

Ю. Н. ДУБНИЩЕВ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Издание второе,
переработанное

*РЕКОМЕНДОВАНО
УМО вузов РФ по образованию
в области приборостроения и оплотехники
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
«Приборостроение», «Оплотехника»,
«Фотоника и оптоинформатика» и специальностям
«Лазерная техника и лазерные технологии»,
«Оптико-электронные приборы и системы»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
МОСКВА •
КРАСНОДАР •
2011

ББК 22.336

Д 79

Дубнищев Ю. Н.

Д 79 Колебания и волны: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 384 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1183-2

В пособии показана глубокая общность колебательных и волновых процессов независимо от их природы. Широко используется электромеханическая аналогия. Внимание читателя в первую очередь обращается на физический смысл, наглядность и приложения, важные для понимания сущности изучаемых явлений и их теоретических моделей.

Подробно обсуждается распространение оптических волн в металлических и диэлектрических волноводах. Отдельная глава посвящена влиянию нелинейных эффектов, в которых рассматриваются явления самомодуляции, самофокусировки световых пучков, генерации оптических гармоник, формирования и распространения оптических солитонов. Приведены задачи, решение которых способствует закреплению изучаемого материала.

Пособие ориентировано на студентов и аспирантов, специализирующихся в области техники, лазерной техники, оптических измерительных и информационных технологий, включая оптическую локацию и связь, оптико-электронные системы, фотонику и оптоинформатику и другие смежные специальности радиотехнического, приборостроительного и физического профиля.

ББК 22.336

Рецензенты:

В. А. ТАРЛЫКОВ, доктор технических наук, профессор кафедр лазерной техники и биомедицинской оптики СПбГУ ИТМО;
В. А. ЛАБУСОВ, доктор технических наук, зав. лабораторией оптических информационных систем Института автоматики и электрометрии СО РАН; **А. В. ШИШАЕВ**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики полупроводников СО РАН.

Обложка

Л. А. АРНДТ

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2011

© Ю. Н. Дубнищев, 2011

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие основано на курсе лекций, читаемом студентам Новосибирского государственного технического университета, обучающихся по направлениям «Оптехника», «Фотоника и оптоинформатика», а также специальностям, связанным с применением оптических методов и технологий в различных областях инженерной деятельности. Курс является базовым и предваряет последующее преподавание дисциплин специализации, в которых используются колебательные модели.

Инженерно-технический профиль обучающихся и потенциального круга читателей обусловил выбор материала и способов его подачи с целью дать представление об универсальности теории колебаний и волн и ее различных применениях, избегая при этом излишнего формализма.

Изложение ведется с единых позиций, выявляющих глубокую общность колебательных и волновых процессов независимо от их природы, поскольку любую среду можно представить как набор свободных или связанных осцилляторов. Широко используется электромеханическая аналогия. Внимание читателя в первую очередь обращается на физический смысл, наглядность и приложения, важные для понимания сущности изучаемых явлений и их теоретических моделей. Часто при этом приходится жертвовать математической строгостью и глубиной анализа в отличие от университетских учебников для физических и механико-математических факультетов. Описание распространения волн в сплошной среде, преобразование

их на поверхности раздела, обсуждение физической природы групповой скорости и дисперсии излагаются с использованием понятий импеданса и волнового сопротивления. Излагаются основные понятия о распространении волн и полей в волноводах и световодах. Обсуждаются нелинейные эффекты, автоколебания, явления самомодуляции, самофокусировки световых пучков, генерации оптических гармоник, формирование и распространение оптических солитонов. В каждой главе приведены задачи, решение которых способствует закреплению изучаемого материала. Содержание книги и подбор задач преследуют цель формирования у обучающихся умения понимать физический смысл результатов анализа колебательных процессов.

Пособие ориентировано на студентов и аспирантов, специализирующихся в области оптики, лазерной техники, оптических измерительных и информационных технологий, включая оптическую локацию и связь, оптико-электронные системы и другие смежные направления радиотехнического и приборостроительного профиля.

На содержание данного учебного пособия оказали влияние превосходные в методическом и научном отношении книги, приведенные в списке рекомендованной литературы.

Я глубоко благодарен Р. Г. Надыровой за неоценимую помощь в технической подготовке рукописи. С признательностью приму пожелания и замечания.

Ю. Н. Дубнищев

ВВЕДЕНИЕ

Содержание курса «Колебания и волны» преследует цель выявить глубокое единство в описании колебательных и волновых процессов независимо от их физической природы. Такое единство подтверждается сходством математических моделей колебательных процессов в различных областях естествознания (механика, электромагнетизм, оптика, акустика, некоторые разделы биологии, химии и др.), допускающих универсальность методов анализа явлений и эффектов в самых разнообразных приложениях.

Под колебанием понимаются обычно такие изменения состояния среды, которые характеризуются полной или частичной регулярностью (периодичностью) во времени. Состояние колеблющейся системы можно описать обобщенной координатой, которая в конкретной ситуации отображает смещение, скорость, угол, давление, электрическое напряжение, заряд, ток и др.

По характеру возмущения, действующего на колебательную систему, принято различать следующие основные виды колебаний:

- свободные;
- вынужденные;
- параметрические;
- автоколебания;
- волны.

Свободные колебания появляются, когда состояние колебательной системы после кратковременного начального возмущения изменяется без подвода энергии извне.

При *вынужденных колебаниях* колебательная система подвергается внешнему периодическому воздействию через принудительное изменение физической величины, описывающей колебания.

Параметрические колебания колебательной системы возникают при периодическом изменении одного или нескольких ее параметров.

При *автоколебаниях* имеет место приток энергии от источника, не обладающего колебательными свойствами.

Волны описывают распространение колебательных процессов в различных средах.

Одной из характеристик колебательной системы является число степеней свободы, которое определяется числом независимых переменных, необходимых для описания движения системы.

В зависимости от числа независимых переменных, описывающих колебания в колебательных системах, различают:

- колебательные системы с одной степенью свободы;
- колебательные системы с конечным числом степеней свободы;
- колебательные системы с распределенными параметрами (с бесконечным числом степеней свободы).

Выделяют колебательные системы *линейные*, параметры которых не зависят от состояния системы, и *нелинейные*, у которых параметры системы зависят от ее состояния.

Линейные модели колебательных процессов соответствуют колебаниям малой амплитуды, для которых выполняется принцип суперпозиции — аддитивный отклик на аддитивные воздействия. Уравнения линейных колебаний получаются в результате линеаризации исследуемого процесса вблизи какого-либо выделенного (обычно равновесного) состояния. Для анализа нелинейных колебаний используются различные приближенные методы.

В теории колебаний рассматривают колебательные системы: *консервативные* и *неконсервативные*. Консервативные колебательные системы описываются идеализированными моделями, в которых запас энергии в про-

цессе совершения колебаний остается постоянным, то есть потери энергии отсутствуют. К числу неконсервативных систем относятся диссипативные и автоколебательные системы.

Изменение состояния колебательной системы любой физической природы можно описать дифференциальным уравнением, в котором зависимая переменная вводится как обобщенная координата $x(t)$. Под ней понимается физическая величина, определяющая состояние системы. Если $x(t) = (t + T)$, то T является периодом колебания. $f = 1/T$ и $\omega = 2\pi f$ — частота и циклическая (круговая) частота соответственно.

Колебательные системы характеризуются параметрами, определяющими способность накапливать и диссипировать энергию, преобразовывать ее из одной формы в другую. Комбинации этих параметров определяют импеданс колебательной системы и среды, в которой распространяются волновые процессы.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРАХ

1.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания представляют собой свободные колебания в консервативной системе. Они описываются однородным линейным дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где x — обобщенная координата, ω_0^2 — квадрат собственной частоты колебаний.

Решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где a — амплитуда колебаний, φ — начальная фаза. Постоянные a и φ определяются из начальных условий. Это решение легко проверить подстановкой. Колебательные системы, состояние которых описывается уравнением (1.1), называются гармоническими осцилляторами.

Если x — смещение при колебаниях (отклонение обобщенной координаты от равновесного положения), то $\dot{x}$ — скорость и $\ddot{x}$ — ускорение:

$$\dot{x} = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\ddot{x} = -a\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где $a\omega_0$ — амплитуда скорости (виброскорости); $a\omega_0^2$ — амплитуда ускорения.

Амплитуда скорости гармонических колебаний пропорциональна частоте. Амплитуда ускорения пропорциональна квадрату частоты. Скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$. Ускорение изменяется в противофазе со

смещением. Энергия гармонических колебаний является суммой потенциальной и кинетической энергий.

Представим смещение в комплексной (символической) форме (см. П.1):

$$x \rightarrow \hat{a}e^{i\omega_0 t},$$

где $\hat{a}$ — комплексная амплитуда смещения $\hat{a} = ae^{i\varphi}$

Последовательно дифференцируя смещение по времени, получаем комплексные (символические) представления скорости и ускорения:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{a}e^{i\omega_0 t}) = i\omega_0 \hat{a}e^{i\omega_0 t} = \omega_0 \hat{a}e^{i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})};$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow \frac{d}{dt}(i\omega_0 \hat{a}e^{i\omega_0 t}) = -i\omega_0^2 \hat{a}e^{i\omega_0 t} = \omega_0^2 \hat{a}e^{i(\omega_0 t + \pi)}.$$

Здесь $\omega_0 \hat{a}e^{i\frac{\pi}{2}}$ и $\omega_0^2 \hat{a}e^{i\pi}$ — комплексные амплитуды соответственно скорости и ускорения для гармонического колебания. На рис. 1.1 приведена векторная диаграмма, где смещение, скорость и ускорение отображены на комплексной плоскости в виде вращающихся с угловой скоростью ω фазоров. Модуль и начальное угловое положение каждого фазора определяется модулем и фазовым аргументом соответствующей комплексной амплитуды.

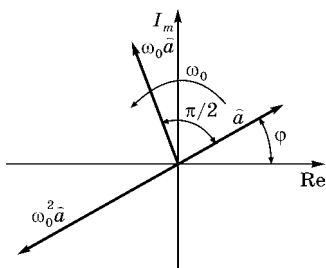


Рис. 1.1

Механический осциллятор.

Тело с массой m подвешено на пружине (рис. 1.2), коэффициент жесткости которой s . Массой пружины в сравнении с массой тела можно пренебречь. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\ddot{x} = -sx.$$

Откуда следует уравнение движения осциллятора (1.1) при

$$\omega_0^2 = \frac{s}{m}.$$

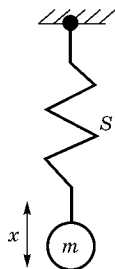


Рис. 1.2

Потенциальная энергия определяется работой, совершаемой системой против возвращающей силы:

$$E_p = \int_0^x s x dx = \frac{1}{2} s x^2.$$

Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Полная энергия:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2.$$

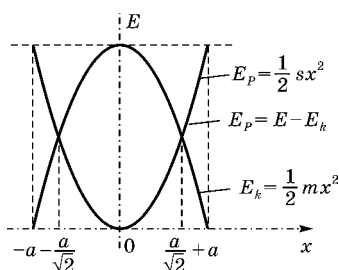


Рис. 1.3

Полная энергия колебаний постоянна, следовательно

$$\frac{dE}{dt} = (m\ddot{x} + sx)\dot{x} = 0.$$

Из закона сохранения энергии следует уравнение колебаний осциллятора:

$$m\ddot{x} + sx = 0.$$

Полная энергия в произвольный момент времени:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2 = \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \cdot [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} s a^2. \end{aligned}$$

На рис. 1.3 показана зависимость потенциальной и кинетической энергии от смещения.

Электрический осциллятор. LC-контур (рис. 1.4).

Согласно закону Кирхгофа, сумма падений напряжений по замкнутому контуру равняется нулю:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Это уравнение принимает форму (1.1) при

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Здесь q — заряд, L — индуктивность, C — емкость, $L\ddot{q}$ — напряжение на индуктивности, $\frac{q}{C}$ — напряжение на емкости.

Аналог потенциальной энергии — энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C},$$

где U — напряжение на обкладках конденсатора.

С кинетической энергией сопоставляется энергия магнитного поля в катушке индуктивности:

$$E_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2.$$

Здесь $I = \dot{q}$ — ток через катушку индуктивности.

Полная энергия:

$$E = E_L + E_C = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Из закона сохранения энергии следует уравнение колебаний осциллятора:

$$\frac{dE}{dt} = \left(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q \right) \dot{q} = 0.$$

Полная энергия в произвольный момент времени:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \\ &= \frac{1}{2}Lq_0^2\omega_0^2 \cdot [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = \\ &= \frac{1}{2}Lq_0^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}, \end{aligned}$$

где q_0 — амплитуда колебаний заряда.

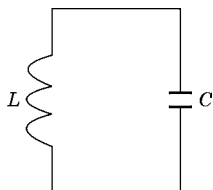


Рис. 1.4

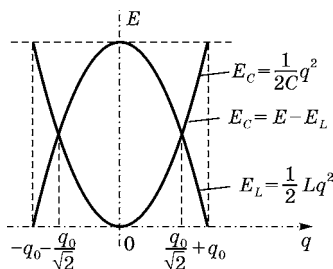


Рис. 1.5

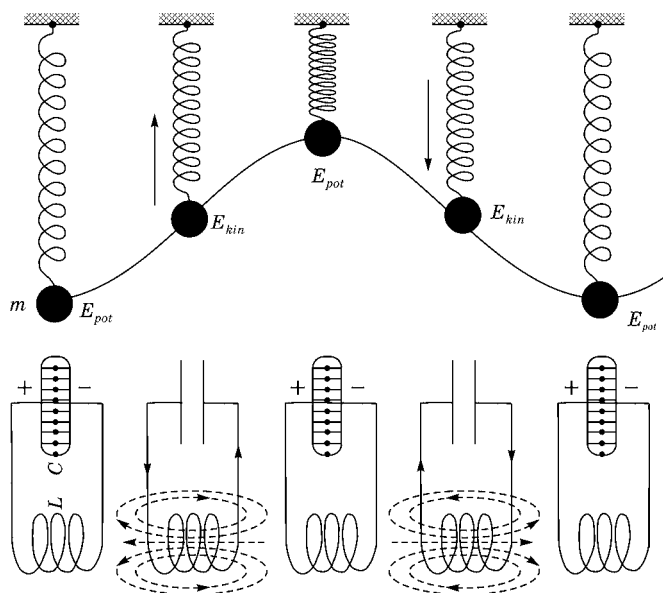


Рис. 1.6

На рис. 1.5 показана зависимость энергий, запасенных в катушке индуктивности и в конденсаторе, от заряда.

На рис. 1.6 сопоставлены состояния механического и электрического осцилляторов на интервале, соответствующем периоду колебания.

Математический маятник (рис. 1.7).

Уравнение движения:

$$m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = 0;$$

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0,$$

где m — масса, l — длина, φ — угол отклонения маятника от положения равновесия.

$$\omega_0^2 = g/l.$$

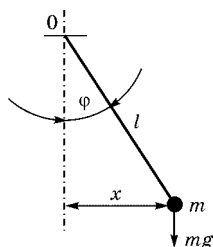


Рис. 1.7

Физический маятник (рис. 1.8).

Тело произвольной формы массой m колеблется относительно горизонтальной оси O . Расстояние от оси O до центра масс C равно l . При отклонении на малый угол φ маятник будет совершать гармонические колебания под действием силы тяжести mg , приложенной к центру масс.

Уравнение движения физического маятника:

$$J\ddot{\varphi} + mgb\sin\varphi = 0.$$

Здесь J — момент инерции маятника относительно оси вращения. Для малых углов φ уравнение движения принимает вид

$$J\ddot{\varphi} + mgb\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{mgb}{J}$.

Из сравнения движения физического и математического маятников следует, что их собственные частоты совпадают, если

$$\frac{mgb}{J} = \frac{g}{l}.$$

Отсюда получаем выражение для так называемой приведенной длины l физического маятника:

$$l = \frac{J}{mb}.$$

При изменении положения оси вращения O меняется момент инерции физического маятника J . По теореме Гюйгенса–Штейнера:

$$J = J_0 + mb^2,$$

где J_0 — момент инерции относительно центра масс. Тогда для собственной частоты колебаний физического маятника получаем

$$\omega_0^2 = \frac{mgb}{J_0 + mb^2}.$$

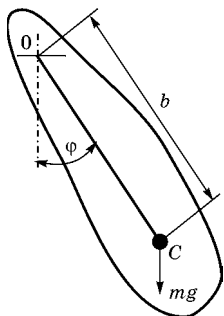


Рис. 1.8

Воспользуемся представлением момента инерции J_0 как произведения массы m на квадрат радиуса инерции ρ :

$$J_0 = m\rho_c^2,$$

где ρ_c — радиус инерции относительно центра масс. Тогда для приведенной длины l находим

$$l = \frac{J_0 + mb^2}{mb} = \frac{m\rho_c^2 + mb^2}{mb} = \frac{\rho_c^2}{b} + b. \quad (1.2)$$

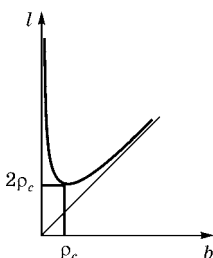


Рис. 1.9

На рис. 1.9 показана зависимость приведенной длины как функции расстояния b от центра масс C до точки подвеса O . Эта функция имеет минимум при $b = \rho_c$, что легко определяется из условия экстремума

$$\frac{dl}{db} = \frac{d}{db} \left(\frac{\rho_c^2}{b} + b \right) = -\frac{\rho_c^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Значение приведенной длины в точке экстремума равно $2\rho_c$. В окрестности экстремума небольшие изменения расстояния от точки подвеса до центра масс не оказывают существенного влияния на приведенную длину и, следовательно, на собственную частоту колебаний физического маятника. Это свойство используют при создании маятниковых часов высокой точности. Частота колебаний такого маятника равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2\rho_c}}.$$

1.2. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Затухающие колебания возникают как свободные колебания в неконсервативной (диссипативной) системе. В предыдущем разделе были рассмотрены гармонические колебания, когда из-за отсутствия потерь энергия колебаний остается постоянной неограниченно долго. В реальных колебательных системах энергия уменьшается из-за потерь на преодоление сил трения, вязкости, диссипации на резисторе и т. д.

Запишем уравнение движения механического осциллятора (рис. 1.10) с потерями на трение:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0.$$

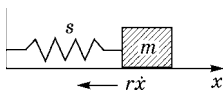


Рис. 1.10

Здесь r — коэффициент трения, $r\dot{x}$ — сила демпфирования, пропорциональная скорости.

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0.$$

Здесь r — коэффициент трения, $r\dot{x}$ — сила демпфирования, пропорциональная скорости. Это уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.3)$$

где $\gamma = \frac{r}{2m}$ — коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{s}{m}$.

Решение уравнения (1.3) ищем в виде,

$$x = Ce^{\alpha t}.$$

После подстановки в (1.3) получаем характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

В зависимости от знака подкоренного выражения имеют место три возможных решения.

1. Аперiodическое движение (сильное затухание, $\gamma^2 > \omega_0^2$)

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 e^{\xi t} + C_2 e^{-\xi t}),$$

где $\xi = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. Полагая $C_1 = 1/2(A + B)$; $C_2 = 1/2(A - B)$, запишем решение в виде

$$x = e^{-\gamma t}(Ach\xi t + Bsh\xi t).$$

Постоянные A и B находятся из начальных условий. Например, если при $t = 0$, $x = 0$, то $A = 0$ и

$$x = Be^{-\gamma t}sh\xi t.$$

Это аперiodический процесс (рис. 1.11). Система, выведенная из

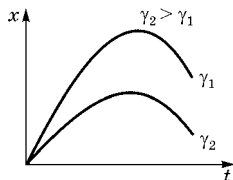


Рис. 1.11

состояния равновесия коротким импульсом, возвращается в состояние с нулевым смещением без осцилляций.

2. Аперриодический процесс с критическим затуханием ($\gamma^2 = \omega_0^2$). В этом случае

$$x = (A + Bt)e^{-\gamma t}.$$

Это решение легко проверяется подстановкой в (1.3). Постоянные A и B находятся из начальных условий. При критическом затухании система возвращается в состояние равновесия за минимальное время.

3. Затухающие колебания ($\gamma^2 < \omega^2$, $\xi = i\omega$):

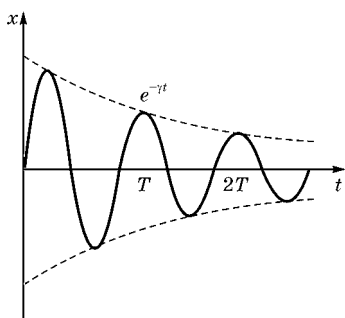


Рис. 1.12

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

Здесь $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$. Если положить $C_1 = 1/2Ae^{i\varphi}$, $C_2 = -1/2Ae^{-i\varphi}$:

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.4)$$

Решение (1.4) описывает колебательный процесс с затуханием γ . Огибающая имеет вид $e^{-\gamma t}$ (рис. 1.12). Частота несущей затухающего коле-

бания ω отличается от собственной частоты ω_0 осциллятора без потерь:

$$\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{s}{m} \right)^2 - \left(\frac{r}{2m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Затухающие колебания принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания* δ :

$$\delta = \ln \frac{A_0}{A_1} = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

Логарифмический декремент затухания равен логарифму отношения амплитуд колебаний, разделенных временным интервалом, равным одному периоду $T = 2\pi/\omega$, который определяется по нулям функции $x(t)$ в (1.4).

На практике логарифмический декремент затухания удобно находить как тангенс угла наклона функции $\ln \frac{A_0}{A_n}$ в зависимости от n .

Другой параметр, которым принято характеризовать затухающее колебание, — *постоянная времени затухания* $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{r}$.

Она определяется временем, за которое амплитуда уменьшается до величины, равной e^{-1} от ее начального значения A_0 .

Скорость уменьшения энергии характеризуется параметром, получившим название *добротность* осциллятора. Поскольку энергия колебания пропорциональна квадрату амплитуды, ее изменение во времени для затухающего колебания $x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$ можно записать в виде

$$E = E_0 e^{-2\gamma t},$$

где E_0 — энергия при $t = 0$.

Добротность Q определяется как число радиан, на которое изменяется фаза колебаний осциллятора с затуханием γ при уменьшении энергии системы до величины, равной e^{-1} от ее начального значения E_0 :

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega m}{r}.$$

Обычно $\omega_0^2 \gg \gamma^2$. Поэтому

$$\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \right) \approx \omega_0.$$

Отсюда

$$Q = \frac{\omega_0 m}{r} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Поскольку $E = E_0 e^{-2\gamma t}$, энергия, теряемая за малый временной интервал Δt , определяется как

$$-\Delta E = -2\gamma E d\Delta t.$$

Изменение энергии за один период колебаний $\Delta t = 2\pi/\omega_0$ равно $\Delta E_T = 2\gamma E 2\pi/\omega_0$. Отсюда находим отношение начальной энергии к энергии, теряемой за один период колебаний

$$\frac{E}{\Delta E_T} = \frac{\omega_0}{2\gamma 2\pi} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (1.5)$$

Это отношение, как следует из (1.5), определяется добротностью колебательной системы.

Полная энергия осциллятора с затуханием равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2.$$

Однако из-за потерь энергия затухающих колебаний не остается постоянной и уменьшается. Производная $\frac{dE}{dt}$ отлична от нуля и имеет отрицательный знак:

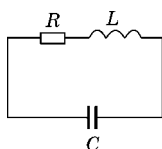


Рис. 1.13

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2 \right) = \\ &= \dot{x} (m \ddot{x} + s x) = \dot{x} (m \ddot{x} + s x + r \dot{x} - r \dot{x}) = -r \dot{x}^2, \end{aligned}$$

поскольку

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + s x = 0.$$

Таким образом, скорость уменьшения энергии равна мощности, затрачиваемой на демпфирование.

Электрический осциллятор показан на рис. 1.13. Здесь затухание электрических колебаний происходит из-за потерь энергии на резисторе R . Дифференциальное уравнение колебаний:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Это выражение аналогично уравнению движения (1.3) механического осциллятора с затуханием, если принять во внимание соответствия: масса m — индуктивность L ; коэффициент трения r — сопротивление резистора R ; коэффициент жесткости s — обратная емкость $1/C$.

1.3. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Аналогия параметров при описании механических и электрических осцилляторов получила название *электро-механической аналогии*. Это соответствие отражено в табл. 1 на примере затухающих колебаний механического и электрического осцилляторов.

Что нагляднее — электрическая или механическая модель? Известно мнение Кельвина: «Я могу сказать, что

Таблица 1

Свободные (собственные) колебания

Механические	Электрические
1. Уравнения состояния:	
$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
2. Смещение:	
$x = Ae^{-\frac{r}{2m}t} \pm \left[\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} \right]^{\frac{1}{2}} t$	$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \pm \left[\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right]^{\frac{1}{2}} t$
3. Аперiodические колебания:	
$\xi = \left[\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} > 0;$ $x = e^{-\frac{r}{2m}t} [G_1 ch \xi t + G_2 sh \xi t]; \text{ при}$ $x _{t=0} = 0 \quad x = Ge^{-\frac{r}{2m}t} sh \xi t$	$\xi = \left[\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0;$ $q = e^{-\frac{R}{2L}t} [G_1 ch \xi t + G_2 sh \xi t];$ при $q _{t=0} = 0 \quad q = Ge^{-\frac{R}{2L}t} sh t$
4. Режим критического затухания:	
$\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2} = 0; \quad \xi = 0;$ $x = (A + Bt)e^{-\frac{r}{2m}t}$	$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0; \quad \xi = 0;$ $q = (A + Bt)e^{-\frac{R}{2L}t}$
5. Режим затухающих колебаний:	
$\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2} = \omega^2;$ $x = e^{-\frac{r}{2m}t} [G_1 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t] =$ $= Ae^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi);$ при $x _{t=0} = 0 \quad x = Ae^{-\frac{r}{2m}t} \sin \omega t$	$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2;$ $q = e^{-\frac{R}{2L}t} [G_1 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t] =$ $= q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \varphi);$ при $q _{t=0} = 0 \quad q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$
6. Энергия колебаний:	
$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2; \quad E_p = \frac{1}{2} s x^2;$ $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2$	$E_k = \frac{1}{2} L \dot{q}^2; \quad E_p = \frac{1}{2C} q^2;$ $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2C} q^2$
7. Скорость изменения энергии затухающих колебаний:	
$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + sx) = -r\dot{x}^2$	$\frac{dE}{dt} = \dot{q} \left(L\ddot{q} + \frac{q}{C} \right) = -R\dot{q}^2$

Продолжение табл. 1

Механические	Электрические
8. Логарифмический декремент затухания:	
$\delta = \ln \frac{A_0}{A_1} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} =$ $= \frac{1}{n} \ln \frac{A(T)}{A(t+nT)} =$ $= \frac{r}{2m} T = \frac{\pi r}{m\omega_0} = \frac{\pi r}{\sqrt{ms}} = \frac{\pi}{Q}$	$\delta = \ln \frac{q_0}{q_1} = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} =$ $= \frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT)} =$ $= \frac{R}{2L} T = \frac{\pi R}{L\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi}{Q}$
9. Постоянная времени затухания:	
$e^{-\frac{r}{2m}\tau} = e^{-1}; \quad \tau = \frac{2m}{r}$	$e^{-\frac{R}{2L}\tau} = e^{-1}; \quad \tau = \frac{2L}{R}$
10. Добротность колебательной системы:	
$Q = \frac{\omega_0 m}{r} = \frac{\sqrt{sm}}{r} = \frac{\pi}{\delta}$	$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{\delta}$
11. Отношение энергии осциллятора к энергии, теряемой за один период:	
$\frac{E}{\Delta E_T} = \frac{Q}{2\pi}$	$\frac{E}{\Delta E_T} = \frac{Q}{2\pi}$

я понял явление, если я могу составить для него механическую модель». Многие инженеры и физики утверждают обратное: «Я понимаю механическое явление, если мне удалось найти для него электрическую модель».

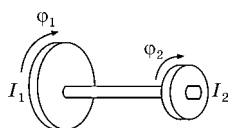


Рис. 1.14

В качестве еще одного примера аналогии в описании механических и электрических систем рассмотрим показанный на рис. 1.14 механический осциллятор из двух дисков, соединенных стержнем и совершающих крутильные колебания. Кинетическая энергия такой системы:

$$E_k = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2},$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции дисков; φ_1 и φ_2 — углы поворота. Стержень считается тонким с пренебрежимо малым моментом инерции.

Потенциальная энергия E_P этой колебательной системы зависит только от разности углов поворота:

$$E_P = \frac{1}{2} \tilde{s} (\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Здесь коэффициент $\tilde{s}$ характеризует упругость стержня при кручении. Пусть колебания совершаются под действием только внутренних сил, и для них справедлив закон сохранения моментов количества движения:

$$J_1 \dot{\varphi}_1 + J_2 \dot{\varphi}_2 = 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь электрическую колебательную систему, показанную на рис. 1.15. Система содержит две индуктивности L_1 и L_2 , параллельно подключенные к емкости C .

С кинетической энергией сопоставляется энергия магнитных полей катушек с индуктивностями L_1 и L_2 :

$$E_k = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2.$$

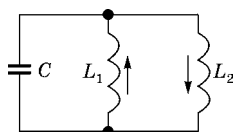


Рис. 1.15

Потенциальная энергия соответствует энергии электрического поля в конденсаторе C :

$$E_P = \frac{1}{2C} (q_1 - q_2)^2.$$

По закону Кирхгофа, имеем для контура, ограниченного индуктивностями L_1 и L_2 :

$$L_1 \dot{q}_1 + L_2 \dot{q}_2 = 0, \quad (1.7)$$

где $\dot{q}_1 = i_1$, $\dot{q}_2 = i_2$, i_1 и i_2 — токи через катушки L_1 и L_2 .

Из сравнения (1.6) и (1.7) следует, что математические модели колебательных систем, приведенных на рис. 1.14 и 1.15, тождественны. Как известно, две параллельно соединенные индуктивности L_1 и L_2 эквивалентны одной при-

веденной, величина которой равна $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. По анало-

гии, два диска с моментами инерции J_1 и J_2 можно заменить одним с приведенным моментом инерции $J = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$.

Следовательно, электрическая колебательная система, показанная на рис. 1.15, может быть заменена электрическим колебательным контуром, содержащим приведенную индуктивность L и емкость C . Частота колебаний такого контура равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

По аналогии, механическая колебательная система ведет себя как гармонический осциллятор с приведенным моментом инерции J , совершающий крутильные колебания, частота которых $\omega = \sqrt{\frac{\bar{s}}{J}}$.

1.4. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Фазовые траектории позволяют наглядно представить колебания на так называемой фазовой плоскости в системе координат $(\dot{x}, x)$. Уравнением фазовой траектории является зависимость $v = v(x)$, где v — скорость. Рассмотрим в качестве примера фазовую траекторию гармонического колебания:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

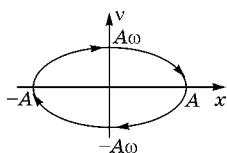


Рис. 1.16

Эти формулы параметрически задают фазовую траекторию, которая является эллипсом с полуосями A и $A\omega$ (рис. 1.16):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1.$$

Если откладывать по оси ординат v/ω , то эллипс превращается в окружность. Из уравнения $dx/dt = v(x)$, разделяя переменные, находим

$$dt = \frac{dx}{v(x)}.$$

После интегрирования получаем

$$t = t_0 + \int_0^x \frac{dx}{v(x)}. \quad (1.8)$$

Например, для гармонического колебания из уравнения фазовой траектории $\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$ находим

$$v = \omega(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

После подстановки в (1.8) и интегрирования получаем период колебаний

$$T = 2 \int_{-A}^A \frac{dx}{\omega(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{x}{A} \Big|_{-A}^A = \frac{2}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Впрочем, в случае гармонического осциллятора собственная частота определяется из фазовой траектории еще проще:

$$\omega = v_{\max}/A,$$

т. е. частота определяется как отношение амплитуды скорости к амплитуде смещения.

Свойства фазовых траекторий описаны ниже.

1. Фазовая траектория формируется на фазовой плоскости движением изображающей точки. Изображающая (фазовая) точка представляет состояние колебательной системы в некоторый момент времени. Движение изображающей точки вдоль фазовой траектории соответствует изменению состояния системы.

2. Направление движения изображающей точки по фазовой траектории в верхней полуплоскости всегда слева направо ($v > 0$), а в нижней — справа налево ($v < 0$). В верхней полуплоскости величина x может только возрастать, а в нижней — только убывать.

3. Все фазовые траектории в точках пересечения с осью абсцисс имеют только вертикальные касательные, так как в этих точках скорость равна нулю и величина x имеет стационарное значение ($\dot{x} = 0$). Точки пересечения фазовой траектории с осью абсцисс определяют амплитуду колебания (экстремальные значения x). Следовательно, ни в одной точке вне оси абсцисс фазовая траектория не может иметь вертикальные касательные, поскольку любая точка, в которой касательная вертикальна, соответствует нулевому значению скорости.

Различные фазовые траектории не пересекаются. Это следует из единственности решений дифференциальных уравнений, описывающих движение колебательной системы.

Семейство фазовых траекторий, отражающих всевозможные движения колебательной системы, называется *фазовым портретом осциллятора*.

Рассмотрим фазовые портреты линейных колебательных систем с одной степенью свободы. На рис. 1.17 представлен фазовый портрет гармонического осциллятора. Гармонический осциллятор является примером консервативной колебательной системы. Точка равновесия $v = 0, x = 0$ является особой точкой фазовой плоскости и входит в структуру фазового портрета. Точка равновесия может находиться только на оси x , поскольку иное состояние покоя невозможно. Особые точки соответствуют стационарным режимам или состояниям равновесия колебательной системы. Поэтому их иногда называют *стационарными точками*. В зависимости от структуры фазовых траекторий различают следующие основные типы особых точек на фазовой плоскости: *центр*; *фокус*; *узел* и *седло*. Особая точка — *центр* — показана на рис. 1.17. Она характерна для фазовых портретов, отображающих незатухающие колебания.

Линейный осциллятор с затуханием является примером консервативной (диссипативной) колебательной системы. Его фазовый портрет показан на рис. 1.18. В случае затухающих колебаний эллипсоидальная фазовая траектория трансформируется в спираль. Особая точка в центре координат называется *фокусом*.

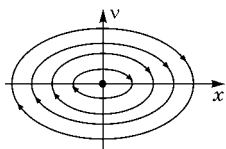


Рис. 1.17

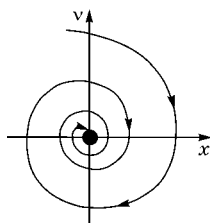


Рис. 1.18

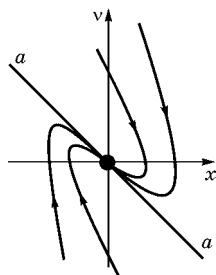


Рис. 1.19

При сильном демпфировании фазовые траектории на плоскости расходятся, фазовый портрет качественно меняется и принимает вид, показанный на рис. 1.19. Здесь особая точка получила название *узел*. Прямая $a-a$, проходящая через узел, является касательной для всех траекторий. Эти касательные к фазовым траекториям не вертикальны, поскольку особые точки достигаются лишь асимптотически. Представляя фазовую траекторию в малой окрестности особой точки как прямую $v = -\gamma x$, находим

$$t = t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\gamma x} = t_0 - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Отсюда

$$x = x_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} x = 0.$$

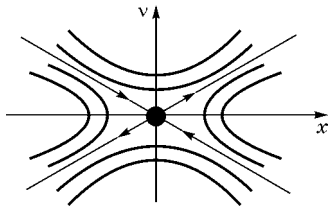


Рис. 1.20

Фазовый портрет с особой точкой — *седло* — показан на рис. 1.20. Отличительная особенность седла в том, что через особую точку проходят две вырожденные фазовые траектории, называемые *сепаратрисами*. Эта точка соответствует неустойчивому равновесию осциллятора.

Уравнение вида $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ описывает малые отклонения в положении неустойчивого равновесия (например, гравитационный маятник в верхней точке). Это уравнение сводится к двум уравнениям первого порядка:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = \omega_0^2 x.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{v} \frac{dt}{dx} = \omega_0^2 x \frac{dt}{dx} = \frac{\omega_0^2 x}{v}; \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\omega_0^2 x}{v}; \quad v dv = \omega_0^2 x dx. \end{aligned}$$

Интегрирование этого уравнения дает семейство гипербол

$$v^2 - \omega_0^2 x^2 = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Если $C = 0$, фазовые траектории вырождаются в две пересекающиеся в точке равновесия сепаратрисы, которые являются асимптотами гипербол:

$$v - \omega_0 x = 0;$$

$$v + \omega_0 x = 0.$$

Фазовый портрет в окрестности точки *седло* (см. рис. 1.19) отображает состояние осциллятора вблизи точки неустойчивого равновесия.

Решение уравнения (1.3) для $\gamma^2 \neq \omega_0^2$ имеет вид

$$x = A \exp(\alpha_1 t) + B \exp(\alpha_2 t),$$

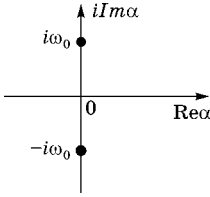
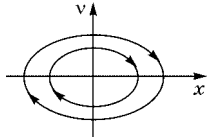
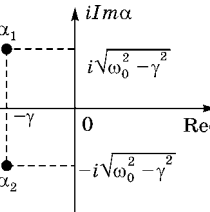
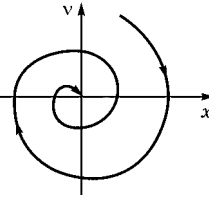
где α_1 и α_2 — корни характеристического уравнения

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

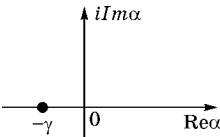
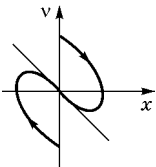
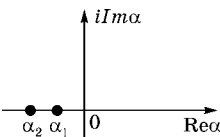
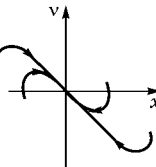
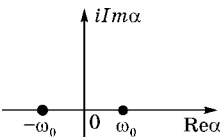
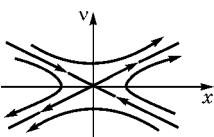
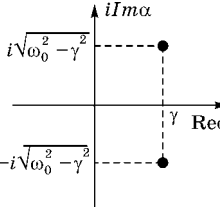
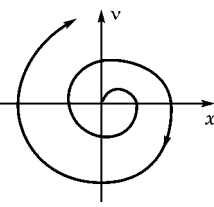
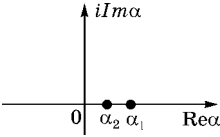
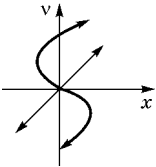
Расположение корней на комплексной плоскости однозначно определяет тип фазового портрета колебательной системы (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Связь фазового портрета линейного осциллятора с расположениями корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

1. При $\gamma = 0$ корни характеристического уравнения чисто мнимые, $\alpha_{1,2} = \pm i\omega_0$. Затухание отсутствует. Это соответствует фазовому портрету системы с особой точкой <i>центр</i>		
2. При $\omega_0 > \gamma > 0$, $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ корни находятся в левой полуплоскости, оставаясь комплексно сопряженными. Этому состоянию соответствует фазовый портрет затухающих колебаний с особой точкой <i>фокус</i>		

Продолжение табл. 2

3. При $\gamma = \omega_0$, $\alpha_{1,2} = -\gamma$ состояние колебательной системы соответствует аperiodическому режиму с критическим затуханием		
4. При $\gamma > \omega_0$ $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ корни находятся в левой полуплоскости на действительной оси. Это состояние системы в аperiodическом режиме отражает фазовый портрет с особой точкой <i>узел</i>		
5. При $\gamma = 0$ и смене знака восстанавливающей силы, $\omega_0 \rightarrow i\omega_0$, $\alpha_{1,2} = \pm i\omega_0$, получается состояние неустойчивого равновесия, которому соответствует фазовый портрет с особой точкой <i>седло</i>		
6. При $\gamma < 0$ и $\gamma^2 < \omega_0^2$ имеем $\alpha_{1,2} = \gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Состояние системы отражается портретом с особой точкой <i>неустойчивый фокус</i>		
7. При $\gamma < 0$ и $\gamma^2 > \omega_0^2$ получаем $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Состояние системы отражается фазовым портретом с особой точкой <i>неустойчивый узел</i>		

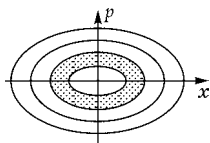


Рис. 1.21

Адиабатический инвариант.

Колебания можно отображать на фазовой плоскости как в системе координат $(\dot{x}, x)$, так и в системе (p, x) , где $p = m\dot{x}$. Фазовые траектории для гармонического осциллятора на рис. 1.16 в системе координат (p, x) приобретают похожий вид (рис. 1.21), поскольку импульс p пропорционален скорости. Найдем площадь, ограниченную фазовой траекторией в случае гармонических колебаний. Энергия колебания

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}sx^2.$$

В плоскости (p, x) это уравнение эллипса с полуосями a и b :

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{2E/s}$. Площадь I , ограниченная эллипсом, как известно, пропорциональна произведению его полуосей:

$$I = \int p dx = \pi ab.$$

После подстановки значений a и b получаем

$$I = \pi\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{s}} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{s}} = 2\pi \frac{E}{\omega} = \frac{E}{\nu},$$

где $\omega = 2\pi\nu$.

Следовательно, площадь, ооконтуренная фазовой траекторией гармонического колебания, равна отношению энергии к частоте. Величина I называется адиабатическим инвариантом. Основное свойство адиабатического инварианта состоит в том, что его величина приближенно сохраняется при медленном изменении частоты. Запишем условие экстремума I :

$$\frac{d}{d\omega} I = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2\pi E}{\omega} \right) = 2\pi \left(\frac{E'\omega - E}{\omega^2} \right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{dE}{d\omega} \omega - E = 0.$$

После замены дифференциалов приращениями получаем

$$\frac{\Delta E}{\Delta \omega} = \frac{E}{\omega} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \omega}{\omega}.$$

Таким образом, адиабатический вариант есть величина, которая приближенно сохраняется при медленных малых изменениях частоты (и, соответственно, параметров, определяющих частоту гармонического осциллятора). Хотя и возникает квантово-механическая аналогия $\hbar = E/\omega = \hbar\omega/\omega = \Delta E/\Delta\omega = \hbar\Delta\omega/\Delta\omega$ (постоянная Планка $\hbar = h/2\pi$), существование адиабатического инварианта ничего общего с квантами не имеет. Тем не менее оно позволило сформировать гипотезу о возможности квантования величин, являющихся адиабатическими инвариантами. Действительно, если положить, что адиабатический инвариант может принимать дискретные значения (см. рис. 1.20)

$$I = E/\omega = \Delta E/\Delta\omega = n\hbar, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.9)$$

то энергия гармонического осциллятора также изменяется на дискретную величину, равную целому числу $\hbar\omega$. Эта гипотеза была реализована Планком, что привело к созданию квантовой механики. Однако минимальная энергия гармонического осциллятора, согласно (1.9), может быть равной нулю. Последующее развитие квантовой механики привело к выводу, что энергия гармонического осциллятора определяется как $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ и, соответственно, $I = (N + 1/2)\hbar$. Отсюда наименьшая энергия квантового осциллятора равна $1/2\hbar\omega$ и состояние с энергией, равной нулю, не существует.

В квантовой механике импульс и координата связаны соотношением неопределенностей и не могут быть определены одновременно. Поэтому для квантового осциллятора, в отличие от гармонического осциллятора в классической механике, замкнутой фазовой траектории на фазовой плоскости не существует.

Физика оптических явлений наиболее адекватно отражает переход от модели классических осцилляторов к квантовым осцилляторам, для которых квантовый постулат утверждает, что площадь, ограниченная замкнутой

траекторией, описываемой в фазовой (p, x) плоскости за один период движения, является величиной, кратной $\hbar$:

$$I = (N + 1/2)\hbar.$$

Изменение адиабатического инварианта квантового осциллятора есть величина, кратная $\hbar$, что отражено на рис. 1.21.

1.5. ПОНЯТИЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Фазовые траектории и фазовые портреты полезны для качественного анализа осцилляторов. Возьмем как пример собственные колебания нелинейного осциллятора, который описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.10)$$

где $f(x)$ — возвращающая сила, связанная с потенциальной энергией осциллятора E_p известным соотношением

$$-f(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}.$$

Поскольку потенциальная энергия осциллятора определяется смещением электрона, ее можно разложить в ряд в окрестности точки равновесия ($x = 0$):

$$E_p = \frac{1}{2!}x^2 E_p^{(2)}(0) + \frac{1}{3!}x^3 E_p^{(3)}(0) + \frac{1}{4!}x^4 E_p^{(4)}(0) + \dots$$

Здесь $E_p^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n E_p}{dx^n} \right|_{x=0}$ — значение производной по-

тенциальной энергии в точке равновесия $x = 0$. Очевидно, что в точке равновесия потенциальная энергия имеет экстремум (минимум), величина которого равна нулю. По-

этому $E_p(0) = 0$; $E_p^{(1)}(0) = \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=0} = 0$ и разложение в ряд

потенциальной энергии начинается с члена второго порядка. Введем обозначения $s_1 = E_p^{(2)}(0)$, $s_2 = \frac{1}{2!}E_p^{(3)}(0)$, $s_3 = \frac{1}{3!}E_p^{(4)}(0)$, тогда

$$E_p = \frac{1}{2}s_1x^2 + \frac{1}{3}s_2x^3 + \frac{1}{4}s_3x^4 + \dots$$

Линейному осциллятору соответствует приближение $E_p = \frac{1}{2}s_1x^2$ и, соответственно, $f(x) = s_1x$. При увеличении амплитуды колебаний в разложении следует учитывать члены высших порядков, и уравнение колебаний становится нелинейным.

Умножим уравнение (1.10) на $\dot{x}$ и проинтегрируем по времени:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int f(x)\dot{x}dt = \text{const} = E_0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) отражает закон сохранения полной энергии осциллятора:

$$E_k + E_p = E_0,$$

где $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ — кинетическая энергия,

$$E_p = \int f(x)\dot{x}dt = \int f(x)dx$$

— потенциальная энергия. Из (1.11) получаем уравнение фазовой траектории

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_p)}. \quad (1.12)$$

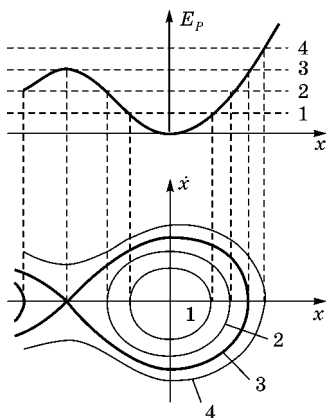


Рис. 1.22

На рис. 1.22 показана связь между фазовым портретом и потенциальной энергией. В верхней части рисунка приведен график потенциальной энергии осциллятора в зависимости от x , а в нижней части построен соответствующий фазовый портрет. Четыре прямые, параллельные оси x , соответствуют различным уровням полной энергии E_{0i} осциллятора ($i = 1, 2, 3, 4$). Максимальное отклонение смещения x определяется пересечением прямых E_{0i} с кривой потенциальной энергии $E_p(x)$. В этих точках, как следует из уравнения (1.12), скорость $\dot{x}$ равна нулю, и они соответствуют пересечениям фазовых траекторий с осью x . Для каждого

значения x , находящегося между максимальными отклонениями, можно определить соответствующее значение потенциальной энергии и после подстановки в уравнение (1.12) найти $\dot{x}$.

Таким образом находятся и строятся фазовые траектории осциллятора, соответствующие полной энергии колебаний E_{0i} . Фазовые траектории симметричны относительно оси x , а симметричные точки в верхней и нижней полуплоскостях соответствуют корням уравнения (1.12), совпадающим по модулю и отличающимся по знаку. Кинетическая энергия определяется как разность полной и потенциальной энергий: $E_k = E_0 - E_p$. Поэтому минимуму потенциальной энергии, который достигается при $x = 0$, соответствует максимум кинетической энергии, а в фазовом портрете — максимум $\dot{x}$ для каждой фазовой траектории.

Как видно из рис. 1.22, прямая 3 касательна к локальному максимуму кривой потенциальной энергии. Точке касания локального максимума потенциальной энергии соответствует особая точка *седло* — точка пересечения оси x сепаратрисой (рис. 1.19). Сепаратрисы отделяют замкнутые фазовые траектории, соответствующие колебательному движению, от фазовых траекторий типа 4, которые описывают движение, отличающееся от колебательного. Фазовые траектории 1 и 2 замыкаются вокруг особой точки *центр*. Фазовая траектория 4 не имеет точек пересечения с осью x на интервале между *седлом* и *центром*.

Отображающая состояние системы точка фазовой траектории 4 в верхней полуплоскости движется слева направо. Над *седлом*, расположенным в области отрицательных x , она проходит локальный минимум скорости, соответствующий локальному максимуму потенциальной энергии. Далее она проходит через максимум скорости $\dot{x}$, соответствующий минимуму потенциальной и максимуму кинетической энергий. Движение этой точки вдоль фазовой траектории 4 завершается пересечением оси x , соответствующим полному переходу кинетической энергии в потенциальную. Затем эта точка переходит в нижнюю полуплоскость и движется в обратном направлении по зеркальному отражению относительно оси x в верхней полуплоскости участка фазо-

вой траектории. Зеркальное отражение фазовой траектории указывает лишь на смену знака скорости. Точка *центр* определяет устойчивое равновесие осциллятора, а точка *седло* — положение неустойчивого равновесия, поскольку соответствует локальному максимуму потенциальной энергии. При устойчивом равновесии слабые возмущения вызывают колебания, фазовые траектории которых замыкаются вокруг точки *центр* и не покидают ее окрестности. Чем меньше возмущения, тем ближе точки фазовой траектории, изображающей эллипс, к центру.

В ситуации неустойчивого равновесия фазовые траектории формируются в окрестности точки *седло*. Фазовые траектории в окрестности *седла* имеют гиперболический вид, а их асимптотами являются ветви сепаратрисы. Поэтому малейшее возмущение выводит осциллятор из положения неустойчивого равновесия, а отображающие точки фазового портрета уходят из окрестности *седла* по гиперболическим фазовым траекториям.

Фазовый портрет несет информацию о характере устойчивости и движения осциллятора. Информацию о процессе движения можно получить, воспользовавшись формулами (1.8) и (1.12):

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\dot{x}} = t_0 + \int_{x_0}^x \left[\frac{2}{m} (E_0 - E_P) \right]^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (1.13)$$

Отсюда для периода колебаний получаем

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{2}{m} (E_0 - E_P) \right]^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (1.14)$$

Здесь $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — точки пересечения с осью x замкнутой фазовой траектории (типа траекторий 1 и 2 на рис. 1.22). В случае математического маятника с большой амплитудой интегралы (1.13) и (1.14) приводят к эллиптическим функциям.

Запишем уравнение движения ангармонического математического маятника (рис. 1.23):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (1.15)$$

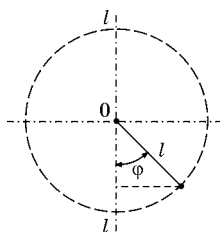


Рис. 1.23

Потенциальная энергия

$$E_p = mgl(1 - \cos\varphi). \quad (1.16)$$

Полная энергия

$$E_0 = mgl(1 - \cos\varphi_0), \quad (1.17)$$

где φ_0 — угловая амплитуда колебаний. Подставляя (1.16) и (1.17) в (1.12), получаем выражение для скорости

$$\dot{x} = [2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, с учетом $\dot{x} = l\dot{\varphi}$, получаем уравнение фазовой траектории:

$$\dot{\varphi} = \omega[2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.18)$$

1.6. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Колебательная система с сухим трением является одним из примеров нелинейного осциллятора. Собственные колебания в осцилляторах с сухим трением имеют свои особенности. В отличие от вязкого трения, сила сухого трения F_r имеет постоянную величину, не зависящую от модуля скорости, а направление силы сухого трения меняется при изменении направления скорости. Уравнение движения для осциллятора с сухим трением имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{F_r}{m} \operatorname{sgn} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x + \frac{F_r}{m\omega_0^2} \operatorname{sgn} \dot{x} \right) = 0. \quad (1.19)$$

Представим (1.19) в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 \left(x + \frac{F_r}{m\omega_0^2} \right) &= 0, & \dot{x} > 0; \\ \ddot{x} + \omega_0^2 \left(x - \frac{F_r}{m\omega_0^2} \right) &= 0, & \dot{x} < 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из уравнений (1.19) и (1.20) следует, что для временных интервалов, в которых $\dot{x} > 0$, точка равновесия, относительно которой происходят колебания, смещается влево, а для полупериодов с $\dot{x} < 0$ — вправо. Следовательно, фазовая траектория затухающих колебаний осциллятора с сухим трением состоит из полупериодов, смещенных в верхней полуплоскости влево по оси смещений на величину $\xi_- = -\frac{F_r}{m\omega_0^2}$, а в нижней полуплоскости — на величину $\xi_+ = \frac{F_r}{m\omega_0^2}$ (рис. 1.24).

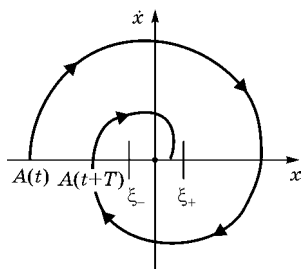


Рис. 1.24

Из уравнений движения и фазовой траектории видно, что изменение амплитуды колебаний A за период T составляет

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(t) - A(t+T) = \\ &= 2(\xi_+ - \xi_-) = \frac{4F_r}{m\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отсюда следует, что, в отличие от осциллятора с вязким трением, амплитуда колебаний осциллятора с сухим трением убывает линейно (рис. 1.25). Колебания продолжаются до тех пор, пока амплитуда колебаний превышает величины ξ_+ , ξ_- , ограничивающие так называемую *зону застоя*.

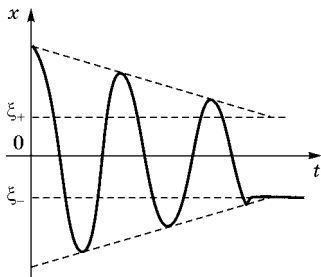


Рис. 1.25

Определим добротность колебательной системы с сухим трением. Из (1.21) следует линейная зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A = A_0 - 4\xi \frac{t}{T} = A_0 \left(1 - \frac{4\xi}{A_0} \cdot \frac{t}{T} \right) = A_0 \left(1 - \frac{2\xi}{\pi A_0} \omega_0 t \right). \quad (1.22)$$

Воспользуемся определением добротности как фазового интервала в радианах, за который энергия колебаний уменьшается до величины e^{-1} от ее начального состояния. Для энергии колебаний можно записать, учитывая (1.22):

$$E = \frac{1}{2} s x^2 = \frac{1}{2} s A_0^2 \left(1 - \frac{2\xi}{\pi A_0} \omega_0 t \right)^2.$$

Добротность находится из условия

$$\frac{1}{2} s A_0^2 \left(1 - \frac{2\xi}{\pi A_0} Q \right)^2 = \frac{1}{2} s A_0^2 e^{-1}.$$

Отсюда

$$\left(1 - \frac{2\xi}{\pi A_0} Q \right)^2 = e^{-1}$$

или

$$2 \ln \left(1 - \frac{2\xi}{\pi A_0} \omega_0 t \right) = -1. \quad (1.23)$$

Согласно (1.21), $\xi \sim 1/\omega_0^2$. Поэтому для колебательной системы можно принять

$$\frac{2\xi}{\pi A_0} \omega_0 t \ll 1.$$

Тогда, воспользовавшись разложением логарифма в ряд с точностью до первого порядка малости, получаем из (1.23):

$$\frac{2\xi}{\pi A_0} Q = \frac{1}{2},$$

откуда находим оценочное выражение для добротности:

$$Q = \frac{\pi A_0}{4\xi} = \frac{\pi A_0 m \omega_0^2}{4F_r} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A_0}{\xi} = \pi \frac{A_0}{\Delta A}, \quad (1.24)$$

где ΔA — уменьшение амплитуды колебаний за один период.

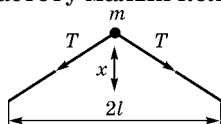
ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Опишите свойства гармонических колебаний. Как связаны амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения?
2. Определите потенциальную и кинетическую энергии гармонических колебаний физического маятника (см. рис. 1.8).
3. Получите уравнение движения гармонического осциллятора из закона сохранения энергии.
4. Запишите уравнение движения затухающего осциллятора и объясните физический смысл его возможных решений.
5. Укажите отличие энергетических характеристик затухающих и гармонических колебаний.
6. Дайте определение параметрам, описывающим затухающие колебания.

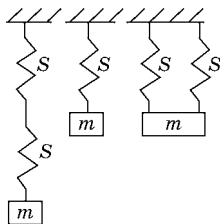
7. Что такое добротность колебательной системы?
8. Поясните электромеханическую аналогию на примере электрического и механического осцилляторов.
9. Перечислите свойства фазовых траекторий колебательных процессов.
10. Дайте определения и опишите свойства особых точек фазового портрета осциллятора.
11. Укажите связь энергии колебаний с адиабатическим инвариантом и опишите его свойства.
12. Как связан фазовый портрет нелинейного осциллятора с его энергетическими характеристиками?
13. Какие особые точки фазового портрета относятся к состояниям устойчивого и неустойчивого равновесия?
14. Чем отличаются фазовые траектории колебаний осцилляторов с вязким трением и сухим трением?

ЗАДАЧИ

1.1. Тело массой m прикреплено к средней точке невесомой струны, натяжение которой T и длина $2l$. Определить собственную частоту малых колебаний.



1.2. Найти отношение собственных частот для колебательных систем, изображенных на рисунке.



1.3. Пользуясь электромеханической аналогией, привести схемы электрических осцилляторов, эквивалентных приведенным в задаче 1.2 механическим осцилляторам.

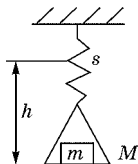
1.4. Имеются груз неизвестной массы и пружина неизвестной жесткости. Определить период колебаний осциллятора, если известно равновесное удлинение пружины Δl в поле тяжести в результате присоединения к ней груза.

1.5. Два математических маятника имеют одинаковые массы, длины, отличающиеся в $n = 1,5$ раза, и колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами. Определить, какой из маятников обладает большей энергией и во сколько раз.

1.6. Математический маятник длиной $l = 50$ см подвешен в кабине самолета. Определить период T колебаний маятника, если самолет движется: а) равномерно; б) горизонтально с ускорением $a = 2,5 \text{ м/с}^2$.

1.7. Маятниковые и электронные часы на поверхности Земли показывают одинаковое время. Сравните показания этих часов за сутки в случаях, когда они подняты на высоту 1 км и опущены на глубину 1 км.

1.8. На чашку весов массой M , подвешенную на пружине с жесткостью s , с высоты h падает небольшой груз массой m . Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определить амплитуду A этих колебаний.



1.9. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = 0,1 \cdot \sin 200\pi t$. Сила тока измеряется в амперах. Определить:

- 1) период колебаний;
- 2) емкость конденсатора;
- 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора;
- 4) максимальную энергию электрического поля.

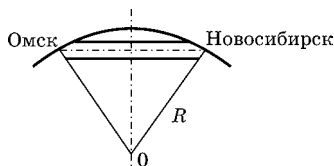
1.10. В кабине лифта висит маятник. Когда лифт неподвижен, собственная частота маятника равна 1 Гц. В движущейся с постоянным ускорением кабине лифта частота колебания маятника составляет 0,8 Гц. Определить величину и направление ускорения.

1.11. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж.

При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определить работу, совершенную против сил электрического поля.

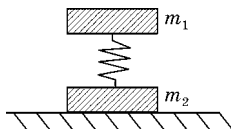
1.12. В ракете размещены часы-ходики с маятником, который можно считать математическим, и электронные часы. Ракета движется вертикально вверх с ускорением $10 g$. Двигатель отключается на высоте 100 км. Определить разность показаний часов в наивысшей точке подъема.

1.13. На рисунке показан проект трассы Новосибирск–Омск, проложенной в туннеле, соединяющем эти города по прямой (хорде). Действие трассы основано на использовании сил тяготения и не требует затрат топлива. Расстояние между Новосибирском и Омском по геодезической (на поверхности земного шара) — 600 км; радиус Земли $R \approx 6400$ км; ускорение свободного падения — $9,8$ м/с². Оценить время в пути и максимальную скорость. Сравнить с временем в пути при реализации такого проекта на трассе Новосибирск–Владивосток. Плотность земли считать однородной.

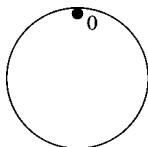


1.14. Построить график зависимости от времени потенциальной и кинетической энергии вагона массой m в задаче 1.13. Как выглядит фазовая траектория, отображающая движение вагона?

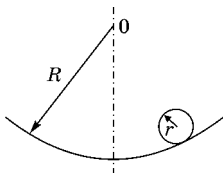
1.15. Два бруска, массы которых m_1 и m_2 , соединены пружиной, жесткость которой s . Брусок массой m_2 лежит на горизонтальной плоскости, а брусок массой m_1 находится над ним. С какой силой надо надавить на верхний брусок, чтобы после прекращения действия силы нижний брусок подпрыгнул на высоту H ?



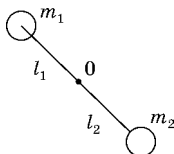
1.16. Тонкое кольцо радиуса R и массой m подвешено на оси O и совершает малые колебания около точки подвеса. Найти период колебаний. Найти приведенную длину физического маятника.



1.17. По внутренней поверхности полого цилиндра, радиус которой R , движется без проскальзывания шарик массой m и радиусом r . Движение центра масс шарика происходит в плоскости, ортогональной оси цилиндра. Найти частоту колебаний шарика.



1.18. Стержень с закрепленными на нем шариками, массы которых m_1 и m_2 , может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O . Найти частоту колебаний. Массой стержня можно пренебречь.



1.19. Частота затухающих колебаний ν в колебательном контуре с добротностью $Q = 2500$ равна 250 кГц. Определить время, за которое амплитуда тока в этом контуре уменьшится в 4 раза.

1.20. Частота гармонического осциллятора с затуханием определяется выражением

$$\omega_{20}^2 = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}.$$

Найти:

1) добротность Q и логарифмический декремент затухания при $\omega_0^2 - \omega_{20}^2 = 10^{-6} \omega_0^2$;

2) коэффициент жесткости системы s и коэффициент трения r при $\omega_0 = 106$ Гц и $m = 10^{-10}$ кг;

3) энергию системы и время уменьшения энергии в e раз, если максимальное смещение при $t = 0$ равно 10^{-2} м;

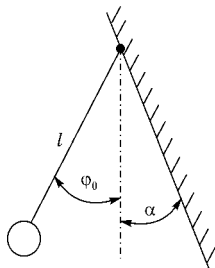
4) энергию, теряемую за первый период.

1.21. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\delta_0 = 1,5$. Каким будет значение δ , если вязкое трение среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить вязкое трение среды, чтобы колебания стали невозможны?

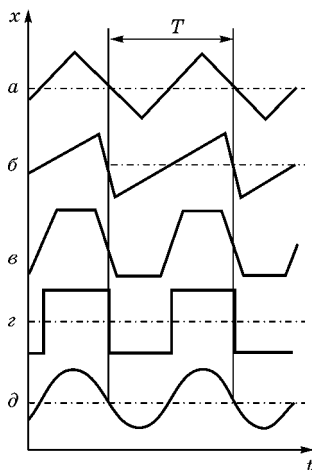
1.22. Добротность колебательного контура $Q = 50$. На сколько процентов отличается частота свободных колебаний ω от собственной частоты ω_0 ?

1.23. Найти добротность математического маятника длиной $l = 50$ см, если за промежуток времени $\tau = 5,2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $n = 4 \cdot 10^4$ раз.

1.24. К абсолютно упругой стене, наклоненной под углом α к направлению силы тяжести, подвешен математический маятник с длиной нити подвеса l . Определить частоту колебаний маятника, если его начальное отклонение φ_0 в плоскости, ортогональной к стене, больше α . Построить фазовый портрет маятника.



1.25. Построить фазовые траектории колебаний, приведенных на рисунке.

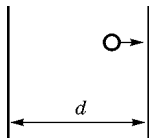


1.26. Графически отобразить зависимость потенциальной энергии от φ и фазовый портрет для осциллятора, уравнение движения которого $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$. Воспользоваться выражениями (1.13–1.16). В точках устойчивого равновесия потенциальную энергию считать нулевой.

1.27. Нарисовать фазовые портреты колебаний маятника в задачах 1.6 и 1.8.

1.28. Упругий мячик движется вертикально под действием силы тяжести, отскакивая от горизонтального стола. Нарисовать график зависимости смещения от времени и фазовый портрет колебаний.

1.29. Шарик движется в невесомости по инерции между двумя параллельными стенками, находящимися друг от друга на расстоянии d . Отражение шарика от стенок считать абсолютно упругим. Построить фазовую траекторию шарика.



ГЛАВА ВТОРАЯ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. ПОВЕДЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Вынужденные колебания в системе возникают под влиянием внешнего периодического воздействия. Рассмотрим вынужденные колебания в механическом осцилляторе и его электрическом аналоге — колебательном контуре.

Механический осциллятор.

Механический осциллятор характеризуется массой m , коэффициентом жесткости s и сопротивлением (коэффициентом трения) r . На осциллятор воздействует периодическая сила $F_0 \cos \omega t$ (рис. 2.1).

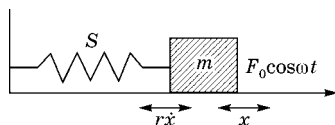


Рис. 2.1

Уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos \omega t. \quad (2.1)$$

С учетом $\dot{x} = v$ уравнение колебаний принимает вид

$$m\dot{v} + rv + s \int v dt = F_0 \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Решение этих дифференциальных уравнений представляет, как известно, сумму нестационарного и стационарного членов. Нестационарный член является полным решением соответствующего однородного уравнения, приведенного в предыдущем разделе:

$$m\dot{v} + rv + s \int v dt = 0$$

или

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + r\dot{x} + sx &= 0; \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0. \end{aligned}$$

Нестационарный член решения описывает затухающие колебания осциллятора. Стационарный член отражает поведение осциллятора под влиянием вынуждающей периодической силы и представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Имея в виду, что $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$, запишем уравнение (2.2) в виде

$$m\dot{v} + rv + s \int v dt = F_0 e^{i\omega t}.$$

Пусть $v = \hat{v} e^{i\omega t}$, $\hat{v}$ — комплексная амплитуда скорости.

После подстановки v в соответствующее дифференциальное уравнение получаем

$$i\omega m \hat{v} + r \hat{v} + \frac{s}{i\omega} \hat{v} = F_0$$

или

$$Z_m \hat{v} = F_0. \quad (2.3)$$

Импеданс механического осциллятора

$$Z_m = r + i \left(\omega m - \frac{s}{\omega} \right) = r + i \frac{m}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Импеданс механического осциллятора определяется как отношение комплексной амплитуды силы, действующей на массу в осцилляторе, к комплексной амплитуде скорости этой массы:

$$Z_m = \frac{F_0}{\hat{v}}.$$

Импеданс может быть представлен в виде

$$Z_m = r + iX_m,$$

где r — активная часть импеданса (коэффициент трения); X_m — реактивная часть импеданса (реактанс):

$$X_m = \omega m - \frac{s}{\omega} = \frac{m}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Положительная компонента реактанса, ωm , определяется массой и отражает накопление кинетической энергии за счет инерционных свойств колебательной системы. Отрицательная компонента реактанса $-s/\omega$ определяется

коэффициентом жесткости. Она отражает накопление потенциальной энергии за счет упругих свойств механического осциллятора.

Экспоненциальная форма механического импеданса

$$Z_m = |Z_m|e^{i\varphi},$$

где

$$|Z_m| = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{s}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 + \frac{m^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$\varphi = \arctg \frac{X_m}{r}$ — разность фаз между внешней силой и скоростью. Из (2.3) находим стационарное решение дифференциального уравнения механического осциллятора в виде комплексной амплитуды скорости:

$$\hat{v} = \frac{F_0}{Z_m}$$

или

$$v = \operatorname{Re} \left[\frac{F_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{|Z_m|} \right]. \quad (2.4)$$

Зависимость амплитуды и фазы скорости v от частоты внешней силы ω .

Из (2.4) имеем

$$v = \frac{F_0 \cos(\omega t - \varphi)}{|Z_m|}. \quad (2.5)$$

Отсюда находим амплитуду скорости

$$v_0 = \frac{F_0}{|Z_m|} = \frac{F_0}{\left[r^2 + \frac{m^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.6)$$

Изменение амплитуды скорости при изменении частоты определяется частотной зависимостью импеданса.

Зависимость амплитуды скорости от частоты внешней силы (2.6) показана на рис. 2.2. Максимальная амплитуда $v_{0\max} = \frac{F_0}{r}$ достигается при резонансе, когда $\omega = \omega_0$. При резонансной частоте скорость и сила находятся в фазе, поскольку $X_m = 0$ и $\varphi = \arctg \frac{X_m}{r} = 0$.

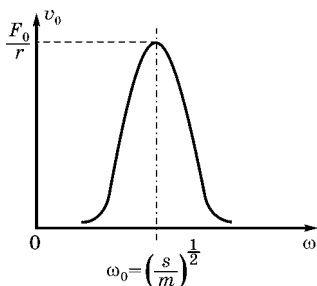


Рис. 2.2

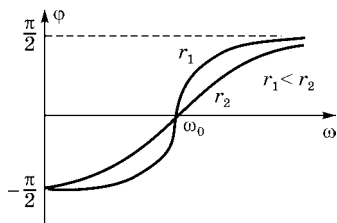


Рис. 2.3

Как следует из (2.6) и (2.3), на высоких частотах импеданс определяется массой, тогда как на низких частотах преобладающим является влияние коэффициента жесткости.

Фазовый сдвиг

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_m}{r} = \operatorname{arctg} \left[\frac{m(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega r} \right].$$

Зависимость фазового сдвига φ от частоты показана на рис. 2.3.

При высоких частотах $\omega m > \frac{s}{\omega}$, $\varphi > 0$ и скорость отстает по фазе от силы. Если $\omega \rightarrow \infty$, фазовый сдвиг асимптотически стремится к $\pi/2$. В случае низких частот $\omega m < \frac{s}{\omega}$, $\varphi < 0$ и скорость опережает по фазе силу. При $\omega \rightarrow 0$ это опережение по фазе достигает $\pi/2$. Если $r = 0$, затухание отсутствует, а скорость и сила ортогональны по фазе. При $\omega > \omega_0$ скорость отстает по фазе от силы на $\pi/2$. Если $\omega < \omega_0$, скорость опережает по фазе силу на $\pi/2$.

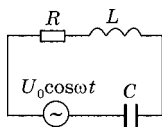


Рис. 2.4

Электрический осциллятор.

Электрический осциллятор представляет собой колебательный контур, содержащий индуктивность L , емкость C , резистор R и источник периодического напряжения $U_0 \cos \omega t$ (рис. 2.4).

Уравнение колебаний осциллятора определяется, согласно закону Кирхгофа, балансом напряжений в контуре:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t. \quad (2.7)$$

С учетом $I = \dot{q}$ уравнение колебаний принимает вид

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = U_0 \cos \omega t. \quad (2.8)$$

Решение этих дифференциальных уравнений представляет, как известно, сумму нестационарного и стационарного членов. Нестационарный член является полным решением соответствующего однородного уравнения, приведенного в предыдущем разделе:

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = 0$$

или

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0;$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Нестационарный член решения описывает затухающие колебания осциллятора. Стационарный член отражает поведение осциллятора под влиянием вынуждающей периодической силы и представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Имея в виду, что $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$, запишем уравнение (2.8) в виде

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = U_0 e^{i\omega t}.$$

Пусть $I = \hat{I} e^{i\omega t}$, $\hat{I}$ — комплексная амплитуда тока.

После подстановки I в соответствующие дифференциальные уравнения получаем

$$i\omega L\hat{I} + R\hat{I} + \frac{1}{i\omega C} \hat{I} = U_0$$

или

$$Z_e \hat{I} = U_0. \quad (2.9)$$

Импеданс электрического осциллятора

$$Z_e = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + i \frac{L}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Импеданс электрического осциллятора определяется как отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока:

$$Z_e = \frac{U_0}{\hat{I}}.$$

Импеданс может быть представлен в виде

$$Z_e = R + iX_e,$$

где R — активная часть импеданса (сопротивление резистора); X_e реактивная часть импеданса (реактанс):

$$X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Положительная компонента реактанса определяется индуктивностью и отражает накопление энергии в катушке индуктивности осциллятора в виде энергии магнитного поля.

Отрицательная компонента реактанса $-\frac{1}{\omega C}$ определяется емкостью и отражает накопление энергии электрического поля в конденсаторе.

Экспоненциальная форма электрического импеданса

$$Z_e = |Z_e|e^{i\varphi},$$

где

$$|Z_e| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$\varphi = \arctg \frac{X_e}{R}$ — разность фаз между внешним напряжением и током. Из (2.9) находим стационарное решение дифференциального уравнения электрического осциллятора в виде комплексной амплитуды тока:

$$\hat{I} = \frac{U_0}{Z_e}$$

или

$$I = \operatorname{Re} \left[\frac{U_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{|Z_e|} \right]. \quad (2.10)$$

Зависимость амплитуды и фазы тока I от частоты внешнего напряжения ω .

Из (2.10) имеем

$$I = \frac{U_0 \cos(\omega t - \varphi)}{|Z_e|}. \quad (2.11)$$

Отсюда находим амплитуду тока

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z_e|} = \frac{U_0}{\left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.12)$$

Зависимость амплитуды тока от частоты определяется частотной зависимостью импеданса.

Зависимость амплитуды тока от частоты (2.12) показана на рис. 2.5. Максимальная амплитуда тока $I_{\max} = \frac{U_0}{R}$ достигается при резонансе, когда $\omega = \omega_0$. При резонансной частоте ток и напряжение находятся в фазе, поскольку $X_e = 0$ и $\varphi = \arctg \frac{X_e}{R} = 0$.

Как следует из (2.12) и (2.9), на высоких частотах импеданс определяется индуктивностью, тогда как на низких частотах преобладающим является влияние емкости.

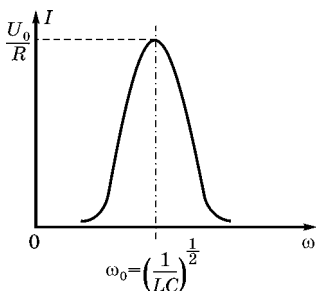


Рис. 2.5

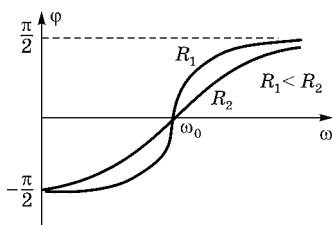


Рис. 2.6

Фазовый сдвиг

$$\varphi = \arctg \frac{X_m}{R} = \arctg \left[\frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega R} \right].$$

Зависимость фазового сдвига φ от частоты показана на рис. 2.6.

При высоких частотах $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, $\varphi > 0$ и ток отстает по фазе от напряжения. Если $\omega \rightarrow \infty$, это отставание достигает значения $\pi/2$. В случае низких частот $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, $\varphi < 0$ и ток опережает по фазе напряжение. При очень низких частотах $\omega \rightarrow 0$, $\varphi = -\pi/2$. Если $R = 0$, затухание отсутствует, а ток и напряжение ортогональны по фазе. При $\omega > \omega_0$ ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если $\omega < \omega_0$, ток опережает напряжение по фазе на $\pi/2$.

Приведенные рассуждения показывают, что вынужденные колебания в осцилляторах, имеющих различную физическую природу (механический осциллятор и электрический колебательный контур), описываются одинаково, если соблюдать соответствия:

- масса m — индуктивность L ;
- коэффициент жесткости s — обратная емкость $1/C$;
- скорость v — электрический ток I ;
- сила F — напряжение U ;
- смещение x — заряд q .

Поэтому дальнейший анализ мы продолжим на примере механического осциллятора, при необходимости используя электромеханическую аналогию и транслируя результаты на электрический осциллятор.

Зависимость смещения от частоты.

При вынужденных колебаниях осциллятора под действием периодической силы скорость и смещение изменяются также периодически. Смещение описывается интегралом от скорости:

$$\begin{aligned} x &= \int v dt = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\omega} \frac{F_0 e^{i\omega t}}{Z_m} \right\} = \operatorname{Re} \{ \hat{x} e^{i\omega t} \} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{F_0}{|Z_m|} e^{i(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \right\} = \frac{1}{\omega} \frac{F_0}{|Z_m|} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $\hat{x} = \frac{F_0}{\omega |Z_m|} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \varphi)}$ — комплексная амплитуда смещения.

Из сравнения (2.5) и (2.13) следует, что смещение и скорость ортогональны по фазе, причем смещение отстает от скорости на $\pi/2$. Отсюда график частотной зависимости разности фаз смещения и вынуждающей силы (рис. 2.7) аналогичен

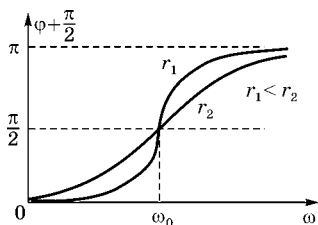


Рис. 2.7

графику на рис. 2.3, в котором учтено дополнительное запаздывание $\pi/2$. Векторная диаграмма (рис. 2.8) отображает вынуждающую силу, скорость

и смещение на комплексной плоскости фазорами, вращающимися с угловой скоростью ω .

Из выражения (2.13) и рис. 2.7 видно, что на очень низких частотах, $\omega \rightarrow 0$, смещение и сила изменяются в фазе. В случае высоких частот, $\omega \gg \omega_0$, смещение отстает по фазе от внешней силы на π . На резонансной частоте ω_0 смещение отстает от силы по фазе на $\pi/2$.

Исследуем зависимость амплитуды смещения $x_0 = \frac{F_0}{\omega |Z_m|}$ от частоты. На низких частотах $\omega \ll \omega_0$, $\frac{F_0}{\omega |Z_m|} \Big|_{\omega \ll \omega_0} \approx \frac{F_0}{s}$ и

амплитуда определяется преимущественно коэффициентом жесткости s . В случае высоких частот $\omega \gg \omega_0$, $\frac{F_0}{\omega |Z_m|} \Big|_{\omega \gg \omega_0} = \frac{F_0}{\omega^2 m}$ и амплитуда смещения определяется инерционными свойствами колебательной системы. При очень больших частотах амплитуда смещения стремится к нулю.

Резонанс смещения, как следует из выражения (2.13), достигается при минимальном значении знаменателя $\omega |Z_m|$.

Из условия экстремума

$$\frac{d}{d\omega}(\omega |Z_m|) = \frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{s}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0$$

получаем

$$\omega \left[r^2 + 2m^2 \left(\omega^2 - \frac{s}{m} \right) \right] = 0.$$

Отсюда:

$$1) \omega = 0 \text{ и } \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F_0}{\omega |Z_m|} = \frac{F_0}{s};$$

$$2) r^2 + 2m^2 \left(\omega^2 - \frac{s}{m} \right) = 0 \text{ или } \omega_{10}^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}.$$

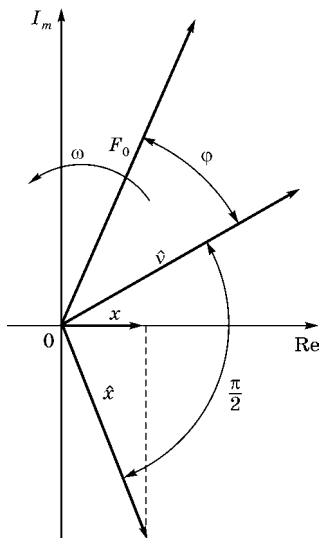


Рис. 2.8

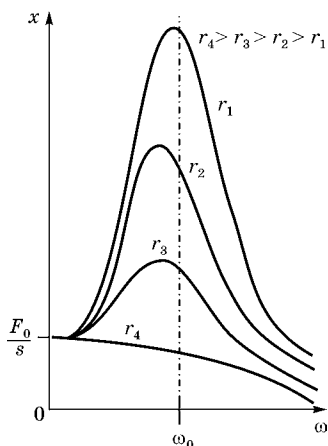


Рис. 2.9

Следовательно, резонансная частота смещения ω_{10} меньше резонансной частоты скорости. При отсутствии потерь, $r = 0$, или при большой массе, $\frac{r^2}{2m^2} \ll \omega_0$, резонансные частоты смещения и скорости совпадают. Подставляя в выражение для амплитуды $\frac{F_0}{\omega |Z_m|}$ частоту ω_{10} , получаем для резонансной амплитуды смещения

$$x_{\max} = \frac{F_0}{\omega_{20} r},$$

$$\text{где } \omega_{20} = \left[\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left[1 - \frac{1}{8Q^2} \right].$$

С ростом потерь (при увеличении r) резонансная амплитуда смещения падает. При малых r резонансная амплитуда становится большой и осциллятор приобретает резко селективную реакцию на частоту внешнего воздействия. На рис. 2.9 показана зависимость смещения осциллятора при вынужденных колебаниях от частоты внешнего воздействия при различных r .

Структура смещения при вынужденных колебаниях осциллятора.

Структура смещения, как следует из выражения (2.13), может быть представлена суммой двух колебаний:

$$x = \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\omega |Z_m|} = \frac{F_0 \cos \varphi}{\omega |Z_m|} \sin \omega t - \frac{F_0 \sin \varphi}{\omega |Z_m|} \cos \omega t.$$

С учетом $\cos \varphi = \frac{r}{|Z_m|}$, $\sin \varphi = \frac{X_m}{|Z_m|}$ получаем

$$x = \frac{F_0 r}{\omega |Z_m|^2} \sin \omega t - \frac{F_0 X_m}{\omega |Z_m|^2} \cos \omega t = x_r \sin \omega t + x_p \cos \omega t. \quad (2.14)$$

Согласно (2.14), смещение при вынужденных колебаниях описывается суммой квадратурной и противофазной по отношению к вынуждающей силе компонент.

