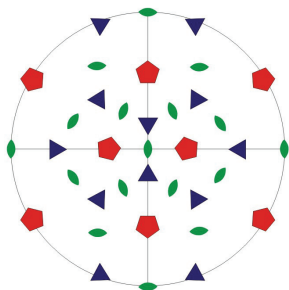


П.Кюри
Nobel Prize
1903 (Physics)

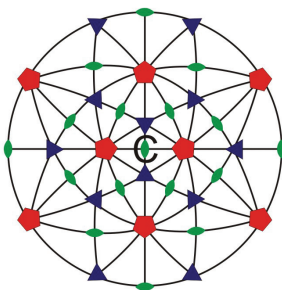
Принцип суперпозиции Кюри - кристалл под внешним воздействием будет обладать теми элементами симметрии, которые являются общими для кристалла при отсутствии воздействия и для воздействия при отсутствии кристалла

		группа ∞ вращающегося конуса правая и левая Описывает симметрию среды с особым полярным направлением
		группа ∞m неповоротного конуса Описывает симметрию однородного электрического поля
		группа ∞/m вращающегося цилиндра правая и левая Описывает симметрию однородного магнитного поля
		группа $\infty 2$ правая и левая Описывает симметрию оптически активной изотропной среды
		группа ∞/m неповоротного цилиндра Описывает симметрию однородного поля одноосных механических напряжений (сжатие, растяжение)
		группа $\infty/3$ правая и левая Описывает симметрию оптически активной изотропной среды
		группа $\infty/2$ правая и левая Описывает симметрию скалярных воздействий (однородное нагревание, гидростатическое сжатие)

Икосаэдрические группы



Группа I - $6L, 10L, 15L_2$



Группа Ia - $6L, 10L, 15L_2, 15PC$

Примеры икосаэдрической симметрии:

Аперриодические структуры (квазикристаллы)

Атомные кластеры

Фрагменты нанотрубок

Фуллерены

Локальное атомное окружение в структурах (B и другие)

Вирусные каспиды

Искусственные геометрические фигуры

Положение простых форм на проекции	капсид вируса SV-40	монокристалл Ho-Mg-Zn квазикристалла	изображение нанотрубки	модель фуллерена C60	икосаэдрический кластер в структуре B ₂₀	футбольный мяч как комбинация додекаэдра и икосаэдра
Правильный пентагон-додекаэдр	Ромбический триаконтаэдр	Икосаэдр	Пирамидальный икосаэдр (тригон-пента-додекаэдр)	Пирамидальный додекаэдр (тетрагон-три-икосаэдр)	Триаксис-икосаэдр (тетрагон-три-икосаэдр) (тетрагон-пента-додекаэдр)	Пентагональный пентагон-икосаэдр (левый - правый) (пентагон-пента-додекаэдр)
12 граней CCG - L ₁ (I) CCG - L ₅ P (I _h)	30 граней CCG - L ₂ (I) CCG - L ₂ P (I _h)	20 граней CCG - L ₁ (I) CCG - L ₃ P (I _h)	60 граней CCG - 1 (I) CCG - P (I _h)	60 граней CCG - 1 (I) CCG - P (I _h)	60 граней CCG - 1 (I) CCG - P (I _h)	60 граней общая форма класса I
						120 граней общая форма класса I _h

К занятиям 20 (3–4), 21 (3–5).

Стенд кафедры кристаллографии геологического факультета МГУ:
http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/ikos_a4.jpg.

Оригинал формата A0 доступен в электронном виде по запросу