Амплитуда противофазной компоненты

$$x_p = -\frac{F_0 X_m}{\omega |Z_m|^2} = -\frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2 r^2 + m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (2.15)$$

Квадратурная компонента отстает по фазе от внешней силы на $\pi/2$. Амплитуда квадратурной компоненты

$$x_r = \frac{F_0 r}{\omega |Z_m|^2} = \frac{F_0 \omega r}{\omega^2 r^2 + m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (2.16)$$

Как следует из (2.15) и (2.16), на частоте ω_0 противофазная компонента проходит через нуль, а квадратурная — через максимум. Сумма этих компонент имеет резонансный максимум, как и должно быть на частоте $\omega_{10}^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}$. Кроме того, амплитуда противофазной компоненты имеет максимум на частоте $\omega_0 - \frac{r}{2m}$ и минимум на частоте $\omega_0 + \frac{r}{2m}$. Это следует из условия экстремума

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2 r^2 + m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] = 0.$$

Откуда

$$\omega [m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^2 r^2] = 0:$$

$$1) \quad \omega = 0 \text{ соответствует } \frac{F_0 X_m}{\omega |Z_m|^2} = \frac{F_0}{s};$$

$$2) \quad m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^2 r^2 = 0;$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0 r}{m} \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0 r}{m} \right) = 0;$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \pm \frac{\omega_0 r}{m} = 0;$$

$$\omega_{2,3} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{r}{\omega_0 m} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \pm \frac{r}{2m} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right).$$

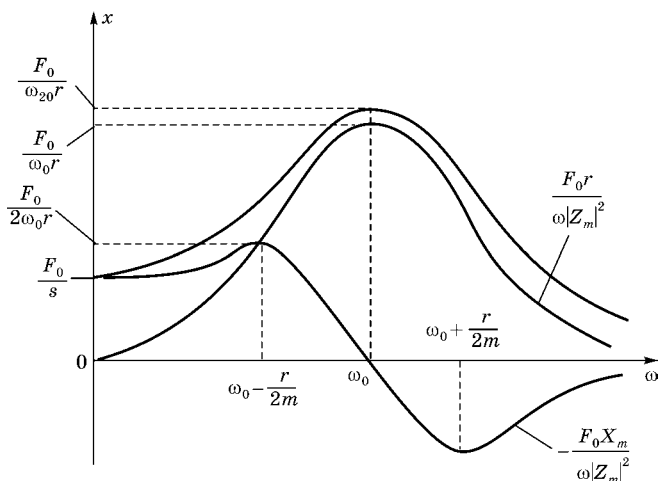


Рис. 2.10

Противофазная и квадратурная компоненты смещения при вынужденных колебаниях показаны на рис. 2.10.

Квадратурная компонента смещения $\frac{F_0 r}{\omega |Z_m|^2} \sin \omega t$ определяется диссипативной, т. е. связанной с поглощением, частью импеданса. Соответствующая этой компоненте скорость находится в фазе с вынуждающей силой. Противофазная (дисперсионная) компонента $\frac{F_0 X_m}{\omega |Z_m|^2} \cos \omega t$ определяется реактивной, связанной с накоплением энергии, частью импеданса. Скорость, соответствующая этой компоненте, отстает по фазе на $\pi/2$ от вынуждающей силы.

2.2. ЭНЕРГИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В режиме вынужденных колебаний внешнее воздействие должно возмещать потери энергии в осцилляторе. Рассмотрим энергетические процессы в механическом и электрическом осцилляторах (см. рис. 2.1 и 2.4).

Механический осциллятор.

Мощность, передаваемая осциллятору, равна произведению вынуждающей периодической силы на скорость:

$$P = \frac{F_0^2}{|Z_m|} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

Средняя мощность $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{|Z_m| T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{F_0^2}{2|Z_m|} \cos \varphi. \quad (2.17)$$

Мощность, диссипируемая за счет трения:

$$(r\dot{x})\dot{x} = r\dot{x}^2 = r \frac{F_0^2}{|Z_m|^2} \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Диссипированная мощность, усредненная за период колебаний:

$$r \frac{F_0^2}{|Z_m|^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{|Z_m|} \cos \varphi.$$

Здесь учтено $\cos \varphi = \frac{r}{|Z_m|}$.

Следовательно, мощность, передаваемая осциллятору вынуждающим воздействием при вынужденных колебаниях, равна мощности, диссипируемой в осцилляторе. Из формулы (2.17) видно, что средняя мощность зависит от частоты и при $\cos \varphi = 1$ достигает максимума. Это соответствует максимуму диссипируемой мощности.

Условие максимума средней мощности

$$X_m = 0.$$

Частотная зависимость диссипируемой в осцилляторе мощности имеет резонансный характер. Условие резонанса — равенство частоты внешнего воздействия собственной частоте осциллятора, $\omega = \omega_0$. При этом реактивная часть импеданса равняется нулю:

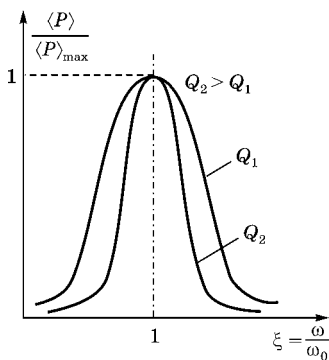


Рис. 2.11

$$X_m = \frac{m}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) = 0;$$

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{U_0^2}{2R}.$$

Резонансная кривая имеет вид, показанный на рис. 2.11. Резонансный максимум кривой поглощения соответствует максимуму мощности, отбираемой осциллятором от внешнего источника.

Электрический осциллятор.

Мощность, передаваемая осциллятору, равна произведению вынуждающего периодического напряжения на ток:

$$P = \frac{U_0^2}{|Z_e|} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

$$\text{Средняя мощность } \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{|Z_e|} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{U_0^2}{2|Z_e|} \cos \varphi. \quad (2.18)$$

Мощность, преобразованная в тепло на резисторе:

$$RI^2 = R \frac{U_0^2}{|Z_e|^2} \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Диссипируемая на резисторе мощность, усредненная за период колебаний:

$$R \frac{U_0^2}{|Z_e|^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_e|} \cos \varphi.$$

$$\text{Здесь учтено } \cos \varphi = \frac{R}{|Z_e|}.$$

Следовательно, мощность, передаваемая осциллятору вынуждающим воздействием при вынужденных колебаниях, равна мощности, диссипируемой в осцилляторе.

Из формулы (2.18) видно, что средняя мощность зависит от частоты и при $\cos\varphi = 1$ достигает максимума. Это соответствует максимуму диссипируемой мощности.

Условие максимума средней мощности

$$X_e = 0.$$

Частотная зависимость диссипируемой в осцилляторе мощности имеет резонансный характер. Условие резонанса — равенство частоты внешнего воздействия собственной частоте осциллятора, $\omega = \omega_0$. При этом реактивная часть импеданса равняется нулю:

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{2r};$$

$$X_e = \frac{L}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Резонансная кривая имеет вид, показанный на рис. 2.11. Резонансный максимум кривой поглощения соответствует максимуму мощности, отбираемой осциллятором от внешнего источника.

2.3. ДОБРОТНОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБРОТНОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРА ЧЕРЕЗ ШИРИНУ ПОЛОСЫ ПОГЛОЩЕНИЯ

Оценим ширину кривой поглощения, приведенной на рис. 2.11, на уровне $1/2$, $\langle P \rangle = 1/2 \langle P \rangle_{\max}$.

Механический осциллятор.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2 r}{|Z_m|^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2}{2r};$$

$$|Z_m|^2 = 2r^2;$$

$$r^2 + X_m^2 = 2r^2.$$

Отсюда

$$X_m^2 = \left(\omega m - \frac{s}{\omega} \right)^2 = r^2.$$

Эти уравнения сводятся к системам

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 m - \frac{s}{\omega_1} &= -r \\ \omega_2 m - \frac{s}{\omega_2} &= -r \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{r}{m}.$$

Определим добротность как отношение резонансной частоты к ширине кривой поглощения $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ на уровне $\frac{1}{2}\langle P \rangle_{\max}$:

$$Q = \frac{\omega_0 m}{r} = \sqrt{\frac{s}{m}} \cdot \frac{m}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{sm}.$$

Результат совпадает с определением добротности, приведенным в разд. 1.2.

Электрический осциллятор.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2 R}{|Z_e|^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{2R}, \\ |Ze|^2 &= 2R^2; \\ R^2 + X_e^2 &= 2R^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$X_e^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = R^2.$$

Эти уравнения сводятся к системам

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 L - \frac{1}{C\omega_1} &= -R \\ \omega_2 L - \frac{1}{C\omega_2} &= R \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}.$$

Найдем добротность как отношение резонансной частоты к ширине кривой поглощения $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ на уровне $1/2\langle P \rangle_{\max}$:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{\sqrt{LC}R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Результат совпадает с формулами для добротности, приведенными в разд. 1.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБРОТНОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРА КАК КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ

При анализе вынужденных колебаний осциллятора максимум смещения при резонансе определяется выражением

$$x(\omega_{10}) = \frac{F_0}{\omega_{20} r},$$

где $\omega_{20}^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}$. На нулевой частоте амплитуда смещения равна $x(0) = \frac{F_0}{s}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{x(\omega_{10})}{x(0)} &= \frac{F_0 s}{r F_0 \left(\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{s}{\omega_0 r \left(1 - \frac{r^2}{8\omega_0^2 m^2} \right)} = \\ &= \frac{\omega_0 m}{r \left(1 - \frac{1}{8Q^2} \right)} \approx Q \left(1 + \frac{1}{8Q^2} \right) \approx Q, \end{aligned}$$

поскольку $Q \gg 1$. Следовательно, добротность находится как отношение максимальной амплитуды смещения при резонансе к амплитуде на низкой частоте ($\omega \ll \omega_0$). Другими словами, добротность можно определить как усиление амплитуды при резонансе. Поэтому она может служить мерой селективности осциллятора по отношению к частоте внешнего воздействия.

2.4. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

На рис. 2.4 показан последовательный электрический контур, в который включен источник периодического напряжения $U_0 \cos \omega t$. Из выражения для тока в этом осцилляторе определим напряжение на элементах R , C и L .

Амплитуда тока в контуре (2.12)

$$\begin{aligned}
 I = \frac{U_0}{|Z_e|} &= U_0 \left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{L^2 \omega_0^4}{R^2 \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{Q^2}{\xi^2} (\xi^2 - 1)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\xi U_0}{R} [\xi^2 + Q^2 (\xi^2 - 1)^2]^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Здесь введена относительная частота $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$. При резонансе $\xi = 1$ и

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Отношение квадрата амплитуды тока в контуре к квадрату амплитуды тока при резонансе равно отношению квадратов соответствующих проводимостей:

$$\left(\frac{I}{I_0} \right)^2 = \frac{\xi^2}{\xi^2 + Q^2 (\xi^2 - 1)^2}.$$

Это уравнение описывает приведенную резонансную кривую последовательного контура (см. рис. 2.11). Из рисунка видно, что большей добротности колебательного контура соответствует большая селективность резонансной кривой.

Исследуем падение напряжения на различных элементах последовательного колебательного контура при вынужденных колебаниях.

Комплексная амплитуда напряжения на:

- индуктивности

$$\hat{U}_L = i\hat{I}\omega L = \frac{i\omega L U_0}{Z_e};$$

- емкости

$$\hat{U}_C = i\hat{I}\omega C = -\frac{iU_0}{\omega C Z_e};$$

- резисторе

$$\hat{U}_R = \frac{R U_0}{Z_e}.$$

При резонансе

$$\omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_W;$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_W;$$

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{Z_W}{R}.$$

Величина $Z_W = \sqrt{\frac{L}{C}}$ называется *волновым сопротивлением*. Очевидно, что $Q = \frac{Z_W}{R}$. В случае резонанса для напряжений на элементах последовательного контура имеем

$$U_L = U_0 \frac{Z_W}{R} = QU_0; \quad U_C = -U_0 \frac{Z_W}{R} = -QU_0; \quad U_R = U_0.$$

При резонансе в последовательном колебательном контуре напряжения на индуктивности и емкости в Q раз больше амплитуды внешнего напряжения и противоположны по фазе. Отсюда резонанс в последовательном колебательном контуре получил название *резонанса напряжений*. При резонансе в последовательном колебательном контуре напряжение на резисторе R равно внешнему напряжению.

2.5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Параллельный колебательный контур, подключенный к внешнему генератору напряжения, показан на рис. 2.12. По отношению к внешнему источнику контур представляет собой две соединенные параллельно цепи с импедансами

$$Z_1 = R_1 + i\omega L = R_1 + iX_L;$$

$$Z_2 = R_2 - \frac{i}{\omega C} = R_2 + iX_C.$$

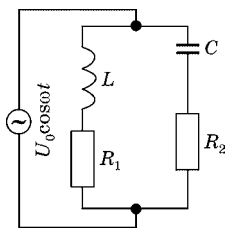


Рис. 2.12

Эквивалентный импеданс параллельной цепи

$$\begin{aligned} Z_9 &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1 + iX_L)(R_2 + iX_C)}{R_1 + R_2 + i(X_L + X_C)} = \\ &= \frac{(R_1 + iX_L)(R_2 + iX_C)[R_1 + R_2 - i(X_L + X_C)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L + X_C)^2} = \\ &= \frac{R_1(R_2^2 + X_C^2) + R_2(R_1^2 + X_L^2) + i[X_C(R_1^2 + X_L^2) + X_L(R_2^2 + X_C^2)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L + X_C)^2} = \\ &= R_9 + iX_9. \end{aligned}$$

Резонанс имеет место, когда реактивная часть эквивалентного импеданса равна нулю:

$$X_9 = 0$$

или

$$X_C(R_1^2 + X_L^2) + X_L(R_2^2 + X_C^2) = 0.$$

Подставим значения X_C и X_L и последовательно выполним следующие преобразования:

$$-\frac{1}{\omega C}(R_1^2 + \omega^2 L^2) + \omega L\left(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) = 0;$$

$$R_2^2 \omega L - \frac{R_1^2}{\omega C} + \frac{L}{C}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = 0;$$

$$R_2^2 \omega L - \frac{R_1^2}{\omega C} + \frac{L^2}{\omega C}(\omega_0^2 - \omega^2) = 0;$$

$$R_2^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - R_1^2 + L^2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0;$$

$$\omega^2 \left(\frac{R_2^2}{\omega_0^2} - L^2 \right) + L^2 \omega_0^2 - R_1^2 = 0.$$

Отсюда находим резонансную частоту

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^2 - Z_W^2}{R_2^2 - Z_W^2}},$$

где $Z_W^2 = L^2 \omega_0^2$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

На практике обычно $Z_W \gg R_2$; $Z_W \gg R_1$. Следовательно, резонансная частота параллельного колебательного контура может быть принята равной собственной частоте идеального контура ω_0 .

Оценим эквивалентное сопротивление параллельного контура при резонансе:

$$Z_{\text{э}}(\omega_0) = \frac{R_1(R_2^2 + X_C^2) + R_2(R_1^2 + X_L^2)}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{Z_W^2}{R_1 + R_2}.$$

Здесь учтено, что при резонансе $X_L + X_C = 0$ и $X_L^2 = X_C^2 = Z_W^2$. Поскольку $Z_W \gg R_1$ и $Z_W \gg R_2$, первым членом в выражении для $Z_{\text{э}}(\omega)$ пренебрегаем. Отсюда

$$Z_{\text{э}}(\omega_0) = \frac{Z_W^2}{R_1 + R_2} = \frac{Z_W^2}{R} = Q Z_W,$$

где $R = R_1 + R_2$ — полное сопротивление контура,

$$Q = \frac{Z_W}{R} = \frac{\omega L}{R}.$$

При резонансе импеданс параллельного контура достигает максимального значения $Q Z_W$ и в случае идеального контура ($R = 0$) стремится к бесконечности. Для сравнения напомним, что импеданс последовательного контура при резонансе ограничен величиной R , а импеданс идеального последовательного контура равен нулю.

Найдем соотношение между током I_g во внешней цепи, питающей параллельный контур, и током внутри контура I_c при резонансе. Будем исходить из энергетических условий: мощность, затрачиваемая внешним генератором, должна равняться мощности колебаний, возбуждаемых в контуре.

$$\frac{1}{2} I_g^2 Z_{\text{э}}(\omega_0) = \frac{1}{2} I_c^2 R.$$

Отсюда

$$I_g^2 Z_W Q = I_c^2 R;$$

$$I_c = I_g \sqrt{\frac{Z_W Q}{R}} = Q I_g.$$

Следовательно, при резонансе ток, циркулирующий внутри параллельного контура, в Q раз больше тока во внешней цепи, питающей контур. При этом токи в емкостной и индуктивной ветвях контура одинаковы по величине и противоположны по фазе. Следовательно, «резонанс напряжений» в последовательном контуре, по аналогии,

можно сопоставить с «резонансом токов» в параллельном контуре.

Ток во внешней цепи, питающей параллельный контур, при резонансе принимает минимальное значение:

$$I_{g0} = \frac{U_0}{QZ_W}.$$

Найдем приведенную резонансную кривую для параллельного контура. Отношение квадрата амплитуды внешнего тока к квадрату его амплитуды при резонансе определяется отношением квадратов соответствующих проводимостей

$$\begin{aligned} \frac{I_g^2}{I_{g0}^2} &= \frac{Q^2 Z_W^2}{|Z_3|^2} = Q^2 Z_W^2 \left| \frac{R_1 + R_2 + i(X_L + X_C)}{(R_1 + iX_L)(R_2 + iX_C)} \right|^2 = \\ &= \frac{Q^2 Z_W^2 \left| R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right|^2}{\left| R_1 R_2 + Z_W^2 + i\left(\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right) \right|^2} = \\ &= \frac{Q^2 Z_W^2 [\xi^2 + Q^2(\xi^2 - 1)^2]}{Q^2 Z_W^2 \xi^2 + Q^2(\xi^2 R_2 - R_1)^2} = \\ &= \frac{\xi^2 + Q^2(\xi^2 - 1)^2}{\xi^2 + \frac{1}{Z_W^2}(\xi^2 R_2 - R_1)^2}. \end{aligned}$$

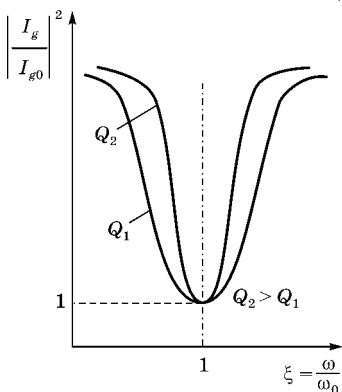


Рис. 2.13

$$1. \text{ При } \xi \sim 1 \quad \frac{I_g^2}{I_{g0}^2} \approx 1.$$

$$2. \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{I_g}{I_{g0}} \right)^2 \approx \frac{Z_W^2 Q^2}{R_1^2} \approx Q^4.$$

$$3. \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{I_g}{I_{g0}} \right)^2 \approx \frac{Z_W^2 Q^2}{R_2^2} \approx Q^4.$$

Из сравнения рис. 2.13 и 2.11 видно, что приведенные резонансные кривые для параллельного и после-

довательного контуров имеют взаимообращенный характер. Селективность приведенных резонансных кривых параллельного контура повышается с увеличением добротности.

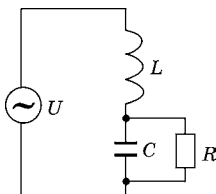
ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. Дайте определение электрического и механического импедансов осциллятора.
2. Как зависит амплитуда и фаза скорости (тока) от частоты внешнего воздействия?
3. Поясните зависимость амплитуды и фазы смещения (заряда) от частоты.
4. Опишите структуру смещения при вынужденных колебаниях осциллятора.
5. Опишите дисперсионную компоненту структуры смещения при вынужденных колебаниях.
6. Дайте определение диссипативной компоненты смещения и опишите ее свойства.
7. Как соотносятся мощность, передаваемая осциллятору, и диссипируемая мощность при вынужденных колебаниях?
8. Дайте определение добротности осциллятора через ширину частотной полосы поглощения.
9. Определите добротность как коэффициент усиления.
10. Как связаны добротность и волновое сопротивление контура?
11. Что такое резонанс напряжений?
12. Опишите резонансные явления в параллельном контуре. В чем отличие «резонанса токов» от «резонанса напряжений»?

ЗАДАЧИ

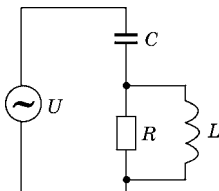
2.1. В механическом осцилляторе амплитуды скорости движения тела массой m в режиме вынужденных колебаний на частотах ω_1 и ω_2 оказались одинаковыми. Определить резонансную частоту осциллятора и коэффициент жесткости s пружины.

2.2. Показать, что в цепи, изображенной на рисунке, ток в резисторе не зависит от сопротивления R , если частота вынуждающего напряжения U равна $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



2.3. Найти ток в резисторе R в цепи, показанной на рисунке, если частота вынуждающего напряжения U равна

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

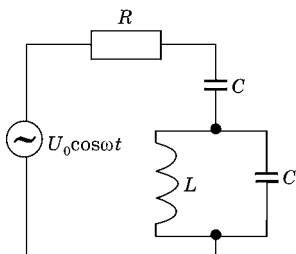
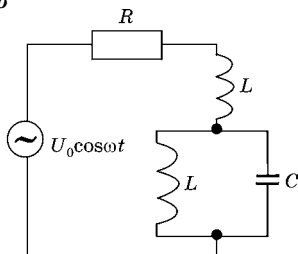


2.4. Два вынужденных колебания с одинаковыми частотами имеют амплитуды, которые при всех значениях вынуждающей силы отличаются друг от друга в два раза. Каким из параметров (амплитуда вынуждающей силы, масса колеблющегося тела, коэффициент упругости, коэффициент трения) отличаются эти колебательные системы? Предполагается, что отличным для них является только один параметр.

2.5. Имеются последовательный и параллельный колебательные контуры с одинаковой резонансной частотой. В каком порядке необходимо соединить эти контуры, чтобы выделить сигнал $U_{\text{вх}}$ на резонансной частоте, максимально подавив сигналы на других частотах?

2.6. Имеются последовательный и параллельный колебательные контуры с одинаковой резонансной частотой. В каком порядке необходимо соединить эти контуры, чтобы максимально подавить сигнал $U_{\text{вх}}$ на резонансной частоте?

2.7. Найти ток в установившемся режиме в цепи, изображенной на рисунках *а* и *б*. При какой частоте амплиту-

а*б*

да установившихся колебаний тока будет максимальна и при какой минимальна? Чему равны максимальная и минимальная амплитуды тока?

2.8. Каким сопротивлением — емкостным или индуктивным — обладает параллельный LC -контур на частотах $\omega < \omega_0$ и $\omega > \omega_0$? Исследовать поведение параллельного контура вблизи резонанса. Графически отобразить изменение в окрестности резонансной частоты эквивалентного полного сопротивления Z_{Σ} , его активной и реактивной компонент.

2.9. Определить относительную мощность вынужденных колебаний, $\langle P \rangle / \langle P \rangle_{\max}$, как функцию добротности осциллятора.

2.10. Для резонансного обнаружения малых вынуждающих сил используется кристалл сапфира, добротность которого $G = 10^9$ и частота собственных колебаний $\omega_0 = 10^4$ Гц. Определить время, в течение которого в монокристалле устанавливаются стационарные колебания с момента воздействия вынуждающей силы.

|||||

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Параметрические колебания возбуждаются, когда один из параметров осциллятора, характеризующий накопление энергии (масса, упругость, индуктивность, емкость), модулирует на частоте ω_p , обычно называемой частотой накачки. Особый интерес представляет явление *параметрического резонанса*, когда амплитуда колебаний осциллятора растет при периодическом изменении параметра с частотой, которая удовлетворяет определенным отношениям с собственной частотой колебательной системы. Общеизвестный пример колебательной системы с параметрическим возбуждением — качели, хорошей моделью которых служит математический маятник с периодически изменяемой длиной нити. В реальных качелях эта длина изменяется за счет периодического смещения центра масс при приседаниях в момент максимального подъема и вставании при прохождении положения равновесия.

3.1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Электрическим аналогом такого математического маятника с переменной длиной является колебательный контур с периодически изменяющейся емкостью (рис. 3.1). Чтобы амплитуда колебаний в таком контуре нарастала, необходимо вводить в него энергию, совершая работу против сил электрического поля конденсатора. Это означает, что нужно уменьшать емкость, увеличивая, например, эф-

эффективное расстояние между пластинами, когда заряд в конденсаторе максимален, и увеличивать емкость, уменьшая расстояние между пластинами, когда заряд обращается в нуль. Такого типа колебательные системы в общем случае описываются дифференциальным уравнением Хилла

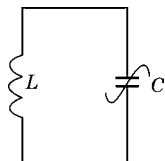


Рис. 3.1

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

где $\omega^2(t)$ — периодическая функция времени.

Пусть параметр осциллятора, определяющий собственную частоту колебаний, модулируется по гармоническому закону. Таким параметром может быть масса или упругость в механическом осцилляторе, индуктивность или емкость в электрическом контуре. Тогда

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_p t),$$

и уравнение Хилла превращается в уравнение Матье

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_p t)x = 0, \quad (3.1)$$

где ω_p — частота модуляции параметра, μ — индекс модуляции. Например, для колебательного контура с модуляцией емкости

$$\omega^2(t) = \frac{1}{LC(1 + \mu \cos \omega_p t)}.$$

При $\mu \ll 1$

$$\omega^2(t) \approx \frac{1}{LC}(1 - \mu \cos \omega_p t) = \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_p t).$$

Из уравнения Матье (3.1) можно сделать простую оценку частоты накачки ω_p , необходимой для генерации незатухающих колебаний. Для этого запишем решение уравнения в виде $x = A \cos \omega t$. После подстановки в (3.1) имеем

$$-\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_p t) \cos \omega t = 0;$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - \omega_0^2 \mu \cos \omega_p t \cos \omega t = 0;$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - \frac{\omega_0^2 \mu}{2} \cos(\omega_p - \omega)t - \frac{\omega_0^2 \mu}{2} \cos(\omega_p + \omega)t = 0.$$

Выбирая $\omega_p = 2\omega$ и пренебрегая несинхронными колебаниями с частотой $\omega_p + \omega$, получаем

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - \frac{\omega_0^2 \mu}{2} \cos \omega t = 0$$

или

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \mu}{2} \right) \cos \omega t = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_0^2 \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \omega^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим для частоты колебаний

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left| 1 - \frac{\mu}{4} \right|.$$

Область существования параметрического резонанса

$$\frac{\mu}{4} > \left| \frac{\omega_p}{2\omega_0} - 1 \right|.$$

Следовательно, устойчивые колебания возможны при $\omega_p = 2\omega \approx 2\omega_0 \left| 1 - \frac{\mu}{4} \right|$, если частота накачки в два раза больше собственной частоты колебаний осциллятора, учитывая, что $\mu \ll 1$. Решение уравнения x_0 (3.1) в общем виде для произвольного μ выражается через специальные функции Маттье.

Исследуем решение для случая $\mu \ll 1$. Поскольку при $\mu = 0$ решение уравнения (3.1) известно, для нахождения решения при малом μ воспользуемся методом теории возмущений. Будем искать решение в виде

$$x(t) = x_0 + \mu x^{(1)}, \quad (3.2)$$

где $\mu x^{(1)}$ — поправка к решению первого порядка малости. После подстановки (3.2) в (3.1) получаем

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \mu [\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} - x_0 \omega_0^2 \cos \omega_p t] = 0.$$

Поскольку по определению $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$, уравнение для поправки $x^{(1)}$ первого порядка возмущения принимает вид

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} - x_0 \omega_0^2 \cos \omega_P t = 0$$

или, с учетом $x_0 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_P t).$$

После элементарного преобразования правой части переходим

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{1}{2} \omega_0^2 A \{ \cos[(\omega_0 - \omega_P)t + \varphi] + \cos[(\omega_0 + \omega_P)t + \varphi] \}.$$

Мы получили уравнение, описывающее вынужденные колебания, причем вынуждающая сила содержит две гармонические компоненты с частотами $\omega_0 - \omega_P$ и $\omega_0 + \omega_P$, которые и должны определять частотный интервал резонанса. Однако при резонансе $x^{(1)}$ растет. Поэтому, чтобы не выйти за рамки теории возмущений, воспользуемся следующим приемом.

Пусть $\omega_P = 2\omega_0 + \mu\Delta$, где $\mu\Delta = \Delta'$ — малая частотная расстройка. Тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \mu x \cos[(2\omega_0 + \Delta')t]. \quad (3.3)$$

Запишем решение этого уравнения с точностью до первого порядка возмущения $x^{(1)}$:

$$x(t) = A(\mu t) \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] + B(\mu t) \sin\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] + \mu x^{(1)}, \quad (3.4)$$

где $A(\mu t)$ и $B(\mu t)$ — медленно меняющиеся функции времени (в сравнении с гармоническими множителями). Подставим (3.4) в уравнение (3.3) с учетом $\dot{A}(\mu t) \approx \mu\Delta$ и $\dot{B}(\mu t) \approx \mu\Delta$. Приравняв коэффициенты при μ , получаем уравнение для поправки $x^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \omega_0 \left\{ \left(2\dot{A} + \Delta'B - \frac{1}{2}\mu\omega_0 B \right) \sin\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] + \right. \\ \left. + \left(-2\dot{B} + \Delta'A + \frac{1}{2}\mu\omega_0 A \right) \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функции $A(\mu t)$ и $B(\mu t)$ определим из условия ненарастания $x^{(1)}$ в резонансной области, чтобы сохранить

правомерность применения теории возмущений для анализа колебаний осциллятора. Для этого наложим условие отсутствия резонансных слагаемых в правой части уравнения (3.5):

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{A} + \Delta' B - \frac{1}{2}\mu\omega_0 B &= 0 \\ -2\dot{B} + \Delta' A + \frac{1}{2}\mu\omega_0 A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или, с учетом $\Delta' = \mu\Delta$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\mu}{2}\left(\Delta - \frac{\omega_0}{2}\right)B \\ \dot{B} &= \frac{\mu}{2}\left(\Delta + \frac{\omega_0}{2}\right)A \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.6) приводится к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{A} + \frac{\mu^2}{4}\left(\Delta^2 - \frac{\omega_0^2}{4}\right)A &= 0; \\ \ddot{B} + \frac{\mu^2}{4}\left(\Delta^2 - \frac{\omega_0^2}{4}\right)B &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения идентичны. Решение ищем, как обычно, в экспоненциальном виде

$$A \sim \exp(\alpha t); \quad B \sim \exp(\alpha t).$$

После подстановки получаем характеристические уравнения

$$\alpha^2 = \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{\omega_0^2}{4} - \Delta^2\right)$$

или

$$\alpha = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\omega_0^2}{4} - \Delta^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что при малой расстройке, $\Delta < \left|\frac{\omega_0}{2}\right|$, амплитуды $A(\mu t)$ и $B(\mu t)$ будут возрастать, т. е. возникает параметрическая неустойчивость. Из определения расстройки $\omega_P = 2\omega_0 + \mu\Delta$ получаем $\Delta = \frac{2\omega_0}{\mu}\left(\frac{\omega_P}{2\omega_0} - 1\right)$. Подстав-

для это выражение в условие резонансной неустойчивости,

$\Delta < \left| \frac{\omega_0}{2} \right|$, находим

$$\frac{2\omega_0}{\mu} \left| \frac{\omega_P}{2\omega_0} - 1 \right| < \frac{\omega_0}{2};$$

$$\left| \frac{\omega_P}{2\omega_0} - 1 \right| < \frac{\mu}{4}.$$

Отсюда следуют уравнения для границ зоны параметрической неустойчивости:

$$1) \quad \frac{\mu}{4} = \frac{\omega_P}{2\omega_0} - 1;$$

$$2) \quad \frac{\mu}{4} = 1 - \frac{\omega_P}{2\omega_0}.$$

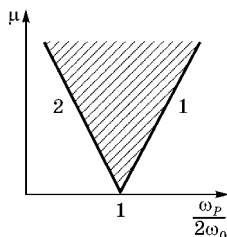


Рис. 3.2

Эта зона показана на рис. 3.2.

В общем случае параметрический резонанс должен иметь место при частотах $\omega_P = \frac{2\omega_0}{n}$, где n — целое число. По аналогии с приведенным анализом эти резонансные частоты соответствуют появлению в решении уравнения поправок высших порядков $x^{(n)}$.

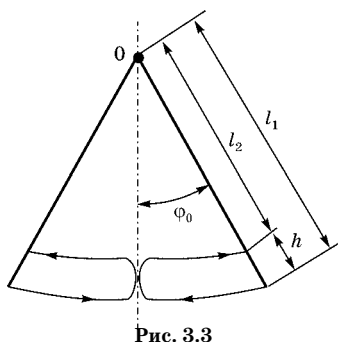
3.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Механическим аналогом электрического осциллятора с параметрическим возбуждением является колебательная система типа «качели», показанная на рис. 3.3. Идеализированной моделью такого осциллятора является математический маятник с переменной длиной, которая принимает два значения: l_1 и l_2 , $l_1 > l_2$. Большая длина l_1 соответствует фазе спуска от максимального отклонения до наинизшей точки, меньшая длина соответствует фазе подъема. Полагая, что потери отсутствуют, запишем уравнение сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi_0).$$

Поскольку $\dot{x} = l\dot{\phi}$, найдем угловую скорость $\dot{\phi}$, в нижней точке в конце фазы спуска:

$$\dot{\phi}_1^2 = \frac{2g}{l_1}(1 - \cos\varphi_{01}), \quad (3.8)$$



где φ_{01} — угол начального отклонения. По аналогии угловая скорость $\dot{\phi}_2$ в момент начала фазы подъема связана с максимальным отклонением в конце этой фазы соотношением

$$\dot{\phi}_2^2 = \frac{2g}{l_2}(1 - \cos\varphi_{02}). \quad (3.9)$$

Изменение длины маятника за счет изменения положения центра масс происходит при пересечении положения равновесия. Будем считать процесс изменения длины маятника мгновенным. Поэтому момент количества движения при реализации этого процесса сохраняется

$$ml_1^2\dot{\phi}_1 = ml_2^2\dot{\phi}_2. \quad (3.10)$$

Возведем (3.10) в квадрат. Квадраты скоростей $\dot{\phi}_1^2$ и $\dot{\phi}_2^2$ определены в (3.8) и (3.9). После подстановки (3.10) и необходимых сокращений получаем

$$l_1^3(1 - \cos\varphi_{01}) = l_2^3(1 - \cos\varphi_{02}).$$

Это соотношение связывает последовательные максимальные отклонения на интервале, соответствующем первому полупериоду. Аналогичное соотношение, пользуясь методом индукции, можно записать для максимальных отклонений любого последующего полупериода

$$l_1^3(1 - \cos\varphi_{0n}) = l_2^3(1 - \cos\varphi_{0(n+1)}). \quad (3.11)$$

На рис. 3.4 построены функции $l_3(1 - \cos\varphi_0)$ для $l = l_1$ и $l = l_2$. Из рисунка можно графически определить амплитуды колебаний, начиная с заданной начальной амплитуды φ_{01} по ступенчатой ломаной, заключенной между кривыми, соответствующими функциям $l_1^3(1 - \cos\varphi_{0n})$ и $l_2^3(1 - \cos\varphi_{0(n+1)})$.

Согласно соотношению (3.11), абсцисса ступенек представляет собой значения амплитуд в последовательные моменты изменения направления движения, а разность абсцисс — последовательные приращения амплитуды колебания. Из рисунка видно, что при параметрическом возбуждении колебаний амплитуда может расти неограниченно. Однако параметрическое возбуждение колебаний невозможно из положения равновесия без начального отклонения.

Рассмотрим энергию параметрических колебаний осциллятора, показанного на рис.

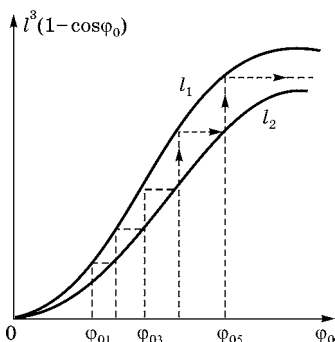


Рис. 3.4

3.3. Изменение энергии происходит лишь в моменты, когда меняется длина маятника (меняется положение центра масс). При подъеме энергия системы увеличивается на величину

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2).$$

Здесь первое слагаемое — прирост потенциальной энергии, а второе — приращений кинетической энергии. Фазе спуска соответствует потеря потенциальной энергии:

$$E_s = mgh \cos \varphi_{02}.$$

За один полупериод колебаний, включающий фазу подъема и фазу спуска, получаем приращение энергии:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_h - E_s = mgh(1 - \cos \varphi_{02}) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \\ &= mgh(1 - \cos \varphi_{02}) + \frac{1}{2}m(l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - l_1^2 \dot{\varphi}_1^2) = \\ &= mgh(1 - \cos \varphi_{02}) + mg[l_2(1 - \cos \varphi_{02}) - l_1(1 - \cos \varphi_{01})] = \\ &= mgl_1(1 - \cos \varphi_{02}) - mgl_1(1 - \cos \varphi_{01}) = mgl_1(1 - \cos \varphi_{01}) \left[\frac{l_1^3}{l_2^3} - 1 \right] = \\ &= mgl_1(1 - \cos \varphi_{01}) \frac{h}{l_2^3} (l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2) = \xi E_{01}, \end{aligned}$$

где $\xi = \frac{h}{l_2^3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)$, E_{01} — начальная (потенциальная) энергия осциллятора. Получаем выражение для приращения энергии за полупериод:

$$\Delta E = \xi E_{01}.$$

Отсюда величина энергии в конце первого полупериода

$$E_{02} = E_{01} + \Delta E = E_{01}(1 + \xi).$$

По аналогии для энергии после $n - 1$ полупериодов колебаний можно записать

$$E_{0n} = (1 + \xi)^{n-1} E_{01}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что при параметрическом возбуждении энергия осциллятора возрастает в геометрической прогрессии. Имеет место параметрический резонанс в основной зоне ($\omega_P = 2\omega_0$).

3.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С ПОТЕРЯМИ

В качестве параметрического осциллятора с потерями рассмотрим колебательный контур с переменной емкостью и активным сопротивлением R , показанный на рис. 3.5. Параметрические колебания, как и в контуре без потерь (см. рис. 3.1), возбуждаются за счет периодической модуляции емкости $C(1 + \mu \cos \omega_P t)$.

Запишем дифференциальное уравнение для заряда в колебательном контуре:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_P t)q = 0. \quad (3.13)$$

Здесь $\gamma = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания. Как и при анализе контура без потерь в разд. 3.1, выберем $\omega_P = 2\omega$. Уравнение (3.13) принимает вид

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2(1 - \mu \cos 2\omega_P t)q = 0. \quad (3.14)$$

Преобразуем уравнение (3.13) в уравнение Матье. Для этого воспользуемся заменой переменной:

$$q = e^{-\gamma t} x; \quad (3.15)$$

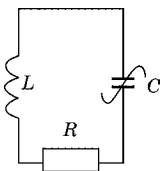


Рис. 3.5

$$\dot{q} = \frac{d}{dt}(e^{-\gamma t} x) = e^{-\gamma t} (\dot{x} - \gamma x);$$

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt}[e^{-\gamma t} (\dot{x} - \gamma x)] = e^{-\gamma t} (\ddot{x} - 2\gamma \dot{x} - \gamma^2 x).$$

Подстановка qx , qx и $\ddot{q}x$ в (3.14) дает

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x} + \gamma^2 x + 2\gamma(\dot{x} - \gamma x) + \omega_0^2(1 - \mu \cos 2\omega t)x = 0,$$

или после элементарных преобразований:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_0^2 \cos 2\omega t)x = 0. \quad (3.16)$$

Выполним в (3.16) замену переменной:

$$\omega t = \tau; \quad (3.17)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{dx}{d\tau};$$

$$\ddot{x} = \omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

Тогда уравнение (3.16) принимает вид

$$\omega^2 \ddot{x} + (\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_0^2 \mu \cos 2\tau)x = 0.$$

Разделив это уравнение на ω^2 , получаем

$$\ddot{x} + \left(\frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mu \cos 2\tau \right) x = 0. \quad (3.18)$$

Вводя в (3.18) обозначения $\frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{\omega^2} = a$, $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mu = 2b$, приходим к канонической форме уравнения Матье:

$$\ddot{x} + (a - 2b \cos 2\tau)x = 0. \quad (3.19)$$

Решение уравнения (3.19) может быть записано в виде

$$x = Ae^{\alpha\tau}G(\tau) + Be^{-\alpha\tau}G(-\tau), \quad (3.20)$$

где $G(\tau)$ и $G(-\tau)$ — периодические функции с периодом π или 2π , α — коэффициент, зависящий от a и b , A и B — коэффициенты, определяемые из граничных условий. Если коэффициент α имеет действительное значение, амплитуда одного из слагаемых в (3.20) неограниченно возрастает.

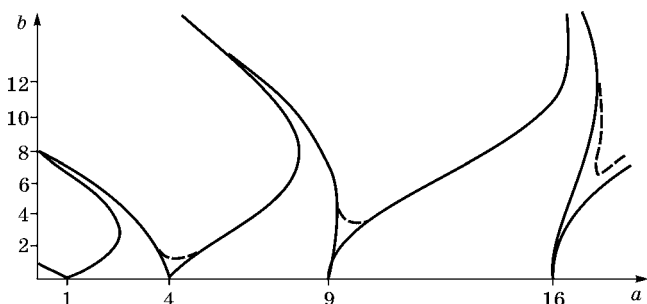


Рис. 3.6

Следовательно, условие возбуждения параметрических колебаний можно записать в виде

$$\operatorname{Re}(\alpha) \neq 0. \quad (3.21)$$

Рис. 3.6 показывает на плоскости a и b области неустойчивости, внутри которых коэффициент α имеет действительное значение. В этих областях возможно возбуждение параметрических колебаний. Вне области неустойчивости коэффициент α мнимый и колебания не нарастают. Области неустойчивости для положительных μ и отрицательных μ $\left(b = \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}\mu\right)$ зеркально симметричны относительно оси a .

В осцилляторе без потерь ($\gamma = 0$) параметрические колебания возбуждаются при сколь угодно малых значениях μ в области частот, для которой $a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = n^2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку $\omega_P = 2\omega$, возбуждение параметрических колебаний имеет место при

$$\omega_P = \frac{2\omega_0}{n}.$$

Согласно (3.15), $q = e^{-\frac{\gamma}{\omega}\tau}x$, поскольку $t = \frac{\tau}{\omega}$. Поэтому решение уравнения (3.19) для осциллятора с потерями можно записать в виде

$$x = Ae^{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\omega}\right)\tau}G(\tau) + Be^{-\left(\alpha - \frac{\gamma}{\omega}\right)\tau}G(-\tau). \quad (3.22)$$

Отсюда следует, что области неустойчивости, в которых возбуждаются параметрические колебания, ограничиваются кривыми $|\alpha| = \frac{\gamma}{\omega}$. Это иллюстрируется на рис. 3.6 пунктирными кривыми, ограничивающими область возбуждения для $|\alpha| = 0,1$. Поскольку $\frac{\gamma}{\omega} \ll 1$,

$$a \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx n^2 \text{ и } b_n \approx \frac{\mu}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx \frac{\mu}{2} n^2. \quad (3.23)$$

Отсюда условие параметрического возбуждения принимает вид

$$b \approx \frac{1}{2} \mu n^2 \geq b_n. \quad (3.24)$$

Знаку равенства здесь соответствует значение критической величины индекса модуляции $\mu_{\text{кр}}$:

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{2b_n}{n^2}. \quad (3.25)$$

С учетом (3.24) и (3.25) получаем условие параметрического возбуждения колебаний:

$$\mu > \mu_{\text{кр}}. \quad (3.26)$$

Этому условию должен удовлетворить индекс (глубина) параметрической модуляции. В частности, для первой зоны параметрической неустойчивости

$$\mu_{\text{кр}} = 2\gamma.$$

Характеристики $b(a)$ определяют зависимость $\mu_{\text{кр}}$ от расстройки. Поэтому они называются *пороговыми характеристиками*.

Из (3.23) и (3.25) следует, что критические значения индекса параметрической модуляции растут с номером зоны. Отсюда возбуждение параметрических колебаний в зонах высшего порядка ($n > 1$) требует, согласно (3.26), увеличения глубины модуляции. Поэтому на практике в параметрических осцилляторах обычно используется возбуждение в первой зоне, соответствующей частоте накачки $\omega_p = 2\omega$.

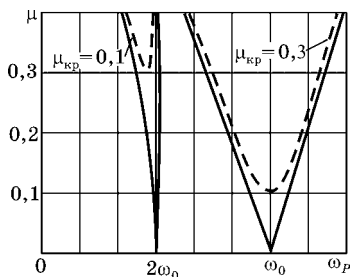


Рис. 3.7

Критическая величина индекса модуляции связана с номером зоны соотношением

$$\mu_{кр} = \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где δ — логарифмический декремент затухания.

На рис. 3.7. показаны первые две зоны неустойчивости при отсутствии потерь (сплошная линия) и пороговые характеристики в случае потерь из-за вязкого трения (штриховая линия) при $\frac{\delta}{\pi} = 0,1$ ($\mu_{кр} = 0,1$ в первой зоне и $\mu_{кр} = 0,3$ во второй зоне неустойчивости).

Отметим отличительную особенность параметрических колебаний в сравнении с вынужденными. При вынужденных колебаниях энергия внешнего воздействия, потребляемая колебательной системой, равна энергии, затрачиваемой на работу против сил сопротивления (трения). При параметрических колебаниях, если величина приращения энергии больше диссипируемой, колебания будут нарастающими и энергия осциллятора будет увеличиваться беспредельно (вплоть до разрушения). Если приращение энергии равно диссипативным потерям за тот же временной интервал, получается стационарный режим параметрических колебаний. Для параметрического возбуждения необходимо начальное возмущение, которое превышало бы пороговую величину, обусловленную сопротивлением и соответствующую стационарному режиму.

3.4. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Выведем уравнение математического маятника переменной длины. Воспользуемся тем, что производная от момента количества движения равна моменту внешних сил. Имея в виду, что момент количества движения маят-

ника относительно точки подвески равен $ml^2\ddot{\varphi}$, момент силы тяжести $M_g = -mgl\sin\varphi$, получим

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = 2ml \cdot \dot{l}\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Отсюда

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0. \quad (3.27)$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Дифференциальное уравнение (3.27) описывает параметрические колебания в математическом маятнике переменной длины. Если длина маятника изменяется скачкообразно и периодически на величину εl_0 с частотой ω , закон изменения длины можно представить в виде

$$l = l_0[1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(\sin\omega t)],$$

где $\operatorname{sgn}(\sin\omega t) = \begin{cases} 1, & \sin\omega t > 0; \\ -1, & \sin\omega t < 0. \end{cases}$

В рассматриваемой выше модели маятника типа «качели» при параметрическом резонансе изменение длины маятника было привязано по фазе к колебаниям и выполнялось при основном параметрическом резонансе с частотой, равной удвоенной собственной частоте маятника: $\omega = 2\omega_0$. В интервале между скачками $l = \text{const}$, $\dot{l} = 0$ и уравнение (3.27) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0,$$

а энергия сохраняется. Изменение энергии происходит лишь в момент скачкообразного изменения длины l :

$$\Delta E = mgh(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}m(l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - l_1^2\dot{\varphi}_1^2). \quad (3.28)$$

Первое и второе слагаемые в (3.28) — изменения потенциальной и кинетической энергий. Величина $\Delta E > 0$, когда длина уменьшается (при подъеме), и $\Delta E < 0$ при увеличении длины (при спуске). Параметрическое возбуждение колебаний возможно, когда

$$\Delta E_h + \Delta E_s > 0,$$

где h и s обозначают фазы подъема и спуска. Пример фазовой траектории, отображающей колебания в математи-

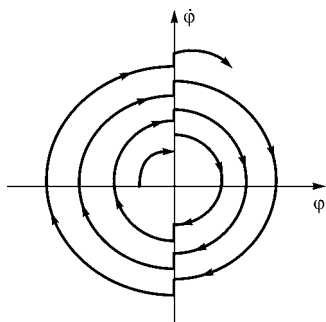


Рис. 3.8

ческом маятнике переменной длины типа «качели» при параметрическом возбуждении в режиме основного резонанса $\omega = 2\omega_0$, показан на рис. 3.8.

Обратимся к электрическому аналогу такого осциллятора, показанного на рис. 3.1. Это колебательный контур с переменной емкостью, которая скачком уменьшается на величину ΔC в момент, когда ток в контуре ну-

левой и заряд на конденсаторе максимальный. При этом совершается работа против электрических сил в конденсаторе и потенциальная энергия осциллятора повышается. Энергия электрического поля в конденсаторе

$$E_C + \Delta E_C = \frac{1}{2}(C + \Delta C)U^2 = \frac{1}{2}C\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)U^2. \quad (3.29)$$

Это приращение энергии за счет изменения емкости эквивалентно приращению энергии за счет увеличения напряжения на конденсаторе при постоянной емкости:

$$\begin{aligned} E_C + \Delta E_C &= \frac{1}{2}C(U + \Delta U)^2 = \\ &= \frac{1}{2}CU^2\left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) получаем

$$\frac{1}{2}C\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)U^2 = \frac{1}{2}CU^2\left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^2.$$

Откуда

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C} U.$$

Поскольку $q = CU$, $I = \dot{q} = C\dot{U}$, фазовые траектории электрического осциллятора с параметрическим возбуждением колебаний за счет изменения емкости в режиме основного параметрического резонанса $\omega = 2\omega_0$ могут быть представлены в координатах $\dot{U}$, U или I , U . Пример такой фазовой

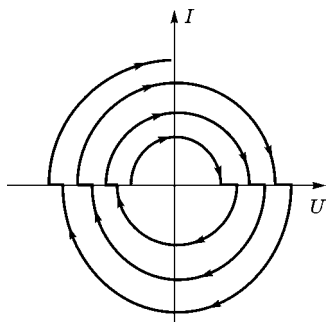


Рис. 3.9

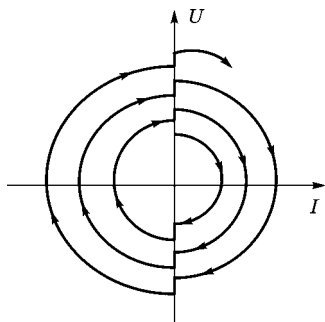


Рис. 3.10

траектории для электрического контура со скачкообразным изменением емкости показан на рис. 3.9. Учитывая, что напряжения на емкости и индуктивности в интервале между скачками противофазны, фазовую траекторию параметрических колебаний электрического осциллятора в основной резонансной зоне можно представить как на рис. 3.8. Такая фазовая траектория получается при инверсии оси U и повороте системы координат на угол $\pi/2$ (рис. 3.10).

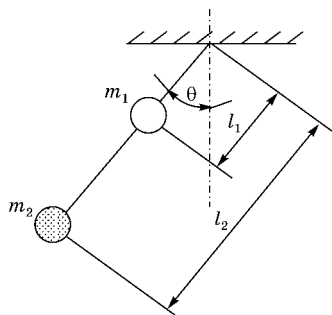
ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. На примере математического маятника опишите свойства параметрических колебаний.
2. Каким уравнением описывается состояние колебательного контура с параметрическим возбуждением?
3. Что такое параметрический резонанс?
4. При каких частотах накачки возбуждается параметрический резонанс и как они связаны с собственной частотой осциллятора?
5. При каких начальных условиях возможно возбуждение параметрических колебаний?
6. Опишите энергетические характеристики параметрических колебаний. В чем отличие параметрических колебаний от вынужденных?
7. Какие условия необходимы для стационарного режима параметрических колебаний?
8. Почему для возбуждения параметрических колебаний в зонах высшего порядка требуется увеличение индекса модуляции?
9. Как отображаются параметрические колебания на фазовой плоскости (на примере электрического или механического осциллятора)?

ЗАДАЧИ

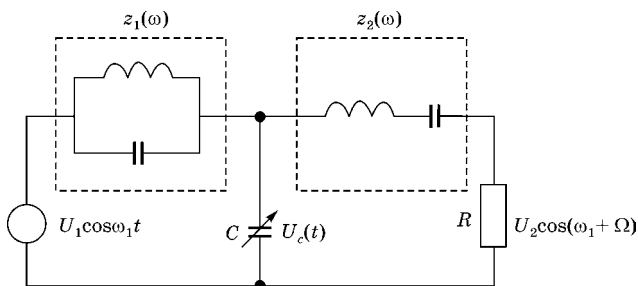
3.1. Доказать, что критическая величина индекса модуляции $\mu_{\text{кр}}$ связана с логарифмическим декрементом затухания δ соотношением $\mu_{\text{кр}} = \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}}$, где n — номер зоны неустойчивости.

3.2. На рисунке показан маятник, представляющий собой невесомый стержень, на котором помещены массы m_1 и m_2 . Масса m_1 колеблется вдоль стержня с частотой по закону $l = l_1(1 + \varepsilon \cos \Omega t)$. При какой частоте Ω возбуждается параметрический резонанс колебательной системы?



3.3. На рисунке показана схема параметрического усилителя. Емкость конденсатора C меняется по закону $C(t) = C_0 + 2C_1 \cos \Omega t$. Резонансные контуры, импедансы которых $z_1(\omega)$ и $z_2(\omega)$, настроены на резонансную частоту $\omega_0 = \omega_1 + \Omega$. Показать, что напряжение на конденсаторе

$$U_0(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos(\omega_1 + \Omega)t.$$



3.4. Показать, что ток через конденсатор в параметрическом усилителе, приведенном в задаче 3.3, равен

$$i_C = -\{\omega_1(C_0U_1 + C_1U_2)\sin\omega_1t + \\ + (\omega_1 + \Omega)(C_0U_2 + C_1U_1)\sin(\omega_1 + \Omega)t + \\ + (\omega_1 + \Omega)C_1U_1\sin(\omega_1 + \Omega)t + \\ + (2\Omega + \omega_1)C_1U_2\sin(2\Omega + \omega_1)t\}.$$

3.5. Показать, что в параметрическом усилителе (задача 3.3) комплексная амплитуда напряжения на изоляторе R равна

$$U_2 = -\frac{i(\omega_1 + \Omega) C_1 U_1 R}{1 + i(\omega_1 + \Omega) C_0 R}.$$

3.6. В параметрическом усилителе (задача 3.3) средняя входная мощность P_i , средняя выходная мощность $P_e = \frac{1}{2}U_2^2 R$. Показать, что $P_e = \frac{\omega_1 + \Omega}{\omega_1} P_i$.

3.7. Объяснить механизм возбуждения параметрических колебаний в математическом маятнике с изменяемой длиной, воспользовавшись представлением о силе Кариолиса.

3.8. Написать уравнение движения для математического маятника: а) с горизонтально колеблющейся точкой подвеса; б) с вертикально колеблющейся точкой подвеса. В чем отличие колебаний математического маятника в случаях а) и б)?

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ

В колебательной системе, состоящей из двух или более осцилляторов, редко реализуется состояние отдельного, полностью изолированного осциллятора. В физике динамические модели молекул хорошо описываются системами связанных осцилляторов — атомов, поскольку силы взаимодействия атомов в молекуле можно считать упругими. Энергия между осцилляторами передается через общий элемент, например через индуктивность (массу), емкость (жесткость), сопротивление (демпфер).

4.1. ОСЦИЛЛЯТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ ЧЕРЕЗ ЖЕСТКОСТЬ (ЕМКОСТЬ)

Рассмотрим два одинаковых маятника длиной l и массой m , связанных пружиной, жесткость которой s (рис. 4.1). Массой пружины пренебрегаем. Пусть x и y — смещения масс маятников. Запишем уравнения движения осцилляторов:

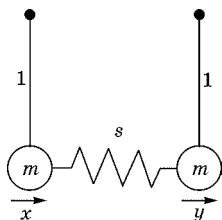


Рис. 4.1

$$m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = -s(x - y);$$

$$m\ddot{y} + mg\frac{y}{l} = s(x - y).$$

Член $\pm s(x - y)$ описывает влияние одного осциллятора на другой через элемент связи с жесткостью s . Преобразуем эти уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{s}{m}(x - y); \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{s}{m}(x - y), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

Введем новую систему координат:

$$X = x + y; \quad Y = x - y.$$

Складывая и вычитая уравнения (4.1), находим

$$\begin{cases} \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0; \\ \ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right) Y = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) соответствуют гармоническим колебаниям со смещениями X и Y . Если $Y = 0$, то $x = y$ и колебательное движение системы двух связанных осцилляторов описывается уравнением движения

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

а частота колебаний равна собственной частоте отдельного осциллятора ω_0 . Это режим синфазных колебаний (рис. 4.2). В случае когда $X = 0$, осцилляторы колеблются в противофазе (рис. 4.3), $x = -y$, а связанные колебания описываются уравнением движения

$$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right) Y = 0.$$

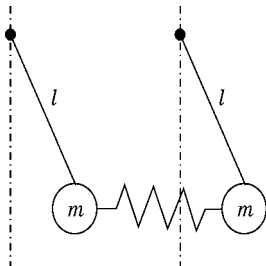


Рис. 4.2

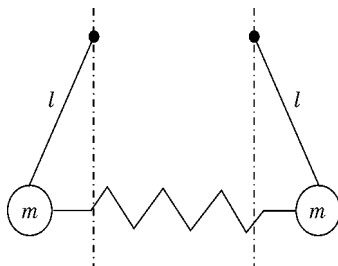


Рис. 4.3

Частота противофазных колебаний осцилляторов в связанной системе $\left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ оказывается выше, чем собственная частота ω_0 осциллятора. Рассмотренные особенности связанных колебаний системы двух осцилляторов позволяют ввести понятие нормальных координат и нормальных мод колебаний.

Нормальные координаты — это такие координаты, в которых уравнения колебаний принимают форму системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, причем каждое уравнение содержит только одну зависимую переменную.

Колебания, описываемые линейным дифференциальным уравнением с одной зависимой переменной, называются *нормальной модой* (типом) колебаний. Она характеризуется нормальной частотой, с которой колеблются все элементы связанной системы осцилляторов.

Полная энергия колебательной системы без затухания может быть представлена суммой квадратов нормальных координат и их первых производных, умноженных на постоянные коэффициенты. Например, энергия двух связанных осцилляторов (см. рис. 4.1) выражается через квадраты смещений X , Y и скоростей $\dot{X}$, $\dot{Y}$.

Нормальные моды в линейных колебательных системах не обмениваются энергией между собой и могут возбуждаться независимо друг от друга.

ПРИМЕР 4.1

Найти энергию колебаний двух связанных осцилляторов (см. рис. 4.1).

Решение.

Уравнения движения осциллятора в нормальных координатах:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0; \\ \ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right) Y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{X} + m\omega_0^2 X = 0; \\ m\ddot{Y} + (m\omega_0^2 + 2s)Y = 0. \end{cases}$$

После умножения первого уравнения на $\dot{X}$, а второго на $\dot{Y}$ получаем

$$\begin{cases} m\ddot{X}\dot{X} + m\omega_0^2 X\dot{X} = 0; \\ m\ddot{Y}\dot{Y} + (m\omega_0^2 + 2s)Y\dot{Y} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения можно представить через производные соответствующих квадратичных форм:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2 \right) = 0; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} (m \omega_0^2 + 2s) Y^2 \right] = 0. \end{cases}$$

После интегрирования уравнения принимают вид

$$\begin{cases} E_X = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2; \\ E_Y = \frac{1}{2} m \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} (m \omega_0^2 + 2s) Y^2. \end{cases}$$

$E_X = \text{const}$, $E_Y = \text{const}$, отсюда полная энергия также сохраняется:

$$\begin{aligned} E &= E_X + E_Y = E_k + E_p = \text{const}; \\ E_k &= a \dot{X}^2 + b \dot{Y}^2; \\ E_p &= c X^2 + d Y^2, \end{aligned}$$

где E_k — кинетическая энергия; E_p — потенциальная энергия;

$$a = 1/2m, b = 1/2m, c = 1/2m\omega_0^2, d = 1/2(m\omega_0^2 + 2s).$$

Переходя от нормальных координат к естественным, получаем, с учетом $a = b$, выражение для полной энергии связанной системы

$$\begin{aligned} E &= a(\dot{x} + \dot{y})^2 + b(\dot{x} - \dot{y})^2 + c(x + y)^2 + d(x - y)^2 = \\ &= 2a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (c + d)(x^2 + y^2) + 2(c - d)xy = E_x + E_y + E_{xy}. \end{aligned}$$

Здесь $E_x = 2a\dot{x}^2 + (c + d)x^2$ — энергия x -осциллятора, $E_y = 2a\dot{y}^2 + (c + d)y^2$ — энергия y -осциллятора, $E_{xy} = 2(c - d)xy$ — энергия связи.

4.2. АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В ЕСТЕСТВЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть нормальные координаты изменяются по гармоническому закону

$$\begin{aligned} X &= X_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \\ Y &= Y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Любое состояние связанной системы можно представить суперпозицией нормальных мод X и Y . Положим для простоты $X_0 = Y_0 = 2a$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x = a[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]; \\ y = a[\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t]. \end{cases}$$

Используя известные тригонометрические преобразования, получаем

$$\begin{cases} x = 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right); \\ y = -2a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right). \end{cases} \quad (4.3)$$

Отсюда смещения для связанных колебаний двух осцилляторов могут быть представлены амплитудно модулированными колебаниями с частотой несущей, равной полусумме нормальных частот, и частотой модуляции огибающей, равной полуразности нормальных частот. Несущая и огибающая x -колебаний находятся по фазе в квадратуре к несущей и огибающей y -компоненты. Характер изменения x и y соответствует биению колебаний между нормальными частотами ω_1 и ω_2 . При этом минимуму амплитуды огибающей смещения x соответствует максимум огибающей y -компоненты и наоборот.

Оценим энергию колебательной системы связанных осцилляторов. Введем обозначения:

$$\omega_M = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1); \quad \omega_a = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1).$$

Пусть пружина слабая и запасает пренебрежимо малую энергию, а $\omega_M \ll \omega_a$. В (4.3) можно ввести медленно меняющиеся амплитуды:

$$x_0(t) = 2a \cos \omega_M t; \quad y_0(t) = -2a \sin \omega_M t.$$

Тогда для собственных смещений осцилляторов имеем

$$x = x_0(t) \cos \omega_a t; \quad y = y_0(t) \sin \omega_a t.$$

Поскольку x_0 и y_0 — медленные (квазистационарные) функции в сравнении с $\cos \omega_a t$ и $\sin \omega_a t$, выражения для скорости имеют вид

$$\dot{x} = -x_0 \omega_a \sin \omega_a t;$$

$$\dot{y} = y_0 \omega_a \cos \omega_a t.$$

Энергия каждого из осцилляторов

$$E_x = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_a^2 = 2ma^2 \omega_a^2 \cos^2 \omega_M t = ma^2 \omega_a^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t];$$

$$E_y = \frac{1}{2} m y_0^2 \omega_a^2 = 2ma^2 \omega_a^2 \sin^2 \omega_M t = ma^2 \omega_a^2 [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t].$$

Отсюда видно, что *полная энергия* постоянна:

$$E = E_x + E_y = 2ma^2 \omega_a^2,$$

а разность энергий осцилляторов меняется с частотой $\omega_2 - \omega_1$:

$$\Delta E = E_x - E_y = 2ma^2 \omega_a^2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t.$$

Следовательно, осцилляторы в связанной системе обмениваются энергией с разностной частотой $\omega_2 - \omega_1$. Однако обмен энергией между нормальными модами отсутствует.

4.3. ЧАСТОТА НОРМАЛЬНЫХ МОД

При возбуждении нормальной моды все элементы системы колеблются с частотой нормальной моды. На этом основан способ определения частот нормальных мод. Обратимся к связанным осцилляторам на рис. 4.1. Из уравнения движения осциллятора (4.1)

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{s}{m}(x - y) = 0; \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - \frac{s}{m}(x - y) = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $x = Ae^{i\omega t}$; $y = Be^{i\omega t}$. Подстановка этих решений в дифференциальные уравнения движения приводит их к алгебраической форме

$$\begin{cases} -\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{s}{m}(A - B) = 0; \\ -\omega^2 B + \omega_0^2 B - \frac{s}{m}(A - B) = 0. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} -\omega^2 (A + B) + \omega_0^2 (A + B) = 0; \\ -\omega^2 (A - B) + \omega_0^2 (A - B) + \frac{2s}{m}(A - B) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(A + B) = 0; \quad A + B \neq 0; \quad \omega_1^2 = \omega_0^2.$$

Из второго уравнения получаем

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right)(A - B) = 0; \quad A - B \neq 0; \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2s}{m},$$

ω_1 и ω_2 — частоты соответственно первой и второй нормальных мод.

Рассмотрим связанные колебания двух осцилляторов с различными массами. Исследуем систему, показанную на рис. 4.1, для $m_1 \neq m_2$:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + m_1 \omega_0^2 x = -s(x - y); \\ m_2 \ddot{y} + m_2 \omega_0^2 y = s(x - y). \end{cases}$$

В качестве нормальных координат выбираем

$$X = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}, \quad Y = x - y.$$

Ищем решение системы в виде

$$x = Ae^{i\omega t}; \quad y = Be^{i\omega t}.$$

После подстановки в исходные уравнения движения имеем

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 A + m_1 \omega_0^2 A = -s(A - B); \\ -m_2 \omega^2 B + m_2 \omega_0^2 B = s(A - B). \end{cases} \quad (4.4)$$

Суммируя уравнения (4.4), получаем

$$-(m_1 A + m_2 B)\omega^2 + (m_1 A + m_2 B)\omega_0^2 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2.$$

После умножения первого уравнения в (4.4) на m_2 , а второго — на m_1 получаем

$$\begin{cases} -m_1 m_2 \omega^2 A + m_1 m_2 \omega_0^2 A = -s m_2 (A - B); \\ -m_1 m_2 \omega^2 B + m_1 m_2 \omega_0^2 B = s m_1 (A - B). \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$-m_1 m_2 \omega^2 (A - B) + m_1 m_2 \omega_0^2 (A - B) = -s(A - B)(m_1 + m_2). \quad (4.5)$$

Введем обозначение: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, μ — приведенная масса. Тогда (4.5) примет вид

$$-\mu \omega^2 + \mu \omega_0^2 = -s \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{s}{\mu}.$$

Частоты нормальных мод

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{s}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $m_1 = m_2 = m$; $\mu = m/2$ и мы приходим к ранее полученному результату:

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разделив в системе (4.4) первое уравнение на второе, получаем

$$\frac{A m_1}{B m_2} = -1.$$

Откуда находим отношение амплитуд

$$\frac{A}{B} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Абсолютные значения амплитуд определяются из начальных условий.

ПРИМЕР 4.2

Найти частоты нормальных мод колебательной системы, состоящей из двух тел с массами m_1 и m_2 , связанных пружиной, жесткость которой s (см. рис. 4.4).

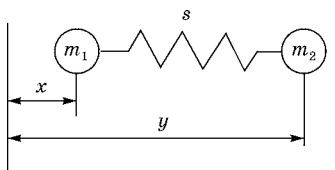


Рис. 4.4

Решение.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -s(x - y); \\ m_2 \ddot{y} = s(x - y). \end{cases}$$

Подставляя $x = Ae^{i\omega t}$; $y = Be^{i\omega t}$, получаем

$$\begin{cases} m_2 \{-m_1 \omega^2 A = -s(A - B); \\ m_1 \{-m_2 \omega^2 B = s(A - B). \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, умноженные соответственно на m_1 и m_2 , находим

$$m_1 m_2 \omega^2 (A - B) = s(A - B)(m_1 + m_2);$$

$$\mu \omega^2 = s; \quad \omega^2 = \frac{s}{\mu},$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Такая колебательная система является хорошей моделью двухатомных молекул. Например, для молекулы NaCl собственная частота колебаний $1,4 \cdot 10^{13}$ Гц (инфракрасная область). Масса атома натрия 23 а. е. м., масса хлора 35 а. е. м. 1 а. е. м. (атомная единица массы) = $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Отсюда получается оценка постоянной межатомного взаимодействия

$$s \approx (2\pi)^2 \cdot 1,4^2 \cdot 10^{26} \frac{35 \cdot 23}{35 + 23} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \approx 180 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

4.4. СИСТЕМА ИЗ ДВУХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЕМКОСТНОЙ СВЯЗЬЮ

На рис. 4.5 представлен электрический аналог механической колебательной системы, показанной на рис. 4.1. Дифференциальные уравнения колебаний

$$\begin{cases} L \ddot{q}_1 + L \omega_0^2 q_1 = -\frac{1}{C_k} (q_1 - q_2); \\ L \ddot{q}_2 + L \omega_0^2 q_2 = \frac{1}{C_k} (q_1 - q_2), \end{cases}$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $q_i = \int I_i dt$.

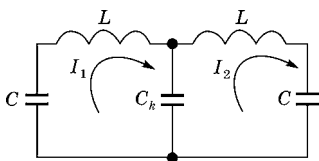


Рис. 4.5

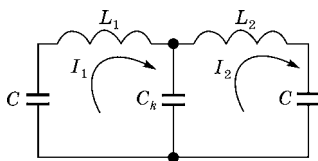


Рис. 4.6

Перейдем к нормальным координатам:

$$Q_x = q_1 + q_2; \quad Q_y = q_1 - q_2.$$

Тогда система дифференциальных уравнений сводится к уравнениям колебаний для нормальных мод:

$$\begin{cases} \ddot{Q}_x + \omega_0^2 Q_x = 0; \\ L\ddot{Q}_y + L\omega_0^2 Q_y = -\frac{2}{C_k} Q_y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{Q}_x + \omega_0^2 Q_x = 0; \\ \ddot{Q}_y + \left(\omega_0^2 + \frac{2}{C_k L} \right) Q_y = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\omega_1 = \omega_0$; $\omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2}{C_k L} \right)^{\frac{1}{2}}$. Анализ этой колебательной системы полностью соответствует анализу механического аналога, показанного на рис. 4.1, с заменой $m \rightarrow L$, $s \rightarrow 1/C_k$, $x \rightarrow q_1$, $y \rightarrow q_2$.

В случае $L_1 \neq L_2$ (рис. 4.6) имеем аналог системы, приведенной на рис. 4.1 для $m_1 \neq m_2$.

Дифференциальные уравнения колебаний

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + L_1 \omega_0^2 q_1 = -\frac{1}{C_k} (q_1 - q_2); \\ L_2 \ddot{q}_2 + L_2 \omega_0^2 q_2 = \frac{1}{C_k} (q_1 - q_2). \end{cases}$$

Пусть $q_1 = Ae^{i\omega t}$, $q_2 = Be^{i\omega t}$. Тогда

$$\begin{cases} L_2 \left\{ -L_1 \omega^2 A + L_1 \omega_0^2 A = -\frac{1}{C_k} (A - B); \right. \\ L_1 \left\{ -L_2 \omega^2 B + L_2 \omega_0^2 B = \frac{1}{C_k} (A - B). \right. \end{cases}$$

После вычитания уравнений, умноженных соответственно на L_1 и L_2 , имеем

$$L_{\mu}(\omega_0^2 - \omega^2) = -\frac{1}{C_k}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{C_k L_{\mu}},$$

где L_{μ} — приведенная индуктивность, $L_{\mu} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. Отсюда для частоты противофазной моды получаем

$$\omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2}{C_k L_{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Частота синфазной моды

$$\omega_1 = \omega_0.$$

ПРИМЕР 4.3

Найти нормальные частоты связанных электрических осцилляторов (рис. 4.7).

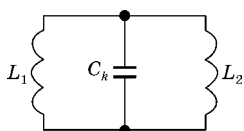


Рис. 4.7

Решение.

Это электрический аналог колебательной системы, показанной на рис. 4.4. Дифференциальные уравнения колебаний

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 = -\frac{1}{C_k}(q_1 - q_2); \\ L_2 \ddot{q}_2 = \frac{1}{C_k}(q_1 - q_2). \end{cases}$$

Отсюда следуют уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{cases} L_2 \left\{ -L_1 \omega^2 A = -\frac{1}{C_k}(A - B); \right. \\ L_1 \left\{ -L_2 \omega^2 B = \frac{1}{C_k}(A - B). \right. \end{cases}$$

Умножая эти уравнения колебаний соответственно на L_1 и L_2 и вычитая, получаем

$$L_{\mu} \omega^2 = \frac{1}{C_k}; \quad \omega^2 = \frac{1}{L_{\mu} C_k}.$$

Если произвести замену $L_\mu \rightarrow \mu$, $\frac{1}{C_k} \rightarrow s$, находим выражение для частоты нормальной моды в эквивалентных механических системах, приведенных на рис. 4.4 и 4.1.

ПРИМЕР 4.4

Определить частоты нормальных мод колебаний и отношения амплитуд в связанной системе осцилляторов, показанной на рис. 4.8.

Решение.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + sx = -s(x - y); \\ m\ddot{y} = s(x - y). \end{cases}$$

Пусть $x = Ae^{i\omega t}$, $y = Be^{i\omega t}$:

$$\begin{cases} -\omega^2 A + \omega_0^2 A = -\omega_0^2 (A - B); \\ -\omega^2 B = \omega_0^2 (A - B). \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} -\omega^2 + 2\omega_0^2 = \omega_0^2 \frac{B}{A}; \\ -\omega^2 + \omega_0^2 = \omega_0^2 \frac{A}{B}. \end{cases}$$

Перемножим уравнения (4.6):

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^4.$$

Решаем полученное биквадратное уравнение относительно ω^2 :

$$\begin{aligned} \omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4 &= \omega_0^4; \\ \omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 &= 0; \\ \omega^2 &= \frac{3}{2}\omega_0^2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}\omega_0^4 - \omega_0^4} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})\omega_0^2. \end{aligned}$$

Быстрые колебания

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\omega_0^2.$$

Из второго уравнения (4.6) находим отношение амплитуд:

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2} = \left| 1 - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \right| = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

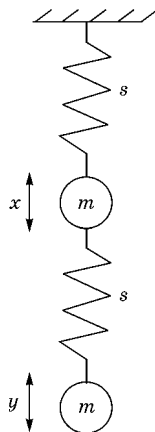


Рис. 4.8

Медленные колебания

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \left| 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right| = \left| 1 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \right| = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

4.5. СИСТЕМА ИЗ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ИНЕРЦИАЛЬНОЙ (ИНДУКТИВНОЙ) СВЯЗЬЮ

Пример системы механических осцилляторов с инерциальной связью через массу M показан на рис. 4.9. Эта модель связанных осцилляторов хорошо описывает трехатомные молекулы типа H_2O , CO_2 , NO_2 и др.

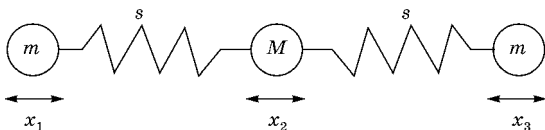


Рис. 4.9

Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -s(x_1 - x_2); \\ M\ddot{x}_2 = s(x_1 - x_2) - s(x_2 - x_3); \\ m\ddot{x}_3 = s(x_2 - x_3). \end{cases} \quad (4.7)$$

Сумма этих уравнений дает результирующую силу:

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_3 = 0. \quad (4.8)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к закону сохранения импульса. Положим, что решения имеют вид

$$x_j = A_j e^{i\omega t},$$

где $j = 1, 2, 3$.

После подстановки x_j в уравнения (4.7) и (4.8) получаем

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = -s(A_1 - A_2); \\ -M\omega^2 A_2 = s(A_1 - A_2) - s(A_2 - A_3); \\ -m\omega^2 A_3 = s(A_2 - A_3). \end{cases} \quad (4.9)$$

$$mA_1 + MA_2 + mA_3 = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$A_1 + A_3 = -\frac{M}{m} A_2.$$

После подстановки в среднее уравнение (4.9) имеем

$$-M\omega^2 A_2 = -2sA_2 - \frac{sMA_2}{m};$$

$$M\omega^2 = 2s \left(1 + \frac{M}{2m} \right).$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{s}{\mu},$$

где $\mu = \frac{Mm}{M+2m}$ — приведенная масса. Следовательно, частота первой нормальной моды определяется корнем квадратным из отношения жесткости к приведенной массе:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{s}{\mu}}.$$

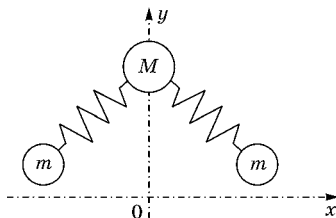


Рис. 4.10

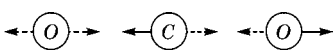
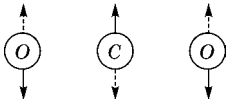
Рассмотрим другой случай, не изменяющий результирующую силу (4.8) и удовлетворяющий закону сохранения импульса: $\ddot{x}_2 = 0$, $A_2 = 0$. Тогда $mA_1 + mA_3 = 0$, или $A_1 + A_3 = 0$. Уравнения (4.9) сводятся к выражению $m\omega^2 A_1 = -sA_1$. Отсюда для частоты второй нормальной моды получаем

$$\omega_2^2 = \frac{s}{m} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{s}{m}}.$$

В случае произвольной пространственной конфигурации связанных масс (например, показанной на рис. 4.10) рассматриваются проекции смещений на ортогональные оси $0x$ и $0y$ согласно приведенной выше методике. Такая схема удобна для анализа осцилляторных моделей трехатомных молекул.

ПРИМЕР 4.5

Нормальные моды колебаний молекулы CO_2

1)		$\frac{\omega_1}{2\pi} = 4,16 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$
2)		$\frac{\omega_2}{2\pi} = 7,05 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$
3)		$\frac{\omega_3}{2\pi} = 2 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$

ПРИМЕР 4.6

Электрический аналог системы механических осцилляторов, связанных через массу (см. рис. 4.9), показан на рис. 4.11.

Решение.

Уравнения движения осциллятора

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 = -\frac{1}{C}(q_1 - q_2); \\ L_M\ddot{q}_2 = \frac{1}{C}(q_1 - q_2) - \frac{1}{C}(q_2 - q_3); \\ L\ddot{q}_3 = \frac{1}{C}(q_2 - q_3). \end{cases}$$

Отсюда, по аналогии с механической системой (см. рис. 4.9), получаем для частоты первой нормальной моды

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_\mu C},$$

где $L_\mu = \frac{L_M L}{L_M + 2L}$ — приведенная индуктивность.

Другой нормальной моде соответствует ситуация $I_2 = \ddot{q}_2 = 0$. Учитывая, что $q_j = Q_j e^{i\omega t}$ и что баланс напряжений, согласно системе дифференциальных уравнений колебаний, определяется выражением

$$L\ddot{q}_1 + L_M\ddot{q}_2 + L\ddot{q}_3 = 0$$

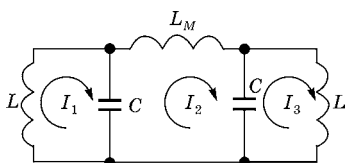


Рис. 4.11

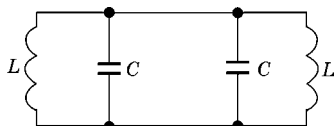


Рис. 4.12

или

$$L\omega^2 Q_1 + L_M \omega^2 Q_2 + L\omega^2 Q_3 = 0,$$

получаем

$$Q_2 = 0; \quad Q_1 + Q_3 = 0; \quad L\omega^2 Q_1 = \frac{Q_1}{C}.$$

Отсюда для квадрата частоты второй нормальной моды имеем

$$\omega_2^2 = \frac{1}{LC}.$$

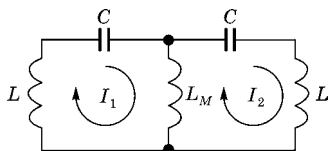
Этой нормальной моде колебаний соответствует эквивалентный колебательный контур (рис. 4.12). Контур согласуется со схемой, представленной на рис. 4.11, путем выключения индуктивности L_M , поскольку ток через L_M при возбуждении второй нормальной моды колебаний равен нулю, $\dot{q}_2 = 0$.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Дайте определение нормальным координатам.
2. Что такое нормальная мода колебаний?
3. Как описывается энергия связанных осцилляторов в нормальных и естественных координатах?
4. Как возбуждаются и могут ли обмениваться энергией нормальные моды колебаний?
5. Как отличаются описания колебаний в естественных и нормальных координатах?
6. Как определяется частота нормальных мод колебаний?
7. Приведите примеры осцилляторов, связанных через жесткость, и электрических контуров с емкостной связью.
8. Поясните электромеханическую аналогию на примерах осцилляторов с инерциальной и индуктивной связью.
9. Приведите примеры представления молекул системой связанных осцилляторов.

ЗАДАЧИ

4.1. Найти частоты нормальных мод колебаний в связанной системе электрических осцилляторов, показанной на рисунке.

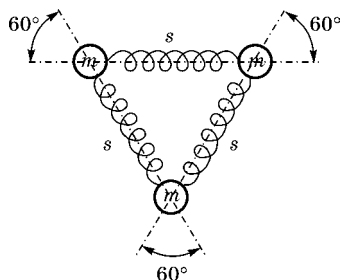


4.2. Определить эффективную жесткость в молекуле CO_2 , модель которой рассмотрена в примере 4.5, при заданных частотах нормальных мод.

4.3. Определить нормальные моды колебаний трехатомной молекулы, модель которой показана на рис. 4.10, если угол между направлениями сил взаимодействия между массами M и m через связи с жесткостью s равен 120° .

4.4. Найти частоты нормальных мод колебаний в системе связанных электрических осцилляторов в задаче 4.1, если вместо индуктивности L_M включить еще одну емкость C .

4.5. Найти значения собственных частот колебаний для симметричной системы из трех частиц, изображенной на рисунке.



ГЛАВА ПЯТАЯ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ

5.1. КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

Рассмотрим вынужденные колебания в системе двух связанных электрических осцилляторов (контуров), (рис. 5.1). Связь между контурами может осуществляться разными способами. Выделяют следующие типы связи: связь по магнитному полю (индуктивная); связь по электрическому полю (емкостная); связь по току (реостатная). В первом случае (рис. 5.1) элементом связи является общий для контуров и обусловленный их взаимной индуктивностью поток магнитного поля. Во втором случае (рис. 5.2) общая для контуров компонента электрического поля формируется в конденсаторе связи. В третьем случае (см. рис. 5.3) связь по току возникает через резистор, представляющий общий для обоих контуров участок цепи. Кроме того, возможны разнообразные варианты комбинированной связи.

Если собственные частоты «парциальных» контуров достаточно близки друг другу, связь между ними может быть определена «коэффициентом связи».

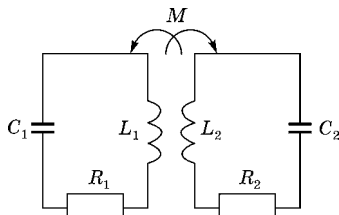


Рис. 5.1

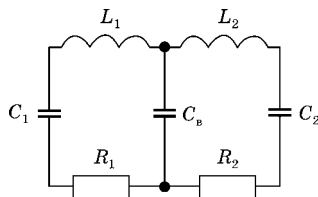


Рис. 5.2

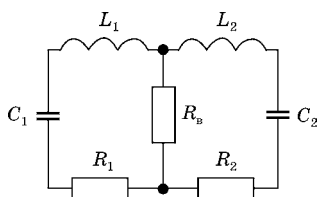


Рис. 5.3

Пусть в первом контуре на элементе, определяющем характер связи (L), возникает некоторое напряжение u_1 , а второй контур разомкнут. Тогда на соответствующем элементе второго контура возникает электродвижущая сила (ЭДС) u_{02} .

Отношение $k_1 = \frac{u_{02}}{u_1}$ — это степень связи второго контура с первым, оно оценивает влияние первого контура на второй. По аналогии воздействие второго контура на первый определяется степенью связи $k_2 = \frac{u_{01}}{u_2}$. Взаимодействие контуров характеризуется коэффициентом связи, являющимся средним геометрическим k_1 и k_2 :

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{u_{01} u_{02}}{u_1 u_2}}.$$

Например, для индуктивной связи (см. рис. 5.1)

$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt},$$

где u_1 — падение напряжения на индуктивности первого контура.

За счет взаимной индуктивности на индуктивности второго (разомкнутого) контура возникает напряжение:

$$u_{02} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Степени связи соответственно равны

$$k_1 = \frac{M}{L_1}; \quad k_2 = \frac{M}{L_2}.$$

Отсюда находим коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на круговую частоту ω токов, циркулирующих в связанных контурах, получаем

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{X_b}{\sqrt{X_1 X_2}}.$$

Здесь X_b обозначает сопротивление связи, одноименное с соответствующими реактивными сопротивлениями парциальных контуров. Обобщая этот вывод, определим коэффициент связи двух контуров как отношение сопротивления

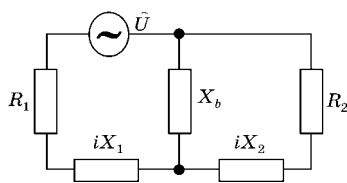


Рис. 5.4

сопротивления связи X_b к среднему геометрическому из одноименных сопротивлений парциальных контуров. В таком случае обобщенную схему двух связанных контуров можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 5.4).

Здесь $\hat{U}$ — внешняя ЭДС, включенная в первичный контур. Каждый парциальный контур содержит активные R и реактивные X -сопротивления. Связь между контурами осуществляется через общее для обоих контуров реактивное сопротивление связи X_b .

Запишем уравнения баланса напряжений в комплексных амплитудах для первичного и вторичного контуров:

$$\begin{cases} \hat{U} = \hat{I}_1 Z_1 + iX_b \hat{I}_2; \\ 0 = \hat{I}_2 Z_2 + iX_b \hat{I}_1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь Z_1 и Z_2 — импедансы первичного и вторичного контуров соответственно.

Определим ток во вторичном контуре. Для этого умножим первое уравнение (5.1) на $-iX_b$, а второе — на Z_1 :

$$\begin{cases} -iX_b \hat{U} = -iX_b Z_1 \hat{I}_1 + X_b^2 \hat{I}_2; \\ 0 = Z_1 Z_2 \hat{I}_2 + iX_b Z_1 \hat{I}_1. \end{cases}$$

После сложения этих уравнений получаем

$$-iX_b \hat{U} = (Z_2 Z_1 + X_b^2) \hat{I}_2.$$

Откуда находим комплексную амплитуду тока во вторичном контуре

$$\hat{I}_2 = \frac{-iX_b \hat{U}}{Z_2 Z_1 + X_b^2}. \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) для тока во втором контуре можно представить в двух формах:

$$\hat{I}_2 = \frac{-iX_b \hat{U}}{Z_2 Z_{e1}}, \quad (5.3)$$

где $Z_{e1} = Z_1 + \frac{X_b^2}{Z_2}$, и

$$\hat{I}_2 = \frac{-iX_b \hat{U}}{Z_1 Z_{e2}}, \quad (5.4)$$

где $Z_{e2} = Z_2 + \frac{X_b^2}{Z_1}$.

Из второго уравнения (5.1) находим

$$\hat{I}_1 = -\frac{Z_2}{iX_b} \hat{I}_2. \quad (5.5)$$

Подставляя в (5.5) $\hat{I}_2$ из (5.3), находим ток в первичном контуре

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{Z_{e1}}.$$

Таким образом, система связанных контуров может быть заменена эквивалентным первичным контуром с импедансом Z_{e1} , в котором внешняя ЭДС возбуждает ток, равный току в исходном первичном контуре (рис. 5.5). Для импеданса эквивалентного первичного контура, согласно (5.3), имеем

$$\begin{aligned} Z_{e1} &= Z_1 + \frac{X_b^2}{Z_2} = Z_1 + \frac{X_b^2 Z_2^*}{|Z_2|^2} = R_1 + iX_1 + \frac{X_b^2 (R_2 - iX_2)}{|Z_2|^2} = \\ &= R_1 + \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 + i \left(X_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} X_2 \right) = R_{e1} + iX_{e1}. \end{aligned}$$

Активное сопротивление эквивалентного контура отличается от активного сопротивления R_1 первичного контура на величину $\frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2$, определяющую увеличение потерь за счет связи. Реактанс эквивалентного контура также отличается от реактанса первичного контура на величину $\frac{X_b^2}{|Z_2|^2} X_2$, характеризующую изменение фазовых соотношений из-за связи со вторичным контуром.

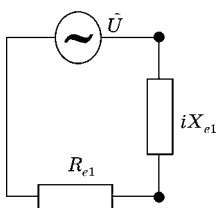


Рис. 5.5

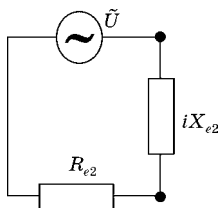


Рис. 5.6

Аналогично систему связанных контуров можно свести к эквивалентному контуру, в котором ток равен току $\hat{I}_2$ во вторичном контуре. Для этого достаточно воспользоваться представлением тока $\hat{I}_2$ в (5.4), из которого видно, что эквивалентный вторичный контур (рис. 5.6) содержит индуцированную ЭДС $\tilde{U} = -i \frac{X_b}{Z_1} \hat{U}$ и характеризуется эквивалентным вторичным импедансом:

$$\begin{aligned} Z_{e2} &= Z_2 + \frac{X_b^2}{Z_1} = Z_2 + \frac{X_b^2 Z_1^*}{|Z_1|^2} = \\ &= R_2 + iX_2 + \frac{X_b^2}{|Z_1|^2} (R_1 - iX_1) = R_{e2} + iX_{e2}, \end{aligned}$$

где $R_{e2} = R_2 + \frac{X_b^2}{|Z_1|^2} R_1$, $X_{e2} = X_2 - \frac{X_b^2 X_1}{|Z_1|^2}$.

Из сравнения выражения (5.2) для тока во вторичном контуре с (5.3) и (5.4) следует, что представления системы связанных контуров (см. рис. 5.4) эквивалентным первичным (рис. 5.5) или вторичным (рис. 5.6) контурами полностью равноценны. Выбор диктуется удобством анализа конкретной системы.

Сформулируем условия резонанса следующим образом: реактанс эквивалентного контура на резонансной частоте обращается в нуль, т. е.

$$X_{e1} = 0, \text{ или } X_{e2} = 0.$$

Это условие можно выполнить различными способами: изменяя реактанс одного из контуров, изменяя связь между контурами либо производя эти настройки одновременно.

Целью настройки системы в резонанс обычно служит получение максимального тока во внутреннем контуре. Последовательность действий по настройке системы в резонанс следующая.

1. Реактанс $X_{e1} = X_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} X_2$ сводится к нулю изменением параметров первичного контура (X_1) без изменения параметров вторичного контура и связи. При этом получается максимум вторичного тока, соответствующий так называемому *первому частному резонансу*: $\hat{I}_2 = i \frac{X_b \hat{I}_1}{Z_2}$.

2. Реактанс эквивалентного контура $X_{e2} = X_2 - \frac{X_b^2}{|Z_1|^2} X_1$ сводится к нулю путем изменения параметров только вторичного контура при неизменной связи и неизменных параметрах первичного контура. Это *второй частный резонанс*.

3. Настройка выполняется за счет изменения параметров какого-либо одного контура, а затем подбирается связь между ними до получения максимального тока во вторичном контуре — *сложный резонанс*.

4. Каждый парциальный контур настраивается на резонансную частоту отдельно и затем подбирается связь до получения максимума тока — *полный резонанс*.

Исследуем эти пути получения резонанса подробнее. Из (5.5) и (5.3) находим

$$\hat{I}_2 = -i \frac{X_b \hat{I}_1}{Z_2} = -i \frac{X_b \hat{U}}{Z_2 Z_{e1}}.$$

Первый частный резонанс получается при $X_{e1} = 0$ за счет подстройки X_1 . Тогда для комплексной амплитуды тока во вторичном контуре имеем

$$\hat{I}_{2m} = -i \frac{X_b \hat{U}}{Z_2 R_{e1}}.$$

Второй частный резонанс получается при $X_{e2} = 0$ за счет подстройки X_2 . Максимум тока во вторичном контуре, получаемый в режиме частного резонанса, не является пределом и может быть увеличен за счет подстройки

связи. Запишем выражение для амплитуды максимального тока во вторичном контуре:

$$I_{2m} = \frac{UX_b}{|Z_2|R_{e1}} = \frac{UX_b}{|Z_2|} \left[R_1 + \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 \right]^{-1}. \quad (5.6)$$

Исследуем это выражение на экстремум по переменной X_b :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{2m}}{dX_b} &= \frac{U}{|Z_2|} \left(R_1 + \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 - X_b \frac{2X_b}{|Z_2|^2} R_2 \right) \left[R_1 + \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 \right]^{-2} = 0; \\ R_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 &= 0; \\ X_{bo} &= |Z_2| \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставив величину оптимального сопротивления связи X_b из (5.7) в (5.6), найдем максимальный ток во вторичном контуре, достигаемый при сложном резонансе:

$$I_{2mm} = U \frac{X_b}{|Z_2|R_{e1}} = \frac{U}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (5.8)$$

Отметим важное обстоятельство: для достижения сложного резонанса кроме условия $X_{e1} = X_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0$ необходимо, согласно (5.7), также еще одно условие:

$$R_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом, для получения максимума вторичного тока при сложном резонансе необходимо, чтобы активное сопротивление, вносимое за счет связи в первичный контур, было равно его собственному сопротивлению. Это условие соответствует максимальной отдаче энергии во внутренний контур, поскольку сопротивление нагрузки $\frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2$ равно сопротивлению источника R_1 .

Второй частный резонанс соответствует условию $X_{e2} = 0$. Тогда максимум тока во вторичном контуре определяется из выражения (5.6)

$$\hat{I}_{2m} = -i \frac{X_b \hat{U}}{Z_1 R_{e2}}.$$

Отсюда для максимальной амплитуды тока получаем

$$I_{2m} = \frac{X_b U}{|Z_1|} \left(R_2 + \frac{X_b^2 R_1}{|Z_1|^2} \right)^{-1}. \quad (5.9)$$

Из условия $\frac{d(I_{2m})}{dX_b} = 0$ находим величину оптимального сопротивления связи

$$X_{bo} = |Z_1| \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \quad (5.10)$$

После подстановки (5.10) в (5.9) находим ток во вторичном контуре в режиме сложного резонанса

$$I_{2mm} = \frac{U}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Из сравнения полученного выражения с (5.8) следует, что ток во вторичном контуре в режиме сложного резонанса не зависит от выбора частного резонанса (первого или второго).

Обратимся теперь к процедуре получения «полного резонанса». Для этого оба парциальных контура независимо друг от друга настраиваются в резонанс с генератором:

$$X_1 = X_2 = 0.$$

Тогда $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$ и выражение (5.2) для модуля тока I_2 принимает вид

$$I_2 = U \frac{X_b}{R_2 R_1 + X_b^2}. \quad (5.11)$$

Исследуя I_2 на максимум по переменной X_b , находим величину оптимальной связи

$$\frac{dI_2}{dX_b} = U \frac{R_2 R_1 + X_b^2 - 2X_b^2}{[R_2 R_1 + X_b^2]^2} = U \frac{R_2 R_1 - X_b^2}{[R_2 R_1 + X_b^2]^2} = 0.$$

Откуда

$$X_{bo} = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (5.12)$$

После подстановки (5.12) в (5.11) получаем величину максимального тока во вторичном контуре при полном резонансе:

$$I_{2mm} = \frac{U}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Из сравнения полученного выражения с (5.8) видно, что максимальные токи во вторичном контуре при полном и сложном резонансах одинаковы. Однако полный резонанс обеспечивается при меньшем сопротивлении связи, чем при сложном резонансе, что часто используется на практике. Разделив обе части равенства (5.12) на $\sqrt{X_1 X_2}$, получаем выражение для коэффициента критической связи:

$$k_c = \frac{X_{bo}}{\sqrt{X_1 X_2}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{X_1 X_2}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\omega L_1 \omega L_2}} = \sqrt{d_1 d_2}.$$

Здесь d_1 и d_2 — затухания первичного и вторичного контуров:

$$d_1 = \frac{R_1}{X_1} = \frac{R_1}{\omega L_1}; \quad d_2 = \frac{R_2}{X_2} = \frac{R_2}{\omega L_2}.$$

Следовательно, коэффициент критической связи равен среднему геометрическому из затуханий связанных контуров:

$$k_c = \sqrt{d_1 d_2}.$$

5.2. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Условием резонанса является, как показано выше, равенство нулю реактанса эквивалентного первичного контура

$$X_{e1} = X_1 - \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$X = \omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \omega L \zeta,$$

где $\zeta = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ — относительная расстройка контура. Тогда $X_1 = \omega L_1 \zeta_1$; $X_2 = \omega L_2 \zeta_2$. $\zeta_j = 1 - \frac{\omega_{0j}^2}{\omega^2}$ — относительная расстройка первичного ($j = 1$) и вторичного ($j = 2$) контуров. Воспользуемся этими обозначениями в условии резонанса:

$$\omega L_1 \zeta_1 - \frac{X_b^2 \omega L_2 \zeta_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2 \zeta_2^2} = 0.$$

Выполняя последовательные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \zeta_1 - \frac{X_b^2 \zeta_2}{\omega L_1 \omega L_2 (d_2^2 + \zeta_2^2)} &= 0; \\ \zeta_1 - \frac{k^2 \zeta_2}{d_2^2 + \zeta_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Положим для простоты $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$; $d_2 = d$. Тогда

$$\zeta - \frac{k^2 \zeta}{d^2 + \zeta^2} = 0.$$

Отсюда $\zeta(\zeta^2 + d^2 - k^2) = 0$. При $k > d$ $\zeta^2 + d^2 - k^2 = 0$;

$$\zeta_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 - d^2}.$$

При $k \leq d$ $\zeta_3 = 0$. Поскольку $\zeta = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, получаем

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - d^2}}}.$$

При $k \gg d$ эти выражения для разностных частот сводятся к формулам

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Если коэффициент связи меньше коэффициента критической связи, система связанных контуров имеет только одну резонансную частоту из условия

$$\zeta_3 = \zeta = 0; \quad \omega_3 = \omega_0.$$

Значение $k_c = d$ для рассматриваемого случая является критическим коэффициентом связи. Это — наибольшее зна-

чение k , при котором существует единственное значение резонансной частоты в связанных контурах. При дополнительном увеличении k ($k > d$) возникают два резонансных максимума, соответствующих частотам ω_1 и ω_2 . Зависимость резонансных частот от коэффициента связи показана на рис. 5.7.

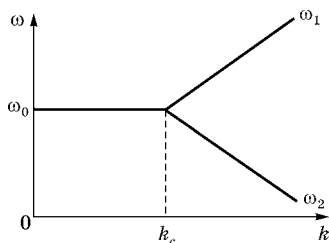


Рис. 5.7

Исследуем резонансные кривые. Воспользовавшись (5.2), запишем выражение для амплитуды тока во вторичном контуре:

$$I_2 = \frac{X_b U}{|Z_1 Z_2 + X_b^2|}.$$

Для относительной величины I_2/I_{2mm} имеем

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_{2mm}} &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{|Z_1 Z_2 + X_b^2|} = \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{|(R_1 + iX_1)(R_2 + iX_2) + X_b^2|} = \\ &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{|(R_1 R_2 - X_1 X_2 + X_b^2) + i(R_1 X_2 + R_2 X_1)|} = \\ &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{\{(R_1 R_2 - X_1 X_2 + X_b^2)^2 + (R_1 X_2 + R_2 X_1)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{\{(R_1 R_2 - \omega L_1 \omega L_2 \zeta_1 \zeta_2 + X_b^2)^2 + (R_1 \omega L_2 \zeta_2 + R_2 \omega L_1 \zeta_1)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{\left\{ \omega^4 L_1^2 L_2^2 \left(\frac{R_1 R_2}{\omega L_1 \omega L_2} - \zeta_1 \zeta_2 + \frac{X_b^2}{\omega L_1 \omega L_2} \right)^2 + (R_1 \omega L_2 \zeta_2 + R_2 \omega L_1 \zeta_1)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2X_b \sqrt{R_1 R_2}}{\omega^2 L_1 L_2 \left\{ (d_1 d_2 - \zeta_1 \zeta_2 + k^2)^2 + \left(\frac{R_1}{\omega L_1} \zeta_2 + \frac{R_2}{\omega L_2} \zeta_1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2k \sqrt{d_1 d_2}}{\{(d_1 d_2 - \zeta_1 \zeta_2 + k^2)^2 + (d_1 \zeta_1 + d_2 \zeta_2)^2\}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Положим для простоты $d_1 = d_2 = d$; $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_{2mm}} &= \frac{2kd}{\{[d^2 - \zeta^2 + k^2]^2 + 4\zeta^2 d^2\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2kd}{\{d^4 + 2d^2(k^2 - \zeta^2) + (k^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2 d^2\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2kd}{\{d^4 + 2d^2(\zeta^2 - k^2) + (\zeta^2 - k^2)^2 + 4k^2 d^2\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2kd}{\{[d^2 + \zeta^2 - k^2]^2 + 4k^2 d^2\}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Условие резонанса:

$$\begin{aligned} d^2 + \zeta_0^2 - k^2 &= 0; \\ \zeta &= \zeta_0 + \Delta\zeta; \\ \zeta &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \zeta_0 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{1,2}$ — резонансные частоты.

$$\Delta\zeta = \frac{2\omega_0^2}{\omega^3} \Delta\omega.$$

Разлагая расстройку ζ в ряд в окрестности резонансных частот $\omega_{1,2}$ и ограничиваясь первым порядком малости по $\frac{\Delta\omega}{\omega_{1,2}}$, получаем

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{2\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2} \frac{\Delta\omega}{\omega_{1,2}} = \zeta_0 + 2(1 - \zeta_0) \frac{\Delta\omega}{\omega_{1,2}}.$$

Подставляя в выражение для $\frac{I_2}{I_{2mm}}$ расстройку

$$\zeta = \zeta_0 + 2(1 - \zeta_0) \frac{\Delta\omega}{\omega_{1,2}},$$

находим

$$\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{2kd}{\left\{ 4(1 - \zeta_0)^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{1,2}} \right)^2 + 4k^2 d^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

При нулевой расстройке ($\Delta\omega = 0$) относительно резонансных частот ω_1 и ω_2 получаем

$$\frac{I_2}{I_{2mm}}(\omega_1) = \frac{I_2}{I_{2mm}}(\omega_2) = 1.$$

При критическом коэффициенте связи ($k = d$) резонансная частота равна ω_0 , $\zeta = 0$ и $\frac{I_2(\omega_1)}{I_{2mm}} = 1$.

Если коэффициент связи меньше критического значения, резонансная частота одна ($\omega = \omega_0$, $\zeta = 0$) и зависимость относительной величины тока во вторичном контуре $\frac{I_2}{I_{2mm}}$ от коэффициента связи принимает вид

$$\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{2kd}{\{(d^2 - k^2)^2 + 4k^2d^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2kd}{d^2 + k^2}. \quad (5.13)$$

Для $k = 0$ (связь отсутствует) ток во вторичном контуре равен нулю (тривиальный результат).

Резонансные кривые в зависимости от коэффициента связи в интервале до критического значения показаны на рис. 5.8. Здесь $k_1 < k_2 < d$. Резонансная частота равна ω_0 при $\zeta = 0$.

Если коэффициент связи превышает критическое значение, $k > d$, кривые приобретают двугорбый вид, показанный на рис. 5.9. Здесь $k_1 < k_2$. Относительный ток во вторичном контуре при $\zeta = 0$ (амплитуда провала) определяется выражением (5.13)

$$\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{2kd}{d^2 + k^2}.$$

При очень большом значении коэффициента связи относительная амплитуда провала стремится к нулю

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_2}{I_{2mm}} \Big|_{\zeta=0} = 0$$

и резонансная кривая расщепляется на две.

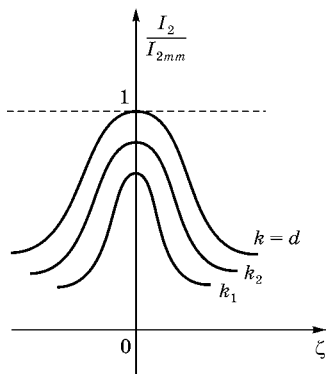


Рис. 5.8

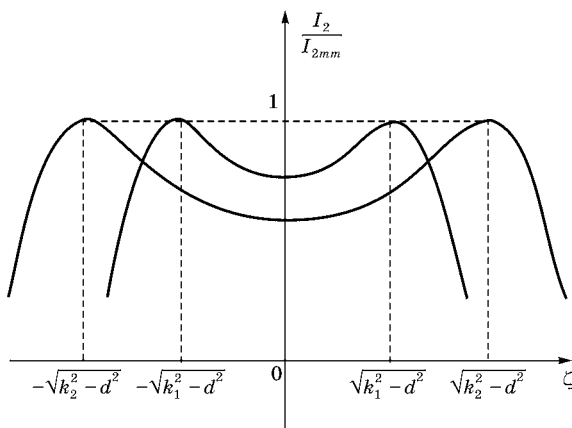


Рис. 5.9

Обратимся к току в первичном контуре. Согласно (5.2) и (5.5),

$$\hat{I}_1 = -\frac{Z_2}{iX_b} \hat{I}_2 = \frac{Z_2 \hat{U}}{Z_2 Z_1 + X_b^2} = \frac{\hat{U}}{Z_1 + \frac{X_b^2}{Z_2}} = \frac{\hat{U}}{Z_{e1}}.$$

Если вторичный контур настроен на резонансную частоту ω_0 , $\zeta = 0$, $X_2 = \omega L\zeta = 0$ и

$$\hat{I}_1|_{X_2=0} = \frac{R_2 \hat{U}}{Z_1 R_2 + X_b^2} = \frac{R_2 \hat{U}}{X_b^2 \left(1 + \frac{Z_1 R_2}{X_b^2}\right)}.$$

Отсюда, если первичный контур оказывается резонансным входному напряжению, ток в первичном контуре при $\frac{R_1 R_2}{X_b^2} \ll 1$ мал и при $R_2 \rightarrow 0$ становится нулевым. В этой си-

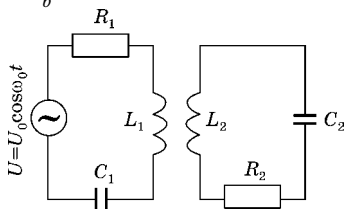


Рис. 5.10

туации вторичный контур выполняет функцию фильтра-пробки, подавляющего ток в первичном контуре (рис. 5.10). Далее мы рассмотрим механический аналог схемы электрического контура с фильтром-пробкой.

5.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим эффективность передачи энергии из первичного во вторичный контур в связанной системе. Найдем энергию, поглощаемую нагрузкой во вторичном контуре:

$$E_2 = I_2^2 R_2.$$

Затем энергию, расходуемую в связанной системе:

$$E_{12} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2.$$

Отсюда КПД системы

$$\eta = \frac{E_2}{E_{12}} = \frac{I_2^2 R_2}{I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2}.$$

Согласно (5.2), ток в первичном контуре связан с током во вторичном контуре соотношением

$$I_1 = \frac{|Z_2|}{X_b} I_2.$$

После подстановки I_1 в выражение для η , получаем

$$\eta = \frac{I_2^2 R_2}{I_2^2 \frac{|Z_2|^2}{X_b^2} R_1 + I_2^2 R_2} = \frac{X_b^2 R_2}{|Z_2|^2 \left(R_1 + \frac{X_b^2}{|Z_2|^2} R_2 \right)}.$$

При резонансе любого типа расстройка $\zeta_2 = 0$ и, следовательно, $X_2 = \omega L \zeta = 0$. Отсюда

$$\eta = \frac{X_b^2 R_2}{R_2^2 \left(R_1 + \frac{X_b^2}{R_2^2} R_2 \right)} = \frac{X_b^2}{R_1 R_2 + X_b^2}.$$

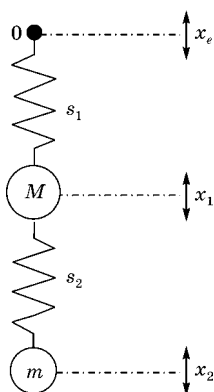
При $X_b = \sqrt{R_1 R_2}$ (условие полного резонанса) $\eta = 1/2$. При этом ток во вторичном контуре достигает максимума $\frac{I_2}{I_{2mm}} = 1$. Следовательно, максимальная величина энергии, которая передается во вторичный контур, достигается при критической связи и соответствует $\eta_m = 1/2$. При общем резонансе $X_{b1} = |Z_2| \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ и получаем такой же результат $\eta_m = 1/2$.

5.4. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ

Рассмотрим систему из двух связанных через массу механических осцилляторов в режиме вынужденных колебаний (рис. 5.11).

Две массы последовательно через упругие связи с жесткостью s_1 и s_2 подвешены к точке 0. Внешнее воздействие осуществляется за счет вертикальных колебаний точки подвеса по закону: $x_e = A \cos \omega t$.

Запишем уравнения движения колебательной системы:



$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -s_1(x_1 - x_e) - s_2(x_1 - x_2); \\ m\ddot{x}_2 = s_2(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\frac{s_1}{M} = \omega_{01}^2; \quad \frac{s_2}{m} = \omega_{02}^2; \quad \frac{s_1 + s_2}{M} = \omega_{012}^2;$$

$$\frac{m}{M} = \beta; \quad \frac{s_2}{M} = \frac{s_2}{m} \frac{m}{M} = \beta \omega_{02}^2.$$

С учетом этих обозначений для уравнения движения имеем

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_{01}^2(x_1 - x_e) - \beta \omega_{02}^2(x_1 - x_2); \\ \ddot{x}_2 = \omega_{02}^2(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}; \quad x_2 = X_2 e^{i\omega t},$$

с учетом $x_e = A e^{i\omega t}$. После подстановки приходим к алгебраической системе уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 X_1 = -\omega_{01}^2(X_1 - A) - \beta \omega_{02}^2(X_1 - X_2); \\ -\omega^2 X_2 = \omega_{02}^2(X_1 - X_2); \\ (\omega_{01}^2 + \beta \omega_{02}^2 - \omega^2) X_1 = \omega_{01}^2 A + \beta \omega_{02}^2 X_2; \\ (\omega_{02}^2 - \omega^2) X_2 = \omega_{02}^2 X_1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Отсюда

$$X_2 = \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} X_1.$$

Подставляя выражение для X_2 в первое уравнение системы (5.14), получаем

$$(\omega_{01}^2 + \beta\omega_{02}^2 - \omega^2)X_1 = \omega_{01}^2 A + \frac{\beta\omega_{02}^4}{\omega_{02}^2 - \omega^2} X_1;$$

$$X_1 \left[\omega_{01}^2 + \beta\omega_{02}^2 - \omega^2 - \frac{\beta\omega_{02}^4}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right] = \omega_{01}^2 A;$$

$$X_1 = \frac{\omega_{01}^2 A (\omega_{02}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 + \beta\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \beta\omega_{02}^4};$$

$$X_2 = \frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 A}{(\omega_{01}^2 + \beta\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \beta\omega_{02}^4}.$$

Из выражений для X_1 и X_2 следует, что X_2 для всех значений ω отлично от нуля, тогда как X_1 принимает нулевое значение при $\omega = \omega_{02} = \sqrt{\frac{s_2}{m}}$. Следовательно, масса M , на которую возмущающая сила действует раньше, чем на вторую массу m , при определенных условиях может оставаться в покое, если $\omega = \omega_{02}$. Этот эффект используется при конструировании гасителей колебаний в приборостроении, машиностроении, судостроении, строительстве фундаментов. Если колеблющиеся части какой-либо конструкции подвергаются возмущению с постоянной известной частотой, то колебания можно полностью погасить за счет присоединения второго осциллятора с соответствующими параметрами. Этот осциллятор выполняет функцию фильтра-пробки и является механическим аналогом электрического фильтра-пробки (см. рис. 5.10). В случае правильного подбора параметров s_2 и m вторая масса колеблется в противофазе с возмущением и с амплитудой, которая компенсирует амплитуду возмущенного колебания

$$X_2 \Big|_{\omega=\omega_{02}} = -\frac{s_1}{s_2} A.$$

При частотах, удовлетворяющих условию

$$(\omega_{01}^2 + \beta\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \beta\omega_{02}^4 = 0,$$

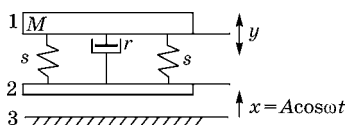


Рис. 5.12

наступает явление резонанса и амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

На рис. 5.12 показана упрощенная схема еще одного способа защиты от вибраций,

действие которого основано на свойствах вынужденных колебаний.

Здесь 1 — плита, на которой устанавливается оборудование, требующее защиты от вибрации, 2 — пол, вибрирующий относительно основания 3 с частотой ω . Плита связана с полом упругой связью с жесткостью s и демпфером r . Плита и пол — это система связанных осцилляторов, на пол действует вибрация $x = A \cos \omega t$. Запишем уравнение движения для плиты:

$$M\ddot{y} = -r(\dot{y} - \dot{x}) - s(y - x).$$

Сделаем замену переменных $X = y - x$. Тогда

$$M\ddot{X} + r\dot{X} + sX = 0$$

или

$$M\ddot{X} + r\dot{X} + sX = -M\ddot{x}.$$

Поскольку $\ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t$, уравнение движения принимает вид

$$M\ddot{X} + r\dot{X} + sX = F_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 = M\omega^2 A$. Это уравнение вынужденных колебаний осциллятора с потерями. Решение уравнения:

$$X = \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\omega |Z_M|}.$$

Отсюда смещение

$$y = \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\omega |Z_M|} + x.$$

После подстановки $F_0 = M\omega^2 A$ и $x = A \cos \omega t$ получаем

$$\frac{y}{A} = \frac{\omega M \sin(\omega t - \varphi)}{|Z_M|} + \cos \omega t. \quad (5.15)$$

Импеданс системы

$$Z_M = r + i\left(\omega M - \frac{s}{\omega}\right);$$

$$|Z_M| = \left[r^2 + \left(\omega M - \frac{s}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Преобразуя правую часть уравнения (5.15), получаем

$$\begin{aligned} \frac{y}{A} &= \frac{\omega M \cos \varphi}{|Z_M|} \sin \omega t + \left[1 - \frac{\omega M \sin \varphi}{|Z_M|}\right] \cos \omega t = \\ &= \left\{ \left(\frac{\omega M \cos \varphi}{|Z_M|} \right)^2 + \left[1 - \frac{\omega M \sin \varphi}{|Z_M|} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \psi) = \\ &= \frac{1}{|Z_M|} \{ (\omega M \cos \varphi)^2 + [|Z_M| - \omega M \sin \varphi]^2 \}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \psi), \end{aligned}$$

где $\psi = \arctg \left[\left(\frac{|Z_M|}{\omega M \sin \varphi} - 1 \right)^{-1} \operatorname{ctg} \varphi \right].$

Откуда, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{\omega M - s}{|Z_M|}$, находим отношение амплитуды колебания плиты к амплитуде колебания пола:

$$\begin{aligned} \frac{y_{\max}}{A} &= \frac{1}{|Z_M|} \{ \omega^2 M^2 + |Z_M|^2 - 2|Z_M| \omega M \sin \varphi \}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{|Z_M|} \left\{ \omega^2 M^2 + r^2 + \left(\omega M - \frac{s}{\omega} \right)^2 - 2\omega M \left(\omega M - \frac{s}{\omega} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{|Z_M|} \left\{ r^2 + \frac{s^2}{\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{y_{\max}}{A} = \frac{\left(r^2 + \frac{s^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left[r^2 + \left(\omega M - \frac{s}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Из полученного выражения видно, что

$$1) \frac{y_{\max}}{A} > 1, \text{ если } \omega^2 < \frac{2s}{M};$$

$$2) \frac{y_{\max}}{A} = 1, \text{ если } \omega^2 = \frac{2s}{M};$$

$$3) \frac{y_{\max}}{A} < 1, \text{ если } \omega^2 > \frac{2s}{M}.$$

Следовательно, для того чтобы амплитуда колебаний плиты была меньше амплитуды колебаний пола, собственная частота колебаний плиты должна выбираться много меньшей, чем частота вибраций пола. При этом, как следует из выражения для $\frac{y_{\max}}{A}$, демпфирование мешает эффективному подавлению вибраций плиты и r следует уменьшать. Демпфирование оказывается полезным только для подавления низкочастотных вибраций, частоты которых удовлетворяют соотношению $\omega^2 < \frac{2s}{M}$.

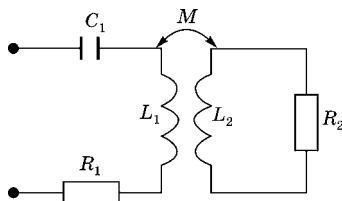
ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Как представить обобщенную систему двух связанных контуров через эквивалентный первичный и эквивалентный вторичный контуры?
2. Что такое частный резонанс?
3. В чем отличие сложного и полного резонансов?
4. Определите критический коэффициент связи.
5. Опишите резонансные свойства системы связанных контуров при коэффициенте связи, меньшем или равном критическому.
6. Опишите резонансные свойства системы связанных контуров при значении коэффициента связи, превышающем критическое.
7. Какова максимальная энергия, передаваемая из первичного во вторичный контур в связанной системе? При каких условиях она достигается?
8. Поясните действие фильтра-пробки и дайте примеры его использования в механических и электрических системах.
9. Измерительная система помещена на платформе, которая находится на поверхности вибрирующего пола. Основные частоты вибраций ω_1 и ω_2 . Собственная частота системы ω_0 , $\omega_1 < \omega_0 \leq \omega_2$. Можно ли использовать демпфер для виброзащиты?

ЗАДАЧИ

5.1. Параметры двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров следующие: $L_1 = 510$ мкГн; $L_2 = 208$ мкГн; $C_1 = 2000$ пФ; $C_2 = 5000$ пФ; $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 6$ Ом; $M = 7$ мкГн. Найти эквивалентное входное сопротивление связанной системы на частоте $f = 159$ кГц.

5.2. Найти резонансную частоту контура L_1, R_1, C_1 , связанного с апериодическим контуром L_2, R_2 . Получить выражение для эквивалентного активного сопротивления цепи.

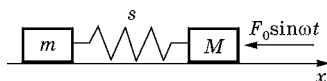


5.3. Система из двух связанных контуров (см. рис. 5.1) имеет следующие параметры: $L_1 = 282$ мкГ; $C_1 = 1000$ пФ; $R_1 = 12$ Ом; $L_2 = 274$ мкГ; $C_2 = 830$ пФ; $R_2 = 10$ Ом, взаимная индукция $M = 83,4$ мкГ. В первый контур включен генератор синусоидального напряжения, амплитуда которого $U = 500$ В, а частота 320 кГц. Найти токи в контурах, а также напряжения на конденсаторе C_2 второго контура.

5.4. Два индуктивно связанных контура настроены методом полного резонанса. Определить ток во втором контуре, если $f = 400$ кГц, $U = 100$ В, $M_{\text{opt}} = 20$ мкГ.

5.5. Два контура настроены в резонанс и связаны между собой критической связью. Определить ток в первом контуре, если известно, что $P_1 = 1$ Вт, $R_1 = 25$ Ом.

5.6. Два тела с массами M и m , связанные пружиной с жесткостью s , находятся на плоскости и могут скользить по ней без трения. На тело с массой M действует сила $F_0 \sin \omega t$, направленная параллельно плоскости. При какой частоте ω тело массой M будет оставаться неподвижным?



КОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

6.1. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СВЕРХУ

Рассмотрим цепочку точечных одинаковых масс, соединенных упругими связями с жесткостью s (рис. 6.1). Расстояние между соседними массами b . Концы цепочки закреплены неподвижно. Это хорошая модель одномерной кристаллической решетки, состоящей из одинаковых атомов.

Уравнения движения представляют собой систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \text{-----} \\ m\ddot{y}_{n-1} = -s(y_{n-1} - y_{n-2}) - s(y_{n-1} - y_n); \\ m\ddot{y}_n = -s(y_n - y_{n-1}) - s(y_n - y_{n+1}); \\ m\ddot{y}_{n+1} = -s(y_{n+1} - y_n) - s(y_{n+1} - y_{n+2}) \\ \text{-----} \end{cases} \quad (6.1)$$

или

$$\begin{cases} \text{-----} \\ \ddot{y}_{n-1} = -\omega_0^2(2y_{n-1} - y_{n-2} - y_n); \\ \ddot{y}_n = -\omega_0^2(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}); \\ \ddot{y}_{n+1} = -\omega_0^2(2y_{n+1} - y_n - y_{n+2}). \\ \text{-----} \end{cases}$$

Здесь y_n — смещение n -й массы, $\omega_0^2 = s/m$. Всего в системе (6.1) N уравнений.

Ищем решение в виде

$$y_n = A_n \cos \omega t = \operatorname{Re}\{A_n e^{i\omega t}\}.$$

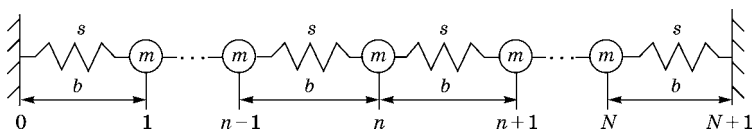


Рис. 6.1

После подстановки получаем систему N линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_{n-1} = -\omega_0^2 (2A_{n-1} - A_{n-2} - A_n); \\ -\omega^2 A_n = -\omega_0^2 (2A_n - A_{n-1} - A_{n+1}); \\ -\omega^2 A_{n+1} = -\omega_0^2 (2A_{n+1} - A_n - A_{n+2}). \end{cases} \quad (6.2)$$

Для решения этой системы представим амплитуду смещения n -й массы в виде гармонической функции

$$A_n = A \sin n\theta. \quad (6.3)$$

Подставляя это выражение в соответствующее уравнение системы (6.2), получаем

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) \sin n\theta = \omega_0^2 [\sin(n-1)\theta + \sin(n+1)\theta].$$

После выполнения тригонометрических преобразований приходим к уравнению

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) \sin n\theta = 2\omega_0^2 \cos \theta \sin n\theta$$

или

$$[2\omega_0^2 (1 - \cos \theta) - \omega^2] \sin n\theta = 0.$$

К такому виду преобразуются все уравнения системы (6.2) после соответствующих подстановок (6.3). Решение системы (6.2) сводится к определению ω^2 из уравнения

$$2\omega_0^2 (1 - \cos \theta) - \omega^2 = 0$$

и нахождению θ из граничных условий. Решением этого уравнения является

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos \theta). \quad (6.4)$$

Граничные условия для выбора θ :

$$y_0 = 0; \quad y_{N+1} = 0.$$

Первое граничное условие удовлетворяется согласно (6.3) автоматически. Второе граничное условие соответствует $A_{N+1} = 0$ и согласно (6.3)

$$\sin(N+1)\theta = 0.$$

Отсюда

$$\theta = \frac{\xi\pi}{N+1}, \quad (6.5)$$

где $\xi = 1, 2, \dots, N$. После подстановки (6.5) в (6.4) получаем

$$\omega_\xi^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos \frac{\xi\pi}{N+1} \right] = 4\omega_0^2 \sin^2 \left[\frac{\xi\pi}{2(N+1)} \right]. \quad (6.6)$$

Здесь ω_ξ — частота ξ -й нормальной моды. Амплитуду ξ -й нормальной моды находят из (6.3) и (6.5):

$$A_n = A \sin \frac{n\xi\pi}{N+1}. \quad (6.7)$$

Как следует из (6.6) и (6.7), в цепочке связанных осцилляторов возбуждаются нормальные моды колебаний с частотами ω_ξ и амплитудами A_n . Частота нормальной ξ -й моды равна

$$\omega_\xi = 2\omega_0 \sin \left[\frac{\xi\pi}{2(N+1)} \right]. \quad (6.8)$$

Максимальная частота достигается при $\frac{\xi}{N+1} \approx 1$, что соответствует $\xi \approx N$ для больших N . Отсюда следует, что наибольшая частота нормальных мод, возбужденных в цепочке, не превышает удвоенную собственную частоту отдельного осциллятора:

$$\omega_\xi \leq 2\omega_0.$$

В распределенной колебательной системе (см. рис. 6.1) мы рассмотрели возбуждение продольных колебаний. Совершенно аналогично можно рассмотреть для той же системы процесс возбуждения поперечных колебаний. Для этого обратимся к фрагменту колебательной системы, содержащей $n-1$, n и $(n+1)$ -ю массы (рис. 6.2).

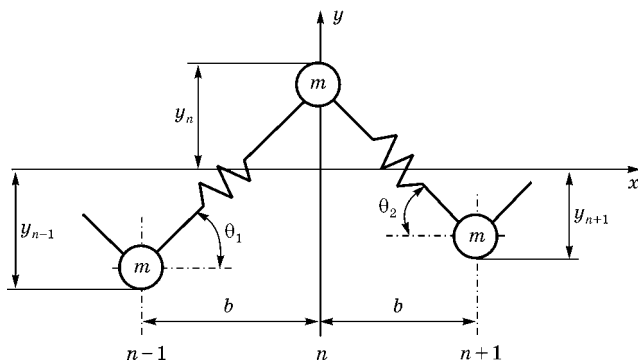


Рис. 6.2

Запишем уравнение движения для n -й массы, которая испытывает поперечное смещение y_n . $n-1$ и $n+2$ массы смещены в поперечном направлении на величины y_{n-1} и y_{n+1} соответственно:

$$m\ddot{y}_n = -T(\sin\theta_1 + \sin\theta_2). \quad (6.9)$$

Здесь T — сила упругости (натяжение), $T\sin\theta_1$ и $T\sin\theta_2$ — проекции сил упругости (натяжения) на ось y_n . Это поперечные компоненты сил, с которыми воздействуют на n -ю массу соседние массы. В случае малых отклонений $\sin\theta_1 \sim \theta_1$, $\sin\theta_2 \sim \theta_2$ и уравнение принимает вид

$$m\ddot{y}_n = -T(\theta_1 + \theta_2).$$

Из рис. 6.2 видно, что

$$\theta_1 \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{b}; \quad \theta_2 \approx \frac{y_n - y_{n+1}}{b},$$

после подстановки этих значений углов в уравнение (6.9) получаем

$$m\ddot{y}_n = -\frac{T}{b}[(y_n - y_{n-1}) + (y_n - y_{n+1})].$$

Учитывая, что отношение T/b равно жесткости упругой связи, приходим к уравнению, аналогичному (6.1)

$$m\ddot{y}_n = -s[(y_n - y_{n-1}) + (y_n - y_{n+1})].$$

На рис. 6.3 показан электрический эквивалент распределенной системы (см. рис. 6.1). Дифференциальные

уравнения колебаний для этой цепи имеют вид, аналогичный (6.1)

$$\begin{cases} \ddot{q}_{n-1} = -\omega_0^2 [(q_{n-1} - q_{n-2}) + (q_{n-1} - q_n)]; \\ \ddot{q}_n = -\omega_0^2 [(q_n - q_{n-1}) + (q_n - q_{n+1})]; \\ \ddot{q}_{n+1} = -\omega_0^2 [(q_{n+1} - q_n) + (q_{n+1} - q_{n+2})]. \end{cases}$$

Критическая частота для колебаний, возбуждаемых в этой электрической линии, по аналогии с критической частотой для распределенной системы механических осцилляторов (6.8), равна удвоенной собственной частоте парциального LC -контура

$$\omega_c = 2\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Показанные на рис. 6.1 и 6.3 колебательные системы являются примерами фильтров низких частот. Такие фильтры могут пропускать возмущения с частотами, лежащими ниже критической частоты (частоты среза).

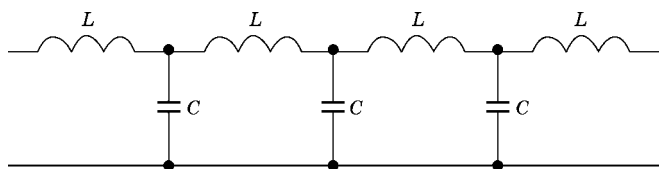


Рис. 6.3

ПРИМЕР 6.1

Определить частоту колебаний в распределенной системе (см. рис. 6.1) для случая $\xi/N \ll 1$ (низкочастотная область спектра нормальных колебаний).

Решение.

Воспользуемся выражением (6.8)

$$\omega_\xi = 2\omega_0 \sin \left[\frac{\xi\pi}{2(N+1)} \right].$$

Разложим правую часть в ряд по малому параметру ξ/N , ограничиваясь членами первого порядка малости,

$$\omega_{\xi} = 2\omega_0 \sin \left[\frac{\xi\pi}{2N \left(1 + \frac{1}{N}\right)} \right] \approx \frac{\xi\pi\omega_0}{N}.$$

Продольные колебания:

$$\omega_{\xi} = \frac{b\xi\pi}{bN} \sqrt{\frac{s}{m}} = \frac{\xi\pi}{l} \sqrt{\frac{bs}{\rho}},$$

где l — длина цепочки; $l = bN$; $\rho = m/b$.

Поперечные колебания:

$$\omega_{\xi} = \frac{\xi\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Электрическая распределенная колебательная система (см. рис. 6.3):

$$\omega_{\xi} = \frac{\xi\pi}{N\sqrt{LC}}.$$

6.2. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СНИЗУ

Рассмотрим колебания в распределенной системе электрических осцилляторов (рис. 6.4).

Движение системы описывается связанными дифференциальными уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q_{n-1}}{C} = -L(\ddot{q}_{n-1} - \ddot{q}_{n-2}) - L(\ddot{q}_{n-1} - \ddot{q}_n); \\ \frac{q_n}{C} = -L(\ddot{q}_n - \ddot{q}_{n-1}) - L(\ddot{q}_n - \ddot{q}_{n+1}); \\ \frac{q_{n+1}}{C} = -L(\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) - L(\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_{n+2}) \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 q_{n-1} = -(2\ddot{q}_{n-1} - \ddot{q}_{n-2} - \ddot{q}_n); \\ \omega_0^2 q_n = -(2\ddot{q}_n - \ddot{q}_{n-1} - \ddot{q}_{n+1}); \\ \omega_0^2 q_{n+1} = -(2\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n - \ddot{q}_{n+2}). \end{array} \right. \quad (6.10)$$

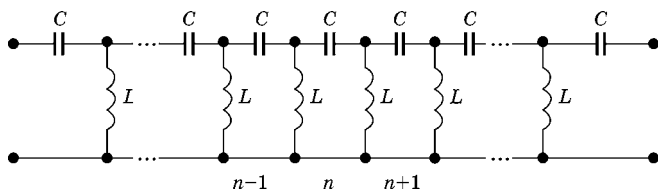


Рис. 6.4

Ищем решение в виде

$$q_n = Q_n e^{i\omega t}.$$

После подстановки в (6.10) получаем систему N -линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \omega_0^2 Q_{n-1} = \omega^2 (2Q_{n-1} - Q_{n-2} - Q_n); \\ \omega_0^2 Q_n = \omega^2 (2Q_n - Q_{n-1} - Q_{n+1}); \\ \omega_0^2 Q_{n+1} = \omega^2 (2Q_{n+1} - Q_n - Q_{n+2}). \end{cases} \quad (6.11)$$

Как и в (6.4), амплитуды колебаний заряда представим в виде гармонической функции:

$$Q_n = Q \sin n\theta. \quad (6.12)$$

Подстановка (6.12) в соответствующее уравнение системы (6.11) дает

$$\omega_0^2 \sin n\theta = \omega^2 [2\sin n\theta - \sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta].$$

Элементарные тригонометрические преобразования приводят это уравнение к виду

$$(2\omega^2 - \omega_0^2) \sin n\theta = 2\omega^2 \sin n\theta \cos \theta$$

или

$$[2\omega^2(1 - \cos \theta) - \omega_0^2] \sin n\theta = 0.$$

Поскольку к такому виду приводятся все уравнения системы (6.11) после соответствующих подстановок, для получения решения достаточно определить ω^2 из уравнения

$$2\omega^2(1 - \cos \theta) - \omega_0^2 = 0.$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{\omega_0^2}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (6.13)$$

Параметр θ находим из граничных условий. Пусть $Q_0 = 0$ и $Q_{N+1} = 0$. Первое граничное условие, согласно (6.12), удовлетворяется автоматически при $n = 0$. Второе граничное условие удовлетворяется, если $\sin(N+1)\theta = 0$, откуда, как и в (6.5), получаем

$$\theta = \frac{\xi\pi}{N+1}, \quad \xi = 1, 2, \dots, N.$$

Подстановка в (6.13) дает следующее выражение для квадрата частоты ξ -й нормальной моды:

$$\omega_\xi^2 = \frac{\omega_0^2}{4\sin^2 \left[\frac{\xi\pi}{2(N+1)} \right]}.$$

Амплитуда ξ -й моды, согласно (6.12), равна

$$Q_n = Q \sin \frac{\xi\pi}{(N+1)}. \quad (6.14)$$

Таким образом, в распределенной колебательной системе (рис. 6.4) могут возбуждаться N нормальных мод колебаний с частотами

$$\omega_\xi = \frac{\omega_0}{2\sin \left[\frac{\xi\pi}{2(N+1)} \right]} \quad (6.15)$$

и амплитудами (6.14).

Как видно из (6.15), в рассматриваемой цепочке электрических осцилляторов не могут существовать нормальные моды с частотой, меньшей критической частоты $\omega_c = \frac{\omega_0}{2}$, что соответствует условию $\frac{\xi}{N+1} = 1$ и для больших N , $\xi \approx N$. Следовательно, колебательная система на рис. 6.4 выполняет функции фильтра высоких частот. Такие фильтры могут пропускать возмущения с частотой,

выше критической: $\omega_\xi \geq \frac{\omega_0}{2}$.

6.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ. ПОНЯТИЕ О ФИЛЬТРАХ

Рассмотрим вынужденные колебания в распределенной электрической системе (рис. 6.5). На вход ее поступает переменное напряжение $U \cos \omega t$. Дифференциальные уравнения колебаний:

$$\left\{ \begin{array}{l} L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = U \cos \omega t; \\ \text{-----} \\ L\ddot{q}_{n-1} + \frac{1}{C}(q_{n-1} - q_n) + \frac{1}{C}(q_{n-1} - q_{n-2}) = 0; \\ L\ddot{q}_n + \frac{1}{C}(q_n - q_{n+1}) + \frac{1}{C}(q_n - q_{n-1}) = 0; \\ L\ddot{q}_{n+1} + \frac{1}{C}(q_{n+1} - q_{n+2}) + \frac{1}{C}(q_{n+1} - q_n) = 0. \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Полученная система уравнений несимметрична из-за формы первого уравнения. Приведем его к стандартному виду

$$L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) + \frac{1}{C}(q_1 - q_0) = 0,$$

где

$$-\frac{1}{C}(q_1 - q_0) = U \cos \omega t. \quad (6.16)$$

В этой записи мы получили связанные дифференциальные уравнения, аналогичные случаю свободных колебаний в распределенной системе. Отличие состоит в граничных условиях: на одном конце выполняется условие (6.16), на другом — $q_{N+1} = 0$ (разомкнутый конец).

Стационарное решение ищем в виде

$$q_n = Q_n \cos \omega t.$$

После подстановки в уравнение для q_n находим

$$\left(\frac{2}{C} - L\omega^2 \right) Q_n - \frac{1}{C}(Q_{n-1} + Q_{n+1}) = 0. \quad (6.17)$$

Поскольку частота ω задана внешним источником, определим амплитуду. Пусть $Q_n = a \sin n\beta$. После подстановки в (6.17) получаем

$$\left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) \sin n\beta - \frac{1}{C} [\sin(n-1)\beta + \sin(n+1)\beta] = 0. \quad (6.18)$$

Преобразуем (6.18) к виду

$$\left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) \sin n\beta - \frac{2}{C} \cos\beta \sin n\beta = 0.$$

Откуда

$$\left[\frac{2}{C}(1 - \cos\beta) - L\omega^2\right] \sin n\beta = 0$$

или

$$\frac{2}{C}(1 - \cos\beta) - L\omega^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2 - LC\omega^2 = 2\cos^2\beta;$$

или

$$-2 \leq 2 - LC\omega^2 \leq 2. \quad (6.19)$$

Это условие означает, что

$\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$. Следовательно, в системе возбуждаются колебания вида (6.19), и она пропускает частоты, лежащие ниже критической частоты:

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 2\omega_0. \quad (6.20)$$

Обратимся к распределенной колебательной системе, показанной на рис. 6.4. Подадим на вход ее переменное напряжение $U \cos \omega t$ (рис. 6.6). Колебания в системе описываются связанными уравнениями вида

$$\frac{q_n}{C} + L(2\ddot{q}_n - \ddot{q}_{n-1} - \ddot{q}_{n+1}) = 0.$$

Подстановка стационарного решения $q_n = Q_n \cos \omega t$ приводит к уравнениям

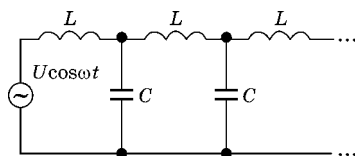


Рис. 6.5

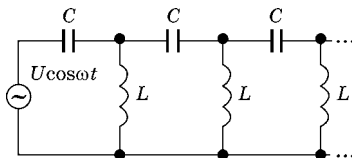


Рис. 6.6

$$\left(2L - \frac{1}{C\omega^2}\right)Q_n - L(Q_{n-1} + Q_{n+1}) = 0. \quad (6.21)$$

Сравним уравнения (6.21) и (6.17). Если в (6.17) сделать замены $1/C$ на L , а L на $1/C$ и $1/\omega$ на ω , то получится уравнение (6.21). Поэтому в формуле (6.20) достаточно выполнить эти же замены, чтобы получить условие для частот колебаний, возбуждаемых в колебательной системе (см. рис. 6.6):

$$\omega \geq \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

или $\omega \geq \omega_c$, где ω_c — критическая частота, $\omega_c = \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$.

Это означает, что колебательная система подобного типа пропускает возмущения, частота которых выше критической частоты, равной $\omega_c = 1/2\omega_0$, и, следовательно, выполняет функции фильтра высоких частот. Комбинация цепей, показанных на рис. 6.5 и 6.6, дает гибридные системы, колебания в которых могут существовать в частотной полосе, ограниченной верхней и нижней критическими частотами. Такие системы выполняют функции полосовых фильтров.

6.4. ПЕРЕХОД ОТ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ К СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Перепишем уравнение движения точечной массы, находящейся на расстоянии x от начала в виде

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -s(y_x - y_{x-b}) - s(y_x - y_{x+b}).$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{s}{m} [(y_{x+b} - y_x) - (y_x - y_{x-b})]. \quad (6.22)$$

Разложим $y_{x\pm b}$ в ряд Тейлора:

$$y_{x+b} - y_x = y' b + y'' \frac{b^2}{2} + \dots;$$

$$y_{x-b} - y_x = -y' b + y'' \frac{b^2}{2} - \dots$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости по b , сложим эти выражения и подставим в (6.22). В результате получаем уравнение (в частных производных):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{sb^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (6.23)$$

Учитывая, что при переходе к сплошной среде произведение жесткости s на расстояние b есть модуль упругости $\varepsilon = sb$, а отношение массы m к пространственному масштабу b есть плотность $\rho = \frac{Nm}{Nb} = \frac{m}{b}$, преобразуем (6.23) к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (6.24)$$

Это волновое уравнение. Приведенный выше способ получения волнового уравнения, описывающего колебания в сплошной среде, не совсем корректен, поскольку функция y определена лишь в дискретных точках, и, строго говоря, у нее нет производных по x . Оправдание этого дифференцирования состоит в том, что непрерывную функцию можно определить ее значениями во всех рациональных точках. Поэтому функцию, заданную в рациональных точках, можно заменить непрерывной функцией единственным образом. Следовательно, все выводы и результаты, полученные при анализе системы (6.1) в режиме продольных колебаний, остаются справедливыми для случая поперечных колебаний. Отсюда волновое уравнение (6.24), описывающее продольные колебания в сплошной среде, в случае поперечных колебаний принимает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (6.25)$$

где $T = sb$. Размерность коэффициентов $\frac{sb^2}{m}$, $\frac{\varepsilon}{\rho}$ и $\frac{T}{\rho}$, входящих в волновые уравнения (6.23–6.24), одинакова и равна размерности квадрата скорости:

$$\left[\frac{sb^2}{m} \right] = [b^2 \omega_0^2] = \left[\frac{\varepsilon}{\rho} \right] = \left[\frac{T}{\rho} \right] = [v^2].$$

Поэтому волновое уравнение можно привести к стандартной форме

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (6.26)$$

Решением этого уравнения могут быть произвольные гладкие запаздывающие функции $y = y\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$ или суперпозиция таких функций:

$$y = y\left(t - \frac{x}{v}\right) + y\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Справедливость этого утверждения легко проверяется подстановкой. Отсюда следует, что решениями волнового уравнения являются также гармонические функции вида

$$\sin(\omega t \pm kx), \quad \cos(\omega t \pm kx), \quad \exp\{i(\omega t \pm kx)\}.$$

Подстановка любой из этих функций в волновое уравнение дает

$$\omega^2 = v^2 k^2.$$

Отсюда получаем $v = \frac{\omega}{k}$. Здесь ω — круговая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, имеющее смысл пространственной частоты. Фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k}$ получается из условия постоянства фазы при распространении колебания

$$\omega t \pm kx = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство по t , получаем

$$\frac{dx}{dt} = v = \pm \frac{\omega}{k}.$$

6.5. КОЛЕБАНИЯ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Рассмотрим одномерную модель кристалла в виде дискретной цепочки, в которой чередуются два вида атомов, отличающихся массой (рис. 6.7).

Пусть все четные массы равны M , а нечетные — m . Атомы массой m занимают все позиции, соответствующие

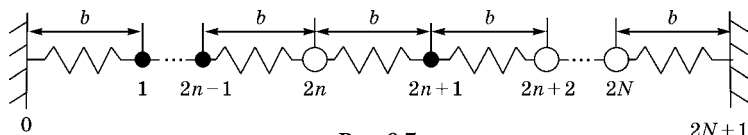


Рис. 6.7

нечетным номерам, $\dots 2n-1, 2n+1, \dots$. Атомы с массой M размещены в позициях с четными номерами: $2n, 2n+2, \dots$. Расстояние между атомами равно b . Запишем уравнения колебаний для каждого из атомов:

$$\begin{cases} M\ddot{y}_{2n} = -s(2y_n - y_{2n-1} - y_{2n+1}); \\ m\ddot{y}_{2n+1} = -s(2y_{2n+1} - y_{2n} - y_{2n+2}). \end{cases} \quad (6.27)$$

Здесь s — коэффициент жесткости связи между соседними атомами. В случае поперечных колебаний вместо s следует подставить, как показано в предыдущей главе, T/b . Ищем решение этой системы в виде

$$\begin{aligned} y_{2n} &= A_{M2n} \exp(i\omega t); \\ y_{2n+1} &= A_{m(2n+1)} \exp(i\omega t). \end{aligned}$$

После подстановки в (6.27) получаем систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} -\omega^2 M A_{M2n} = -s(2A_{M2n} - A_{m(2n-1)} - A_{m(2n+1)}); \\ -\omega^2 m A_{m(2n+1)} = -s(2A_{m(2n+1)} - A_{M2n} - A_{M(2n+2)}). \end{cases}$$

Выполняя преобразования, находим

$$\begin{cases} (2s - \omega^2 M) A_{M2n} = s(A_{m(2n-1)} + A_{m(2n+1)}); \\ (2s - \omega^2 m) A_{m(2n+1)} = s(A_{M2n} + A_{M(2n+2)}). \end{cases} \quad (6.28)$$

Как и в случае цепочки однородных атомов, положим

$$\begin{aligned} A_{M2n} &= A_M \sin 2n\theta; \\ A_{m(2n+1)} &= A_m \sin(2n+1)\theta. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Подставим (6.29) в (6.28):

$$\left\{ \begin{array}{l} (2s - \omega^2 M)A_M \sin 2n\theta = sA_m [\sin(2n-1)\theta + \sin(2n+1)\theta]; \\ (2s - \omega^2 m)A_m \sin(2n+1)\theta = sA_M [\sin 2n\theta + \sin(2n+2)\theta]. \end{array} \right.$$

После выполнения элементарных тригонометрических преобразований получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} (2s - \omega^2 M)A_M \sin 2n\theta = 2sA_m \sin 2n\theta \cos \theta; \\ (2s - \omega^2 m)A_m \sin(2n+1)\theta = 2sA_M \sin(2n+1)\theta \cos \theta. \end{array} \right.$$

Таким образом, подстановка решения в виде (6.29) сводит систему связанных симметричных уравнений (6.28) к системе, состоящей всего лишь из двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(2s - \omega^2 M)A_M - 2sA_m \cos \theta] \sin(2n\theta) = 0; \\ [(2s - \omega^2 m)A_m - 2sA_M \cos \theta] \sin(2n+1)\theta = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} (2s - \omega^2 M)A_M - 2sA_m \cos \theta = 0; \\ (2s - \omega^2 m)A_m - 2sA_M \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} (2s - \omega^2 M)A_M = 2sA_m \cos \theta; \\ (2s - \omega^2 m)A_m = 2sA_M \cos \theta. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Перемножая уравнения (6.30), находим

$$\begin{aligned} (2s - \omega^2 M)(2s - \omega^2 m) &= 4s^2 \cos^2 \theta; \\ (\omega_M^2 - \omega^2)(\omega_m^2 - \omega^2) &= \omega_M^2 \omega_m^2 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

где $\omega_M^2 = \frac{2s}{M}$, $\omega_m^2 = \frac{2s}{m}$. После преобразований получаем

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_M^2 + \omega_m^2) + \omega_M^2 \omega_m^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Решая это уравнение, определяем ω^2 :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \pm \left\{ \frac{1}{4}(\omega_M^2 + \omega_m^2)^2 - \omega_M^2 \omega_m^2 \sin^2 \theta \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4\omega_M^2 \omega_m^2 \sin^2 \theta}{(\omega_M^2 + \omega_m^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6.31)\end{aligned}$$

Параметр θ находим из граничных условий. При $n = 0$, согласно (6.29), граничное условие для $A_{M2n} = A_M \sin 2n = 0$ удовлетворяется при любом θ . Другое граничное условие $A_{m(2N+1)} = A_m \sin(2N+1)\theta = 0$ удовлетворяется, если $(2N+1)\theta_\xi = \xi\pi$, или

$$\theta_\xi = \frac{\xi\pi}{2N+1}, \quad \xi = 1, 2 \dots N.$$

Согласно (6.31), каждому значению ξ соответствуют две частоты ω_ξ :

$$\omega_\xi^2 = \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_\xi \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6.32)$$

В кристаллах, в том числе в одномерной модели, возбуждается огромное число частот (порядка 10^{24}). Поэтому определять каждую частоту в отдельности не имеет смысла. Достаточно выявить основные закономерности в их распределении. Воспользуемся тем, что N — очень большое число. Как следует из (6.32), с ростом ξ большая частота, которой соответствует знак плюс перед корнем, уменьшается, а меньшая, со знаком минус перед корнем, увеличивается. Для $\xi = 2N+1$ получаем самую низкую и самую высокую частоты. При малых $\xi \sin \theta_\xi \ll 1$ и, соответственно, в формуле (6.32) $\frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin \theta_\xi \ll 1$. Тогда

$$\omega_\xi^2 \approx \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{2Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_\xi \right] \right\}. \quad (6.33)$$

Это приближение также справедливо для любых θ_ξ , если $M \gg m$. Отсюда находим

$$\begin{aligned}\omega_{\xi 1}^2 &= (\omega_M^2 + \omega_m^2) \frac{Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_\xi = \\ &= \frac{2s}{M+m} \sin^2 \theta_\xi \approx \omega_M^2 \left(1 - \frac{m}{M}\right) \sin^2 \theta_\xi;\end{aligned}\quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}\omega_{\xi 2}^2 &= (\omega_M^2 + \omega_m^2) \left[1 - \frac{Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_\xi\right] = \\ &= \frac{2s}{Mm} (M+m) \left[1 - \frac{m}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-2} \sin^2 \theta_\xi\right] \approx \\ &\approx \omega_m^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[1 - \frac{m}{M} \sin^2 \theta_\xi\right].\end{aligned}\quad (6.35)$$

Таким образом, для каждого значения ξ мы имеем две частоты, $\omega_{\xi 1}$ и $\omega_{\xi 2}$, которые при $M \gg m$ сильно отличаются друг от друга. Малая частота $\omega_{\xi 1}$ соответствует акустическим колебаниям в кристалле, большая $\omega_{\xi 2}$ — внутримолекулярным. Это разделение колебаний на два типа характерно для дискретной кристаллической решетки и невозможно в сплошной среде, поскольку в ней нет внутримолекулярных колебаний.

Следовательно, спектр частот в нашей модели дискретной кристаллической решетки состоит из двух ветвей: акустической и оптической. К первой относятся низкие частоты $\omega_{\xi 1}$, составляющие акустический, или, как его называют, *дебаевский спектр*. Высокие частоты $\omega_{\xi 2}$ образуют оптический (инфракрасный), или *борновский спектр*. При акустических колебаниях ($\omega_{\xi 1}$) смещение соседних частиц происходит в одном и том же направлении. Частицы обоих видов, M и m , колеблются синфазно. Колебания частиц с массами M и m отличаются только амплитудой, которая несколько меньше для частиц с большей массой. При таких колебаниях меняется число частиц на единицу длины, которое определяет макроскопическую плотность. Это *колебания плотности*, отсюда следует и название колебаний — *акустические*.

Колебания с частотой ($\omega_{\xi 2}$), образующие борновский спектр, происходят в противоположных направлениях, не

вызывая заметного изменения макроскопической плотности, поскольку центр масс единичной ячейки в кристалле остается неподвижным. Это внутримолекулярные колебания. Их можно возбудить световым полем, если чередующиеся атомы представляют собой ионы с зарядами противоположного знака. Отсюда следует название этого типа колебаний — *оптические*.

Рассмотрим случай больших значений $\xi \sim N$. При этом $\theta_N = \frac{N\pi}{2N+1} = \frac{\pi}{2}$, $\sin^2\theta_N = 1$. Тогда выражение (6.32) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \frac{M-m}{M+m} \right\}.$$

Откуда

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \frac{2m}{M+m} = \frac{2s}{M} = \omega_M^2;$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \frac{2M}{M+m} = \frac{2s}{m} = \omega_m^2.$$

Обратимся к выражениям (6.29), описывающим амплитуды колебаний в кристалле. Представим параметр θ в аргументе гармонической функции (в данном случае — синуса) в виде $\theta = kb$, где b — расстояние между соседними атомами (постоянная кристаллическая решетка), $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Здесь λ — пространственный период колебаний, возбуждаемых в кристалле (длина волны). Тогда $(2N+1)b$ — длина кристалла. В этом случае

$$A_{M2n} = \text{Re } \hat{A}_{M2n}, \quad A_{m(2n+1)} = \text{Re } \hat{A}_{m(2n+1)},$$

где $\hat{A}_{M2n}$ и $\hat{A}_{m(2n+1)}$ — комплексные амплитуды колебаний, возбуждаемых в кристалле:

$$\hat{A}_{M2n} = A_M \exp[-i2nkb];$$

$$\hat{A}_{m(2n+1)} = A_m \exp[-i(2n+1)kb].$$

Соответственно решение системы уравнений (6.27) может быть записано в комплексном виде:

$$y_{2n} = \hat{A}_{M2n} \exp(i\omega t) = A_M \exp\{i[\omega t - 2nkb]\};$$

$$y_{2n+1} = \hat{A}_{m(2n+1)} \exp(i\omega t) = A_m \exp\{i[\omega t - (2n+1)kb]\}. \quad (6.36)$$

Подстановка этих решений приведет к алгебраической системе (6.30) и следующим из нее результатам. С учетом $\theta = kb$ и согласно (6.36), выражение (6.33) для частоты возбуждаемых в кристалле колебаний принимает вид

$$\omega^2(k) = \frac{1}{2}(\omega_M^2 + \omega_m^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{2Mm}{(M+m)^2} \sin^2 kb \right] \right\}.$$

В приближении $M \gg m$ получаем, по аналогии с (6.34) и (6.35), для акустической и оптической ветвей

$$\omega_1^2 = \frac{2s}{M+m} \sin^2(kb) = \omega_M^2 \left(1 - \frac{m}{M} \right) \sin^2(kb);$$

$$\omega_2^2 = \frac{2s}{Mm} (M+m) = \omega_m^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(1 - \frac{m}{M} \sin^2 kb \right). \quad (6.37)$$

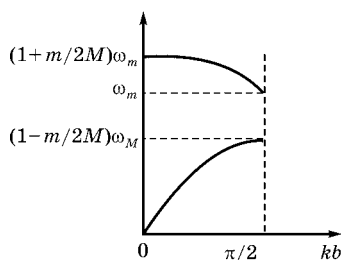


Рис. 6.8

На рис. 6.8 отображена графически дисперсионная зависимость $\omega(k)$ для акустической и оптической ветвей спектра колебаний, возбуждаемых в кристалле. Этот график иллюстрирует связь частот ω и пространственных периодов колебаний для оптических и акустических мод

в кристалле. Спектр колебаний состоит из двух ветвей, не соприкасающихся между собой, если $M \neq m$. Акустическая ветвь начинается с нуля, оптическая ветвь соответствует высоким частотам.

Таким образом, при $M \gg m$ в линейной модели кристалла из двух видов атомов все частоты борновского спектра мало отличаются друг от друга, тогда как в дебаевском спектре отличие сильное. В борновском спектре большие массы имеют малые амплитуды колебаний, а в дебаевском спектре большие массы M колеблются сильно и увлекают малые.

6.6. ПОГЛОЩЕНИЕ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИОННЫМИ КРИСТАЛЛАМИ

Как следует из (6.37), акустическая и оптическая ветви колебаний ограничены волновым числом $k_c \approx \frac{\pi}{2b} \approx 10^{10} \text{ м}^{-1}$, поскольку в кристаллической решетке $2b \sim 10^{-10} \text{ м}$. Это волновое число, $k_c = \frac{\pi}{2b}$, соответствует критической частоте решетки $\omega_1^2 = \frac{2s}{M+m}$ в акустической и $\omega_2^2 = \frac{2s}{Mm}(M+m)$ в оптической ветвях. Для инфракрасного излучения с частотой $3 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$ длина волны равна 10^{-4} м , а волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 6 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$. Волновое число, соответствующее инфракрасному излучению, пренебрежимо мало по сравнению с критическим волновым числом $k_c \sim 10^{10} \text{ м}^{-1}$ для колебаний в кристаллической решетке, $k/k_c \sim 10^{-5}$. Поэтому в уравнениях, описывающих динамику кристаллической решетки в инфракрасном диапазоне, величину k можно принять равной нулю.

В ионной кристаллической решетке под действием электромагнитного поля $E = E_0 \exp(j\omega t)$ возникает движение ионов противоположного знака $\pm q$. При этом уравнения колебаний принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ M\ddot{y}_{2n} = -\frac{T}{b}(2y_n - y_{2n-1} - y_{2n+1}) - qE_0; \\ m\ddot{y}_{2n+1} = -\frac{T}{b}(2y_{2n+1} - y_{2n} - y_{2n+2}) + qE_0. \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Повторяя приведенные выше подстановки и преобразования, приходим к уравнениям типа (6.30), в которых учтено присутствие внешнего поля и принято $\cos \theta = 1$ в приближении $k = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 M A_M = 2\frac{T}{b}(A_m - A_M) - qE_0; \\ -\omega^2 m A_m = 2\frac{T}{b}(A_M - A_m) + qE_0. \end{array} \right.$$

Решая эти уравнения, получаем выражения для амплитуд колебаний

$$A_M = \frac{-qE_0}{M(\omega_2^2 - \omega^2)}; \quad A_m = \frac{qE_0}{m(\omega_2^2 - \omega^2)},$$

где, в соответствии с (6.37), $\omega_2^2 = \frac{2T}{mb} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$. Таким образом, при $\omega = \omega_2$ имеет место сильное поглощение инфракрасного излучения ионным кристаллом. При этом амплитуды колебаний A_M и A_m сильно увеличиваются.

6.7. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ДИСПЕРСИИ В ДИСКРЕТНЫХ И СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим цепочку связанных осцилляторов, каждый из которых определяется собственной частотой $\tilde{\omega}_0$. На рис. 6.9 в качестве примера показана цепочка связанных математических маятников длиной l , собственные частоты которых равны $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Уравнения движения этой колебательной системы представляют собой, по аналогии с (6.1), связанную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_n + \tilde{\omega}_0^2 y_n = -\frac{s}{m}(y_n - y_{n-1}) - \frac{s}{m}(y_n - y_{n+1}). \end{array} \right. \quad (6.38)$$

Как и в разд. 6.4, выполним переход от дискретной к сплошной среде. Для этого перепишем уравнение (6.38) в виде

$$\ddot{y}_x + \tilde{\omega}_0^2 y_x = -\frac{s}{m}[(y_x - y_{x-b}) - (y_x - y_{x+b})], \quad (6.39)$$

где b — пространственный период решетки. Разложим смещения $y_{x\pm b}$ в ряд Тейлора, ограничившись членами второго порядка малости по b :

$$y_{x\pm b} \approx y_x \pm by' + \frac{b^2}{2} y'' \dots \quad (6.40)$$

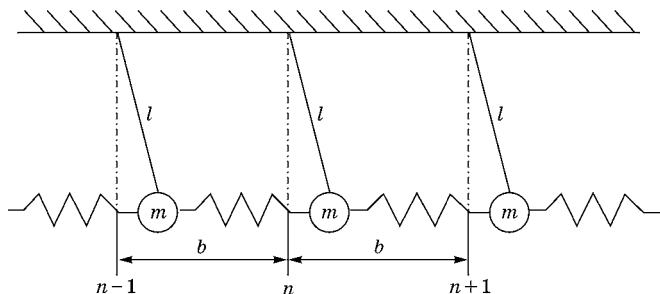


Рис. 6.9

После подстановки (6.40) в (6.39) получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \tilde{\omega}_0^2 y = \frac{sb^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \tilde{\omega}_0^2 y = 0, \quad (6.41)$$

где $v^2 = \frac{sb^2}{m}$ — фазовая скорость. Это так называемое линейаризованное уравнение Клейна–Гордона. Оно отличается от полученного ранее волнового уравнения (6.26) присутствием члена $\tilde{\omega}_0^2 y$.

Будем искать решение уравнения Клейна–Гордона в виде

$$y(x, t) = A \exp[i(\omega t - kx)].$$

После подстановки в (6.41) находим выражение для собственной частоты колебательной системы

$$\omega^2 = \tilde{\omega}_0^2 + v^2 k^2, \quad (6.42)$$

или с учетом фазовой скорости $v^2 = \frac{sb^2}{m}$:

$$\omega^2 = \tilde{\omega}_0^2 + \frac{s}{m} (kb)^2. \quad (6.43)$$

С другой стороны, прямая подстановка решений

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= A \exp\{i[\omega t - (n-1)kb]\}; \\ y_{n+1} &= A \exp\{i[\omega t - (n+1)kb]\}; \\ y_n &= A \exp\{i[\omega t - nkb]\} \end{aligned}$$

в уравнение (6.38) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = \tilde{\omega}_0^2 + \frac{4s}{m} \sin^2 \frac{kb}{2}. \quad (6.44)$$

Из (6.43) и (6.44) видно, что переход от дискретной системы связанных осцилляторов к сплошной среде осуществляется в пределе $kb \ll 1$, когда $\sin \frac{kb}{2} \approx \frac{kb}{2}$. Это соответствует малости постоянной решетки b по сравнению с длиной волны λ .

Если устремить $\tilde{\omega}_0$ к нулю, то уравнение Клейна–Гордона переходит в обычное волновое уравнение, которому соответствует дисперсионное уравнение $\omega = \pm vk$ и известное выражение для фазовой скорости $v = \pm \omega/k$.

В дисперсионной среде, учитывая зависимость фазовой скорости от k , скорость распространения волнового процесса можно определить как $v_g = v + k \frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(vk) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Эта скорость получила название *групповой*.

Линейная зависимость ω от k указывает на отсутствие дисперсии в среде, т. е. фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k}$ постоянная и не зависит от частоты (рис. 6.10). Физически $\tilde{\omega}_0 \rightarrow 0$ означает, что длина маятника в колебательной системе (см. рис. 6.9) становится такой большой, что перестает влиять на колебания. В этом случае колебательная система сводится к связанной цепочке точечных масс (см. рис. 6.1).

Обратимся к ситуации, когда $\tilde{\omega}_0$ имеет конечную величину. Рассмотрим поведение частоты ω в интервале значений, близких к $\tilde{\omega}_0$, $\frac{v^2 k^2}{\tilde{\omega}_0^2} \ll 1$:

$$\omega = \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + v^2 k^2} = \tilde{\omega}_0 \sqrt{1 + \frac{v^2 k^2}{\tilde{\omega}_0^2}} = \tilde{\omega}_0 \left(1 + \frac{v^2}{2\tilde{\omega}_0^2} k^2 \right) = \tilde{\omega}_0 + \alpha k^2,$$

где $\alpha = \frac{sb^2}{2m\tilde{\omega}_0}$.

В этом интервале значений частота ω связана с волновым числом k квадратичной зависимостью (сплошная кривая на рис. 6.11). При $\tilde{\omega}_0 \rightarrow 0$ дисперсия исчезает, и сплошная кривая на рис. 6.11 трансформируется в штриховые прямые, идентичные прямым на графике рис. 6.10. Зависимость частоты ω от волнового числа становится линей-

ной. Можно сказать, что дисперсия исчезает, когда собственный временной масштаб $\tilde{\omega}_0$, характеризующий среду, становится пренебрежимо малым.

В случае дискретной цепочки (см. (6.1), (6.38)) приходим к выводу, что при постоянной решетке b , сравнимой с длиной волны, дисперсия сохраняется даже при нулевой собственной частоте осциллятора $\tilde{\omega}_0 = 0$. Таким образом, в одномерной решетке точечных масс (одномерной модели атомной решетки) дисперсия определяется собственным пространственным масштабом — периодом решетки (6.43).

В общем случае, когда существование дисперсии зависит от присутствия независимых от параметров волны временных ($\tilde{\omega}_0$) или пространственных (b) масштабов, можно говорить о пространственно-временной дисперсии. Дисперсия, связанная с наличием в среде временных масштабов, получила название *временной*. Соответственно, *пространственная дисперсия* определяется существованием пространственных масштабов. Например, для воды с пузырьками пространственный масштаб b означает расстояние между пузырьками или размер пузырьков. В этой ситуации для волны с $\lambda \gg b$ искажений при распространении, т. е. дисперсии, не будет. Если же $\lambda \sim b$, в среде есть дисперсия и волна искажается.

Другой пример — кристалл. Низкочастотные волны, длина которых много больше постоянной решетки, распространяются без искажений (дисперсии нет). Для высокочастотных волн, длина которых сравнима с постоянной решетки, имеет место пространственная дисперсия, а постоянная решетки проявляет себя как пространственный масштаб среды. Наконец, если в среде отсутствуют характерные пространственные и временные масштабы, то дисперсии нет и распространяющаяся волна не искажается.

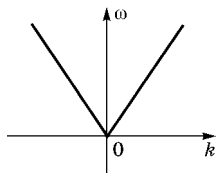


Рис. 6.10

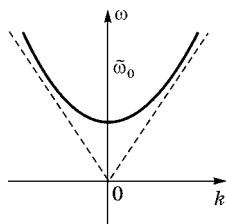


Рис. 6.11

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Чему равна критическая частота в распределенной колебательной системе с частотным ограничением сверху?
2. Как определяется критическая частота в распределенных колебательных системах с частотным ограничением снизу?
3. Сравните физические процессы, определяющие критические частоты и фильтрующие свойства распределенных колебательных систем.
4. Какими физическими процессами объясняется появление акустической и оптической ветвей в спектре колебаний кристаллической решетки?
5. Чем объясняется сильное поглощение инфракрасного излучения в ионном кристалле?
6. Чем отличается математическое описание колебательных процессов в дискретных и сплошных средах?
7. Каким общим свойством обладают функции, являющиеся решением волнового уравнения?
8. Поясните физическую природу дисперсионных явлений при распространении колебательных процессов (волн) в дискретных и сплошных средах.

ЗАДАЧИ

6.1. Найти длину волны излучения, соответствующую максимуму поглощения в хлористом калии (KCl). Масса атома калия 39 а. е. м., 1 а. е. м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Воспользоваться упругой силой для ионного кристалла, полученной в задаче 6.3.

6.2. Фазовая скорость поперечных волн в кристалле с межатомным расстоянием b определяется выражением

$$v = v_0 \frac{\sin(kb/2)}{kb/2},$$

где v_0 — постоянная; k — волновое число. Определить групповую скорость. Найти оценочное выражение для групповой скорости в приближении длинных волн ($kb/2 \ll 1$).

6.3. Нарисовать электрический аналог механической распределенной системы, показанной на рис. 6.9. Получить дисперсионное уравнение для такой распределенной электрической системы.

КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧ

7.1. ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧ БЕЗ ПОТЕРЬ

Рассмотрим модель электрической линии с непрерывным распределением индуктивности, емкости и сопротивления. Системы такого типа называются линиями передач. Простейшая линия передач — двухпроводная. Линия передач характеризуется погонной индуктивностью L_0 , емкостью C_0 , проводимостью G_0 и погонным сопротивлением R_0 .

На рис. 7.1 показан элемент длиной dx двухпроводной линии передач. Этот элемент в общем случае характеризуется индуктивностью $L_0 dx$, емкостью $C_0 dx$, сопротивлением $R_0 dx$ и проводимостью $G_0 dx$.

Пусть в сечении x мы имеем напряжение $U(x)$. Тогда в сечении $x + dx$ напряжение равно

$$U(x + dx) \approx U(x) + \frac{\partial U}{\partial x} dx.$$

Отсюда

$$U(x + dx) - U(x) = \frac{\partial U}{\partial x} dx. \quad (7.1)$$

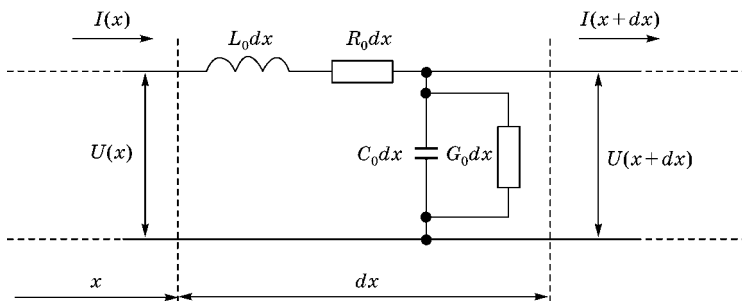


Рис. 7.1

Левая часть (7.1) — падение напряжения на участке dx :

$$U(x+dx) - U(x) = -IR_0 dx - L_0 dx \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Здесь I — ток в линии передачи. Падение напряжения на участке dx равно сумме падения напряжения на сопротивлении $R_0 dx$ и напряжения на индуктивности $L_0 dx$. Это следует из закона Кирхгофа для замкнутого контура:

$$U(x+dx) - U(x) + R_0 dx I + L_0 dx \frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx = -IR_0 dx - L_0 dx \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Поделив обе части этого равенства на dx , получаем так называемое первое телеграфное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -IR_0 - L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Рассмотрим изменение тока на участке dx линии передачи. Пусть ток в сечении x равен $I(x)$. Тогда для тока в сечении $x + dx$ с точностью до первого порядка малости по dx имеем

$$I(x+dx) = I(x) + \frac{\partial I}{\partial x} dx.$$

Отсюда изменение тока на участке dx описывается равенством:

$$I(x+dx) - I(x) = \frac{\partial I}{\partial x} dx. \quad (7.3)$$

По закону Кирхгофа

$$I(x+dx) - I(x) = -UG_0 dx - C_0 dx \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Подставив это выражение в (7.3) и разделив обе части на dx , получаем второе телеграфное уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -UG_0 - C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (7.4)$$

В случае линии без потерь ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) телеграфные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Дифференцируя первое уравнение в (7.5) по x , а второе по t , находим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая $\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}$, получаем для напряжения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (7.6)$$

Дифференцируя второе уравнение в (7.5) по x , а первое — по t , приходим к уравнению для тока

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (7.7)$$

Поскольку $\frac{1}{LC}$ имеет размерность квадрата частоты, $\left[\frac{1}{LC}\right] = [\omega^2]$, и $L = L_0 dx$, $C = C_0 dy$, $\frac{1}{L_0 C_0}$ имеет размерность квадрата скорости $\left[\frac{1}{L_0 C_0}\right] = [v^2]$. Распространение напряжения и тока в линии передачи без потерь описывается волновыми уравнениями (7.6) и (7.7).

Представим решения телеграфных уравнений (7.5) гармоническими запаздывающими функциями:

$$U = U_0 e^{ik(vt-x)}; \quad I = I_0 e^{ik(vt-x)}. \quad (7.8)$$

Эти же функции являются решениями волновых уравнений (7.6) и (7.7) при $v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}$. После подстановки (7.8) в телеграфные уравнения (7.5) получаем

$$\begin{cases} -ikU = -L_0 ikvI; \\ -ikI = -C_0 ikvU \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} U = L_0 v I; \\ I = C_0 v U. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}$ находим

$$\begin{cases} \frac{U}{I} = L_0 v = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_W; \\ \frac{I}{U} = C_0 v = \frac{C_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = \frac{1}{Z_W} = G_W. \end{cases}$$

Здесь $Z_W = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ — волновое сопротивление линии. Соответственно, $G_W = \frac{1}{Z_W} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$ получило название *волновой проводимости линии*. Знак волнового сопротивления зависит от направления распространения волны: «+» для падающей волны и «-» для волны отраженной.

Примером линии передачи является коаксиальный кабель. Его погонная индуктивность

$$L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего проводников; μ — магнитная проницаемость. Погонная емкость коаксиального кабеля

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между проводниками. Отсюда фазовая скорость волны в коаксиальном кабеле

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

В случае свободного пространства

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\epsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ Ф/м. Отсюда получаем $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Следовательно, в свободном пространстве электромагнитные колебания распространяются со скоростью, равной скорости света c .

Волновое сопротивление коаксиального кабеля

$$Z_W = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ Ом.}$$

7.2. ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧ С ПОТЕРЯМИ

Рассмотрим линию передач с потерями (иногда ее называют реальной линией). Для этого обратимся к телеграфным уравнениям (7.2) и (7.4), описывающим распространение напряжения и тока в реальной линии:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -R_0 I - L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -G_0 U - C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \end{cases}$$

Поскольку временную зависимость напряжения и тока в линии можно представить гармоническими функциями $U = U_0 e^{i\omega t}$ и $I = I_0 e^{i\omega t}$, телеграфные уравнения после подстановки этих решений принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -(R_0 + iL_0\omega)I; \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -(G_0 + iC_0\omega)U. \end{cases} \quad (7.9)$$

Дифференцируя первое уравнение (7.9) по x и делая подстановку из второго уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (R_0 + iL_0\omega)(G_0 + iC_0\omega)U. \quad (7.10)$$

Дифференцируя второе уравнение (7.9) по x и делая подстановку из первого уравнения, находим

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = (G_0 + iC_0\omega)(R_0 + iL_0\omega)I. \quad (7.11)$$

Введем обозначение:

$$\gamma = \alpha + ik = [(R_0 + iL_0\omega)(G_0 + iC_0\omega)]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда уравнения (7.10) и (7.11) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \gamma^2 I. \end{cases} \quad (7.12)$$

Из (7.12) видно, что распределение напряжения и тока в реальной цепи описывается уравнением Гельмгольца.

Будем искать решения уравнений (7.12) в виде экспонент $Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$. Тогда полное решение с учетом гармонической зависимости от времени описывается выражением

$$\begin{aligned} U &= (Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x})e^{i\omega t}; \\ I &= (Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x})e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\gamma = \alpha + ik$, получаем

$$\begin{cases} U = Ae^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)} + Be^{\alpha x} e^{i(\omega t + kx)}; \\ I = Ce^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)} + De^{\alpha x} e^{i(\omega t + kx)}. \end{cases}$$

Постоянные A, B, C, D находятся из граничных и начальных условий. Таким образом, напряжение и ток в линии передачи описываются суперпозицией двух затухающих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Если бы потерь не было, напряжение и ток в линии представлялись бы суммой двух бегущих в противоположных направлениях гармонических волн. Введение потерь (R_0 и G_0) приводит к экспоненциальному затуханию этих волн. Постоянная $\gamma = \alpha + ik$ называется *константа распространения*, α — *коэффициент затухания*, а k — *волновое число*. Зависимость коэффициента затухания от R_0 и G_0 означает, что энергия волн теряется на джоулево тепло.

7.3. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ С ПОТЕРЯМИ

Запишем решение второго уравнения (7.12) в виде

$$I(x) = A'e^{-\gamma x} + B'e^{\gamma x}.$$

Подстановка во второе уравнение системы (7.9) дает

$$-\gamma(A'e^{-\gamma x} - B'e^{\gamma x}) = -(G_0 + iC_0\omega)U$$

или

$$\frac{[(R_0 + iL_0\omega)(G_0 + iC_0\omega)]^{\frac{1}{2}}}{G_0 + iC_0\omega}(A'e^{-\gamma x} - B'e^{\gamma x}) = U.$$

Поскольку в любом сечении линии $U = U_+ + U_-$, получаем

$$\sqrt{\frac{R_0 + iL_0\omega}{G_0 + iC_0\omega}}(A'e^{-\gamma x} - B'e^{\gamma x}) = U_+ + U_-.$$

Здесь $I_+ = A'e^{-\gamma x}$ и $I_- = B'e^{\gamma x}$ — комплексные амплитуды волн тока, распространяющихся в противоположных направлениях, U_+ и U_- — комплексные амплитуды соответствующих волн напряжения. Поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{R_0 + iL_0\omega}{G_0 + iC_0\omega}}I_+ &= U_+; \\ -\sqrt{\frac{R_0 + iL_0\omega}{G_0 + iC_0\omega}}I_- &= U_-.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} \frac{U_+}{I_+} = \sqrt{\frac{R_0 + iL_0\omega}{G_0 + iC_0\omega}} = Z_0; \\ \frac{U_-}{I_-} = -\sqrt{\frac{R_0 + iL_0\omega}{G_0 + iC_0\omega}} = -Z_0. \end{cases} \quad (7.13)$$

Здесь Z_0 — волновое сопротивление (волновой импеданс) линии с потерями. Z_0 является комплексным числом. При $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ Z_0 становится равным волновому сопротивлению идеальной линии передач (без потерь):

$$Z_0 \Big|_{\substack{R_0=0 \\ G_0=0}} = Z_W.$$

7.4. ОТРАЖЕНИЕ ОТ КОНЦА ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ

Пусть линия передачи нагружена на импеданс Z_L и U_L — падение напряжения на нагрузке. Если в линии присутствуют падающая и отраженная волна, напряжение и ток в любом сечении соответственно равны

$$\begin{aligned}U &= U_+ + U_-; \\I &= I_+ + I_-.\end{aligned}$$

Граничные условия на нагрузке

$$\begin{cases} U_+ + U_- = U_L; \\ I_+ + I_- = I_L. \end{cases} \quad (7.14)$$

Кроме того, согласно (7.13),

$$\frac{U_+}{I_+} = Z_0; \quad \frac{U_-}{I_-} = -Z_0; \quad \frac{U_L}{I_L} = Z_L. \quad (7.15)$$

Запишем граничные условия (7.14) в виде

$$\begin{cases} 1 + \frac{U_-}{U_+} = \frac{U_L}{U_+}; \\ 1 + \frac{I_-}{I_+} = \frac{I_L}{I_+}. \end{cases}$$

С учетом (7.15) получаем

$$\begin{cases} 1 + \frac{U_-}{U_+} = \frac{U_L}{U_+}; \\ 1 - \frac{U_-}{U_+} = \frac{I_L}{I_+}. \end{cases} \quad (7.16)$$

Разделив в системе (7.16) первое уравнение на второе, находим

$$\frac{1 + (U_-/U_+)}{1 - (U_-/U_+)} = \frac{Z_L}{Z_0}.$$

Откуда определяем коэффициент отражения по напряжению

$$\frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}.$$

По аналогии, с учетом (7.14) и (7.15), запишем систему уравнений для коэффициента отражения по току

$$\begin{cases} 1 - \frac{I_-}{I_+} = \frac{U_L}{U_+}; \\ 1 + \frac{I_-}{I_+} = \frac{I_L}{I_+}. \end{cases}$$

Отсюда находим коэффициент отражения по току

$$\frac{I_-}{I_+} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}.$$

Запишем из (7.16) систему уравнений для коэффициентов U_L/U_+ и I_L/I_+ , имеющих смысл коэффициентов прохода по напряжению и току:

$$\begin{cases} 1 + \frac{U_-}{U_+} = \frac{U_L}{U_+}; \\ 1 - \frac{U_-}{U_+} = \frac{U_L Z_0}{U_+ Z_L}. \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \frac{U_-}{U_+} = \frac{I_L Z_L}{I_+ Z_0}; \\ 1 - \frac{U_-}{U_+} = \frac{I_L}{I_+}. \end{cases}$$

Складывая уравнения в каждой из этих систем, получаем

$$\begin{aligned} \frac{U_L}{U_+} &= \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}; \\ \frac{I_L}{I_+} &= \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}. \end{aligned}$$

В случае короткозамкнутой линии ($Z_L = 0$)

$$\frac{U_-}{U_+} = -1; \quad \frac{I_-}{I_+} = 1; \quad \frac{U_L}{U_+} = 0; \quad \frac{I_L}{I_+} = 2.$$

В короткозамкнутой линии напряжения падающей и отраженной волн противофазны, токи синфазны, напряжение на нагрузке равно нулю, а ток в нагрузке удваивается. Таким образом, на конце короткозамкнутой линии формируется узел напряжения и пучность тока.

Рассмотрим другой крайний случай, когда линия разомкнута ($Z_L = \infty$):

$$\frac{U_-}{U_+} = 1; \quad \frac{I_-}{I_+} = -1; \quad \frac{U_L}{U_+} = 2; \quad \frac{I_L}{I_+} = 0.$$

На конце разомкнутой линии образуется пучность напряжения и узел тока; напряжения в отраженной и падающей волнах синфазны, а токи — противофазны.

Обратимся к ситуации, когда импеданс нагрузки равен волновому импедансу ($Z_L = Z_0$):

$$\frac{U_-}{U_+} = 0; \quad \frac{I_-}{I_+} = 0; \quad \frac{U_L}{U_+} = 1; \quad \frac{I_L}{I_+} = 1.$$

Следовательно, при согласованной нагрузке ($Z_L = Z_0$) отраженные волны тока и напряжения отсутствуют, а ток и напряжение в нагрузке синфазны падающей волне. В линии передачи при этом устанавливается режим бегущей волны.

Импеданс линии передачи в сечении x находим как отношение напряжения к току:

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \frac{U_+ + U_-}{I_+ + I_-} = Z_0 \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}}{Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}}.$$

Здесь учтено: $U_+ = I_+ Z_0$; $U_- = -I_- Z_0$; $I_+ = Ae^{-\gamma x}$; $I_- = Be^{\gamma x}$; A и B — амплитуды тока при $x = 0$ для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях (то есть запаздывающей и отраженной волн).

ПРИМЕР 7.1

Пусть линия длиной l нагружена на импеданс Z_L . Найти связь между импедансом нагрузки и параметрами линии передачи.

Решение.

Из (7.21) для $x = l$ имеем

$$Z(l) = Z_L = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}}.$$

ПРИМЕР 7.2

Найти входной импеданс Z_i линии длиной l , нагруженной на импеданс Z_L . Входной импеданс линии определяется для сечения $x = 0$.

Решение.

$$Z_i = Z_0 \frac{A - B}{A + B}.$$

Из примера (7.1):

$$Z_L = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}};$$

$$Z_L(Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}) = Z_0(Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l});$$

$$Ae^{-\gamma l}(Z_L - Z_0) + Be^{\gamma l}(Z_L + Z_0) = 0;$$

$$B = \frac{Ae^{-\gamma l}(Z_0 - Z_L)}{e^{\gamma l}(Z_0 + Z_L)}.$$

После подстановки B в формулу для Z_i :

$$Z_i = Z_0 \frac{1 - \frac{e^{-\gamma l}(Z_0 - Z_L)}{e^{\gamma l}(Z_0 + Z_L)}}{1 + \frac{e^{-\gamma l}(Z_0 - Z_L)}{e^{\gamma l}(Z_0 + Z_L)}} = Z_0 \frac{Z_0 \operatorname{sh} \gamma l + Z_L \operatorname{ch} \gamma l}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma l + Z_L \operatorname{sh} \gamma l}.$$

ПРИМЕР 7.3

Определить входное сопротивление идеальной линии передачи, нагруженной на импеданс Z_L .

Решение.

В линии без потерь $\gamma l = ikl$; $\operatorname{sh} \gamma l = i \operatorname{sinkl}$; $\operatorname{ch} \gamma l = \operatorname{coskl}$; $Z_0 = Z_W$.

Учитывая пример 7.2, получаем

$$Z_i = Z_W \frac{iZ_W \operatorname{sinkl} + Z_L \operatorname{coskl}}{Z_W \operatorname{coskl} + iZ_L \operatorname{sinkl}} = Z_W \frac{iZ_W \operatorname{tgkl} + Z_L}{Z_W + iZ_L \operatorname{tgkl}}.$$

ПРИМЕР 7.4

Определить константу затухания и волновое число в линии с потерями при $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ и $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} \gamma &= [(R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)]^{\frac{1}{2}} = \omega \sqrt{L_0 C_0} \left[\left(\frac{R_0}{\omega L_0} + i \right) \left(\frac{G_0}{\omega C_0} + i \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \omega \sqrt{L_0 C_0} \left[-1 + \frac{i}{\omega} \left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = i\omega \sqrt{L_0 C_0} \left[1 - \frac{i}{\omega} \left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx i\omega \sqrt{L_0 C_0} \left[1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \right] \approx i\omega \sqrt{L_0 C_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \sqrt{L_0 C_0}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k &\approx \omega \sqrt{L_0 C_0} \approx \frac{\omega}{v}; \\ \alpha &\approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{R_0}{2Z_W} + \frac{1}{2} G_0 Z_W. \end{aligned}$$

Для линии с пренебрежимо малой погонной проводимостью $\alpha = R_0/2Z_W$.

ПРИМЕР 7.5

Определить добротность линии при $G_0 = 0$.

Решение.

$$\alpha = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}; \quad \omega = \frac{k}{\sqrt{L_0 C_0}}; \quad R_0 = 2\alpha \sqrt{\frac{L_0}{C_0}};$$

$$Q = \frac{\omega L_0}{R_0} = \frac{k L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} \cdot \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = \frac{k}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{2\alpha v} \approx \frac{\omega_0 Z_W}{R_0 v}.$$

ПРИМЕР 7.6

Найти условие, при котором волновое сопротивление в линии, исследованной в примере 7.4, является действительной величиной.

Решение.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left(\frac{R_0}{\omega L_0} + i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{G_0}{\omega C_0} + i \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left(1 - i \frac{R_0}{\omega L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - i \frac{G_0}{\omega C_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx Z_W \left[\left(1 - i \frac{R_0}{\omega L_0} \right) \left(1 + i \frac{G_0}{\omega C_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = Z_W \left[1 + \frac{i}{\omega} \left(\frac{G_0}{C_0} - \frac{R_0}{L_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx Z_W \left[1 + \frac{i}{2\omega} \left(\frac{G_0}{C_0} - \frac{R_0}{L_0} \right) \right].$$

При $\frac{G_0}{C_0} - \frac{R_0}{L_0}$ волновой импеданс равен волновому сопротивлению линии без потерь.

7.5. СВОЙСТВА ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧ КАК КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Исследуем входной импеданс идеальной линии длиной l с волновым сопротивлением Z_W . Согласно примеру 7.3:

$$z_i = Z_W \frac{iZ_W \operatorname{tg} kl + Z_L}{Z_W + iZ_L \operatorname{tg} kl}. \quad (7.17)$$

В случае *короткозамкнутой линии* импеданс нагрузки Z_L равен нулю и

$$Z_{ic} = iZ_W \operatorname{tg} kl. \quad (7.18)$$

Зависимость входного сопротивления короткозамкнутой линии от длины графически показана на рис. 7.2. Из рисунка видно, что входное сопротивление короткозамкнутой линии является реактивным. На интервалах длин, удовлетворяющих условию $n\pi \leq kl \leq (n + 1/2)\pi$ или $n\lambda/2 \leq l \leq (2n + 1)\lambda/4$, $n = 0, 1, 2, \dots$, входной импеданс имеет индуктивный характер. Входное сопротивление четвертьволновой линии ($l = \lambda/4$ или $l = (2n + 1)\lambda/4$) становится бесконечным. Для полуволновой линии ($l = \lambda/2$ или $l = n\lambda/2$) входное сопротивление имеет нулевую величину. Если же длина короткозамкнутой линии находится в интервале $(n + 1/2)\pi \leq kl \leq (n + 1)\pi$ или $(2n + 1)\lambda/4 \leq l \leq (n + 1)\lambda/2$, характер входного импеданса — емкостной. Следовательно, короткозамкнутый четвертьволновой отрезок линии можно уподобить параллельному резонансному контуру. Соответственно, короткозамкнутая линия длиной в половину длины волны эквивалентна последовательному резонансному контуру.

Входной импеданс *разомкнутой* ($z_L = \infty$) *идеальной* линии описывается, согласно (7.17), выражением

$$Z_{io} = -iZ_W \operatorname{ctg} kl. \quad (7.19)$$

Изменение входного сопротивления разомкнутой линии в зависимости от длины показано на рис. 7.3. Как видно из рисунка, входной импеданс разомкнутой линии на интервалах длин $n\lambda/2 \leq l \leq (2n + 1)\lambda/4$ имеет емкостной характер, а на интервалах длин $(2n + 1)\lambda/4 \leq l \leq (n + 1)\lambda/2$ импеданс становится индуктивным. Полуволновой отрезок разомкнутой линии ($l = \lambda/2$) имеет бесконечное входное сопротивление, как и параллельный резонансный контур. Входное сопротивление четвертьволнового отрезка разомкнутой линии равно нулю, как в последовательном резонансном контуре.

Из сравнения входных сопротивлений короткозамкнутой (7.18) и разомкнутой (7.19) линий следует способ определения волнового сопротивления линии передач:

$$Z_W = \sqrt{Z_{ic} Z_{io}}. \quad (7.20)$$

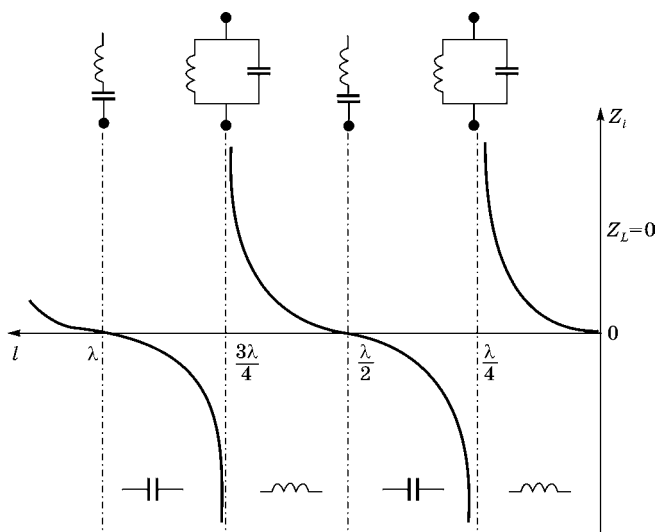


Рис. 7.2

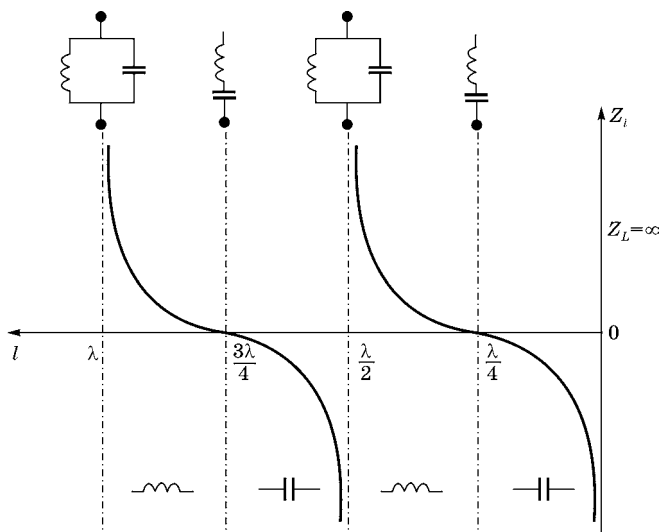


Рис. 7.3

Волновое сопротивление идеальной линии равно среднему геометрическому входных импедансов в короткозамкнутом и разомкнутом режимах.

В линии, нагруженной на волновое сопротивление, $Z_L = Z_W$, входное сопротивление, как это следует из (7.17), равно волновому, $Z_i = Z_W$. В такой линии устанавливается режим бегущей волны, и она работает как идеальный фильтр, согласованный с нагрузкой.

Периодическое изменение входного сопротивления вдоль линии дает возможность применять линии определенной длины для согласования сопротивления генератора и нагрузки. Для *полуволнового отрезка* ($l = \lambda/2$) и для *отрезка длиной, равной целому числу полуволн* ($l = n\lambda/2$), входное сопротивление находим подстановкой соответствующего значения l в (7.17):

$$Z_i = Z_W \frac{iZ_W \operatorname{tg}\left(nk\frac{\lambda}{2}\right) + Z_L}{Z_W + iZ_L \operatorname{tg}\left(nk\frac{\lambda}{2}\right)} = Z_L.$$

Следовательно, входной импеданс участка линии длиной в полволны или целое число полуволн равно импедансу нагрузки.

Рассмотрим действие *четвертьволнового отрезка линии*. В этом случае $l = \lambda/4$ или $l = (2n + 1)\lambda/4$. Тогда из (7.17) находим для входного импеданса

$$Z_i = Z_W \frac{iZ_W \operatorname{tg}\left[(2n+1)k\frac{\lambda}{4}\right] + Z_L}{Z_W + iZ_L \operatorname{tg}\left[(2n+1)k\frac{\lambda}{4}\right]} = \frac{Z_W^2}{Z_L}.$$

Отсюда следует, что для согласования импедансов Z_i и Z_L между ними необходимо включить участок линии длиной в четверть волны или нечетное число четвертей волны с волновым сопротивлением Z_W , равным среднему геометрическому согласуемых импедансов:

$$Z_W = \sqrt{Z_i Z_L}. \quad (7.21)$$

Если необходимо согласовать две линии с волновыми сопротивлениями Z_{W1} и Z_{W2} , используется четверть-

волновой отрезок, волновое сопротивление которого находим из условия, аналогичного (7.21):

$$Z_W = \sqrt{Z_{W1} Z_{W2}}.$$

Обратимся к *линии с потерями*. Входной импеданс такой линии, как показано в примере (7.2), равен

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_0 \operatorname{sh} \gamma l + Z_L \operatorname{ch} \gamma l}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma l + Z_L \operatorname{sh} \gamma l} \quad (7.22)$$

или

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_0 \operatorname{th} \gamma l + Z_L}{Z_0 + Z_L \operatorname{th} \gamma l}. \quad (7.23)$$

Из (7.22) и (7.23) видно, что входной импеданс меняется вдоль линии. Если импеданс нагрузки равен волновому импедансу, $Z_L = Z_0$, входной импеданс линии постоянен по всей длине и равен волновому импедансу, $Z_i = Z_0$, а в линии устанавливается режим бегущей волны.

В случае короткозамкнутой линии, $Z_L = 0$, и согласно (7.23):

$$Z_{ic} = Z_0 \operatorname{th} \gamma l. \quad (7.24)$$

Соответственно входной импеданс разомкнутой ($Z_L = \infty$) реальной линии равен

$$Z_{io} = Z_0 \operatorname{cth} \gamma l. \quad (7.25)$$

Из (7.24) и (7.25) по аналогии с идеальной линией получаем способ определения волнового импеданса линии с потерями. Волновой импеданс реальной линии равен среднегеометрическому входных импедансов короткозамкнутой и разомкнутой линий:

$$Z_o = \sqrt{Z_{ic} Z_{io}}.$$

Линия может служить резонансной системой, эквивалентной параллельному или последовательному контурам. Резонансные частоты с достаточной для практики степенью точности определяются в предположении, что потери отсутствуют (идеальная линия). Однако, чтобы найти входной импеданс Z_i реальной линии и добротность Q , потери приходится учитывать.

Для отрезка идеальной четвертьволновой разомкнутой линии входное сопротивление равно нулю (эквивалент последовательного резонансного контура). Поэтому, как показано на рис. 7.4а–1, без нарушения распределений тока и напряжения эту линию на входе AB можно накоротко замкнуть. На практике это означает, что к отрезку подключен источник с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Распределение токов и напряжений не изменится, если линию удлинить на $\lambda/4$ и замкнуть на конце (рис. 7.4а–2), затем удлинить еще и оставить на конце (точки GH) разомкнутой (рис. 7.4а–3) и т. д. Этот процесс «наращивания» четвертьволновых отрезков можно продолжить, оставляя разомкнутым каждое нечетное звено и замыкая накоротко каждое четное. Все линии, образованные так, эквивалентны последовательному резонансному контуру. В реальной линии резонансное сопротивление зависит от активного сопротивления проводников и растет с увеличением длины.

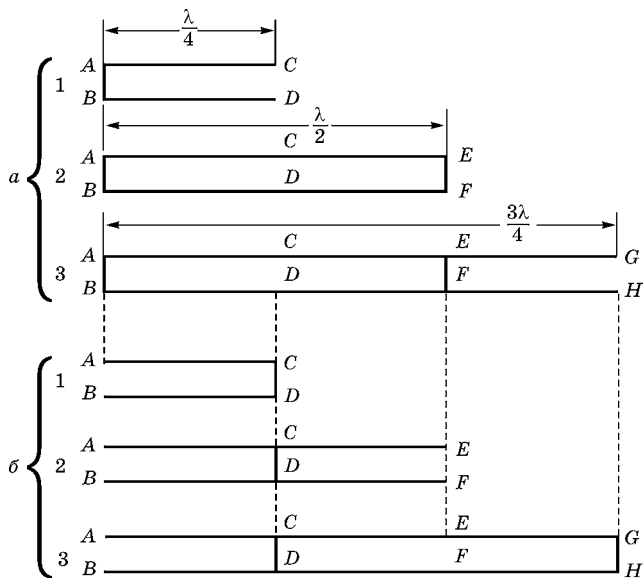


Рис. 7.4

Обратимся к четвертьволновому короткозамкнутому отрезку идеальной линии — аналогу параллельного резонансного контура. Если удлинять этот отрезок последовательно на четверть длины волны, оставляя разомкнутым четный четвертьволновой отрезок и замыкая коротко нечетный, можно получить систему линий, каждая из которых будет аналогом параллельного резонансного колебательного контура (рис. 7.4б). В реальной линии резонансное сопротивление должно уменьшаться с увеличением полной длины.

Из приведенных выше рассуждений следует, что анализ резонансного входного сопротивления линий можно свести к рассмотрению двух конфигураций, представленных на рис. 7.5: четвертьволновому отрезку, разомкнутому на конце (эквивалент последовательного резонансного контура, рис. 7.5а), и четвертьволновому отрезку, короткозамкнутому на конце (эквивалент параллельного резонансного контура, рис. 7.5б). На рис. 7.5 показано распределение напряжения U в линии.

Сравним некоторые свойства замкнутых колебательных контуров и колебательных систем, образованных отрезками длинных линий. Полный запас энергии колебательной системы можно определить как $1/2CU^2$, где емкость системы C заряжается до разности потенциалов. В случае замкнутой системы C — емкость контура, в случае длинной линии $C = C_0l$ — полная емкость системы, пропорциональная длине линии. В колебательном контуре трудно запасти большую энергию, поскольку величина емкости определяет собственные частотные характеристики контура.

В длинной линии погонная емкость и полная емкость системы не являются факторами, определяющими собственную волну линии. Кроме того, можно использовать резонансную линию на оберitone, т. е. линию в несколько четвертей длин волн, что позволит еще более увеличить заряжаемую емкость. Поэтому в коаксиальной линии можно запасти энергию на один-два порядка большую, чем в замкнутом контуре на той же резонансной частоте.

Резонансные линии могут обеспечивать также более высокое значение добротности по сравнению с замкнутыми колебательными контурами (примерно на порядок в случае коаксиальных линий). С повышением частоты это различие оказывает еще более заметным, поскольку добротность линии растет пропорционально корню квадратному из частоты.

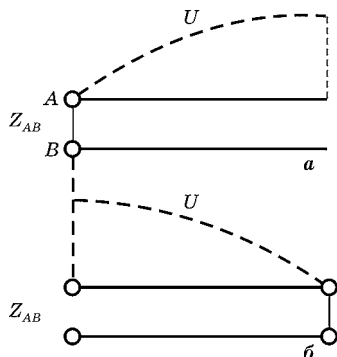


Рис. 7.5

Это следует из выражения для добротности $Q = \omega_0 Z_W / R_0 v$, полученного в примере 7.5, если учесть, что на высоких частотах $R_0 \sim \sqrt{\omega}$. Если же отрезок линии фиксированной длины возбуждать на различных резонансных частотах, то колебательный процесс для каждой из волн характеризуется своим значением добротности. Это справедливо по отношению к любым многочастотным колебательным системам.

7.6. НЕИСКАЖАЮЩАЯ ЛИНИЯ

При использовании линии для передачи информационных сигналов, имеющих форму, отличную от синусоидальной, необходимо обеспечить отсутствие искажений. Это достигается, если условие согласования выполнено для всех частот, входящих в спектр передаваемого сигнала.

Передача по напряжению согласованной линии определяется отношением

$$\frac{\hat{U}_l}{\hat{U}_i} = \exp\{-\gamma l\} = \exp\{-(\alpha + ik)l\},$$

где $\hat{U}_l$ — комплексное напряжение на нагрузке; $\hat{U}_i$ — комплексное входное напряжение. Отсюда следует, что передаваемый сигнал не искажается, если обеспечить частотную независимость коэффициента затухания, $\alpha = \text{const}$,

а также линейную зависимость от частоты коэффициента фазы, $kl = \frac{\omega}{v}l$. Эти условия могут быть выполнены, если параметры линии L_0, C_0, G_0, R_0 удовлетворяют соотношению

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}. \quad (7.26)$$

Как показано в примере 7.6, волновой импеданс линии в этом случае принимает вещественное значение

$$Z_0 = Z_W.$$

С учетом условия (7.26) преобразуем выражение для константы распространения, полученное в примере 7.4:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \sqrt{L_0 C_0} + i\omega \sqrt{L_0 C_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left(R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right) + i\omega \sqrt{L_0 C_0} = \\ &= \sqrt{R_0 G_0} + i\omega \sqrt{L_0 C_0}. \end{aligned}$$

Здесь $\sqrt{R_0 G_0} = \alpha$, $\omega \sqrt{L_0 C_0} = k$. Для линии, согласованной в частотной полосе сигнала, волновое сопротивление является вещественной величиной, а скорость распространения не зависит от частоты и равна $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

Таким образом, все условия, необходимые для передачи сигнала без искажений, выполнены. Линия, удовлетворяющая полученным соотношениям, называется *неискажающей*. На выходе такой линии, нагруженной на волновое сопротивление, формируется копия входного сигнала, уменьшенная в $e^{-\alpha l}$ раз с задержкой на время пробега вдоль линии $\tau = \frac{l}{v} = l \sqrt{L_0 C_0}$. Для линии без потерь

имеем $R_0 = 0, G_0 = 0, Z_W = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \alpha = 0$ и $k = \omega \sqrt{L_0 C_0}$. Неис-

кажающая идеальная линия передает сигнал с сохранением формы без уменьшения амплитуды.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7

1. Какими уравнениями описывается идеальная линия передач? Какие параметры характеризуют ее свойства?
2. В чем отличие идеальной и реальной линий передач?
3. Какими параметрами характеризуется изменение волн напряжения и тока на конце линии?
4. Что такое «согласованная нагрузка» линии передач?
5. Как определяется импеданс линии передач в произвольном сечении?
6. Объясните зависимость входного сопротивления идеальной линии передач от импеданса нагрузки.
7. Опишите свойства короткозамкнутой идеальной линии передач как колебательной системы.
8. Охарактеризуйте разомкнутую линию как колебательную систему.
9. Укажите способ определения волнового сопротивления линии передач.
10. Как осуществляется согласование линий передач, для которых известны волновые сопротивления?
11. Укажите способ согласования линии передач с нагрузкой, если известны волновое сопротивление линии и импеданс нагрузки.
12. Как определяется добротность резонансной линии передач?
13. В чем преимущество колебательной системы, образованной на базе резонансной линии передач, по сравнению с замкнутым колебательным контуром?
14. Опишите свойства неискажающей линии передач.

ЗАДАЧИ

7.1. Какие фильтрующие свойства будет иметь короткозамкнутая линия без потерь, если ее подсоединить к основной линии?

7.2. Показать, что линия без потерь длиной $l = n\lambda/2$ может быть использована для связи двух высокочастотных цепей.

7.3. Определить фильтрующее действие четвертьволнового отрезка разомкнутой линии без потерь, подсоединенной к основной линии.

7.4. Определить влияние короткозамкнутого четвертьволнового отрезка идеальной линии, подключенного к основной линии, на вторую гармонику сигнала.

ВОЛНЫ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

8.1. ИМПЕДАНС СРЕДЫ

Как показано в разд. 6.4, распространение колебательных процессов $A(t, x)$ в сплошной среде описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2},$$

где v — фазовая скорость. Для электромагнитных волн $v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$. Квадрат фазовой скорости механических волновых процессов в твердом теле определяется отношением упругости к плотности. Для поперечных волн

$$v^2 = \frac{\epsilon_l}{\rho}.$$

Здесь ϵ_T — модуль сдвига (в одномерной струне он равен натяжению T); ϵ_l — модуль Юнга; ρ — плотность.

Физическая среда, в которой распространяются волны, характеризуется импедансом или волновым сопротивлением. В отсутствие потерь импеданс (*волновое сопротивление*) зависит от параметров, описывающих накопление энергии в среде. В случае механических волновых процессов это упругость и плотность, определяющая инерционные свойства, а для электромагнитных волн — это диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Импеданс среды для механических волн (например, акустических) равен произведению плотности среды на фазовую скорость

$$z = \rho v.$$

Знак импеданса определяется знаком скорости.

Для электромагнитных волн импеданс среды без потерь является действительной величиной и определяется как произведение магнитной проницаемости на фазовую скорость или как корень квадратный из отношения магнитной или электрической проницаемостей

$$z = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

При наличии потерь в выражении для импеданса среды появляется мнимый член.

8.2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Рассмотрим поведение волн на границе двух сред с импедансами z_1 и z_2 (рис. 8.1).

Здесь A_1 и B_1 — соответственно амплитуды нормально падающей на плоскость раздела и отраженной волн в первой среде, A_2 — амплитуда волны, прошедшей во вторую среду. Найдем амплитудные коэффициенты отражения (B_1/A_1) и прохождения (A_2/A_1) волн. Для этого воспользуемся граничными условиями, которые должны выполняться в плоскости скачка импеданса ($x = 0$).

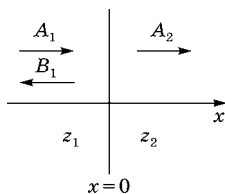


Рис. 8.1

1. *Геометрическое условие.* В любой момент времени смещения справа и слева в непосредственной близости от границы ($x = 0$) одинаковы (на границе раздела сред отсутствует скачок смещения):

$$A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} = A_2 e^{j(\omega t - k_2 x)}.$$

В плоскости раздела ($x = 0$)

$$A_1 + B_1 = A_2. \quad (8.1)$$

2. *Динамическое условие* определяется законом сохранения импульса на границе двух сред:

$$p_{A_1} + p_{B_1} = p_{A_2}. \quad (8.2)$$

Импульс падающей волны

$$p_{A_1} = \rho_1 v_1 A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} \Big|_{x=0} = \rho_1 v_1 A_1 e^{j\omega t} = z_1 A_1 e^{j\omega t}.$$

Импульс отраженной волны

$$P_{B_1} = -\rho_1 v_1 B_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \Big|_{x=0} = -z_1 B_1 e^{j\omega t}.$$

Импульс прошедшей волны

$$P_{A_2} = \rho_2 v_2 A_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} \Big|_{x=0} = z_2 A_2 e^{j\omega t}.$$

После подстановки в (8.2) и сокращения экспоненциального множителя получаем

$$z_1(A_1 - B_1) = z_2 A_2. \quad (8.3)$$

Из (8.1) и (8.3) после деления на амплитуду падающей волны приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 1 + \frac{B_1}{A_1} = \frac{A_2}{A_1}; \\ 1 - \frac{B_1}{A_1} = \frac{z_2}{z_1} \frac{A_2}{A_1}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно (B_1/A_1) и (A_2/A_1) , находим амплитудный коэффициент отражения

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \quad (8.4)$$

и амплитудный коэффициент прохождения

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}. \quad (8.5)$$

Из (8.4) следует, что смещения в падающей и отраженной волнах при $z_2 < z_1$ находятся в фазе, а при $z_2 > z_1$ — в противофазе.

Если $z_2 \gg z_1$, падающая волна полностью отражается с обращением фазы, а прошедшая волна отсутствует

$$\frac{B_1}{A_1} = -1; \quad \frac{A_2}{A_1} = 0.$$

Если $z_2 = 0$, коэффициенты отражения и прохождения принимают значения

$$\frac{B_1}{A_1} = 1; \quad \frac{A_2}{A_1} = 2.$$

Отраженная волна оказывается в фазе с падающей и имеет одинаковую к ней амплитуду, а амплитуда прошедшей волны равна удвоенной амплитуде падающей.

8.3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЭНЕРГИИ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Поток энергии, падающий на границу двух сред (см. рис. 8.1), определяется произведением энергии волны $E_i = \frac{1}{2}\rho_1\omega^2 A_1^2$ на скорость v_1 :

$$P_i = \frac{1}{2}\rho_1 v_1 \omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2}z_1 \omega^2 A_1^2.$$

Для суммы потоков энергий отраженной и прошедшей волн имеем, с учетом (8.4) и (8.5):

$$\begin{aligned} P_r + P_t &= \frac{1}{2}\rho_1 v_1 \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2 \omega^2 A_2^2 = \frac{1}{2}z_1 \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2}z_2 \omega^2 A_2^2 = \\ &= \frac{1}{2}z_1 \omega^2 A_1^2 \left(\frac{B_1^2}{A_1^2} + \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2}z_1 \omega^2 A_1^2 \left[\frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} + \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{(2z_1)^2}{(z_1 + z_2)^2} \right] = \frac{1}{2}z_1 \omega^2 A_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно, поток энергии падающей волны равен сумме потоков энергии отраженной и прошедшей волн. Этот вывод можно было сделать непосредственно из закона сохранения энергии.

Энергетический коэффициент отражения с учетом (8.4) и (8.5) равен

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{z_1 B_1^2}{z_1 A_1^2} = \frac{B_1^2}{A_1^2} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2. \quad (8.6)$$

Энергетический коэффициент прохождения

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{z_2 A_2^2}{z_1 A_1^2} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}. \quad (8.7)$$

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{P_r}{P_i} + \frac{P_t}{P_i} = 1.$$

При $z_1 = z_2$ энергия не отражается. Это означает, что импедансы согласованы.

8.4. СОГЛАСОВАНИЕ ИМПЕДАНСОВ

Рассмотрим ситуацию, представленную на рис. 8.2.

Имеются три среды с плоскими границами раздела, $x = 0$ и $x = l$, и импедансами z_1 , z_2 и z_3 . В первой среде распространяется волна с амплитудой A_1 , нормально падающая на границу раздела $x = 0$, и отраженная волна с амплитудой B_1 . Во второй среде распространяется прошедшая через первую границу раздела волна с амплитудой A_2 и отраженная от второй границы раздела волна с амплитудой B_2 . В третьей среде распространяется волна с амплитудой A_3 , прошедшая через плоскость раздела $x = l$.

Определим, какими должны быть параметры промежуточной среды (z_2 , l), чтобы исключить отраженную волну в первой среде и всю энергию падающей волны направить в среду с импедансом z_3 . Запишем геометрические и динамические краевые условия для границ раздела в плоскостях $x = 0$ и $x = l$:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2; \\ z_1(A_1 - B_1) = z_2(A_2 - B_2); \\ A_2 e^{-ik_2 l} + B_2 e^{ik_2 l} = A_3 e^{-ik_2 l}; \\ z_2(A_2 e^{-ik_2 l} - B_2 e^{ik_2 l}) = z_3 A_3 e^{-ik_2 l}. \end{cases}$$

Выберем толщину слоя второй среды $l = \lambda/4$. Тогда $e^{\pm ik_2 \frac{\lambda}{4}} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i$. После подстановки система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2; \\ z_1(A_1 - B_1) = z_2(A_2 - B_2); \\ A_2 - B_2 = A_3; \\ z_2(A_2 + B_2) = z_3 A_3. \end{cases}$$

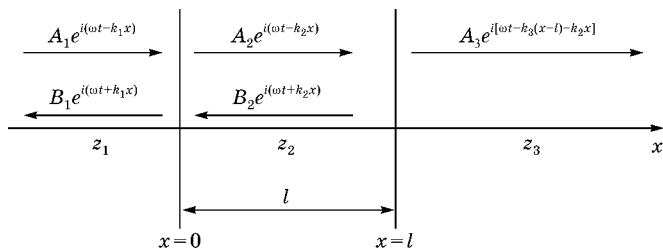


Рис. 8.2

Подставляя $A_2 + B_2$ из первого уравнения в четвертое и $A_2 - B_2$ из второго уравнения в третье, получаем

$$\begin{cases} \frac{z_1}{z_2}(A_1 - B_1) = A_3; \\ z_2(A_1 + B_1) = z_3 A_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (A_1 - B_1) = \frac{z_2}{z_1} A_3; \\ (A_1 + B_1) = \frac{z_3}{z_2} A_3. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, находим

$$2A_1 = \left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) A_3.$$

Отсюда

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2z_1 z_2}{z_2^2 + z_1 z_3}.$$

Это амплитудный коэффициент пропускания.

Запишем выражение для энергетического коэффициента пропускания

$$\frac{z_3 A_3^2}{z_1 A_1^2} = \frac{z_3 4z_1^2 z_2^2}{z_1 (z_2^2 + z_1 z_3)^2} = \frac{4z_3 z_1 z_2^2}{(z_2^2 + z_1 z_3)^2}.$$

Учитывая условие согласования $\frac{z_3 A_3^2}{z_1 A_1^2} = 1$, получаем

$$\frac{4z_3 z_1 z_2^2}{(z_2^2 + z_1 z_3)^2} = 1,$$

или

$$4z_3z_1z_2^2 = (z_2^2 + z_1z_3)^2.$$

Отсюда

$$(z_2^2 - z_1z_3)^2 = 0 \text{ и } z_2 = \sqrt{z_1z_3}.$$

Таким образом, согласование сред с импедансами z_1 и z_3 достигается, если между ними ввести четвертьволновой слой согласующей среды с импедансом z_2 , равным среднему геометрическому импедансов согласуемых сред. Из сравнения с материалом, изложенным в разд. 7.5, следует аналогия с согласованием длинных линий.

8.5. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Пусть в пространстве в направлении оси z распространяется плоская волна $E(t, z, \omega) = E_0 \exp(-i\varphi)$, где $\varphi = \omega t - kz$. Скорость волны можно определить как скорость движения ее фазового фронта. Для наблюдателя, движущегося с такой скоростью, $\varphi = \text{const}$, это означает, что $d\varphi/dt = 0$, или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

По определению для гармонической волны $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -k$. Следовательно

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0.$$

Откуда для фазовой скорости v получаем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Однако плоская волна — идеализация, поскольку она однородна в пространстве ($-\infty < z < \infty$) и времени ($-\infty < t < \infty$), не имея ни начала, ни конца. Такие волны в природе не могут существовать, и передать сигнал с помощью плоской волны, бесконечно протяженной во времени и пространстве, нельзя. Всякий реальный волновой процесс имеет начало и конец, что должно отразиться на скорости его распространения.

Предположим, что в направлении оси z распространяется волновой процесс $E(t, z)$, спектральная плотность которого

$$E(\omega, z) = E(\omega) \exp(ikz).$$

Волновой процесс $E(t, z)$ и спектральная плотность $E(\omega, z)$ связаны преобразованием Фурье

$$\begin{aligned} E(t, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \exp\{i\omega t\} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp\{i(\omega t - kz)\} d\omega. \end{aligned} \quad (8.8)$$

В однородной бездисперсной среде волновое число k связано с частотой ω и скоростью распространения соотношением

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда среда обладает дисперсией. В этом случае частотная зависимость волнового числа $k(\omega)$ отличается от прямой пропорциональности. Разложим функцию $k(\omega)$ в окрестности частоты ω_0 в ряд. Полагая $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, ограничимся в разложении членами первого порядка малости

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)\Delta\omega, \quad (8.9)$$

где $k'_{\omega}(\omega_0) = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$. После подстановки (8.9) в (8.8) получаем

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \exp\{-i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]\} \times \\ &\times \int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\Delta\omega) \exp\{-i\Delta\omega[t - k'_{\omega}(\omega_0)z]\} d(\Delta\omega). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь $[\omega_1, \omega_2]$ — частотная полоса спектра. При подстановке в интеграл сделана замена переменной интегрирования $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. По определению обратного Фурье-преобразования выражение (8.10) можно записать в виде

$$E(z, t) = E[t - k'_{\omega}(\omega_0)z] \exp\{-i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]\}. \quad (8.11)$$

Из (8.11) следует, что волновой процесс в диспергирующей среде можно представить произведением двух сомножителей, один из которых, $\exp\{-i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]\}$, характеризует быстро осциллирующую волну, распространяющуюся с фазовой скоростью $v = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$. Другой множитель,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\Delta\omega) \exp\{-i\Delta\omega[t - k'_\omega(\omega_0)z]\} d(\Delta\omega) = E[t - k'_\omega(\omega_0)z],$$

описывает огибающую, которая медленно меняется. Скорость ее определяется из условия

$$\frac{d}{dt}[t - k'_\omega(\omega_0)z] = 0$$

или

$$1 - k'_\omega(\omega_0)v_g = 0,$$

где $v_g = \frac{dz}{dt}$. Отсюда для групповой скорости получаем

$$v_g = \frac{1}{k'_\omega(\omega_0)} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Выполним разложение (8.9) с точностью до второго порядка малости

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'_\omega(\omega_0)\Delta\omega + \frac{1}{2}k''_\omega(\omega_0)(\Delta\omega)^2,$$

где $k''_\omega(\omega_0) = \left. \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$. Для того чтобы можно было пренебречь в фазе волнового процесса (8.10) членом второго порядка, $\frac{1}{2}k''_\omega(\omega_0)(\Delta\omega)^2 z$, должно выполняться условие

$$\frac{1}{2}k''_\omega(\omega_0)(\Delta\omega)^2 z_0 \ll \pi.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{(\Delta\omega)^2 z_0}{2\pi(dv_g/dk)|_{\omega=\omega_0}} \ll 1. \quad (8.12)$$

Здесь z_0 — характерный масштаб, для которого справедливо приближение (8.12). Этот масштаб тем больше, чем больше $(dv_g/dk)|_{\omega=\omega_0}$ и чем меньше ширина спектра. Таким

образом, групповая скорость характеризует распространение волнового пакета в диспергирующей среде на расстояниях порядка z_0 , когда пакет сохраняет свою форму и размеры. Другими словами, групповая скорость определяется как скорость распространения огибающей волнового процесса с сохранением формы и размеров. Отсюда выражение (8.11) для волнового пакета может быть записано в виде

$$E(z, t) = E(v_g t - z) \exp\{-i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]\}.$$

При трансформации волнового пакета в гармоническую волну $\Delta\omega \rightarrow 0$, $z_0 \rightarrow \infty$ и $v_g \rightarrow v$. В случае когда связь k и ω в дисперсионном уравнении линейная, групповая и фазовая скорости совпадают

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv) = v$$

и волновой пакет распространяется как монохроматическая волна, т. е. дисперсия в среде отсутствует. Поэтому линейная связь k и ω в дисперсионном уравнении характеризует среду без дисперсии.

Поскольку частота волны ω определяется как произведение фазовой скорости на волновой вектор, $\omega = vk$ и $k = 2\pi/\lambda$, из определения групповой скорости можно получить формулу Рэлея:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (8.13)$$

Отсюда видно, что групповая скорость может быть как положительной, так и отрицательной, как больше фазовой, так и меньше. По зависимости $v(\lambda)$, как это следует из (8.13), групповая скорость определяется как пересечение с осью v касательной к кривой $v(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_i$, где λ_i — заданная длина волны (рис. 8.3). Отрезок, отсекаемый на оси v касательной к кривой $v(\lambda)$ в точке λ_i , равен

$$v(\lambda_i) - \lambda \left. \frac{dv}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i}.$$

Этот способ был предложен Эренфестом.

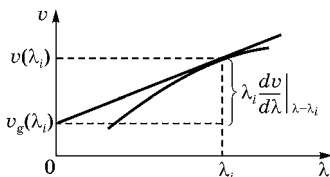


Рис. 8.3

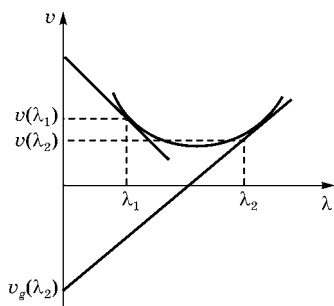


Рис. 8.4

На рис. 8.4 групповые скорости в точках λ_1 и λ_2 отличаются по знаку.

Рассмотрим понятие групповой скорости с несколько более общих позиций для волны вида $E(z, t)\exp[ij(z, t)]$, модулированной и по амплитуде, и по частоте. Частота ω определяется в случае узкополосного спектра производной фазы по времени:

$$\omega(z, t) = \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t}.$$

Пространственную частоту (волновое число) находим как производную фазы по пространственной координате

$$k(z, t) = -\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0. \quad (8.14)$$

Пусть k и ω связаны дисперсионным уравнением $\omega = \omega(k)$. Тогда с учетом дисперсионного уравнения (8.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \frac{\partial k}{\partial z} = 0. \quad (8.15)$$

Из (8.15) следует определение групповой скорости v_g как скорости распространения возмущений волнового числа k .

Если воспользоваться дисперсионным уравнением в виде $k = k(\omega)$, выражение (8.15) можно привести к форме

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_g \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Отсюда групповая скорость определяется как скорость распространения частотного возмущения. Скорость распространения энергии в среде вводится как отношение

средней плотности потока энергии к средней плотности энергии. В случае когда в среде нет поглощения и нет вращения плоскости поляризации, для узкополосного волнового процесса скорость распространения энергии совпадает с групповой скоростью.

8.6. LC-МОДЕЛИ ДИСПЕРСИОННЫХ СРЕД

Для учета дисперсии при распространении волновых процессов требуется адекватный выбор модели среды. Дисперсионные модели различных сред хорошо отображаются эквивалентными схемами из LC-цепочек. Пример такой обобщенной схемы показан на рис. 8.5, где $Z_0(\omega)$ — погонное сопротивление, $G_0(\omega)$ — шунтирующая погонная проводимость. Будем исходить из телеграфных уравнений (7.5):

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}.$$

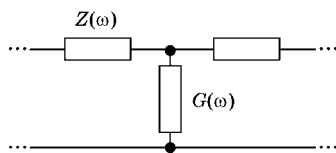


Рис. 8.5

Найдем дисперсионное уравнение для обобщенной цепочки, показанной на рис. 8.5. Пусть $I = \hat{I} \exp(i\omega t)$, $U = \hat{U} \exp(i\omega t)$, где $\hat{I}$ и $\hat{U}$ — комплексные амплитуды. После подстановки в телеграфные уравнения получим для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} = -G(\omega) \hat{U}; \\ \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = -Z(\omega) \hat{I}. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \hat{I} &= I_0 \exp(-ikx); \\ \hat{U} &= U_0 \exp(-kx). \end{aligned}$$

Подставляя в телеграфные уравнения и выполняя очевидные преобразования, находим дисперсионное уравнение

$$k^2 = -G_0(\omega)Z_0(\omega). \quad (8.16)$$

Конкретный вид $G_0(\omega)$ и $Z(\omega)$ определяется уравнениями связи.

Рассмотрим различные примеры, основываясь на дисперсионном уравнении (8.16).

Среда без дисперсии (рис. 8.6).

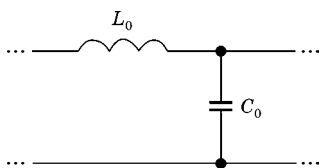


Рис. 8.6

$$G(\omega) = i\omega C_0; \quad Z(\omega) = i\omega L_0.$$

Подстановка в (8.16) дает

$$\omega^2 = \frac{k^2}{L_0 C_0}.$$

Поскольку $\frac{1}{L_0 C_0} = v^2$,

$$\omega^2 = v^2 k^2 \text{ и } \omega = vk.$$

Из дисперсионного уравнения следует, что распространение сигнала описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Соответствующая дисперсионная характеристика приведена на рис. 6.10. Такая модель описывает распространение электрических волн в идеальных линиях передачи, электромагнитных волн в вакууме, звуковых волн в чистой воде, низкочастотных акустических волн в твердом теле и др.

Среда с дисперсией в области низких частот. Примером может служить модель эквивалентной среды, показанная на рис. 8.7.

Механическим аналогом при $\lambda \gg b$ является цепочка осцилляторов, представленная на рис. 6.9. Распространение волны в такой модели описывается линейным дифференциальным уравнением Клейна–Гордона, а соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид (6.42):

$$\omega^2 = \tilde{\omega}_0^2 + v^2 k^2,$$

где

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}; \quad \tilde{\omega}_0^2 = \frac{1}{L_1 C_0}.$$

Дисперсионная характеристика представлена на рис. 6.11. Такая модель среды адекватно описывает распростра-

нение электромагнитных волн в плазме (при этом частота $\tilde{\omega}_0^2$ является плазменной частотой ω_p), волноводе, акустических волн в двухфазной жидкости и др.

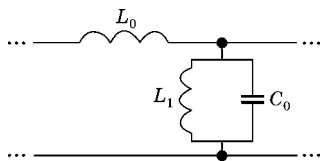


Рис. 8.7

Среда с дисперсией в области высоких частот. Примером может служить модель длинной линии, элементарная ячейка которой показана на рис. 8.8.

Для нахождения дисперсионного уравнения этой среды найдем $G_0(\omega)$ и $Z_0(\omega)$:

$$G_0(\omega) = i\omega C_0;$$

$$Z_0(\omega) = \frac{i\omega L_0}{i\omega C_1 \left(i\omega L_0 + \frac{1}{i\omega C_1} \right)} = \frac{i\omega L_0}{1 - \omega^2 L_0 C_1}.$$

Подстановка $G_0(\omega)$ и $Z_0(\omega)$ в (8.16) дает

$$k^2 = \frac{\omega^2 C_0 L_0}{1 - \omega^2 L_0 C_1}.$$

После элементарных преобразований получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega^2 = \frac{k^2 \tilde{\omega}_0^2}{k^2 + k_0^2}, \text{ где } \tilde{\omega}_0^2 = \frac{1}{L_0 C_1}, \quad k_0^2 = \frac{C_0}{C_1}.$$

Соответствующая дисперсионная кривая показана на рис. 8.9. Такая модель описывает распространение ультразвуковых волн в твердом теле.

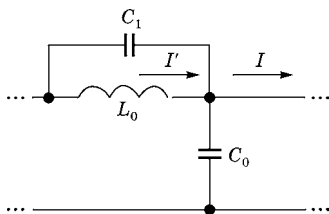


Рис. 8.8

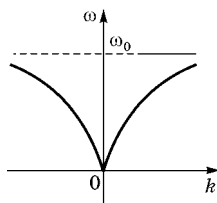


Рис. 8.9

8.7. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Обратимся к рис. 8.10. На этом рисунке в системе отсчета O показаны источник гармонического волнового излучения i и наблюдатель P , регистрирующий волновое поле. Положение источника i и наблюдателя P определяется соответственно радиус-векторами $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{R}_P$. Пусть источник движется со скоростью $\mathbf{v}_i$. Тогда радиус-вектор, определяющий положение источника, будет $\mathbf{R}_i + \mathbf{v}_i t$. Представим поле, излучаемое источником в направлении наблюдателя, в виде плоской волны, частота которой ω и волновой вектор $\mathbf{k}_i$. Физическая природа поля здесь не конкретизируется. Это может быть, например, акустическая волна, волна на поверхности жидкости, электромагнитная волна и др.

Поле, регистрируемое наблюдателем, описывается плоской волной, в которой учитывается изменение фазы за счет прохождения расстояния $\mathbf{R}_P - (\mathbf{R}_i + \mathbf{v}_i t)$ между наблюдателем и источником:

$$E_P(\mathbf{v}_i) = A \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_i - \mathbf{v}_i t)]\}.$$

Преобразуем показатель компоненты, сгруппировав члены, зависящие от t :

$$E_P(\mathbf{v}_i) = A \exp\{i[(\omega + \mathbf{k}_i \mathbf{v}_i)t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_i)]\}. \quad (8.17)$$

Из (8.17) видно, что частота поля в системе отсчета наблюдателя P отличается от частоты поля источника на величину

$$\omega_D(\mathbf{v}_i) = \mathbf{k}_i \mathbf{v}_i. \quad (8.18)$$

Это изменение частоты является *доплеровским частотным сдвигом*. Доплеровский сдвиг частоты в ситуации, когда источник движется, а наблюдатель неподвижен, равен скалярному произведению волнового вектора $\mathbf{k}_i$ на вектор скорости движения источника $\mathbf{v}_i$.

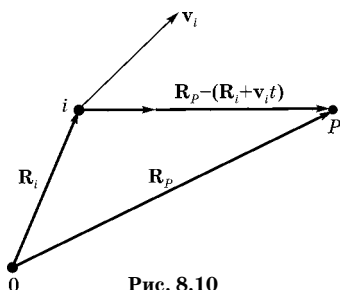


Рис. 8.10

Рассмотрим другой случай, когда источник неподвижен, а наблюдатель движется со скоростью $\mathbf{v}_P$ (рис. 8.11).

Источник излучает гармоническую волну, частота которой ω , а волновой вектор в направлении наблюдателя равен $\mathbf{k}_i$. Волна, регистрируемая наблюдателем, находящимся от источника на расстоянии $(\mathbf{R}_P + \mathbf{v}_P t) - \mathbf{R}_i$, описывается выражением

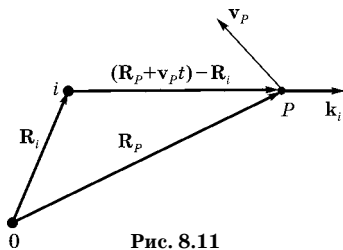


Рис. 8.11

$$E_P(\mathbf{v}_i) = A \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P + \mathbf{v}_P t - \mathbf{R}_i)]\}.$$

После перегруппировки членов в показателе экспоненты получаем

$$E_P(\mathbf{v}_i) = A \exp\{i[(\omega - \mathbf{k}_i \mathbf{v}_P)t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_i)]\}. \quad (8.19)$$

Отсюда находим для частоты поля, регистрируемого наблюдателем:

$$\omega_P(\mathbf{v}_P) = \omega - \mathbf{k}_i \mathbf{v}_P.$$

Эта частота отличается от частоты поля источника на величину доплеровского сдвига, равного скалярному произведению волнового вектора $\mathbf{k}_i$ на вектор скорости движения наблюдателя $\mathbf{v}_P$:

$$\omega_D(\mathbf{v}_P) = \mathbf{k}_i \mathbf{v}_P. \quad (8.20)$$

Обратимся теперь к ситуации, показанной на рис. 8.12, когда в системе отсчета 0 источник движется со скоростью $\mathbf{v}_i$, а наблюдатель движется со скоростью $\mathbf{v}_P$. Источник излучает гармоническую волну, частота которой ω , а волновой вектор в направлении наблюдателя $\mathbf{k}_i$. Обозначения те же, что и на рис. 8.10 и 8.11. Запишем выражения для плоской

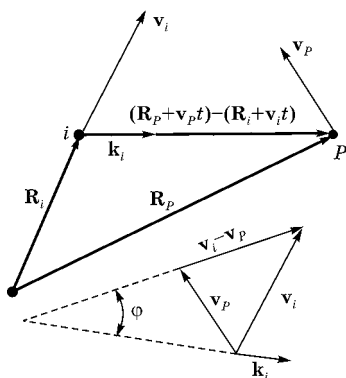


Рис. 8.12

волны, регистрируемой наблюдателем, учитывая, что расстояние между ним и источником определяется как $(\mathbf{R}_P + \mathbf{v}_P t) - (\mathbf{R}_i + \mathbf{v}_i t)$:

$$E_P(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_P) = A \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P + \mathbf{v}_P t - \mathbf{R}_i - \mathbf{v}_i t)]\}. \quad (8.21)$$

После перегруппировки аргумента в (8.21) получаем

$$E_P(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_P) = A \exp\{i[(\omega + \omega_D t) - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_i)]\},$$

где ω_D — доплеровский сдвиг частоты:

$$\omega_D = \mathbf{k}_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_P). \quad (8.22)$$

Как следует из (8.22), доплеровский частотный сдвиг равен скалярному произведению волнового вектора на разность векторов скоростей источника и наблюдателя $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_P$. Здесь речь идет о круговых частотах. Если перейти к частотам, выражение (8.22) принимает вид

$$\nu_D = \frac{1}{2\pi} \mathbf{k}_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_P) = \frac{1}{\lambda} |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_P| \cos \varphi. \quad (8.23)$$

Согласно (8.23), доплеровский сдвиг циклической частоты $\nu_D = \omega_D/2\pi$ определяется как отношение модуля относительной скорости источника и наблюдателя к длине волны, умноженное на косинус угла между направлением волнового вектора $\mathbf{k}_i$ и вектора относительной скорости источника и наблюдателя $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_P$ (врезка на рис. 8.12).

Рассмотрим случай, когда волна от источника направляется на движущийся объект, рассеянное излучение от которого регистрируется наблюдателем, покоящимся относительно источника в лабораторной системе координат.

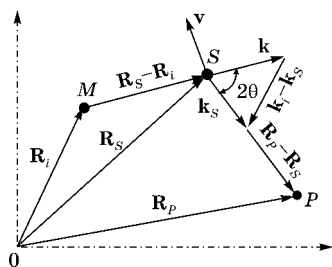


Рис. 8.13

В сравнении с расстоянием до источника и наблюдателя этот объект будем считать малым, точечным. Назовем его условно рассеивающей частицей. Этот случай представлен на рис. 8.13, где $\mathbf{R}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение

ние точечного источника светового излучения; $\mathbf{R}_s$ — радиус-вектор рассеивающей частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$; $\mathbf{R}_p$ — радиус-вектор наблюдателя.

На частице S рассеивается падающая световая волна с волновым вектором $\mathbf{k}_i$. В рассеянном частицей поле волна с волновым вектором $\mathbf{k}_s$ распространяется по направлению к наблюдателю, расположенному в точке P , где и регистрируется. Для волны, падающей на частицу, запишем выражение

$$\begin{aligned} E_i &= A \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_s + \mathbf{v}t - \mathbf{R}_i)]\} = \\ &= A \exp\{i[(\omega - \mathbf{k}_i\mathbf{v})t - \mathbf{k}_i(\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_i)]\}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Эта волна рассеивается частицей в направлении $\mathbf{k}_s$. Рассеянная плоская волна с волновым вектором $\mathbf{k}_s$ может быть представлена в виде

$$E_s = s E_i \exp\{-i\mathbf{k}_s(\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s - \mathbf{v}t)\},$$

где s — коэффициент рассеяния. Подставляя в это выражение E_i из (8.24), получаем

$$E_s = s A \exp\{i[(\omega - \omega_D)t + (\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)\mathbf{R}_s + \mathbf{k}_i\mathbf{R}_i - \mathbf{k}_s\mathbf{R}_p]\}.$$

Здесь ω_D — доплеровский сдвиг частоты в волне, рассеянной частицей в направлении наблюдателя

$$\omega_D = \mathbf{v}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i). \quad (8.25)$$

Как следует из (8.25), доплеровский сдвиг частоты в рассеянной волне в системе отсчета наблюдателя равен скалярному произведению вектора скорости рассеивающей частицы и разности волновых векторов падающей и рассеянной волн. Это означает, что доплеровский сдвиг частоты ω_D пропорционален проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на вектор, равный разности волновых векторов падающей и рассеянной волн. Измеряя доплеровский сдвиг частоты, можно определить проекцию вектора скорости частиц на направление, задаваемое разностным волновым вектором

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i.$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что частица в процессе рассеяния проявляет себя одновременно

как движущийся приемник (чему соответствует компонента доплеровского сдвига $\mathbf{k}\mathbf{v}_i$) и как движущийся источник (доплеровская частотная компонента $\mathbf{k}_s\mathbf{v}$).

Если скорость частицы удовлетворяет условию $\omega_D/\omega_0 \ll 1$ (ω_0 — частота волны), что обычно реализуется на практике, то можно принять, что $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_s| = k$. Пусть в выбранной конфигурации (см. рис. 8.13) угол между волновыми векторами $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_i$ равен 2θ . Тогда для модуля разности волновых векторов имеем $|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i| = 2k\sin\theta$. Отсюда, согласно (8.25), получаем

$$\omega_D = 2kv\sin\theta\cos\varphi,$$

где φ — угол между направлением вектора скорости $\mathbf{v}$ и направлением разностного вектора $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$. Вектор $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ задает в пространстве ось координатно-измерительного базиса. Регистрируемый доплеровский сдвиг частоты (8.25) пропорционален проекции вектора скорости рассеивающей частоты на эту ось.

ПРИМЕР 8.1

Частица s движется в области пересечения двух лазерных пучков с волновыми векторами $\mathbf{k}_{i1}$ и $\mathbf{k}_{i2}$ (рис. 8.14). Скорость частицы $\mathbf{v}$, $v/c \ll 1$. Найти разность доплеровских сдвигов частоты в световых полях, рассеянных частицей от первого и второго падающих пучков в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_s$.

Решение.

Доплеровский сдвиг частоты в световой волне, рассеянной частицей от первого лазерного пучка:

$$\omega_{D1} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_{i1}).$$

Доплеровский сдвиг частоты в световой волне, рассеянной частицей от второго лазерного пучка, согласно (8.25):

$$\omega_{D2} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_{i2}).$$

Разность ω_0 доплеровских сдвигов частоты в световых

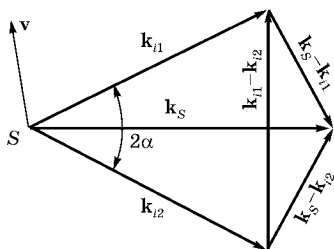


Рис. 8.14

полях, рассеянных частицей от первого и второго лазерных пучков:

$$\omega_D = \omega_{D_1} - \omega_{D_2} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_{i1}) - \mathbf{v}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_{i2}) = \mathbf{v}(\mathbf{k}_{i1} - \mathbf{k}_{i2}). \quad (8.26)$$

Здесь мы учли, что при $v/c \ll 1$ $\mathbf{k}_{s1} \approx \mathbf{k}_{s2} \approx \mathbf{k}_s$, поскольку

$$\mathbf{k}_{si} = \frac{\omega_i}{c} \approx \frac{\omega_0 + \omega_{Di}}{c} \approx k + \frac{\omega_{Di}}{c} \approx k + \frac{kv}{c} \approx k \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx k.$$

Ось координатно-измерительного базиса, согласно (8.26), задается разностью волновых векторов падающих пучков и не зависит от параметров рассеянного поля. Доплеровский частотный сдвиг ω_D пропорционален проекции вектора скорости на направление этой оси и не зависит от геометрии рассеянного пучка.

ПРИМЕР 8.2

Лазерный пучок с волновым вектором $\mathbf{k}_i$ рассеивается на частице, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, $v/c \ll 1$. Найти разность доплеровских сдвигов частоты для световых волн, рассеянных в направлении волновых векторов $\mathbf{k}_{s1}$ и $\mathbf{k}_{s2}$ (рис. 8.15).

Р е ш е н и е.

Доплеровский сдвиг частоты в световой волне с волновым вектором $\mathbf{k}_{s1}$

$$\omega_{D_1} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_{s1} - \mathbf{k}_i).$$

Доплеровский сдвиг частоты в световой волне с волновым вектором $\mathbf{k}_{s2}$

$$\omega_{D_2} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_{s2} - \mathbf{k}_i).$$

Разность доплеровских сдвигов частот в световых волнах, рассеянных в направлениях $\mathbf{k}_{s1}$ и $\mathbf{k}_{s2}$:

$$\begin{aligned} \omega_{D_1} - \omega_{D_2} &= \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{k}_{s1} - \mathbf{k}_i) - \mathbf{v}(\mathbf{k}_{s2} - \mathbf{k}_i) = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{k}_{s1} - \mathbf{k}_{s2}). \end{aligned}$$

(8.27)

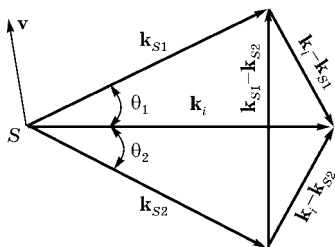


Рис. 8.15

Разность доплеровских сдвигов частот (8.27) пропорциональна проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на разность волновых векторов рассеянных пучков и не зависит от геометрии падающего пучка. Ось координатно-измерительного базиса задается разностью волновых векторов рассеянных пучков.

Ситуации, представленные на рис. 8.13–8.15, и формулы (8.25), (8.26) и (8.27) являются базовыми для построения различных типов доплеровских лазерных, акустических и радиолокаторов.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 8

1. Что такое импеданс среды?
2. Как определяются геометрические и динамические граничные условия при прохождении нормально падающей волны через плоскость скачка импеданса?
3. Поясните преобразование потока энергии волны, нормально падающей на плоскую границу раздела двух сред.
4. В чем состоит аналогия согласования импедансов двух сред с согласованием линий передачи?
5. Поясните физическую природу дисперсионных явлений при распространении волн в дискретных и сплошных средах?
6. Какие определения групповой скорости вы знаете?
7. Могут ли различаться фазовая и групповая скорости по знаку?
8. Может ли групповая скорость превышать фазовую?
9. В чем состоит эффект Доплера?

ЗАДАЧИ

8.1. В разд. 2.7 получено выражение (2.25) для диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon = \frac{c}{v} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где c — скорость света; v — фазовая скорость; ω_p — плазменная частота.

Написать дисперсионное уравнение.

8.2. Свет из свободного пространства падает на стеклянную призму, показатель преломления которой $n = 1,5$. На поверхность призмы нанесено просветляющее покрытие. Найти показатель преломления и толщину покрытия,

устраняющего отражение, если длина световой волны в свободном пространстве $\lambda = 0,52$ мкм. Связь импеданса z и показателя преломления для диэлектрика n определяется формулой $z = 1/n$.

8.3. Найти зависимость между групповой скоростью v_g и фазовой v для следующих дисперсионных законов:

$$1) v = \frac{a}{\sqrt{\lambda}};$$

$$2) v = bk;$$

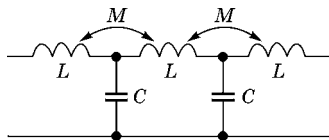
$$3) v = \frac{c}{\omega^2}.$$

Здесь a , b и c — постоянные.

8.4. Волновое возмущение образовано суперпозицией двух гармонических волн $\sin(\omega t - kx)$ и $\sin(\omega' t - k'x)$. Определить групповую скорость.

8.5. Плоское волновое возмущение распространяется в среде с законом дисперсии $v = a + b\lambda^2$, где v — фазовая скорость, a и b — постоянные. Найти групповую скорость.

8.6. Показать, что в приведенной на рисунке длинной линии с индуктивной связью между ячейками дисперсионная характеристика имеет вид, аналогичный характеристике, показанной на рис. 6.11.



8.7. Источник излучает волновое поле, которое рассеивается движущимся объектом. Частота рассеянного поля регистрируется в системе отсчета источника. Написать выражение для доплеровского сдвига частоты в рассеянном поле.

8.8. Дать численную оценку доплеровского сдвига частоты в задаче 8.7, если объект движется со скоростью 2 м/с в направлении источника лазерного излучения с длиной волны 0,5 мкм.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Распространение электромагнитных волн в среде подчиняется общим закономерностям волновых процессов. Мы видим, что скорость распространения волн зависит от среды и ее упругости. Они же характеризуют способность среды запасать и преобразовывать энергию. «Магнитная инерция» среды, как и в случае линии передачи, связана с индуктивными свойствами и характеризуется магнитной проницаемостью. Таким образом, накопление магнитной энергии (*инерция*) обусловлено магнитной проницаемостью μ , а накопление потенциальной энергии (*упругость*), или энергии электрического поля, обусловлено диэлектрической проницаемостью ϵ . В случае когда среда, наряду с μ и ϵ , характеризуется проводимостью σ , происходит диссипация энергии.

Состояние электромагнитного поля в среде описывается уравнением Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — индукция электрического поля, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля, ρ — плотность заряда, $\mathbf{I}$ — плотность тока.

Система (9.1) дополняется *материальными уравнениями*:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \varepsilon_0(\mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E}) = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}; \\ \mathbf{I} &= \sigma \mathbf{E},\end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ — поляризация среды, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ — намагниченность среды, χ_e — электрическая восприимчивость, χ_m — магнитная восприимчивость, ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные:

$$\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} \text{ ф/м}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Отсюда диэлектрическая проницаемость связана с электрической восприимчивостью соотношением

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e).$$

Для магнитной проницаемости имеем $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$.

9.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

При отсутствии в среде зарядов ($\rho = 0$, $\sigma = 0$) уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Если воспользоваться дифференциальным вектором $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, уравнения Максвелла (9.2) можно представить в следующей записи:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= 0; \\ \nabla \mathbf{H} &= 0; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Как следует из этих уравнений, изменения электрического поля $\mathbf{E}$ во времени и пространстве влияют на пространственно-временные свойства магнитного поля $\mathbf{H}$ и наоборот.

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в непроводящей среде. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла (9.3) и умножим векторно третье и четвертое уравнения слева на вектор ∇ :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{H}];$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}].$$

Учитывая свойства двойного векторного произведения и делая подстановку выражений для $\nabla \times \mathbf{H}$ и $\nabla \times \mathbf{E}$ из третьего и четвертого уравнений (9.3), получаем

$$\begin{cases} \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \\ \nabla(\nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Согласно первому и второму уравнениям в (9.3), $\nabla \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \mathbf{H} = 0$. Поэтому

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \\ \nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (9.4)$$

где $v^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$, v — фазовая скорость электромагнитной волны. Следовательно, распространение электрического и магнитного полей описывается волновым уравнением.

Умножим третье уравнение в (9.3) скалярно на вектор $\mathbf{E}$, а четвертое — на вектор $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E}[\nabla \times \mathbf{E}] = -\mu \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H};$$

$$\mathbf{H}[\nabla \times \mathbf{H}] = \varepsilon \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}.$$

Левая часть этих уравнений равна нулю из-за ортогональности векторов $\mathbf{E}$ и $\nabla \times \mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\nabla \times \mathbf{H}$. Отсюда получаем

$$\mathbf{E}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{E} = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ означает, что электромагнитные волны — поперечные.

Рассмотрим решения волновых уравнений (9.4) в виде плоских волн, распространяющихся вдоль оси z . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Учитывая свойство поперечности

$$\left(E_z = H_z = 0, \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \right),$$

запишем волновые уравнения для ортогональных компонент E_x и H_y плоской электромагнитной волны:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \quad (9.5)$$

Векторные произведения $\nabla \times \mathbf{E}$ и $\nabla \times \mathbf{H}$ в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Отсюда для третьего и четвертого уравнений Максвелла в (9.3), с учетом свойства поперечности электромагнитных волн, имеем

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}.\end{aligned}\right. \quad (9.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{cases} \quad (9.7)$$

С уравнениями (9.6) и (9.7) можно сопоставить телеграфные уравнения, описывающие распространение напряжения и тока в линии передачи (разд. 7.1).

Для уравнения (9.6) существуют решения в виде бегущей волны:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} = E_{0x} e^{ik(vt - z)}; \\ H_y &= H_{0y} e^{i(\omega t - kz)} = H_{0y} e^{ik(vt - z)}. \end{aligned}$$

После подстановки получаем

$$\begin{cases} -ikE_x = -\mu(ikv)H_y; \\ ikH_y = \varepsilon(ikv)E_x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \mu v H_y; \\ H_y = \varepsilon v E_x, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{E_x}{H_y} = \mu v = \frac{\mu \omega}{k} = \frac{1}{\varepsilon v} = \frac{k}{\varepsilon \omega} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_W. \quad (9.8)$$

Здесь $Z_W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ — волновое сопротивление (импеданс) среды, равное корню квадратному из отношения магнитной и диэлектрической проницаемостей. Волновая проводимость среды вводится как величина, обратная волновому сопротивлению

$$G_W = \frac{1}{Z_W}.$$

Уравнения (9.7) имеют решение в виде плоской волны, распространяющейся в противоположном направлении, справа налево:

$$E_x = E_{y0} e^{i(\omega t + kz)}; \quad H_x = H_{x0} e^{i(\omega t + kz)}.$$

Если же воспользоваться для обращенной плоской волны уравнением (9.6), волновое сопротивление Z_W следует считать отрицательным.

9.2. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Пусть электромагнитная волна распространяется в диэлектрической среде и, соответственно, потери отсутствуют. Введем понятие объемной плотности энергии электромагнитного поля w :

$$w = w_E + w_H,$$

где

$$w_E = 1/2\varepsilon |E|^2 = 1/2\varepsilon E_0^2; \quad w_H = 1/2\mu |H|^2 = 1/2\mu H_0^2;$$

w_E и w_H — объемные плотности энергии соответственно электрической и магнитной компонент.

Из определения волнового сопротивления (9.8) следует, что плотность энергии электрического поля электромагнитной волны равна плотности энергии магнитного поля:

$$\frac{1}{2}\varepsilon E_{0x}^2 = \frac{1}{2}\mu H_{0y}^2.$$

Отсюда следует равенство объемных плотностей энергии электрической и магнитной компонент электромагнитной волны:

$$w_E = w_H.$$

Плотность полной энергии электромагнитной волны равна сумме плотностей электрической и магнитной энергий:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E_{0x}^2 + \frac{1}{2}\mu H_{0y}^2.$$

Обратимся к уравнениям (9.6). Умножая первое уравнение на H_y , а второе — на E_x , получаем

$$\begin{cases} H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ -E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon E_x \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое:

$$-H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Это выражение сводится к следующему:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(E_x H_y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E_x^2 + \mu H_y^2). \quad (9.9)$$

Аналогично из уравнений (9.7) находим

$$\frac{\partial}{\partial z}(E_y H_x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E_y^2 + \mu H_x^2). \quad (9.10)$$

Складывая (9.9) и (9.10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}(E_y H_x - E_x H_y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}[\epsilon(E_x^2 + E_y^2) + \mu(H_x^2 + H_y^2)]. \quad (9.11)$$

Комбинация $E_x H_y - E_y H_x$ является z -компонентой векторного произведения $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$ получило название вектора Пойнтинга. Физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что его модуль и знак определяют величину и направление потока энергии излучения в каждой точке пространства:

$$E_y H_x - E_x H_y = \frac{1}{2} \int_0^z \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon(E_x^2 + E_y^2) + \mu(H_x^2 + H_y^2)] dz.$$

Пусть в приближении плоских волн

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t - kz); & H_y &= H_{y0} \cos(\omega t - kz); \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t - kz); & H_x &= H_{x0} \cos(\omega t - kz). \end{aligned}$$

После подстановки этих значений электрического и магнитного полей в (9.11), получаем

$$\begin{aligned} & (E_{y0} H_{x0} - E_{x0} H_{y0}) \frac{\partial}{\partial z} \cos^2(\omega t - kz) = \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon(E_{x0}^2 + E_{y0}^2) + \mu(H_{x0}^2 + H_{y0}^2)] \frac{\partial}{\partial t} \cos^2(\omega t - kz); \\ & (E_{y0} H_{x0} - E_{x0} H_{y0}) 2k \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) = \\ &= -\frac{1}{2} [\epsilon(E_{x0}^2 + E_{y0}^2) + \mu(H_{x0}^2 + H_{y0}^2)] 2\omega \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz). \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_{x0}H_{y0} - E_{y0}H_{x0} = \frac{\omega}{2k}[\varepsilon(E_{x0}^2 + E_{y0}^2) + \mu(H_{x0}^2 + H_{y0}^2)]$$

или, с учетом $v = \frac{\omega}{k}$,

$$E_{x0}H_{y0} - E_{y0}H_{x0} = \frac{1}{2}v[\varepsilon(E_{x0}^2 + E_{y0}^2) + \mu(H_{x0}^2 + H_{y0}^2)].$$

Таким образом z -компонента вектора Пойнтинга равна плотности потока энергии электромагнитной волны в направлении z .

Обратимся к системе уравнений Максвелла (9.3). Умножим третье уравнение скалярно на $\mathbf{H}$, а четвертое — на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Найдем разность полученных уравнений, учитывая, что $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$:

$$\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H});$$

$$-\nabla \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

или

$$-\nabla \mathbf{P} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2). \quad (9.12)$$

Полученные соотношения связывают дивергенцию вектора Умова–Пойнтинга ∇P со скоростью изменения объемной плотности энергии электромагнитной волны

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2):$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla P = 0. \quad (9.13)$$

Уравнение (9.13) описывает баланс энергии, переносимой электромагнитной волной, и является одной из форм уравнения непрерывности. Из (9.13) следует, что вектор Умова–Пойнтинга имеет смысл вектора плотности потока энергии. Интегрируя (9.13) по некоторому объему и учитывая теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} W = - \int_s \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s},$$

где $W = \int_V w dV$ — энергия электромагнитного поля в объеме V , ограниченная поверхностью s . Физический смысл полученного соотношения состоит в том, что изменение энергии электромагнитного поля в объеме V равняется потоку энергии через поверхность, ограничивающую этот объект.

9.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕНУЛЕВОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Электромагнитное поле в среде с $\sigma \neq 0$ описывается системой уравнений Максвелла:

$$\nabla \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \mathbf{H} = 0;$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{I} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$ — плотность тока. Из третьего уравнения получаем

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}).$$

После подстановки $\nabla \times \mathbf{H}$ из четвертого уравнения системы находим

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{I} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

С физической точки зрения электрическое поле электромагнитной волны при $\sigma \neq 0$ играет гораздо большую роль, чем магнитное поле. Учитывая (9.5), запишем это уравнение для x -проекции электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_x + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (9.14)$$

Найдем решение этого уравнения, полагая, что его временная зависимость — гармоническая: $E_x = E_{0x}e^{i\omega t}$. После подстановки в уравнение (9.14) получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = (i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon)E_x. \quad (9.15)$$

Вводя обозначение $\gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \gamma^2 E_x.$$

Это уравнение имеет решение в виде $e^{-\gamma z}$ или $e^{\gamma z}$. Выберем решение

$$E_x = E_{0x}e^{-\gamma z} \cdot e^{i\omega t}.$$

В случае проводника $\mu\sigma \gg \omega\mu\epsilon$. Поэтому

$$\gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon = i\omega\mu\sigma \left(1 + i \frac{\omega\mu\epsilon}{\mu\sigma} \right) \approx i\omega\mu\sigma.$$

Отсюда

$$\gamma = \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1+i).$$

Тогда для поля в проводнике имеем

$$E_x = E_{x0}e^{i\omega t}e^{-\gamma z} = E_{x0}e^{i\omega t}e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+i)z} = E_{x0}e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right)}. \quad (9.16)$$

Глубину проникновения поля в вещество можно оценить из затухающего множителя в (9.15). Для уровня e^{-1} глубина скин-слоя определяется выражением $z = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$. Глубина скин-слоя уменьшается с ростом частоты и увеличением проводимости.

Если среда — диэлектрик, $\sigma = 0$ и возможны токи смещения $\mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$. В случае когда среда — проводник, будут преобладать токи проводимости $\mu\sigma E_x$. Поэтому, согласно (9.13), среду можно характеризовать отношением плотности тока проводимости к плотности тока смещения:

$$\frac{I}{\frac{\partial D}{\partial t}} = \frac{\sigma E_x}{\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E_x)} = \frac{\sigma E_x}{i\varepsilon\omega E_x} = \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega}.$$

Здесь учтено $E_x = E_{0x}e^{i\omega t}$. Отсюда следует, что ток смещения опережает по фазе ток проводимости на 90° . Критерий $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ зависит от частоты. Поэтому в зависимости от частоты среда может проявлять свойства проводника или диэлектрика.

Для диэлектрика плотности энергии электрического и магнитного полей одинаковы. Для проводника

$$|E_x/H_y| = \sqrt{\omega\mu/\sigma} \ll 1 \text{ или } |E_x^2/H_y^2| = 1.$$

В проводнике энергия магнитного поля много больше энергии электрического поля.

9.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Уравнения Максвелла описывают поля в пространстве, где физические свойства среды, характеризующиеся диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями, непрерывны. Однако часто встречаются ситуации, когда на поверхностях раздела различных сред эти свойства резко меняются. Исследуем граничные условия для векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$.

Заменим поверхность раздела двух сред тонким переходным слоем, внутри которого ε и μ непрерывно меняются от значения ε_1, μ_1 в одной среде к значениям ε_2, μ_2 — в другой. Внутри этого слоя построим цилиндр с образующей, нормальной к поверхности раздела, и основаниями δA_1 и δA_2 , параллельными этой поверхности (рис. 9.1).

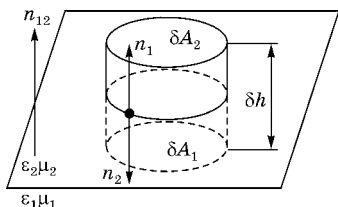


Рис. 9.1

Во всем цилиндре вектор $\mathbf{B}$ и его производные непрерывны. Поэтому мы можем применить теорему Гаусса к интегралу от дивергенции $\mathbf{B}$, взятому по объему цилиндра. Учитывая, что, согласно (9.1), $\text{div}\mathbf{B} = 0$, получаем

$$\int \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \int \mathbf{B} n ds = 0. \quad (9.17)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Вторым интеграл берется по поверхности цилиндра. Принимая площади оснований цилиндра δA_1 и δA_2 малыми, можно считать, что в пределах этих оснований значения векторов $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ постоянны. Тогда для (9.17) можно записать

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{n}_1 \delta A_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_2 \delta A_2 + \xi = 0,$$

где ξ — вклад в поверхностный интеграл от стенок цилиндра.

Если устремить высоту цилиндра (толщину поверхностного слоя) δh к нулю, ξ обращается в нуль и основания цилиндра совмещаются, $\delta A_1 = \delta A_2 = \delta A$. Тогда

$$(\mathbf{B}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_2) \delta A = 0.$$

Пусть $\mathbf{n}_{12}$ — единичный вектор нормали, направленный из первой среды во вторую. Тогда $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{12}$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_{12}$ и

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0.$$

Следовательно, нормальная компонента вектора магнитной индукции непрерывна на поверхности раздела.

Рассмотрим поведение вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ на границах раздела. Учитывая, что, согласно (9.1), $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, запишем теорему Гаусса с учетом интегрирования по цилиндру в переходном слое (рис. 9.2):

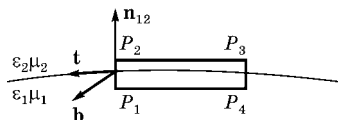


Рис. 9.2

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int \mathbf{D} n ds = \int \rho dV. \quad (9.18)$$

При схлопывании переходного слоя в поверхность ($\delta h \rightarrow 0$) объемная плотность заряда трансформируется в поверхностную плотность ρ_s , определяемую из соотношения

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int \rho dv = \int \rho_s dA.$$

Отсюда для выражения (9.18) получаем

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{n} + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2) \delta A = \rho_s \delta A$$

или

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s. \quad (9.19)$$

Из (9.19) следует, что если на границе раздела имеется заряд с поверхностной плотностью ρ_s , нормальная компонента вектора электрической индукции при переходе этой поверхности испытывает скачок, равный ρ_s .

Исследуем теперь граничные условия для тангенциальных компонент векторов поля. Для этого заменим границу раздела переходным слоем, а вместо цилиндра введем прямоугольную площадку, стороны которой соответственно параллельны и перпендикулярны поверхности раздела (см. рис. 9.2). Пусть $\mathbf{b}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости выделенной прямоугольной площадки. Тогда из уравнения Максвелла (9.1)

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

На основании теоремы Стокса получаем

$$\int \text{rot } \mathbf{E} \mathbf{b} ds + \int \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{b} ds. \quad (9.20)$$

Первый и третий интегралы берутся по поверхности прямоугольника $P_1P_2P_3P_4$, а второй интеграл — по его периметру. Если длины P_1P_4 и P_2P_3 малы, $P_1P_4 = P_2P_3 = \delta_1$, на каждой из этих сторон вектор $\mathbf{E}$ можно заменить постоянными значениями $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, а вектор $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ также можно считать в пределах площадки постоянным. Тогда из (9.20), с учетом $P_1P_2 = P_3P_4 = \delta h$, получаем

$$\mathbf{E}_1 \tau_1 \delta l + \mathbf{E}_2 \tau_2 \delta l + \zeta = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{b} \delta l \delta h.$$

Здесь ζ — вклад в линейный интеграл $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$ от концов прямоугольника P_1P_2 и P_3P_4 ; τ_1, τ_2 — единичный вектор касательной к поверхности раздела.

Устремим δh к нулю. Тогда, полагая, что $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ остаются конечными, находим

$$(\mathbf{E}_1 \tau_1 + \mathbf{E}_2 \tau_2) \delta l = 0. \quad (9.21)$$

Если τ — единичный вектор касательной к поверхности, то $\tau_1 = -\tau = -\mathbf{b} \mathbf{n}_{12}$; $\tau_2 = \tau = \mathbf{b} \mathbf{n}_{12}$, (9.21) трансформируется к виду

$$\mathbf{b}[\mathbf{n}_{12}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0.$$

Поскольку ориентация прямоугольной площадки и единичного вектора τ произвольна, получаем

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (9.22)$$

Отсюда следует, что тангенциальная компонента электрического поля непрерывна на поверхности раздела.

Поведение тангенциальной компоненты магнитного поля анализируется аналогично с учетом уравнения Максвелла (9.1):

$$\text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}.$$

Применение теоремы Стокса к этому уравнению в пределах прямоугольной площадки (см. рис. 9.2) дает

$$\mathbf{H}_1 \tau_1 \delta l + \mathbf{H}_2 \tau_2 \delta l + \zeta = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{b} \delta l \delta h + \mathbf{j} \mathbf{b} \delta l.$$

Здесь ζ — вклад от концов площадки. Переходя к пределу при $\delta h \rightarrow 0$, как и в предыдущем случае, получаем

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}.$$

Это соотношение означает, что тангенциальная компонента вектора магнитного поля при переходе через поверхность раздела испытывает скачок, пропорциональный поверхностной плотности тока $\mathbf{j}$.

9.5. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

Обратимся к рис. 9.3, где изображена неограниченная плоская поверхность, разделяющая две среды с импедансами z_1 и z_2 . На поверхность слева падает электромагнитная волна. Компоненты поля падающей волны обозначены индексом i , отраженной — r и проходящей — t .

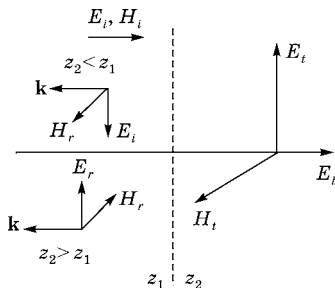


Рис. 9.3

Согласно граничным условиям, тангенциальные компоненты векторов **E** и **H** должны быть непрерывны на границе раздела:

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t; \\ H_i + H_r = H_t. \end{cases} \quad (9.23)$$

$$\frac{E_i}{H_i} = z_1; \quad \frac{E_r}{H_r} = -z_1; \quad \frac{E_t}{H_t} = z_2.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 1 + \frac{E_r}{E_i} = \frac{E_t}{E_i}; \\ 1 + \frac{H_r}{H_i} = \frac{H_t}{H_i}. \end{cases}$$

После подстановки

$$H_r = -\frac{E_r}{z_1}$$

находим

$$\begin{cases} 1 + \frac{E_r}{E_i} = \frac{E_t}{E_i}; \\ 1 - \frac{E_r}{E_i} = \frac{H_t}{H_i}. \end{cases} \quad (9.24)$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$\frac{1 + (E_r / E_i)}{1 - (E_r / E_i)} = \frac{E_t H_i}{H_t E_i} = \frac{z_2}{z_1};$$

$$\left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right) = \frac{z_2}{z_1} \left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right).$$

Откуда находим коэффициент отражения

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}. \quad (9.25)$$

Складывая уравнения (9.24), определяем коэффициент прохождения $\frac{E_t}{E_i}$:

$$2 = \frac{E_t}{E_i} + \frac{H_t}{H_i};$$

$$2 = \frac{E_t}{E_i} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right);$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2z_2}{z_1 + z_2}. \quad (9.26)$$

Формулы (9.25) и (9.26) согласуются с соответствующими коэффициентами отражения и прохождения, которые мы получали для распространения волн в сплошных средах и в линиях передач.

Если волна падает из воздуха на идеальный проводник, $z_2 = 0$; $E_r/E_i = -1$; $E_t/E_i = 0$. Это соответствует полному отражению. Импедансы связаны с показателем преломления:

$$n_i = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\mu\epsilon_0}} = \frac{z_0}{z},$$

где i — индекс среды. Следовательно, коэффициент преломления среды обратно пропорционален ее волновому сопротивлению:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}; \quad n_{21} = n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Отсюда получаем для коэффициента отражения и преломления при нормальном падении на границу раздела

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{1-n}{1+n}; \quad \tau = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1+n}. \quad (9.27)$$

9.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ УГЛЕ ПАДЕНИЯ

Рассмотрим трансформацию плоской электромагнитной волны на границе двух сред с импедансами z_1 и z_2 . Выделим случаи, когда вектор электрического поля ортогонален к плоскости падения (см. рис. 9.4) и когда вектор электрического поля волны локализован в плоскости падения (см. рис. 9.5). Плоскостью падения является плоскость xz , в которой находится волновой вектор $\mathbf{k}_i$ падающей волны и нормаль к границе раздела двух сред. На рисунках ось x направлена по нормали.

Первый случай соответствует так называемой поперечной электрической волне (TE), второй — поперечной магнитной волне (TM). Электромагнитное поле можно представить как линейную комбинацию этих типов волн.

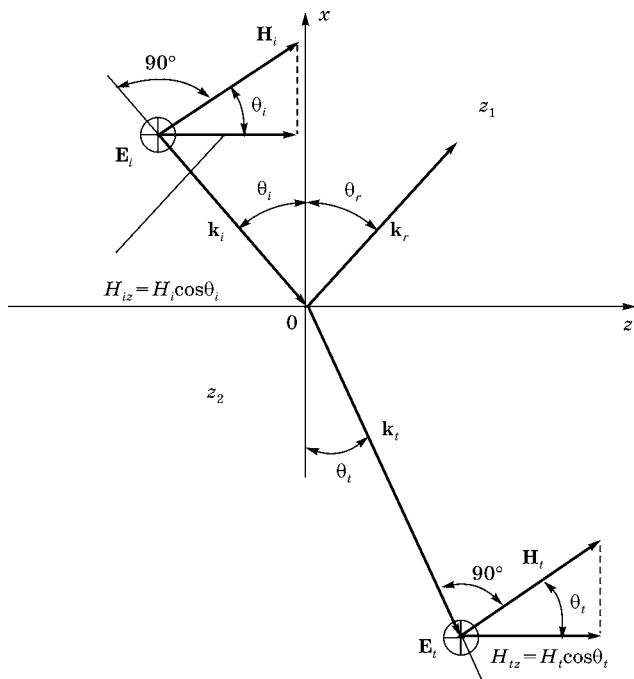


Рис. 9.4

Рис. 9.4 иллюстрирует преобразование на плоскости раздела TE -волны, когда вектор магнитного поля $\mathbf{H}_i$ ориентирован в плоскости падения, а вектор электрического поля $\mathbf{E}_i$ ортогонален к ней. На рис. 9.5 показано преобразование волны TM , когда вектор магнитного поля ортогонален к плоскости падения.

В общем случае электромагнитные поля в ограниченных средах можно разделить на различные типы волн в зависимости от симметрии системы. На поверхности раздела двух сред плоскостью симметрии является плоскость падения.

Важным свойством уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных полей, является принцип дуальности, заключающийся в том, что уравнения Максвелла переходят одно в другое при замене $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mu \rightarrow \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow \mu$. Этот принцип в электро-

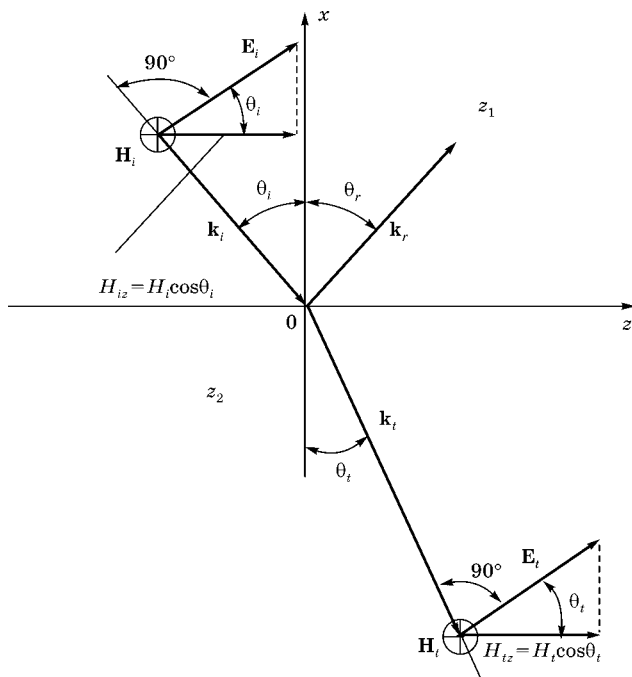


Рис. 9.5

динамике и в оптоэлектронике позволяет определять поле для поперечной магнитной моды TM , зная выражения, описывающие поперечную электрическую волну TE , и наоборот.

Обратимся к рис. 9.5. В случае произвольного падения падающая волна представляется суперпозицией двух волн: одной — распространяющейся по оси x , другой — по оси z . Очевидно, что компонента, распространяющаяся по оси z , не испытывает никакого отражения. Распространение нормальной компоненты (вдоль оси x) приводит к появлению преломленной (прошедшей) и отраженной волн. Углы θ_i , θ_r и θ_t называются соответственно углами падения, отражения и преломления.

Запишем граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля на плоскости раздела двух сред $z = 0$:

$$E_i \exp(jk_{iz}z) \cos \theta_i + E_r \exp(jk_{rz}z) \cos \theta_r = \\ = E_t \exp(jk_{tz}z) \cos \theta_t.$$

Это граничное условие должно выполняться для тангенциальных проекций векторов электрического поля в любой точке z . Поэтому

$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t; \\ k_{iz}z = k_{rz}z = k_{tz}z.$$

Откуда следует

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz}. \quad (9.28)$$

Равенства (9.28) означают, что волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в плоскости падения, которая задается волновым вектором падающей волны $\mathbf{k}_i$ и нормалью $\mathbf{n}$ к границе раздела.

Из рис. 9.5 видно, что

$$k_{iz} = k_i \sin \theta_i; \quad k_{rz} = k_r \sin \theta_r; \quad k_{tz} = k_t \sin \theta_t, \quad (9.29)$$

где $k_i = \frac{\omega}{c} n_1$, $k_r = \frac{\omega}{c} n_1$, $k_t = \frac{\omega}{c} n_2$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ — показатели преломления первой и второй сред.

Следствием из соотношений (9.28) и (9.29) является *закон отражения*, согласно которому угол падения равен углу отражения:

$$\theta_i = \theta_r.$$

Другое следствие — *закон преломления* (закон Снеллиуса), связывающий между собой угол падения и угол преломления:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

или

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}. \quad (9.30)$$

Согласно (9.30), относительный коэффициент преломления среды n_{21} равен отношению синусов углов падения и преломления.

Чтобы определить коэффициенты отражения и преломления, достаточно рассмотреть распространение нормальной компоненты падающей волны (этот случай ис-

следован в предыдущем разделе) и воспользоваться выражениями (9.23), (9.25), (9.26). Подставляя в эти формулы значения проекций компонент нормальной волны, получаем, с учетом (9.8), волновые сопротивления для TE -моды (см. рис. 9.4):

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{E_i}{H_{iz}} = \frac{E_i}{H_i \cos \theta_i} = \frac{\omega \mu}{k_i \cos \theta_i} = \frac{\omega \mu}{k_{ix}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} \cdot \frac{1}{\cos \theta_i} = \frac{1}{n_1 \cos \theta_i}; \\ z_2 &= \frac{E_t}{H_{tz}} = \frac{E_t}{H_t \cos \theta_t} = \frac{\omega \mu}{k_t \cos \theta_t} = \frac{\omega \mu}{k_{tx}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{1}{\cos \theta_t} = \frac{1}{n_2 \cos \theta_t}; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} = \frac{n \cos \theta_t}{\cos \theta_i}. \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения и преломления соответственно равны

$$\begin{aligned} r_{TE} &= \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t}; \\ \tau_{TE} &= \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Согласно принципу дуальности, для TM -волны (см. рис. 9.5) имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{E_{iz}}{H_i} = \frac{E_i \cos \theta_i}{H_i} = \frac{k_i \cos \theta_i}{\omega \varepsilon_1} = \frac{k_{ix}}{\omega \varepsilon_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} \cdot \cos \theta_i = \frac{1}{n_1} \cos \theta_i; \\ z_2 &= \frac{E_{tz}}{H_t} = \frac{E_t \cos \theta_t}{H_t} = \frac{k_t \cos \theta_t}{\omega \varepsilon_2} = \frac{k_{tx}}{\omega \varepsilon_2} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} \cdot \cos \theta_t = \frac{1}{n_2} \cos \theta_t; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t} = \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t}; \\ r_{TM} &= \frac{\cos \theta_t - n \cos \theta_i}{\cos \theta_t + n \cos \theta_i}; \\ \tau_{TM} &= \frac{2 \cos \theta_t}{\cos \theta_t + n \cos \theta_i}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Полученные выражения известны как *формулы Френеля*. Энергетические коэффициенты отражения и преломления определяются соответственно по формулам $R = |r|^2$, $T = |\tau|^2$.

Исследуем отражение волны TE от оптически более плотной среды ($n < 1$). Для отношения волновых сопротивлений в этом случае имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = n \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}.$$

Воспользовавшись законом Снеллиуса, выражения (9.31) и (9.32) можно привести к виду

$$r_{TE} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}; \quad (9.33)$$

$$r_{TM} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}. \quad (9.34)$$

Из формулы Френеля (9.34) следует так называемый *эффект Брюстера*: коэффициент отражения TM -волны обращается в нуль, если сумма углов падения и преломления равна $\pi/2$:

$$\theta_i + \theta_t = \pi/2. \quad (9.35)$$

Из соотношения (9.35) и закона Снеллиуса находим угол падения, при котором имеет место явление Брюстера. Этот угол получил название угла Брюстера

$$\theta_B = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

На рис. 9.6 показана зависимость коэффициентов отражения TE - и TM -волн от угла падения.

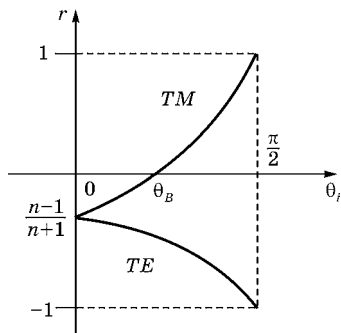


Рис. 9.6

Угол между плоскостью колебания поляризованного света и плоскостью падения называется *азимутом колебания*:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{E(TE)}{E(TM)}.$$

При угле Брюстера отраженная волна имеет TE -поляризацию.

Другой эффект следует из формулы Френеля (9.33): нор-

мально падающая компонента TE -волны отражается от оптически более плотной среды ($n > 1$) с фазовым сдвигом π . Если же волна TE отражается от оптически менее плотной среды ($n < 1$), при угле падения $\sin \theta_c = n$, возникает явление *полного внутреннего отражения*. Угол падения θ_c , удовлетворяющий условию $\theta_c = \arcsin n$, называется критическим углом. При критическом угле падения, как следует из закона Снеллиуса, угол преломления равен 90° и преломленный луч не проникает во вторую среду, а распространяется вдоль границы раздела. При угле падения, большем критического, преломленный пучок отсутствует и происходит полное внутреннее отражение (рис. 9.7):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{n \cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2}}}{\cos \theta_i} = \pm i \frac{n \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1}}{\cos \theta_i}.$$

Введем обозначения

$$\frac{z_1}{z_2} = -i\eta.$$

Тогда формула для коэффициента отражения принимает вид

$$r = \frac{1 + i\eta}{1 - i\eta},$$

причем $|r| = 1$. Следовательно, имеет место полное внутреннее отражение. При этом в отраженной волне появляется фазовый сдвиг ψ , зависящий от угла падения:

$$\begin{aligned} \psi &= -\arg(r) = -2 \arctg \eta = \\ &= \pm 2 \arctg \frac{[\sin^2 \theta_i - n^2]^{\frac{1}{2}}}{\cos \theta_i}. \end{aligned}$$

Рассмотрим энергетические соотношения при полном внутреннем отражении. Обратимся к рис. 9.7. Пусть напряженность электрического поля в волне TE — действующая величина. Тогда для компонент магнитного поля во второй среде

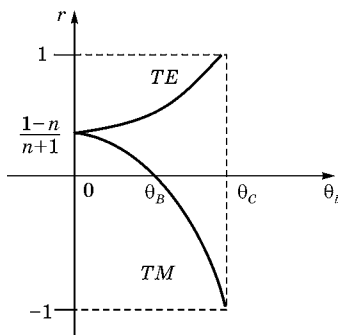


Рис. 9.7

$$H_x = H \sin \theta_i; \quad H_z = H \cos \theta_i.$$

Если имеет место полное внутреннее отражение ($\theta \geq \theta_c$), компонента магнитного поля H_x — действительная величина, а компонента H_z — мнимая. Соответственно вектор Пойнтинга $P_x \sim \mathbf{E} \times \mathbf{H}_z$ по оси x — мнимый, а $P_z \sim \mathbf{E} \times \mathbf{H}_x$ по оси z — действительный. Это означает, что по оси z распространяется поток активной («лучистой») энергии, а по оси x — поток реактивной энергии. Следовательно, на поверхности раздела при полном внутреннем отражении возникает неоднородная волна, компоненты волнового вектора которой, согласно рис. 9.4 и (9.29), равны

$$k_{tz} = k_t \sin \theta_t = k_t \frac{\sin \theta_i}{n} = k_t \sin \theta_i;$$

$$k_{tx} = k_2 \cos \theta_t = i k_2 \left[\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $k_t = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu} = \frac{\omega}{v_2}$; v_2 — фазовая скорость во второй среде. Мнимость x -компоненты волнового вектора k_t преломленной волны показывает, что она обязательно должна экспоненциально затухать вдоль оси x . Глубина проникновения этой волны в среду по оси x на уровне e^{-1} дается выражением

$$\delta = \frac{1}{|k_{tx}|} = \frac{n}{k_t \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = \frac{nv_2}{\omega \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}. \quad (9.36)$$

При полном внутреннем отражении возникает быстро затухающая вдоль оси x неоднородная бегущая волна, глубина проникновения которой (9.33) уменьшается с увеличением угла падения и имеет обратную пропорциональную зависимость от частоты. Из сравнения (9.36) и (9.16) видно, что глубина проникновения преломленной волны при полном внутреннем отражении отличается от толщины скин-слоя при распространении волны в среде с ненулевой проводимостью. В частности, толщина скин-слоя обратно пропорциональна корню квадратному от частоты.

ты. Физические явления, лежащие в основе полного внутреннего отражения и скин-эффекта, совершенно различны, поскольку в первом случае, в отличие от второго, среда без потерь и без рассеяния энергии.

9.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Воспользуемся аналогией распространения световой волны в среде с распространением волны в линии передачи. Мы установили, что любое сечение линии передачи характеризуется соответствующим импедансом, равным отношению напряженностей электрического и магнитного полей. Эта аналогия оказывается полной, если ввести понятие *локального импеданса среды*. Импеданс среды в произвольном сечении x определяется как отношение тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей. Обращаясь к рис. 9.4 и 9.5, можно с учетом (9.8) по аналогии записать импеданс для произвольного сечения, ортогонального оси x :

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{E_y}{H_z} = \\ &= \frac{[E_i e^{ik_x x} + E_r e^{-ik_x x}] e^{-ik_z z}}{-\frac{k_x}{\omega \mu_1} [E_i e^{ik_x x} - E_r e^{-ik_x x}] e^{-ik_z z}} = Z_W \frac{1 + r e^{-i2k_x x}}{1 - r e^{-i2k_x x}}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Здесь $r = E_r/E_i$ — коэффициент отражения; Z_W — волновое сопротивление. Выражение (9.37) определяет импеданс среды для любого сечения, ортогонального оси x . Например, для сечения $x = 0$ импеданс

$$z(0) = Z_W \frac{1+r}{1-r}.$$

В этом случае с импедансом $z(0)$ можно сопоставить импеданс нагрузки z_L в (7.17). Выражая коэффициент r через $z(0)$ и подставляя его в (9.37), получаем после элементарных преобразований

$$z(x) = Z_W \frac{z(0) + i Z_W \operatorname{tg}(k_x x)}{Z_W + i z(0) \operatorname{tg}(k_x x)}. \quad (9.38)$$

Как и в формуле (7.17) в теории для линий передач, выражение (9.38) определяет импеданс среды в сечении x при распространении плоской световой волны. Например, для $x = \frac{(2m+1)}{2k_x} \pi = (2m+1) \frac{\lambda_x}{4}$ (толщина слоя, равная нечетному числу четвертьволновых отрезков, $m = 0, 1, 2, \dots$)

$$Z_{\lambda_x/4} = \frac{Z_W^2}{z(0)}.$$

Здесь $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ — длина волны, определяемая как расстояние по оси x между плоскими волновыми фронтами, соответствующими разности фаз, равной 2π :

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \theta_i},$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\mu\epsilon}$.

Введем понятие обобщенного коэффициента отражения как отношение напряженностей электрического поля отраженной и падающей волн с учетом набега фазы в произвольном сечении x :

$$\tilde{r}(x) = r e^{2ik_x x}.$$

Тогда, согласно (9.37), импеданс среды в сечении x определяется формулой

$$z(x) = Z_W \frac{1 + \tilde{r}(x)}{1 - \tilde{r}(x)}.$$

Отсюда

$$\tilde{r}(x) = \frac{z(x) - Z_W}{z(x) + Z_W}.$$

Для волны TM получаются аналогичные соотношения:

TE -волна	TM -волна
$r(x) = \frac{E_r}{E_i} e^{i2k_x x}$	$r(x) = \frac{H_r}{H_i} e^{i2k_x x}$
$Z_W = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\cos \theta_i}$	$Z_W = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \theta_i$
$z(x) = -\frac{E_y}{H_z}$	$z(x) = \frac{E_z}{H_y}$

<i>ТЕ</i> -волна	<i>ТМ</i> -волна
$z(x) = Z_W \frac{1 + \tilde{r}(x)}{1 - \tilde{r}(x)}$	
$\tilde{r}(x) = \frac{z(x) - Z_W}{z(x) + Z_W}$	
$z(x) = Z_W \frac{z(0) + iZ_W \operatorname{tg} k_x x}{Z_W + iz(0) \operatorname{tg} k_x x}$	

Как видно из этих формул, отраженная волна находится в фазе с падающей на расстояниях от плоскости раздела, кратных целым числам полуволн $\lambda_x/2$. На расстояниях, кратных нечетному числу четвертьволновых отрезков, падающая и отраженная волны находятся в противофазе.

9.8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В главе 7 мы познакомились с распространением электромагнитных волн в передающих системах — линиях передачи. При этом соблюдались следующие условия:

- геометрические размеры линий в направлении распространения электромагнитной энергии были соизмеримы с длиной волны или превышали ее, тогда как поперечные размеры (расстояние между проводами в двухпроводной линии передач) были значительно меньше длины волны;
- распространение электромагнитной энергии в режиме бегущей волны в идеальной линии передач (без потерь) было таким же, как и распространение в свободном пространстве с сохранением поперечной структуры колебаний электрических и магнитных полей (*ТЕМ*-структура). Однако поперечность колебаний векторов поля и граничные условия определяют особенности распространения электромагнитных волн и в волноводных структурах с ограниченным поперечным сечением.

Качественная модель перехода двухпроводной линии к прямоугольному волноводу показана на рис. 9.8. Сечение двухпроводной линии изображено на рис. 9.8а. Электрические силовые линии (сплошные) расположены в плоскости чертежа. Магнитные силовые линии — штриховые. Представим себе, что оба провода трансформируются в широкие ленты (рис. 9.8б). Когда ширина линий становится соизмеримой с длиной волны, возникает неравномерность распределения электрического поля между лентами с максимумом посередине, хотя общий характер распределения полей остается прежним. На распределение поля влияют не только размеры линии, но и граничные условия, согласно которым вектор $\mathbf{E}$ нормален к проводящей поверхности.

Рис. 9.8в соответствует случаю, когда ширина линий оказывается равной половине длины волны. Электрическое поле в поперечном сечении распределяется так, что разность потенциалов на краях линии становится равной нулю. Следовательно, не нарушая структуры поля, эти края можно соединить проводящими поверхностями, переходя таким образом к волноводу прямоугольного сечения, внутри которого распространяется волна. Распределение магнитного поля в пространстве претерпевает при этом качественный скачок к структуре замкнутых магнитных силовых линий, расположенных внутри волновода в плоскостях, ортогональных силовым линиям электрического поля. Это означает, что наряду с поперечной составляющей в волноводе возникает продольная компонента магнитного поля. Появление продольных компонент магнитного или электрического по-

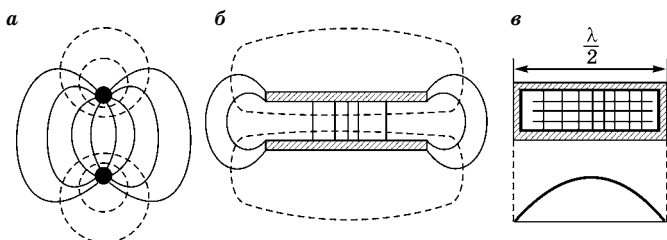


Рис. 9.8

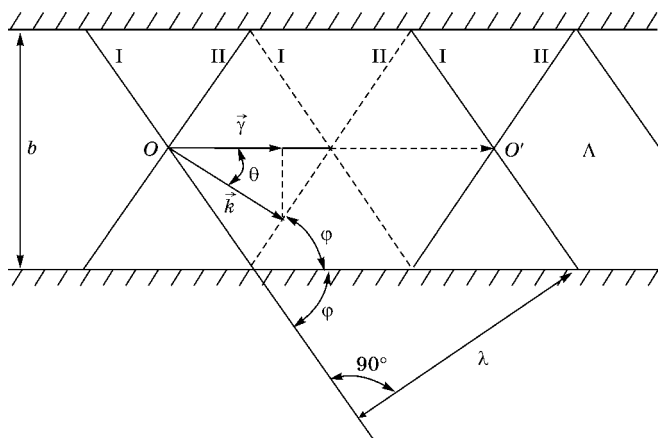


Рис. 9.9

лей определяется геометрией волновода и способом его возбуждения. Отличие структуры поля в волноводе от обычной *ТЕМ*-волны в свободном пространстве ведет к тому, что скорости распространения, а следовательно, и длины волн в волноводе и в свободном пространстве отличаются при заданной частоте колебаний.

Рассмотрим качественную картину распространения электромагнитной энергии в волноводе. Обратимся к рис. 9.9.

Здесь показана ситуация, когда ширина сечения волновода больше половины длины волны. В этом случае волна распространяется вдоль волновода и может быть представлена как суперпозиция двух плоских парциальных волн, которые распространяются под углом к стенкам и последовательно отражаются от них. Пусть φ — угол, образованный волновым фронтом и стенкой. На внутренних стенках металлического волновода должны выполняться граничные условия: равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля $E_t = 0$. Как видно из рис. 9.8, для боковых стенок это условие выполняется. Для верхних и нижних стенок (рис. 9.9) граничные условия удовлетворяются, если на стенке гребень одной парциальной волны совпадает со впадиной другой (гребни на рисунке показаны сплошной

линией, впадины — штриховой). Пространственный период λ каждой парциальной волны соответствует расстоянию между гребнями. Как следует из рис. 9.9, ширина волновода b и длина волны λ связаны соотношениями

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Lambda}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2b}{\Lambda}.$$

Откуда

$$\cos \varphi = \frac{\lambda}{2b}. \quad (9.39)$$

Интерференция когерентных парциальных волн образует результирующую волну, пространственный период Λ которой определяется как расстояние $00'$ между ближайшими по фазе точками пересечения «гребней»:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}}, \quad (9.40)$$

здесь $\lambda_0 = 2b$ — это *критическая длина волны*. В предельном случае, когда $\varphi = 0$, волновые фронты парциальных волн параллельны стенкам, $\lambda = \lambda_0$ и энергия вдоль волновода не переносится. В другом предельном случае, когда $\varphi = 90^\circ$, волновые векторы парциальных волн параллельны оси волновода (а волновые фронты ортогональны) и парциальные волны вырождаются в одну плоскую, распространяющуюся вдоль волновода. Пространственный период Λ результирующей волны в волноводе, как видно из (9.40), превышает длину волны λ в свободном пространстве. Выражение для фазовой скорости результирующей волны следует из условия

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\Lambda},$$

откуда

$$v = \frac{\Lambda}{\lambda} c = \frac{c}{\sin \varphi}.$$

Для групповой скорости получим из рис. 9.9

$$v_g = c \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$v_g v = c^2.$$

Произведение групповой скорости на фазовую равно квадрату скорости света в свободном пространстве. Ампли-

туды электрической и магнитной компонент поля в случае гармонических колебаний удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 L + \gamma^2 L = 0, \quad (9.41)$$

где L — обобщенное обозначение амплитуды поля. Решение этого уравнения:

$$L = L(x, y)\exp(j\gamma z).$$

Здесь $\gamma = \frac{2\pi}{\Lambda}$ — постоянная распространения волны вдоль оси в волноводе. Учитывая уравнение (9.41), можно записать

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (k^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (9.42)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ — критическое волновое число. Оно соответствует режиму, при котором волновой фронт параллелен боковым поверхностям волновода, т. е. колебания происходят в поперечной плоскости.

Перенос электромагнитной энергии без затухания осуществляется в волноводе с идеально проводящими стенками при действительных значениях постоянной распространения γ , соответствующих докритическому режиму.

Поведение продольной компоненты поля L_z в волноводе определяется согласно (9.41) уравнением

$$\frac{\partial^2 L_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L_z}{\partial y^2} + k_0^2 L_z = 0. \quad (9.43)$$

В случае TM -волн $H_z = 0$ и решение для амплитуды электрического поля имеет вид

$$L_z(x, y) \sim \sin(k_1 x) \sin(k_2 y),$$

или

$$E_z = E_0 z \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \exp(j\gamma z). \quad (9.44)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям $E_z = 0$ на всех боковых стенках, или $\sin k_1 a = 0$, $\sin k_2 b = 0$. Из этих граничных условий найдем значения, которые могут принимать k_1 и k_2 :

$$k_1 a = m\pi; \quad k_2 b = n\pi,$$

где m и n — целые числа. Отсюда, с учетом (9.43) и (9.40), следует

$$k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 = \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2. \quad (9.45)$$

Тогда выражение для постоянной распространения (9.42) принимает вид

$$\gamma^2 = k^2 - k_0^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]. \quad (9.46)$$

Соответственно для критической длины волны имеем

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (9.47)$$

Целые числа m и n — индексы, характеризующие периодичность распределения поля по осям $0x$ и $0y$. Они определяют тип «электрической» TM -волны $E_{m,n}$ и могут принимать любые целые положительные значения.

Решения уравнения (9.41) для компонент E_x и E_y должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \\ E_y &= 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a. \end{aligned}$$

Кроме того, компоненты E_x , E_y и E_z связаны между собой, согласно первому уравнению Максвелла (9.1), уравнением непрерывности

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (9.48)$$

Из (9.44) и (9.48) следует выражение для компоненты электрического поля TM -волны в волноводе

$$\begin{aligned} E_x &= i\gamma \frac{m\pi}{a} e^{i\gamma z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right); \\ E_y &= i\gamma \frac{n\pi}{b} e^{i\gamma z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right); \\ E_z &= k_0^2 e^{i\gamma z} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \end{aligned} \quad (9.49)$$

где k_0^2 определяется (9.45).

Компоненты магнитного поля находим из (9.49) по принципу дуальности:

$$H_x = -ik \frac{n\pi}{b} e^{i\gamma z} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$H_y = ik \frac{m\pi}{a} e^{i\gamma z} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$H_z = 0.$$

Магнитные (TE) волны в волноводе характеризуются наличием продольной составляющей магнитного вектора.

В решении уравнения (9.43), с учетом граничных условий, продольная компонента TE -волны может быть записана в виде

$$L_z(x, y) = \cos(k_1 x) \cos(k_2 y),$$

или

$$H_z = H_0 z e^{i\gamma z} \cos(k_1 x) \cos(k_2 y).$$

Электрические поля E_x и E_y пропорциональны производным $\partial H_z / \partial y$ и $\partial H_z / \partial x$. Из граничных условий на стенках, как и для электрических волн, имеем (9.45):

$$k_1 a = m\pi; \quad k_2 b = n\pi.$$

Постоянная распространения и критическая длина определяются соответственно выражениями (9.46) и (9.47). Как и в случае TM -волн, находятся компоненты электрического и магнитного полей TE -волн:

$$E_x = -ik \frac{n\pi}{b} e^{i\gamma z} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$E_y = ik \frac{m\pi}{a} e^{i\gamma z} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$E_z = 0;$$

$$H_x = -i\gamma \frac{m\pi}{a} e^{i\gamma z} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$H_y = -i\gamma \frac{n\pi}{b} e^{i\gamma z} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right);$$

$$H_z = k_0^2 e^{i\gamma z} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right).$$

Одно из важных отличий TE -волн от TM -волн состоит в том, что один из индексов может быть равен нулю, так как H_z зависит от произведения косинусов. Следовательно, возможно распространение волн типа H_{0n} или H_{m0} . Разница между этими видами заключается в том, что волна H_{0n} характеризуется магнитными силовыми линиями, расположенными в плоскостях, параллельных yz , и электрическими, имеющими лишь E_x -компоненту. Волны H_{m0} имеют только E_y -компоненту электрического поля, в то время как магнитные силовые линии лежат в плоскостях, параллельных xz .

Как следует из (9.47), прямоугольный волновод может пропускать волны типа E_{mn} или H_{mn} при условии, что длина парциальной волны λ короче критической λ_0 . Отсюда для фазовой скорости получаем

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{c}{[1 - (\lambda/\lambda_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \geq c. \quad (9.50)$$

Групповая скорость определяется из выражения

$$\frac{\Lambda}{\lambda} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{d\gamma}. \quad (9.51)$$

Дифференцируя (9.46), находим

$$2\gamma d\gamma = 2k dk.$$

Откуда

$$\frac{dk}{d\gamma} = \frac{\gamma}{k} = \frac{(k^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}}{k}.$$

Рис. 9.10

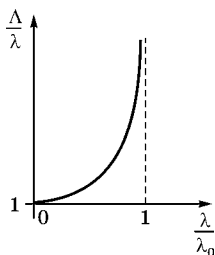
После подстановки в (9.51) и учитывая, что $d\omega/dk = c$, получаем

$$v_g = \frac{c(k^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}}{k} = c \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c.$$

Из выражений для фазовой и групповой скоростей следует уже полученное ранее соотношение

$$v_g v = c^2.$$

Зависимость Λ/λ от λ/λ_0 описывается выражением (9.50) и графически отображена на рис. 9.10.



Из рисунка видно, что при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ длина продольной волны $\Lambda \rightarrow \infty$, бегущая волна исчезает и перенос энергии вдоль волновода прекращается. В случае коротких волн, $\lambda/\lambda_0 \ll 0$, постоянная распространения γ стремится к значению k , $\Lambda \rightarrow \lambda$, $v_g \rightarrow c$, $v \rightarrow c$, и условия распространения в волновое приближаются к условиям распространения в свободном пространстве. Отсюда следует, что волновод обладает свойствами фильтра высоких частот с частотой пропускания ω выше критической ω_c :

$$\omega > \omega_c, \quad \omega_c = k_0 c.$$

Рис. 9.11 показывает зависимость фазовой и групповой скоростей продольной волны от параметра λ/λ_0 . Как

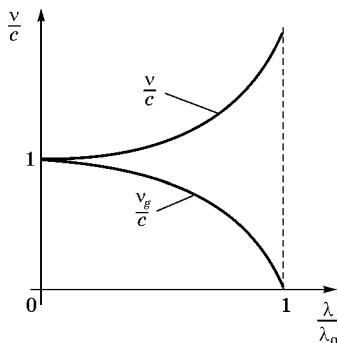


Рис. 9.11

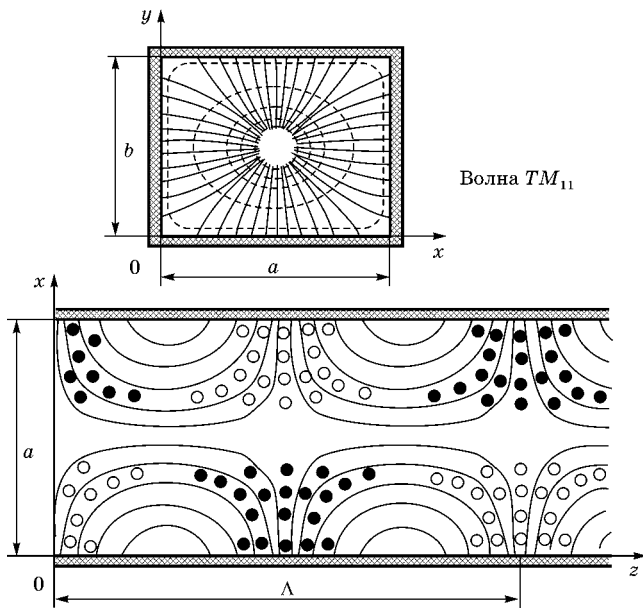


Рис. 9.12

следует из (9.49), простейший тип TM -волны соответствует индексам $m = 1$, $n = 1$. Нулевые значения индексов невозможны, так как при этом исчезает продольная компонента E_z и, соответственно, нарушаются условия существования электрической волны. Структура TM_{11} -волны изображена на рис. 9.12 в проекциях на плоскости xOy и $схOz$. Силовые линии электрического поля — сплошные, линии магнитного поля — штриховые. Критическую длину волны TM_{11} находим из (9.47) при $m = n = 1$:

$$\lambda_0 = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Если волновод квадратного сечения $a = b$, критическая длина волны TM_{11} равна диагонали $\lambda_0 = \sqrt{2}a$.

На рис. 9.13 показана структура электрической волны TM_{12} . Индекс $n = 2$ указывает, что вдоль стороны b укладываются два «периода». Из сравнения с рис. 9.12 видно,

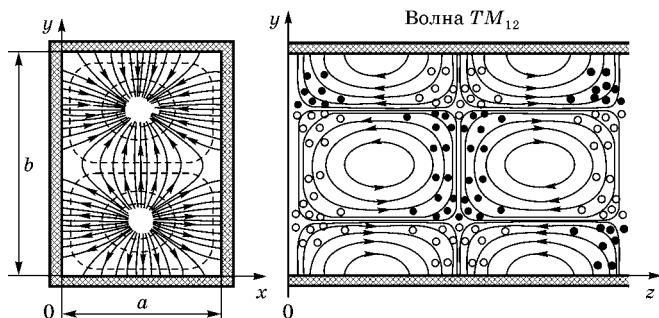


Рис. 9.13

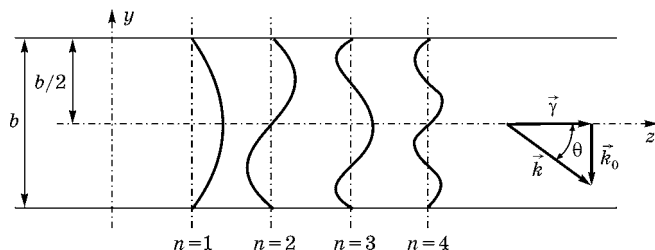


Рис. 9.14

что при переходе значения индекса n от $n = 1$ к $n = 2$, т. е. к системе электрических силовых линий, оканчивающихся на поверхностях волновода, добавляется замкнутая структура силовых линий внутри волновода.

Физически вдоль осей Oy и Ox мы имеем в волноводе режим стоячих волн. Рис. 9.14 иллюстрирует это для различных n в сечении yz (ширина стенок вдоль оси x неограниченно большая). Условие (9.45) можно рассматривать как условие синхронизации фаз: при прохождении волн между плоскостями туда и обратно фазовый сдвиг должен быть кратен 2π . Он включает в себя фазовые сдвиги за счет распространения и отражения от стенки.

Критической длине волны $\lambda_0 = 2b$ соответствует критическая частота

$$\omega_c = \frac{2\pi c}{\lambda_0}.$$

С другой стороны, согласно (9.39) и (9.45),

$$\sin \theta_n = \cos \varphi_n = \frac{n\lambda}{\lambda_0} = \frac{nk_0}{k} = n \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (9.52)$$

Отсюда следует, что условием распространения волн является

$$n \frac{\omega_c}{\omega} \leq 1,$$

и волны в таком волноводе могут распространяться только под углом

$$\theta_n = \arcsin \left(n \frac{\omega_c}{\omega} \right),$$

где $n = 1, 2, \dots, N$. Эти волны являются *колебательными модами*.

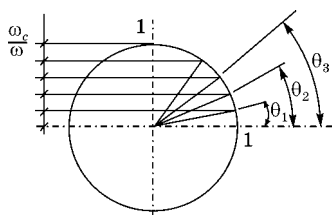


Рис. 9.15

На рис. 9.15 приведено геометрическое построение, позволяющее определить число возбужденных мод N на частоте ω . На всех частотах, кратных ω_c , появляется дополнительная мода. Формулы для фазовой (9.50) и групповой (9.51) скоростей в полосковом волноводе принимают вид

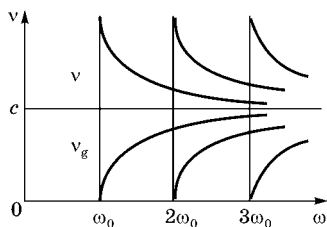


Рис. 9.16

$$v = c \left(1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$v_g = c \left(1 - n^2 \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зависимость фазовой v и групповой v_g скоростей показана на рис. 9.16.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 9

1. Как обосновать, пользуясь уравнениями Максвелла, поперечность электромагнитных волн?
2. Поясните физический смысл вектора Пойнтинга.
3. Что такое скин-эффект и как оценивается глубина скин-слоя?
4. Как проявляет среда свойства проводника или диэлектрика в зависимости от частоты поля?
5. Сформулируйте граничные условия для тангенциальной и нормальной компонент вектора электрической индукции на поверхности раздела двух сред.
6. Определите граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент вектора магнитной индукции на поверхности раздела.
7. Объясните аналогию выражений для коэффициентов отражения и преломления (прохождения) при нормальном падении волн различной физической природы на границу раздела в случаях распространения в сплошных средах и в линиях передач.
8. В чем заключается принцип дуальности?
9. Как следуют из граничных условий законы отражения и преломления электромагнитных волн на плоскости раздела двух сред?
10. В чем состоит явление полного внутреннего отражения?
11. В чем отличие физических механизмов, определяющих явление полного внутреннего отражения и скин-эффект?
12. Как определяется угол Брюстера?
13. Объясните аналогию распространения волн в сплошной среде и в линии передачи, воспользовавшись понятием локального импеданса.
14. Какие параметры характеризуют распространение электромагнитных волн в идеальном металлическом волноводе?
15. Опишите структуру TM -волны в металлическом волноводе. Какие значения могут принимать индексы m и n , характеризующие «электрическую волну» $E_{m,n}$?

16. Какова структура TE -волны в металлическом волноводе? Укажите значения индексов m и n , характеризующих «магнитную» волну $H_{m,n}$?
17. В чем состоит условие синхронизации фаз при распространении электромагнитной волны в металлическом волноводе?
18. Как формируются колебательные моды электромагнитного поля, распространяющегося в металлическом волноводе?
19. Как соотносятся фазовая и групповая скорости электромагнитного поля в металлическом волноводе?

ЗАДАЧИ

9.1. Найти отношение толщины скин-слоя в меди на частотах 1 кГц и 100 МГц.

9.2. Определить плотность энергии и среднеквадратичное значение электрического поля в световом импульсе излучения рубинового лазера (длительность импульса — 0,1 мс; энергия — 0,3 Дж; радиус сечения пучка — 2 мм).

9.3. Определить среднеквадратичное значение амплитуды электрического поля солнечного излучения на поверхности Земли. Поток энергии солнечного излучения на поверхности при нормальном падении составляет 1,35 кВт/м². Учитывая формулу Эйнштейна $E = mc^2$ для связи энергии и массы, определить массу, теряемую Солнцем на излучение за 1 с.

9.4. Электромагнитные свойства морской воды характеризуются средними параметрами: $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$, $\sigma = 4,3$ Си/м. Оценить границу между частотными интервалами, в которых океанская вода ведет себя как проводник или диэлектрик.

9.5. Найти разность фаз нормально падающей на металл и отраженной волн.

9.6. Определить азимут отраженной и преломленной волн в случае, когда на диэлектрик падает под углом ϕ плоскополяризованный свет с азимутом α ,

$$E_i(TE)/E_i(TM) = \operatorname{tg} \alpha.$$

9.7. Определить коэффициент отражения при нормальном падении света на диэлектрик в вакууме. (Для

диэлектрика в вакууме относительная диэлектрическая проницаемость равна относительной магнитной проницаемости.)

9.8. Световой луч проходит несколько сред, разделенных плоскопараллельными границами. Показать, что направление выходящего луча зависит только от направления входящего луча и показателей преломления первой и последней сред.

9.9. Определить самую низкочастотную моду электромагнитных колебаний в прямоугольном объемном резонаторе, размеры которого $a > b > d$. Стенки резонатора — идеально проводящие.

ВОЛНЫ В ОПТИКЕ

10.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

Интерференция определяется свойствами поля, возникающего при наложении оптических волн в заданном пространственно-временном интервале.

Рассмотрим ситуацию, когда поле в точке **R** является результатом суперпозиции N плоских световых волн, для которых разность фаз между n -й и $n + 1$ волнами равна постоянной величине $\Delta\varphi$:

$$E = E_0 \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-in\Delta\varphi). \quad (10.1)$$

Здесь E — комплексная амплитуда результирующего поля; E_0 — амплитуда парциальной плоской волны. Выражение (10.1) представляет собой сумму N членов геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-i\Delta\varphi)$. Отсюда

$$E = E_0 \frac{\exp(-iN\Delta\varphi) - 1}{\exp(-i\Delta\varphi) - 1} = E_0 \frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \exp\left[-i\frac{1}{2}(N-1)\Delta\varphi\right].$$

Переходя к интенсивности, получаем

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}, \quad (10.2)$$

где $I_0 = |E_0|^2$.

Если величина фазового сдвига мала ($\Delta\varphi/2 \ll 1$), выражение (10.2) принимает вид

$$I \cong N^2 I_0 \frac{\sin^2 \left(N \frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{\left(N \frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2} \cong N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(N \frac{\Delta\varphi}{2} \right).$$

Введем обозначение $N \frac{\Delta\varphi}{2} = \alpha$. Тогда

$$I \cong N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2(\alpha). \quad (10.3)$$

Из (10.3) следует, что максимум интенсивности поля определяется условием $\frac{d}{d\alpha} \operatorname{sinc}^2(\alpha) = 0$. Отсюда получаем $\alpha m = 0$ или $\alpha m = \operatorname{tg} \alpha m$. Следовательно, максимум интенсивности определяется точками пересечения функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ с прямой $y = \alpha$. Минимумы интенсивности соответствуют $\alpha = n\pi/2$. Эти же положения экстремумов и нулей справедливы и для амплитуды. В случае синфазных излучателей ($\Delta\varphi = 0$) интенсивность результирующего поля пропорциональна квадрату числа источников:

$$I = N^2 I_0. \quad (10.4)$$

Рассмотрим интерференцию световых волн со случайной взаимной разностью фаз. Поле определяется выражением (10.1), где $\Delta\varphi$ — случайная величина. Переходя к интенсивности, находим

$$\begin{aligned} I &\cong \frac{1}{2} I_0 \left\{ \sum_{\substack{n,m \\ n=0 \\ m=0}}^{N-1} \exp(-jn\Delta\varphi) \exp(jm\Delta\varphi) \right\} \cong \\ &\cong I_0 \left\{ N + 2 \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}}^{N-1} \cos[(n-m)\Delta\varphi] \right\}. \end{aligned}$$

Для равномерного распределения $\Delta\varphi$ на интервале $(0 \div 2\pi)$ имеем в результате усреднения:

$$\left\langle \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}}^{N-1} \cos[(n-m)\Delta\varphi] \right\rangle = 0.$$

Отсюда

$$\langle I \rangle = NI_0; \quad (10.5)$$

$$\langle E \rangle = \sqrt{N} E_0. \quad (10.6)$$

Сравнение выражений (10.5) и (10.6) указывает на качественное различие когерентных и некогерентных полей в оптике. Для N когерентных излучателей интенсивность результирующего поля пропорциональна квадрату числа источников. Соответственно амплитуда пропорциональна числу излучателей. Некогерентные источники излучают со случайными фазами. Интенсивность результирующего поля в этом случае пропорциональна числу излучателей, а амплитуда — корню квадратному из числа источников.

Обратимся к рис. 10.1, иллюстрирующему двухлучевую интерференцию. Для интенсивности поля при $N = 2$ из выражения (10.2) имеем

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right). \quad (10.7)$$

Отсюда

$$I = 2I_0(1 + \cos\Delta\phi). \quad (10.8)$$

Как следует из (10.7) и (10.8), структура интерференционного поля содержит пьедестал $2I_0$ и интерференционную компоненту $2I_0\cos\Delta\phi$, которая зависит от разности

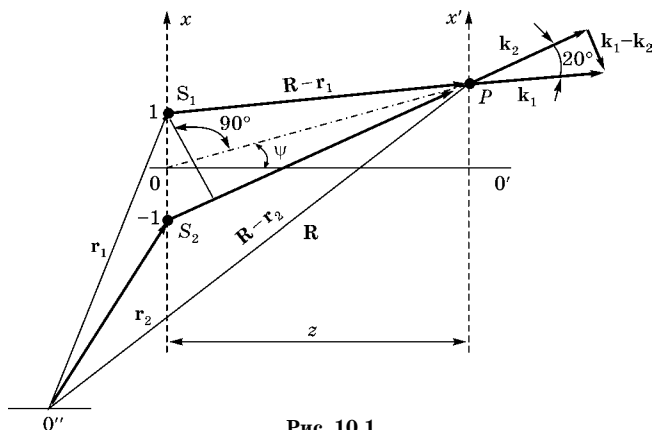


Рис. 10.1

фаз световых волн, приходящих от источников в точку регистрации.

Исследуем структуру фазового члена в (10.8), когда источники излучают с разными частотами. Световые волны, приходящие в точку P , запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \exp\{-i[\omega_1 t - \mathbf{k}_1(\mathbf{R} - \mathbf{r}_1)]\}; \\ E_2 &= E_0 \exp\{-i[\omega_2 t - \mathbf{k}_2(\mathbf{R} - \mathbf{r}_2)]\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки P , $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы источников S_1 и S_2 .

Интенсивность светового поля в точке P

$$I = |E_1 + E_2|^2 = 2E_0^2 \{1 + \cos[\omega_{12}t - \mathbf{k}_{12}\mathbf{R} + \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2]\}. \quad (10.9)$$

Здесь $\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$.

Сравнивая (10.9) и (10.8), находим

$$\Delta\varphi = \omega_{12}t - \mathbf{k}_{12}\mathbf{R} + \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2.$$

Уравнение, описывающее положение интерференционной полосы, следует из условия $\Delta\varphi = 2n\pi$. Отсюда видно, что при $\omega_{12} \neq 0$ пространственное распределение полос зависит от времени. Дифференцируя $\Delta\varphi$, находим скорость перемещения интерференционных полос $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}'}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}\Delta\varphi = \omega_{12} - \mathbf{k}_{12}\mathbf{V} = 0.$$

Откуда

$$\mathbf{V} = \frac{\omega_{12}\mathbf{k}_{12}}{|\mathbf{k}_{12}|^2}. \quad (10.10)$$

Следовательно, скорость перемещения полос равна отношению разности частот к модулю разности волновых векторов интерферирующих световых волн, а ее направление определяется направлением разностного волнового вектора $\mathbf{k}_{12}$. Из рис. 10.1 видно, что при $\frac{\omega_{12}}{\omega} \ll 1$, что обычно выполняется на практике, модуль разностного вектора $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| = 2k\sin\theta$, где θ — угол между волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Тогда из (10.10) следует, что направление скорости движения полос в выбранной точке интерференционного

поля коллинеарно разности волновых векторов $\mathbf{k}_{12}$, а модуль скорости равен

$$V = \frac{\omega_{12}}{2k \sin \theta}.$$

Знак скорости определяется разностью частот ω_{12} полей источников. В случае когда интерференционное поле исследуется между источниками на оси x , $\theta = \pi/2$ и $V = \frac{\omega_{12}}{2\omega}$ с. Интерференционные полосы движутся в сторону источника, излучающего поле меньшей частоты. В случае одинаковых частот ($\omega_{12} = 0$ и, соответственно, $\mathbf{V} = 0$) максимумы интенсивности расположены в точках, в которых разность оптических путей от источников удовлетворяет условию $\mathbf{k}_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{R}_2 = 2n\pi$ и является кратной целому числу волн (при большом расстоянии от источников до точки наблюдения):

$$k(R_1 - R_2) = 2n\pi, \quad (10.11)$$

где $R_1 = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|$; $R_2 = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_2|$; $k = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$. Интенсивность результирующего поля максимальна, когда $\Delta\varphi = 2n\pi$, $I = 4I_0$, и она обращается в нуль, если световые волны приходят от источников в противофазе, $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$. Это означает, что интерферирующие волны гасят друг друга, когда разность оптических путей от источников до точки наблюдения кратна нечетному числу полуволн: $R_1 - R_2 = (n + 1/2)\lambda$. При интерференции полная энергия световых волн сохраняется. Происходит лишь перераспределение энергии из областей с минимальной интенсивностью в пространственные интервалы, где локализуются максимумы интерференционной картины. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (10.11), образует семейство гипербол с фокусами в точках S_1 и S_2 . Каждая из гипербол отражает положение линии максимальной интенсивности, соответствующей разности фаз, кратной 2π . В трехмерном пространстве геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию (10.11), являются гиперболические поверхности вращения. Если $\Delta\varphi \ll 1$, источники излучают в режиме, близком к синфазному. Поэтому два источника можно заменить одним с амплитудой излучения волны $\sim 2E_0$.

Рассмотрим двухлучевую интерференцию от движущихся точечных источников, излучающих на одной частоте. Обратимся снова к рис. 10.1. Пусть радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, задающие положение источников, зависят от времени:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t); \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t).$$

Тогда интенсивность интерференционного поля в точке наблюдения P описывается формулой, аналогичной (10.9), в которой следует положить $\omega_{12} = 0$:

$$I = 2E_0^2 \{1 + \cos[\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{k}_{12} \mathbf{R}]\}.$$

Отсюда видно, что разность фаз $\Delta\varphi$ интерферирующих в точке P световых волн равна

$$\Delta\varphi = \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{k}_{12} \mathbf{R}.$$

Скорость перемещения интерференционных полос в точке P определим из условия

$$\frac{d}{dt} \Delta\varphi = \mathbf{k}_1 \mathbf{V}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{k}_{12} \mathbf{V} = 0,$$

где $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — скорости движения первого и второго источников; $\mathbf{V}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$, $\mathbf{V}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$, $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$. Решая полученное уравнение, находим скорость перемещения интерференционных полос $\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{V}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{V}_2}{|\mathbf{k}_{12}|^2} \mathbf{k}_{12} = \frac{\omega_{D1} - \omega_{D2}}{|\mathbf{k}_{12}|} \frac{\mathbf{k}_{12}}{|\mathbf{k}_{12}|} = \\ &= \frac{\Lambda}{2\pi} (\omega_{D1} - \omega_{D2}) \frac{\mathbf{k}_{12}}{|\mathbf{k}_{12}|} = \Lambda (v_{D1} - v_{D2}) \frac{\mathbf{k}_{12}}{|\mathbf{k}_{12}|}. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{D1} = \mathbf{k}_1 \mathbf{V}_1 = 2\pi v_{D1}$ и $\omega_{D2} = \mathbf{k}_2 \mathbf{V}_2 = 2\pi v_{D2}$ — доплеровские сдвиги частоты световых волн от первого и второго источников в системе отсчета наблюдателя в точке P ; $|\mathbf{k}_{12}| = 2k \sin \theta = \frac{2\pi}{\Lambda}$; $\Lambda = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$ — пространственный период интерференционного поля; $\mathbf{k}_{12}$ — волновой вектор интерференционного поля, равный разности волновых

векторов полей от первого и второго источников в точке P ; $\frac{\mathbf{k}_{12}}{|\mathbf{k}_{12}|}$ — единичный вектор, указывающий направление скорости перемещения интерференционных полос $\mathbf{V}$ в точке P . Мы получили, что скорость перемещения интерференционных полос $\mathbf{V}$ равна произведению разности доплеровских сдвигов частоты в световых волнах от первого и второго источников на пространственный период интерференционного поля в точке P . Направление скорости перемещения интерференционных полос определяется направлением вектора $\mathbf{k}_{12}$, равного разности волновых векторов полей от первого и второго источников.

Рассмотрим важный для практики случай, когда точечные источники генерируют световые волны в противофазе. Разность фаз световых сигналов, приходящих в точку наблюдения, равна

$$\Delta\varphi = \pi + 2kl\sin\psi, \quad (10.12)$$

где, согласно рис. 10.2, $\psi = x/z$; $2l$ — расстояние между источниками. Подставляя $\Delta\varphi$ из (10.12) в (10.7), получаем для интенсивности результирующего поля

$$I \cong 4I_0 \sin^2(kl\sin\psi). \quad (10.13)$$

На рис. 10.2 показаны угловое распределение интенсивности излучения двух противофазных точечных источников (a) и угловое распределение интенсивности излучения двух синфазных точечных источников (b).

Если расстояние между источниками меньше длины волны, $kl \ll 1$, то

$$I \cong 4I_0 k^2 l^2 \sin^2\psi. \quad (10.14)$$

Как следует из (10.13) и (10.14), интенсивность излучения системы из двух противофазных источников зависит от произведения kl . При $kl \ll 1$ она оказывается много меньше интенсивности излучения отдельного точечного

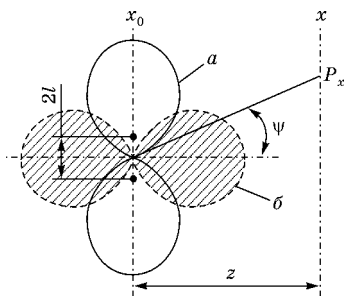


Рис. 10.2

источника и растет с уменьшением длины волны. На низких частотах такой излучатель значительно менее эффективен, чем на высоких. Важное его свойство — узкая пространственная направленность излучения. В отличие от синфазной пары источников противофазная пара имеет максимум излучения в направлении $\psi = \pi/2$, $\psi = 3/2\pi$ и не излучает в направлении $\psi = 0$, $\psi = \pi$. Это свойство направленности излучения широко используется при создании передающих и приемных антенн.

Обратимся к более общему случаю, когда параметр kl составляет величину порядка единицы. Как следует из (10.13), максимальная интенсивность излучения получается при условии

$$kl \sin \psi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (10.15)$$

Для полуволнового излучателя расстояние между источниками кратно нечетному числу полуволн $2l = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, а интенсивность излучения, согласно (10.15), максимальна в направлениях $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ и минимальна при $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Пространственное распределение максимумов излучения при произвольном параметре kl следует из условия (10.15).

10.2. МНОГОЛУЧЕВАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

В качестве примера системы, в которой реализуется многолучевая интерференция, рассмотрим оптический резонатор с плоскими зеркалами (интерферометр Фабри–Перо), показанный на рис. 10.3. Расстояние между зеркалами M_1 и M_2 равно L . Коэффициенты отражения зеркал r (по амплитуде) и r^2 (по мощности). Соответственно, коэффициент пропускания τ (по амплитуде) и τ^2 (по мощности), $r^2 + \tau^2 = 1$.

Пусть E_0 — амплитуда падающей на зеркало M_1 волны. Тогда результирующая комплексная амплитуда прошедшего через интерферометр поля $\hat{E}_\tau$ с учетом многократного отражения от зеркал описывается суммой ком-

плексных амплитуд световых волн, испытавших 0, 2, 4, ..., 2n отражений:

$$\begin{aligned}\hat{E}_\tau &= \sum_{n=1}^N E_0 \tau^2 (1 + r^{2n} e^{i n \varphi}) = \\ &= \frac{E_0 \tau^2}{1 - r^2 e^{i \varphi}},\end{aligned}\quad (10.16)$$

где $\varphi = 2kL$ (в случае нормального падения). Здесь мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. Переходя к интенсивности, преобразуем формулу (10.16) к виду

$$\begin{aligned}I_\tau &= \left| \frac{E_0 \tau^2}{1 - r^2 e^{i \varphi}} \right|^2 = \frac{I_0 \tau^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{I_0 \tau^4}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{I_0}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.\end{aligned}$$

Отсюда для относительной интенсивности $\tilde{I}_\tau$ интерференционной картины в прошедшем свете получаем

$$\tilde{I}_\tau = \frac{I_\tau}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 kL}. \quad (10.17)$$

В многолучевой интерферометрии выражение (10.17) получило название *формулы Эйри*. Как видно из (10.17), при $kl = m\pi$ интенсивность интерференционного поля $\tilde{I}_\tau$ имеет максимальное значение, $\tilde{I}_{\tau \max} = 1$, а при $kl = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ — минимальное, $\tilde{I}_{\tau \min} = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2}$. Пропускание интерферомет-

ра Фабри–Перо (ИФП) в зависимости от kL имеет вид гребенчатой функции, как это показано на рис. 10.4.

Определим частотный интервал между соседними максимумами. Этот интервал

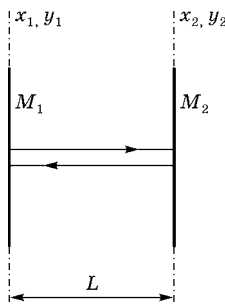


Рис. 10.3

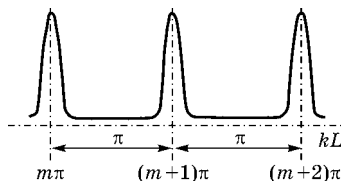


Рис. 10.4

называется *дисперсионным*. Для соседних максимумов имеем

$$k_1 L = m\pi, \quad k_2 L = (m + 1)\pi$$

или

$$\frac{2L}{\lambda_1} = m, \quad \frac{2L}{\lambda_2} = 2m + 1,$$

откуда

$$2L \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 1. \quad (10.18)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

получаем для (10.18)

$$\frac{2L\Delta\lambda}{\lambda^2} = 1. \quad (10.19)$$

В многолучевой интерферометрии величину $\Delta\lambda$, определяемую из (10.19) как $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$, называют *областью свободной дисперсии*. Принимая во внимание

$$\Delta\nu = c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

и подставляя $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{\Delta\nu}{c}$ в (10.19), находим частотный дисперсионный интервал оптического резонатора с плоскими зеркалами

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}. \quad (10.20)$$

Из (10.20) видно, что дисперсионный интервал является величиной, обратной времени прохождения световой волной удвоенного расстояния между зеркалами:

$$\tau_0 = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{2L}{c}.$$

На рис. 10.5 показана функция пропускания фильтра на основе оптического резонатора с плоскими зеркалами при различных значениях коэффициента отражения r^2 .

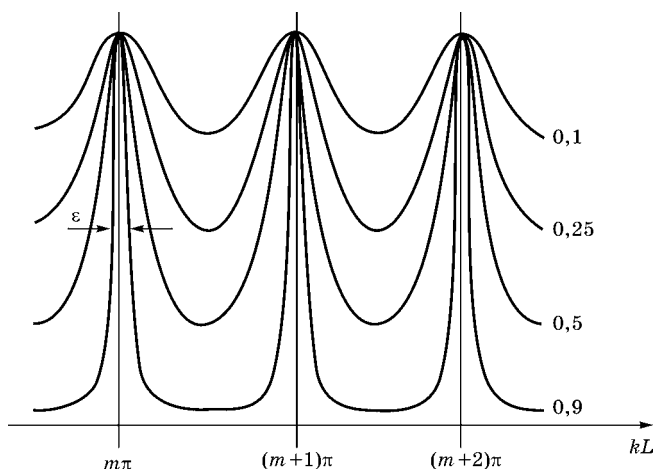


Рис. 10.5

Поскольку

$$kL = \frac{\omega}{c} L = \pi \nu \frac{2L}{c} = \pi \frac{\nu}{\Delta \nu} = \pi \frac{m\Delta \nu + \delta \nu}{\Delta \nu} = m\pi + \frac{\nu}{\Delta \nu},$$

на рис. 10.4 и 10.5 отображается зависимость функции пропускания ИФП от частоты, нормированной на частотный дисперсионный интервал. Максимум пропускания приходится на частоты, которые отличаются друг от друга на величину, кратную дисперсионному интервалу (10.20), имеющему смысл межмодового интервала. Резонансные частоты являются частотами нормальных мод колебаний, возбужденных в интерферометре Фабри–Перо как в осцилляторе. Оценим полосу пропускания оптического ИФП в окрестности резонансной частоты. Пусть

$$kL = m\pi + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (10.21)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Подставляя (10.21) в (10.17), получаем

$$\tilde{I}_\tau(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \approx \frac{1}{1 + \frac{r^2 \varepsilon^2}{(1-r^2)^2}}.$$

Ширина контура пропускания ε оценивается на уровне $1/2$ из условия:

$$\tilde{I}_\tau(\varepsilon) = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\tau \max} H_W^\tau = \frac{1}{2}$$

или

$$\frac{1}{1 + \frac{r^2 \varepsilon^2}{(1-r^2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим для ширины контура пропускания

$$\varepsilon = \frac{1-r^2}{r}.$$

Определим параметр F , называемый резкостью, как отношение дисперсионного интервала к ширине контура пропускания в окрестности резонансной частоты

$$F = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{r\pi}{1-r^2}. \quad (10.22)$$

Подставляя (10.22) в (10.17), получаем

$$\tilde{I}_\tau = \frac{1}{1 + \frac{4F^2}{\pi^2} \sin^2 kL} = \frac{1}{1 + \frac{4F^2}{\pi^2} \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{4F^2}{\pi^2} \sin^2(\alpha\pi)},$$

где $kL = m\pi + \varphi = (m + \alpha)\pi$, $\alpha = \frac{\varphi}{\pi}$. При $\alpha\pi \ll 1$ $\tilde{I}_\tau$ описывает когерентную передаточную пропускания в окрестности максимума:

$$H_W^\tau \approx \frac{1}{1 + 4F^2 \alpha^2}. \quad (10.23)$$

Рассмотрим контур пропускания фильтра с когерентной обратной связью как функцию частоты светового поля. Для этого запишем (10.21) в виде

$$kL = \frac{(\omega_m + \delta\omega)L}{c} = (m + \alpha)\pi$$

или, учитывая, что $\frac{\omega_m L}{c} = m\pi$,

$$\frac{\delta\omega L}{c} = (\omega - \omega_m) \frac{L}{c} = \alpha\pi.$$

Отсюда

$$\alpha = (\omega - \omega_m) \frac{L}{\pi c} = (v - v_m) \frac{2L}{c} = \frac{(v - v_m)}{\Delta v} = \frac{\delta v}{\Delta v}.$$

Пример такого контура пропускания показан на рис. 10.6. Изменение частоты светового поля на входе ИФП трансформируется в соответствующее изменение интенсивности на выходе. Следовательно, оптическая система с когерентной обратной связью может выполнять функцию частотного демодулятора светового сигнала.

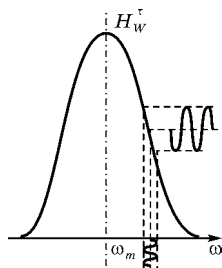


Рис. 10.6

Мы исследовали фильтрующие свойства оптического резонатора с плоскими зеркалами в проходящем свете. Исследуем эту оптическую систему в отраженном свете. Запишем выражение для коэффициента передачи по мощности в отраженном свете $\tilde{I}_r$, учитывая соотношения $\tilde{I}_r + \tilde{I}_\tau = 1$ и $r^2 + \tau^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r &= 1 - \tilde{I}_\tau = 1 - \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 kL} = \\ &= \frac{4r^2 \sin^2 kL}{(1-r^2)^2 \left[1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 kL \right]}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Здесь мы воспользовались формулой (10.17) для коэффициента передачи по мощности в проходящем свете.

Очевидно, что при $kL = m\pi$ $\tilde{I}_{\tau \min} = 0$. Максимальное значение интенсивности интерференционного поля в отраженном свете получается при $kL = (m + 1/2)\pi$:

$$\tilde{I}_{r \max} = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}.$$

Интенсивность отраженного света в зависимости от параметра kL для ИФП имеет вид гребенчатой функции (рис. 10.7), связанной с соответствующей функцией для резонатора в проходящем свете соотношением

$$\tilde{I}_r = 1 - \tilde{I}_\tau.$$

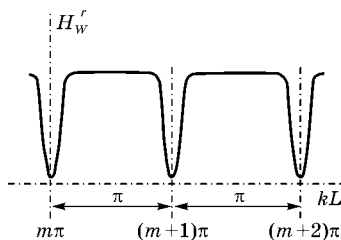


Рис. 10.7

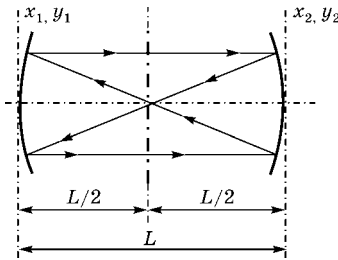


Рис. 10.8

Рассмотрим многолучевой интерферометр, выполненный на основе оптического конфокального резонатора со сферическими зеркалами, упрощенная схема которого показана на рис. 10.8.

Радиус кривизны каждого сферического зеркала равен L , фокусное расстояние $L/2$. Фо-

кальные плоскости сферических зеркал, образующих конфокальный резонатор, совмещены.

Рассмотрим структуру интерференционного поля в проходящем свете для конфокального интерферометра. Комплексная амплитуда $\hat{E}_{tc}$ этого поля с учетом многократного отражения от зеркал описывается выражением:

$$\hat{E}_{tc} = \sum_{n=0}^N E_0 \tau^2 (1 + r^{4n} e^{in\psi}) = \frac{E_0 \tau^2}{1 - r^4 e^{i\psi}}, \quad (10.25)$$

где $\psi = 4kL$. При получении выражения (10.25) мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. Переходя к интенсивности, преобразуем (10.25) к виду

$$\begin{aligned} I_{rc} &= \left| \frac{E_0 \tau^2}{1 - r^4 e^{i\psi}} \right|^2 = \frac{I_0 \tau^4}{1 + r^8 - 2r^4 \cos \psi} = \\ &= \frac{I_0 \tau^4}{1 + r^8 - 2r^4 \left(1 - 2\sin^2 \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{I_0 \tau^4}{(1 - r^4)^2 + 4r^4 \sin^2 \frac{\psi}{2}}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Отсюда находим выражение для относительной интенсивности $\tilde{I}_{tc}$ интерференционного поля в проходящем свете

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{tc} &= \frac{\tau^4}{(1 - r^4)^2 + 4r^4 \sin^2 \frac{\psi}{2}} = \\ &= \frac{1}{(1 + r^2)^2 \left[1 + \frac{4r^4}{(1 - r^4)^2} \sin^2 2kL \right]}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

В (10.27) мы воспользовались тем, что $\tau^2 = 1 - r^2$ и $\psi = 4kL$. Относительная интенсивность интерференционного поля в отраженном свете $\tilde{I}_{\text{тс}}$ определяется, как и в случае ИФП, из соотношения

$$\tilde{I}_{\text{тс}} + \tilde{I}_{\text{rc}} = 1.$$

Из уравнений (10.27) и (10.17) видно, что структура интерференционного поля на выходе конфокального интерферометра и интерферометра Фабри–Перо описывается сходными выражениями, если выполнить переобозначения $2L \leftrightarrow L$, $r^4 \leftrightarrow r^2$. С учетом этих переобозначений рис. 10.4–10.7 могут отображать с точностью до масштабного коэффициента по оси ординат структуру интерференционного поля, формируемого конфокальным интерферометром.

ПРИМЕР 10.1

Оценить добротность оптического резонатора с плоскими зеркалами (интерферометр Фабри–Перо). Расстояние между зеркалами $L = 0,5$ м, коэффициент отражения по мощности $r^2 = 0,5$.

Решение.

Будем считать, что энергия E , запасенная в резонаторе, теряется из-за частичного пропускания зеркал, энергетический коэффициент отражения которых r^2 . Потери энергии dE в резонаторе за временной интервал dt составят

$$dE = -E(1 - r^2) \frac{c}{L} dt. \quad (10.28)$$

По определению, добротность связана с затуханием энергии по формуле

$$E = E \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right).$$

Отсюда

$$dE = -E_0 \frac{\omega}{Q} dt. \quad (10.29)$$

Приравнявая (10.29) и (10.28) находим оценочную формулу для добротности оптического резонатора

$$Q = \frac{\omega L}{c(1-r^2)} = \frac{2\pi L}{\lambda(1-r^2)}.$$

Подставляя $r = 0,5$, $\lambda = 0,5$ мкм, $L = 0,5$ м, получаем $Q \sim 10^7$.

ПРИМЕР 10.2

Оценить добротность конфокального резонатора при тех же параметрах r^2 и L , что указаны в примере 10.1.

Решение.

Добротность конфокального резонатора Q_c описывается выражением, аналогичным (10.30), при замене r^2 на r^4 и L на $2L$:

$$Q_c = \frac{4\pi L}{\lambda(1-r^4)}. \quad (10.30)$$

Подставляя в (10.30) $r = 0,5$, $\lambda = 0,5$ мкм, $L = 0,5$ м, получаем $Q \sim 10^8$. На практике энергетические потери, обусловленные дисперсионными свойствами среды в резонаторе, дифракционными явлениями, разъюстировкой и неидеальностью зеркал, снижают реальную добротность.

10.3. ДИФРАКЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

Дифракцию определяют как всякое отклонение световых лучей от прямой линии, если оно не может быть объяснено отражением или преломлением. Теория дифракции исследует волновые процессы в тех случаях, когда на пути распространения световой волны имеются какие-либо препятствия (экраны или отверстия в экранах, оптические неоднородности среды и т. д.). Если размер оптических неоднородностей порядка длины волны (например, капельки тумана или частицы дыма в воздухе), то вместо дифракции обычно говорят о рассеянии света. Дифракционные задачи, прямые и обратные, возникают при исследовании структуры оптических сигналов от разных объектов, отличающихся размерами и формой. Строгий анализ требует решения уравнений Максвелла при опре-

деленных граничных условиях, что связано с большими трудностями и возможно далеко не всегда. Поэтому в современной оптике эффективно применяются упрощенные методы решения дифракционных задач.

Преобразование светового поля слоем пространства в параксиальном приближении.

При анализе распространения световых полей в оптических системах и дифракционной оптике широко используется параксиальное приближение, когда волновой вектор световой волны направлен под небольшим углом к оптической оси (рис. 10.9). Если

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \text{ и } \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_z^2} \ll 1,$$

то волновой вектор $\mathbf{k}$ является параксиальным и для его z -компоненты справедливо выражение

$$k_z = [k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{\frac{1}{2}} \approx k - \frac{1}{2k}(k_x^2 + k_y^2).$$

Это равносильно утверждению, что функция $y(x, y, z)$, описывающая световое поле, по отношению к переменным x и y является медленной функцией, чем в зависимости от координаты z . Поэтому функцию $y(x, y, z)$ можно записать в виде произведения амплитудного и фазового множителя

$$\psi(x, y, z) = A(x, y, z)e^{ikhz},$$

где амплитудный множитель является медленным по сравнению с экспонентой.

Допустим, что среда, в которой распространяется свет, однородна. Воспользуемся параксиальным приближением (рис. 10.9).

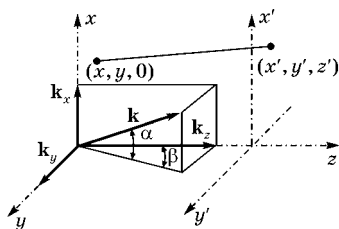


Рис. 10.9

Решением волнового уравнения является плоская монохроматическая волна вида

$$E(\mathbf{R}, t) = E(\mathbf{R})\exp\{-i\omega t\},$$

где $E(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\exp\{i(\mathbf{kR} - \varphi)\}$ — комплексная амплитуда поля. Волновое число k однозначно определяется через проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на оси ортогонального координатного базиса:

$$k^2 = 4\pi^2 / \lambda^2 = \omega^2 / c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

где $k_x = k\sin\alpha$, $k_y = k\cos\alpha\sin\beta$, $k_z = k\cos\alpha\cos\beta$; α и β — углы, задающие направление волнового вектора. Если выбрать k_x и k_y независимыми переменными, то

$$k_z = \pm(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда выражение для комплексной амплитуды поля запишем в виде

$$E(x, y, z) = A\exp\{-i\varphi\}\exp\{\pm iz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}\}\exp\{i(k_x x + k_y y)\}.$$

Поскольку волновое уравнение — линейное и для него справедлив принцип суперпозиции, общее решение этого уравнения можно разложить по плоским волнам в интеграл суперпозиции

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int G(k_x, k_y, 0) \exp\{\pm iz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}\} \times \\ \times \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y. \quad (10.31)$$

Здесь $G(k_x, k_y, 0)$ — функция, описывающая угловой спектр поля. Название «угловой спектр» связывается с тем, что функция G определяет распределение амплитуд и фаз плоских волн по направлениям, которые задаются переменными k_x и k_y . В радиофизике это выражение известно как приближение Рэлея.

Сведем дифракционную задачу к следующей: известно распределение поля $E(x, y, 0)$ в плоскости $z = 0$. Требуется найти поле в произвольной точке $M(x, y, z)$ в полупространстве $z > 0$. Поскольку функция (10.31) аналитическая, она однозначно задается своими значениями на произвольной замкнутой поверхности, ограничивающей пространство $z > 0$. Выберем в качестве такой поверхности плоскость $z = 0$ и полусферу бесконечного радиуса, опирающуюся на эту плоскость. Граничным условием на

этой сфере является равенство нулю значений функции (10.31). Физическая обоснованность этого решения следует из конечной скорости распространения света. Выбранные граничные условия известны как приближение Кирхгофа.

Выбор граничных условий на полусфере бесконечного радиуса позволяет устранить знаковую неопределенность показателя экспоненты в интеграле суперпозиции (10.31). Если выбрать знак «плюс», то неоднородная волна, распространяющаяся в слабопоглощающейся среде в направлении $z > 0$, будет затухать, что соответствует физической реальности.

Из (10.31) получаем разложение поля в плоскости $z = 0$:

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int G(k_x, k_y, 0) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y.$$

Это выражение представляет собой интеграл Фурье. Угловой спектр $G(k_x, k_y, 0)$ и поле $E(x, y, 0)$ являются фурье-сопряженными функциями

$$G(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x, y, 0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy. \quad (10.32)$$

Обратимся теперь к выражению (10.31). Найдем угловой спектр поля в произвольной плоскости z . Выполняя обратное фурье-преобразование, получим

$$\begin{aligned} G(k_x, k_y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x, y, z) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy = \\ &= G(k_x, k_y, 0) H(k_x, k_y). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Отсюда следует, что угловой спектр поля в произвольной плоскости z определяется произведением углового спектра поля в плоскости $z = 0$ на когерентную передаточную функцию (КПФ), которая описывает фильтрующие свойства пространства, заключенного между плоскостями $z = 0$ и z :

$$H(k_x, k_y) = \exp\{iz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}\}. \quad (10.34)$$

Угловой спектр поля в плоскости $z = 0$ есть фурье-образ поля в этой плоскости (10.32). Аналогично $H(K_x, K_y)$ можно определить как фурье-образ функции $h(x, y)$:

$$H(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy. \quad (10.35)$$

Функции $h(x, y)$ и $H(k_x, k_y)$ составляют фурье-сопряженную пару:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dx dy.$$

Подставляя (10.32) и (10.35) в (10.33), получаем

$$\begin{aligned} G(k_x, k_y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp\{-i(k_x \xi + k_y \eta)\} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) dx dy \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp\{-i[k_x(x + \xi) + k_y(y + \eta)]\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных. $x + \xi = x'$, $y + \eta = y'$. Тогда

$$\begin{aligned} G(k_x, k_y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(k_x x' + k_y y')\} dx' dy' \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) h(x' - x, y' - y) dx dy. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Сравнивая (10.36) и (10.33), приходим к выражению для поля в произвольной плоскости z

$$E(x', y', z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) h(x' - x, y' - y) dx dy. \quad (10.37)$$

Из (10.37) следует, что поле в плоскости z представляется сверткой входного поля (сформированного в плоскости $z = 0$) с функцией $h(x' - x, y' - y)$. Для нахождения этой функции в случае распространения излучения в свободном пространстве воспользуемся принципом Гюйгенса—

Френеля. Согласно этому принципу, результирующее поле является суперпозицией когерентных сферических волн, распространяющихся от каждой точки замкнутой поверхности, окружающей действительный первичный источник. Принцип Гюйгенса–Френеля означает, что волна, сформированная источником, в дальнейшем может рассматриваться независимо от источника.

Действительно, точечный источник $E(x, y, 0) = \gamma\delta(x - \xi, y - \eta)$, локализованный в плоскости $z = 0$, формирует в пространстве сферическую волну Гюйгенса

$$E(x', y', z) = \frac{1}{R} \exp\{ikR\}.$$

В соответствии с (10.37) имеем

$$\frac{1}{R} \exp\{ikR\} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int \delta(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Пользуясь фильтрующими свойствами δ -функции, можно записать одно из решений этого сверточного уравнения:

$$h(x' - x, y' - y) = (\gamma R)^{-1} \exp\{ikR\}, \quad (10.38)$$

где $R = [z^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{\frac{1}{2}}$, γ — комплексный коэффициент. Неоднозначность определения функции $h(x', y'; x, y)$ устраняется, если учесть условие взаимной фурье-сопряженности функций $h(x', y'; x, y)$ и $H(k_x, k_y)$. Это условие выполняется при $k_x/k \ll 1$ и $k_y/k \ll 1$, когда выражение (10.34), описывающее $H(k_x, k_y)$, принимает вид

$$H(k_x, k_y) = \exp\left\{ikz \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2\right]\right\}. \quad (10.39)$$

Выполняя фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned} h(x' - x, y' - y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp\left\{ikz \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2\right]\right\} \times \\ &\times \exp\{i[k_x(x' - x) - k_y(y' - y)]\} dk_x dk_y = \\ &= \frac{1}{i\lambda z} \exp\left\{ik \left[z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Сравнивая (10.38) и (10.40), находим $\gamma = 1/i\lambda z$ и

$$R \approx z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z}.$$

Следовательно, в параксиальном приближении, когда углы α и β малы, функция $h(x' - x, y' - y)$ удовлетворяет (10.38) и (10.40). В теории линейных систем функция $h(x' - y', x - y)$ называется *импульсным откликом*, а фурье-сопряженная с ней функция $H(k_x, k_y)$ (10.39) носит название *когерентной передаточной функции* (КПФ). Под частотой здесь понимаются пространственные частоты k_x, k_y , однозначно связанные с направляющими углами. Согласно определению пространственной частоты, угловой спектр полностью описывает пространственно-частотный спектр поля при известной длине волны. В пространственно-частотной области условием применимости принципа Гюйгенса–Френеля является соотношение $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$. Соответствующее приближение (10.40) в координатном пространстве называется *приближением Френеля*. Оно справедливо, если размер l тела, возмущающего входное поле, невелик по сравнению с расстоянием z , на котором изучается дифрагированное поле. Физически приближение Френеля соответствует замене вторичных сферических волн Гюйгенса поверхностями второго порядка. Быстрые осцилляции экспонентальной функции с квадратичным показателем в (10.40) приводят к тому, что интеграл суперпозиции (10.37) имеет малую величину всюду, кроме области значений $x \sim x', y \sim y'$, в которой скорость изменения фазы минимальна. Исследование интеграла суперпозиции методом стационарной фазы показывает, что достаточным условием приближения Френеля является соотношение $\lambda z / \pi l^2 \sim 1$, где l — характерный размер тела, на котором дифрагирует световая волна (например, в случае дифракции на круглом отверстии или экране l является диаметром).

Запишем интеграл суперпозиции (10.37) в приближении Френеля

$$\begin{aligned} E(x', y', z) = \\ = \frac{1}{i\lambda z} \exp\{ikz\} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) \exp\left\{i \frac{k}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2]\right\} dx dy \end{aligned} \quad (10.41)$$

или

$$E(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\{ikz\} \exp\left\{i \frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x, y, 0) \exp\left\{i \frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{-i \frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy. \quad (10.42)$$

Из (10.42) следует, что распределение поля при дифракции Френеля можно представить как фурье-образ входного поля, умноженного на функцию $\exp\{jk(x^2 + y^2)/2z\}$. Выражение (10.41) описывает дифрагированное поле в приближении Френеля как свертку. Отсюда получаем, что КПФ свободного пространства при дифракции Френеля имеет вид (10.39), где круговые пространственные частоты $k_x = k \sin \alpha$; $k_y = k \sin \beta$ определяются при

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx (x' - x)/z, \quad \sin \beta \approx \beta \approx (y' - y)/z.$$

Выражение (10.39) для когерентной передаточной функции означает, что свободное пространство по отношению к угловому спектру оптического поля проявляет себя как низкочастотный фильтр с пространственной частотой среза, удовлетворяющей приближению Френеля. Первый экспоненциальный множитель в (10.42) дает общую фазовую задержку, которую получает каждая спектральная компонента при распространении от плоскости $z = 0$ до плоскости z . Вторая экспонента определяет квадратичную по пространственной частоте фазовую дисперсию. Кроме того, i в знаменателе дает общий фазовый сдвиг $\pi/2$ для углового спектра.

Для практических расчетов дифракционных явлений часто вполне достаточным оказывается еще более грубое приближение, чем приближение Френеля. Если в интеграле суперпозиции (10.42) выполнить условие $z \gg k(x^2 + y^2)/2$, то выходное поле можно найти непосредственно через фурье-преобразование входного поля, заданного в плоскости $z = 0$:

$$E(x', y', z) = \\ = \frac{1}{j\lambda z} \exp\{ikz\} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x, y, 0) \exp\left\{-i \frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy. \quad (10.43)$$

Этот случай соответствует значениям $z \gg \pi l^2/\lambda$ и описывает дифракцию Фраунгофера. В приближении Фраун-

гофера модель свободного пространства в качестве низко-частотного фильтра по отношению к угловому спектру оптического поля имеет меньшую полосу пропускания, чем в приближении Френеля.

Рассмотрим несколько типичных примеров приближения Фраунгофера, встречающихся в дифракционных задачах.

Дифракция на прямоугольной щели.

Пусть плоская световая волна единичной амплитуды нормально падает на вырезанную в непрозрачном тонком экране прямоугольную щель с амплитудным коэффициентом пропускания

$$t(x, y) = \text{rect}\left(\frac{2x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{2y}{l_y}\right), \quad (10.44)$$

где

$$\text{rect}\left(\frac{2x}{l_x}\right) = \begin{cases} 1, & -l_x/2 \leq x \leq l_x/2, \\ 0, & x < -l_x/2, x > l_x/2. \end{cases}$$

l_x и l_y — размеры отверстия соответственно по осям x и y . Согласно (10.43), дифрагированное поле в зоне Фраунгофера определяется фурье-преобразованием функции (10.44)

$$E(x', y', z) = \frac{l_x l_y}{i \lambda z} \exp\{ikz\} \text{sinc}\left(\frac{kl_x}{2z} x'\right) \text{sinc}\left(\frac{kl_y}{2z} y'\right),$$

где

$$\text{sinc}\left(\frac{kl_x}{2z} x'\right) = \frac{\sin(kl_x x' / 2z)}{kl_x x' / 2z}.$$

Для интенсивности дифрагированного поля получим

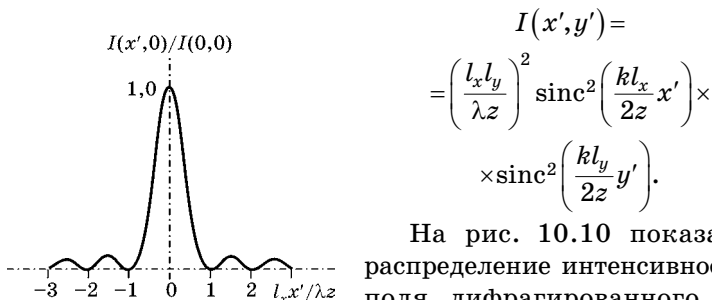


Рис. 10.10

$$I(x', y') = \left(\frac{l_x l_y}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kl_x}{2z} x'\right) \times \text{sinc}^2\left(\frac{kl_y}{2z} y'\right).$$

На рис. 10.10 показано распределение интенсивности поля дифрагированного на щели. Положение первого ми-

нимума определяется соотношением $l_x x'_1 / \lambda z = 1$, откуда $x'_1 = \lambda z / l_x$. Интенсивность второго дифракционного максимума составляет всего 0,047 от интенсивности нулевого.

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Пусть плоская волна единичной амплитуды нормально освещает круглое отверстие диаметром d , вырезанное в непрозрачном экране. Амплитудный коэффициент пропускания в пределах отверстия задан функцией

$$E(r) = \text{circ}(2r/d) = \begin{cases} 1, & 2r \leq d; \\ 0, & 2r > d, \end{cases} \quad (10.45)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Поскольку имеет место осевая симметрия, интеграл суперпозиции (10.43) находится через преобразование Ганкеля:

$$E(r') = \frac{k}{iz} \exp\{ikz\} \int_0^\infty r E(r) J_0\left(\frac{krr'}{z}\right) dr, \quad (10.46)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Применяя преобразование Ганкеля к функции (10.45), получаем выражение для поля, дифрагированного в зону Фраунгофера:

$$E(r') = \frac{kd^2}{i4z} \exp\{ikz\} \frac{J_1(kdr'/2z)}{kdr'/2z}. \quad (10.47)$$

Для интенсивности дифрагированного поля имеем

$$I(r') = \left(\frac{kd^2}{4z} \cdot \frac{J_1(kdr'/2z)}{kdr'/2z} \right)^2.$$

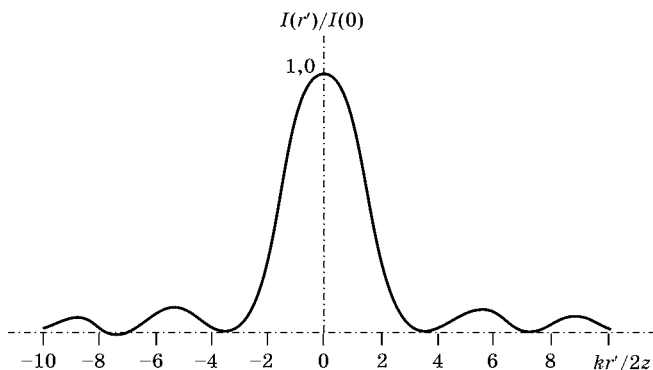


Рис. 10.11

График распределения интенсивности поля, дифрагированного на отверстии, представлен на рис. 10.11. Эта функция называется *функцией Эйри*. Радиус первого максимума картины Эйри $r'_0 = 1,22\lambda z/d$.

Дифракция Фраунгофера на двух отверстиях радиуса $d/2$.

Отверстия в экране симметрично расположены относительно оси z в плоскости $y' = 0$ и освещаются нормально падающей плоской волной единичной амплитуды. Амплитудный коэффициент пропускания в пределах отверстий, расстояние между которыми обозначим через $2a$, описывается функцией

$$\pi(x, y) = \text{circ}\{2[(x-a)^2 + y^2]^{1/2}/d\} + \text{circ}\{2[(x+a)^2 + y^2]^{1/2}/d\}. \quad (10.48)$$

Подставляя (10.48) в (10.46) и учитывая (10.47), находим дифрагированное поле:

$$E(r') = \frac{kd}{4iz} \exp\{ikz\} \frac{J_1(kdr'/2z)}{kdr'/2z} \cos\left(\frac{akx'}{z}\right).$$

Переходя к интенсивности имеем

$$I(x', y', z) = 2\left(\frac{kd}{4z}\right)^2 \left[J_1\left(\frac{kdr'}{2z}\right)\right]^2 \cdot \left[1 + \cos\frac{2kax'}{z}\right]. \quad (10.49)$$

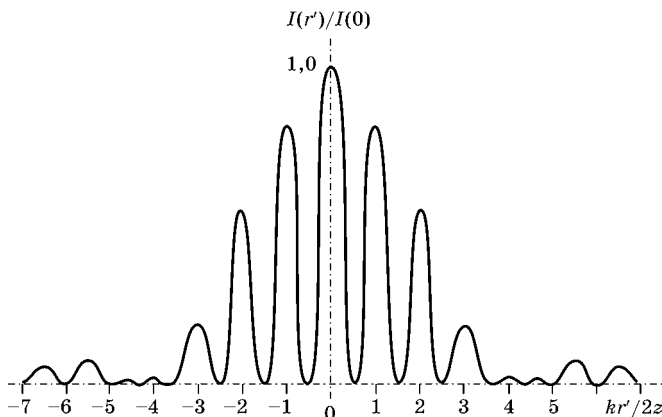


Рис. 10.12

График функции (10.49) для интенсивности дифрагированного поля показан на рис. 10.12. Физический смысл полученного результата состоит в том, что интенсивность результирующего поля определяется интерференцией световых волн, дифрагированных от каждого из отверстий. Пространственный период интерференционных полос, согласно (10.49), равен $\Lambda = \lambda z / 2a$.

10.4. ГАУССОВЫ ПУЧКИ И ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Обратимся к рис. 10.13. Пусть в плоскости $z = 0$ помещен транспарант, коэффициент пропускания которого описывается гауссовой функцией

$$E(x, y, 0) = \exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}(x^2 + y^2)\right\}. \quad (10.50)$$

На этот транспарант слева падает плоская световая волна, волновой вектор которой направлен по оси z . Найдем световое поле $E(x', y', z)$, сформированное в результате дифракции плоской волны на транспаранте (10.50). Дифрагированное поле определим в приближении Френеля, воспользовавшись подстановкой (10.50) в (10.42):

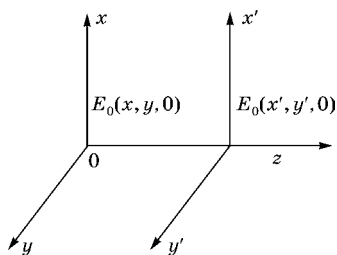


Рис. 10.13

$$\begin{aligned} E(x', y', z) &= \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikz) \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\} \times \\ &\times \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(xx' + yy')\right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikz) \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{zw_0^2}\left(z - i\frac{kw_0^2}{2}\right)(x^2 + y^2)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy = \frac{1}{j\lambda z} \exp(ikz) \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\} \times \\ &\times \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{q}{zw_0^2}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{-i\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Здесь $q = z - iR_0$, $R_0 = \frac{kw_0^2}{2}$ — конфокальный параметр. Интеграл в (10.51) представляет собой двумерное преобразование Фурье от гауссовой функции:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp \left\{ -\frac{q}{zw_0^2} (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ -i \frac{k}{z} (xx' + yy') \right\} dx dy = \\ & = \frac{\pi zw_0^2}{q} \exp \left\{ -\frac{zk^2 w_0^2}{4z^2 q} (x'^2 + y'^2) \right\} = \frac{\pi zw_0^2}{q} \exp \left\{ -\frac{kR_0}{2zq} (x'^2 + y'^2) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя результат интегрирования в (10.51), находим

$$\begin{aligned} & E(x', y', z) = \\ & = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda q} \exp(ikz) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{kR_0}{2zq} (x'^2 + y'^2) \right\}. \end{aligned}$$

Переобозначим в полученном выражении переменные $x' \rightarrow x$, $y' \rightarrow y$ и выполним элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} & E(x, y, z) = \\ & = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda q} \exp(ikz) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{kR_0}{2zq} (x^2 + y^2) \right\} = \\ & = \frac{R_0}{iq} \exp(ikz) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{kR_0(z + iR_0)}{2z(z^2 + R_0^2)} (x^2 + y^2) \right\}. \end{aligned}$$

Разделяя в аргументе экспоненциального множителя действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} & E(x, y, z) = \frac{R_0}{iq} \exp(ikz) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{kR_0}{2(z^2 + R_0^2)} (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{ikR_0^2}{2z(z^2 + R_0^2)} (x^2 + y^2) \right\} = \\ & = \frac{R_0}{iq} \exp(ikz) \exp \left\{ -\frac{k}{2R_0 \left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right)} (x^2 + y^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ i \frac{k}{2z} \left[1 - \frac{R_0^2}{z^2 + R_0^2} \right] (x^2 + y^2) \right\} = \\ & = \frac{w_0}{w} \exp[i(kz - \varphi)] \exp \left\{ -\frac{1}{w^2} (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2R} (x^2 + y^2) \right\}, \end{aligned} \tag{10.52}$$

где

$$w^2 = \frac{2R_0}{k} \left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right); \quad (10.53)$$

$$R = z \left(1 + \frac{R_0^2}{z^2} \right); \quad (10.54)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{R_0}.$$

Решение (10.52) описывает гауссов пучок, распространяющийся в направлении z . Параметры гауссова пучка: w — радиус пучка в плоскости на расстоянии z от перетяжки; R_0 — конфокальный параметр; R — радиус кривизны волнового фронта; w_0 — радиус перетяжки (минимальный радиус сечения гауссова пучка). Выражения (10.53), (10.54) определяют изменения параметров гауссова пучка при распространении в пространстве. Из (10.53), (10.54) следует, что гауссов пучок с радиусом перетяжки w_0 при распространении по оси z асимптотически ограничивается углом расходимости

$$\theta \approx \frac{w}{z} \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

Оценим фазовую скорость гауссова пучка. Выделим в экспоненциальном множителе $\exp[i(kz - \varphi)]$ в (10.52) компоненту фазы, зависящую от z . Отсюда определим эффективное волновое число

$$k_e = \frac{d}{dz}(kz - \varphi) = \frac{d}{dz} \left[kz - \arctg \frac{z}{R_0} \right] = k - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2}.$$

Следовательно,

$$k_e = \frac{\omega}{v} = k - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2} = \frac{\omega}{c} - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2} < \frac{\omega}{c}.$$

Отсюда следует, что фазовая скорость гауссова пучка превышает скорость света

$$v = \frac{\omega}{k_0} > c.$$

В плоскости перетяжки ($z = 0$)

$$k_e = k - \frac{1}{R_0}.$$

Очевидно, что волновое число k_e равно компоненте волнового числа k_z . Действительно, гауссов пучок образован суперпозицией плоских волн, формирующей пучок с асимптотически ограниченным поперечным размером. Типичные значения x - и y -компонент волнового вектора таких волн

$$k_x = k_y \approx \frac{\sqrt{2}}{w_0}.$$

Из соотношения $k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 = k^2$ следует

$$k_z \approx (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \approx k - \frac{1}{R_0},$$

что соответствует величине эффективного волнового числа.

Преобразование гауссова пучка.

Мы установили, что гауссов пучок полностью характеризуется комплексным параметром $q = z - iR_0$. Вещественная часть z есть расстояние от рассматриваемого сечения пучка до плоскости локализации перетяжки. Мнимая часть — конфокальный параметр. Вещественная часть обратной величины параметра q есть кривизна волнового фронта

$$q^{-1} = \frac{1}{z - iR_0} = \frac{z + iR_0}{z^2 + R_0^2} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2},$$

где w и R определяются выражениями (10.50) и (10.54). Для того чтобы знать, как преобразуется гауссов пучок, достаточно выяснить, как преобразуется параметр q .

ПРИМЕР 10.3

Преобразование гауссова пучка слоем свободного пространства толщиной d (рис. 10.14).

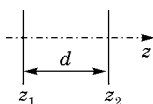


Рис. 10.14

Решение.

Пусть в плоскости z_1 параметр q равен $q_1 = z_1 - iR_0$. Тогда в плоскости z_2 на расстоянии d от плоскости z_1 параметр q становится равным

$$q_2 = z_2 - iR_0 = z_1 + d - iR_0.$$

Следовательно, $q_2 = q_1 + d$. Отсюда получаются все формулы (10.53) и (10.54) преобразования гауссова пучка при распространении в свободном пространстве для $z = z_1 + d = z_2$.

При распространении в свободном пространстве гауссов пучок сохраняет форму, изменяя фазу, амплитуду и кривизну волнового фронта. Выражения (10.53) и (10.54) отражают зависимость полуширины гауссова пучка w и радиуса кривизны волнового фронта R от расстояния z и конфокального параметра R_0 . Из (10.53) и (10.54) находим

$$\frac{kw^2}{2} = R_0 \left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right); \quad R = \frac{R_0^2}{z} \left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right).$$

Разделив первое равенство на второе, получаем

$$\frac{2Rz}{kw^2 R_0} = 1.$$

Следовательно, при распространении гауссова пучка в пространстве величина $\frac{2Rz}{kw^2 R_0}$ инвариантна и равна единице. Хотя при малых z френелевское приближение не является справедливым, формулы (10.53) и (10.54) правильно описывают параметры гауссова пучка и в этом случае:

$$w \approx w_0 \left(1 + \frac{z^2}{2R_0^2} \right); \quad \lim_{z \rightarrow 0} w = w_0;$$

$$R \approx \frac{R_0^2}{z}; \quad \lim_{z \rightarrow 0} R = \infty.$$

В плоскости $z = 0$ полуширина гауссова пучка имеет минимальную величину и равна радиусу перетяжки,

а волновой фронт — плоский. Как следует из (10.54), на больших расстояниях волновой фронт также стремится к плоскому:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} R = \infty.$$

Определим положение плоскостей, в которых радиус волнового фронта имеет минимальное значение, и найдем величину минимального радиуса из условия экстремума:

$$\frac{d}{dz} \left\{ z \left(1 + \frac{R_0^2}{z^2} \right) \right\} = 1 - \frac{R_0^2}{z^2} = 0; \quad z = \pm R_0;$$

$$R_{\min} = 2R_0.$$

Следовательно, минимальный радиус кривизны волнового фронта пучка равен удвоенному конфокальному параметру. Гауссов пучок симметричен относительно плоскости перетяжки. На расстояниях $z = \pm R_0$ от плоскости перетяжки радиус кривизны волнового фронта имеет минимальное значение. Радиус соответствующих сечений пучка составляет

$$w_0(R_0) = \sqrt{2}w_0.$$

Угол расходимости гауссова пучка равен

$$\theta(z) = \arctg \frac{w}{R} = \arctg \left[\frac{w_0}{R_0 (1 + R_0^2/z^2)^{1/2}} \right].$$

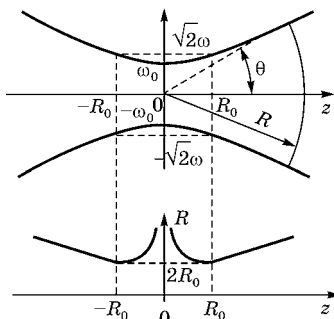


Рис. 10.15

Для френгоферовой зоны можно асимптотически определить половину угла расходимости гауссова пучка

$$\theta \approx \lim_{z \rightarrow \infty} \arctg \frac{w}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (10.55)$$

На рис. 10.15 показана зависимость основных параметров гауссова пучка от z . Угол расходимости пучка $\theta = \lambda/\pi w_0$ оказывается меньше угла ди-

фракции (λ/ω_0) плоской волны на отверстии радиуса ω_0 . Минимальная расходимость — отличительное свойство гауссова пучка, который является хорошей моделью, для описания распределения поля в лазерном луче.

ПРИМЕР 10.4

Преобразование гауссова пучка тонкой линзой с фокусным расстоянием f (рис. 10.16).

Решение.

Пусть гауссов пучок (10.52)

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{iq} \exp(ikz) \exp\left[-\frac{1}{w^2}(x^2 + y^2)\right] \times \\ \times \exp\left[i\frac{k}{2R}(x^2 + y^2)\right] = \\ = A \exp\left[i\frac{k}{2R}(x^2 + y^2)\right] \end{aligned}$$

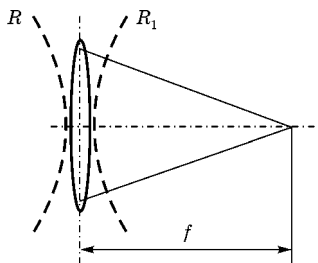


Рис. 10.16

падает слева на тонкую линзу.

После прохождения линзы радиус сечения пучка останется неизменным, а фаза изменится

$$A \exp\left\{i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R} - i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right\} = A \exp\left\{i\frac{k}{2R'}(x^2 + y^2)\right\}.$$

Здесь учтено, что линза вносит квадратичный фазовый сдвиг $-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)$. Таким образом, линза изменяет кривизну волнового фронта пучка:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}.$$

С другой стороны, для параметра q имеем

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i\frac{\lambda}{\pi w^2}.$$

Отсюда получаем выражение для преобразования параметра q линзой:

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f} + i\frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f}$$

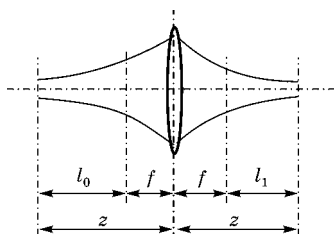


Рис. 10.17

или

$$q' = \frac{qf}{f - q} = \frac{q}{1 - \frac{q}{f}}. \quad (10.56)$$

Пусть z — расстояние между плоскостью локализации перетяжки гауссова пучка и линзой (рис. 10.17). Тогда параметр q , характеризующий распространение гауссова пучка на пространственном интервале z , равен

$$q = z - iR_0,$$

где R_0 — конфокальный параметр. Подставляя в (10.56) значение $q = z - iR_0$, получим для параметра q' гауссова пучка, преобразованного линзой,

$$q' = \frac{(z - iR_0)f}{f - z + iR_0} = \frac{f(z - iR_0)(f - z - iR_0)}{(f - z)^2 + R_0^2}.$$

Введем обозначение $l_0 = z - f$. Согласно рис. 10.17, l_0 — расстояние между плоскостью локализации перетяжки и передним фокусом линзы. Тогда

$$\begin{aligned} q' &= \frac{f(z - iR_0)(l_0 + iR_0)}{l_0^2 + R_0^2} = -\frac{f(l_0 + f - iR_0)(l_0 + iR_0)}{l_0^2 + R_0^2} = \\ &= -f \frac{[l_0^2 + R_0^2 + f(l_0 + iR_0)]}{l_0^2 + R_0^2} = -f - \frac{f^2 l_0}{l_0^2 + R_0^2} - i \frac{f^2 R_0}{l_0^2 + R_0^2} = -z_1 - iR_0. \end{aligned}$$

Здесь $z_1 = f + l_1$ — расстояние между линзой и плоскостью локализации перетяжки преобразованного линзой гауссова пучка, конфокальный параметр которого равен R_{01} . Отсюда следуют выражения для конфокального параметра выходного пучка и расстояния между задним фокусом линзы и перетяжкой:

$$R_{01} = \frac{f^2 R_0}{l_0^2 + R_0^2}; \quad l_1 = \frac{f^2 l_0}{l_0^2 + R_0^2}, \quad (10.57)$$

а также полезные соотношения

$$\frac{R_{01}}{R_0} = \frac{l_1}{l_0}, \quad \frac{w_{01}^2}{w_0^2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

При $R_0 \rightarrow 0$ перетяжка трансформируется в точечный источник, а соотношения (10.57) принимают вид $l_1 l_0 = f^2$. В этом случае входная и выходная плоскости оказываются оптически сопряженными.

ПРИМЕР 10.5

Зеркало радиуса R_m . Отражение гауссова пучка от зеркала с радиусом кривизны R_m эквивалентно преобразованию линзой с фокусным расстоянием $f_m = 1/2R_m$. Следовательно, для параметра q' отраженного пучка имеем

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{2}{R_m}.$$

10.5. ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Пусть оптический резонатор образован двумя сферическими зеркалами с радиусами кривизны R_1 и R_2 (рис. 10.18). Будем различать выпуклые и вогнутые зеркала, приписывая радиусу кривизны выпуклого зеркала знака «минус». Определим параметры светового поля, возбуждаемого в таком сферическом резонаторе. Его структура представляет собой стоячие волны с узловыми поверхностями, параллельными волновым фронтам, радиусы кривизны которых R определяются выражением (10.54)

$$\frac{1}{R} = \frac{z}{z^2 + R_0^2}.$$

Для установившегося в резонаторе поля очевидным граничным условием является равенство радиуса кривизны волнового фронта на поверхности зеркала радиусу кривизны зеркала. Для первого зеркала с радиусом кривизны R_1 имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z_1}{z_1^2 + R_0^2}.$$

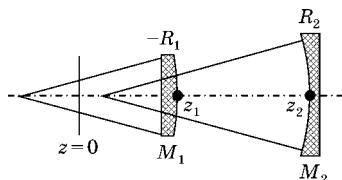


Рис. 10.18

Для второго зеркала с радиусом кривизны R_2 , расположенного на расстоянии $d = z_2 - z_1$ от первого, получаем

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z_2}{z_2^2 + R_0^2} = \frac{z_1 + d}{(z_1 + d)^2 + R_0^2}.$$

В резонаторе устанавливается система стоячих волн, для которых расстояние между зеркалами должно соответствовать целому числу узлов. Если радиусы зеркал много больше радиуса сечения гауссова пучка, то конечными размерами пучка можно пренебречь. Найдем резонансную моду, соответствующую резонатору (см. рис. 10.18) с зеркалами, имеющими радиусы кривизны R_1 , R_2 и расстояниями между зеркалами $z_2 - z_1 = d$. Резонансная мода полностью определяется параметром R_0 , который находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= d; \\ -\frac{1}{R_1} &= \frac{z_1}{z_1^2 + R_0^2}; \end{aligned} \quad (10.58)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z_2}{z_2^2 + R_0^2}. \quad (10.59)$$

ПРИМЕР 10.6

Резонатор образован *плоским* ($R_1 = \infty$) и *сферическим* (R_2) зеркалами (рис. 10.19).

Решение.

Имеем $z_1 = 0$ и $z_2 = d$. Решая уравнение (10.59) относительно R_0 , получаем

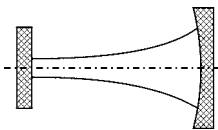


Рис. 10.19

$$R_0 = \frac{kw_0^2}{2} = [d(R_2 - d)]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.60)$$

Полученное значение конфокального параметра R_0 определяет для резонансной гауссовой моды радиус перетяжки, которая локализована на плоском зеркале. При $R_2 \rightarrow d$ формулой (10.59) пользоваться нельзя, поскольку в этом случае $w_0 \rightarrow 0$, т. е. $w_0 \ll \lambda$ и условия применимости параксиального приближения нарушаются.

ПРИМЕР 10.7

Симметричные зеркала ($R_1 = R_2 = R$).

Решение.

Решение для симметричного резонатора легко получается из предыдущего случая. Для этого симметричный резонатор (рис. 10.20) можно рассматривать как совокупность резонатора (рис. 10.19) и его отражения в плоском зеркале. Тогда конфокальный параметр определяется выражением (10.60), в котором расстояние d следует заменить на $d/2$:

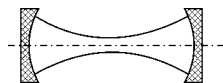


Рис. 10.20

$$R_0 = \left[\frac{d}{2} \left(R_2 - \frac{d}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

При $R_1 = R_2 = \infty$, $R_1 \rightarrow R_0 = \infty$ и гауссов пучок трансформируется в плоскую волну. Резонатор с плоскими зеркалами получил название резонатора Фабри–Перо.

ПРИМЕР 10.8

Общий случай ($R_1 \neq R_2$) показан на рис. 10.18.

Решение.

Из системы уравнений (10.58), (10.59) находим

$$R_0^2 = \frac{R_1^2 R_2^2}{16} \frac{\left\{ 1 - \left[\frac{2d}{R_1 R_2} (d - R_1 - R_2) + 1 \right]^2 \right\}}{\left[d - \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right]^2}. \quad (10.61)$$

Вещественное значение конфокального параметра имеет место при условии

$$1 \geq \left(1 - \frac{d}{R_1} \right) \left(1 - \frac{d}{R_2} \right) \geq 0.$$

На рис. 10.21 представлена диаграмма с областями значений d/R_1 и d/R_2 , в которых существуют вещественные решения. Конфигурации резонаторов, для которых имеются решения, показаны на рис. 10.22. Такие резонаторы получили название *устойчивых*. К ним относятся следующие конфигурации: *а, б* — оба зеркала вогнутые, а оба центра кривизны зеркал находятся либо вне резонатора, либо

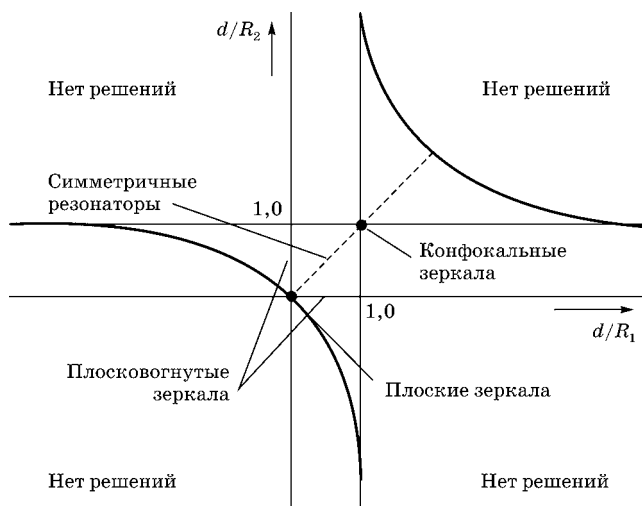


Рис. 10.21

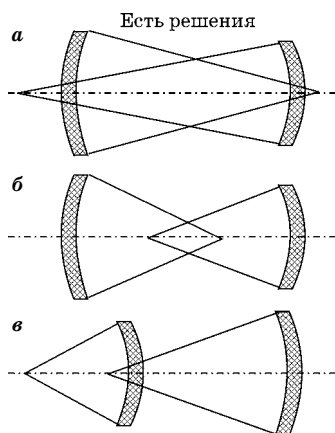


Рис. 10.22

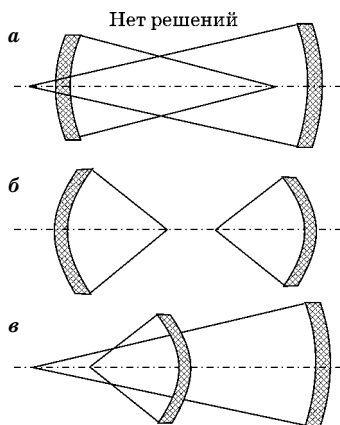


Рис. 10.23

внутри его и перекрываются для противоположных зеркал; *в* — одно зеркало выпуклое, а другое — вогнутое. Центры кривизны выпуклого и вогнутого лежат вне резонатора, причем центр кривизны выпуклого зеркала отстоит дальше центра кривизны вогнутого зеркала.

На рис. 10.23 приведены конфигурации так называемых неустойчивых резонаторов, для которых вещественных решений (10.61) не существует. Такие резонаторы применяют в лазерах с большим усилением активной среды. Большие дифракционные потери в неустойчивых резонаторах препятствуют возбуждению излучения на модах высших порядков. Применение устойчивых резонаторов в лазерах с большим усилением активной среды энергетически невыгодно, поскольку из-за высокого усиления возникает генерация на модах высших порядков.

10.6. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

Пусть круглое отверстие радиусом $r = b$ в экране освещается сферической волной от точечного источника (см. рис. 10.24). Амплитуда волны в плоскости отверстия E_0 .

Рассмотрим световое поле в плоскости (ρ, z) , отстоящей на расстоянии z от отверстия и, соответственно, на расстоянии $a + z$ от точечного источника. Для поля, дифрагированного на отверстии, имеем

$$s(\rho, z) = \frac{k}{az\lambda} E_0 \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2z}\right) \int_0^b r \exp\left(i \frac{kr^2}{2a}\right) \exp\left(i \frac{kr^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right) dr.$$

Здесь мы воспользовались осевой симметрией импульсного отклика слоя пространства между отверстием и плоскостью наблюдения (ρ, z) . Запишем это выражение в виде

$$s(\rho, z) = \frac{k}{az\lambda} E_0 \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2z}\right) \int_0^b r \exp\left(i \frac{kr^2}{2z_0}\right) J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right) dr, \quad (10.62)$$

где

$$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z}. \quad (10.63)$$

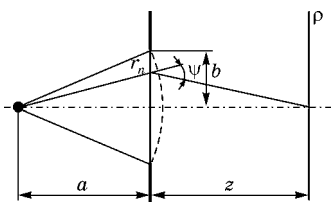


Рис. 10.24

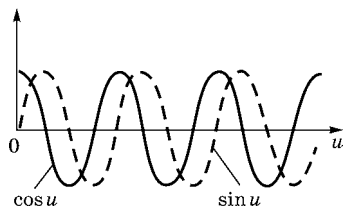


Рис. 10.25

Выражение (10.62) представляет собой с точностью до комплексных множителей преобразование Ганкеля от функции $\exp\left(i \frac{kr^2}{2z_0}\right)$.

Рассмотрим распределение дифрагированного поля на оси z ($\rho = 0$):

$$s(0, z) = \frac{k}{az\lambda} E_0 \int_0^b r \exp\left(i \frac{kr^2}{2z_0}\right) dr$$

или

$$s(0, z) = \frac{k}{az\lambda} E_0 \int_0^b r \left[\cos\left(\frac{kr^2}{2z_0}\right) + i \sin\left(\frac{kr^2}{2z_0}\right) \right] dr.$$

Сделаем в этом выражении замену переменной

$$\frac{kr^2}{2z_0} = u, \quad r dr = \frac{z_0}{k} du :$$

$$s(0, z) = \frac{z_0}{az\lambda} E_0 \int_0^{\frac{kb^2}{2z_0}} (\cos u + i \sin u) du. \quad (10.64)$$

Поскольку в (10.64) под знаком интеграла периодическая функция аргумента u , представим этот интеграл в виде

$$I = \int_0^{\frac{kb^2}{2z_0}} (\cos u + j \sin u) du = \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{2} \int_{\pi(n-1-\frac{1}{2})}^{\pi(n-1+\frac{1}{2})} (\cos u + i \sin u) du. \quad (10.65)$$

Область интегрирования в (10.65) разбита на интервалы (рис. 10.25), соответствующие полупериодам подынтегральной функции:

$$\pi\left(n-1-\frac{1}{2}\right) < u_n < \pi\left(n-1+\frac{1}{2}\right). \quad (10.66)$$

Эти интервалы соответствуют так называемым *зонам Френеля*, α_n определяет вклад n -й зоны Френеля в амплитуду дифрагированного поля в точке z . Выполняя интегрирование в (10.65), получаем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{2} \int_{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (\cos u + i \sin u) du = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{2} \left\{ \sin \left[\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] - \sin \left[\pi \left(n - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\alpha_1}{2} + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_3}{2} - \alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} \right) + \dots + (-1)^{N-1} \frac{\alpha_N}{2}, \end{aligned} \quad (10.67)$$

где N — номер последней зоны. Полагая, что парциальный вклад по абсолютной величине для соседних зон мало отличается,

$$\left(\frac{\alpha_{2m-1}}{2} - \alpha_{2m} + \frac{\alpha_{2m+1}}{2} \right) = 0, \quad (10.68)$$

получаем

$$I = \frac{\alpha_1}{2} \pm \frac{\alpha_N}{2}, \quad (10.69)$$

где знак «плюс» соответствует нечетному номеру последней зоны, а знак «минус» — четному номеру. Соответственно, для амплитуды результирующего поля в точке z имеем

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 (\alpha_1 \pm \alpha_N). \quad (10.70)$$

Как следует из (10.70), основной вклад в амплитуду результирующего поля дают первая и последняя зоны.

Из (10.66) видно, что область интегрирования разбита на зоны u_n . Определим радиус n -й зоны:

$$\frac{kb_n^2}{2z_0} = u_n = \pi n.$$

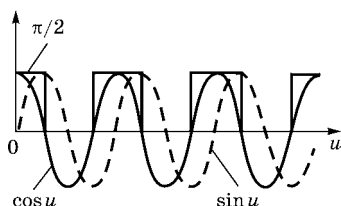


Рис. 10.26

Откуда $b_n = (n\lambda z_0)^{1/2}$. Учитывая (10.63), находим для радиуса n -й зоны

$$b_n = \left(\frac{n\lambda a z}{a + z} \right)^{1/2}. \quad (10.71)$$

Из (10.71) следует, что b_n является радиусом n -й зоны Френеля. Взаимная компенсация вклада четных и нечетных зон в (10.69) указывает на то, что поля в соседних зонах Френеля находятся в противофазе. Из (10.67) следует, что дифрагированное поле на оси в плоскости (ρ, z) при нечетном числе зон Френеля ($n = 2m + 1$) имеет максимум, а при четном числе зон Френеля ($n = 2m$) — минимум. Если блокировать все четные или все нечетные зоны Френеля концентрическими кольцевыми экранами, сумма в (10.68) становится отличной от нуля и построенная таким образом амплитудная зонная пластинка приобретает по аналогии с линзой свойства концентрировать световое поле на оси z . На эту аналогию указывает равенство (10.63), имеющее вид формулы Гаусса для линзы.

Изготовим экран с концентрическими кольцевыми отверстиями, расположение которых удовлетворяет функции пропускания

$$T(u) = 1/2[1 + \operatorname{sgn}(\cos u)]. \quad (10.72)$$

Тогда $T(u)$ является апертурной функцией в (10.65), блокирующей все четные зоны Френеля (рис. 10.26)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{kb^2/2z_0} T(u)(\cos u + i \sin u) du = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{4} \int_{\pi(n-\frac{3}{2})}^{\pi(n-\frac{1}{2})} [1 + \operatorname{sgn}(\cos u)][\cos u + i \sin u] du = \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \int_{\pi(2m+1-\frac{3}{2})}^{\pi(2m+1-\frac{1}{2})} [1 + \operatorname{sgn}(\cos u)][\cos u + i \sin u] du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \int_{\pi(2m-\frac{1}{2})}^{\pi(2m+\frac{1}{2})} [\cos u + i \sin u] du = \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \{\sin u - i \cos u\} \Big|_{\pi(2m-\frac{1}{2})}^{\pi(2m+\frac{1}{2})} = \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} 2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \alpha_{2m+1}.
 \end{aligned} \tag{10.73}$$

Как следует из (10.73), при перекрытии маской всех четных зон наблюдается многократная концентрация (фокусировка) дифрагированного поля на оси:

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \alpha_{2m+1}.$$

Такой же эффект фокусировки наблюдается при перекрытии экраном всех нечетных зон. В этом случае для функции пропускания маски имеем (рис. 10.27)

$$T(u) = 1/2[1 - \operatorname{sgn}(\cos u)], \tag{10.74}$$

а выражение, описывающее дифрагированное поле в точке z на оси принимает вид

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N/2} \alpha_{2m}. \tag{10.75}$$

Для светового поля в точке z на оси имеем

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 \sum_{m=1}^{N/2} \alpha_{2m}.$$

Таким образом, блокирование всех нечетных зон Френеля также ведет к многократному усилению (фокусировке) дифрагированного поля на оси. Амплитудные маски с экранированием нечетных (рис. 10.27а) или

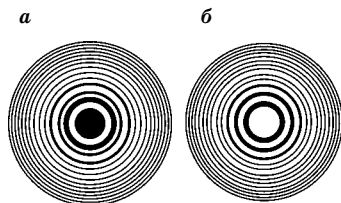


Рис. 10.27

четных (см. рис. 10.27б) зон Френеля называются *амплитудными зонными пластинками*.

Если поместить в отверстие фазовую маску из концентрических колец, вводящих фазовый сдвиг, равный π , для всех, например, четных зон Френеля, получается так называемая *фазовая зонная пластинка*. В фазовой зонной пластинке используется свет всех зон, четных и нечетных. В результате амплитуда поля в точке z возрастает в два раза, а интенсивность — в четыре. В фазовой зонной пластинке используется фазовая маска с функцией пропускания

$$T(u) = \text{sgn}(\cos u). \quad (10.76)$$

Подстановка (10.76) в (10.65) дает

$$I = \frac{1}{2} \int_{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \text{sgn}(\cos u)(\cos u + i \sin u) du = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \alpha_n. \quad (10.77)$$

Для светового поля, формируемого фазовой зонной пластинкой, в точке z получаем

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 \sum_{n=1}^N \alpha_n.$$

Поскольку амплитудные и фазовые зонные пластинки, подобно линзе, способны концентрировать дифрагированное световое поле, а положение источника и его изображение связаны формулой Гаусса (10.63), z_0 в этом выражении принимает смысл фокусного расстояния:

$$\frac{1}{f_p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z}. \quad (10.78)$$

Следовательно, амплитудная зонная пластинка эквивалентна транспаранту с функцией пропускания $\frac{1}{n} e^{-i \frac{r^2}{2\xi^2}}$, $r \leq a$. Транспарант обладает свойствами линзы с фокусным расстоянием $f_p = k\xi^2$ и апертурой $2b$. Совершенно аналогичные результаты получаются для фазовых пластинок, функция пропускания которых

$$T(u) = \text{sgn}(\sin u).$$

На практике фокусное расстояние зонной пластинки определяется как и у линзы, при $a \rightarrow \infty$, когда она освещается плоской волной. В этом случае в фокусе формируется изображение бесконечно удаленного источника. Возможны и мнимые изображения, если $a < f_p$. При выполнении условия $a < f_p$ амплитуда расходящейся волны в структуре дифрагированного поля увеличивается по сравнению с амплитудой сходящейся волны. В этом случае расходящаяся волна как бы выходит из точки, являющейся мнимым изображением источника.

Фокусное расстояние зонной пластинки зависит от длины волны. Поэтому для зонной пластинки характерны хроматические аберрации. Если падающая на зонную пластинку волна монохроматическая, то дифрагированное поле имеет максимальную амплитуду в малой окрестности фокуса $f_p = k\xi^2$. Если же спектр падающей волны занимает полосу частот $[\omega_1, \omega_2]$, то дифрагированное поле концентрируется на отрезке в интервале $[\omega_1\xi^2/c, \omega_2\xi^2/c]$ вдоль оси z . Зонная пластинка фокусирует полихроматическую плоскую волну в линейный отрезок, длина которого пропорциональна ширине спектра падающей волны.

В отличие от линзы зонная пластинка дает не одно, а много изображений источника. Чтобы проиллюстрировать это, достаточно сместить точку наблюдения z на оси в такое положение z_1 , чтобы в пределах каждого прозрачного кольца зонной площадки укладывалась не одна, а три зоны Френеля. Действие пары из них, четной или нечетной, будет взаимно скомпенсировано. Поэтому амплитуда колебаний в точке z_1 будет определяться только третьей зоной (рис. 10.28). Разность фаз для волн от некомпенсированных зон Френеля, находящихся в соседних прозрачных

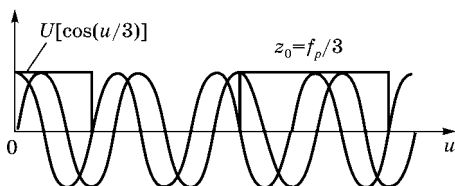


Рис. 10.28

кольцах пластинки увеличивается в три раза по сравнению с исходной точкой наблюдения z . Поэтому положение точки наблюдения z_1 определяется соотношением

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{z_1} = \frac{3}{f_p},$$

откуда следует, что помимо фокусного расстояния f_p зонная пластинка обладает еще и фокусным расстоянием $1/3f_p$.

Рассмотренный частный случай можно обобщить и на другие точки наблюдения z_m , для которых в пределах каждого прозрачного кольца зонной пластинки укладывается нечетное число $2m + 1$ зон Френеля:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{z_m} = \frac{2m+1}{f_p}. \quad (10.79)$$

Из соотношения (10.79) следует, что у зонной пластинки существует множество фокусных расстояний

$$f_m = \frac{f_p}{2m+1}, \quad (10.80)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отрицательным значениям m соответствуют расходящиеся волны. В этом случае зонная пластинка действует как отрицательная линза. В расходящемся дифрагированном поле зонная пластинка формирует мнимые изображения источника. Зонная пластинка по своим функциональным возможностям эквивалентна нескольким положительным и отрицательным линзам, вложенным в одну апертуру.

Перспективным направлением развития технологии дифракционных линз являются зонные пластинки с заданным фазовым профилированием зоны. Простейшим примером такой зонной пластинки является дифракционный аналог линзы. На рис. 10.29 показано, как дифракционная линза a с фазовыми профилями зон получается геометрическим преобразованием из плоско-выпуклой линзы b . Преобразование заключается в делении плоско-выпуклой линзы на тонкие слои одинаковой толщины $h = N\lambda/n - 1$, где N — целое число. Число зон Фре-

неля в дифракционной линзе, как это видно из рисунка, равно числу слоев.

Фазовый профиль зоны в современной технологии называется *киноформным*. Отсюда зонная пластинка с киноформным профилем получила название «киноформная линза». Дифракционная (киноформная) линза представляет собой один из примеров *дифракционных оптических элементов* (ДОЭ). В составе оптической системы дифракционные линзы могут использоваться по прямому назначению (как линзы) или в качестве коррекционных элементов. Такие элементы могут служить корректорами хроматических aberrаций благодаря дисперсионным свойствам и асферизации фронта дифрагированной волны.

На рис. 10.30 показана конфигурация гибридной дифракционно-рефракционной линзы. В таких линзах дисперсия света в рефракционной и дифракционной компонентах имеет разный знак. Поэтому можно построить гибридную линзу, которая за счет взаимной компенсации дисперсий рефракционной и дифракционной компонент может работать в белом свете.

Другой пример гибридного оптического элемента, структура которого содержит двухслойную дифракционную линзу 1, вклеенную между двух однородных линз 2, представлен на рис. 10.31.

Дифракционные линзы приобретают свойства квадратичного фазового фильтра благодаря квадратичному закону изменения пространственной частоты в зонной структуре. В случае цилиндрической симметрии этой структуры дифракционная линза приобретает способность фокусирования светового поля подобно традиционной сферической линзе. Если изменение пространственной частоты

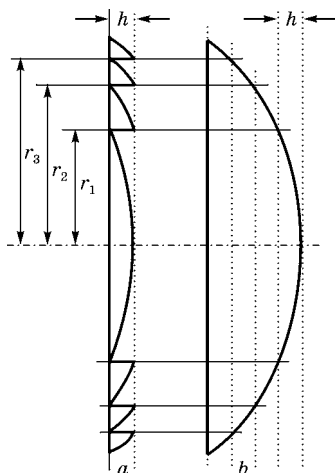


Рис. 10.29

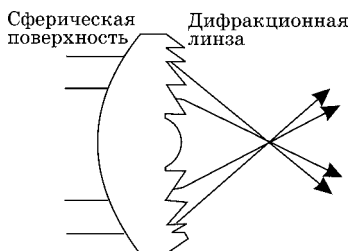


Рис. 10.30

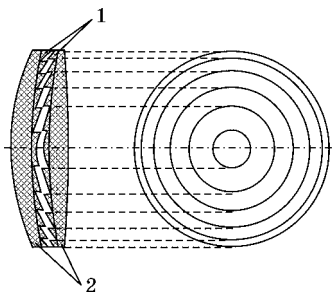


Рис. 10.31

симметрично в плоскости относительно оси, заданной в этой плоскости, дифракционная линза фокусирует свет подобно цилиндрической линзе. В ситуации, когда пространственная частота изменяется в плоскости по разным законам в двух взаимно-ортогональных направлениях, дифракционная линза анаморфотна, подобно двум ортогональным цилиндрическим линзам с различными оптическими силами. Дифракционные линзы с нулевой оптической силой используются как дифракционные корректоры. Пространственно-частотная структура дифракционных корректоров содержит члены более высокого порядка, чем квадратичные.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 10

1. В каких эффектах проявляется качественное различие когерентных и некогерентных световых полей?
2. Какими параметрами характеризуется интерференционное поле в случае двухлучевой интерференции?
3. В чем особенность интерференционного поля, формируемого двумя источниками, излучающими на разных частотах?
4. Как отличаются интерференционные поля в проходящем и отраженном свете в случае многолучевой интерференции (на примере интерферометра Фабри–Перо)?
5. Как отличаются добротности интерферометра Фабри–Перо и конфокального оптического резонатора при одинаковых расстояниях между зеркалами и коэффициентах отражения?
6. Как определяется резкость интерференционной картины при многолучевой интерференции?
7. В чем состоит принцип Гюйгенса–Френеля?

8. Какими характеристиками описывается слой пространства как система, преобразующая оптическое поле?
9. Как отличаются описания дифракции оптических полей в приближениях Френеля и Фраунгофера?
10. Какая связь дифракции в приближениях Френеля и Фраунгофера с двумерным преобразованием Фурье?
11. Какова структура дифрагированного поля при дифракции на двух отверстиях (щелях) в непрозрачном экране?
12. Какими параметрами описывается гауссов пучок?
13. Опишите дифракционную модель гауссова пучка.
14. Как преобразуется гауссов пучок слоем пространства?
15. Как преобразуется гауссов пучок линзой?
16. Как преобразуется гауссов пучок зеркалом?
17. Как формируются гауссовы пучки в оптических резонаторах и почему гауссов пучок является хорошей моделью лазерного пучка?
18. Какова структура поля в резонаторах с конфигурациями:
 - а) плоскость — сферическое зеркало;
 - б) симметричный резонатор со сферическими зеркалами;
 - в) резонатор Фабри–Перо?
19. В чем отличие конфигураций и свойств устойчивых и неустойчивых резонаторов?
20. Как связано формирование зон Френеля с дифракцией светового поля на отверстии?
21. Как определяется радиус зоны Френеля?
22. Какова структура амплитудной и фазовой зонных пластинок?
23. Как определяется фокусное расстояние зонной пластинки?
24. Чем объясняется многофокусность зонной пластинки?
25. Какие отличительные особенности дифракционных линз в сравнении с рефракционными линзами?

ЗАДАЧИ

10.1. Две когерентные световые волны отличаются по частоте на 1 МГц. Угол между волновыми векторами 30° . Скорость движения интерференционных полос в точке наблюдения 0,5 м/с. Определить длину волны интерферирующих световых полей и размер интерференционной полосы.

10.2. Определить частотный дисперсионный интервал интерферометра Фабри–Перо, если известны его добротность на заданной длине волны и резкость интерференционной картины.

10.3. На мыльную пленку, покрывающую проволоочное кольцо в воздухе, падает нормально пучок белого света.

Найти наименьшую толщину пленки, при которой отраженный свет на длине волны $\lambda = 0,5$ мкм в результате интерференции будет: а) максимально усилен; б) максимально ослаблен.

10.4. Расстояние d между двумя точечными когерентными источниками света равно 0,2 мм. Расстояние до экрана 2 м. Найти размер интерференционной полосы в средней части экрана.

10.5. Плоская волна падает нормально на две параллельно расположенные щели, вырезанные в неразрезном тонком экране. Пропускание щелей описывается функцией

$$s(x, y) = \text{rect}\left[\frac{2(x-a)}{l_x}\right] \text{rect}\left(\frac{2y}{l_y}\right) + \text{rect}\left[\frac{2(x+a)}{l_x}\right] \text{rect}\left[\frac{2y}{l_y}\right].$$

Определить интенсивность дифрагированного поля в зоне Фраунгофера. Как изменится интенсивность дифрагированного поля, если перед одной из щелей поместить прозрачную пластинку, вносящую фазовый сдвиг $\lambda/4$.

10.6. Перетяжки двух гауссовых пучков с длинами волн λ_1 и λ_2 пространственно совмещены в плоскости, отстоящей от передней фокальной плоскости положительной линзы на расстоянии l_0 . Фокусное расстояние линзы f . Найти расстояние между перетяжками гауссовых пучков, преобразованных линзой.

10.7. Найти конфокальный параметр для оптического резонатора, приведенного на рис. 10.8, и доказать условия, при которых конфокальный параметр имеет вещественное значение.

10.8. На амплитудную зонную пластинку падает нормально плоская волна ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимальная интенсивность светового поля достигается в точке на расстоянии $Z_m = 0,48$ м от пластинки. Найти радиус центральной непрозрачной зоны Френеля и положения трех первых дополнительных фокусов.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В СВЕТОВОДАХ

11.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Пусть волновод представляет собой диэлектрический слой толщиной $2b$ с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и показателем преломления n_0 (рис. 11.1). Этот слой расположен между двумя полупространствами с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 (показатель преломления n_2).

Рассмотрим случай, когда $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ($n_2 < n_1$). Это соотношение между диэлектрическими постоянными должно обеспечивать полное внутреннее отражение как необходимое условие для распространения световых волн в волноводе.

Введем плоскую волну с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ внутрь световода. Компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_1$ по осям Oz и Ox определяются согласно рис. 11.1 соотношениями

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{1z} + \mathbf{k}_{1x},$$

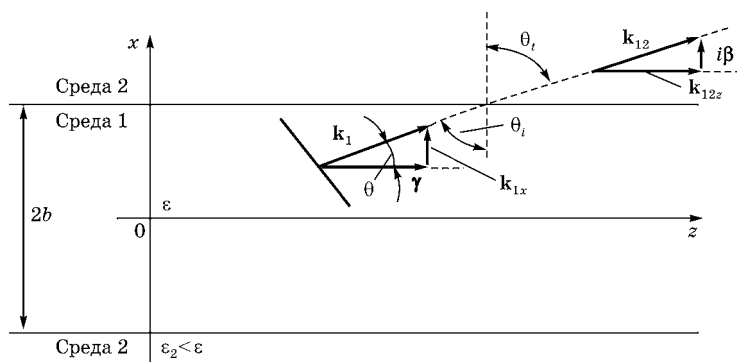


Рис. 11.1

где $|\mathbf{k}_{1z}| = \gamma$, $|\mathbf{k}_1| = kn_1$, $\gamma = kn_1 \cos \theta$, $|\mathbf{k}_{1x}| = k_{1x} = kn_1 \sin \theta$. На границе раздела двух сред световая волна преломляется, и во второй среде волновой вектор $\mathbf{k}_{12}$ равен

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{12} &= \mathbf{k}_{12z} + \mathbf{k}_{12x}; \\ \mathbf{k}_{12z} &= \mathbf{k}_{1z}; \\ |\mathbf{k}_{12z}| = |\mathbf{k}_{1z}| &= \gamma; \quad |\mathbf{k}_{12}| = kn_2; \quad |\mathbf{k}_{12x}| = k_{12} \cos \theta_t.\end{aligned}$$

Проекции волновых векторов $\mathbf{k}_{1z}$ и $\mathbf{k}_{12z}$ на ось z одинаковы, поскольку вдоль всей плоскости раздела сохраняется равенство фаз.

Полное внутреннее отражение имеет место, когда угол падения θ_i превышает критический угол θ_{ic} , определяемый соотношением

$$\sin \theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Из рис. 11.1 видно, что при полном внутреннем отражении $\theta < \theta_c$ и $\cos \theta_c = n_{21}$. В этом случае коэффициент отражения становится мнимым, поскольку

$$\cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{21}^2} - 1} = \pm i \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}.$$

Тогда составляющая волнового вектора преломленной волны вдоль оси x будет

$$|\mathbf{k}_{12x}| = kn_2 \cos \theta_t = -i\beta,$$

где

$$\beta = kn_2 \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}$$

(в выражении для $\cos \theta_t$ следует выбрать перед корнем знак «минус», это соответствует отражению от плоскости $+b$; при отражении от другой плоскости следовало бы выбрать знак «плюс»). Напряженность электрического поля во внешней среде может быть представлена выражением

$$E_{2y} = E_0 \exp\{j(\omega t - \gamma z)\} \exp(-\beta x),$$

где $\gamma = kn_2 \sin \theta_t = kn_1 \cos \theta$. Это неоднородная волна, амплитуда которой экспоненциально уменьшается в поперечном направлении от границы раздела сред.

Во внешней среде вблизи границы раздела распространяются экспоненциально затухающие неоднородные волны. Во внутренней среде, как и в случае металлического волновода, суперпозиция парциальных волн формирует бегущую вдоль оси z волну. По оси x образуется стоячая волна, соответствующая модовой структуре поля световода.

Согласно рис. 11.1, волновые числа волн, распространяющихся во внутренней и внешней средах, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} k_1^2 &= k^2 n_1^2 = \gamma^2 + \xi^2; \\ k_{12}^2 &= k^2 n_2^2 = \gamma^2 - \beta^2, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где $\xi = kn_1 \sin \theta$. Исключая из этой системы уравнений γ , получаем

$$k^2(n_1^2 - n_2^2) = \beta^2 + \xi^2.$$

Пусть z_1 — волновое сопротивление внутренней среды с коэффициентом преломления n_1 . Из условий непрерывности на границе двух сред $E_{iz} + E_{rz} = E_{tz}$, $H_{iz} + H_{rz} = H_{tz}$ следует, что при отражении волны в среде 1 от границы со средой 2 отношение суммы напряженностей тангенциальных компонент электрического поля падающей и отраженной волн к сумме напряженностей тангенциальных компонент магнитного поля в первой среде равно импедансу второй среды

$$\tilde{z} = \frac{E_i + E_r}{H_i + H_r} = \frac{E_t}{H_t} = z_2. \quad (11.2)$$

Запишем для поля во внутренней среде условие согласования фаз, состоящее в том, что при прохождении x -составляющей волны от нижней границы раздела к верхней и обратно фазовый набег должен быть кратным 2π :

$$4kn_1 b \sin \theta + \Phi = 2n\pi. \quad (11.3)$$

Это уравнение дисперсии. При двукратном отражении от границы появляется фазовый сдвиг

$$\Phi = -2 \operatorname{arctg} \left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = -2 \operatorname{arctg} \left(i \frac{n_{21} \cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right), \quad (11.4)$$

или с учетом (11.3)

$$\Phi = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k n_1 \sin \theta} \right) = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\xi} \right).$$

Парциальная волна в диэлектрическом световоде распространяется так, как если бы она отражалась от металлической плоскости, отстоящей на некотором расстоянии x_0 от границы раздела двух сред.

С другой стороны, полное отражение тангенциальной компоненты поля получается, если импеданс второй среды равен нулю. Этот случай эквивалентен ситуации, когда на некотором расстоянии x_0 от границы раздела помещена металлическая бесконечно проводящая плоскость. Тогда для импеданса границы раздела можно записать

$$z = z_1 \frac{e^{i\beta x_0} - e^{-i\beta x_0}}{e^{i\beta x_0} + e^{-i\beta x_0}} = i z_1 \operatorname{tg}(\beta x_0). \quad (11.5)$$

Здесь учтен сдвиг фазы электрической компоненты поля на π при отражении.

Приравняв (11.5) к (11.2), приходим к соотношению

$$i z_1 \operatorname{tg}(\beta x_0) = z_2.$$

Откуда

$$i \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{ctg}(\beta x_0) = -\operatorname{tg} \left(\beta x_0 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.6)$$

Согласно (11.4), при полном внутреннем отражении $r = e^{-i\Phi}$, где

$$\Phi = -2 \operatorname{arctg} \left[i \frac{z_1}{z_2} \right]. \quad (11.7)$$

Из сравнения (11.6) с (11.7) находим зависимость фазового сдвига от расстояния x_0

$$\Phi = 2\beta x_0 + \pi. \quad (11.8)$$

Сдвиг при полном внутреннем отражении, определяемый для распространяющейся через последовательность отражений парциальной волны в световоде, кратен 2π :

$$2\beta x_0 + \pi = 2n\pi.$$

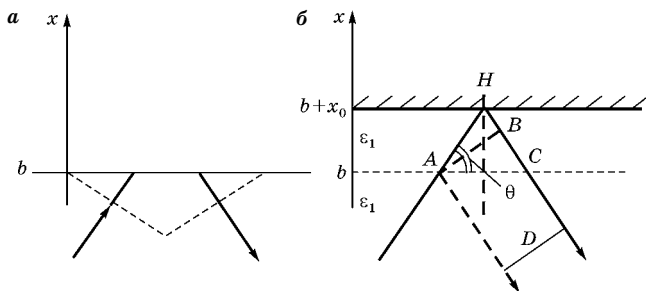


Рис. 11.2

Отсюда следует, что отражение может происходить от плоскостей, отстоящих друг от друга на величину, кратную $\pi/2\beta$ (рис. 11.2а). Из рис. 11.2б найдем разность хода Δ :

$$\Delta = AH + HB = 2x_0 \sin \theta_i. \quad (11.9)$$

В (11.9) мы сравниваем фазу отраженной волны с фазой, которую имела бы эта волна при отражении в точке А. Отсюда получаем для фазового сдвига

$$\Phi = kn_1 \Delta + \pi = 2x_0 kn_1 \sin \theta + \pi = 2x_0 \beta + \pi,$$

что совпадает с (11.8). Скачок фазы, равный π , появляется при полном отражении электрической компоненты от металлической поверхности. Из рис. 11.2б видно, что отражение света от границы раздела двух диэлектрических сред вызывает смещение светового луча на величину

$$D = 2x_0 \cos \theta_i.$$

Это смещение пучка получило название смещения Гуса–Хенсена.

11.2. МОДОВАЯ СТРУКТУРА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Обратимся к уравнению дисперсии (11.3). После подстановки в него (11.4) и $\xi = kn_1 \sin \theta$ получим

$$\xi \operatorname{tg} \left(\xi b + \frac{1}{2} n\pi \right) = \beta.$$

Здесь можно выделить два случая:

$$\begin{aligned} 1) n = 2p, \quad \xi \operatorname{tg}(\xi b) &= \beta; \\ 2) n = 2p + 1, \quad -\xi \operatorname{tg}(\xi b) &= \beta. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Трансцендентные уравнения (11.10) определяют условия существования мод в световоде. Последовательность рассуждений для четного и нечетного значений индекса n одинакова. Поэтому остановимся на ситуации, когда $n = 2p$. Зависимость модовой структуры поля от частоты исследуем графически.

Параметры ξ и β должны одновременно удовлетворять уравнениям (11.10) и

$$\xi^2 + \beta^2 = k^2(n_1^2 - n_2^2). \quad (11.11)$$

Построим зависимость βb от ξb . Параметры ξ и β при каждом значении волнового числа k определяются точкой пересечения кривых, соответствующих функции $\operatorname{tg}(\xi b)$

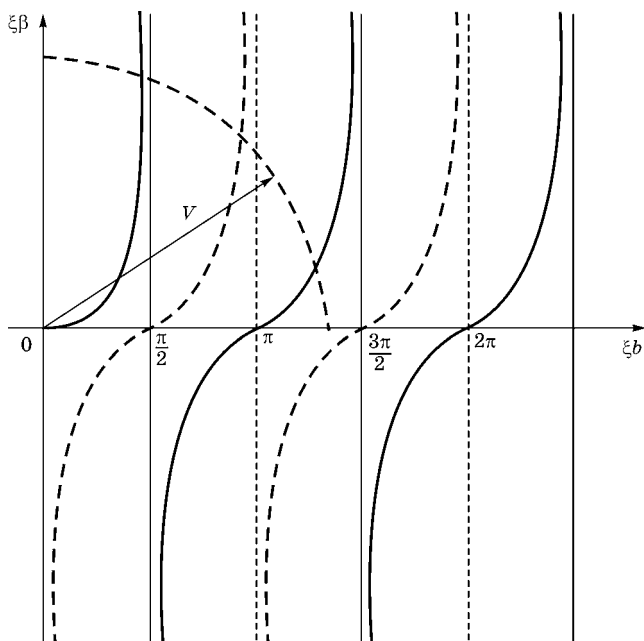


Рис. 11.3

или $\text{ctg}(\xi b)$ с окружностью, описываемой уравнением (11.11). С ростом k радиус такой окружности увеличивается. Соответственно растут значения параметров ξ и β , являющиеся решениями системы уравнений (11.10) и (11.11). Графически построение решений показано на рис. 11.3, из которого видно, как появление мод светового поля зависит от волнового числа. Если ввести понятие приведенной частоты $V = kb\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, характеристические уравнения мод принимают вид

$$\begin{aligned}\xi b \text{tg}(\xi b) &= b\beta; \\ -\xi b \text{ctg}(\xi b) &= b\beta; \\ b^2(\xi^2 + \beta^2) &= V^2.\end{aligned}$$

Как следует из рис. 11.3, критические частоты удовлетворяют условиям

$$\xi b = 1/2n\pi, \quad \beta = 0.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\omega_c &= \frac{\pi c}{2b\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}; \\ \lambda_c &= 4b\sqrt{n_1^2 - n_2^2}.\end{aligned}\tag{11.12}$$

Новые моды появляются при всех частотах $n\omega_c$, а нулевая мода существует при $n = 0$. Следовательно, в диэлектрическом световоде, в отличие от металлического, нет частотного порога. В диэлектрическом световоде для любой возбужденной моды согласование фаз выполняется, поскольку набег фазы при распространении компенсируется изменением фазы при отражении.

В ситуации, соответствующей возбуждению какой-либо моды в световоде, $\beta = 0$ и, следовательно, $\cos\theta_c = n_{21}$, т. е. угол направления волнового вектора парциальной волны относительно оси z является предельным. Условие $\beta = 0$ означает, что волна полностью распространяется во второй среде, и ее фазовая скорость определяется параметрами внешней среды. Этот режим работы световода крайне невыгоден из-за потерь на излучение во вторую среду. При увеличении частоты параметры ξ и β растут,

угол θ убывает, а поле концентрируется внутри световода (в первой среде). При неограниченном росте частоты ω величина ξ стремится к бесконечности, а угол θ — к нулю.

Это означает, что распространяющаяся волна полностью локализуется во внутренней среде волновода, параметрами которой определяется ее фазовая скорость. Качественная зависимость структуры моды с ростом частоты показана на рис. 11.4. На критической частоте $\sin \theta_c = n \frac{\omega_c}{\omega}$, где $\omega_c = \frac{nc}{bn_1}$. Отсюда видно, что ω_c совпадает с критической частотой металлического волновода, заполненного диэлектрической средой, показатель преломления которой n_1 . Следовательно, на критических частотах структура поля в диэлектрическом световоде такая же, как и в соответствующем металлическом волноводе.

Одномодовый режим диэлектрического световода возможен, если обеспечивается условие $\omega < \omega_c$. В этом случае, согласно (11.12), максимальный размер световода удовлетворяет условию

$$4b \leq \lambda(n_1^2 - n_2^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, одномодовый режим работы реализуется в диэлектрическом световоде с размерами, много большими длины волны, и тем легче, чем меньше разность показателей преломления внутренней и внешней среды. Однако при этом трудно удовлетворить одновременно требованиям максимального размера сечения волновода в одномодовом режиме и минимальной дисперсии (зависимости групповой скорости основной моды от час-

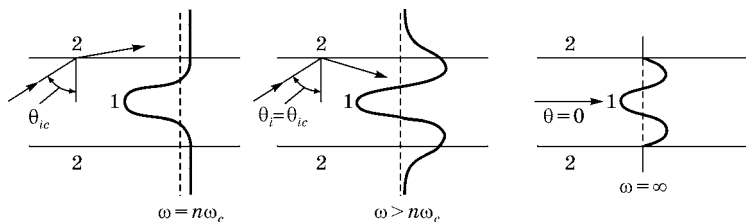


Рис. 11.4

тоты). Поэтому на практике часто используется много-модовый режим с учетом дисперсии каждой моды и многомодовых эффектов.

Постоянная распространения γ определяется из выражения (11.1)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1^2 + k_{12}^2 - \xi^2 + \beta^2]^{\frac{1}{2}},$$

или, переходя к частоте,

$$\gamma = kn_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В предельных случаях

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_c} \gamma = kn_2, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \gamma = kn_1.$$

На рис. 11.5 показана примерная зависимость коэффициента распространения от частоты, а также зависимость $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$.

Оптические лучи внутри световода распространяются, испытывая полное внутреннее отражение. Моды определяются типом распределения электрического поля и соответствуют определенным углам, под которыми распространяются лучи. Для полного внутреннего отражения волны, входящей в световод под углом θ , необходимо выполнить условие

$$0 \leq \theta \leq \theta_{\max},$$

где

$$\theta_{\max} = \sin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$\theta_{\max}$ — максимальный угол, под которым световая волна может входить в оптические волокна. Этот угол получил название *числовая апертура (NA)* световода. Она связана с приведенной частотой $V = kb\theta_{\max}$. Отсюда

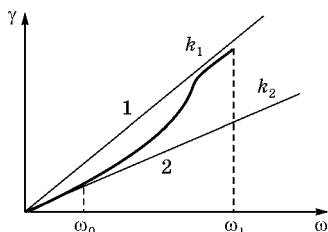


Рис. 11.5

$$\theta_{\max} = \frac{1}{kb} V \approx n_1 \left[\frac{2(n_1 - n_2)}{n_2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для оптических волокон вводится понятие приведенной частоты среза V_c . Если действительные значения приведенной частоты меньше V_c , имеет место одномодовый режим распространения света, если $V > V_c$ — режим многомодовый. Величина $\lambda_c = \frac{2\pi b}{V_c} \theta_{\max}$ называется длиной волны среза. Одномодовому режиму соответствует длина волны $\lambda > \lambda_c$, многомодовому — $\lambda < \lambda_c$.

Рис. 11.6 иллюстрирует условия распространения основной моды в оптическом волноводе. Распределение интенсивности электрического поля определяется интерференцией парциальных волн. На оси эта интенсивность максимальна. Вблизи границы с внешней оболочкой фазовые фронты парциальных волн взаимно компенсируются и результирующее поле равно нулю. Распределение электрического поля вдоль оси z представляет собой стоячую волну. Оно многократно повторяется вдоль оси волновода с периодом $\Lambda = 2\pi/\gamma$.

Преимущество многомодовых оптических волокон перед одномодовыми заключается в большей числовой апертуре. Падающий пучок «захватывается» волокном в значительно большем пространственном угле. Недостаток многомодового волокна — большая дисперсия, поскольку

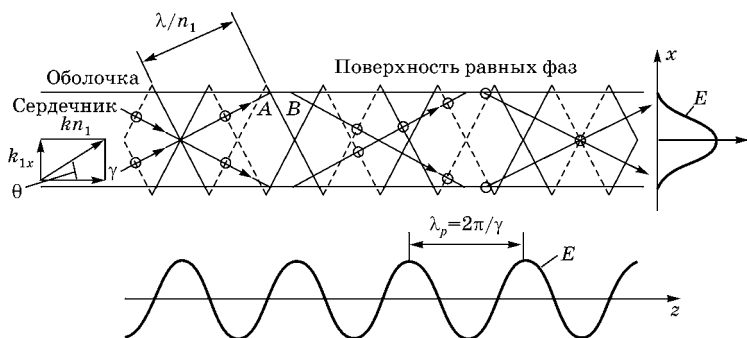


Рис. 11.6

моды обладают различными фазовыми скоростями. Из-за дисперсии происходит интерференция мод, зависящая от температурных эффектов, деформации волокна и механических вибраций. В многомодовом волокне дисперсионные эффекты имеют определяющее значение в ограничении расстояния, на которое может даваться информация. Если сигналы должны передаваться на большое расстояние и с высокой скоростью, необходимо использовать одномодовые волокна.

11.3. ВЛИЯНИЕ ХРОМАТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИИ

Хроматическая дисперсия — это зависимость показателя преломления от частоты света, распространяющегося в среде. Природа хроматической дисперсии связана с характерными частотами, на которых в среде поглощается электромагнитное излучение осциллирующими электронами.

Дисперсия в волоконном световоде влияет на распространение коротких оптических импульсов из-за различной скорости спектральных компонент. При этом происходит дисперсионное уширение импульса.

Эффекты дисперсии можно описать через зависимость постоянной распространения от частоты, представленную в виде первых членов разложения в ряд Тейлора в окрестности несущей частоты ω_0 :

$$\gamma(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \gamma^{(2)}(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (11.13)$$

где $\gamma^{(m)} = \left[\frac{d^m \gamma}{d\omega^m} \right]_{\omega=\omega_0}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Ранее мы установили,

что огибающая импульса движется с групповой скоростью

$v_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma^{(1)}}$. Параметр $\gamma^{(2)} = \left. \frac{d^2 \gamma}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$ определяет дисперсию групповых скоростей. С показателем преломления и его производными коэффициенты $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ связаны соотношениями

$$\gamma^{(1)} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{v_g};$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right) \approx \omega \frac{d^2n}{cd\omega^2} \approx \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2n}{d\lambda^2}.$$

Дисперсия групповых скоростей в зависимости от знака разности длины волны и длины волны нулевой дисперсии, $\lambda - \lambda_D$, может быть положительной или отрицательной. В области аномальной дисперсии ($\lambda > \lambda_D$) величина $\gamma^{(2)}$ отрицательная, а в области ($\lambda < \lambda_D$) — положительная. Для качественного описания дисперсии используется параметр D :

$$D = \frac{d\gamma^{(1)}}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \gamma^{(2)} \approx -\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2}.$$

На рис. 11.7 показан пример зависимости параметра D от длины волны в кварцевом световоде. Как видно из рисунка, для кварцевого стекла длина волны нулевой дисперсии равна $\lambda_D = 1,31$ мкм. В окрестности этой длины волны дисперсия минимальна.

За счет волноводных эффектов, связанных с выбором геометрии и показателей преломления сердцевины и оболочки, длину волны нулевой дисперсии можно сместить в область $\lambda_D = 1,55$ мкм, где световоды имеют минимальные потери. Такая возможность очень важна для построения оптических линий связи.

Следствием хроматической дисперсии является то, что импульсы разных длин волн распространяются с разными

групповыми скоростями. Расстояние между двумя импульсами зависит от параметра расстройки групповых скоростей:

$$d_{12} = \frac{1}{v_g(\lambda_1)} - \frac{1}{v_g(\lambda_2)},$$

где λ_1 и λ_2 — длины волн, соответствующие частотам двух импульсов. Для двух импульсов длительностью T_0 можно

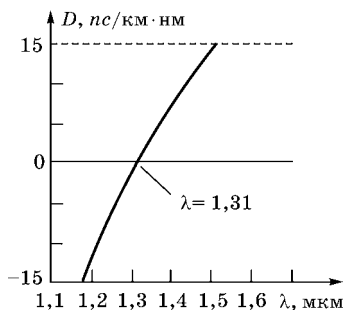


Рис. 11.7

оценить длину дисперсионного разбегания L_W соотношением

$$L_W = \frac{T_0}{|d_{12}|}.$$

В режиме нормальной дисперсии импульс с большей длиной волны несущей движется быстрее. В режиме аномальной дисперсии быстрее движется импульс с меньшей длиной волны.

11.4. ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Исследуем распространение оптического поля в световоде длиной z , в приближении линейной модели взаимодействия со средой. Пусть на входе сформирован импульс $s_i(t)$. Используя фильтрующие свойства δ -функции, его можно представить в виде

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (11.14)$$

Фильтрующее свойство означает, что свертка сигнала с δ -функцией равна значению сигнала в точке $\tau = t$, где сосредоточен δ -импульс. Если среда, в которой распространяется оптический сигнал, линейна и стационарна (неизменна во времени), ее можно описать оператором $\hat{T}$, связывающим входной и выходной сигналы

$$s_e(t) = \hat{T}s_i(t).$$

Воспользовавшись выражением (11.14), можно записать для выходного сигнала

$$s_e(t) = \hat{T} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \hat{T} \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (11.15)$$

где $h(t - \tau) = \hat{T} \delta(t - \tau)$ — *импульсный отклик* как реакция среды на входной δ -импульс. Другое часто встречающееся название импульсного отклика — *функция Грина*.

Рассмотрим реакцию линейной системы на входной сигнал вида $\exp[i\omega t]$:

$$\begin{aligned}
 s_e(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t-x)] h(x) dx = \\
 &= \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp(-i\omega x) dx = \exp(i\omega t) H(\omega). \quad (11.16)
 \end{aligned}$$

Здесь $H(\omega)$ — частотный коэффициент передачи среды. Как видно из (11.16), этот коэффициент и импульсный отклик связаны фурие-преобразованием:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt; \\
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.
 \end{aligned}$$

Исследуем влияние дисперсии на распространение оптического импульса. Для частотного коэффициента передачи световода длиной z можно записать:

$$H(\omega) = \exp[-i\gamma(\omega)z]. \quad (11.17)$$

В модели среды с дисперсией первого порядка достаточно ограничиться в разложении постоянной распространения первыми двумя членами:

$$\gamma(\omega) = \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}(\omega - \omega_0). \quad (11.18)$$

Подставляя (11.18) в (11.17) и выполняя преобразование Фурье, получаем для импульсного отклика

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}(\omega - \omega_0)]z\} \exp(i\omega t) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}\Omega]z\} \exp[i(\Omega + \omega_0)t] d\Omega = \\
 &= \exp(-i\gamma^{(0)}z) \exp(i\omega_0 t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[(t - \gamma^{(1)}z)\Omega]\} d\Omega = \\
 &= \exp(-i\gamma^{(0)}z) \exp(i\omega_0 t) \delta[t - \gamma^{(1)}z]. \quad (11.19)
 \end{aligned}$$

Здесь при интегрировании мы воспользовались заменой переменной $\omega - \omega_0 = \Omega$. После подстановки (11.19) в (11.15) находим выходной сигнал

$$\begin{aligned}
s_e(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp(-i\gamma^{(0)}z) \exp[i\omega_0(t-\tau)] \delta[t-\tau-\gamma^{(1)}z] d\tau = \\
&= \exp(-i\gamma^{(0)}z) \exp(i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp(-i\omega_0\tau) \delta[t-\tau-\gamma^{(1)}z] dt = \\
&= s_i(t-\gamma^{(1)}z) \exp[i(\omega_0\gamma^{(1)}-\gamma^{(0)}z)]. \quad (11.20)
\end{aligned}$$

Из (11.20) следует, что в среде с дисперсией первого порядка световой сигнал распространяется без изменения формы с групповой скоростью $v_g = \frac{1}{\gamma^{(1)}} = \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\bigg|_{\omega_0}$, которая отличается от фазовой скорости:

$$v_p = \frac{\omega_0}{\gamma^{(0)}} = \frac{c}{n(\omega_0)}.$$

Для модели среды с дисперсией второго порядка из (11.13) имеем

$$\frac{\partial\gamma(\omega)}{\partial\omega} = \frac{1}{v_g} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}(\omega - \omega_0). \quad (11.21)$$

Выражение (11.21) означает, что в такой среде имеет место дисперсия групповых скоростей. Последовательная подстановка (11.13) в (11.17) и выполнение фурье-преобразования дают следующее выражение для импульсного отклика:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left[\gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\gamma^{(2)}(\omega - \omega_0)^2\right]z\right\} \exp(i\omega t) d\omega.
\end{aligned}$$

После замены переменной $\omega - \omega_0 = \Omega$:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp(-i\gamma^{(0)}z) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left[\gamma^{(1)}\Omega + \frac{1}{2}\gamma^{(2)}\Omega^2\right]z\right\} \exp[i(\Omega + \omega_0)t] d\Omega = \\
&= \exp(-i\gamma^{(0)}z) \exp(i\omega_0 t) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{1}{2}\gamma^{(2)}\Omega^2 z\right) \exp[i(t - \gamma^{(1)}z)\Omega] d\Omega = \\
&= \exp[i(\omega_0 t - \gamma^{(0)}z)] \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} \exp\left\{i\frac{(t - \gamma^{(1)}z)^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\}. \quad (11.22)
\end{aligned}$$

Подставляя (11.22) в (11.15), находим выходной сигнал

$$\begin{aligned}
 s_e(t) = & \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} \exp(-i\gamma^{(0)}z) \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp\left\{-i\frac{(t-\gamma^{(1)}z-\tau)^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\} \times \\
 & \times \exp\{i\omega_0(t-\tau)\} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} \exp\left[i\left(\omega_0 t - \gamma^{(0)}z\right)\right] \exp\left\{-i\frac{t^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\} \times \\
 & \times \exp\left\{i\frac{t\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}\right\} \exp\left\{i\frac{\gamma^{(1)2}z}{2\gamma^{(2)}}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp\left\{-i\frac{\tau^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\} \times \\
 & \times \exp\left\{-i\tau\left[\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}} - \frac{t}{\gamma^{(2)}z} + \omega_0\right]\right\} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} \times \\
 & \times \exp\left\{i\left[\left(\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}\right)t - \left(\gamma^{(0)} - \frac{\gamma^{(1)2}}{\gamma^{(2)}}\right)z\right]\right\} \exp\left\{-i\frac{t^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp\left\{-i\frac{\tau^2}{2\gamma^{(2)}z}\right\} \exp\left\{-i\tau\left[\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}} - \frac{t}{\gamma^{(2)}z}\right]\right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

При достаточно большой длине удовлетворяется условие $\frac{\tau^2}{2\gamma^{(2)}z} \ll 1$. Если длительность входного импульса τ_0 , это условие принимает вид

$$\frac{\tau_0}{2\gamma^{(2)}z_\partial} \ll 1,$$

или $z_\partial \gg \frac{\tau_0}{2\gamma^{(2)}}$, где расстояние z_∂ получило название «дисперсионная длина». Полученное выражение сводится к фурье-преобразованию входного сигнала

$$\begin{aligned}
 s_e(t) = & \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} \exp\left\{i\left[\left(\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}\right)t - \left(\gamma^{(0)} - \frac{\gamma^{(1)2}}{\gamma^{(2)}}\right)z\right]\right\} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \exp\left\{-j\tau\left[\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}z-t}{\gamma^{(2)}z}\right]\right\} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{i\gamma^{(2)}z}} s_i\left(\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}} - \frac{t}{\gamma^{(2)}z}\right) \times \\
 & \times \exp\left\{i\left[\left(\omega_0 + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}\right)t - \left(\gamma^{(0)} - \frac{\gamma^{(1)2}}{\gamma^{(2)}}\right)z\right]\right\}.
 \end{aligned} \tag{11.23}$$

Из (11.23) следует, что в дальней зоне оптический импульс приобретает устойчивую форму, определяемую спек-

тром входного импульса. Такой световой импульс получил название «спектрон».

Спектральная ширина входного импульса определяется величиной $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau_0$ или, согласно (11.23),

$$\Delta\omega \approx \frac{\tau_e}{\gamma^{(2)}z},$$

где $\tau_e = (t - \gamma^{(1)}z)$.

Отсюда получаем оценку длительности выходного импульса

$$t_e = g^{(2)}z\Delta\omega. \quad (11.24)$$

Из (11.24) следует, что длительность светового импульса в дальней зоне линейно возрастает с расстоянием. Этот эффект называется *дисперсионным расплыванием импульса*. Он возникает из-за дисперсии групповых скоростей.

11.5. ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЯЮЩИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

Одномодовый световод с цилиндрически симметричной геометрией допускает возбуждение двух вырожденных мод с ортогональной поляризацией. В реальных условиях малые нарушения цилиндрической симметрии или неоднородности в структуре вещества приводят к смешиванию двух поляризационных состояний и снятию вырождения мод. Постоянные распространения для ортогонально поляризованных мод становятся различными. Это свойство называется *двулучепреломлением мод*. Степень модового двулучепреломления B определяется выражением

$$B = \frac{|\gamma_x - \gamma_y|}{k} = |n_x - n_y|,$$

где n_x и n_y — показатели преломления среды для двух ортогонально поляризованных мод. При распространении в световоде из-за фазового набегания происходят биения мод с пространственным периодом

$$L_B = \frac{2\pi}{|\gamma_x - \gamma_y|} = \frac{\lambda}{B}, \quad (11.25)$$

который называется *длиной биений*.

В обычных одномодовых световодах модовое двулучепреломление B не постоянно по длине, а имеет случайные изменения из-за флуктуаций в геометрии и анизотропии, вызванных статическими напряжениями, температурными полями, несовершенством технологии при изготовлении. По этой причине линейно поляризованный свет, вводимый в световод, быстро теряет свое первоначальное состояние, его поляризация нарушается.

Для сохранения состояния поляризации в световодах искусственно создается сильное двулучепреломление, намного превышающее случайные флуктуации. Тем самым снимается влияние случайных флуктуаций геометрической структуры и однородности световода на состояние поляризации. Такие световоды называются *световодами, сохраняющими состояние поляризации*.

Один из способов создания таких световодов состоит в нарушении цилиндрической симметрии сердцевины или оболочки путем перехода, например, к эллиптической форме сечения. Другой способ — в создании статических упругих напряжений.

Для введения линейно-поляризованного пучка в световод с сохранением поляризации необходима предварительная идентификация быстрой и медленной осей. При совпадении поляризации входного излучения с быстрой или медленной осью поляризация при распространении не меняется. При несовпадении поляризация непрерывно меняется при распространении света вдоль световода с периодом биений, определяемым формулой (11.25). Обычно для световодов с сильным двулучепреломлением ($B \sim 10^{-4}$) пространственный период биений составляет величину порядка 10 мм.

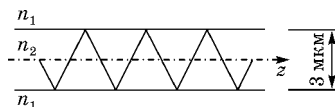
ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 11

1. На каких физических явлениях основано распространение оптических волн в диэлектрическом световоде?
2. Определите условие согласования фаз при распространении оптического поля в диэлектрическом световоде.
3. Чем вызывается смещение Гуса–Хенсена при распространении световой волны в оптическом волокне?

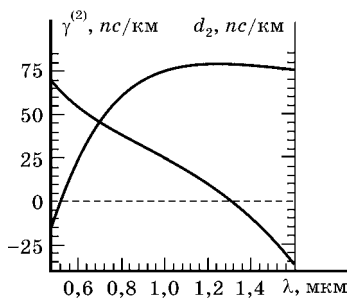
- Опишите модовую структуру оптических полей, распространяющихся в диэлектрическом световоде.
- При каких условиях реализуется одномодовый режим работы диэлектрического световода?
- Что такое числовая апертура оптического волокна?
- Определите понятие приведенной частоты.
- Сравните достоинства и недостатки одномодовых и многомодовых оптических волокон.
- В чем состоит явление хроматической дисперсии при распространении света в оптическом волокне?
- Как соотносятся скорости огибающей и несущей светового импульса в оптическом волокне в случаях нормальной и аномальной дисперсии?
- Объясните эффект дисперсионного расплывания светового импульса при распространении в оптическом волокне.
- Как осуществляется сохранение поляризации оптического импульса в двулучепреломляющих световодах?

ЗАДАЧИ

11.1. Мода распространяется в планарном световоде. Постоянная распространения $\gamma = 0,8 \text{ кн}_2$, $\lambda = 0,9 \text{ мкм}$, толщина световода 3 мкм . Сколько отражений претерпевает луч на поверхности раздела (n_1, n_2) при прохождении расстояния 10 мм в направлении оси z ?



11.2. На рисунке показана зависимость параметров $\gamma^{(2)}$ и d_{12} от длины волны для кварцевого стекла. Оценить длину разбегания L_W импульсов длительностью $T_0 = 20 \text{ пс}$ на длинах волн $\lambda_1 = 1,06 \text{ мкм}$ и $\lambda_2 = 0,63 \text{ мкм}$ для кварцевого стекла.



11.3. Световой импульс длительностью T имеет гауссову форму

$$s(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right)$$

и распространяется в диэлектрическом световоде. Определить характеристическое расстояние, на котором длительность импульса увеличивается в $\sqrt{2}$, если параметр дисперсии равен D .

11.4. Каким распределением коэффициента преломления должна обладать среда, чтобы при распространении в ней гауссова пучка компенсировалась его расходимость?

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

12.1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРОННОЙ ДИСПЕРСИИ

Под дисперсией понимается зависимость показателя преломления среды от частоты распространяющегося в ней света. Рассмотрим среду как совокупность невзаимодействующих между собой атомов. Дисперсия возникает в результате вынужденных колебаний электронов или ионов под действием световой волны. В атоме различают электроны периферийные, или оптические, и электроны внутренних оболочек. Взаимодействуют со светом только оптические электроны. Колебания электронов внутренних оболочек в поле световой волны не возбуждаются, поскольку собственные частоты этих электронов слишком велики.

Примем в качестве модели атома осциллятор, в котором электрон удерживается квазиупругой силой sx , пропорциональной смещению. Затухание осциллятора учитывается феноменологическим введением силы торможения $r\dot{x}$. Физически затухание определяется потерями энергии на излучение и тепловое хаотическое движение. Вынужденные колебания атома (в линейном приближении) описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E e^{i\omega t}.$$

Здесь $\gamma = \frac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{s}{m}$, e — заряд электрона, m — масса электрона, $E e^{i\omega t}$ — комплексная запись поля электромагнитной волны, действующей на электрон. Зависимостью поля от координаты пренебрегаем, полагая амплитуду смещения

электрона много меньшей длины волны излучения. Согласно (2.13), комплексная амплитуда смещения равна

$$\hat{x} = \frac{eE}{i\omega Z_m},$$

где импеданс осциллятора (2.5)

$$Z_m = r + i \frac{m}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Смещение и заряд электрона определяют электрический (дипольный) момент атома

$$p = ex.$$

В состоянии равновесия дипольный момент атома равен нулю. Электрический момент единицы объема среды (или поляризация среды)

$$P = Np,$$

где N — число атомов в единице объема.

Поляризация среды P связана с диэлектрической проницаемостью ε через электрическую индукцию D :

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0(E + P) = \varepsilon_0(E + \chi_e E),$$

где χ_e — диэлектрическая восприимчивость. Из этой формулы находим

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{P}{E} = 1 + \chi_e.$$

В среде с поглощением для коэффициента преломления можно записать

$$\sqrt{\varepsilon_r} = n - i\chi,$$

или

$$\varepsilon_r = n^2 - \chi^2 - j2n\chi, \quad n^2 - \chi^2 = \operatorname{Re}\varepsilon_r, \quad 2n\chi = -\operatorname{Im}\varepsilon_r,$$

где χ — показатель поглощения. Подставляя в выражение для ε_r амплитуду смещения, получаем

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{Nex}{E} = 1 + \frac{Ne^2}{i\omega Z_m} = 1 + \frac{Ne^2}{m[\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma]}. \quad (12.1)$$

Выделяя действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости ϵ_r :

$$n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]}; \quad (12.2)$$

$$2n\chi = \frac{2Ne^2\omega\gamma}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]}. \quad (12.3)$$

Из сравнения (12.2) с (2.15) следует, что действительная часть диэлектрической проницаемости описывается линейной функцией дисперсионной компоненты смещения электрона в осцилляторной модели атома (рис. 12.1).

Сопоставление (12.3) и (2.16) показывает, что мнимая часть диэлектрической проницаемости ϵ_r является диссипативной компонентой и определяет потери (поглощение) в среде.

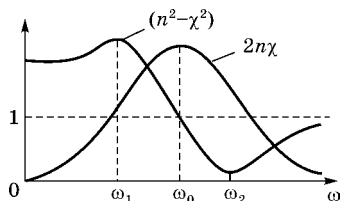


Рис. 12.1

Когда ω попадает в окрестность резонансной частоты ω_0 электрона в атоме, диссипативная компонента имеет характерную форму кривой поглощения. Это видно из сравнения рис. 12.1 и 2.9.

Дисперсионная компонента смещения электрона определяет показатель преломления n и, соответственно, скорость распространения световой волны в среде. Она связана с реактивной частью импеданса.

Как следует из (12.2), (12.3) и рис. 12.1, в области частот, где поглощение мало, $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, показатель преломления растет с частотой, что соответствует *нормальной дисперсии*. В интервале частот (ω_1, ω_2) , соответствующем большому поглощению, имеет место *аномальная дисперсия*, когда показатель преломления уменьшается с ростом частоты.

Аномальная дисперсия соответствует

$$\frac{dn}{d\omega} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{dn}{d\omega} > 0.$$

Здесь c — скорость света. Для нормальной дисперсии имеем

$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{dn}{d\omega} < 0.$$

Аномальная дисперсия возникает в спектральном интервале, где среда интенсивно поглощает энергию света. Спектр прозрачных тел (большинство газов, вода, стекло, кварц) в видимой области не имеет полос поглощения. У них в этом спектральном диапазоне наблюдается нормальная дисперсия.

Атом, как осциллирующий диполь, рассеивает (испускает) световое поле с амплитудой A_s , пропорциональной ускорению $\omega^2 x$. Пренебрегая затуханием ($\gamma = 0$), можно записать

$$x = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Отсюда

$$A_s \sim -\frac{e\omega^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Интенсивность рассеянного излучения пропорциональна квадрату его амплитуды

$$I_s = |A_s|^2 \sim \frac{e^2 \omega^4 E^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{e^2 E^2}{m^2 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2}.$$

Исследуем это выражение. При $\omega \ll \omega_0$ (видимая область спектра)

$$I_s \sim \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

Этот результат соответствует так называемому рэлеевскому рассеянию и объясняет, почему небо голубое (голубой свет рассеивается значительно сильнее, чем красный).

Условие $\omega \gg \omega_0$ относится к другому предельному случаю, когда $I_s \sim \text{const}$. Интенсивность излучения не

зависит от частоты (рассеяние Томсона). Эта ситуация наблюдается, например, при взаимодействии рентгеновского излучения или столкновениях быстрых электронов с веществом (электрон характеризуется волной де Бройля). Независимость интенсивности от частоты при рассеянии Томсона объясняет, почему в электронном микроскопе или в рентгеновском аппарате не различаются цвета.

Условие $\omega \sim \omega_0$ соответствует так называемому пределу Лоренца, когда частота падающей световой волны ω близка к собственной частоте ω_0 :

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega + \omega_0 \quad \text{или} \quad \omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega).$$

В этом приближении частота падающей световой волны попадает в спектральный интервал поглощения осциллятора, а выражения (12.2) и (12.3) принимают вид $n^2 \gg \chi^2$

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{e^2 N}{2m\omega_0} \left[\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \right]; \\ 2n\chi &= \frac{e^2 N}{2m\omega_0} \left[\frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Выражение (12.4) получило название *лоренцева контура спектральной линии*.

Если в среде имеется несколько видов невзаимодействующих атомов, осцилляторная модель позволяет получить выражение для диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_r = 1 + \sum_i \frac{e_i^2 N_i}{m_i [\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_i]}. \quad (12.5)$$

Здесь e_i , N_i , m_i и γ_i — параметры, относящиеся к i -му виду атомов. Каждой собственной частоте ω_i соответствует своя линия поглощения, в окрестности которой локализуется область аномальной дисперсии.

Рассмотренная модель взаимодействия с внешним излучением достаточно универсальна и может быть применена для ионов и ядер с соответствующим подбором параметров.

12.2. ОЦЕНКА ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ

Моделью плазмы является ионизированный газ, в котором электроны и ионы ведут себя как свободные частицы с собственными частотами, равными нулю. Поскольку массы ионов много больше массы электронов, диэлектрическая проницаемость ε определяется в основном свободными электронами. Поэтому в выражении для диэлектрической проницаемости (12.1) применительно к плазме можно положить $\omega_0 = 0$. Пренебрегая затуханием, получаем

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \omega^2}. \quad (12.6)$$

Выделим в плазме слой, как показано на рис. 12.2. Среднее поле в нейтральной плазме равно нулю. Сместим все электроны на малое расстояние x перпендикулярно бесконечным плоскостям, ограничивающим слой. Тогда на границах плазмы возникнут электрические заряды с поверхностной плотностью $\sigma = Nex$, что приведет к появлению в плазме электрического поля $E = \sigma = Nex$. Следовательно, на каждый электрон будет действовать квазиупругая сила $F = Ne^2x = sx$, что вызовет в слое плазмы гармонические колебания электронов с собственной частотой ω_p , квадрат которой определяется выражением

$$\omega_p^2 = \frac{s}{m_e} = \frac{Ne^2}{m_e}. \quad (12.7)$$

Величина ω_p получила название плазменной или ленгмюровской частоты. Подставляя (12.7) в (12.6), получаем для диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (12.8)$$

В случае если частота внешнего поля $\omega = \omega_p$, диэлектрическая проницаемость плазмы равна нулю. При $\omega > \omega_p$ величина ε и, соответственно, показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ положительны, но меньше единицы. При $\omega < \omega_p$ диэлектрическая проницаемость отрицательна, $\varepsilon_r < 0$, а показатель преломления принимает мнимое значение

$n = i\chi$, что означает сильное поглощение электромагнитного поля. Следовательно, электромагнитные поля, частота которых меньше плазменной, распространяться в плазме не могут и полностью отражаются от ее поверхностных слоев.

Это свойство плазмы имеет огромное практическое значение для дальней радиосвязи, которая осуществляется за счет отражения радиоволн от ионосферы — плазменных слоев, окружающих землю. Ионосфера начинается на высоте примерно 60 км и простирается в окружающее пространство на тысячи километров. Источником ионизации частиц в ионосфере является ультрафиолетовое и мягкое рентгеновское излучение солнца. Максимумы электронной концентрации в ионосферных слоях находятся в пределах $10^4 \dots 10^6$ электронов на кубический сантиметр, что определяет соответствующие значения плазменных частот.

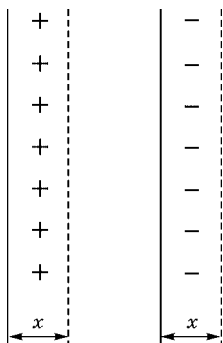


Рис. 12.2

12.3. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

Эффект Зеемана состоит в расщеплении спектральных линий при воздействии на источник излучения магнитным полем. Пусть модель гармонического осциллятора описывает поведение электрона в атоме. В отсутствие внешних полей

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0,$$

где ω_0 — собственная частота электрона, $\mathbf{r}$ — вектор смещения.

Воздействуем на электрон постоянным магнитным полем. В этом случае уравнение движения электрона принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m_e} [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ — вектор индукции магнитного поля, m_e — масса электрона. Сила F_m , действующая на электрон со стороны

магнитного поля, определяется векторным произведением скорости электрона $\dot{\mathbf{r}}$ на магнитную индукцию $\mathbf{B}$:

$$F_m = e[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{B}]. \quad (12.9)$$

Из курса физики известно, что вектор $\mathbf{B}$ связан с лармовской круговой частотой Ω соотношением

$$\Omega = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}. \quad (12.10)$$

После подстановки (12.10) в (12.9) уравнение движения электрона приводится к виду

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2[\Omega, \dot{\mathbf{r}}] + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0.$$

Найдем решение этого векторного дифференциального уравнения в проекциях на прямоугольную систему координат x, y, z , ось z которой ориентирована по направлению магнитного поля $\mathbf{B}$. В координатной форме уравнение (12.9) преобразуется в систему трех скалярных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x = 0; \\ \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y = 0; \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0. \end{cases} \quad (12.11)$$

Последнее уравнение означает, что движение электрона вдоль магнитного поля не подвергается влиянию этого поля.

Для интегрирования первых двух уравнений в (12.11) введем комплексную координату $\xi = x + iy$, которая определяет положение электрона в координатной плоскости (x, iy) , так же как и в плоскости (x, y) , через двумерный вектор ξ с проекциями x и y . Умножим второе уравнение на i и сложим с первым, учитывая, что $-i\dot{\xi} = \dot{y} - i\dot{x}$,

$$\ddot{\xi} - i2\Omega\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (12.12)$$

Мы пришли к линейному дифференциальному уравнению, описывающему движение гармонического осциллятора. Решение ищем в виде $\xi = e^{i\omega t}$. После подстановки в (12.12) получаем алгебраическое уравнение

$$-\omega^2 + 2\Omega\omega + \omega_0^2 = 0.$$

Откуда находим частоту

$$\omega = \Omega \pm (\omega_0^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}} \approx \Omega \pm \omega_0 \left(1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} \right) = \Omega \pm \omega_0.$$

Здесь учтено $\Omega^2 / \omega_0^2 \ll 1$. Принимая во внимание, что физические частоты должны быть положительными, введем обозначения: $\omega_1 = \omega_0 + \Omega > 0$; $\omega_2 = \omega_0 - \Omega > 0$. Следовательно, решения уравнения (12.12) имеют вид

$$\xi_1 = e^{i\omega_1 t}; \quad \xi_2 = e^{-i\omega_2 t}.$$

Первое решение описывает круговое движение электрона в плоскости (x, y) против часовой стрелки с частотой ω_1 (рис. 12.3а). Второе решение также описывает круговое движение, но с частотой ω_2 и по часовой стрелке (рис. 12.3б).

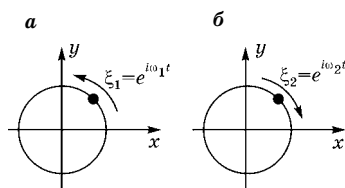


Рис. 12.3

В отсутствие магнитного поля электрон совершает гармонические колебания, составляющие которых по оси z и в плоскости (x, y) имеют одну и ту же частоту ω_0 . При этом линейная компонента колебаний в плоскости (x, y) может быть представлена как суперпозиция двух циркулярных компонент, вращающихся вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 в противоположных направлениях. После наложения магнитного поля z -компонента колебаний не изменяется и остается равной ω_0 , а колебание в плоскости (x, y) расщепляется на две циркулярные компоненты, вращающиеся вокруг оси z в противоположных направлениях с частотами $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. Это изменение частот циркулярных компонент колебаний в плоскости (x, y) имеет простое объяснение. В отсутствие магнитного поля центробежная сила, действующая на вращающийся электрон, равна $m_e \omega_0^2 r$. В магнитном поле эта центробежная сила изменяется на величину $\pm e v B = \pm e B \omega_0 r$ и становится равной

$$m \omega_0^2 r \pm e B \omega_0 r$$

или

$$m(\omega_0^2 \pm 2\Omega\omega_0)r = m\omega^2 r.$$

Здесь знак определяет направление вращения. Из последнего равенства следует известный результат:

$$\omega = (\omega_0^2 \pm 2\Omega\omega_0)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{2\Omega}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \pm \Omega.$$

Колеблющийся электрон излучает свет. Излучение максимально в направлении, ортогональном ускорению электрона. В направлении, совпадающем с направлением ускорения электрона, излучение отсутствует. Наложение магнитного поля меняет частоту колебаний и, соответственно, частоту излучаемого света. При наблюдении вдоль магнитного поля выявляются две компоненты излучения (продольный эффект Зеемана): составляющая колебаний по направлению магнитного поля излучения не дает, а излучаются только две циркулярно поляризованные компоненты в ортогональной плоскости со смещенными частотами $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ (левая поляризация) и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$ (правая поляризация). При изменении направления магнитного поля поляризации расщепленных линий излучения меняются на противоположные.

При наблюдении поперек магнитного поля имеют место три компоненты излучения (поперечный эффект Зеемана): одна, линейно поляризованная вдоль поля с несмещенной частотой ω_0 , соответствует колебаниям электрона в направлении поля, и две линейно поляризованные составляющие со смещенными частотами $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. Смещенные по частоте компоненты соответствуют колебаниям электрона в плоскости, ортогональной направлению магнитного поля. Поляризация смещенных компонент ортогональна поляризации несмещенной компоненты.

Экспериментально, по величине расщепления циркулярных компонент в эффекте Зеемана, можно определить знак и отношение заряда электрона к его массе, e/m_e . Измеренная величина совпадает с ее значениями, полученными другими независимыми методами, что подтверждает справедливость рассмотренной модели эффекта Зеемана.

12.4. СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ

Существование светового давления непосредственно следует из корпускулярной модели, поскольку движущиеся световые corpusкулы (фотоны) несут количество движения (импульс) и их взаимодействие с любой физической структурой удовлетворяет закону сохранения импульса. Световое давление также обосновывается волновыми свойствами светового поля.

Рассмотрим давление световой волны на атом. Для этого воспользуемся осцилляторной моделью атома. Запишем уравнение движения оптического электрона в атоме под действием плоской световой волны, электрический вектор которой колеблется по оси x , а вектор магнитного поля — по оси z :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x,$$

где

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{K.C.}; \\ H_y &= \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{K.C.} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Под действием электрического поля световой волны в атомном осцилляторе возникают вынужденные колебания электрона с комплексной амплитудой $\hat{x}$ скорости, которая, согласно (2.11), равна

$$\hat{x} = \frac{e\hat{E}}{z_m} = \frac{eA}{z_m}. \quad (12.14)$$

Подставив z_m в выражение для комплексной амплитуды скорости электрона, получаем

$$\hat{x} = \frac{eA}{2m\gamma + i\frac{m}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{eA}{m} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\gamma}. \quad (12.15)$$

Скорость движения электрона

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \hat{x} e^{i\omega t} + \text{K.C.} \quad (12.16)$$

На электрон действует сила Лоренца F_e , возникающая из взаимодействия магнитного поля световой волны с движущимся зарядом:

$$\mathbf{F}_e = e[\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (12.17)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{v} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}, \quad (12.18)$$

получаем

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{z}_0 e \dot{x} H_y. \quad (12.19)$$

Здесь $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ — единичные орты по осям x, y, z ; $y = 0, H_x = H_z = 0$. Сила Лоренца, как следует из (12.19), направлена по оси z , совпадающей по направлению с волновым вектором световой волны $\mathbf{k}$. Сила светового давления на атом определяется как сила Лоренца, усредненная по периоду световых колебаний:

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{z}_0 e \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x} H_y dt. \quad (12.20)$$

Подставляя (12.16) в (12.20), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D &= \mathbf{z}_0 \frac{1}{4} e \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{x}^* e^{-i\omega t}) (A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}) dt = \\ &= \mathbf{z}_0 \frac{1}{4} e A (\hat{x} + \hat{x}^*). \end{aligned} \quad (12.21)$$

Подставляя в (12.21) выражение для комплексной амплитуды скорости колебаний электрона (12.15), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D &= \mathbf{z}_0 \frac{1}{4} e^2 A^2 \left\{ \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\gamma} - \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega\gamma} \right\} = \\ &= \mathbf{z}_0 A^2 \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\omega^2 \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Представим формулу (12.22), определяющую силу светового давления, в виде

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{z}_0 P \sigma, \quad (12.23)$$

где σ — сечение поглощения света атомом; $P = |A|^2 = I$ — световое давление.

$$\sigma = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\omega^2 \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma}. \quad (12.24)$$

Из (12.24) видно, что сечение поглощения света атомом зависит от частоты и максимально при $\omega = \omega_0$. Отсюда следует резонансный характер силы давления света на атом. Сила светового давления на атом максимальна, когда частота света совпадает с собственной частотой колебаний электрона в атоме.

Рассмотрим световое давление плоской волны, падающей по нормали на поверхность. Векторы электрического и магнитного полей взаимно ортогональны и колеблются в плоскости, параллельной поверхности. Согласно рассмотренному выше механизму давления светового поля на атом, электрическое поле световой волны будет взаимодействовать с электрическими зарядами на поверхности, вызывая их колебания по оси x . Взаимодействие магнитного поля световой волны с движущимся электрическим зарядом вызывает появление силы Лоренца (12.17), направленной по нормали к поверхности. Найдем световое давление на поверхность, воспользовавшись уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (12.25)$$

где $\mathbf{j} = nev$ — плотность тока, n — концентрация электронов в единицу времени, $\mathbf{v}$ — скорость электрона. В соответствии с (12.17), на эти электроны действует сила

$$\mathbf{F} = n\mathbf{F}e = ne[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = n[\mathbf{j}, \mathbf{H}]. \quad (12.26)$$

Воспользуемся уравнением (9.6) с учетом (12.25):

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - j_x.$$

Умножаем первое уравнение на E_x , а второе — на H_y :

$$\begin{cases} \varepsilon E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \varepsilon E_x \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \mu H_y \frac{\partial E_x}{\partial t} - H_y j_x. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения:

$$\begin{aligned} & \varepsilon E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial z} = \\ & = -\mu \varepsilon \left(E_x \frac{\partial H_y}{\partial t} + H_y \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) - j_x H_y. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Учитывая, что $j_x H_y$ — сила, пропорциональная z -компоненте силы Лоренца, и выполняя очевидные преобразования, приводим (12.27) к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2} \mu H_y^2 \right) = -\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_x H_y) - F. \quad (12.28)$$

Усредняя (12.28) по периоду световых колебаний и учитывая, что

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\partial}{\partial t} (E_x H_y) dt = \frac{1}{T} (E_x H_y) \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle W \rangle = -\langle F \rangle, \quad (12.29)$$

где $\langle W \rangle$ — объемная плотность энергии светового поля.

Определим силу светового давления P как

$$P = \int_0^\infty \langle F \rangle dz,$$

находим с учетом (12.29) световое давление на поверхность полностью поглощающего тела

$$P = \langle W \rangle = I.$$

В случае когда световая волна падает на частично отражающие поверхности, световое давление описывается формулой:

$$P = (1 + r)I, \quad (12.30)$$

где r — коэффициент отражения. Для полностью отражающей поверхности ($r = 1$) световое давление в два раза больше, чем световое давление на полностью поглощающее тело.

12.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОПТИЧЕСКИХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Рассмотрим преобразование световых волн при распространении в среде, в которой возбуждена акустическая волна. В фотоупругой среде акустическая волна вызывает пространственно-временное изменение показателя преломления, которое образует фазовую решетку, движущуюся со скоростью звука. Пространственный период и амплитуда фазовой решетки определяются длиной и амплитудой акустической волны. Прохождение оптического пучка через такую фазовую структуру сопровождается дифракцией излучения на ней.

Пусть в прозрачной изотропной фотоупругой среде в направлении оси x (рис. 12.4) распространяется ограниченная по оси z размером l бегущая акустическая волна, которая из-за фотоупругости вызывает периодическое изменение показателя преломления по закону

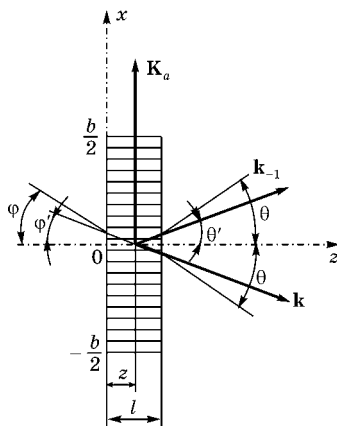


Рис. 12.4

$$n = n_0 + \Delta n \cos[\Omega t - K_a x], \quad (12.31)$$

где n_0 — показатель преломления невозмущенной среды; Ω и K_a — частота и волновое число акустической волны ($K_a = \Omega/v_a$), v_a — скорость звука в среде.

Предположим, что слева под углом φ к оси z в плоскости (x, z) падает плоская оптическая волна единичной амплитуды. Световая волна, прошедшая через фазовую решетку, может быть описана следующим выражением:

$$E = \exp\{ikr\}, \quad (12.32)$$

где $\mathbf{kr} = (-k_0 \sin \varphi' + k_0 \cos \varphi')\mathbf{n}$, $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор световой волны в вакууме. Примем допущение, что показатель преломления в фотоупругой среде влияет только на фазу оптической волны, проходящей через акустический пучок. Тогда для поля, дифрагированного в среде на фазовой решетке под углом θ' , имеем

$$E(\theta) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l E \exp\{ik[x \sin \theta' + (l-z) \cos \theta']\} dx dz. \quad (12.33)$$

Это преобразование означает разложение с точностью до постоянной фазы возмущенной оптической волны в интеграл Фурье по плоским волнам, распространяющимся под углом θ' к оси z . После подстановки (12.31) в (12.32) с учетом $n \sin \theta' = \sin \theta$, $n \sin \varphi' = \sin \varphi$, $\cos \varphi' \cong \cos \varphi$, $\cos \theta' \cong \cos \theta$, $k = k_0 n$ получаем

$$E(\theta) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l \exp\{ik_0 x[(\sin \theta - \sin \varphi)]\} \times \\ \times \exp\{ikz(\cos \varphi - \cos \theta)\} \exp\{ikl \cos \theta\} dx dz.$$

Выполняя интегрирование по z , находим

$$E(\theta) = l \operatorname{sinc} \left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right] \times \\ \times \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left\{ i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta) \right\} \exp \{ ik_0 x (\sin \theta - \sin \varphi) \} dx. \quad (12.34)$$

Здесь учтено, что

$$\operatorname{sinc} \left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right] = \frac{\sin \left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right]}{\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta)}$$

— медленная функция x на интервале $(-b/2, b/2)$. Примем во внимание (12.31) и используем разложение в ряд:

$$\exp\{i\xi \cos(\Omega t - K_0 x)\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi) \exp\left\{iq\left(\Omega t - K_a x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \quad (12.35)$$

где $\xi \cong 1/2 k_0 \Delta n l (\cos \varphi + \cos \theta) \cong k_0 \Delta n l$, $J_q(\xi)$ — функция Бесселя. После подстановки (12.35) в (12.34) получаем

$$E(\theta) = l \exp\left\{i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta)\right\} \operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta)\right] \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi) \exp\left\{iq\left[\Omega t - K_a x - \frac{\pi}{2}\right]\right\} \exp\{ik_0 x (\sin \theta - \sin \varphi)\} dx$$

или

$$E(\theta) = l \exp\left\{i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta)\right\} \operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta)\right] \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi) \exp\left[iq\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \int_{-b/2}^{b/2} \exp\{ix[k_0 (\sin \theta - \sin \varphi) - qK_a]\} dx.$$

После интегрирования приходим к выражению, описывающему угловой спектр дифрагированного оптического поля:

$$E(\theta) = bl \exp\left\{i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta)\right\} \operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta)\right] \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^q e^{iq\Omega t} J_q(\xi) \operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2} [k_0 (\sin \theta - \sin \varphi) - qK_a]\right\}. \quad (12.36)$$

Амплитуда дифракционного максимума q -го порядка определяется перекрытием главных максимумов функции

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2} [k_0 (\cos \varphi - \cos \theta)]\right\},$$

учитывающей объемные эффекты, и функции

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2} [k_0 (\sin \theta - \sin \varphi) - qK_0]\right\},$$

определяющей селекцию углового спектра. Это перекрытие имеет место, если

$$\left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta_q) \right] < \pi;$$

$$\frac{b}{2} [k_0 (\sin \theta_q - \sin \varphi) - qK_a] < \pi.$$

Амплитуда дифрагированного поля максимальна, если

$$k_0 (\sin \theta_q - \sin \varphi) - qK_a = 0. \quad (12.37)$$

Отсюда, выбирая $q = -1$ и $\varphi = -\theta_{-1}$, получаем

$$\sin \theta_{-1} = -\frac{K_a}{2k_0} = -\frac{\lambda}{2\Lambda_a}. \quad (12.38)$$

Из (12.37) с учетом (12.38) находим угол дифракции, соответствующий дифракционному максимуму порядка q :

$$\sin \theta_q = q \frac{K_a}{k_0} - \sin \theta_{-1} = q \frac{K_a}{k_0} + \frac{K_a}{2k_0} = \left(q + \frac{1}{2} \right) \frac{K_a}{k_0}.$$

Запишем условия, при которых дифракционные максимумы порядка $q \geq 1$ оказываются пренебрежимо малыми:

$$\text{sinc} \left\{ \frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right\} \ll 1.$$

Подставляя сюда

$$\sin \varphi = \sin(-\theta_{-1}) = \frac{K_a}{2k_0}, \quad \sin \theta_1 = 3 \frac{K_a}{2k_0}$$

и учитывая, что $\lambda/\Lambda_a \ll 1$, получаем

$$\text{sinc} \left\{ \frac{kl}{2} \left[\left(1 - \frac{K_a^2}{2 \cdot 4k_0^2} \right) - \left(1 - \frac{9K_a^2}{2 \cdot 4k_0^2} \right) \right] \right\} = \text{sinc} \left\{ \frac{kl}{2} \cdot \frac{K_a^2}{k_0^2} \right\} \ll 1.$$

Это неравенство удовлетворяется, если

$$\frac{kl}{2} \cdot \frac{K_a^2}{k_0^2} \gg 1 \quad \text{или} \quad \pi \frac{n l \lambda}{\Lambda_a^2} \gg 1. \quad (12.39)$$

При выполнении условий (12.38) и (12.39) амплитуды всех дифракционных порядков, кроме минуса первого,

становятся пренебрежимо малы. Это так называемая *дифракция Брэгга*. Угол $\varphi_B = -\theta_1$ получил название *угла Брэгга*. Дифракция Брэгга имеет место в случае повышенных частот акустической волны и выполнения условия (12.39). При этом дифракционные эффекты высших порядков исчезают и преобладающую роль играют лишь оптические пучки нулевого и минус первого порядков. Физически брэгговская дифракция соответствует условию отражения падающей волны от волновых фронтов акустической волны, а угол Брэгга равен углу отражения (см. рис. 12.4). Выражение (12.36) для дифрагированного поля принимает вид

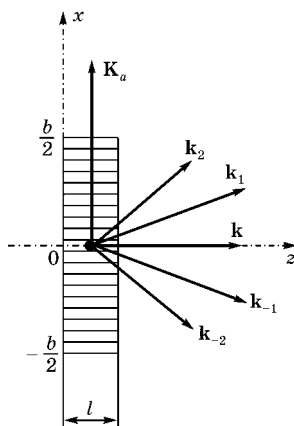


Рис. 12.5

$$E(\theta) \approx ibl \exp(ikl) \operatorname{sinc} \left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right] e^{-i\Omega t} J_{-1}(k_0 \Delta n l) \times \\ \times \operatorname{sinc} \left\{ \frac{b}{2} [k_0 (\sin \theta - \sin \varphi) + K_a] \right\}.$$

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 12.5, когда угол падения $\varphi = 0$. В этом случае для дифрагированного поля, согласно (12.36), имеем

$$E(\theta) = b \exp \left\{ ikl \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \operatorname{sinc} \left\{ kl \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{iq(\Omega t - \pi/2)} J_q(\xi) \operatorname{sinc} \left[\frac{b}{2} (k_0 \sin \theta - qK_a) \right]. \quad (12.40)$$

Из выражения (12.40) следует, что угловая структура дифрагированного поля пространственно неоднородна и содержит максимумы излучения. Они располагаются под углами, определяемыми из условий:

$$k_0 \sin \theta q - qK_a = 0.$$

Отсюда получаем значения углов, при которых наблюдаются максимумы дифракционной картины:

$$\sin \theta_q = \frac{qK_a}{k_0} = \frac{q\lambda}{\Lambda_a}. \quad (12.41)$$

Порядок дифракционного максимума соответствует индексу q . Множитель $\text{sinc}\{kl\sin^2(\theta/2)\}$, описывающий объемные эффекты, при малой длине взаимодействия излучения с акустическим пучком и при малых Ω стремится к единице. Описанный случай соответствует так называемой дифракции Рамана–Ната, когда распределение энергии излучения по дифракционным максимумам симметрично относительно пучка, дифрагированного в нулевой порядок. Критерием, определяющим особенности дифракции, служит величина

$$Q = 2\pi l \frac{\sin \phi_B}{\Lambda_a},$$

обратно пропорциональная дифракционной расходимости акустического пучка, равной Λ_a/l . Можно считать, что область дифракции Рамана–Ната определяется условием $Q \leq 0,3$, а области брэгговской дифракции соответствует $Q > 4\pi$. Значения $0,3 < Q < 4\pi$ относятся к переходной области дифракции.

Если на фазовую решетку падает не плоская оптическая волна, как было рассмотрено выше, а пучок, имеющий определенную угловую расходимость, описанная теория может быть применена и в этом случае. Дифрагированное поле можно представить в виде

$$E'(\theta, \varphi) = s(\varphi)E(\theta, \varphi),$$

где $s(\varphi)$ — угловой спектр входного поля. Амплитуда и фаза дифрагированного поля находятся обратным фурье-преобразованием.

Если входной пучок — гауссов:

$$E_{\text{вх}} = \exp\left\{-\frac{x^2}{w_0^2}\right\} \exp\{j\mathbf{K}\mathbf{r}\},$$

то структура дифрагированного оптического поля в случае бегущей ультразвуковой волны описывается по аналогии с (12.36) как

$$E(\theta) = \sqrt{\pi} w_0 l \exp \left\{ i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta) \right\} \operatorname{sinc} \left\{ \frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right\} \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i q \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right\} J_q(\xi) \exp \left\{ -\frac{w_0^2}{4} [k_0 (\sin \theta - \sin \varphi) - q K_a]^2 \right\}. \quad (12.42)$$

Методика анализа акустооптического взаимодействия для гауссова пучка аналогична ситуации, когда входной сигнал — плоская волна. Из (12.42) следуют условия брэгговской дифракции (12.38). Дифракции Рамана–Ната соответствует структура выходного сигнала

$$E(\theta) = \sqrt{\pi} w_0 l \exp \left\{ j k l \cos \frac{\theta}{2} \right\} \operatorname{sinc} \left\{ k l \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i q \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right\} J_q(\xi) \exp \left\{ -\frac{w_0^2}{4} [k_0 \sin \theta - q K_a]^2 \right\}.$$

Рассмотрим дифракцию светового поля на стоячей ультразвуковой волне, которую можно представить как сумму распространяющихся навстречу друг другу когерентных бегущих волн. Воспользовавшись (12.31), запишем выражение для распределения коэффициента преломления, индуцированного стоячей волной:

$$n = n_0 + 1/2 \Delta n [\cos(\Omega t - K_a x) + \cos(\Omega t + K_a x)] = \\ = n_0 + \Delta n \cos \Omega t \cos K_a x. \quad (12.43)$$

Для структуры поля, дифрагированного на стоячей решетке коэффициента преломления (12.43), по аналогии с (12.36), получаем

$$E(\theta) = b l \exp \left\{ i \frac{kl}{2} (\cos \varphi + \cos \theta) \right\} \operatorname{sinc} \left[\frac{kl}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) \right] \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^q I_q [\xi \cos(q \Omega t)] \operatorname{sinc} \left[\frac{b}{2} (k_0 \sin \theta - \sin \varphi) - q K_a \right]. \quad (12.44)$$

Из сравнения (12.36) и (12.44) видно, что поля, дифрагированные на стоячей и бегущей волнах, имеют сходную структуру и удовлетворяют одинаковым условиям селекции дифракционных максимумов в брэгговском

и рамана-натовском режимах. Отличие состоит в том, что при дифракции на стоячей волне поле, дифрагированное в q -й порядок, модулировано по амплитуде с частотой $q\Omega$, тогда как поле, дифрагированное на бегущей волне, модулировано по фазе и смещено по частоте.

Это смещение есть доплеровский сдвиг частоты, появляющийся при дифракции оптической волны на движущейся со скоростью v_a фазовой решетке:

$$\omega_D = (\mathbf{k}_q - \mathbf{k})\mathbf{v}_a,$$

где $\mathbf{k}_q$ — волновой вектор оптического пучка, дифрагированного в q -й порядок. Знак доплеровского сдвига зависит от взаимной ориентации вектора скорости фазовой решетки и разностного вектора $\mathbf{k}_q - \mathbf{k}$. Из геометрии оптических пучков (рис. 12.6), соответствующей уравнению (12.40), получаем

$$\omega_D = 2kv_a \sin(\theta_q/2) \cos(\theta_q/2) = k_0 v_a \sin \theta_q. \quad (12.45)$$

С другой стороны, направление q -го дифракционного максимума удовлетворяет условию (12.41). Подставляя (12.41) в (12.45), получаем

$$\omega_D = qv_a K_a = q\Omega.$$

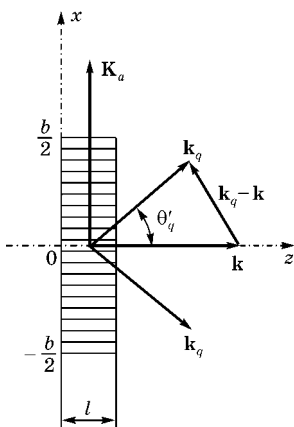


Рис. 12.6

В квантово-механической модели дифракция световых полей на акустических волнах рассматривается как рассеяние световых квантов с энергией $\hbar\omega$ на акустических фотонах, энергия которых $\hbar\Omega$. В рамках квантово-механической модели импульс светового кванта $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, импульс фонона $\mathbf{p}_a = \hbar\mathbf{K}_a$. Фотон-фононное взаимодействие должно удовлетворять законам сохранения энергии и импульса.

Учитывая огромную разность скоростей распространения световых и акустических полей,

упругую волну при фотон-фононном взаимодействии можно считать стационарной. Отсюда следует возможность применения оптических методов обработки информации, отображенной акустическим полем.

Рассмотрим процесс рассеяния фотона на фононе. В этом процессе участвуют три частицы: фотон падающего на фотон светового поля, фотон и фотон рассеянного светового поля. Диаграмма такого трехчастичного взаимодействия показана на рис. 12.7. На этом рисунке $\mathbf{K}_a$ — волновой вектор фона; $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор падающего фотона; $\mathbf{k}_s$ — волновой вектор фотона, рассеянного на фотоне; θ — угол падения фотона; θ' — угол, определяющий направление волнового вектора рассеянного фотона. Согласно закону сохранения энергии,

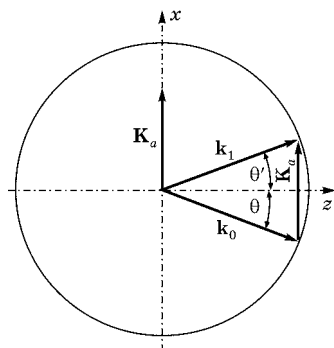


Рис. 12.7

$$\hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega_s$$

или

$$\omega + \Omega = \omega_s.$$

Запишем уравнения сохранения компонент импульса по осям x и y :

$$\begin{aligned} \hbar k_0 \cos \theta &= \hbar k_s \cos \theta'; \\ -\hbar k_0 \sin \theta + \hbar k_s \sin \theta' &= \hbar K_a. \end{aligned} \quad (12.46)$$

После сокращения на $\hbar$ получаем запись уравнений сохранения компонент импульса (12.46) в пространстве волновых векторов:

$$\begin{aligned} k_0 \cos \theta &= k_s \cos \theta'; \\ -k_0 \sin \theta + k_s \sin \theta' &= K_a. \end{aligned} \quad (12.47)$$

В случае изотропной среды $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_1| = k$ и из уравнений в (12.47) получаем $\theta = \theta'$ и

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{k_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda_a}.$$

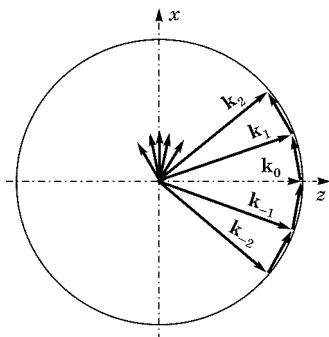


Рис. 12.8

Мы нашли условие дифракции Брэгга (12.38), которое в квантово-механической модели называется *уравнение Брэгга*. Идентичность условия брэгговской дифракции и уравнение Брэгга указывают на то, что постоянная фазовой решетки при дифракции равна длине волны акустического поля.

Если акустический пучок имеет достаточно большую расходимость, реализуются многократные процессы фотон-фононного взаимодействия. Этой ситуации соответствует диаграмма, показанная на рис. 12.8. Многократное рассеяние имеет место, если имеются два или более фононов, распространяющихся в разных, на определенных направлениях, удовлетворяющих условию дифракции Рамана–Ната (12.41). Здесь индекс q указывает на кратность рассеяния фотонов на фононах, в результате которого возникает соответствующий q -й дифракционный порядок рассеянного светового поля. Разумеется, при этом выполняются законы сохранения импульса и энергии. Многократное рассеяние реализуется, если угловая расходимость акустического поля велика в сравнении с углом Брэгга. Граница между двумя режимами определяется соответствующей величиной параметра Q . В области значений параметра Q , удовлетворяющей дифракции Рамана–Ната ($Q \leq 0,3$), наблюдаются эффекты многократного рассеяния.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 12

1. Какие компоненты смещения электрона в осцилляторной модели атома определяют дисперсионные и диссипативные свойства среды?
2. Почему в частотной полосе, соответствующей поглощению, имеет место аномальная дисперсия?
3. Приведите примеры рассеяния Рэля и рассеяния Томсона.
4. Как связаны дисперсионные свойства плазмы с концентрацией электронов?

5. Как влияют дисперсионные свойства плазмы на распространение в ней электромагнитного поля?
6. При включении магнитного поля энергия электрона изменяется. Однако сила Лоренца $F_m = e[\dot{r}, B]$ ортогональна к скорости электрона $\dot{r}$ и, следовательно, работы не совершает и кинетическую энергию электрона не изменяет. Объясните противоречие.
7. Объясните поляризации компонент излучения электрона при продольном и поперечном эффекте Зеемана.
8. Можно ли с помощью светового давления управлять кинетической энергией атома?
9. Объясните резонансный характер светового давления.
10. При каких условиях реализуется дифракция Брэгга?
11. Какова структура дифрагированного поля при дифракции Рамана–Ната?
12. Почему возникает сдвиг частоты в дифрагированных пучках при дифракции света на бегущей акустической волне?
13. Поясните квантово-механическую модель оптико-акустического взаимодействия.
14. Как связаны дифракция Брэгга и дифракция Рамана–Ната с расходимостью акустической волны?

ЗАДАЧИ

12.1. Атом можно рассматривать как гармонический осциллятор, энергия которого $E = \frac{1}{2} m_e \omega^2 x_0^2$. Мощность излучения P и энергия ΔE , теряемая за один период, связаны соотношением $P = -\frac{\omega}{2\pi} \Delta E$. Оценить добротность атома и длительность излучаемого импульса, исходя из следующих параметров: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m_e = 3 \cdot 10^{-31}$ кг; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 0,5$ мкм; x_0 — максимальная амплитуда колебаний.

12.2. Из рис. 12.1 видно, что показатель преломления в среде, моделируемой ансамблем атомных осцилляторов, меньше единицы, если частота светового поля превышает собственную частоту осциллятора. Значит ли это, что скорость распространения света в среде может быть больше, чем в вакууме? Нет ли здесь противоречия с теорией относительности?

12.3. В плазме находится осциллятор, колеблющийся с частотой ω . При какой концентрации N электронов

в плазме осциллятор перестает излучать электромагнитные волны?

12.4. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии $r = 0,06R$ от границы фотосферы приблизительно равна $N = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^3$. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если длина волны в вакууме равна: а) $\lambda = 1 \text{ м}$; б) $\lambda = 10 \text{ м}$; в) $\lambda = 50 \text{ м}$? ($R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$ — радиус Солнца, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.)

12.5. Свет, частота которого ω , рассеивается на затухающем гармоническом осцилляторе с собственной частотой ω_0 , отличной от ω . Каков будет спектральный состав рассеянного света? Какова будет частота рассеянного света после прекращения действия падающей волны?

12.6. Определить изменение кинетической энергии электрона в осцилляторной модели атома при включении магнитного поля M .

12.7. Определить структуру дифрагированного поля при акустооптическом взаимодействии, если акустическая волна синусоидально модулирована: а) по амплитуде; б) по частоте.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И СВЕТОВЫЕ ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

13.1. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И ЕЕ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Автоколебательные системы относятся к так называемым активным колебательным системам, в которых постоянно или в определенные интервалы времени происходит увеличение энергии колебаний за счет источника энергии, входящего в состав системы. Однако, в отличие от активных систем, которые могут быть линейными и неконсервативными, автоколебательные системы являются нелинейными и неконсервативными. Автоколебания возбуждаются в колебательной системе без воздействия на нее периодической внешней силы. Этим они отличаются от вынужденных колебаний. Характерными признаками автоколебательной системы являются ее нелинейность и наличие обратной связи. Для нелинейных систем неприменим принцип суперпозиции, и это усложняет их изучение. Поэтому при исследовании колебательных систем широко используются приближенные методы и анализ фазовых портретов.

Простейшая колебательная система схематически представлена на рис. 13.1.

Пусть в качестве накопительного элемента в системе используется диссипативная колебательная система. Обратимся в качестве примера к механической системе и запишем ее уравнение движения:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0.$$

Умножая это уравнение на $\dot{x}$, перепишем его в виде

$$m\dot{x}\ddot{x} + sx\dot{x} = -r\dot{x}^2$$



Рис. 13.1

или

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s \dot{x}^2 \right] = -r \dot{x}^2. \quad (13.1)$$

Уравнение (13.1) показывает, что изменение колебательной энергии E осциллятора равно мощности потерь P_r :

$$\frac{d}{dt} E = -P_r.$$

В консервативной колебательной системе $P_r > 0$. В случае автоколебательных систем при определенных амплитудах и скоростях возможны интервалы времени, в течение которых выполняется условие $P_r < 0$, присущее только активным системам. Отсюда следует, что стационарные колебания в автоколебательной системе могут существовать, если

$$\int_0^T P_r(t) dt = 0, \quad (13.2)$$

где T — период колебаний.

Уравнение (13.2) — основное уравнение энергетического баланса автоколебательной системы. Из (13.2) видно, что необходимым условием существования автоколебательного процесса является знакопеременность функции $P_r(t)$. В этом случае в течение одной части периода T происходит пополнение энергии колебаний, в течение другой его части — эквивалентное уменьшение энергии колебаний. Очевидно, что в линейной и нелинейной консервативных системах условие знакопеременности $P_r(t)$ не выполняется и автоколебательный режим невозможен. Все сказанное выше справедливо и для автоколебательных систем другой физической природы. В частности, для диссипативной системы с накопительной системой в виде электрического контура имеем

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2C} q^2 \right] = -R \dot{q}^2$$

и

$$P_r = R \dot{q}^2.$$

Форма автоколебаний зависит от добротности осцилляторного накопительного элемента. Если добротность механического осциллятора или электрического контура, используемых в качестве накопительного элемента, велика, автоколебательная система генерирует колебания, близкие к гармоническим. В этом случае обратная связь служит в основном для пополнения энергии колебаний в пределах каждого периода и слабо влияет на форму колебаний. Такие системы получили название *автоколебательных систем осцилляторного типа*. При разрывах цепи обратной связи в автоколебательной системе осцилляторного типа колебания в накопительном элементе становятся затухающими.

В случае когда в накопительных элементах могут происходить только аperiодические процессы, зависимость формы автоколебаний от свойств цепи обратной связи становится более сильной. При выполнении условия самовозбуждения в такой системе форма колебаний отличается от гармонической, а период колебаний определяется временем релаксации системы. Такие системы называются *релаксационными*. Они являются примером автоколебательных систем накопительного типа. В релаксационных системах после разрыва цепи обратной связи колебания в накопительном элементе затухают аperiодически независимо от формы колебаний, генерируемых до разрыва. Различие автоколебательных систем осцилляторного и накопительного типов не всегда однозначно. Это связано с тем, что любая автоколебательная система может быть представлена как структура из накопителей энергии, между которыми происходит динамический обмен энергией.

Фазовый портрет автоколебательной системы.

Рассмотрим энергетический баланс автоколебательной системы. В автоколебательной системе помимо потенциальной и кинетической энергий, определяющих возникновение собственных колебаний и потери энергии E_r на демпфирование, учитывается подводимая извне энергия E_w , обеспечивающая возможность генерирования незатухающих колебаний. В автоколебательном процессе общее

количество энергии, переходящей из одной формы в другую, зависит от E_r и E_w . Пусть ΔE_r — потеря энергии на демпфирование за один период колебаний, ΔE_w — подводимая извне энергия за тот же период. При $\Delta E_r - \Delta E_w > 0$ энергия у колебательной системы отбирается и имеет место режим затухающих колебаний. В случае $\Delta E_r - \Delta E_w < 0$ энергия накачивается в колебательную систему и колебания нарастают. Если в системе потери происходят из-за вязкого трения,

$$\begin{aligned}\Delta E_r &= r \int_0^T \dot{x} dx = r \int_0^T \dot{x}^2 dt = r A^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \\ &= r A^2 \omega^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi t d\varphi = \pi r A^2 \omega.\end{aligned}\quad (13.3)$$

Из (13.3) видно, что ΔE_r описывается параболической зависимостью от смещения, которая показана на рис. 13.2. Функциональная связь подводимой извне энергии ΔE_w и амплитуды смещения зависит от условий возбуждения колебаний. На рис. 13.2 представлена в качестве примера ситуация, когда ΔE_w не зависит от A . Точке пересечения кривых ΔE_r и ΔE_w соответствует амплитуда колебаний A_1 . Как видно из рисунка, в области $A < A_1$ энергии подводится больше, чем теряется, и амплитуда колебаний растет.

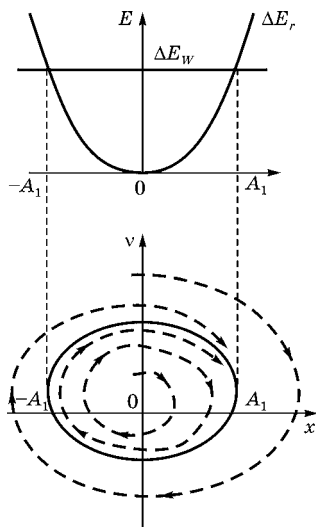


Рис. 13.2

При амплитудах $A > A_1$ потери превышают подводимую энергию и амплитуда уменьшается. В нижней части рис. 13.2 приведен фазовый портрет автоколебательной системы, который построен по методике, описанной в разд. 1.5. На фазовом портрете режим незатухающих периодических колебаний отображается замкнутой фазовой траекторией, пересекающей ось

x при значениях $x = A_1$. Замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям, получили название *предельных циклов*. Если соседние фазовые траектории с течением времени приближаются к предельному циклу, такой цикл называется *устойчивым*. Устойчивый предельный цикл соответствует устойчивому периодическому колебанию. На рис. 13.2 замкнутая фазовая траектория является устойчивым предельным циклом, к которому асимптотически приближаются соседние фазовые траектории как из области, ограниченной предельным циклом, так и находящиеся вне его.

Фазовые траектории внутри предельного цикла представляют собой раскручивающиеся спирали с особой точкой типа *неустойчивый фокус*. Они сходятся к устойчивому предельному циклу. Колебания с амплитудой, большей амплитуды устойчивого предельного цикла, являются *затухающими*. Соответствующие фазовые траектории сходятся к устойчивому предельному циклу. Внешние, по отношению к предельному циклу, фазовые траектории представляют собой скручивающиеся спирали. Области скручивающихся и раскручивающихся спиральных фазовых траекторий разграничиваются на фазовом портрете предельным устойчивым циклом.

На рис. 13.2 представлена простейшая ситуация, иллюстрирующая действие автоколебательной системы. В общем случае на энергетической диаграмме кривые ΔE_r и ΔE_w могут пересекаться многократно, как это показано на рис. 13.3. Кривая ΔE_w пересекается с кривой ΔE_r в двух точках, которым соответствуют амплитуды A_1 и A_2 . Каждой из этих амплитуд на фазовом портрете можно сопоставить свой предельный цикл. В области между двумя предельными циклами фазовые траектории представляют собой раскручивающиеся спирали, отображающие рост амплитуды колебаний при соотношении энергий $\Delta E_r - \Delta E_w < 0$. Вне наружного предельного цикла и в области, ограниченной внутренним предельным циклом, фазовые траектории имеют форму сходящейся спирали. Внутри малого предельного цикла фазовые траектории сходятся к особой точке типа *устойчивый фокус*. Внешние фазовые траектории

стягиваются к большому предельному циклу. Поскольку фазовые траектории, и внешние, и внутренние, стягиваются к предельному циклу, соответствующему амплитуде колебаний A_2 , этот предельный цикл является устойчивым. Предельный цикл, соответствующий амплитуде колебаний A_1 , является неустойчивым, поскольку все фазовые траектории покидают оконтуривающий его эллипс.

На рис. 13.3 особая точка в начале координат фазовой плоскости (*устойчивый фокус*) соответствует устойчивому положению равновесия. Поэтому автоколебательная система, фазовый портрет которой содержит такую особую точку, является *устойчивой в малом*. Фазовый портрет автоколебательной системы, показанной на рис. 13.2, в начале координат содержит особую точку типа *неустойчивый фокус*. Фазовые траектории вблизи этой точки соответствуют нарастающим колебаниям. Такая автоколебательная система является *неустойчивой в малом*.

Обе автоколебательные системы, энергетические диаграммы и фазовые портреты которых представлены на

рис. 13.2 и 13.3, являются *устойчивыми в большом*, поскольку вне устойчивого предельного цикла колебания уменьшаются. Если бы колебания вне большого предельного цикла нарастали, система называлась бы *неустойчивой в большом*.

Из фазового портрета на рис. 13.2 видно, что движение системы при сколь угодно малом возмущении с течением времени приближается к устойчивым колебаниям, соответствующим предельному циклу, что отражается в фазовых траекториях в виде раскручивающихся спиралей. Этот случай

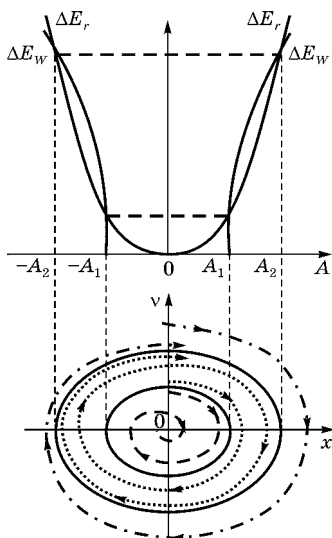


Рис. 13.3

возбуждения колебаний относится к *мягкому возбуждению*. Следовательно, генератор с фазовым портретом, изображенным на рис. 13.2, работает в мягком режиме возбуждения и обладает двумя стационарными состояниями: состоянием равновесия, соответствующим началу координат (точке 0), и стационарным состоянием, отображаемым устойчивым предельным циклом.

Рис. 13.3 иллюстрирует пример фазового портрета генератора, работающего в жестком режиме возбуждения. В этой системе для выхода в режим устойчивых колебаний, соответствующих внешнему устойчивому предельному циклу, начальное возмущение должно иметь амплитуду A_1 с выходом за пределы неустойчивого цикла на фазовую траекторию в кольцеобразной области нарастающих колебаний. При начальных возмущениях, меньших или равных A_1 , автоколебательная система вернется в начальное невозмущенное состояние, поскольку она устойчива в малом. Жесткий режим возбуждения характеризуется тремя состояниями:

- состояние равновесия, соответствующее началу координат;
- состояние неустойчивых колебаний с амплитудой A_1 , отображаемое внутренним предельным (неустойчивым) циклом;
- состояние устойчивых колебаний с амплитудой A_2 , отображаемое внешним устойчивым предельным циклом.

Фазовые траектории внутри неустойчивого предельного цикла соответствуют особой точке *устойчивый фокус*. Фазовые траектории вне неустойчивого предельного цикла сходятся к устойчивому предельному циклу. Фазовые траектории вне устойчивого предельного цикла с амплитудами $x > A_2$ сходятся к устойчивому предельному циклу. Предельные циклы на фазовой плоскости разделяют области с фазовыми траекториями, отображающими нарастающие и затухающие колебания. Структура фазового портрета генератора позволяет выявлять возможные состояния равновесия, предельные циклы и их устойчивость, а также переходные режимы. Кривые E_r и E_w могут пересекаться и в большем числе точек.

В этом случае каждая из точек означает возможное устойчивое или неустойчивое состояние системы.

Если бы система была линейна, то как диссипируемая, так и поступающая в систему энергия росли бы по одинаковым законам (мы это рассматривали ранее при обсуждении энергетических характеристик вынужденных колебаний). Графики E_r и E_w были бы представлены двумя параболлами, проходящими через начало координат, поскольку всякое отклонение от линейности проявляется в отклонении графика энергии от параболического закона. В этом случае графики E_r и E_w нигде, кроме начала координат, не пересекались бы. Это означает, что в линейной системе автоколебания не возбуждаются либо имеет место режим мягкого возбуждения при неограниченном росте амплитуды колебаний. Режим установившихся колебаний, отражением которого является предельный цикл на фазовой плоскости, возможен только в нелинейной системе. Следовательно, в структуре автоколебательной системы всегда должен иметься нелинейный элемент. Причем нелинейностью может обладать любое из звеньев, входящих в структуру автоколебательной системы.

Автоколебательные системы относятся к неконсервативным системам. В фазовых портретах консервативных колебательных систем могут встречаться замкнутые фазовые траектории, охватывающие особую точку и отображающие периодические колебания любой амплитуды. Примером может служить фазовый портрет гармонического осциллятора с особой точкой типа *центр*. При внешней схожести замкнутые фазовые траектории в фазовых портретах консервативных систем не являются предельными циклами, так как соседние фазовые траектории не сближаются с ними асимптотически и нет областей, отображающих нарастающие или убывающие колебания. Напротив, фазовые портреты автоколебательных систем, в силу их неконсервативности и нелинейности, содержат области нарастающих и убывающих колебаний, разграниченных предельными циклами.

13.2. ПРИМЕРЫ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Маятниковые часы.

Рассмотрим в качестве примера автоколебательной системы осцилляторного типа маятниковые часы. Маятник в таких часах выполняет роль осциллятора-накопителя. Принцип работы таких часов заключается в том, что когда маятник совершает колебания и проходит положение равновесия, ему через механизм, связанный с заведенной пружиной или под действием тяжести гири, сообщается толчок, который немного увеличивает скорость движения маятника. Если бы маятник совершал колебания без подталкивания, его уравнение движения имело бы вид, характерный для затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0, \quad (13.4)$$

а фазовый портрет представлял бы собой скручивающуюся спираль с особой точкой *фокус*.

Пусть ε — изменение скорости в момент прохождения маятником положения равновесия $x = 0$. Тогда разность скоростей непосредственно перед $v_+(t)$ и после $v_-(t)$ толчка

$$v_+(t) - v_-(t) = \varepsilon.$$

Соответствующая фазовая траектория маятника в стационарном режиме колебаний при двух подталкиваниях за период переходит в предельный цикл на фазовой плоскости, показанный на рис. 13.4. Определим амплитуду стационарных колебаний, соответствующих предельному циклу. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что уменьшение амплитуды скорости за половину периода в точности компенсируется увеличением скорости на ε в результате одного толчка. Из решения уравнения (13.4) для смещения $x = Ae^{-\gamma t} \sin \omega t$ имеем

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \sin \omega t + \omega Ae^{-\gamma t} \cos \omega t = \\ &= Ae^{-\gamma t} (-\gamma \sin \omega t + \omega \cos \omega t). \end{aligned} \quad (13.5)$$

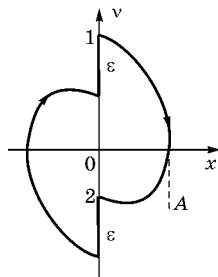


Рис. 13.4

Из (13.5) и рис. 13.4 следует, что точки 1 и 2 на фазовой траектории соответствуют значениям времени:

$$\tau_1 = -\frac{\pi}{2\omega}; \quad \tau_2 = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Подставляя τ_1 и τ_2 в (13.5), находим величины скоростей в точках 1 и 2:

$$v(\tau_1) = \gamma A e^{\gamma \frac{\pi}{2\omega}}; \quad v(\tau_2) = -\gamma A e^{-\gamma \frac{\pi}{2\omega}}. \quad (13.6)$$

Потеря кинетической энергии маятником за половину периода колебаний, согласно (13.6), составит

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\gamma^2 A^2 \left(e^{\gamma \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\gamma \frac{\pi}{\omega}} \right) = \gamma^2 A^2 sh\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Здесь ΔE_k — энергия, отнесенная к моменту инерции маятника. Потеря кинетической энергии ΔE_k должна быть равна энергии ΔE_w , полученной за счет толчка и отнесенной к моменту инерции маятника:

$$\gamma^2 A^2 sh\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right) = \Delta E_w.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta E_w}{sh\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right)}}$$

или, с учетом $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma \left(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$$A = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta E_w}{sh\left[\pi \left(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]}}.$$

В случае слабого демпфирования (высокая добротность колебательной системы, $Q \gg 1$) получаем при $\gamma \ll 1$

$$A = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta E_w}{sh\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right)}} \approx \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\omega_0}{\pi \gamma} \Delta E_w \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{2}{\pi} Q \Delta E_w \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13.7)$$

Амплитуда стационарных колебаний маятника в часах определяется добротностью Q и энергией ΔE_w .

Релаксационный генератор.

Одним из примеров автоколебательной системы накопительного типа является электрический релаксационный генератор, схема которого приведена на рис. 13.5. В этом генераторе конденсатор C заряжается от источника постоянного напряжения U через сопротивление R . Параллельно конденсатору C подключена газоразрядная лампа (тиратрон T) с напряжением зажигания U_0 . Когда напряжение на конденсаторе достигает величины напряжения зажигания U_0 , в тиратроне возникает газовый разряд, сопротивление тиратрона резко падает и конденсатор разряжается через тиратрон. Процесс разряда происходит до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не упадет до напряжения затухания, при котором сопротивление тиратрона резко возрастает и ток через него становится нулевым. Далее процесс начинается снова и повторяется периодически. Здесь ключевыми параметрами, влияющими на автоколебательный процесс, являются постоянная времени заряда конденсатора $\tau = RC$ и разность напряжений зажигания и затухания для тиратрона.

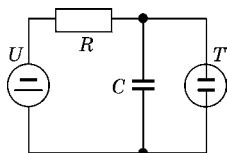


Рис. 13.5

RC-генератор.

Рассмотрим в качестве примера автоколебательной системы RC -генератор. Генератор этого типа позволяет воспроизводить любую форму колебаний от почти гармонических до релаксационных. Схема RC -генератора показана на рис. 13.6. Генератор содержит два RC -контура и усилитель, входным напряжением которого является U_i , а выходным — U_e . Усилитель воспроизводит заданную функциональную зависимость $U_e(U_i)$, связывающую выходное и входное напряжения.

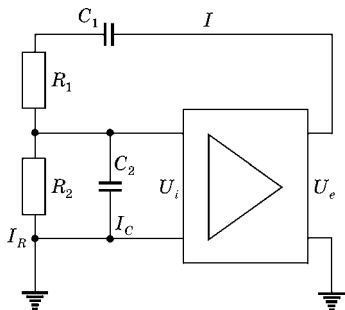


Рис. 13.6

Рассмотрим действие этой автоколебательной системы. Будем считать входное сопротивление усилителя высоким. Тогда ток I в цепи обратной связи ($R_1 C_1$) равен сумме токов через сопротивление R_2 , I_R , и конденсатор C_2 , I_C :

$$I = I_R + I_C.$$

Поскольку сопротивление R_2 и C_2 подключены параллельно входу усилителя, для входного напряжения усилителя имеем

$$U_i = \frac{1}{C_2} \int I dt = R_2 I_R.$$

Тогда выходное напряжение равно сумме падений напряжений на элементах C_1 , R_1 и R_2 :

$$U_e = \frac{1}{C_1} \int I dt + R_1 I + R_2 I_R. \quad (13.8)$$

Выберем в качестве обобщенной координаты, характеризующей состояние системы, входное напряжение $U_i = x$. Тогда

$$I_R = \frac{U_i}{R_2} = \frac{x}{R_2};$$

$$I_C = C_2 \frac{dU_i}{dt} = C_2 \dot{x};$$

$$I = I_R + I_C = \frac{x}{R_2} + C_2 \dot{x}.$$

Подставим полученные выражения для I_R , I_C и I как функции, зависящие от x , в (13.8):

$$U_e = \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{x}{R_2} + C_2 \dot{x} \right) dt + R_1 \left(\frac{x}{R_2} + C_2 \dot{x} \right) + x$$

или

$$U_e = \frac{1}{C_1 R_2} \int x dt + \frac{C_2}{C_1} x + \frac{R_1}{R_2} x + R_1 C_2 \dot{x} + x. \quad (13.9)$$

Выполняя элементарные алгебраические преобразования, приводим (13.9) к виду

$$R_2 C_1 U_e = R_1 R_2 C_1 C_2 \dot{x} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)x + \int x dt.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем

$$R_2 C_1 \frac{dU_e}{dt} = R_1 R_2 C_1 C_2 \ddot{x} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \dot{x} + x. \quad (13.10)$$

Поскольку

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{dU_e}{dx} \frac{dx}{dt} = \xi(x) \dot{x},$$

где $\xi(x) = \frac{dU_e}{dx}$ — крутизна характеристики усилителя, преобразуем уравнение (13.10) к следующей форме:

$$\ddot{x} + \Phi(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (13.11)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1 - R_2 C_1 \xi(x)}{R_1 R_2 C_1 C_2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}.$$

Уравнение (13.11) имеет вид дифференциального уравнения нелинейного осциллятора, где ω_0 — частота недемпфированных колебаний. Решения уравнения (13.11) при $F(x) < 0$ соответствуют нарастающим колебаниям. Отсюда следует условие возбуждения RC-генератора:

$$\xi(x) > \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1}{R_2 C_1}.$$

Автоколебания возбуждаются при выполнении этого условия для крутизны ξ в рабочей точке характеристики усилителя. Если параметры R_1 , R_2 , C_1 , C_2 и $\xi(x)$ подобраны таким образом, что $\Phi(x) \approx 0$, генерируются почти гармонические колебания. Меняя эти параметры, можно перестраивать генерируемые колебания от почти гармонических до релаксационных.

Лазер как автоколебательная система с распределенными параметрами.

Разновидностью автоколебательных систем являются генераторы с распределенными параметрами. В качестве примера рассмотрим лазер, моделируя его как

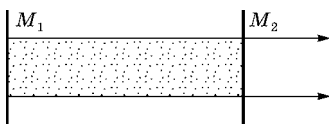


Рис. 13.7

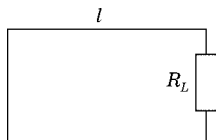


Рис. 13.8

автоколебательную систему с распределенными параметрами. Лазер представляет собой оптический резонатор, в котором пространство между зеркалами заполнено активной средой. Активная среда накачивается энергией от внешнего источника (рис. 13.7). Часть мощности светового поля, формируемого в резонаторе, отбирается через одно из зеркал, коэффициент пропускания которого отличен от нуля. На рис. 13.7 резонатор образован плоскими зеркалами M_1 и M_2 . Зеркало M_2 имеет коэффициент пропускания, не равный нулю. Зеркало M_2 — глухое.

Рассмотрим простейшую одномерную модель лазера, показанную на рис. 13.8.

Эта модель представляет собой короткозамкнутый с одного конца, соответствующего зеркалу M_1 , отрезок линии передач, нагруженный на резистор R_L , положение которого соответствует зеркалу M_2 . Распространение колебательного процесса в линии передачи, как показано в разд. 7.2, характеризуется *константой распространения*:

$$\gamma = \alpha + ik = [(R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)]^{\frac{1}{2}},$$

где R_0 , L_0 , G_0 и C_0 — погонные параметры линии (сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость). Воспользовавшись результатами, полученными в примере 7.4, получаем для константы распространения колебательного процесса линии передач с малыми потерями $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$, $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$:

$$\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0}\right)\sqrt{L_0 C_0}. \quad (13.12)$$

Эффект усиления колебательного процесса, распространяющегося в активной среде (эффект «накачки»), можно учесть, вводя в (13.12) отрицательную проводимость:

$$\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{L_0} - \frac{G_0}{C_0}\right)\sqrt{L_0 C_0}. \quad (13.13)$$

Положим для простоты $R_0 = 0$, что не снижает общности выводов, получаемых из анализа модели. Тогда (13.13) преобразуется к виду

$$\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} - \frac{1}{2}\frac{G_0}{C_0}\sqrt{L_0 C_0} = -\frac{1}{2}G_0 Z_W + i\omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (13.14)$$

Из (13.14) видно, что

$$\alpha = -1/2G_0 Z_W, \quad k = \omega\sqrt{L_0 C_0},$$

$Z_W = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ — волновое сопротивление линии. Согласно рис. 13.8, в рассматриваемой модели параллельно резистору нагрузки включен входной импеданс короткозамкнутой линии длиной l . С учетом (7.24)

$$\frac{1}{Z_i} = \frac{1}{Z_W} \operatorname{cthl}. \quad (13.15)$$

Подставим в (13.15) величину γ из (13.14) и, принимая во внимание $\alpha \ll k$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_i} &= \frac{1}{Z_W} \operatorname{cthl}[(\alpha + ik)l] = \frac{1}{Z_W} \left[\frac{th\alpha l - i \operatorname{ctg} kl}{1 - i th\alpha l \operatorname{ctg} kl} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{Z_W} \left[\frac{\alpha l - i \operatorname{ctg} kl}{1 - i \alpha l \operatorname{ctg} kl} \right] \approx \frac{1}{Z_W} \left[\frac{\alpha l}{\sin^2 kl} - i \operatorname{ctg} kl \right]. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Подставим в (13.16) α из (13.14):

$$\frac{1}{Z_i} = -\frac{G_0 l}{2 \sin^2 kl} - \frac{i \operatorname{ctg} kl}{Z_W}. \quad (13.17)$$

Условие самовозбуждения колебаний в системе является переход системы в неустойчивое состояние. Для этого необходимо, чтобы активная проводимость системы в эквивалентной цепи, показанной на рис. 13.9, стала отрицательной:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_i}\right) + \frac{1}{R_L} < 0. \quad (13.18)$$

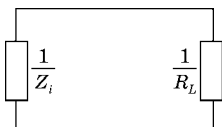


Рис. 13.9

Подставляя $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_i}\right)$ из (13.17) в (13.18), получаем

$$-\frac{G_0 l}{2 \sin^2 kl} + \frac{1}{R_L} < 0$$

или

$$\frac{G_0 l}{2 \sin^2 kl} > \frac{1}{R_L}. \quad (13.19)$$

Соотношение (13.19) является условием самовозбуждения рассматриваемой автоколебательной системы с распределенными параметрами.

Частота генерируемых колебаний определяется в условиях резонанса, согласно которому реактивная составляющая проводимости эквивалентной цепи (рис. 13.9) должна равняться нулю:

$$\operatorname{ctg} kl = 0,$$

или

$$kl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \quad (13.20)$$

Подставляя в (13.20) выражение для k из (13.14), получаем

$$l\omega\sqrt{L_0 C_0} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Откуда находим частоты генерации

$$\omega_n = \frac{\pi}{2l\sqrt{L_0 C_0}}(2n+1) = \frac{\pi v}{2l}(2n+1), \quad (13.21)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ — фазовая скорость распространения коле-

бания. Из (13.21) видно, что колебания генерируются на частотах ω_n , которые соответствуют *нормальным модам* оптического резонатора. Частотный интервал между соседними модами равен

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{v}{2l}$$

или

$$\Delta v = \frac{v}{2l}. \quad (13.22)$$

Межмодовый интервал (13.22) совпадает с дисперсионным интервалом оптического резонатора, для которого $v = c$. Таким образом, рассмотренная модель позволяет получить известный результат, согласно которому лазер излучает на частотах, соответствующих модам оптического резонатора.

Поскольку на частотах генерации

$$|\sin kl| = \left| \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] \right| = 1,$$

условие самовозбуждения (13.19) принимает вид

$$G_0 > \frac{2}{lR_L}.$$

Отсюда следует, что возбуждение такой автоколебательной системы облегчается с ростом сопротивления нагрузки и длины l . Применительно к лазеру это означает, что порог генерации тем ниже, чем выше коэффициент отражения зеркал и больше активная длина резонатора.

13.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ

В главе 12 мы рассматривали взаимодействие света со средой, модель которой представлялась совокупностью линейных осцилляторов. Нелинейные явления оказывают существенное влияние на распространение света и составляют физическую основу для важных практических приложений.

Обратимся к модели нелинейной среды как ансамблю ангармонических атомных осцилляторов, представляющих собой электрон, совершающий колебания относительно атомного ядра под действием светового поля. Уравнение движения такого осциллятора, совершающего вынужденные колебания, можно записать в виде

$$m_e \ddot{x} + r \dot{x} - f(x) = eE, \quad (13.23)$$

где m_e и e соответственно масса и заряд электрона, r — феноменологический коэффициент, определяющий силу

торможения $r\dot{x}$ электрона из-за потерь энергии на излучение и тепловое хаотическое движение, $E = E_0 \cos \omega t$ — напряженность электрического поля световой волны, $f(x)$ — возвращающая сила, связанная с потенциальной энергией осциллятора E_p известным соотношением

$$f(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}.$$

Сила $f(x)$ возникает из-за притяжения электрона к ядру и зависит от амплитуды колебаний.

Рассмотрим модель нелинейной среды с квадратичной нелинейностью. Такая среда состоит из нелинейных атомных осцилляторов, возвращающаяся сила в которых описывается рядом с точностью до квадратичного порядка малости по смещению:

$$f(x) = -s_1 x + s_2 x^2. \quad (13.24)$$

Подставляя (13.24) в уравнение движения осциллятора (13.23), получаем

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 = \frac{e}{m_e} E. \quad (13.25)$$

Здесь $\gamma = \frac{r}{2m_e}$, $\omega_0^2 = \frac{s_1}{m_e}$, $\beta = \frac{s_2}{m_e}$. Уравнение (13.25) отличается от уравнения линейного осциллятора появлением нелинейного члена βx^2 . Оно не имеет точного аналитического решения. Однако если считать нелинейный член в уравнении (13.25) достаточно малым, $|\beta_2 x^2| \ll |\omega_0^2 x|$ или $|\beta_2 x| \ll \omega_0^2$, можно получить приближенное решение *методом последовательных приближений*.

Представим решение уравнения (13.25) в виде суммы решения x_l линейного уравнения

$$\ddot{x}_l + 2\gamma\dot{x}_l + \omega_0^2 x_l = \frac{e}{m_e} E \quad (13.26)$$

и нелинейной поправки $\tilde{x}$, малой в сравнении с x_l ,

$$|\tilde{x}| \ll |x_l|,$$

т. е.

$$x = x_l + \tilde{x}. \quad (13.27)$$

Решение уравнения (13.26) получено и исследовано в разд. 2.1. и 12.1. Для линейной компоненты амплитуды смещения x_l имеем

$$\begin{aligned} x_l &= \operatorname{Re} \left[\frac{eE}{i\omega z_m} \right] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{eE}{m_e [\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma]} \right\} = \\ &= \operatorname{Re}[\alpha(\omega)E] = |\alpha(\omega)| E_0 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (13.28)$$

где z_m — импеданс линейного осциллятора, $\alpha(\omega)$ — линейная поляризуемость атома, связанная с линейной диэлектрической восприимчивостью среды χ соотношением

$$\chi = Ne\alpha(\omega).$$

Для нахождения нелинейной поправки $\tilde{x}$ подставим (13.27) в (13.25):

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_l + \tilde{x}) + 2\gamma \frac{d}{dt}(x_l + \tilde{x}) + \omega_0^2(x_l + \tilde{x}) - \beta(x_l + \tilde{x})^2 = \frac{e}{m_e} E.$$

Выполняя преобразования, получаем

$$\ddot{x}_l + 2\gamma\dot{x}_l + \omega_0^2 x_l - \beta x_l^2 + \ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} - \beta \tilde{x}^2 - 2\beta x_l \tilde{x} = \frac{e}{m_e} E.$$

С учетом (13.26) уравнение принимает вид

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} - \beta(x_l^2 + \tilde{x}^2 + 2x_l \tilde{x}) = 0$$

или

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{2\beta x_l}{\omega_0^2} \right) \tilde{x} - \beta x_l^2 \left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{x_l^2} \right) = 0.$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости,

$$\frac{2\beta x_l}{\omega_0^2} \ll 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{x_l^2} \ll 1,$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \beta x_l^2. \quad (13.29)$$

Это знакомое нам уравнение вынужденных колебаний линейного осциллятора, в котором вынуждающая сила описывается членом βx_l^2 , зависящим от квадрата величины смещения, полученного в линейном приближении (13.25).

Так как световое поле описывается гармонической функцией $E = E_0 \cos(\omega t)$, квадрат линейной компоненты смещения равен

$$\begin{aligned} x_l^2 &= |\alpha(\omega)|^2 E^2 = |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \{1 + \cos[2(\omega t - \varphi)]\}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{\operatorname{Re}[\alpha(\omega)]}.$$

Отсюда видно, что вынуждающая сила в линеаризованном уравнении (13.29) содержит постоянную составляющую и компоненту, изменяющуюся с удвоенной частотой:

$$\beta x_l^2 = \frac{\beta}{2} |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 + \frac{\beta}{2} |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \cos[2(\omega t - \varphi)].$$

Решение уравнения (13.29) должно иметь такую же структуру. Его легко найти через импеданс осциллятора. Для нелинейной компоненты смещения имеем

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} &\beta |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\omega z_m(\omega)} \right] + \\ &+ \frac{\beta |\alpha(\omega)|^2 E_0^2}{4i\omega z_m(2\omega)} \exp[i2(\omega t - \varphi)] \end{aligned} \right\} = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_2,$$

где $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2} \beta |\alpha(0)| |\alpha(\omega)|^2 E_0^2$ — постоянная составляющая нелинейной компоненты смещения,

$\tilde{x}_2 = \frac{1}{2} \beta |\alpha(2\omega)| |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \cos(2\omega t - \psi)$ — компонента нелинейного смещения, изменяющаяся с двойной частотой. Здесь

$$|\alpha(0)| = \frac{1}{\omega_0^2 m_e}, \quad |\alpha(2\omega)| = \left| \frac{1}{m_e [\omega_0^2 - 4\omega^2 + 4i\gamma\omega]} \right|, \quad \psi = \varphi + \tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\varphi}$ — фазовый сдвиг, вносимый в решение уравнения (13.29) при вынужденных колебаниях на частоте 2ω . Приближенное решение нелинейного уравнения (13.25) можно записать в виде

$$x = x_l + \tilde{x} = |\alpha(\omega)| E_0 \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} \beta |\alpha(0)| |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 + \\ + \frac{1}{2} \beta |\alpha(2\omega)| |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \cos(2\omega t - \psi). \quad (13.30)$$

Как видно из (13.30), амплитуда линейной компоненты смещения пропорциональна амплитуде падающей световой волны, а величина постоянной составляющей нелинейной компоненты смещения и амплитуды нелинейной компоненты, изменяющейся с удвоенной частотой, пропорциональны квадрату амплитуды падающей волны. С ростом интенсивности падающей световой волны амплитуда нелинейной компоненты смещения по отношению к линейной компоненте увеличивается.

Найдем поляризацию среды P , учитывая, что $P = Np = Nex$, где $p = ex$ — дипольный момент атомного осциллятора. Принимая во внимание (13.30), можно записать для комплексных амплитуд поляризации

$$P = P_l + P_{nl},$$

где P_l и P_{nl} — соответственно линейная и нелинейная компоненты поляризации, $P_l = Nex_l$, $P_{nl} = P_0 + P_2$, $P_0 = Ne\tilde{x}_0$, $P_2 = Ne\tilde{x}_2$,

$$P_l = Ne|\alpha(\omega)|E_0\cos(\omega t - \varphi),$$

$$P_0 = 1/2Ne|\alpha(0)||\alpha(\omega)|^2E_0^2,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}Ne|\alpha(2\omega)||\alpha(\omega)|^2E_0^2\cos(2\omega t - \psi). \quad (13.31)$$

Из выражения (13.31) следует, что поляризация нелинейной среды в поле гармонической световой волны частотой ω описывается суперпозицией трех спектральных компонент (рис. 13.10). Частота первой компоненты P_l , соответствующей линейной поляризации, равна частоте возбуждающей световой волны. Две другие компоненты P_0 и P_2 , частоты которых соответственно нулевая и 2ω , образуют нелинейную составляющую поляризации P_{nl} .

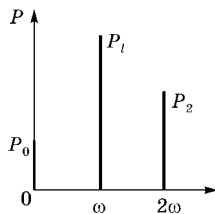


Рис. 13.10

Запишем уравнение (13.31) для компонент поляризации через оптическую восприимчивость среды:

$$\begin{aligned} P_l &= \chi E_0 \cos(\omega t - \varphi); \\ P_0 &= \chi_0 E_0^2; \\ P_2 &= \chi_2 E_0^2 \cos(2\omega t - \psi), \end{aligned} \quad (13.32)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= Ne\alpha(\omega); \\ \chi_0 &= 1/2Ne\beta|\alpha(0)||\alpha(\omega)|^2; \\ \chi_2 &= 1/2Ne\beta|\alpha(2\omega)||\alpha(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (13.33)$$

В формулах (13.32), (13.33) χ — линейная оптическая восприимчивость, χ_0 и χ_2 — квадратичные нелинейные восприимчивости соответственно на нулевой и удвоенной частотах. Квадратичная нелинейная восприимчивость определяется как коэффициент пропорциональности, связывающий адекватную составляющую поляризации среды с квадратом амплитуды возбуждающего светового поля. Нелинейная восприимчивость среды определяется коэффициентом ангармоничности среды β и линейной поляризуемостью атома. Нелинейная восприимчивость увеличивается в резонансной области, когда частота светового поля ω или частота второй гармоники 2ω приближается к собственной частоте колебаний атомного осциллятора. Квадратичная нелинейность проявляется в таких средах, как, например, анизотропные кристаллы.

Возникновение в нелинейной среде постоянной составляющей поляризации приводит к появлению в среде постоянного электрического поля, пропорционального интенсивности возбуждающей световой волны, что проявляется как *эффект оптического детектирования*. Измеряя амплитуду этого поля и интенсивность световой волны, экспериментально определяют квадратичную нелинейную восприимчивость различных сред.

Другой эффект, проявляющийся в средах с квадратичной нелинейностью, — *генерация второй оптической гармоники*. Такая возможность следует из уравнения линейного осциллятора (13.26) и из полученного выше выражения

для нелинейной компоненты P_2 поляризации среды (13.32). Под действием мощного поля лазерного излучения с частотой ω в нелинейной квадратичной среде возникают колебания на удвоенной частоте, что, в свою очередь, вызывает появление нелинейной составляющей поляризации P_2 , изменяющейся с двойной частотой и является источником излучения второй оптической гармоники.

В линейной оптике частота вынужденных колебаний электрона в атомном осцилляторе равна частоте падающей волны. Поэтому падающая волна и волны, генерируемые вынужденными колебаниями линейных атомных осцилляторов, имеют одинаковые скорости распространения в среде. В нелинейной среде показатель преломления зависит от частоты. Поэтому и падающая световая волна, и вторая гармоника, возникающая при нелинейном взаимодействии светового поля с атомными осцилляторами, из-за индуцированной дисперсии распространяются с разными скоростями. Наибольшая интенсивность световых волн, генерируемых атомными осцилляторами в результате вынужденных линейных и ангармонических колебаний на частотах ω и 2ω , достигается, если выполняются условия фазового (волнового) синхронизма, когда коэффициенты преломления для первой и второй гармоник оказываются одинаковыми. В этом случае генерация второй гармоники происходит с наилучшим КПД.

13.4. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПОККЕЛЬСА

Рассмотрим осцилляторную модель взаимодействия электрона с постоянным электрическим полем. Можно показать, что влияние постоянного электрического поля на гармонический осциллятор сводится лишь к смещению положения равновесия и не изменяет частоту колебания.

Предположим, что амплитуда колебаний электрона достаточно велика и потому его движение в постоянном электрическом поле описывается моделью ангармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 = \frac{e}{m_e} E. \quad (13.34)$$

Здесь βx^2 — добавочный к квазиупругой силе член, пропорциональный квадрату смещения частицы от положения равновесия. Положение равновесия x_0 ангармонического осциллятора в постоянном электрическом поле не равно нулю и определяется уравнением

$$\omega_0^2 x_0 - \beta_2 x_0^2 = \frac{e}{m_e} E. \quad (13.35)$$

Это уравнение следует из (13.34), поскольку $x_0 = \text{const}$ и $\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0$. Учитывая малость β , выберем в качестве решения уравнения (13.35) $x_0 = \frac{eE}{m_e \omega_0^2}$, что совпадает с положением равновесия в приближении линейного осциллятора. Тогда смещение электрона x можно определить через отклонение $\tilde{x}$ от положения равновесия x_0 : $x = x_0 + \tilde{x}$. Подстановка в (13.24) дает

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma \dot{\tilde{x}} - (\omega_0^2 + 2\beta x_0) \tilde{x} = 0. \quad (13.36)$$

Из (13.36) видно, что движение электрона под действием постоянного электрического поля в рассматриваемом приближении представляет собой колебания относительно центра равновесия x_0 . В отличие от гармонического осциллятора постоянное электрическое поле в ангармоническом осцилляторе не только смещает положение равновесия, но и изменяет собственную частоту колебаний, квадрат которой, согласно (13.36), определяется формулой

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega_0^2,$$

где $\Delta\omega_0^2 = -2\beta x_0$ — изменение квадрата собственной частоты из-за наличия ангармоничности. Подставляя x_0 , получаем

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m_e \omega_0^2} E.$$

Изменение собственной частоты ведет к изменению дисперсионной кривой, т. е. зависимости показателя преломления от частоты. Вдали от линии поглощения, как это видно из (12.2), показатель преломления зависит только от разности квадратов частот, $\omega_0^2 - \omega^2$. Поэтому изменение Δn можно представить в дифференциальной форме:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \Delta \omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \frac{2e\beta}{m_e \omega_0^2} E.$$

Учитывая, что $\frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} = -\frac{\partial n}{\partial \omega^2}$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{\partial n}{\partial \omega^2} \frac{2e\beta}{m_e \omega_0^2} E = \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \omega^2} \frac{2e\beta}{m_e \omega_0^2} E = \\ &= \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial \sqrt{\omega^2}}{\partial \omega^2} \frac{2e\beta}{m_e \omega_0^2} E = \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{e\beta}{m_e \omega \omega_0^2} E. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что изменение коэффициента преломления является линейной функцией внешнего электрического поля. Если направление внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ фиксировано, дисперсионные свойства среды приобретают анизотропный характер, т. е. возникает зависимость Δn от направления распространения света, что проявляется как индуцированное электрическим полем двойное преломление среды и составляет сущность так называемого электрооптического эффекта Поккельса. Электрооптическое поле создает в нелинейной среде анизотропию, порождающую двойное лучепреломление. Оно изменяет поляризацию проходящей через среду световой волны. Этот эффект широко используют для модуляции света.

13.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН

В разд. 12.1 рассматривалась колебательная модель взаимодействия электрона со световой волной через поляризацию среды, линейно зависящую от электрического поля. При большой интенсивности световых волн в определенных ситуациях необходимо учитывать нелинейный характер связи с полем накачки. Введем эту нелинейность в упрощенном виде, достаточном для качественного рассмотрения оптических явлений:

$$\mathbf{P} = \alpha_1 \mathbf{E} + \alpha_2 E \mathbf{E} + \alpha_3 E^2 \mathbf{E} + \dots$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ — скалярные поляризуемости. В случае анизотропных сред поляризуемость приобретает тензорные свойства.

Представим поляризацию $\mathbf{P}$ как сумму линейной ($\mathbf{P}_l$) и нелинейной ($\mathbf{P}_{nl}$) компонент:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{nl},$$

где $\mathbf{P}_l = \alpha \mathbf{E}$; $\mathbf{P}_{nl} = \alpha_2 \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots$. Пусть в среду с квадратичной нелинейностью направляется мощная волна накачки $\mathbf{E}_p = \mathbf{A}_p \cos(\omega_p t - \mathbf{k}_p \mathbf{r})$ и две слабые волны, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})$, частоты которых связаны соотношением

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2. \quad (13.37)$$

Примем для простоты, что амплитуды всех волн одинаково направлены. Это позволяет перейти к скалярной форме записи. Тогда квадратичная нелинейная компонента поляризации может быть представлена в виде

$$P_{nl} = \alpha_2 (E_p + E_1 + E_2)^2. \quad (13.38)$$

Учитывая, что $\frac{A_1}{A_p} \ll 1$, $\frac{A_2}{A_p} \ll 1$, выделим в (13.38) нелинейные члены $2\alpha_2 E_p E_1$ и $2\alpha_2 E_p E_2$:

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 E_p E_1 &= 2\alpha_2 A_p A_1 \cos(\omega_p t - \mathbf{k}_p \mathbf{r}) \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) = \\ &= \alpha_2 A_p A_1 \{ \cos[(\omega_p - \omega_1)t - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}] + \\ &\quad + \cos[(\omega_p + \omega_1)t - (\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_1)\mathbf{r}] \}; \\ 2\alpha_2 E_p E_2 &= \alpha_2 A_p A_2 \{ \cos[(\omega_p - \omega_2)t - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] + \\ &\quad + \cos[(\omega_p + \omega_2)t - (\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] \}. \end{aligned}$$

Выпишем слагаемые с разностной частотой:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 A_p A_1 \cos[\omega_2 t - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}]; \\ &\alpha_2 A_p A_2 \cos[\omega_1 t - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Здесь учтено, что $\omega_p - \omega_1 = \omega_2$; $\omega_p - \omega_2 = \omega_1$. Из (13.39) видно, что из-за квадратичного нелинейного взаимодействия в среде возникают компоненты световых колебаний на частоте слабых волн с амплитудами, пропорциональными амплитуде накачки. Следовательно, можно усиливать колебания на частотах слабых волн за счет энергии накачки. Физически такое усиление происходит из-за

модуляции полем накачки поляризации и, соответственно, коэффициента преломления, являющегося параметром среды. Отсюда название этого явления — *параметрическое усиление света*. Оно было открыто советскими физиками С. А. Ахмановым и Р. В. Хохловым.

Из (13.39) видно, что параметрическое усиление становится особенно сильным, если фазы усиленных колебаний синхронизируются с фазами соответствующих слабых волн

$$\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2,$$

т. е. соблюдается *условие фазовой синхронизации*:

$$\mathbf{k}_1(\omega_1) + \mathbf{k}_2(\omega_2) = \mathbf{k}_p(\omega_p). \quad (13.40)$$

В изотропных средах в области нормальной дисперсии (которая соответствует окнам прозрачности) параметрическое усиление невозможно, поскольку нельзя одновременно удовлетворить условиям (13.37) и (13.40). Действительно, пусть все три волны с частотами ω_1 , ω_2 и ω_p распространяются в одном направлении. Тогда, согласно (13.40),

$$\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 = \omega_p n_p,$$

где n_1 , n_2 и n_p — показатели преломления среды для соответствующих частот. Отсюда, с учетом (3.37),

$$(n_p - n_1)\omega_1 + (n_p - n_2)\omega_2 = 0.$$

Но это невозможно, поскольку при нормальной дисперсии $n_p - n_1 > 0$ и $n_p - n_2 > 0$. Учитывая, что

$$\omega_1 n_1 = c \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} n_1 \right) = c |\mathbf{k}_1|,$$

$$\omega_2 n_2 = c \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} n_2 \right) = c |\mathbf{k}_2|, \quad \omega_p n_p = c \left(\frac{2\pi}{\lambda_p} n_p \right) = c |\mathbf{k}_p|,$$

c — скорость света в среде, получаем, что в изотропной среде условие синхронизации не удовлетворяется при любом направлении волновых векторов.

Условие фазового синхронизма может удовлетворяться в анизотропных средах с двулучепреломлением. В оптических анизотропных средах скорость световой волны зависит от направления распространения. При определенных

условиях это приводит к расщеплению световой волны на две ортогонально поляризованные, распространяющиеся в различных направлениях. В зависимости от свойств конкретного двулучепреломляющего кристалла реализуются следующие варианты условия фазового синхронизма:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p^e &= \mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2^e; & \mathbf{k}_p^e &= \mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2^0; \\ \mathbf{k}_p^0 &= \mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2^e; & \mathbf{k}_p^0 &= \mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_2^e, \end{aligned}$$

где индексы 0 и e относятся к обыкновенной и необыкновенной волнам соответственно.



Рис. 13.11

На практике параметрический генератор световых колебаний состоит из кристалла, помещенного в оптический резонатор между зеркалами

(рис. 13.11). Оба зеркала имеют высокий коэффициент отражения на частотах ω_1 и ω_2 . Одно из зеркал, через которое вводится волна накачки, должно иметь достаточную прозрачность для этой волны. Оптический резонатор необходим для эффективного усиления, которое достигается при многократном прохождении волны накачки между зеркалами через кристалл.

Специально направлять в резонатор слабые волны с частотами ω_1 и ω_2 нет необходимости. Они всегда присутствуют в среде из-за шумов и тепловых флуктуаций. Тепловое излучение атомов или молекул кристалла имеет широкий спектр частот при произвольном направлении распространения поляризации и начальной фазы. Поэтому при достаточной мощности накачки происходит самовозбуждение параметрического генератора световых компонент на частотах ω_1 и ω_2 . Для перестройки частоты можно поворачивать кристалл, менять температуру или накладывать постоянное электрическое поле. При этом меняются условия фазового синхронизма, в соответствии с которым меняется соотношение для частот ω_1 и ω_2 при сохранении их суммы, равной частоте волны накачки. Параметрические генераторы света могут обеспечивать плавную перестройку когерентного светового излучения в широком спектральном диапазоне — от инфракрасного до ультрафиолетового.

13.6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С КУБИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ

В колебательных системах с центром симметрии потенциальная энергия является четной функцией смещения

$$E_p(x) = \frac{1}{2}s_1x^2 + \frac{1}{4}s_3x^4 + \dots$$

Запишем выражение для возвращающей силы в виде

$$f(x) = -s_1x + s_3x^3.$$

Подстановка в (13.23) приводит к следующему уравнению движения осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x - \beta_3x^3 = \frac{e}{m_e}E. \quad (13.41)$$

Особенностью этого уравнения является появление члена с кубической зависимостью от смещения β_3x^3 . Коэффициент β_3 , как и β в (13.25), получил название *параметра нелинейности*. Решение уравнения (13.41) будем искать методом последовательных приближений. Линейная компонента смещения является решением уравнения (13.26):

$$\ddot{x}_l + 2\gamma\dot{x}_l + \omega_0^2x_l = \frac{e}{m_e}E.$$

Отсюда, согласно (13.28),

$$x_l = \text{Re}[\alpha(\omega)]E = E_0\cos(\omega t - \varphi).$$

Соответствующая линейная поляризация среды, по аналогии с (13.32) и (13.33), имеет вид

$$\text{Re} = \chi E_0\cos(\omega t - \varphi),$$

где $\chi = Ne|\alpha(\omega)|$. Подставим (13.27) в (13.41):

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_l + \tilde{x}) + 2\gamma\frac{d}{dt}(x_l + \tilde{x}) + \omega_0^2(x_l + \tilde{x}) - \beta_3(x_l + \tilde{x})^3 = \frac{e}{m_e}E.$$

Выполняя в этом уравнении преобразования, получаем

$$\ddot{\tilde{x}}_l + \dot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}}_l + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2x_l + \omega_0^2\tilde{x} - \beta_3x_l^3\left(1 + \frac{\tilde{x}}{x_l}\right)^3 = \frac{e}{m_e}E. \quad (13.42)$$

С учетом (13.26), уравнение (13.42) преобразуется к виду

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} - \beta_3 x_l^3 \left(1 + \frac{\tilde{x}}{x_l}\right)^3 = 0$$

или, принимая во внимание $\frac{\tilde{x}}{x_l} \ll 1$,

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} - \beta_3 x_l^3 \left(1 + 3\frac{\tilde{x}}{x_l}\right)^3 = 0. \quad (13.43)$$

Выполним в (13.43) простые преобразования:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\beta_3 x_l^2}{\omega_0^2}\right) \tilde{x} = \beta_3 x_l^3. \quad (13.44)$$

Опуская в (13.44) $\frac{3\beta_3 x_l^2}{\omega_0^2} \ll 1$, получаем

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\gamma\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = \beta_3 x_l^3. \quad (13.45)$$

Уравнение для нелинейной компоненты смещения (13.45) описывает вынужденные колебания под действием вынуждающей силы, пропорциональной кубу линейного смещения:

$$\begin{aligned} \beta x_l^3 &= \beta_3 E_0^3 \cos^3(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{4} \beta_3 E_0^3 [3 \cos(\omega t - \varphi) + \cos 3(\omega t - \varphi)]. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Как видно из (13.46), вынуждающая сила содержит сумму смещенных по фазе первой и третьей гармоник падающего светового поля, амплитуды которых соответственно $\frac{3}{4}\beta_3 E_0^3$ и $\frac{1}{4}\beta_3 E_0^3$. Отсюда следует, что в кубически нелинейной среде индуцируется нелинейная компонента поляризации среды на частоте 3ω . Эта компонента, наряду с поляризацией на частоте ω , распространяется в среде.

Запишем выражение для результирующей поляризации кубически нелинейной среды

$$P = P_e + P_{nl}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_l &= \chi E_0 \cos(\omega t - \varphi); \\
 P_{nl} &= \chi_1 E_0^3 \cos(\omega t - \varphi_1) + \chi_3 E_0^3 \cos(\omega t - \varphi_3); \\
 \chi &= Ne|\alpha(\omega)|; \quad \chi_1 = \frac{3}{4}\beta_3 Ne|\alpha(\omega)|^2; \\
 \chi_3 &= \frac{1}{4}\beta_3 Ne|\alpha(3\omega)||\alpha(\omega)|.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $\chi_1 \ll \chi$, для кубически нелинейной среды получаем

$$P = \chi E_0 \cos(\omega t - \varphi) + \chi_3 E_0^3 \cos(3\omega t - \varphi_3), \quad (13.47)$$

где φ_3 — фазовый сдвиг, вносимый импедансами линейного и индуцированного за счет нелинейности осцилляторов. Из (13.47) следует, что в кубически нелинейной среде под воздействием световой волны генерируется третья гармоника этой волны. На практике этот эффект широко используется для преобразования частоты лазерного излучения.

13.7. СВЕТОВОЕ ЭХО

Явление светового эха наблюдается в кубически нелинейной среде, представляющей собой ансамбль неоднородных осцилляторов, имеющих различные собственные частоты колебаний. Оно состоит в генерации нелинейной средой светового импульса с некоторым запаздыванием после воздействия на эту среду последовательно двумя короткими лазерными импульсами.

Рассмотрим воздействие на кубически нелинейный осциллятор пары коротких импульсов лазерного излучения:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t + \tau),$$

где τ — запаздывание второго импульса относительно первого. Линейная реакция осциллятора на воздействие этих импульсов состоит в возникновении суперпозиции колебаний с частотой, равной собственной частоте ω_0 . Разность фаз этих колебаний пропорциональна τ и равна $\omega_0\tau$:

$$x_l(t) = A_1 \cos[\omega_0 t - \varphi] + A_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi].$$

Вследствие кубической нелинейности осциллятора в нем индуцируются также вынужденные колебания с нелинейной компонентой смещения. Вынуждающая сила для этих колебаний, как показано в предыдущем разделе, пропорциональна кубу линейной компоненты смещения. Нелинейная компонента смещения будет изменяться с различными комбинациями частоты вынуждающей силы:

$$\tilde{x} \sim x_l^3(t) = \{A_1 \cos[\omega_0 t - \varphi] + A_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi]\}^3. \quad (13.48)$$

Выделим в (13.48) слагаемые на частоте ω_0 , опуская компоненты с частотой $3\omega_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} = & B_1 \cos(\omega_0 t - \varphi) + B_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi] + \\ & + B_3 \cos[\omega_0(t - 2\tau) - \varphi] + B_4 \cos[\omega_0(t + \tau) - \varphi], \end{aligned} \quad (13.49)$$

где

$$B_1 = \frac{3}{4}(A_1^3 + 2A_1 A_2^2); \quad B_2 = \frac{3}{4}(A_2^3 + 2A_1^2 A_2);$$

$$B_3 = \frac{3}{4} A_1 A_2^2; \quad B_4 = \frac{3}{4} A_1^2 A_2.$$

Рассмотрим фазы компонент, входящих в (13.49). В момент времени $t = 0$, соответствующий воздействию первого импульса, фаза первой компоненты, $B_1 \cos(\omega t - \varphi)$, не зависит от частоты ω_0 . В момент времени $t = \tau$, соответствующий воздействию второго импульса, фаза второй компоненты, $B_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi]$, не зависит от ω_0 . В момент времени $t = 2\tau$ фаза третьей компоненты, $B_2 \cos[\omega_0(t - 2\tau) - \varphi]$, также не зависит от ω_0 . Это означает, что в неоднородном ансамбле кубически нелинейных осцилляторов в моменты воздействия коротких импульсов, разнесенных на интервал τ , происходит синхронизация нелинейных составляющих колебаний $\tilde{x}$ для всего ансамбля, независимо от собственных частот. Результатом такой фазировки является формирование импульсов поляризации среды, вызывающих излучение средой световых импульсов. Эти импульсы испускаются в моменты времени $t = 0$, $t = \tau$ и $t = 2\tau$. Первые два световых импульса синхронизированы с короткими лазерными импульсами, воздействующими на

среду, а третий импульс, появляющийся в момент $t = 2\tau$, является световым эхом. На рис. 13.12 показана последовательность этих трех световых импульсов, последний из которых получил название *первичного светового эха*.

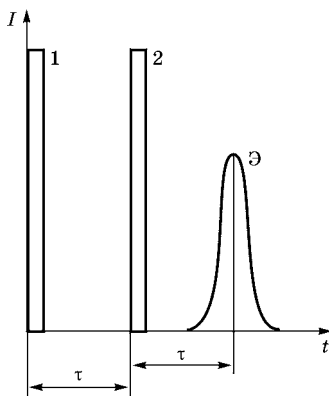


Рис. 13.12

Если возбуждать кубически нелинейную среду, состоящую из ансамбля неоднородных осцилляторов, последовательностью трех коротких импульсов, которые воздействуют в моменты времени $t = 0$, $t = \tau$ и $t = \tau + T$, средой генерируется световой импульс в момент $t = \tau + T + \tau$. Этот импульс называется *стимулированным световым эхом*. Возможность формирования стимулированного эха показывается по аналогии с обоснованием существования первичного эха. Нелинейная компонента смещения в этом случае пропорциональна кубу от суммы линейных смещений как реакции на последовательное воздействие трех коротких лазерных импульсов:

$$\tilde{x}(t) \sim x_l^3(t) = \{A_1 \cos[\omega_0 t - \varphi] + A_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi] + A_2 \cos[\omega_0(t - \tau - T) - \varphi]\}^3.$$

Тогда для колебательных компонент нелинейного смещения $\tilde{x}$ с частотами ω_0 имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) \sim & B_1 \cos(\omega_0 t - \varphi) + B_2 \cos[\omega_0(t - \tau) - \varphi] + \\ & + B_3 \cos[\omega_0(t - 2\tau) - \varphi] + B_4 \cos[\omega_0(t - \tau - T) - \varphi] + \\ & + B_5 \cos[\omega_0(t - T - 2\tau) - \varphi] + \dots \end{aligned} \quad (13.50)$$

Из (13.50) следует независимая от частоты фазировка нелинейной компоненты колебаний осцилляторов в моменты времени $t = 0$, $t = \tau$ и $t = 2\tau$, $t = \tau + T$, $t = T + 2\tau$, что доказывает возможность существования стимулированного светового эха, как это показано на рис. 13.13 (первичное

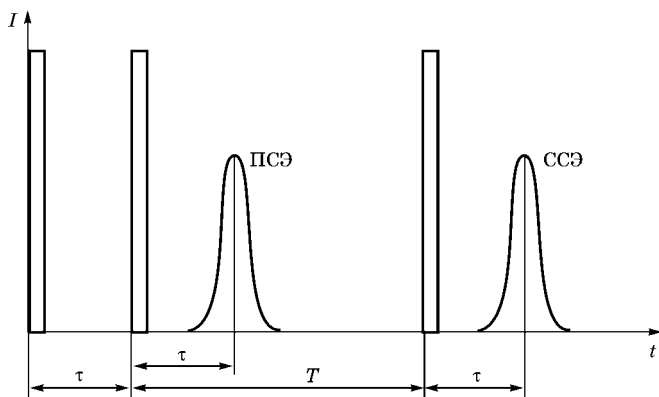


Рис. 13.13

световое эхо обозначено как ПСЭ, стимулированное световое эхо — ССЭ).

Эффект стимулированного светового эха может быть использован для оптической записи информации. В этом случае первые два коротких лазерных импульса могут быть использованы для записи информации, а третий импульс — для ее считывания.

13.8. ЯВЛЕНИЯ САМОМОДУЛЯЦИИ И САМОФОКУСИРОВКИ

Исследуем собственные колебания осциллятора с кубической нелинейностью. Пренебрегая затуханием колебаний ($\gamma = 0$), запишем уравнение (13.41) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta_3 x^3 = \frac{e}{m_e} E.$$

Отсюда для уравнения собственных колебаний имеем

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta_3 x^3 = 0. \quad (13.51)$$

Подставляя в (13.51) $x = x_l + \tilde{x}$ и имея в виду, что линейная компонента смещения описывается гармонической функцией $x_l = A_0 \cos(\omega t - \phi)$, получаем

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_l + \ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} - \beta_3 x_l^3 \left(1 + \frac{\tilde{x}}{x_l}\right)^3 = 0.$$

С учетом условия $\frac{|\tilde{x}|}{|x_l|} \ll 1$ это уравнение приводится к линеаризованной форме

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = (\omega^2 - \omega_0^2)x_l + \beta_3 x_l^3. \quad (13.52)$$

Подстановка x_l^3 из (13.46) в (13.52) дает

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta_3 E_0^2 \right) x_l + \frac{1}{4}\beta_3 E_0^2 \cos 3(\omega_0 t - \varphi). \quad (13.53)$$

Если выполняется условие

$$\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta_3 E_0^2 = 0, \quad (13.54)$$

то (13.53) трансформируется в уравнение для нелинейной компоненты смещения в режиме вынужденных колебаний на частоте 3ω .

Уравнение (13.54) связывает частоту ω и амплитуду A колебаний осциллятора с кубической нелинейностью. Из (13.54) получаем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{3\beta_3 E_0^2}{4\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{3\beta_3 E_0^2}{8\omega_0^2} \right).$$

Здесь учтено, что $\frac{3\beta_3 E_0}{4\omega_0^2} \ll 1$. Вводя обозначение $\zeta = \frac{3\beta_3}{4\omega_0^2}$, можно записать выражение для частоты колебаний ω в виде

$$\omega = \omega_0 - \zeta |E|^2. \quad (13.55)$$

Из (13.55) получаем выражение для постоянной распространения светового поля в среде с кубической нелинейностью

$$k = \frac{\omega}{v} = k_0 \left(1 - \frac{\zeta |E|^2}{\omega_0} \right). \quad (13.56)$$

При распространении светового пучка в нелинейной среде его интенсивность является функцией пространственной координаты $\mathbf{r}$ в поперечном сечении и времени, $I(\mathbf{r}, t)$. Согласно (13.55), в нелинейной среде имеет

место зависимость частоты от интенсивности. Следовательно, в поперечном сечении пучка возникают как функции пространственных координат и времени соответствующие распределения мгновенной частоты и фазы колебаний. Происходит так называемая *фазировка* атомного осциллятора световым полем во времени и пространстве. Временная зависимость мгновенной частоты $\omega(t)$ и фазы $\varphi(t)$ проявляется как эффект *само модуляции светового импульса*. Индуцированное светом пространственное распределение фазы проявляется через искривление волнового фронта пучка. В определенных условиях это искривление волнового фронта приводит к изменению размера поперечного сечения пучка, что может проявляться в эффекте *самофокусировки* светового импульса.

П Р И М Е Р 13.1

Оценить влияние кубической нелинейности на радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка

$$E = E_0 \exp \left\{ -\frac{x^2}{\omega_0^2} \right\},$$

распространяющегося в нелинейной среде.

Р е ш е н и е.

Зависимость радиуса кривизны волнового фронта $R(z)$ гауссова пучка от расстояния z , отсчитываемого от перетяжки, описывается формулой

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{R_0}{z} \right)^2 \right].$$

В нелинейной среде волновое число, согласно (13.56), зависит от интенсивности поля

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right).$$

Отсюда для конфокального параметра имеем

$$R_0 = \frac{k_0 \omega_0^2}{2} \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right) = R_{0l} \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right).$$

Здесь $R_{0l} = \frac{k_0 w_0^2}{2}$ — конфокальный параметр гауссова пучка в линейной среде. Подставляя это выражение в формулу для радиуса кривизны волнового фронта, получаем

$$R(z) = Z \left\{ 1 + \left(\frac{R_{0l}}{z} \right)^2 \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right)^2 \right\} \approx \\ \approx Z \left\{ 1 + \left(\frac{R_{0l}}{z} \right)^2 \left(1 - \frac{2\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right) \right\}.$$

Отсюда видно, что радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка в нелинейной среде меньше, чем в линейной среде, что свидетельствует о самофокусировке.

Восприимчивость кубически нелинейной среды при взаимодействии со световым полем на основной частоте ω изменяется, что влияет на диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = 1 + \chi = (1 + \chi_0) + \chi_1 E_0^2. \quad (13.57)$$

Отсюда следует зависимость коэффициента преломления от интенсивности световой волны ($\sim E_0^2$):

$$n = \sqrt{\varepsilon} = [1 + \chi_0 + \chi_1 E_0^2]^{\frac{1}{2}} \approx (1 + \chi_0)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\chi_1 E_0^2}{1 + \chi_0} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \\ \approx (1 + \chi_0)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\chi_1 E_0^2}{2(1 + \chi_0)} \right] \approx n_0 + \tilde{n} E_0^2. \quad (13.58)$$

Здесь введены обозначения: $n_0 = (1 + \chi_0)^{\frac{1}{2}}$ — линейная компонента коэффициента преломления; $\tilde{n} E_0^2$ — нелинейная компонента коэффициента преломления, пропорциональная интенсивности светового поля; $n = \chi_1 / 2n_0$.

Распределение интенсивности в сечении лазерного пучка в основной моде описывается гауссовой функцией. Поэтому, в соответствии с (13.57), показатель преломления в сечении гауссова пучка меняется от максимального значения на оси

$$n_{\max} = n_0 + \tilde{n} E_0^2$$

до минимального

$$n_{\min} = n_0$$

на периферии. Поэтому лазерным пучком в кубически нелинейной среде из-за нелинейной рефракции индуцируется световод с параболическим распределением коэффициента преломления в сечении. По мере прохождения лазерного пучка радиус его сечения уменьшается, плотность потока мощности увеличивается и происходит явление *самофокусировки*. Поскольку при самофокусировке уменьшается сечение лазерного пучка, увеличивается *самодифракция* светового поля. Таким образом, при нелинейной рефракции процесса самофокусировка сопровождается процессом самодифракции. Балансировка этих процессов получается по достижению определенного радиуса сечения или некоторой пороговой мощности, после чего лазерный пучок распространяется без изменения поперечного сечения. Это явление, наблюдаемое в нелинейной среде, называется *самоканализацией* лазерного пучка.

ПРИМЕР 13.2

Определить расходимость гауссова пучка, распространяющегося в среде с кубической нелинейностью в ближней дифракционной зоне $\frac{z^2}{R_0^2} \ll 1$.

Решение.

Радиус кривизны гауссова пучка в ближней дифракционной зоне

$$R(z) = \frac{R_0^2}{Z}.$$

Подставляя сюда полученное в примере 13.1 выражение для конфокального параметра в нелинейной среде

$$R_0 = R_{0l} \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right), \text{ находим}$$

$$R(z) = \frac{R_{0l}^2}{Z} \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right)^2 \approx \frac{R_{0l}^2}{Z} \left(1 - \frac{2\zeta}{\omega_0} |E|^2 \right).$$

Отсюда видно, что нелинейная рефракция компенсирует дифракционную расходимость в ближней зоне.

При достаточно большой интенсивности светового поля, удовлетворяющей условию

$$1 - \frac{2\zeta}{\omega_0} |E|^2 = 0,$$

дифракционная расходимость полностью компенсируется и реализуется режим самоканализирования, когда при распространении гауссова пучка сохраняется плоский волновой фронт и радиус поперечного сечения.

Рассмотрим влияние кубической нелинейности на световой пучок, не ограничивая его гауссовой формой. Пусть световое поле распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ . Его амплитуда в гармоническом приближении удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (13.59)$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}; \quad v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon} = \frac{1}{n^2 \mu_0 \epsilon_0}.$$

Полагая, что поле распространяется вдоль оси z , в дифференциальном операторе ∇^2 выделим поперечную и продольную производные. Будем рассматривать двумерный случай распространения в плоскости (x, z) . Такой подход упрощает анализ, не снижая общности результатов и выводов. Пусть

$$E \sim A(x, z)e^{-jk_0 z}, \quad (13.60)$$

где $A(x, z)$ — функция, медленно меняющаяся вдоль оси z , квадрат модуля этой функции равен интенсивности поля;

$k_0 = \omega n_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ — постоянная распространения (волновое число) при невозмущенном показателе преломления n_0 ; ω — частота светового поля. Подставляя (13.60) в (13.59), получаем в параксиальном приближении

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (n^2 - n_0^2) A. \quad (13.61)$$

Поскольку среда нелинейная, показатель преломления зависит от интенсивности поля согласно выражению

(13.58). Подставляя (13.58) в (13.61) и пренебрегая членами второго порядка малости $|\tilde{\alpha} E^2|^2$, получаем уравнение

$$-2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2k_0^2 \frac{\tilde{n}}{n_0} |A|^2 A = 0. \quad (13.62)$$

Введя обозначения

$$q = \frac{z}{2k_0}; \quad \eta = 2k_0^2 \frac{\tilde{n}}{n_0},$$

преобразуем (13.62) к виду, получившему название нелинейного уравнения Шредингера:

$$-i \frac{\partial A}{\partial q} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \eta |A|^2 A = 0. \quad (13.63)$$

Одно из решений нелинейного уравнения Шредингера

$$A(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\eta}} \xi \frac{\exp(-i\xi^2 q)}{ch(\xi x)}, \quad (13.64)$$

где ξ — произвольный параметр. Справедливость решения (13.64) легко проверяется подстановкой (13.64) в (13.63). Из (13.64) и (13.60) получаем выражение для электрической напряженности светового поля, распространяющегося в среде:

$$E = \sqrt{\frac{2}{\eta}} \xi \frac{\exp(-i\xi^2 q)}{ch(\xi x)} e^{-jk_0 z}.$$

Отсюда следует, что световое поле, распространяющееся в нелинейной среде, представляет собой пучок, радиус сечения которого на уровне e^{-1} равен $1/\xi$, а постоянная распространения

$$k = k_0 \left[1 + \frac{\xi^2 q}{k_0 z} \right] = k_0 \left[1 + \frac{\xi^2}{2k_0^2} \right] = k_0 \left[1 + \frac{\tilde{n}\xi^2}{n_0\eta} \right].$$

Для интенсивности поля имеем

$$I \sim |E|^2 = \frac{2}{\eta} \cdot \frac{\xi^2}{ch^2(\xi x)}.$$

С учетом (13.58) получаем для коэффициента преломления

$$n = n_0 + \tilde{n} \frac{2}{\eta} \cdot \frac{\xi^2}{ch^2(\xi x)}. \quad (13.65)$$

Из-за нелинейности профиль коэффициента преломления описывается функцией $\frac{\xi^2}{ch^2(\xi x)}$, с максимумом в точке $x = 0$ и уменьшающийся в направлениях x и $-x$. В результате в среде образуется диэлектрический волновод, в котором могут распространяться одна или несколько поперечных мод светового поля. В этом проявляется эффект самофокусировки. Как следует из решения нелинейного уравнения Шредингера, для реализации явления самофокусировки и получения волноводного эффекта профиль интенсивности светового поля должен соответствовать требуемому профилю коэффициента преломления.

13.9. ОПТИЧЕСКАЯ БИСТАБИЛЬНОСТЬ

Пусть осциллятор с кубической нелинейностью возбуждается интенсивным полем накачки с частотой ω . В линейном приближении, как показано в разд. 2.6, амплитуда колебаний в резонансной области определяется выражением

$$|A|^2 = \frac{G^2}{\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]}, \quad (13.66)$$

где $G = \frac{eE}{2m}$. Влияние нелинейности можно учесть, заметив, согласно (13.55), ω_0 на $\omega_0 - \zeta|A|^2$. Тогда выражение (13.66) принимает вид

$$|A|^2 = \frac{G^2}{\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega + \zeta|A|^2)^2 + \gamma^2]}.$$

Из этого уравнения получаем расстройку частоты $\omega_0 - \omega$ как функцию интенсивности поля

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega = \frac{1}{4} \zeta |A|^2 \pm \left[\left(\frac{G}{\omega_0 A} \right)^2 + \gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13.67)$$

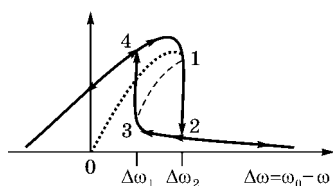


Рис. 13.14

Соответствующая (13.67) резонансная кривая показана на рис. 13.14. Амплитуда собственных колебаний (при $\gamma = 0$, $G = 0$) показана точечной кривой. Как видно, особенностью резонансной кривой нелиней-

ного осциллятора является наличие гистерезисного участка, отмеченного пунктиром.

Интенсивность вынужденных колебаний осциллятора (и, соответственно, интенсивность вторичного излучения) зависит от предыстории перестройки частоты внешнего излучения и направления ее изменения. Вблизи резонансной частоты амплитуда колебаний изменяется скачком. При увеличении частоты $\Delta\omega$ от исходного значения, меньшего $\Delta\omega_1$, по достижении величины $\Delta\omega_2$ амплитуда колебаний скачком изменяется от уровня 1 до уровня 2. Если же частота $\Delta\omega$ уменьшается от исходного значения, большего $\Delta\omega_2$, амплитуда колебаний при частоте $\Delta\omega_1$ скачком увеличивается от уровня 3 до уровня 4. Таким образом, осциллятор с кубической нелинейностью обладает двумя устойчивыми состояниями в зависимости от направления перестройки частоты внешнего поля. Это явление получило название оптической бистабильности. Оно может быть использовано при построении логических элементов в оптических системах обработки информации.

13.10. ПОНЯТИЕ ОБ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНАХ

Солитон — это световой импульс, возбужденный в среде с нелинейной дисперсией и распространяющийся без искажений. Отсутствие искажений объясняется компенсацией дисперсионного уширения импульса за счет его нелинейной фазовой модуляции.

Обратимся к постоянной распространения светового поля в моды низшего порядка, возбужденной в одномодовом волноводе в среде с кубической нелинейностью. Из-за дисперсии постоянная распространения зависит от частоты. Пусть среда обладает нелинейностью. Тогда,

как показано в предыдущем разделе, постоянную распространения $k(\omega)$ можно представить как сумму постоянной распространения в линейной среде $k_0(\omega)$ и малой нелинейной компоненты (13.56), зависящей от интенсивности поля и возникающей из-за нелинейного возмущения диэлектрической проницаемости:

$$k(\omega) = k_0(\omega) - \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2.$$

Воспользуемся разложением постоянной распространения $k(\omega)$ в ряд в окрестности несущей частоты:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{\partial k}{\partial \omega} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} - \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2. \quad (13.68)$$

Световое поле можно описать, введя огибающую $a(z, \omega - \omega_0)$:

$$A(z, \omega, t) = a(z, \omega - \omega_0) \exp\{i[\omega_0 t - k(\omega)z]\}.$$

Тогда для экстремума огибающей

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

или

$$\frac{\partial a}{\partial z} \exp[-i(\omega_0 t - kz)] - ika \exp[i(\omega_0 t - kz)] = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial a}{\partial z} = ika. \quad (13.69)$$

Подставляя в (13.69) выражение для постоянной распространения (13.68), получаем

$$\frac{\partial a}{\partial z} = i \left\{ k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{\partial k}{\partial \omega} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} - \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2 \right\} a. \quad (13.70)$$

Уравнение (13.70) описывает поведение огибающей в зависимости от частоты, и функция $a(\omega, z)$ имеет смысл спектральной плотности. Выполняя обратное фурье-преобразование выражения (13.70), получаем уравнение для светового поля в координатном пространстве

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) A(z, t) = -i \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} - \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2 A(z, t).$$

Учитывая, что $\frac{\partial \omega}{\partial k} = v_g$ — групповая скорость, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) A(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} - \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2 A(z, t).$$

Введем обозначения: $\tau = t - \frac{z}{v_g}$. Тогда

$$i \frac{\partial}{\partial z} A - \frac{1}{2v_g^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{\zeta}{\omega_0} |A|^2 A = 0. \quad (13.71)$$

Уравнение (13.71) по виду совпадает с уравнением (13.62), описывающим явление самофокусировки, если выполняется условие $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} < 0$. Это условие означает, что среда в волноводе обладает аномальной дисперсией. Область аномальной дисперсии на рис. 12.1 соответствует длинам волн справа от точки нулевой дисперсии. Решением уравнения (13.71), как и в случае самофокусировки, является функция вида

$$A(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\eta}}} \xi \frac{\exp(-i\xi^2 q)}{ch(\xi \tau)} = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\eta}}} \xi \frac{\exp(-i\xi^2 q)}{ch\left(\frac{\xi z}{v_g}\right)}.$$

Здесь $\tilde{\eta}$ и ξ — произвольные параметры пространственной ориентации светового импульса и отклонения несущей частоты от критической частоты для моды, возбужденной в индуцированном волноводе; $q = \frac{1}{2} z \frac{d^2 k}{d\omega^2}$.

Следовательно, в волноводе возбуждается и распространяется *устойчивый оптический импульс*, огибающая которого имеет форму гиперболического секанса. Такой импульс показан на рис. 13.15. Влияние дисперсии на уширение импульса компенсируется нелинейной компонентой коэффициента преломления.

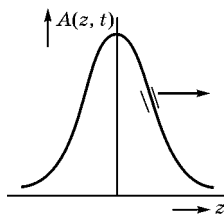


Рис. 13.15

Возбуждение и распространение в оптических волокнах солитонов имеет большой практический интерес. Уни-

кальное свойство солитона состоит в том, что он распространяется в оптическом волноводе без искажений, несмотря на существование дисперсии в среде. Такая способность солитона привлекательна для организации цифровой связи по оптическим волокнам посредством коротких импульсов — солитонов со стандартной формой огибающей, которая может описываться, как показано выше, функцией гиперболический секанс.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 13

1. Как связана нелинейная компонента восстанавливающей силы с потенциальной энергией в уравнении для вынужденных колебаний электрона под действием светового поля в классической модели атомного осциллятора?
2. Опишите спектральную структуру поляризации среды с квадратичной нелинейностью.
3. В чем состоит линейный электрооптический эффект Поккельса?
4. Может ли постоянное электрическое поле вызывать изменение собственной частоты колебаний электрона, движение которого описывается уравнением гармонического осциллятора?
5. Можно ли параметрически усиливать световые колебания в полосе аномальной дисперсии?
6. В каких средах реализуется условие фазовой синхронизации при параметрическом усилении световых колебаний?
7. Как используется модель вынужденных ангармонических колебаний атомного осциллятора для описания взаимодействия света с кубически нелинейной средой?
8. Какие эффекты возникают при взаимодействии света с кубически нелинейной средой?
9. Как обеспечивается в нелинейной среде генерация третьей гармоники излучения в поле накачки?
10. Как проявляются эффекты самомодуляции и самофокусировки светового импульса в нелинейной среде?
11. Как влияют нелинейные эффекты на радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка?
12. В чем состоит физический механизм самоканалирования гауссова пучка при распространении в нелинейной среде?
13. Как объясняется в модели вынужденных ангармонических колебаний атомного осциллятора эффект оптической бистабильности?
14. В чем состоит физический механизм компенсации дисперсионного уширения при распространении солитона в оптическом волокне?

ЗАДАЧИ

13.1. Тонкий мощный световой пучок рубинового лазера ($\lambda = 0,694$ мкм) направляется на кристалл кварца. В свете, выходящем из кристалла, наряду с красной линией ($\lambda = 0,694$ мкм) наблюдается слабое излучение на длине волны $\lambda = 0,347$ мкм. Объяснить это явление.

13.2. В квадратичной нелинейной среде распространяется мощный цилиндрический лазерный пучок. Оценить диаметр D лазерного пучка в условиях самоканалирования, если дифракционная расходимость определяется формулой $\left(\frac{1,22\lambda}{n_0 D}\right)^2$. Здесь n_0 — линейный коэффициент преломления.

13.3. Два мощных лазерных пучка с частотами ω_1 и ω_2 направляются в среду с квадратичной нелинейностью. Помимо компонент с частотами падающих пучков в спектре рассеянного света появляются другие составляющие с другими частотами. Какие это частоты?

13.4. Оценить влияние нелинейности среды на фазовую скорость гауссова пучка.

13.5. При распространении гауссова пучка в линейной среде величина $\frac{2Rzw_0^2}{kw^2R_0} = 1$. Можно ли записать аналогичную комбинацию параметров гауссова пучка, сохраняющуюся при распространении его в нелинейной среде?

ФОРМАЛИЗМ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ, СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД И ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ

Представление синусоидально меняющихся во времени или в пространстве сигналов комплексными функциями существенно упрощает решение линейных дифференциальных уравнений, наглядно отображает как сами сигналы, так и их линейные комбинации на комплексной плоскости в виде векторных диаграмм.

Физические сигналы по определению могут описываться только вещественными функциями, поскольку природа не знает мнимой единицы. Однако при математическом моделировании процессов или физических величин, для которых зависимость от времени является синусоидальной, удобно пользоваться комплексными функциями вида

$$Ae^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{A}e^{i\omega t},$$

где $\hat{A} = Ae^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда. В этом случае

$$x = \operatorname{Re}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\hat{A}e^{i\omega t}] = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (\text{П.1})$$

На комплексной плоскости (рис. П.1) такой сигнал представляется вектором, модуль которого равен амплитуде A . Этот вектор, называемый фазором, вращается относительно начала координат против часовой стрелки с угловой скоростью, равной круговой частоте ω , и начальной фазой φ , равной углу наклона к вещественной оси при $t = 0$. Проекция фазора на ось Re есть вещественная функция, описывающая физический сигнал (П.1). Проекция фазора на мнимую ось является функцией, квадратурной (ортогональной по фазе) к физическому сигналу (П.1):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (\text{П.2})$$

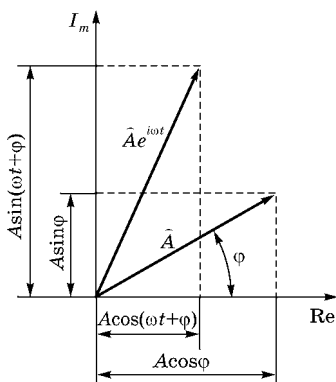


Рис. П.1

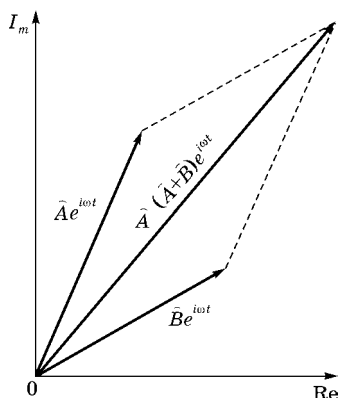


Рис. П.2

Пусть имеются два сигнала с комплексными амплитудами $\hat{A} = Ae^{i\varphi_1}$ и $\hat{B} = Ae^{i\varphi_2}$. Частоты сигналов одинаковы и равны ω . Эти сигналы отображаются фазорами $\hat{A}$ и $\hat{B}$ на комплексной плоскости (рис. П.2). Суммарный сигнал на рис. П.2 отображается фазором $\hat{A} + \hat{B}$, который определяется по правилам суммирования векторов

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ \operatorname{Re} \hat{A} &= A \cos \varphi_1; \quad I_m \hat{A} = A \sin \varphi_1; \\ \hat{B} &= B(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2); \\ \operatorname{Re} \hat{B} &= B \cos \varphi_2; \quad I_m \hat{B} = B \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Для суммы фазоров $\hat{A} + \hat{B}$ имеем

$$\hat{A} + \hat{B} = \operatorname{Re}(\hat{A} + \hat{B}) + i I_m(\hat{A} + \hat{B}),$$

где

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\hat{A} + \hat{B}) &= \operatorname{Re}(\hat{A}) + \operatorname{Re}(\hat{B}) = A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2; \\ I_m(\hat{A} + \hat{B}) &= I_m(\hat{A}) + I_m(\hat{B}) = A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Модуль суммы фазоров

$$\begin{aligned}|\hat{A} + \hat{B}| &= \{[\operatorname{Re}(\hat{A} + \hat{B})]^2 + [I_m(\hat{A} + \hat{B})]^2\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2)^2 + (A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Фаза суммарного фазора

$$\arg(\hat{A} + \hat{B}) = \operatorname{arctg} \frac{I_m(\hat{A} + \hat{B})}{\operatorname{Re}(\hat{A} + \hat{B})} = \operatorname{arctg} \frac{A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2}{A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2}.$$

Обратимся к разности комплексных амплитуд фазоров $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A} - \hat{B} = \text{Re}(\hat{A} - \hat{B}) + iI_m(\hat{A} - \hat{B}).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\text{Re}(\hat{A} - \hat{B}) &= \text{Re} \hat{A} - \text{Re} \hat{B} = A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2; \\ I_m(\hat{A} - \hat{B}) &= I_m \hat{A} - I_m \hat{B} = A \sin \varphi_1 - B \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Модуль разности фазоров

$$\begin{aligned}|\hat{A} - \hat{B}| &= \{[\text{Re}(\hat{A} - \hat{B})]^2 + [I_m(\hat{A} - \hat{B})]^2\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \{(A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2)^2 + (A \sin \varphi_1 - B \sin \varphi_2)^2\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Фаза разностного фазора

$$\arg(\hat{A} - \hat{B}) = \arctg \frac{I_m(\hat{A} - \hat{B})}{\text{Re}(\hat{A} - \hat{B})} = \arctg \frac{A \sin \varphi_1 - B \sin \varphi_2}{A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2}.$$

Решение линейных дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы, существенно упрощается при записи в комплексной форме, когда решение представляется в виде $x = \hat{A}e^{i\omega t}$, где $\hat{A}$ — комплексная амплитуда. В этом случае первая производная по временной координате соответствует умножению

x на $i\omega$, $\frac{dx}{dt} = i\omega \hat{A}e^{i\omega t}$, вторая сводится к уменьшению на $-\omega^2$,

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \hat{A}e^{i\omega t}$, а интегрирование по времени — к делению на $i\omega$,

$\int \hat{A}e^{i\omega t} dt = \frac{\hat{A}e^{i\omega t}}{i\omega}$. При подстановке в линейное дифференциальное

уравнение обобщенной координаты в комплексном (символическом виде ($x = \hat{A}e^{i\omega t}$)) это уравнение обращается в линейное алгебраическое уравнение для комплексных амплитуд. Символический метод применяется, когда комплексные амплитуды связаны линейными зависимостями. В случае нелинейных и, в частности, квадратичных соотношений его применение связано с ограничениями, которые необходимо соблюдать. Квадратичные соотношения появляются, например, при вычислении энергетических характеристик исследуемых колебательных процессов. Пусть физические величины $a(t) = A \cos(\omega t - \varphi_1)$ и $b(t) = B \cos(\omega t - \varphi_2)$ записаны в комплексной форме: $\hat{A}e^{i\omega t}$ и $\hat{B}e^{i\omega t}$. Очевидно, что произведение этих физических величин не равно алгебраическому произведению их комплексных (символических) фазор:

$$\operatorname{Re}\{\widehat{A}e^{i\omega t}\widehat{B}e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{ABe^{i(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}\} \neq ab.$$

Воспользуемся тем, что

$$a = \frac{1}{2}[\widehat{A}e^{i\omega t} + \widehat{A}^*e^{-i\omega t}];$$

$$b = \frac{1}{2}[\widehat{B}e^{i\omega t} + \widehat{B}^*e^{-i\omega t}].$$

Тогда

$$ab = \frac{1}{4}[\widehat{A}e^{i\omega t} + \widehat{A}^*e^{-i\omega t}][\widehat{B}e^{i\omega t} + \widehat{B}^*e^{-i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{4}[\widehat{A}\widehat{B}^* + \widehat{A}^*\widehat{B}] + \frac{1}{4}[\widehat{A}\widehat{B}e^{2i\omega t} + \widehat{A}^*\widehat{B}^*e^{-2i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{4}AB[e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}] + \frac{1}{4}AB[e^{i(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)} + e^{-i(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}] =$$

$$= \frac{1}{2}AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}AB\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).$$

Естественно, тот же самый результат получается при непосредственном перемножении вещественных значений сомножителей в символической (комплексной) форме:

$$ab = A\cos(\omega t + \varphi_1)B\cos(\omega t + \varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{2}AB\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}AB\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).$$

Усредняя произведение ab по времени за период T , получаем

$$\langle ab \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2}AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}AB\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cos AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отсюда следует, что среднее за период значение произведения физических величин, выраженных в символической форме, определяется как полусумма комплексных сопряженных произведений компоненты амплитуды на комплексную сопряженную другую:

$$\langle ab \rangle = \frac{1}{2}(\widehat{A}\widehat{B}^* + \widehat{A}^*\widehat{B}) = \frac{1}{2}(\widehat{A}\widehat{B}^* + K.C.) = \frac{1}{2}AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Здесь $K.C.$ означает комплексное сопряжение. Таким образом, усредненное по времени квадратичное соотношение можно получить через комплексные амплитуды, используя символический метод.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 6
Автоколебательная система 327
Акустооптическое взаимодействие 315, 322
Амплитуда колебания 8
Амплитуда комплексная 9, 272
Аперiodическое движение 15, 24
Апертура
— числовая 289

Биения 297
Бистабильность оптическая 367
Брюстера угол 212

Вектор
— волновой 184
— Пойнтинга 198
Вибрации
— защита 120
Волна 6, 177
— акустическая 170, 315
— бегущая 315
— накачки 352
— стоячая 321
— электромагнитная 192
— — TE 208, 223
— — TM 208, 221

Волновод
— диэлектрический 281
— металлический 217
Волновое сопротивление
— коаксиального кабеля 153
— линии передач 149
— — идеальной 152
— — реальной 155
— осциллятора 61
— среды 170
— — связь с показателем преломления 207

Волновое число 136, 141
Волокно оптическое 290
Восприимчивость 193
— линейная 345
— нелинейная 348
Вынужденные колебания 5, 43

Гармонические колебания 8
Гауссов пучок 357
Генератор
— RC 337
— релаксационный 337
Граничные условия
— геометрические 171
— динамические 171, 172

Давление световое 311
Декремент затухания 16
Дисперсия 145
— аномальная 303
— нормальная 304
— хроматическая 291
Дифракция 246
— Фраунгофера 253
— Френеля 252
Добротность 17, 57, 59, 246
Доплера эффект 184

Затухающие колебания 14
Зоны Френеля 271
Закон Снелиуса 210

Инвариант адиабатический 28
Импеданс
— волновой 155
— осциллятора 44
— — механического 44
— — электрического 47
— среды 170, 171

Интервал

— дисперсионный 242

Интерференция 231

— двулучевая 233

— многолучевая 238

Импульс оптический

— распространение в световоде 293

Импульсный отклик 250**Когерентная передаточная функция** 249**Колебания**

— вынужденные 5, 43

— гармонические 8

— затухающие 14

— с вязким трением 14

— с сухим трением 34

— линейные 30

— нелинейные 31

— параметрические 68

— — осцилляторов, связанных через жесткость 86

— — осцилляторов, связанных через емкость 94

— — осцилляторов, связанных через массу 97, 98

— — осцилляторов, связанных через индуктивность 100

— свободные 5, 8

Колебательный контур 10, 59, 61**Константа распространения** 154, 159, 340**Конфокальный**

— параметр 258

— резонатор 268

Координаты

— естественные 90

— нормальные 88

Коэффициент

— жесткости 9

— затухания 151, 154, 159

— отражения 156, 206, 207

— — энергетический 173

— преломления 207, 210

— прохождения 157, 172, 206

— — энергетический 173

Кристалл

— модель одномерная 136

— ионный 143

Линза

— дифракционная 269

— рефракционная 263

Линия передач

— идеальная 149

— неискажающая 167

— реальная 153

— резонансная 161, 165

Максвелла уравнения 193**Матье уравнение** 69**Маятник**

— математический 12

— физический 13

Моды нормальные 88**Нелинейность**

— осциллятора 30

— среды 343

— — квадратичная 344

— — кубическая 355

Осциллятор

— линейный 6, 8, 43, 68, 86, 103

— нелинейный 6, 33

Отклик

— импульсный 250, 293

Отражение

— от границы раздела двух сред 173, 205, 208

— в линии передач 156

— полное внутреннее 213

Пакет волновой 396**Параметр**

— конфокальный 258

— q -параметр 258, 261**Период колебания** 7**Плазма** 306**Пойнтинга вектор** 198**Поляризация**

— волны 195

Поляризуемость

— среды 193

— — линейная 193, 302

— — нелинейная 347, 356

Постоянная

— времени затухания 16

— распространения 154, 159, 340

Преобразование Фурье 177, 294**Проводимость**

— волновая 152

— погонная 149

Проницаемость

— диэлектрическая 192, 193

— магнитная 192, 193

Пучок

— гауссов 257

— — распространение 259, 261

— — преобразование линзой 263

— — преобразование зеркалом 265

Режим возбуждения

- автоколебаний 330
- — жесткий 333
- — мягкий 333

Резонанс

- напряжений 61
- мощности 55
- параметрический 70, 78
- скорости 45
- смещения 51
- токов 64

Резонансная кривая 46, 49, 52, 56**Резонатор**

- оптический 265
- — устойчивый 268
- — неустойчивый 268
- — Фабри–Перо 245

Само модуляция 362**Самофокусировка** 364**Свободные колебания** 5, 8, 86**Связи коэффициенты** 104**Связанные** 86, 103**Световод**

- диэлектрический 281
- двулучепреломляющий 297

Сепаратриса 25**Система колебательная**

- распределенная 124
- — с ограничением частоты сверху 124
- — с ограничением частоты снизу 129
- связанная 86, 103

Скин-слой 201**Скорость**

- групповая 146
- фазовая 145, 176
- Снеллиуса закон 210

Согласование импедансов

- линий передач 164
- сред 176

Солитон 370**Сопротивление**

- активное 18, 103
- волновое 61, 152
- реактивное 1, 8, 44

Спектр

- борновский 140, 142
- дебаевский 140, 142
- угловой 248

Степень свободы 6**Трение**

- скольжения 15
- сухое 34

Уравнение

- волновое 135
- дисперсионное 145, 146, 180
- Клейна–Гордона 145
- Максвелла 193
- Матье 69
- Хилла 69
- нелинейное Шредингера 366

Фазовый

- портрет 24, 26, 27
- — особая точка 24
- — седло 25
- — узел 25
- — фокус 24
- — — неустойчивый 27
- центр 24
- траектория 23
- плоскость 22, 28

Фазор 374**Фильтр**

- высоких частот 131, 134
- низких частот 128, 133
- фильтр-пробка 116, 119

Формулы**Френеля** 211**Функция**

- когерентная передаточная 249

Цикл

- предельный 331
- — устойчивый 332
- — неустойчивый 332

Частота

- собственная 8
- ленгмюровская (плазменная) 306
- параметрической накачки 69
- пространственная 253

Электромеханическая аналогия 18**Элемент киноформный** 277**Энергия**

- автоколебаний 328, 330
- колебаний 31
- — свободных 10, 11, 21, 33
- — вынужденных 155
- — параметрических 328, 330

Эффект

- Доплера 184
- Поккельса 349
- Зеемана 310
- Эхо световое 357
- стимулированное 360

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алешкевич, В. А.* Колебания и волны / В. А. Алешкевич [и др.] — М. : Изд-во МГУ, 2001. — 144 с.
2. *Андреев, В. С.* Теория нелинейных электрических цепей. — М. : Радио и связь, 1982. — 303 с.
3. *Ахманов, С. А.* Физическая оптика / С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. — М. : МГУ, 1998. — 655 с.
4. *Баскаков, С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М. : Высшая школа, 1983. — 536 с.
5. *Дубнищев, Ю. Н.* Колебания и волны. — Новосибирск : Сибирское университетское изд-во, 2004. — 328 с.
6. *Дубнищев, Ю. Н.* Теория и преобразование сигналов в оптических системах. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. — 414 с.
7. *Дубнищев, Ю. Н.* Лазерные доплеровские измерительные технологии. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. — 405 с.
8. *Ильин, М. М.* Теория колебаний / М. М. Ильин [и др.] — М. : Изд-во МГТУ, 2003. — 272 с.
9. *Кабисов, К. С.* Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями / К. С. Кабисов [и др.] — М. : КомКнига, 2005. — 360 с.
10. *Казаинс, А.* Оптика и связь / А. Казаинс [и др.] — М. : Мир, 1984. — 502 с.
11. *Калинин, В. И.* Введение в радиофизику / В. И. Калинин, Г. М. Герштейн. — М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1959. — 660 с.
12. *Литвинов, О. С.* Электромагнитные волны и оптика. — М. : Изд-во МГТУ, 2006. — 448 с.
13. *Магнус, К.* Колебания. — М. : Мир, 1982. — 303 с.
14. *Мандельштам, Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М. : Наука, 1972. — 470 с.
15. *Мигулин, В. В.* Основы теории колебаний / В. В. Мигулин [и др.] — М. : Наука, 1978. — 295 с.
16. *Пейн, Г.* Физика колебаний и волн. — М. : Мир, 1979. — 389 с.
17. *Рабинович, М. И.* Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — М. : Наука, 1992. — 387 с.
18. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. Оптика. — М. : Наука, 1980. — 751 с.
19. *Стафеев, С. К.* Основы оптики: учебное пособие / С. К. Стафеев [и др.] — СПб. : Питер, 2006. — 336 с.
20. *Фабрикант, В. А.* Физика, оптика, квантовая электроника: Избранные статьи. — М. : Изд-во МЭИ, 2000. — 210 с.
21. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. — М. : Мир, 1988. — 430 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
<i>Глава первая</i>	
Свободные колебания в осцилляторах	8
1.1. Гармонические колебания	8
1.2. Затухающие колебания	14
1.3. Электромеханическая аналогия	18
1.4. Фазовые траектории и фазовый портрет	22
1.5. Понятие о свободных колебаниях нелинейных осцилляторов	30
1.6. Затухающие колебания в осцилляторе с сухим трением	34
<i>Глава вторая</i>	
Вынужденные колебания	43
2.1. Поведение осциллятора под воздействием внешнего периодического возмущения	43
2.2. Энергия осциллятора при вынужденных колебаниях	54
2.3. Добротность осциллятора	57
2.4. Резонанс напряжений в последовательном контуре	59
2.5. Резонансные явления в параллельном колебательном контуре	61
<i>Глава третья</i>	
Параметрические колебания	68
3.1. Колебательный контур с параметрическим возбуждением	68
3.2. Параметрические колебания математического маятника	73
3.3. Параметрические колебания в осцилляторе с потерями	76
3.4. Фазовые траектории параметрических колебаний осциллятора	80
<i>Глава четвертая</i>	
Свободные колебания в связанных осцилляторах	86
4.1. Осцилляторы, связанные через жесткость (емкость)	86
4.2. Анализ колебаний системы связанных осцилляторов в естественных координатах	90

4.3. Частота нормальных мод	91
4.4. Система из двух электрических осцилляторов с емкостной связью	94
4.5. Система из двух осцилляторов с инерциальной (индуктивной) связью	98
<i>Глава пятая</i>	
Вынужденные колебания в связанных осцилляторах	103
5.1. Колебания в электрических связанных контурах	103
5.2. Резонансные свойства связанных контуров	111
5.3. Энергетические соотношения в условиях резонанса	117
5.4. Колебания в механических связанных осцилляторах	118
<i>Глава шестая</i>	
Колебания в распределенных системах	124
6.1. Распределенные колебательные системы с ограничением собственных частот сверху	124
6.2. Распределенные колебательные системы с ограничением собственных частот снизу	129
6.3. Вынужденные колебания в распределенных системах. Понятие о фильтрах	132
6.4. Переход от дискретной системы связанных осцилляторов к сплошной среде	134
6.5. Колебания в кристаллических структурах	136
6.6. Поглощение инфракрасного излучения ионными кристаллами	143
6.7. Физическая природа дисперсии в дискретных и сплошных средах	144
<i>Глава седьмая</i>	
Колебания в электрических линиях передач	149
7.1. Линия передач без потерь	149
7.2. Линия передач с потерями	153
7.3. Волновое сопротивление линии передач с потерями	154
7.4. Отражение от конца линии передач	155
7.5. Свойства линий передач как колебательных систем	160
7.6. Неискажающая линия	167
<i>Глава восьмая</i>	
Волны в сплошной среде	170
8.1. Импеданс среды	170
8.2. Отражение и прохождение волн на границе двух сред	171
8.3. Отражение и прохождение энергии на границе двух сред	173
8.4. Согласование импедансов	174
8.5. Фазовая и групповая скорость	176
8.6. LC-модели дисперсионных сред	181
8.7. Эффект Доплера	184
<i>Глава девятая</i>	
Электромагнитные волны	192
9.1. Распространение электромагнитных волн в диэлектрической среде	193
9.2. Энергия электромагнитной волны	197
9.3. Электромагнитные волны в среде с ненулевой проводимостью	200

9.4. Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности раздела двух сред	202
9.5. Нормальное падение плоской волны на границу двух диэлектрических сред	205
9.6. Преобразование плоской волны на границе двух сред при произвольном угле падения	207
9.7. Преобразование волнового сопротивления	215
9.8. Распространение электромагнитных полей в металлических волноводах	217
<i>Глава десятая</i>	
Волны в оптике	231
10.1. Интерференция оптических волн	231
10.2. Многолучевая интерференция	238
10.3. Дифракция оптических волн	246
10.4. Гауссовы пучки и их распространение	257
10.5. Оптические резонаторы	265
10.6. Дифракционные линзы	269
<i>Глава одиннадцатая</i>	
Распространение оптических волн в световодах	281
11.1. Распространение световых волн в диэлектрическом волноводе	281
11.2. Модовая структура и распространение волн	285
11.3. Влияние хроматической дисперсии	291
11.4. Влияние дисперсии на распространение импульса	293
11.5. Двулучепреломляющие оптические волноводы	297
<i>Глава двенадцатая</i>	
Световые волны в линейных средах	301
12.1. Понятие об электронной дисперсии	301
12.2. Оценка дисперсионных свойств плазмы	306
12.3. Эффект Зеемана	307
12.4. Световое давление	311
12.5. Взаимодействие оптических и акустических волн	315
<i>Глава тринадцатая</i>	
Автоколебательные системы и световые поля в нелинейных средах	327
13.1. Автоколебательная система и ее фазовый портрет ...	327
13.2. Примеры автоколебательных систем	335
13.3. Взаимодействие света с квадратично нелинейной средой	343
13.4. Линейный электрооптический эффект Поккельса ...	349
13.5. Параметрическое усиление световых волн	351
13.6. Взаимодействие света с кубически нелинейной средой	355
13.7. Световое эхо	357
13.8. Явления самомодуляции и самофокусировки	360
13.9. Оптическая бистабильность	367
13.10. Понятие об оптических солитонах	368
<i>Приложение</i>	
Формализм комплексных функций, символический метод и векторные диаграммы	373
Предметный указатель	377
Список литературы	380

Юрий Николаевич ДУБНИЦЕВ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Издание второе, переработанное

Зав. редакцией физико-математической литературы *А. П. Погода*
Ответственный редактор *А. О. Масленникова*
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Корректоры *В. М. Гончар, А. М. Плетнева*
Верстка *М. И. Хетерели*
Подготовка иллюстраций *Н. А. Платонова*
Выпускающие *Ю. Г. Бакианова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД», 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС», 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ», 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:
Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 02.02.2011.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 20,16. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru