2 р. 80 к.

Уважаемый коллега!

Вы приобрели одну из книг **первой** серии учебно-методической литературы, издаваемой по инициативе Всесоюзной Ассоциации учителей математики.

Состав первой серии:

1. Пойа Д. Как решать задачу.
2. Дорофеев Г. В. Квадратный трехчлен в задачах.
3. Шарыгин И. Ф. Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы (1987—1990).
4. Голубев В. И., Тарасов В. А. Эффективные пути решения неравенств.
5. Дудницын Ю. П. Смирнова В. К. Содержание и анализ письменных экзаменационных работ по математике за курс средней школы.
6. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Курс алгебры 8 класса в задачах (для классов с углубленным изучением математики).
7. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Курс геометрии 8 класса в задачах (для классов с углубленным изучением математики).
8. Миракова Т. Н. Развивающие задачи на уроках математики в 5—8 классах (приемы поиска решения).
9. Голубев В. И. Тема «Абсолютная величина числа» в конкурсных экзаменах по математике.
10. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики.

Цена серии (без почтовых расходов) 30 руб.

Для получения книг наложенным платежом следует выслать в адрес фирмы «Квантор» Львов-53, а/я 5228 заказ с указанием Ф. И. О. заказчика и полного почтового адреса.

ISSN 0869-2513

ВСЕСОЮЗНАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

КВАНТОР

ДОРОФЕЕВА А. В.

СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

6

ВСЕСОЮЗНАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДОРОФЕЕВА А. В

Страницы истории на уроках математики

ЛЬВОВ
ЖУРНАЛ «КВАНТОР»
1991

Главный редактор
Ю. М. Леви

Дорофеева А. В.

СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Сдано в набор 01.03.91. Подписано к печати 04.08.91. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л 5,04
Усл. кр.-отт 5,45. Тираж 100 000 экз. Зак. 1–1183. Цена 2 р 80 к (для подписчиков)

Журнал «Квантор», 293310, г. Нестеров, ул. Горького, 8
Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, ул. Довженко, 3.

Без знания прошлого нельзя понять настоящее и совершенно невозможно правильно представить будущее.

Введение

Автор книги в течение многих лет читает лекции по истории математики на механико-математическом факультете Московского университета им. М. В. Ломоносова. Она преподает высшую математику студентам философского факультета. Опыт работы показывает, что факты истории математики всегда привлекают учащихся, вызывают их интерес.

Книга обращена в первую очередь к учителям математики. В ней собраны исторические сведения, которые необходимы для их повседневной работы. В книге описываются пути формирования математики, исследуются закономерности ее развития. В ней содержатся краткие биографии ученых, их портреты. Перед читателем предстанут творцы математики, преданные своему делу, отдающие ему всю жизнь, смело борющиеся за распространение своих идей.

Автор надеется, что книга привлечет внимание школьников и студентов, поможет им понять, как решаются конкретные математические задачи и как из разрозненных фактов создаются общие идеи.

Читателю предлагаются очерки по истории тех математических дисциплин, которые изучают в школе. В них описывается процесс развития арифметики, алгебры и геометрии.

Из всех искусств не осталось бы ни единого, все они совершенно исчезли бы, если бы было исключено искусство арифметики.

Платон.

Счет и вычисления — основа порядка в голове.

Песталоцци И

ИСТОРИЯ АРИФМЕТИКИ

1. Первые древние цивилизации

Самые ранние математические тексты, известные в настоящее время, относятся ко второму тысячелетию до нашей эры. В это время расцветают две великие цивилизации Востока. Египет в долине реки Нил и Вавилон — центр Двуречья, образованного Тигром и Евфратом.

Культуру Древнего Двуречья мы называем вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. В результате археологических раскопок на берегах Тигра и Евфрата, начатых в XIX в., было найдено большое число глиняных табличек разных эпох от начала III тысячелетия до н. э. до III в. н. э. В музеях мира их хранится около 500 000, известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами.

В Древнем Вавилоне на сырую глину тонкой палочкой наносили клиновидные записи. Затем таблички обжигали, и они сохранились в течение нескольких тысячелетий.

В Китае и Индии использовали значительно менее долговечный материал: древесную кору или бамбук. Развитая цивилизация в долине Инда существовала еще в середине III тысячелетия до н. э. В I тысячелетии до н. э. появляются священные книги брахманов «Веды» («Знания») К VII — V вв. до н. э. относятся первые индийские письменные математические памятники.

Во II в. до н. э. была изобретена бумага и созданы первые математические сочинения, дошедшие до нас. «Математический трактат об измерительном шесте» посвящен главным образом астрономии. Из математических вопросов здесь содержатся лишь формулировка теоремы Пифагора и вычисления с дробями. Трактат «Математика в девяти книгах» был написан разными людьми и в разные эпохи. Он был окончательно отредактирован финансовым чиновником Чжан Цаном (умер в 150 г. до н. э.). «Математика в девяти книгах» содержит 246 задач, изложенных догматически: сначала дается формулировка задачи, затем приводится ее ответ и в сжатой форме указывается метод решения.

Итак, наши главные знания о математике древнейших цивилизаций, подтвержденные сохранившимися математическими текстами, относятся к Египту и Вавилону. Древняя математика Индии и Китая представлена значительно более поздними текстами.

Носителями математических знаний в Египте были писцы — государственные служащие, служители храмов. Они занимали в обществе привилегированное положение и гордились своей образованностью. Самого фараона называли «писцом божьей книги». «Писец — он руководит всеми»,— читаем мы в одном из папирусов. И действительно, образованные люди, знающие математику, руководили войсками и строительством, торговлей, сбором налогов, хранили сокровища фараонов. Строительство грандиозных египетских пирамид, безусловно, требовало большого мастерства в проведении арифметических вычислений и знаний в области геометрии.

В Древнем Вавилоне, как и в Египте, писцы руководили общественными работами, составляли торговые документы, вели деловую переписку. Должность писца была почетной. «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу» — указывается в клинописных текстах.

И в Древнем Китае высоко ценились образованные люди. Чтобы занять государственную должность, нужно было выдержать экзамен по математике, изучить трактат «Математика в девяти книгах».

В Индии многие математические сочинения были написаны в стихотворной форме. Математические правила формулировались в коротких строчках, их заучивали наизусть.

Математика древнейших цивилизаций возникла и развивалась как прикладная наука, необходимая для календарных расчетов, для строительства каналов, дамб, плотин, складов для зерна, военных укреплений. На ее основе сооружались храмы и дворцы. Математика использовалась в астрономии, в географии и в мореплавании. Она учила производить арифметические подсчеты и геометрические измерения.

Но в то же время специалисты-математики, которые передавали знания своим ученикам, стали заниматься наукой ради нее самой — ради ее обобщения и совершенствования. Из арифметики стала вырастать алгебра, из правил геометрических измерений появились зачатки теоретической науки. Уже в те времена, отдаленные от наших дней тысячелетиями, ученые начали проводить не только прикладные, но и фундаментальные исследования.

2. Системы счисления

Когда ребенок учится считать, он использует пальцы на своих руках, иногда на ногах. Также считали люди в доисторические времена. В древних системах счисления основанием чаще всего служило одно из чисел 5, 10 или 20. Постепенно пятеричная и двадцатеричная системы вышли из употребления, одна как слишком скудная, другая как черезчур громоздкая. Самой распространенной стала десятичная система.

Пусть основание системы счисления выбрано. Сразу же встают следующие вопросы: как записать числа, с помощью каких символов и по какому принципу? Сейчас мы используем десятичную позиционную систему, когда любое натуральное число записывается с помощью десяти знаков 0, 1, 2, ..., 9. Покажем, что она создавалась в течение ряда столетий как результат творчества многих народов.

Первые нумерации были непозиционными. В них приходилось вводить знаки для чисел 1, 2, ..., 9, затем новые знаки для 10, 20, ..., 90, потом знаки для 100, 200, ..., и так далее. Так была построена нумерация Древней Греции. Цифры обозначались буквами, над которыми ставили штрихи, когда букв не хватало, использовали другие знаки.

Ясно, что эта система очень громоздка, требует больших усилий для запоминания, неудобна для оперирования с большими числами. Тем не менее ее, за неимением лучшей, использовали великие греческие ученые Архимед, Евклид, Аполлоний. Примерами алфавитной системы, кроме приведенной, являются древнеславянская, арабская, еврейская, грузинская, армянская и др.

Одна из древнейших нумераций, египетская, была десятичной и непозиционной. Для записи чисел использовались иероглифы, которые повторяли столько раз, сколько единиц в соответствующем разряде.

Очевидно, что эта система требует запоминания большого числа иероглифов. Она громоздка и неудобна.

В иероглифическом письме знаки имели вид рисунков, изображавших людей, животных, птиц, насекомых, предметы обихода и т. д. Система нумерации древних египтян оставалась, как свидетельствуют многочисленные памятники, по существу неизменной в течение трех тысячелетий.

Совершенно новая замечательная идея была развита в Древнем Вавилоне. Там впервые была создана позиционная система, которая позволяла любое натуральное число записать с помощью двух клинописных знаков. Это одно из важнейших открытий в истории науки.

Вавилонская система была шестидесятеричной. Знак ∇ означал 1, 60 и вообще любое число 60^n, а знак $<$ — 10, 600 и любые числа $10 \cdot 60^n$. Например,

число $156 \, (2 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1)$ записывалось так

$$\nabla\nabla <<< \begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$$

Обратим внимание на то, что в системе вавилонян своеобразно сочетался счет с помощью чисел 10 и 60. Именно поэтому она называется шестидесятеричной.

К сожалению, в ней в течение многих столетий отсутствовал какой бы то ни было эквивалент для нашего числа нуль. Если был изображен один клин ∇, то без дополнительных пояснений нельзя было понять, какое число написано: 1 или 60. Лишь в V в. до н. э. появился особый знак для обозначения отсутствующего разряда внутри числа, но этот знак, предшественник нашего нуля, не получил широкого распространения.

Позиционная десятичная система впервые сложилась в Индии не позднее VI в. н. э.

Практические вычисления у всех народов обычно проводились с помощью счетных досок. В Древней Греции считали на абаке. Обычно он разграфлялся на столбцы, соответствующие десятичным разрядам. Числа на абаке обозначались камешками. От латинского слова «*calculus*» (камешек) и происходит наш термин «калькуляция». Когда абак перестали разграфлять, то для обозначения пустого разряда стали применять особый круглый камешек с отверстием посередине. Он играл роль нуля. Начиная со II в. н. э., греческие астрономы, познакомившись с шестидесятеричной системой вавилонян, стали употреблять символ 0 для обозначения пропущенного разряда. Это прообраз нашего нуля. Между II и VI вв. н. э. индийцы познакомились с греческой астрономией, с шестидесятеричной нумерацией и с греческим нулем. Соединив эти результаты со своей десятичной системой, они сделали завершающий шаг в создании нашей нумерации.

Число нуль в Индии чаще всего называли «шунья» — пустое. В VIII в. его перевели на арабский язык словом «сыфр», имеющим то же значение. Затем «сыфр» при переводе арабских сочинений на латынь оставили без перевода и записывали в виде «*ciffra*». Отсюда и наше слово «цифра», которое первоначально означало нуль.

Позднее и в обыденной жизни, и в математических сочинениях цифрами стали называть символы 0, 1, 2, ..., 9.

Из Индии новая система распространилась по всему миру. В страны Европы она была занесена арабами. Отсюда и сохранившееся поныне название «арабские цифры».

В арабских странах цифры 0, 1, 2, ..., 9 приняли форму, близкую к современной. Они носили название «губар» (пыль). Оно свидетельствует о том, что цифры применялись при вычислениях на счетной доске, покрытой пылью.

На рис. 1 приведена таблица, из которой видно, как постепенно изменялись цифры «губар», пока не приняли современной формы. Они использовались в Индии, в мавританских государствах, откуда перешли в Европу.

Десятичная позиционная система не сразу была принята в Европе. Первыми ее стали использовать итальянские купцы в XIII в. Но в официальных бумагах вплоть до XVIII в. разрешалось применять только римские цифры. Постепенно десятичная позиционная система, позволяющая записывать любое натуральное число с помощью десяти цифр 0, 1, 2, ..., 9, одержала решительную победу. Цифры, которые мы обычно называем «арабскими», стали использоваться повсеместно.

Знаменитый ученый XVIII в. Лаплас писал: «Мысль выражать все числа десятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по занимаемому месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно осознать, на-

Рис. 1. а) Цифры Индии, IX век; б) Цифры западных арабов, X век; в) Цифры Испании, 975 г.; г) Цифры Франции, XII век; д) Французские цифры XIII века; е) Готические цифры, около 1400 г.; ж) Цифры эпохи Возрождения, около 1500 г.; з) Современные цифры.

сколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этому методу, мы видим на примере величайших гениев греческой науки Архимеда и Аполония, от которых эта мысль оставалась скрытой».

В заключение рассмотрим двоичную систему счисления, которая возникла еще в доисторические времена на самых первоначальных ступенях развития человеческого общества. Еще недавно существовали племена, в языке которых были названия только двух чисел: «один» и «два».

В нашем столетии двоичная система широко используется в технике и науке. В ней имеются числительные: 0 и 1. Любое натуральное число записывается с помощью этих двух символов. Покажем, как это делается.

В десятичной системе всякое натуральное число N, где $10^n \leqslant N < 10^{n+1}$, записывается в виде

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1$$

с помощью степеней числа 10. В последнем слагаемом вместо 10^0 мы для краткости записали число 1. Коэффициенты a_k — это числа 0, 1, 2, ..., 9. Например,

$$17205 = 1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1.$$

Аналогично в двоичной системе число N, $2^n \leqslant N < 2^{n+1}$ записывается в виде

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 1,$$

$2^0 = 1$. Каждый коэффициент a_k принимает только два значения: 0 или 1. Приведем несколько примеров.

Число в десятичной системе		Запись в двоичной системе
1	$1 = 1 \cdot 1$	1
2	$2 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$	10
3	$3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	11
4	$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$	100
5	$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	101
6	$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$	110
7	$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	111
8	$8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$	1000

и т. д.

Кратковременный электрический ток называют импульсом. Наличие импульса в определенный момент означает единицу, а его отсутствие — означает нуль. Поэтому любое натуральное число, записанное в двоичной системе, можно выразить последовательностью импульсов. «Память» ЭВМ хранит программу, исходные данные, вычисления. Она разбита на ячейки. Элементы ячеек памяти могут находиться в одном из двух состояний (есть ток — нет тока, намагничено — не намагничено и т. д.). Одно из них интерпретируется как цифра 1, другое — как цифра 0. Проанализировав состояние всех элементов ячейки, можно прочитать помещенное в ней число. Меняя состояние элементов, заменяют одно число другим.

Таким образом, двоичная система лежит в основе работы современных электронных вычислительных машин.

3. Обыкновенные дроби

В своей практической деятельности человек постоянно использует обыкновенные дроби, т. е. рациональные числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n целые числа, $n \neq 0$.

Это понятие входило в математику постепенно в течение многих столетий. Столько же долгим был процесс отыскания правил арифметических операций с рациональными числами.

В египетской арифметике основной была операция сложения. Умножение на целое число и деление без остатка производилось с помощью удвоения, т. е. однократного сложения числа с самим собой.

Общим понятием дроби вида $\frac{m}{n}$ египтяне еще не владели. Они использовали так называемые аликвотные дроби, имеющие вид $\frac{1}{n}$, а также некоторые индивидуальные дроби: $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

В простейшем случае, когда делитель является степенью числа 2, египтяне использовали процесс «раздвоения».

Когда делитель не есть степень двух, не удается ограничиться раздвоением. Здесь уже требуется искусство вычислителя, чтобы подобрать подходящие аликвотные дроби.

Непосредственный подбор аликвотных дробей, составляющих результат, был очень трудным делом. В помощь вычислителю составлялись таблицы.

Историки науки — Б. Л. Ван-дер Варден, О. Нейгебауер, М. Я. Выгодский — выдвинули ряд гипотез, объясняющих правила, которыми пользовались ученые Древнего Египта при составлении таблицы. Но вопрос этот до сих пор окончательно не решен. Таблица, как молчаливый сфинкс, хранит секрет своего составителя.

Покажем на простейшем примере, как египетские математики производили деление с помощью таблицы.

Нужно разделить 37 на 17. Целую часть искомого числа находили с помощью операции удвоения: $17+17=34$, остаток 3.

$$3:17=(2+1):17=\frac{2}{17}+\frac{1}{17}$$

По таблице египтянин находил

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$

Окончательно получаем

$$37:17=2+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$

Все сказанное свидетельствует о том, что операция деления в Древнем Египте была очень сложной процедурой. Дроби в арифметике всех народов древности считались одним из самых запутанных разделов. Прошли столетия, прежде чем была создана система действия с дробями вида $\frac{m}{n}$, который мы сейчас пользуемся.

В Китае ко II в. до н. э., как это видно из «Математики в девяти книгах», удалось достаточно полно разработать все операции с обыкновенными дробями. Построенная система была близка к современной. Имелись лишь небольшие отличия Так, вместо наименьшего общего кратного знаменателей брали их произведение. Мы пишем $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$, а в Китае считали так:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6+4}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

В Древней Грузии уже к III в. до н. э. умели производить с дробями все действия арифметики. При сложении и вычитании находили общий знаменатель, дроби умели сокращать, умножать, делить.

Таким образом, уже к III в до н. э. в математике были созданы общие правила арифметических операций с рациональными числами. Но в практической деятельности человека операции с дробями еще в течение многих столетий вызывали большие трудности. Между тем дроби постоянно использовались в торговых расчетах.

Так, в итальянских городах XII в., а затем и в других европейских странах, развивалась оживленная торговля со странами Востока. Каждый торговый город заводил своего учителя арифметики. *Rechenmeister* (мастер счета) обучал работников торговых предприятий индоарабской десятичной позиционной системе и операциям с дробями.

Ректор Московского университета И. Г. Петровский любил рассказывать историю о купце, который хотел получить совет, где лучше обучить сына арифметике. Ему сказали: «Если хочешь научить его только складывать и умножать, учи его в Германии, если же делить,— то в Италии».

Дроби очень медленно просачивались в европейские учебники. В XVI в. голландский математик Симон Стевин писал о трудностях усвоения дробей, «при одном виде которых учащиеся приходят в такое уныние, что останавливаются и восклицают: ради бога не надо дальше».

В немецком языке фраза «*in die Bruche geraten*», которая переводится «попал в дроби», означает «попал в переделку».

Операции с рациональными числами окончательно утвердились в школьных учебниках лишь в XVIII в.

4. Шестидесятеричные и десятичные дроби.

В Древнем Вавилоне операции сложения и вычитания чисел не вызывали никаких затруднений. Правила умножения по существу совпадали с теми, которые мы используем сейчас. Но в то время, как нам приходится запоминать таблицу умножения до 9×9, вавилонянину нужно было знать произведения чисел до 59×59. Запомнить их было нелегко, и поэтому вычислители Вавилона постоянно обращались к специально составленным таблицам умножения.

Для того, чтобы производить операцию деления, были составлены таблицы обратных величин для чисел вида $\frac{1}{k}$, где k — натуральное число.

Деление $c=a:b$ вавилоняне свели к задаче $c=a\cdot\frac{1}{b}$, т. е. к умножению числа a на число, обратное к b, которое разыскивается с помощью таблицы.

Вспомним правила действий с десятичными дробями. Если число b имеет вид $2^k \cdot 5$, то $\frac{1}{b}$ — это конечная десятичная дробь. Например, $\frac{1}{8}=0{,}125$, $\frac{1}{25}=0{,}04$ и т. д.

В других случаях имеем бесконечную десятичную дробь. Например,

$$\frac{1}{3}=0{,}33...3...=0{,}(3).$$

Во всех практических расчетах мы используем не сами бесконечные десятичные дроби, а их приближенные значения.

Точно так же поступали в Вавилоне. Если число b имеет вид $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$, то дробь $\frac{1}{b}$ представляли шестидесятеричной дробью с конечным числом разрядов. В остальных случаях использовали приближенные значения.

Самые ранние и наиболее употребительные таблицы содержали обратные значения чисел, лежащих в интервале от 2 до 81 и имеющих вид $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$. В III в до н. э., когда в Вавилоне бурно развивалась астрономия, были составлены гораздо более обширные таблицы. Так, в одной из них приведены обратные значения для чисел $125 \cdot 2^n$, где $n=1, 2, ..., 29$.

В ранних таблицах против чисел b, не представимых в виде $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$, писали «обратного нет». В более поздних таблицах давались приближенные значения.

В Древнем Вавилоне были составлены таблицы для квадратов натуральных чисел, кубов и других степеней. Их использовали и для операции извлечения корней. Составлялись таблицы для вычисления степени 2^n, таблицы чисел n^3+n^2, применявшиеся для решения кубических уравнений, и многие другие. Постоянное использование различных таблиц — характерная особенность математики Древнего Вавилона.

Во II в. до н. э. древние греки познакомились с многовековыми астрономическими наблюдениями вавилонян, с их таблицами. Они переняли и вавилонскую шестидесятеричную систему счисления. С тех пор во всех вычислениях, связанных с астрономией, математики вплоть до XVI в. использовали шестидесятеричные дроби. Между тем в Индии была создана десятичная система счисления для работы с целыми числами. Ею активно пользовались ученые стран ислама, а затем математики Европы.

Как же в это время работали с дробями? Купцы, как мы видели, использовали обыкновенные дроби, которые назывались народными. Напротив, все астрономические вычисления проводились с помощью шестидесятеричных дробей. В вычислениях того времени, естественно, возникало много неудобств, так как счет натуральных чисел велся в десятичной системе, а дробей — в шестидесятеричной.

Правда, еще в III в. до н. э. в Китае пользовались десятичной системой мер, и в связи с этим там впервые появились десятичные дроби. С их помощью математики приближенно выражали иррациональности вида $\sqrt{n}$ и число π. Китайский математик III в. Лю Хуэй рекомендовал пользоваться дробями со знаменателями 10, 100 и т. д. при извлечении квадратных корней. Он имел в виду правило

$$\sqrt{a}=\frac{1}{10^n}\sqrt{a \cdot 10^{2n}},$$

которым впоследствии часто пользовались многие арабские и европейские математики. Именно это правило, наряду с некоторыми другими вычислительными приемами, во многом способствовало введению в науку десятичных дробей.

В XV в. полную теорию десятичных дробей разработал самаркандский астроном Джемшид ал-Каши в трактате «Ключ к арифметике» (1427). Он писал: «Астрономы применяют дроби, последовательными знаменателями которых являются число 60 и его степени: они называют их (доли) минутами, секундами, терциями, квартами и т. д. Мы ввели, по аналогии с правилом астрономов, дроби, в которых последовательными знаменателями являются число 10 и его степени. Мы называем степени (доли) десятыми, десятичными секундами, десятичными терциями, десятичными квартами и т. д.» Ал-Каши подробно излагает правила действий с десятичными дробями. С их помощью в «Трактате об окружности» он нашел 17 верных знаков числа π.

Возможно, что ал-Каши не знал о том, что десятичные дроби издавна применялись в Китае. Сам он считал их своим изобретением. Во всяком случае постоянное использование десятичных дробей и описание правил действий с ними это, несомненно, заслуга ал-Каши. Но его трактаты не были известны европейским ученым. Они самостоятельно разработали теорию десятичных дробей.

Мысль о том, что можно построить систему дробей, взяв за основу число 10, время от времени появлялась в учебниках арифметики, начиная с XII в. Об этом писали Иоанн Сельвинский и Иордан Неморарий.

Важнейший шаг вперед сделал французский ученый Франсуа Виет в сочинении «Математический канон», опубликованном в 1579 г. в Париже. В нем приведены таблицы синусов, тангенсов и секансов, при составлении которых использованы десятичные дроби. Виет понимал и подчеркивал их преимущества перед шестидесятеричными дробями. При записи десятичных дробей он не придерживался какого-либо одного способа: иногда отделял целую часть от дробной вертикальной чертой, иногда цифры целой части изображал жирным шрифтом или, наконец, цифры дробной части писал мельче.

Итак, в работе «Математический канон» впервые в Европе десятичные дроби были введены в тригонометрические таблицы, на основе которых проводили все свои расчеты астрономы. Но эта книга, как и всякое научное сочинение, имела ограниченное распространение. Благодаря Виету десятичные дроби стали проникать в научные расчеты, но не в повседневную практику.

С совершенно других позиций подошел к десятичным дробям Стевин. Он считал, что их нужно использовать во всех практических расчетах. В книге «Десятая», опубликованной в 1585 г., Стевин ввел десятичные дроби, разработал для них правила арифметических операций и одновременно предложил десятичную систему денежных единиц, мер и весов. Ему принадлежит выдающееся место в истории десятичных дробей.

Круг занятий Стевина (1548—1620) был необыкновенно широк. Уроженец города Брюгге (Бельгия), Стевин работал счетоводом и кассиром в Антверпене, был купцом, путешествовал по Европе и, наконец, поселился в Нидерландах. Учился в Лейденском университете и позднее преподавал в нем математику. Во время нидерландской революции был инженером в войсках возглавлявшего республику принца Морица Оранского и, кроме того, управлял финансовыми делами принца.

Симон Стевин получил ряд важных результатов в области гидростатики и гидравлики. В механике он указал способ изображения сил при помощи отрезков прямых, дал правило равновесия трех сходящихся сил в виде замкнутого треугольника. В области навигации предложил метод определения долготы при помощи склонения магнитной стрелки компаса. В математике ввел отрицательные корни уравнений. В 1605—1608 гг. вышло в свет пятитомное собрание сочинений Стевина.

Но наибольшую известность принесла Симону Стевину книга «Десятая», изданная в Лейдене. Интересно обращение к читателю, с которого она начинается: «Астрологам (астрономам), землемерам, мерильщикам обоев, проверщикам емкости бочек, стереометрам вообще, монетным мастерам и всему купечеству — Симона Стевина привет!».

Стевин пылко агитирует своих читателей за десятичные дроби. О своей книге он пишет так: «Она учит легко, без ломаных, выполнять все расчеты, встречающиеся в людских делах». Ломаными Стевин называл обыкновенные дроби. Он подчеркивал, что при использовании десятичных дробей «изживаются трудности, распри, ошибки, потери и прочие случайности, обычные спутники расчетов».

Символика десятичных дробей в то время еще не приобрела современный вид и была довольно громоздка. Например, число 5, 367 Стевин записывал так:

$$5\ 0\ 3\ 1\ 6\ 2\ 7\ 3$$

Видимо, это обозначение связано с таким представлением числа:

$$5{,}367=5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{0}+3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{1}+6\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2}+7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{3}.$$

«Десятая» была широко известна в Европе. Издав книгу в 1585 г. на фламандском языке, автор в том же году перевел ее на французский, а в 1601 она вышла на английском языке. Популяризация десятичных дробей является огромной заслугой Стевина перед наукой. Обычно он признается их изобретателем. Сам Стевин свою роль в открытии десятичных дробей характеризует так: «Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой клад, не применив при этом никакой учености! Такой именно случай имеет место здесь».

Десятичные дроби занимают выдающееся место в истории математической культуры. Их введение было одним из самых больших усовершенствований индийско-арабской системы счисления.

5. Арифметические задачи.

В папирусах Древнего Египта содержится большое число задач.

В папирусе Райнда имеется задача на арифметическую прогрессию. «Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет $\frac{1}{8}$ меры».

Перед нами арифметическая прогрессия, содержащая 10 членов, с разностью $\frac{1}{8}$ и суммой 10.

В папирусе найден десятый член прогрессии

$$a_{10}=1+9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}.$$

Как всегда, дан рецепт решения задачи без каких-либо объяснений.

Математики Вавилона знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

В текстах встречаются задачи, в которых отыскивается сумма членов геометрической прогрессии, например, сумма

$$1+2+2^2+\ldots+2^9.$$

В клинописных текстах встречаются первые задачи на проценты. В Древнем Вавилоне, стоявшем на перепутьи торговых караванов, рано появились денежные знаки и кредит. Начисляли обычно 12 на 60, т. е. пятую часть, или, говоря современным языком, 20 %.

Слово «проценты» появилось в Европе, когда итальянские ростовщики, использующие десятичную систему счисления, стали начислять рост долга на сто единиц кредита; procentum, означает «на сто». Скажем, начисляли 20 на 100, т. е. 20 %.

Большое число арифметических задач содержит «Книга абака» итальянского ученого Леонардо Пизанского (1180—1240). Его задачи вплоть до наших дней переходят из одного учебника в другой.

Леонардо, известный также под именем Фибоначчи (сын Боначчи) был первым ученым Западной Европы, освоившим все достижения математиков стран ислама и продвинувшимся дальше них. Он родился в Пизе, крупном торговом городе Италии того времени. Путешествуя по Египту, Сирии, Индии, Сицилии, везде знакомился с правилами счета.

Под словом «абак» Леонардо подразумевает не счетную доску, а арифметику вообще. Его книга учит производить операции с целыми числами и с обыкновенными дробями. В ней изложены приемы решения задач коммерческой арифметики, задач на сплавы. Вот одна из задач.

30 птиц стоят вместе 30 монет. Куропатки — по 3 монеты, голуби — по две монеты, а воробьи — по монете за пару птиц. Решение, разумеется, разыскивается в целых положительных числах. Леонардо приводит единственное решение такого вида: 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья. 0,10,20 6,0,24

В «Книге абака» впервые появились задачи о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие некоторого данного. Леонардо так формулирует задачу: выбрать пять гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз до 30 кг при условии, что гири ставятся на одну чашку весов.

Обратим внимание на то, что решение задачи связано с двоичной системой счисления. Пусть выбранные гири имеют вес p_0, p_1, p_2, p_3, p_4. $N \leqslant 30$— натуральное число. Его нужно представить в виде

$$N = a_4p_4 + a_3p_3 + a_2p_2 + a_1p_1 + a_0p_0,$$

где коэффициенты a_k принимают два значения: 1 или 0. Если гиря p_k ставится на чашку весов, то $a_k = 1$, если гиря p_k не участвует в операции взвешивания, то $a_k = 0$.

Пусть

$$p_4 = 2^4,\ p_3 = 2^3,\ p_2 = 2^2,\ p_1 = 2,\ p_0 = 1.$$

Сумма $1+2+4+8+16=31>30$. Любое число $N \leqslant 31$ может быть записано в двоичной системе в виде

$$N = a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 1$$

Это значит, что всякий груз $N \leqslant 31$ можно взвесить с помощью гирь весом 16, 8, 4, 2, 1 кг.

Пример. $N = 22$

$$22 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

В двоичной системе имеем запись 10110. Значит, нужно взять гири весом 16, 4, 2 кг.

В «Книге абака» впервые встречается так называемый «ряд Фибоначчи», названный так по имени его изобретателя Леонардо Пизанского. Члены ряда находятся по формуле:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad u_1 = u_2 = 1.$$

Он появился при решении следующей задачи. Спрашивается, сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре. Каждая новая пара через месяц способна к размножению. Ответ Леонардо дал в виде суммы

$$1+1+2+3+5+\ldots+144=376.$$

Л. Эйлер

В учебной литературе арифметические задачи всегда занимали большое место. Для тренировки учащихся их часто давали в занимательной форме.

Математик и педагог Л. Ф. Магницкий (1669—1739) в книге «Арифметика, сиречь наука числительная» (1703 г.) собрал большое число задач. Леонтий Филиппович родился в Тверской губернии, окончил Славяно-греко-латинскую академию. С 1701 г. работал в Школе математических и навигацких наук, которая была организована в Москве по указу Петра I. «Арифметика» Магницкого широко использовалась в учебных заведениях России в течение полувека. По ней учился М. В. Ломоносов. Он назвал ее «вратами своей учености».

В 1725 г. в Петербурге открылись Академия наук с университетом и гимназией. Молодой швейцарец Леонард Эйлер (1707—1783) был приглашен в Россию. Став впоследствии крупнейшим математиком, он написал большое число учебников, в том числе «Руководство к арифметике» (1740) и «Универсальную арифметику» (1769). Они стали основой для большинства последующих учебников.

Задачи, содержащиеся в рукописях, опубликованных в России до 1800 г., собраны в книге [21].

В заключение остановимся на происхождении математических терминов, связанных с арифметикой.

Название науки происходит от греческого «арифмос» — число. В русский язык это слово вошло в XVI в., когда математические рукописи назывались обычно так: «Книга, рекома по-гречески арифметика, а по-русски цифирная счетная мудрость».

Термин «плюс» произошел от слова «*plus*» — больше. Первое употребление слова «*plus*» как обозначения действия встречается в итальянской алгебре XIV в. Затем стали писать одну букву p для обозначения плюса (и одну букву m для обозначения минуса).

Современные $+$ и $-$ появились впервые в книге Видмана «Быстрый и красивый счет для всего купечества» (1489). Ян Видман, уроженец чешского города Хеба, преподавал в Лейпцигском университете. Знак $+$ происходит, возможно, от сокращенной записи слова *et*, т. е. «и». Быть может, он возник в торговой практике. Проданные меры вина отмечались на бочке черточкой —, а при восстановлении запаса их перечеркивали. Так получался знак $+$.

В книге Видмана впервые использовался термин «разность» (*differentia*) как результат вычитания. Термин «уменьшаемое», «вычитаемое» появилсь в «Математическом словаре» Вольфа (1716). Христиан Вольф (1679—1754) — немецкий математик, философ, физик и психолог — сыграл большую роль в организации Петербургской Академии наук. Он указывал, что будущие академики должны не только развивать науку, но и готовить молодых людей к научной и педагогической деятельности. Вольф принял на себя все хлопоты по устройству в Марбурге, где он преподавал в университете, русских студентов Ломоносова, Виноградова и Райзера, посланных за границу для обучения.

Б. Кавальери

Термины «деление», «делимое», «делитель» появились впервые в конце X в. в книге «О делении чисел» французского ученого монаха Герберта, который впоследствии был римским папой под именем Сильвестра II. Слово «частное» впервые встречается в «Книге абака» Леонардо Пизанского. У него же впервые используется горизонтальная черта как знак деления.

На языках многих народов дробь называется «ломаным или раздробленным числом». Этот термин использовали арабы, через Леонардо Пизанского он вошел в европейскую арифметику Латинское *fractura* произведено от *frango* —«разбивать», «ломать». Термин «обыкновенная дробь» (*fractura vulgaris*) появился у Траншана в 1558 г. для обозначения дроби вида $\frac{m}{n}$ в отличие от шестидесятеричных дробей. Обращение обыкновенных дробей в десятичные и обратно рассматривал Кавальери в 1643 г. Он впервые в Европе стал заниматься периодическими дробями.

Бонавентура Кавальери (1598—1647) – знаменитый итальянский математик. Родился в знатной. но обедневшей семье В 15 лет вступил в монашеский орден. Ь то время такой путь

был единственной возможностью получить образование и заниматься наукой для тех, кто не имел собственных средств. Обремененный разными монастырскими делами, Кавальери занимался наукой только в свободные часы. В 1629 г. он был избран профессором кафедры математики Болонского университета, где работал до конца жизни.

Знак «$=$» впервые ввел в 1557 г. английский врач и математик Рекорд, который писал: «Нет ничего более равного, чем две параллельные прямые». Знак приближенного равенства $\approx$ ввел немецкий математик Гюнтер в 1882 г.

Подробные сведения о математических терминах читатель найдет в книге [1].

Мне приходится делить свое время
между политикой и уравнениями.
Однако уравнения, по-моему, гораздо
важнее, потому что политика существует
только для данного момента, а уравнения
будут существовать вечно.

А. ЭЙНШТЕЙН

СТАНОВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ.

1. Линейные и квадратные уравнения.

Среди сотни задач, содержащихся в египетских папирусах, подавляющее большинство связано с повседневной жизнью и относится к распределению хлеба, зерна, скота, к измерению полей. Многие из них решены методами арифметики. Однако имеются задачи, в которых по-существу решались линейные и квадратные уравнения.

В современной записи они выглядят так

$$x+ax+b, \text{ или } x+ax+bx=c.$$

Откуда

$$x=\frac{b}{1+a}, \text{ или } x=\frac{c}{1+a+b}.$$

Буквенные обозначения, которые мы используем, вошли в математику лишь в Европе XVI века. До этого времени ученые всех стран и народов в течении многих столетий решали уравнения с числовыми коэффициентами, т. е. вместо букв a, b, c уравнения содержали какие-либо числа.

Неизвестную величину x египтяне обозначали словом «аха», т. е. «куча», «груда», «величина».

Задача № 26 папируса Райнда: «Количество и его четвертая часть дают вместе 15». Мы бы записали

$$x+\frac{x}{4}=15, \quad \frac{5}{4}x=15, \quad x=\frac{15\cdot 4}{5}=12$$

В папирусе дан рецепт решения. «Считай с 4, возьми четверть, получишь 1, вместе 5». Затем проведены вычисления:

$$15:5=3, \quad 4\cdot 3=12.$$

Искомое число равно 12.

Ясно, что в основе решения лежит идея пропорциональной зависимости, которая в древности была широко распространена. Этот метод в средневековой Европе назван «методом ложного положения».

В задаче нужно найти x. Египтянин берет «ложное положение» $x_1=4$. Он получает $p_1=5$, а по условию $p=15$. Имеем пропорцию

$$\frac{x}{x_1}=\frac{p}{p_1}, \quad \frac{x}{x_1}=\frac{15}{5}, \quad x=3x_1, \quad x=3\cdot 4=12.$$

Приведем еще один пример. «Количество, его $\frac{2}{3}$, его $\frac{1}{2}$ и его $\frac{1}{7}$, сложенные вместе, дают 33. Каково это количество?»

Ответ $14\frac{28}{97}$ египетский писец записал в аликвотных дробях в виде

$$14+\frac{1}{4}+\frac{1}{97}+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}.$$

С помощью метода ложного положения египтяне решали также задачи, сводящиеся к двучленному квадратному уравнению вида

$$ax^2=b.$$

Задача № 6 Московского папируса. «3/4 длины являются шириной, а площадь 12». Требуется найти стороны поля, имеющего форму прямоугольника. В наших обозначениях получаем

$$\frac{3}{4}x^2=12, \quad x^2=16, \quad x=4,$$

где x — длина поля.

В папирусе дан такой рецепт решения:

$$1:\frac{3}{4}=1\frac{1}{3}, \quad 12\cdot 1\frac{1}{3}=16, \quad \sqrt{16}=4.$$

Вероятно, писец рассуждал так. Возьмем ложное положение длины $x_1=1$. Тогда площадь p_1 равна 3/4. По условию, площадь $p=12$. Составляется пропорция

$$\frac{x^2}{x_1^2}=\frac{p}{p_1}, \quad \frac{x^2}{1}=\frac{12}{\frac{3}{4}}, \quad x^2=16, \quad x=4.$$

Итак, в египетских текстах мы находим зачатки алгебры как науки о решении уравнений.

Ученые Древнего Вавилона сделали огромный шаг вперед по сравнению с математиками Египта. Они нашли правило для решения любого квадратного уравнения.

В вавилонских табличках содержится большое число задач, которые приводят к линейным, квадратным и кубическим уравнениям, а также к системам уравнений. Все задачи формулируются словесно, без символических обозначений. Решение представлено как последовательность правил, которые нужно выполнить, чтобы получить результат.

Вавилоняне использовали геометрический язык. Одно неизвестное они называли «длиной» (мы будем обозначать его x), другое — «шириной» y. Их произведение называли площадью. При этом длина всегда была больше ширины. Третье неизвестное называли «глубиной» (мы будем обозначать его z). Произведение всех трех неизвестных xyz называлось объемом.

Но, применяя эту геометрическую терминологию, вавилоняне в то же время обращались с неизвестными как с отвлеченными числами. Так, они могли записать $xy+y$, т. е. сложить площадь и ширину. Использовались и такие отвлеченные понятия как $\frac{1}{x}$, x^4, которые не имели геометрической интерпретации.

Решение квадратного уравнения в вавилонской математике давалось в виде правила, которое указывало, какие действия и в какой последовательности нужно произвести. Покажем, что, если это правило перевести на современный язык, то получится формула для решения квадратного уравнения, которой мы пользуемся.

Приведем пример. Нужно решить уравнение

$$x^2-x=870,$$

т. е. уравнение вида $x^2+px+q=0$, которое мы решаем по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

В примере $p=-1$, $q=-870$.

В Вавилоне писали так: «Я вычел из площади сторону моего квадрата. Получил < ∇ ∇ ∇ ∇ < < < ». Последнюю запись легко понять, если учесть, что число 870 представляется в виде

$$870=1\cdot 600+4\cdot 60+3\cdot 10.$$

Поясним приведенный в вавилонской таблице рецепт решения уравнения $x^2-x=870$. Числа будем записывать в десятичной системе.

Текст вавилонской таблицы	Его перевод на современный язык
Ты берешь единицу,	$-p$
делишь ее на два	$-\frac{p}{2}$
Возводишь в квадрат	$\frac{p^2}{4}$
Прибавляешь 870	$\frac{p^2}{4}-q$
Извлекаешь квадратный корень	$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
Складываешь с 1/2	$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
Корень уравнения равен 30	

Для вавилонян корень уравнения — это положительное число. Отрицательных чисел они не знали. В клинописных текстах обнаружены только такие уравнения, у которых один корень положительный (его отыскивали), а второй корень отрицательный (его не рассматривали).

Вавилоняне решали задачи на системы, сводящиеся к квадратным уравнениям:

$$\begin{cases} x\pm y=a \\ xy=b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=a \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

Пример, взятый из глиняной таблички: «Площадь, состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет 2/3 стороны другого квадрата, уменьшенные на 10. Каковы стороны квадратов?».

В современной записи получаем систему $\begin{cases} x^2+y^2=1000 \\ y=\frac{2}{3}x-10, \end{cases}$

которая сводится к квадратному уравнению

$$\frac{13}{9}x^2-\frac{40}{3}x-900=0,$$

имеющему положительный корень 30.

Правило для решения квадратного уравнения вавилоняне нашли, по-видимому, с помощью дополнения левой части до полного квадрата.

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right);$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Отсюда они получили $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Следовательно, в Древнем Вавилоне было известно правило для возведения в квадрат суммы $a+b$:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Анализируя клинописные тексты, можно предположить, что в Вавилоне знали также тождество

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

В текстах Вавилона содержатся сложные системы, требующие искусного владения алгебраическими преобразованиями. Таковы системы

$$\begin{cases} xy+(x-y)(x+y)=a \\ x+y=b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=b \end{cases}$$

Вавилоняне решали задачи, которые сводились к кубическим уравнениям вида $x^3=a$ и $x^3+x^2=a$. При этом они использовали таблицы чисел n^3 и n^3+n^2.

В текстах имеется задача, сводящаяся к системе

$$\begin{cases} xyz+xy=1\frac{1}{6} \\ y=\frac{2}{3}x, \quad z=12x \end{cases}$$

Она приводит к кубическому уравнению $(12x)^3+(12x)^2=252$. По таблице чисел вида n^3+n^2 находили $12x=6$;

ответ: $x=\frac{1}{2}$.

В глиняных табличках встречаются системы, решение которых эквивалентно решению уравнению шестой степени, но квадратного относительно x^3. Обнаружено даже уравнение восьмой степени, квадратное относительно x^4.

Таким образом, в Древнем Вавилоне ученые достигли больших успехов в решении алгебраических уравнений. Математическое мышление поднялось на новый, более высокий уровень абстракции.

Как вошли в математику трехчленные квадратные уравнения?

Они возникли из так называемых «обратных» задач, поставленных чисто теоретически, вне связи с повседневной практикой измерения полей.

Действительно, если известны стороны поля x и y, можно найти его площадь xy и полупериметр $x+y$. Для решения этих задач достаточно сделать арифметические подсчеты.

Обратная задача ставилась так: даны полупериметр a и площадь b; найти стороны поля. Очевидно, что эта задача не

возникала при практическом измерении полей. Она записывается на современном языке в виде системы $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b, \end{cases}$

которая сводится к квадратному уравнению.

Таким образом, квадратные уравнения вошли в математику как результат внутреннего развития науки, из обращения задач, поставленных практикой. Эта была замечательная победа абстрагирующей математической мысли.

2. Системы линейных уравнений.

Значительные результаты в развитии алгебры получили математики Древнего Китая. Они нашли общий метод решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. Регулярный алгоритм, разработанный китайскими учеными, по существу совпадает с методом Гаусса, которым мы сейчас пользуемся.

Китайское правило носило название «фан — чэн», что буквально означало выстраивание чисел по клеткам. Систему уравнений записывали с помощью таблицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и из свободных членов. В Европе такие таблицы были введены в математику для решения систем линейных уравнений лишь в XIX в. Их называют матрицами.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Китайский ученый прежде всего освобождался от дробей, а затем приводил систему к следующему «каноническому» виду

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где все коэффициенты — целые числа. Справа приведена таблица, которая соответствует данному уравнению.

Путем исключения неизвестных система (1) приводится к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a'_{22}y+a'_{23}z=b'_2 \\ a'_{33}z=b'_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & a'_{22} & a_{12} \\ a'_{33} & a'_{23} & a_{13} \\ b'_3 & b'_2 & b_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Первое уравнение остается неизменным, второе содержит только y и z, а третье уравнение содержит одну неизвестную величину z. Находим z, затем из второго уравнения y и из первого уравнения x.

Китайский математик работал с таблицами матрицами.

Задача из древнекитайского трактата. Два человека A и B получили некоторое число монет Если к монетам человека

A добавить половину монет B или к монетам, имеющимся у B, добавить 2/3 монет A, то в обоих случаях получится 48.

Пусть A имеет x монет, B — y монет. Получаем систему

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=48 \\ \frac{2}{3}x+y=48 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y=96 \\ 2x+3y=144 \end{cases} \qquad (3)$$

В трактате дается правило: «Установи в правом столбце 2 для A, 1 для B и 96 монет; установи в левом столбце 2 для A, 3 для B и 144 монеты». Получаем таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 144 & 96 \end{pmatrix}.$$

Из системы (3) мы легко находим $\begin{cases} 2x+y=96 \\ 2y=48 \end{cases}$

В Китае поступали так: из первого столбца таблицы вычитали второй, в результате получали таблицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 48 & 96 \end{pmatrix}$$

откуда находили $2y=48$, $y=24$, $x=\frac{96-24}{2}=36$.

Преобразования таблицы к треугольному виду во многих случаях приводили к необходимости вычитать из меньшего числа большее. Благодаря методу фан — чэн китайские ученые пришли к отрицательным числам.

Рассмотрим систему линейных уравнений и соответствующую таблицу

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ 2x+8z=2 \end{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исключая x из третьего уравнения, приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ -y+8z=1 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Справа расположена таблица, которую получили китайские ученые.

Все операции они проводили на счетной доске с помощью счетных палочек. Отрицательные числа выделялись палочками другого цвета или другой формы. Их называли словом «фу», в то время как для положительных чисел использовалось слово «чжэн». Числа «фу» толковались как долг, недостача.

Введение отрицательных чисел — одно из важнейших достижений математики Китая. Были сформулированы в общем виде правила для операций сложения и вычитания

$$a+(-b)=a-b$$
$$a-(-b)=a+b$$
$$-a+(-b)=-(a+b)$$

и т. д.

Но правила умножения

$$a(-b)=-ab, \qquad (-a)(-b)=ab$$

не были явно сформулированы. Анализ древних текстов показывает, что, решая конкретные задачи, китайские ученые умели производить все арифметические операции с отрицательными числами, включая умножение и деление.

Так, решая систему

$$\begin{cases} 5x-y=7 \\ 10x-5y=5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

китайский ученый приводил ее к виду

$$\begin{matrix} 5x-y=7 \\ -3y=-9 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix},$$

а затем находил

$$y=\frac{-9}{-3}=3, \qquad x=\frac{10}{5}=2.$$

Китайская математика в основном развивалась как совокупность вычислительных приемов для решения арифметических и алгебраических задач. Она не была изолирована от развития науки в других странах. Через Индию и страны ислама результаты, полученные в Китае, проникали в страны Европы. Однако многие факты, известные в Древнем Китае, попали в Европу настолько поздно, что европейские ученые к тому времени самостоятельно пришли к этим результатам.

В заключение отметим, что в математике Древнего Востока не встречаются попытки доказать какие-либо утверждения. Все тексты содержат лишь условие задачи и правила решения, изложенные в виде рецептов: «делай то-то».

Догматический характер изложения не был просто педагогическим приемом. Он отражал авторитарный склад мышления, господствующий в деспотических государствах Древнего Востока.

Математика развивалась очень медленно. Новые открытия были редким явлением. Одни и те же знания передавались из поколения в поколение в течение многих столетий.

Этот процесс застоя в математике был прерван благодаря возникновению новой цивилизации. В VI в. до н. э. в Древней Греции родилась математика как точная наука, основанная на строгих доказательствах.

3. Создание дедуктивной науки.

На заре XIII в. до н. э. образовались полисы — автономные самоуправляющиеся города, из которых состояла Греция. К VI в. до н. э. главным городом был Милет, а несколько позже Спарта и Афины.

В V в. до н. э. на греческие города-государства обрушился страшный враг — персы. «Неисчислимые, необозримые слала Азия полчищ тучи против Эллады»,— писал Эсхил. Объединившись, греки выступили против персов и одержали победы — в 490 г. при Марафоне и через десятилетие в 480 г. при Саламине. Последняя битва решила исход войны. Греки победили благодаря возникшему у них демократическому строю. Свободные граждане Эллады одержали верх над несметными полчищами рабов персидского царя.

Афины, стоящие во главе объединившихся сил Греции, сделались центром культурной и научной жизни, к которому тяготели ученые всех стран. Конец V в. до н. э.— начало IV в. до н. э.— золотой век Афин. Сюда стекались ученые со всех сторон античного мира. В Афинах и других городах Эллады еще не было учреждений, подобных современным академиям и университетам. Молодые люди, желающие пополнить свои знания, собирались вокруг знаменитого ученого. Преподавание велось устно. Книга в то время была большой редкостью и стоила очень дорого.

В Афинах жил выдающийся философ Сократ, была создана знаменитая Академия Платона, а позже Лицей Аристотеля — прообраз будущих университетов, где впервые читались систематические лекции. Согласно легенде Платон принимал в свою школу только тех, кто знал математику. Учеников встречала надпись: «Пусть не входит сюда не знающий геометрии».

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского. Его отец Филлип в 337 г. до н. э. разбил объединенные силы греческих городов. Александр начал завоевание Востока. В 332—323 гг. он покорил Египет, Вавилон, Персию, среднеазиатские государства Согдиану и Бактрию, а также часть Индии до Инда.

Во всех покоренных странах греческий язык стал государственным, на нем же развивалась наука. Греческая культура и наука сплавляются с культурой покоренных народов. Создается так называемая эллинистическая культура.

После смерти Александра Македонского его империя распалась на несколько больших областей, которыми руководили полководцы Александра. Важнейшими из этих государств было царство Птолемеев в Египте и Селевкидов в Азии.

Столица Птолемеев Александрия, основанная Александром Македонским в 331 г. до н. э., вскоре стала торговым, культурным и научным центром всего древнего мира.

Смерть царицы Клеопатры в 30 г до н. э. положила конец блестящей цивилизации эллинов: Египет полностью перешел под контроль римлян. Еще в 146 г. до н. э. они завоевали материковую Грецию. Страна была превращена в пустыню, от цветущих городов остались одни развалины. В 86 г. до н. э. римляне взяли Афины. На три дня город был отдан на разграбление солдатам. Эллинистические государства одно за другим теряли свою независимость и становились провинциями Римской империи. Александрия осталась хранительницей греческой традиции вплоть до своего падения под натиском мусульман в 640 г.

Таким образом, развитие античной математики протекало в период от VI в. до н. э. до VI в. н. э. В VI в. до н. э. родилась теоретическая наука, стремящаяся к знанию ради самого знания, а не только ради его непосредственных практических приложений.

Самые важные результаты получены в III в. до н. э., в эпоху эллинизма, когда жили и работали такие гении как Евклид, Архимед и Аполлоний. Развитие античной науки представляло собой единый процесс. По аналогии с развитием живого организма раннюю греческую науку можно назвать юностью, эллинистическую науку — зрелостью, а науку Римской империи — старостью античной науки.

Начнем с описания детства античной науки, которое относится к VI в. до н. э. В это время в большинстве греческих государств — полисов происходят восстания, в результате которых господство рабовладельческой аристократии сменяется правлением народа — демократией, тоже, конечно, рабовладельческой. В античном обществе в управлении государством могли принимать участие только свободные граждане и только мужчины. Из общественной жизни исключались также уроженцы других областей, т. е. демократия носила ограниченный характер.

Но даже такая ограниченная демократия привела к расцвету греческой науки и культуры. «Мы не рабы и неподвластны никому»,— говорили греки. Свободные граждане активно участвовали в политической жизни, в выборах законодательных государственных органов, в судах присяжных, в диспутах многочисленных политических партий.

На первое место была выдвинута идея о необходимости доказательства своих утверждений. Греки считали: «Властвовать друг над другом путем насилия свойственно диким зверям, а люди должны законом определить справедливое, словом убедить, делом повиноваться тому и другому, закон должен быть царем, слово — наставником».

В этой атмосфере стремления к доказательствам, к логическим рассуждениям и родилась новая математика, которая ставила не только вопрос Древнего Востока «как?», но и современный вопрос «почему?». Как писал Аристотель, доказательство выявляет сущность вещей, оно устанавливает связи между отдельными утверждениями.

Греки вели торговлю с Двуречьем, Египтом и другими странами. Купец-путешественник был независимым человеком. Он знал, что добывает свою свободу и состояние собственным трудом, и поэтому не разделял устоявшиеся воззрения Востока — не признавал власти абсолютного монарха и верховного божества.

Прокладывая торговые пути, греческие купцы знакомились с восточной математикой. Они сразу же увидели, что она не занимается теорией. Почему в равнобедренном треугольнике углы при основании равны? Почему верны сформулированные на Востоке правила для вычисления площадей геометрических фигур?

Фалес — купец, политический деятель, астроном, математик, живший в Милете, первый доказал ряд геометрических теорем. Его называют «отцом греческой науки».

К сожалению, до нас не дошли работы Фалеса и другие первоисточники, относящиеся к раннему периоду развития греческой математики, когда создавались первые математические доказательства. Мы можем судить о том времени только по отдельным отрывкам, сохранившимся в более поздних сочинениях.

Вообще непосредственно с времен античности до нас дошли лишь несколько фрагментов александрийских папирусов. Математические тексты Древней Греции в течение многих столетий многократно переписывались. При этом, естественно, возникали искажения. Тексты комментировались, переводились на арабский, а затем на латинский языки. Трудами ученых — филологов и математиков — удалось восстановить тексты, относящиеся еще к четвертому столетию до н. э. Благодаря этому, мы имеем надежные издания Евклида, Архимеда, Аполлония, Герона, Птолемея, Диофанта и других великих математиков античности.

В списке величайших математиков древности и наших дней на первом месте, безусловно, должен стоять Пифагор. Именно он осуществил коренное преобразование математики, превратил

ее из набора полезных правил в абстрактную дедуктивную науку.

Математик Прокл, живший в V в. нашей эры, в комментариях к «Началам Евклида писал: «Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений». К сожалению, до нас не дошли не только сами сочинения Пифагора, но даже их переложения другими авторами.

Пифагор

О жизни Пифагора сохранились самые отрывочные сведения. Он родился около 570 г. до н. э. на богатом греческом острове Самос. Будучи юношей, стремящимся к знаниям, Пифагор покинул родной остров. Он побывал во всех эллинских и многих чужеземных странах, учился у знаменитых ученых и восторгался чудесами Востока.

Еще при жизни Пифагора о нем распространялись легенды. Говорили, что Пифагор умел исцелять больных. Дикие звери позволяли ему гладить их, а реки приветствовали его человеческими голосами.

Когда Пифагор вернулся на остров Самос, там правил Поликрат. Его тирания была настолько сильна, что, как пишет античный историк, «свободный человек не мог с достоинством переносить произвол и деспотизм». Пифагор переехал в Кротон — город в Южной Италии. Там он основал знаменитый пифагорейский союз, который ставил перед собой не только научные, но и религиозно-этические и политические цели. Деятельность союза была тайной. Доступ в него был открыт не для всех. Своими открытиями нельзя было делиться с теми, кто в союз не входил.

В начале V в. до н. э. после неудачного выступления на политической арене пифагорейцы были изгнаны из городов Южной Италии, их союз распался. Но и после этого многие замечательные ученые античности называли себя пифагорейцами. Отделить творчество самого Пифагора от результатов его учеников сейчас невозможно. Поэтому мы будем просто говорить о математике пифагорейцев.

Они называли свою систему знаний «математа», т. е. «наука», «учение». Пифагорейцы различали четыре области науки: учение о числах (арифметику), фигурах и измерениях (геометрию), астрономию и учение о гармонии (теорию музыки).

Число для пифагорейцев — главный объект математики. Они рассматривали его как собрание единиц, т. е. изучали только целые положительные числа. С их помощью пифагорейцы хотели объяснить весь мир, окружающий человека, устройство вселенной. Утверждение «все есть число» принадлежит, по-видимому, самому Пифагору и было основой его учения.

Единицы, из которых состоят целые положительные числа, считались неделимыми и изображались в виде точек. Пифагорейцы рассматривали «треугольные» числа (рис. 2)

$$1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10, \ldots$$

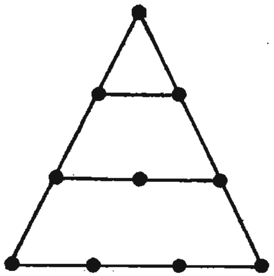

Рис. 2

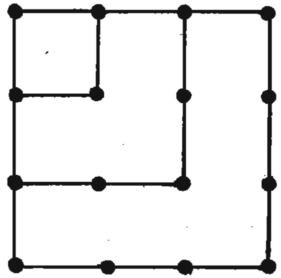

Рис. 3

Общее выражение этих чисел

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

На рис. 3 изображены «квадратные» числа

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+5=9, \ldots$$

Общее выражение этих чисел

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

И в наши дни используется пифагорейский термин «квадрат» для чисел n^2.

Определяли пифагорейцы и «кубические» числа

$$1,\ 8,\ 27, \ldots,$$

откуда наше выражение «куб» для n^3.

Главным достижением пифагорейской школы было построение теории делимости. Они разбили все натуральные числа на четные и нечетные, на простые и составные. Пифагорейцы сформулировали теорему: произведение двух чисел делится на 2 тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на 2. Отсюда следует, что любое четное натуральное число N можно однозначно представить в виде $N=2^k N_1$, где N_1— нечетно, k — целое неотрицательное число.

Пифагорейцы поставили задачу о нахождении совершенных чисел, т. е. таких, которые равны сумме своих делителей (исключая само число). Например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$.

Пифагорейцы связывали с числами мистические утверждения. У них, например, существовала «клятва числом 36». Ему приписывались особые свойства в связи с выполнением соотношений

$$36=1^3+2^3+3^3; \quad 36=(2+4+6+8)+(1+3+5+7).$$

Таким же особенным представлялось пифагорейцам число 10, потому что имеет место равенство

$$10=1+2+3+4.$$

Единицу считали матерью всех чисел, число 2 выражало линию, 3— треугольник, 4— пирамиду. Это рассуждение античных ученых связывало арифметику с геометрией. Единицу можно было трактовать как точку, число 2— это линия, т. е. одномерный образ, треугольник задает плоскость, а число 4— трехмерный образ.

Пифагорейцы так глубоко верили в чудесные свойства числа 10, что придумали новую планету, назвав ее Противоземлие. Дело в том, что в то время насчитывали 9 небесных сфер (неба, Солнца, Луны, Земли, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна). Пифагорейцы считали, что есть еще десятая сфера, и по ней вращается Противоземлие.

Подобные мистические спекуляции с числами были распространены и среди ученых других стран. Они вообще характерны для ранних стадий развития науки.

4. Геометрическая алгебра.

Исследуя множество натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ древние греки первыми осознали мысль о бесконечности объектов, изучаемых математикой.

Они умели производить арифметические операции с рациональными числами $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

Поворотным пунктом в развитии античной математики было открытие несоизмеримых отрезков, или, говоря другими словами, открытие иррациональности.

Пусть имеется прямоугольный треугольник. Длины его катетов равны x и y, длина гипотенузы равна z. Пифагор доказал теорему:

$$x^2+y^2=z^2.$$

Согласно легенде в знак благодарности он принес богам в жертву сто быков.

Тройки чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$ называют сейчас «пифагоровыми», хотя некоторые из них были известны еще в Древнем Египте и Вавилоне. Там знали тройки

$$(3,\ 4,\ 5), \quad (5,\ 12,\ 13), \quad (7,\ 24,\ 25).$$

Пифагор или кто-нибудь из его учеников нашли формулы для отыскания бесконечного множества таких троек

3 1—1183

$$x=\frac{1}{2}(m^2-1),\ y=m,\ z=\frac{1}{2}(m^2+1),$$

где m — натуральное нечетное число. Если взять для m значения 3, 5, 7, то получатся те тройки, которые были известны до Пифагора.

Теорема Пифагора привела математиков к открытию несоизмеримых отрезков.

Пусть дан квадрат со стороной, длина которой равна единице. Обозначим через a длину диагонали квадрата (рис. 4).

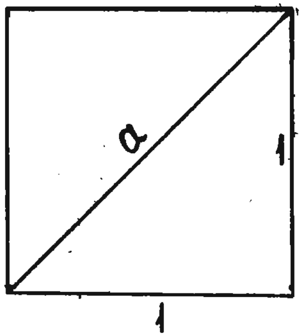

Рис. 4

По теореме Пифагора получаем

$$1^2+1^2=a^2,\ a^2=2.$$

Пифагорейцы, используя построенную ими теорию делимости чисел, доказали следующую теорему: не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

Доказательство проводилось методом от противного. Пусть такое число $\frac{m}{n}$ существует, причем $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, т. е. числа m и n не имеют общих множителей.

Получаем равенство

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2, \text{ или } m^2=2n^2.$$

Число $2n^2$— четное, значит, m^2 тоже четное. Число m^2 можно представить в виде $m\cdot m$, а по теореме, доказанной пифагорейцами, если число делится на 2, то по крайней мере один из его сомножителей делится на 2.

Итак, $m=2k$. Из равенства $m^2=2n^2$ получаем $4k^2=2n^2$, или $n^2=2k^2$.

Следовательно, n — делится на 2.

Итак, доказано, что m и n — четные числа. Значит, дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит условию. Следовательно, не существует числа $\frac{m}{n}$ такого, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$.

Из теоремы немедленно вытекает утверждение: длина диагонали квадрата a не выражается никаким рациональным числом. Говоря современным языком, a — иррациональное число.

Но древние греки знали только рациональные числа. Поэтому они получили совершенно парадоксальное утверждение: длину диагонали квадрата нельзя измерить никаким числом.

Мы знаем, что $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ и греки могли найти это приближение. Но их оно не интересовало. Им нужно было точное значение числа a, как говорил Платон «диагональ в своей сущности».

Еще раз подчеркнем принципиальное различие подходов к математике у народов Древнего Востока и в античной Греции. Ученые Востока на первый план выдвигали арифметические операции с числами. Они постоянно совершенствовали вычислительную технику и без каких-либо объяснений использовали приближенные значения чисел. Так, они записывали 1,41 вместо $\sqrt{2}$, 3 вместо числа π, 0,14 вместо 1/7. Мы привели десятичную запись числа 1/7 для краткости, вавилоняне пользовались такими же приближениями в своей шестидесятеричной системе.

Греческие ученые все вычислительные приемы, связанные с практическими задачами, объединили в особую область, которую назвали логистикой. Это была практическая арифметика. Ее преподавали в школах сыновьям свободных граждан. Одновременно детей учили считать на абаке, производить арифметические операции с дробями, а затем применять полученные знания к землемерию и другим практическим задачам повседневной жизни.

Иначе относились пифагорейцы к теоретической математике. По их мнению ее нужно было строить как строгую дедуктивную теорию.

Начав построение своего учения, создав теорию делимости и открыв теорему Пифагора, греки пришли к парадоксальному результату о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Они считали, что это утверждение противоречит всей измерительной практике. Естественно было думать, что, выбрав единицу длины, можно с ее помощью измерить любой отрезок.

Открытие несоизмеримости можно сравнить с открытием Коперника, которое также противоречит повседневным наблюдениям восходов и заходов Солнца.

Пифагорейцы решили не рассказывать никому о своих парадоксальных результатах. Они подрывали основной тезис их учения: «все есть число». По преданию, Гиппас разгласил тайну и был за это наказан богами. Он погиб при кораблекрушении.

Ситуацию, связанную с открытием несоизмеримости в греческой математике, естественно назвать «кризисом основ».

Необходимо было искать пути выхода из кризиса. Открытие несоизмеримости показало, что, владея только рациональными числами, нельзя найти длину любого отрезка. Значит, множество отрезков богаче множества рациональных чисел.

Греки решили строить математику не на пути расширения понятия числа, которое привело бы их к рассмотрению иррациональных чисел, а с помощью геометрических величин.

Была создана геометрическая алгебра. Античные математики решали алгебраические уравнения с помощью геометрических построений.

Ее основными объектами были отрезки, прямоугольники, параллелепипеды. Сложение отрезков производили путем приставления одного к другому (рис. 5). Вычитали всегда из большего отрезка меньший (рис. 6).

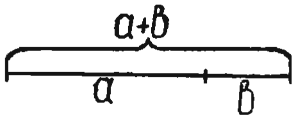

Рис. 5

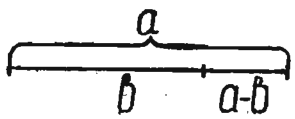

Рис. 6

Произведением двух отрезков назывался построенный на них прямоугольник (рис. 7). Произведение трех отрезков abc — прямоугольный параллелепипед.

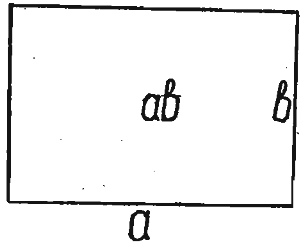

Рис. 7

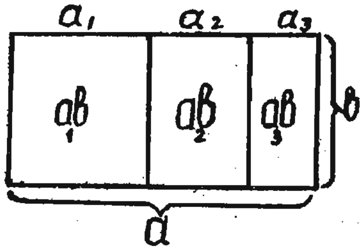

Рис. 8

Геометрическая алгебра изложена во второй книге «Начал» Евклида. В ней доказывается свойство дистрибутивности умножения по отношению к сложению

$$b(a_1+a_2+a_3)=ba_1+ba_2+ba_3.$$

Доказательство проводится с помощью чертежа (рис. 8) $a=a_1+a_2+a_3$; $b(a_1+a_2+a_3)$ — площадь большего прямоугольника. Она равна сумме площадей трех прямоугольников.

На этом примере легко увидеть преимущества геометрической алгебры. Во-первых, теорема верна для любых отрезков как соизмеримых, так и несоизмеримых. Во-вторых, доказанное утверждение носит общий характер. Оно применимо к отрезкам любой длины.

Геометрическая алгебра позволила математикам античности доказать ряд алгебраических тождеств:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ (рис. 9)}$$

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Методами геометрической алгебры греки решали квадратные уравнения. Они развили планиметрию, основанную на применении циркуля и линейки. Среди аксиом геометрии были следующие: через любые две точки можно провести прямую;

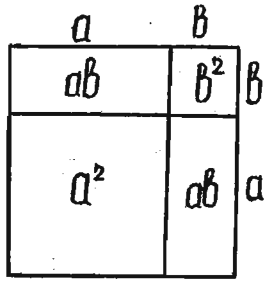

Рис. 9

выбрав любую точку в качестве центра, можно построить окружность любого радиуса.

В античности рассматривали три типа задач, приводящих к квадратным уравнениям.

1. Преобразовать данный прямоугольник в квадрат, т. е. говоря современным языком, решить уравнение $x^2=ab$.

Из тождества, приведенного выше, получали

$$x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Отрезок x является катетом прямоугольного треугольника, у которого даны катет $\frac{a-b}{2}$ и гипотенуза $\frac{a+b}{2}$. С помощью циркуля и линейки легко построить искомый отрезок x.

2. Приложить к заданному отрезку a прямоугольник данной площади S так, чтобы «недостаток» был квадратом. Это значит, что на отрезке AB нужно построить прямоугольник AA_1D_1D

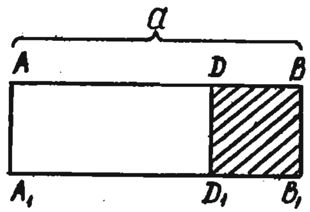

Рис. 10

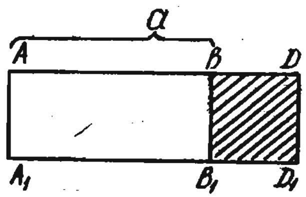

Рис. 11

(рис. 10), равный S, так, чтобы «недостаток» DBB_1D_1 был квадратом. По условию, $AB=a$. Обозначим $BD=x$. Тогда античная задача запишется в виде квадратного уравнения

$$x(a-x)=S$$

Задачу стали называть эллиптической. Так звучало слово «недостаток» на греческом языке. Этот термин встречается у Архимеда в III в. до н. э.

3. К данному отрезку приложить прямоугольник заданной площади S так, чтобы «избыток» был квадратом (рис. 11). Пусть $BD=x$. Задача эквивалентна уравнению

$$x(a+x)=S.$$

Ее называли гиперболической. Название произошло от греческого слова «избыток» (гипербола). Термин ввел Аполлоний (около 200 г. до н. э.)

Покажем, как греки решали задачу 2.

Предварительно прямоугольник S представляли в виде квадрата b^2. Именно выполнению этой операции учит задача 1.

Пусть $AB=a$ (рис. 12). Точка C — середина AB. Построим квадрат BCC_1B_2. Его площадь равна $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Пусть $BD=x$. Тогда $AD=a-x$. Площадь прямоугольника ADD_1A_1 равна $x(a-x)$ a, по условию, эта площадь равна b^2. Имеем уравнение

$$b^2=x(a-x)$$

Используем тождество (1):

$$mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2,$$

полагая $m=a-x$, $n=x$.

Получаем

$$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

Отрезки b и $\frac{a}{2}$ даны. Зная катет и гипотенузу прямоугольного треугольника, можно с помощью циркуля и линейки построить другой катет $\frac{a}{2}-x$, а затем и искомый отрезок x.

Очевидно, что задача имеет решение (действительное) не при любых a и b. Должно выполняться неравенство $b^2\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$, или $S\leqslant\frac{a^2}{4}$.

Излагая задачу 2 в «Началах», Евклид указал на это ограничение.

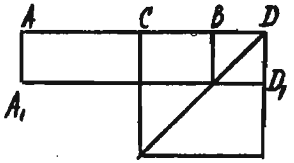

Рис. 12

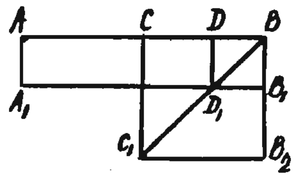

Рис. 13

Задача 3 в «Началах» решена аналогично.

Разделим отрезок AB пополам. C — середина отрезка (рис. 13). Обозначим $BD=x$. Тогда $CD=\frac{a}{2}+x$, $AD=a+x$.

Дальнейшие выкладки рекомендуем читателю провести самостоятельно.

Приведенные примеры позволяют получить представление

о геометрической алгебре. Мы видим, что алгебра греков, построенная на основе геометрии, содержала методы решения квадратных уравнений. Она позволила обосновать ряд тождественных соотношений. Однако, наряду с этими преимуществами, геометрический подход имел определенные недостатки:

1) не были введены отрицательные числа,

2) нельзя было рассматривать уравнения степени выше третьей,

3) необходимо было постоянно следить за выполнением принципа однородности, согласно которому отрезок нельзя было сложить с прямоугольником.

Эти обстоятельства сделали язык греческой математики тяжеловесным. Геометрическая одежда сковала ее тело как панцирь, мешая гармоничному, живому развитию. Недостатки геометрической алгебры, наряду с внешними причинами, привели впоследствии к упадку античной науки.

5. Задачи, неразрешимые средствами геометрической алгебры.

Мы показали, что греки решали задачи, эквивалентные квадратным уравнениям, с помощью циркуля и линейки. Нетрудно показать, что верно обратное утверждение: все задачи на построение с помощью циркуля и линейки алгебраически эквивалентны решению конечной цепочки квадратных уравнений.

Действительно, все такие геометрические построения состоят из следующих элементов: проводят прямые и окружности, разыскивают их точки пересечения. По существу решаются системы, состоящие из линейных и квадратных уравнений.

Следовательно, средствами классической геометрической алгебры можно решить лишь определенный класс задач. Остальные задачи становятся неразрешимыми в принципе, если мы заранее ограничим себя требованием: неизвестная величина должна быть построена с помощью циркуля и линейки.

В V в. до н. э. были поставлены три задачи, которые сразу же получили большую известность. Это знаменитые задачи античности:

1) удвоение куба,
2) трисекция угла,
3) квадратура круга.

Как было доказано в девятнадцатом столетии, эти задачи неразрешимы средствами геометрической алгебры. Их исследование потребовало создания новых методов.

Центром научной и культурной жизни в V в. до н. э. были Афины. Сюда приехали многие пифагорейцы, переставшие скрывать свои исследования. Дух афинской жизни требовал, чтобы все совершалось явно, открыто, свободно.

Вся домашняя работа, а также «черная» умственная деятельность (переписывание книг, производство вычислений) поручались рабам. Свободные граждане, имея много времени для участия в спорах и дискуссиях, политических, научных, философских, понимали необходимость образования. В Афинах был большой спрос на учителей, которых называли «софистами», или мудрыми людьми. Они обучали желающих риторике, философии, математике и астрономии.

В центре внимания софистов были три знаменитые задачи. Несомненно, что в истории человечества не было других задач, которые изучались так упорно и прилежно. Над ними бились лучшие греческие умы. Затем им отдавали силы арабские математики. В течение столетий лучшие европейские математики трудились над решением задач античности.

Наконец, в умах математиков зародилась мысль о том, что средствами греческой геометрической алгебры эти задачи неразрешимы. Эта догадка была подтверждена доказательством лишь в прошлом столетии.

Мы рассмотрим подробно знаменитые задачи античности, чтобы показать, что при их исследовании было создано много новых методов, обогативших математический аппарат.

Задача удвоения куба формулируется так: построить куб, объем которого был бы вдвое больше объема заданного куба.

Пусть a — ребро данного куба, x — ребро искомого куба. Задача эквивалентна уравнению $x^3=2a^3$.

Можно сразу же написать $x=a\sqrt[3]{2}$. Но древние греки не признавали такое решение. Они требовали, если задан отрезок a, построить отрезок x с помощью циркуля и линейки.

Первую попытку доказать неразрешимость кубического уравнения методами геометрической алгебры в частном случае

$$x^3+2x^2+10x=20$$

предпринял в XIII в. Леонардо Пизанский. Прошло четыре столетия и Декарт (1596—1650) сформулировал общее утверждение: корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами могут быть построены циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда это уравнение приводимо, т. е. имеет по крайней мере один рациональный корень. Первые доказательства были даны в 1837 г. французским ученым Пьером Вантцелем. Он строго доказал невозможность удвоения куба и трисекции угла с помощью циркуля и линейки.

Задача удвоения куба называется «делосской». О ней сложили легенду. На острове Делос свирепствовала чума. Жители острова просили оракула помочь им избавиться от этого бедствия. Оракул потребовал удвоить жертвенник, стоявший в храме и имевший вид куба. Жители поставили на куб новый куб, но чума не прекращалась. Нужно было удвоить объем жертвенника, не меняя его формы. В греческих легендах боги были знатоками геометрии.

Первая дошедшая до нас попытка решения делосской задачи принадлежит Гиппократу Хиосскому, жившему в V в. до н. э. Он решал задачу, эквивалентную уравнению

$$x^3=a^2b,$$

из которой при $b=2a$ получается делосская.

Гиппократ свел задачу к отысканию двух средних пропорциональных между заданными величинами. Он разыскивал x и y такие, что

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}.$$

Отсюда легко получить равенства

$$x^2=ay,\ xy=ab.$$

Перемножая их, найдем $x^3y=a^2by$, или $x^3=a^2b$.

Таким образом, в V в. до н. э. в математику впервые вошли уравнения параболы и гиперболы. Эти названия кривым дал Аполлоний, о чем будет подробнее сказано ниже в разделе, посвященном истории геометрии.

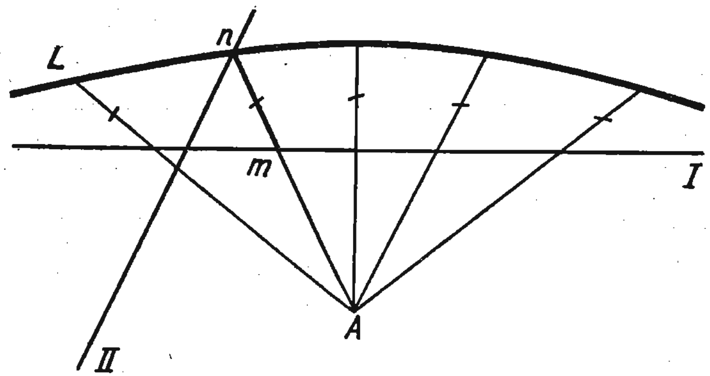

Рис. 14

В задаче трисекции угла требуется разделить данный угол на три равные части. Ее можно свести к кубическому уравнению. Впервые это сделали математики стран ислама. Они использовали тригонометрию.

Пусть α — данный угол. Обозначим $\sin\alpha=a$, $\sin\frac{\alpha}{3}=x$.

Из формулы

$$\sin\alpha=3\sin\frac{\alpha}{3}-4\sin^3\frac{\alpha}{3}$$

получаем уравнение

$$a=3x-4x^3,$$

которое, как показал П. Вантцель, неразрешимо средствами геометрической алгебры.

Ученые античности не сводили задачу трисекции угла к кубическому уравнению. Для ее решения они изобрели «метод вставок» и ввели в математику новую кривую, которую назвали конхоидой.

В методе вставок требовалось поместить отрезок длины a между двумя данными линиями так, чтобы его концы находились на этих линиях, а сам отрезок или его продолжение проходили через данную точку. Обычно рассматривали вставки между прямыми и окружностями.

Пусть, например, даны две прямые, отрезок длины a и точка A (рис. 14). Будем двигать отрезок так, чтобы его начальная точка лежала на первой прямой, а продолжение проходило через точку A. Тогда второй конец отрезка опишет некоторую

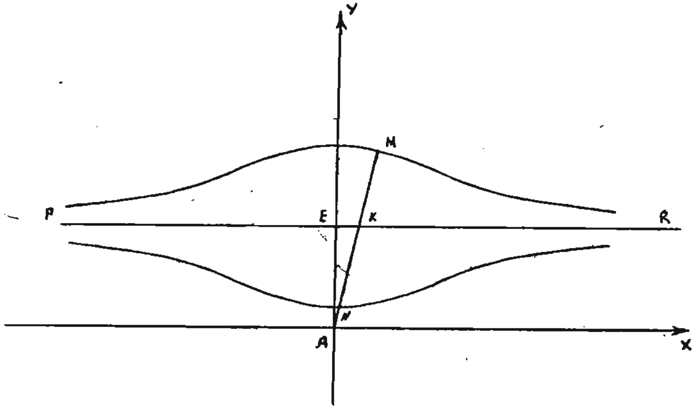

Рис. 15

кривую L.

Чтобы осуществить вставку, необходимо найти точку пересечения кривой L и второй данной прямой. В нашем примере — это точка n (рис. 14). Отрезок mn — искомый, так как его концы лежат на данных прямых, длина равна a, причем продолжение отрезка mn проходит через данную точку A.

Если в методе вставок в качестве первой кривой выбрана прямая линия, как это сделали мы в рассмотренном выше примере, то кривая L — конхоида. Ее впервые описал древнегреческий математик Никомед, живший в III — II вв. до н. э. Он изобрел прибор для механического вычерчивания конхоиды, применил ее к решению задач об удвоении куба и трисекции угла. Термин «конхоида», т. е. «похожая на раковину», ввел греческий ученый Прокл (ок. 410—485) — автор многих сочинений по философии и математике.

Рассмотрим прямую PR и точку A (рис. 15), находящуюся на расстоянии от этой прямой. Через A проведем луч, пересекающий прямую PR в точке K.

На луче по обе стороны от точки K отложим отрезки KM и KN, каждый из которых имеет длину a. Вращая луч вокруг точки A и проводя аналогичные построения при одном и том же

значении a, получим линию, состоящую из двух ветвей. Ее описывают точки M и N. Это конхоида. В прямоугольной системе координат она задается уравнением четвертой степени

$$(x^2+y^2)(y-l)^2=a^2y^2.$$

Следовательно, конхоида является алгебраической кривой четвертого порядка.

Когда в XVII в. создавалась математика переменных величин, конхоиду исследовали многие ученые. Декарт с ее помощью разработал метод построения касательных и нормалей. Гюйгенс установил, что площадь фигуры, заключенной между ветвями конхоиды, является бесконечно большой. Ньютон применил конхоиду к решению уравнений третьей степени.

Конхоида получается только в том частном случае метода вставок, когда одна из данных кривых является прямой линией. В других случаях кривая L, которую описывает второй конец вставки, может быть очень сложной. Поэтому древние греки старались по возможности избегать метода вставок.

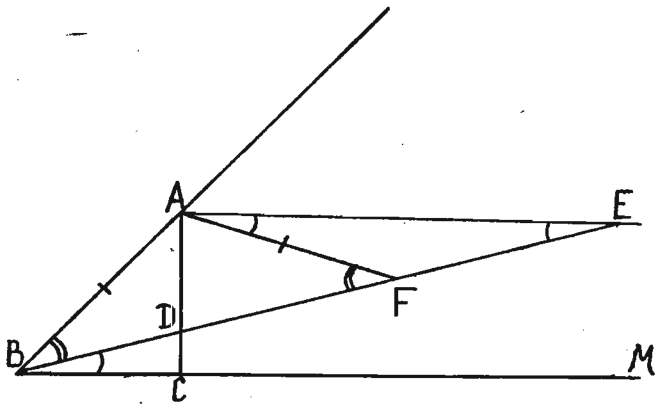

Рис. 16

К задаче трисекции угла этот метод применяли следующим образом. Чтобы разделить угол ABM на три равные части, из точки A опускали перпендикуляр AC на прямую BM (рис. 16). Через точку A проводили прямую, параллельную BM.

На линейку наносили метки D и E так, чтобы выполнялось равенство $DE=2AB$. Затем вращали линейку вокруг точки B до тех пор, пока точки D не попадет на AC, а точка E — на AK. В результате греческие ученые получили равенство

$$\angle DBC=\frac{1}{3}\angle ABC.$$

Докажем его.

Пусть F — середина отрезка DE. Тогда F — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ADE. Поэтому $DF=FE=AF$. По построению, $DF=AB$. Значит, $AB=AF$, $\triangle BAF$ — равнобедренный. Следовательно,

$$\angle ABF=\angle AFB.$$

Так как треугольник AEF равнобедренный, то $\angle FAE=\angle FEA$. Угол AFB — внешний угол $\triangle AFE$ при вершине F. Значит, $\angle AFB=2\angle FEA$. Отсюда получаем $\angle AFB=2\angle DBC$, $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=3\angle DBC$, $\angle DBC=\frac{1}{3}\angle ABC$, что и требовалось доказать.

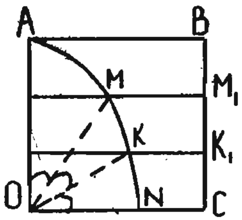

Рис. 17

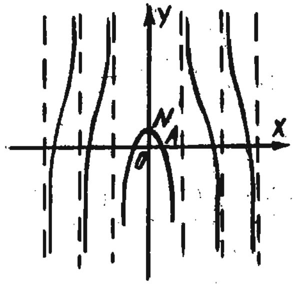

Рис. 18

На первый взгляд может показаться, что решение осуществляется с помощью линейки. Но греки осознавали, что оно не является строгим с точки зрения требований геометрической алгебры. Они допускали те построения с помощью циркуля и линейки, которые соответствуют аксиомам геометрии. А в методе вставок допускается движение, подбор. Это механическое решение.

Гиппий Элидский, родившийся около 460 г. до н. э., предложил другое решение задачи трисекции угла. Он первый ввел в математику трансцендентную кривую, которую позже Лейбниц в XVII в. назвал квадратрисой.

Трансцендентными называются линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат не являются алгебраическими. Графики функций

$$y=a^x,\ y=\sin x,\ y=\operatorname{tg} x$$

трансцендентные кривые.

Квадратрису строят следующим образом. Пусть дан квадрат $OABC$ со стороной a (рис. 17). Отрезки OA и AB начинают двигаться одновременно, причем OA равномерно вращается по часовой стрелке вокруг точки O, а отрезок AB равномерно опускается вниз параллельно самому себе. Движение происходит так, что оба отрезка OA и AB достигают положения OC одновременно. Множество точек пересечения этих отрезков образуют кривую линию — квадратрису.

Из построения ясно, что ординаты кривой пропорциональны соответствующим углам

$$\frac{y}{y_1}=\frac{\varphi}{\varphi_1}.$$

Поэтому с помощью квадратрисы можно разделить угол на любое число частей.

На рис. 17 отрезок BC разделен на три равные части. На квадратрисе найдены соответствующие точки M и K. Отрезки OM и OK делят угол $\angle AOC$ на три равные части

$$\angle AOM=\angle MOK=\angle KON.$$

После того, как в XVII в. трудами Декарта и Ферма была создана прямоугольная система координат, математики записали уравнение квадратрисы в виде

$$y=x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}$$

где $OA=OC=a$ (рис. 18).

С его помощью легко найти длину отрезка ON.

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=\frac{2a}{\pi}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=\frac{2a}{\pi}.$$

Мы воспользовались здесь равенством $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$, которое легко следует из равенства

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Древние греки еще не знали понятия «предел». Но, изучая квадратрису, они сумели доказать, что

$$ON=\frac{2a}{\pi}$$

Этот результат получил Динострат — ученик Платона и Евдокса, живший в V в. до н. э.

Динострат использовал неравенства

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

Он предположил, что $ON<\frac{2a}{\pi}$ и пришел к противоречию. Аналогично неравенство $ON>\frac{2a}{\pi}$ также привело его к противоречию. Отсюда Динострат сделал вывод

$$ON = \frac{2a}{\pi} \qquad (1)$$

Метод доказательства от противного постоянно использовали античные математики.

Равенство (1) показывает, что с помощью квадратрисы можно решить знаменитую греческую задачу о квадратуре круга.

В задаче требуется построить квадрат, равновеликий данному кругу, т е. решить уравнение

$$x^2 = \pi a^2.$$

В конце XIX в. было показано, что отрезок $\sqrt{\pi}$ невозможно построить с помощью циркуля и линейки. Чтобы доказать это утверждение, необходимо было выяснить природу числа π.

В 1766 г. Иоганн Ламберт, немецкий математик, астроном, физик и философ, доказал иррациональность числа π. В 1882 г. немецкий ученый Карл Линдеман доказал, что π — трансцендентное число, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Таким образом, лишь в конце прошлого века было доказано, что задачу о квадратуре круга нельзя решить средствами геометрической алгебры. Более двадцати пяти столетий задача привлекала внимание ученых, философов, художников. И по сей день в областях, далеких от математики, используют выражение «квадратура круга», когда речь идет о неразрешимости проблемы.

Древним грекам удалось решить задачу о квадратуре круга с помощью механической кривой квадратрисы. Это сделал Динострат.

Пусть дан квадрат $OABC$ со стороной a (рис 17). Построив квадратрису, получим отрезок ON, равный $\frac{2a}{\pi}$. Запишем пропорцию

$$\frac{2a}{ON} = \frac{x_1}{2a}, \quad \frac{2a}{\frac{2a}{\pi}} = \frac{x_1}{2a}.$$

Отсюда находим $x_1 = 2a\pi$.

Значит, получив отрезок ON с помощью квадратрисы, можно затем построить отрезок, длина которого равна длине окружности радиуса a.

В задаче о квадратуре круга требуется решить уравнение

$$x^2 = \pi a^2.$$

Запишем его в виде $x^2 = 2a\pi \cdot \frac{a}{2}$.

Отрезки $2a\pi$ и $\frac{a}{2}$ построены. Значит, можно построить прямоугольник со сторонами $2a\pi$ и $\frac{a}{2}$. В геометрической алгебре, как мы показали выше, была решена задача о построении квадрата равновеликого данному прямоугольнику.

Таким образом, в античности было получено решение задачи о квадратуре круга, основанное на использовании квадратрисы

Заметим, что постановка задачи о квадратуре круга очень проста. Поэтому возникает иллюзия, что даже человек, не обладающий глубокими познаниями в математике, может ее решить. Для многих нематематиков задача превратилась в навязчивую идею, цель жизни, предмет страсти. После 1882 г стало ясно, что решить задачу о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки невозможно. Но и сейчас имеются любители математики, которые пытаются это сделать. Разумеется их попытки обречены на неудачу.

6. Неопределенные уравнения.

Расцвет греческой науки относится к III в. до н. э. Творчество великих математиков этой эпохи — Евклида, Архимеда, Аполлония будет освещено в главах, излагающих историю геометрии.

Уже с конца III в. до н. э. начались тяжелые разрушительные войны. Создавалась будущая Римская империя. Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замерла. Измученные страданиями и горем люди потянулись к мистике Востока, к религии, которая обещала другую, лучшую жизнь. Абстрактное мышление, логическое рассуждения отодвинулись на второй план. Математика приходила в упадок.

Только в начале нашей эры, когда была создана Римская империя и ее экономическое положение стало устойчивым, наука стала оживать.

Она мало интересовала римлян. Их привлекала власть. Трудиться, заниматься земледелием, искусством, наукой должны были покоренные народы, рабы. Вергилий писал:

«...другие ковать будут жизнью дышащую бронзу,—
Верю тому,— создадут из мрамора лики живые,
Красноречивее будут в судах, движенья неба
Тростью начертят своей и вычислят звезд восхожденья.
Ты же, римлянин, знай, как надо народами править».

Практическому складу римского ума было чуждо стремление к теоретическому познанию, столь характерному для греческой научной мысли. Из среды римлян не вышло ни одного сколько-нибудь значительного ученого, хотя Рим дал миру великолепных поэтов, замечательных историков, блестящих ораторов. Наиболее глубоким умом, которого породила римская культура, был, видимо, Цицерон. Но его заслуга, как прекрасно сказал А. Блок, состояла лишь в том, что он «собрал жалкие остатки меда с благоуханных цветов великого греческого мышления, с цветов, беспощадно раздавленных грубым колесом римской телеги».

В первые века нашей эры научным и культурным центром была Александрия. В 31 г. до н. э. ее покорили войска Юлия Цезаря. При этом в результате пожаров сгорела часть сокровищ ее знаменитой библиотеки, которая потом горела еще несколько раз. Римские императоры поддерживали развитие науки в Александрии, и именно в этом городе математика достигла новых больших успехов.

В I в. нашей эры в Александрии работали выдающиеся математики Герон и Менелай.

Герон известен как талантливый инженер и изобретатель. До нас дошло его сочинение «Метрика», в котором собраны всевозможные формулы для измерения площадей геометрических фигур. В «Метрику» вошли и многие приближенные формулы, которых не было в классических сочинениях древних греков.

Творчество Менелая неразрывно связано с астрономией, а может быть так же с астрологией. Он заложил основы новой науки — сферической тригонометрии.

Во втором веке нашей эры в Александрии работал Клавдий Птолемей. Его основной труд «Математическое построение» известен под арабизированным названием «Алмагест» (от греческого слова «величайшая» — одного из эпитетов этой книги).

Птолемей был сыном своего времени и наряду с астрономией много занимался астрологией. На эту тему он написал фундаментальное сочинение «Тетрабиблос» («Четырехкнижие»). Этот факт красноречиво показывает то положение, в котором оказалась греческая наука в период своего заката.

Величайшим математиком начала нашей эры и последним крупным ученым античности был Диофант, о котором достоверно известно лишь то, что он жил в Александрии.

Основное сочинение Диофанта «Арифметика» состояло из тринадцати книг, из которых до нас дошли шесть. Оно посвящено «достопочтеннейшему Дионисию», а в 247 г. епископом Александрии стал некий Дионисий, который с 231 г. руководил христианской гимназией города. Поэтому можно считать, что Диофант жил в середине III в. н. э.

Все, что известно о личности Диофанта, содержится в стихотворении — загадке:

Прах Диофанта гробница покоит;
дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Нетрудно увидеть, что загадка приводит к линейному уравнению

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

из которого получаем $x=84$.. Итак, Диофант прожил 84 года.

Чтобы получить этот результат, не нужно владеть «мудрым искусством» Диофанта. Достаточно уметь решать линейные уравнения. А это умели делать египетские математики еще за две тысячи лет до н. э.

Диофант построил новую алгебру, коренным образом отличающуюся от классической геометрической алгебры. Она опиралась на арифметику.

Вполне вероятно, что корни алгебры Диофанта, также как корни приближенных формул Герона, восходят к вавилонской математике. Но мы, к сожалению, не знаем предшественников Диофанта, работавших в той же области. У нас нет никаких документальных материалов, которые позволили бы проследить, как протекал процесс переноса вавилонских алгебраических методов на эллинистическую почву.

В «Арифметике» Диофанта собрано 189 задач, каждая из которых снабжена решениями или пояснениями. Методы не формулируются в общем виде. Так же, как это было в Древнем Вавилоне, указывается последовательность действий, которые нужно произвести, т. е. рецепт решения задачи.

Творчество Диофанта в течение многих столетий представляло одну из наиболее трудных загадок для историков науки. Многие из них недооценивали его труды. Они считали, что Диофант разработал остроумные приемы для решения частных задач, но не создал общего метода. Например, Г. Ганкель писал: «...современному математику после изучения 100 решений Диофанта трудно решить 101-ю задачу... Диофант скорее ослепляет, чем приводит в восторг». Та же мысль высказывается в книге «История математики» О. Бекера и И. Гофмана, опубликованной в Бонне в 1951 г.: «Диофант не дает никакого общего метода, но применяет, по-видимому, для каждой новой задачи новый неожиданный искусственный прием, напоминающий восточные».

Общие методы, созданные Диофантом, удалось понять лишь в наши дни. Его сочинения опубликованы, прокомментированы, результаты и методы освещены с точки зрения современной математики.

У Диофанта впервые появилась буквенная символика. Он ввел символы для неизвестной величины и ее степеней. Ввел он и знак равенства как первую букву греческого слова «равный». Но знака для операции сложения еще не было.

Диофант ввел отрицательные числа. Он называет их «лейпсис» — производное от глагола «лейпо» — что означает «недоставать», «нехватать». Положительные числа Диофант называл «ипаркис», что означает существование, бытие, а во множественном числе — имущество.

Диофант формулирует правила знаков: «отрицательное, умноженное на отрицательное, дает положительное, тогда как отрицательное на положительное дает отрицательное, ».

Диофант ввел шесть положительных и шесть отрицательных степеней неизвестной величины. В его «Арифметике» приводится таблица, в которой даны названия этих степеней. Мы для наглядности обозначаем неизвестную величину через x.

число x	арифметичная $1/x$
квадрат x^2	квадратичная $1/x^2$
куб x^3	кубичная $1/x^3$
квадрато-квадрат x^4	квадрато—квадратичная $1/x^4$
квадрато-куб x^5	квадрато—кубичная $1/x^5$
кубо—куб x^6	кубо—кубичная $1/x^6$

Затем Диофант формулирует правила для умножения x^m на x^n для положительных и отрицательных m и n ($|m| \leqslant 6$, $|n| \leqslant 6$). Вот одно из них: «Всякое число, умноженное на одноименную ему часть производит единицу». На современном языке оно звучит так:

$$x^m \cdot \frac{1}{x^m} = 1.$$

Мы видим, что отголоски традиционной геометрической алгебры имеются в терминах Диофанта: «квадрат», «куб». Однако при составлении уравнений он складывает куб с квадратом или со стороной. А его «квадрато — квадраты» и «квадрато — кубы» вообще никак не связаны с геометрией.

Основной объект изучения у Диофанта — число. Свою «Арифметику» он начал с обращения к Дионисию, которого интересуют арифметические задачи. Диофант писал: «Достопочтеннейший Дионисий, зная, что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука».

Далее Диофант высказывает мысли, которые на наш взгляд интересны для современного педагога: пока предмет незнаком ученику, он вызывает большие затруднения, необходимо проявить усердие. Затем появляется любовь к предмету и она помогает преодолеть все трудности. Диофант писал: «Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним незнаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет понятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение».

Особенностью творчества Диофанта явилось возникновение нового предмета исследования. Он изучал неопределенные уравнения и их системы. Эта область математики сейчас называется диофантов анализ.

Пусть дано m уравнений от n переменных, где $m<n$

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x_1,\dots,x_n)=0. \end{cases}$$

Функции f_k — это многочлены с рациональными коэффициентами. Требуется найти множество M всех рациональных решений системы.

В частном случае, когда $m=1$, $n=2$, задача сводится к исследованию уравнения $f(x, y)=0$. Оно определяет на плоскости алгебраическую кривую второго порядка. Например, уравнение $x^2+y^2=a^2$ определяет окружность; число a — рациональное.

Решить это уравнение — значит, каким-либо образом описать множество M точек окружности, координаты которых являются рациональными числами.

Приведем задачу 9 книги 11 «Арифметики» Диофанта. В ней требуется: «Данный квадрат разделить на два квадрата». Диофант объясняет, как решать конкретное уравнение

$$x^2+y^2=16,$$

и получает в качестве решения числа

$$x=\frac{16}{5},\quad y=\frac{12}{5}.$$

Поясним метод Диофанта. На окружности лежит точка $(0, -a)$. Она является рациональным решением данного уравнения. Диофант делает подстановку

$$y=kx-a$$

т. е. проводит через точку $(0, -a)$ прямую $y=kx-a$.

Прямая пересечется с окружностью в точке с рациональными координатами. Чтобы ее найти, решим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y=kx-a \end{cases} \qquad x^2+(kx-a)^2=a^2$$

Отсюда

$$x=\frac{2ak}{k^2+1},\qquad y=\frac{a(k^2-1)}{k^2+1}.$$

В качестве k можно взять любое рациональное число. При этом мы сразу же найдем точку с рациональными коэффициентами, лежащую на окружности.

У Диофанта, как у всякого восточного математика, задача всегда конкретна: $a=4$, $k=2$. Поэтому приведенные выше формулы ему дали числа

П. Ферма

$$x=\frac{2\cdot4\cdot2}{5}=\frac{16}{5},\quad y=\frac{4(4-1)}{5}=\frac{12}{5}.$$

До Диофанта в математике были рассмотрены только два вида неопределенных уравнений. Уравнение

$$x^2+y^2=z^2,$$

которое нужно было решить в целых числах, появилось еще в Древнем Вавилоне. Пифагорейцы нашли формулы для отыскания бесконечного множества его решений, но не всех. Действительно, у них

$$x=\frac{m^2-1}{2},\quad y=m,\quad z=\frac{m^2+1}{2}.$$

Поэтому

$$z-x=1.$$

Рассмотрим числа $x=56$, $y=33$, $z=65$. Ясно, что их нельзя получить из формул пифагорейцев, и в то же время

$$(56)^2+(33)^2=(65)^2,$$

что легко проверить непосредственными вычислениями.

Наиболее общие формулы для решения уравнения $x^2+y^2=z^2$ привел Евклид в «Началах»

$$x=2pq,\ y=p^2-q^2,\ z=p^2+q^2.$$

Они дают при взаимно простых p и q все целые решения уравнения, не имеющие общего делителя.

Уравнение

$$x^2-ay^2=1$$

для случая $a=2$, причем не в рациональных, а в целых числах решил Евклид в «Началах». Его решение для любого числа a, не являющегося квадратом, знал, вероятно, Архимед. Он поставил перед Эратосфеном задачу, в которой $a=4\,729\,494$.

В XVII в. методы Диофанта обрели новую жизнь в произведениях П. Ферма. В замечании к восьмой задаче книги II «Арифметики», в которой требуется разложить квадратное число a^2 в сумму двух квадратов, Ферма записал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, ни вообще, степень большую квадрата, на две степени с тем же показателем; я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях».

Это так называемая великая теорема Ферма, которая утверждает, что уравнение

$$x^n+y^n=z^n \text{ при } n>2,\ x\cdot y\cdot z\neq0$$

неразрешимо в целых (а значит и в рациональных) числах.

Таким образом, труды Диофанта имели фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел.

«Арифметика» Диофанта — последнее дошедшее до нас великое сочинение античности. Условия для развития математики в Римской империи были неблагоприятными. Римляне не поощряли занятие абстрактной наукой, они ценили практические знания. До нас дошло от той эпохи много произведений на латинском языке по сельскому хозяйству, военному делу, архитектуре. Техника в Римской империи находилась на невысоком уровне. Для ее развития не было стимулов, так как римским рабовладельцам доставляли массы рабов из завоеванных провинций. Дешевый труд рабов препятствовал развитию производительных сил, вызывал застой и загнивание римского общества.

Внутренние междоусобицы и нашествия варварских племен («варвары» — по-гречески чужеземцы) привели к распаду Римской империи. На ее развалинах создавались небольшие полудикие государства, в которых не было условий для развития науки.

Лишь Византия в какой-то мере оставалась хранительницей научных традиций античности. Ее столицей в 330 г. стал Константинополь, заложенный несколькими годами ранее императором Константином.

Последние выдающиеся греческие ученые — Исидор из Милета и Анфемий из Тралл — жили в VI в. в Византии. Они были строителями знаменитого собора св. Софии в Константинополе. Во второй половине XI в. в Византии жил Михаил Пселл, написавший сочинение по арифметике и геометрии.

В 1453 г. Константинополь был захвачен турками. Многие ученые бежали на Запад. Они помогли европейским математикам освоить греческое рукописное наследие.

7. Алгебра на Арабском Востоке и в Средней Азии.

Ведущую роль в развитии математики в средние века играли ученые стран Востока. В VII в. мир был поражен необыкновенно быстрым возвышением Арабской империи. Меньше чем за сто лет арабы овладели огромной территорией. Они завоевали Сирию, Иран, Египет, захватили Хорезм и часть Пенджаба. В Арабский Халифат к середине VIII в. входили Пиренейский полуостров, все средиземноморские страны Африки, Ближний Восток, большие районы Малой Азии, Кавказа и Средней Азии, часть долины Инда.

Завоевания проводились под знаменем новой религии — ислама. Язык этой религии, арабский, стал и государственным, и основным научным языком. Поэтому мы будем использовать термины: «арабская математика», «математика стран ислама», хотя математические открытия были результатом сотрудничества ученых многих народов — персов, арабов, таджиков, сирийцев и других.

Расцвет культуры и науки стран ислама приходится на VII — XV вв. Сохранилось предание о том, что халиф Омар, завоевав Александрию, приказал уничтожить ее знаменитую библиотеку. Он сказал: «Если в книгах содержится нечто, ведущее к истине, то мы имеем от Аллаха то, что еще лучше ведет к ней, а если в ней содержится ложное, то они не нужны». Эти слова отражают фанатизм первых арабских завоевателей.

Последующие правители содействовали процветанию наук. Жизненно важными в Арабском Халифате были вопросы орошения, строительства, караванной и морской торговли. Для их решения требовалось развитие астрономии и математики.

Преуспевающие правители создавали обсерватории, которые становились центрами развития точных наук. В них изучались, переводились на арабский язык и комментировались труды ученых Индии и Древней Греции.

Первым большим научным центром халифата был Багдад. В конце VIII в. в нем было собрано много ученых и переводчиков из разных стран.

Мухаммед ал-Хорезми

Халиф Гарун ал-Рашид, правивший с 786 по 809 г., известный (правда в очень идеализированном виде) по сказкам «Тысячи и одной ночи», содействовал развитию естественных наук и математики. При нем была открыта большая библиотека, которая пополнялась рукописями даже из Византии. В городе имелись десятки других библиотек и множество людей было занято перепиской научных сочинений.

Халиф Ал-Мамун, сын Гаруна ал-Рашида, объединил ученых в своего рода академии, названной «Домом мудрости». При «Доме мудрости» имелась хорошо оборудованная обсерватория. Были выполнены обширные работы по астрономии и географии. Большой интерес правителей вызывала астрология, и поэтому развитию астрономии на Востоке уделялось много внимания.

В Багдадской математической школе большое место занимало изучение и издание по-арабски древних авторов. Были переведены с греческого на арабский основные произведения Евклида, Архимеда, Аполлония, Менелая, Герона, Птолемея, Диофанта и других авторов. Сочинения греческих авторов стали настольными руководствами арабских ученых.

Математика стран ислама включила в себя также знания, полученные из Индии, Вавилона, Персии, Хорезма. Позднее приобрели значение научные связи с Китаем, хотя прямых переводов с китайского на арабский, насколько известно, не было.

Большое значение для развития математики имели труды Мухаммеда ал-Хорезми (783— около 850). Его родиной было государство Хорезм в Средней Азии. В некоторых исторических источниках ал-Хорезми назван «ал-маджуси», т. е. маг. Из этого заключают, что его предки были магами — жрецами зороастрийской религии, распространенной на территории Средней Азии.

Ал-Хорезми работал в Багдаде в «Доме мудрости». Большое внимание он уделял астрономии. Его главная заслуга в этой области — составление зиджа, т. е. астрономических и тригонометрических таблиц, необходимых для решения задач астрономии.

В сочинении ал-Хорезми впервые в литературе на арабском языке была дана таблица синусов и введен тангенс. Зидж ал-Хорезми использовали впоследствии как астрономы Востока, так и европейские ученые.

Географический трактат ал-Хорезми «Книга картины Земли» является первым известным трудом по географии на арабском языке. Он оказал сильное влияние на развитие этой науки в странах Востока.

Наибольшую славу ал-Хорезми принесли его математические труды. Он является автором двух знаменитых трактатов — по арифметике и алгебре, каждый из которых сыграл огромную роль в дальнейшем развитии математики. Мы уже говорили о вкладе ал-Хорезми в развитие арифметики. Сейчас рассмотрим его работы по алгебре.

Трактат ал-Хорезми носит название «Краткая книга восполнения и противопоставления» (по-арабски — «Китаб мухтасар ал-джабр ва-л-мукабала»). В нем введено два особых действия. Первое из них — восполнение (ал-джабр) состоит в перенесении отрицательного члена из одной части уравнения в другую. Именно от этого термина возникло современное слово «алгебра».

Второе действие — ал-мукабала (противопоставление) — состоит в сокращении равных членов в обеих частях уравнения.

Алгебраический трактат ал-Хорезми состоит из двух частей — теоретической и практической. В первой из них излагается теория линейных и квадратных уравнений. Во второй части алгебраические методы применены к решению конкретных хозяйственных, торговых и юридических задач.

Во введении к трактату ал-Хорезми писал: «Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследства, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, геометрии и прочих разновидностях подобных дел».

Неизвестную величину ал-Хорезми называет термином «корень» («джизр»). По всей вероятности это перевод санскритского слова «мула» — корень растения, которым обозначали неизвестную величину индийские математики. Позднее в арабской литературе для обозначения неизвестной использовали также слово «вещь» («шай»). Квадрат неизвестной назван словом «имущество» («мал»). Свободный член уравнения ал-Хорезми назвал «дирхемом», т. е. денежной единицей.

Ал-Хорезми разделил линейные и квадратные уравнения на шесть видов. Это связано с тем, что он рассматривал только уравнения с положительными коэффициентами. У ал-Хорезми также, как у других арабских математиков, не было буквенных обозначений. Он всегда пояснял общее правило с помощью конкретных примеров.

Приведем классификацию уравнений, данную ал-Хорезми, и его примеры. В скобках приведена современная запись.

1. «квадраты равны корням» $(ax^2=bx)$ $x^2=5x$
2. «квадраты равны числу» $(ax^2=c)$ $5x^2=80$
3. «корни равны числу» $(ax=c)$ $4x=20$
4. «квадраты и корни равны числу» $(ax^2+bx=c)$ $x^2+10x=39$
5. «квадраты и числа равны корням» $(ax^2+c=bx)$ $x^2+21=10x$
6. «корни и числа равны квадрату» $(bx+c=ax^2)$ $3x+4=x^2$

Правила решения квадратных уравнений ал-Хорезми формулировал словесно.

Так, чтобы разъяснить правило для решения уравнения пятого вида, ал-Хорезми решает уравнение $x^2+21=10x$.

Наша запись:

$$x_{1,2}=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=5\pm2; \qquad x_1=3,\ x_2=7.$$

Ал-Хорезми пишет: «Правило таково: раздвой число корней, получится 5. Умножь это на равное, будет 25. Вычти из этого 21, останется 4. Извлеки из этого корень, будет 2. Вычти это из пяти, получится 3. Это и будет корень, который ты искал. Если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет 7. Это тоже корень, который ты искал».

На этом примере мы видим, как удобна современная алгебраическая символика. Арабским математикам все преобразования нужно было выражать в громоздкой словесной форме.

Вторая часть алгебраического трактата ал-Хорезми называется «Книга о завещаниях». Она служила практическим руководством для юристов, занимавшихся разделом наследства. Согласно мусульманскому законодательству каждый член семьи наследует строго определенную долю оставленного имущества. Иногда какая-то часть наследства завещалась определенному человеку.

Мы приведем самую простую задачу: «Человек умер, оставив двух сыновей, и завещал треть своего имущества другому человеку. Он оставил десять дирхемов наличными и отданное в долг, равное доле одного из сыновей».

Обозначим долг через x. Тогда все имущество равно $10+x$. Так как все 3 наследника получат равные доли, то

$$\frac{10+x}{3}=x,$$

откуда $x=5$.

Алгебраический трактат ал-Хорезми, как и арифметический, был в числе первых сочинений по математике, переведенных в Европе с арабского на латынь. Вплоть до XVI в. алгебру в Европе называли «искусством алгебры и алмукабалы». Неизвестную называли, словом «вещь» (по-латински — *res*, а по итальянски *cosa*). Квадрат неизвестной, как у ал-Хорезми, называли словом «имущество» (по латыни *census*) и т. д.

Унаследованное от восточных математиков учение о линейных и квадратных уравнениях стало той основой, на которой развивалась алгебра в Европе.

В средневековой Европе имя ал-Хорезми записывали как *Algorismus*, или *Algorithmus*. Этим словом стали обозначать всю систему десятичной позиционной арифметики. Впоследствии термин «алгоритм» приобрел более широкий смысл. Это регулярный процесс, дающий за конечное число шагов решение определенного класса задач.

Методы ал-Хорезми были развиты в трудах многих арабских математиков. Абу-Камил, выходец из Египта, в конце IX — начале X в. опубликовал трактат «Книга об ал-джабр и ал-мукабала», в котором проводил сложные преобразования над иррациональными величинами и, в частности, использовал формулу

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}},\ a>b>0$$

Абу-Камил вводил несколько неизвестных, приписывал им разные названия.

Как и все математики Востока, он формулировал правила решения уравнений словесно, не применяя алгебраической символики. Мы рассмотрим пример Абу-Камила и поясним его методы, применяя современные обозначения.

Требуется решить уравнение $\dfrac{x}{10-x}+\dfrac{10-x}{x}=\sqrt{5}$.

Абу-Камил вводит новую неизвестную величину y

$$y=\frac{10-x}{x},\quad \frac{1}{y}+y=\sqrt{5},\quad y^2+1=\sqrt{5}y,\quad y=\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}.$$

Далее он решает линейное уравнение

$$\frac{10-x}{x}=\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2};\quad 10-\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}x.$$

Абу-Камил возводит обе части в квадрат и получает

$$100-10x+\frac{x^2}{4}=\frac{5}{4}x^2;\quad x^2+10x-100=0,\quad x=\sqrt{125}-5.$$

В трудах персидского математика ал-Караджи и его последователей были изучены уравнения, квадратные относительно x^n, исследованы многие неопределенные уравнения (например, $x^3 \pm y^3 = u^2$), составлена таблица для $(a+b)^n$ до $n=12$. Причем указывалось, что ее можно продолжить, используя формулы

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m, \text{ где } C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \dots m}.$$

Формулу для возведения двучлена $(a+b)$ в натуральную степень n сейчас называют биномом Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}a^{n-m}b^m + \dots + b^n.$$

Школьнику известны формулы:

$$n=1 \quad (a+b)^1 = a+b$$

$$n=2 \quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$n=3 \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Пусть $n=4$. Так как $(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$, легко получить формулу

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Составим таблицу, которую сейчас называют «треугольником Паскаля» (рис. 19).

В строке с номером $n+1$ выпишем коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$. Так, коэффициенты при слагаемых в выражении $a+b$ дают вторую строчку таблицы: 1, 1. Коэффициенты при слагаемых в выражении $a^2+2ab+b^2$ дают третью строчку таблицы: 1, 2, 1 и т. д.

Легко увидеть закон, с помощью которого таблицу можно продолжить неограниченно. Используя таблицу, можно записать формулы

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

и т. д.

В трактате «Трудности арифметики» Омар Хайям, по-видимому, нашел общую формулу для возведения бинома $(a+b)$ в степень n. Однако этот трактат утерян. Первое дошедшее до нас сочинение, в котором содержится общая формула для $(a+b)^n$, n — любое натуральное число, принадлежащее Насир ад-Дину ат-Туси (1265 г.). При этом ат-Туси привел таблицу

для вычисления биномиальных коэффициентов в форме треугольника (рис. 19).

ат-Туси Насир ад-Дин

Однако в силу разобщения между мусульманским и христианским миром и даже между мусульманами Востока и Запада, многие достижения математиков стран ислама, стали известны в Европе так поздно, что к этому времени европейские математики самостоятельно пришли к этим и еще более сильным результатам.

Так, Ньютон для разложения функции в бесконечные ряды широко использовал формулу $(a+b)^\alpha$, где α — любое действительное число (в арабской математике α — натуральное число).

Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654 г.) привел треугольную таблицу для подсчета биномиальных коэффициентов (рис. 19).

Замечательных результатов добились ученые стран ислама в изучении уравнений третьей и частично четвертой степени. Багдадский математик Сабит ибн Корра перевел сочинение Архимеда «О шаре и цилиндре», где была приведена задача о делении шара плоскостью на два сегмента так, чтобы объемы этих сегментов находились в данном отношении. Первым, кто заинтересовался этой задачей был ал-Махани, который сумел придать ей форму уравнения $x^3+r=px^2$, но не смог уравнение решить. Через столетие это сделали Абу Джафар ал-Хазин из Хорасана и работавший в Каире Абу Али ибн ал-Хайсам.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 1

Рис. 19

Арабские ученые использовали методы, разработанные в Древней Греции: метод вставок, метод конических сечений и другие.

Античная наука обращалась к кубическим уравнениям лишь эпизодически. На арабском Востоке над этой проблемой работали многие математики, в результате чего был накоплен большой материал. Возникла необходимость в его систематизации, в построении общей теории.

Это сделал Омар Хайям (1048—1131) — выдающийся мате-

Омар Хайям

матик, астроном, философ и поэт, широко известный в наши дни как автор знаменитых четверостиший.

Он родился в г. Нишапуре (север Ирана) в области Хорасан, жил и работал в Самарканде, Бухаре и других городах Средней Азии и Ирана. В трудное время политических неурядиц, войн, страшных разрушений и массовых убийств жизнь ученого была очень тяжела. Хайям испытывал нужду, страдал из-за религиозных преследований. Лишь изредка он имел возможность спокойно заниматься наукой. Так, некоторое время ему покровительствовал богатый вельможа Абу-Тахир, предположительно главный судья Самарканда, и О. Хайям написал замечательный алгебраический трактат «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы», посвященный решению кубических уравнений. В этом трактате Хайям писал: «Мы были свидетелями гибели ученых, от которых осталась малочисленная, но многострадальная кучка людей».

Когда Хайям был молодым, Среднюю Азию и Иран завоевали кочевники турки — сельджуки. В 1074 г. ученый был приглашен в столицу сельджуков Исфахан (Иран) для работы в астрономической обсерватории, где ему оказывали покровительство визирь Низам ал-Мулк и султан Маликшах.

Хайям стал главой обсерватории. Он работал над реформой иранского солнечного календаря, проводил астрономические наблюдения, составил «Маликшахские астрономические таблицы», написал выдающийся математический трактат «Комментарий к трудным постулатам книги Евклида».

Параллельно с занятиями наукой Хайям создавал свои четверостишия («Рубаи»). Научные труды Хайям писал на арабском языке, стихотворения на персидско-таджикском наречии

В 1092 г. был убит Низам ал-Мулк и умер Маликшах Реформа календаря не осуществилась. Была закрыта обсерватория. Хайям, который в своих стихотворениях высмеивал догмы официальной религии, был обвинен в безбожии. На старости лет он вынужден был совершить паломничество в Мекку. Хайям скончался в бедности в родном Нишапуре.

Хайям развил геометрическую теорию кубических уравнений. В своем алгебраическом трактате он высказал мысль о том, что уравнения третьей степени нельзя решить с помощью циркуля и линейки. Хайям подчеркнул, что их решение «может быть произведено только при помощи конических сечений».

Хайям рассматривал уравнения с произвольными положительными коэффициентами и разыскивал положительные корни. Он дал классификацию кубических уравнений, выделив 19 клас-

сов, из которых 5 классов сводится к линейным или квадратным ($dx^3=cx^2$, $dx^3=bx$ и другие). Для каждого из остальных 14 классов ($dx^3=a$, $dx^3+bx=a$ и так далее) Хайям указал метод решения с помощью конических сечений: парабол, равносторонних гипербол и окружностей.

Как и все математики Востока, Хайям описывал уравнения словесно. Так фраза «Куб и корни равны числу» у него означает уравнение

$$x^3+bx=a.$$

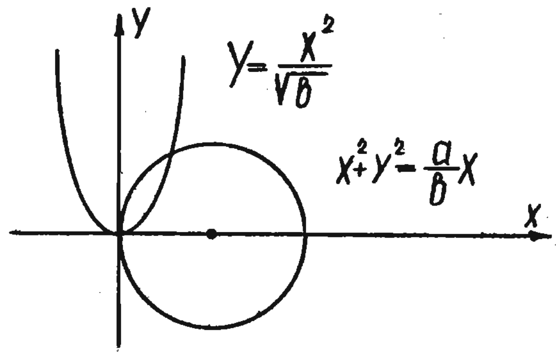

Рис. 20

Чтобы его решить, Хайям рассмотрел окружность $x^2+y^2=\frac{a}{b}x$ и параболу $x^2=\sqrt{b}\,y$ (рис. 20). Абсцисса точки пересечения этих кривых, которая не совпадает с началом координат, есть корень данного уравнения. Действительно, можно записать систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{ax}{b} \\ y=\dfrac{x^2}{\sqrt{b}} \end{cases}$$

Отсюда при $x\neq 0$ получаем

$$x^2+\frac{x^4}{b}=\frac{ax}{b}, \quad bx+x^2=a.$$

Для каждого из 14 классов Хайям решал вопрос о числе положительных корней в зависимости от условий, накладываемых на коэффициенты уравнений. Так он указал, что уравнение $x^3+bx=a$ всегда имеет единственный положительный корень. Лишь рассматривая класс уравнений

$$x^3+bx=cx^2+a,$$

Хайям допустил неточность, не заметив, что оно может иметь три положительных корня. Эту возможность открыл в XVI в. Дж. Кардано.

Хайям поставил проблему решения кубических уравнений в радикалах с помощью алгебраической формулы, но не сумел решить ее и написал: «Может-быть, кто-нибудь из тех, кто придет после нас, узнает это».

Формулы для решения кубических уравнений нашли в XVI в. итальянские математики Ш. дель Ферро и Н. Тарталья, а опубликовал Кардано в 1545 г.

Омар Хайям навсегда вошел в историю всемирной культуры не только как блестящий ученый-энциклопедист, но и как прекрасный поэт, который воспевал свободу, бичевал ханжество и лицемерие, высмеивал суеверия. Его мудрые лирические четверостишия, наполненные глубоким философским смыслом, в XIX и XX веках были переведены на все основные языки мира.

На могиле Омара Хайяма в Нишапуре в 1934 г. воздвигнут обелиск.

Вот одно из четверостиший Хайяма:

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало.
Два важных правила запомни для начала.
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

Омар Хайям завершил построение геометрической теории кубических уравнений. Математики стран ислама уделяли также большое внимание развитию численных методов решения уравнений. Они были необходимы для развития астрономии, которая основывалась не только на наблюдениях, но и на вычислениях с использованием тригонометрических таблиц. Тригонометрические вычисления постоянно приводили математиков Арабского Востока к операциям с иррациональными числами. Они изучали и комментировали книгу X «Начал» Евклида, в которой было изложено учение о квадратичных иррациональностях. При этом были выведены формулы

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Арабские комментаторы иллюстрировали их числовыми примерами. Так, Мухаммад ал-Багдади (умер ок. 1100) привел в своем трактате примеры

$$\sqrt{10}\pm\sqrt{8}=\sqrt{18\pm\sqrt{320}}\qquad\sqrt{6\pm\sqrt{20}}=\sqrt{5}\pm1$$

$$\sqrt[4]{12}\pm\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{27}\pm\sqrt{24}}$$

У ал-Караджи встречаются также преобразования кубических иррациональностей

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16},\quad\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}.$$

Лучшие по точности тригонометрические таблицы были составлены в обсерватории Улугбека (1394—1449). Правитель Самарканда, внук Тимура, Улугбек был одним из самых образованных людей своего времени. Он выстроил в Самарканде обсерваторию, оборудованную по последнему слову техники, в которой работала большая группа математиков и астрономов во главе с Джемшидом Гиясэддином ал-Каши.

В Самаркандской обсерватории был составлен знаменитый «Зидж Улугбека». Эти таблицы отличались особенной полнотой и точностью. В основе лежало более точное, чем это было прежде, определение значения синуса угла величиной в один градус. Оно разыскивалось с помощью численного решения уравнения трисекции угла.

Около 1500 г. Мариам Челеби в комментариях к таблицам Улугбека писал: «Перл славы и чести своего времени Гиясэддин Джемшид, применяя метод алгебры и алмукабалы и считая синус вещью, свел эту задачу к задаче: 45 умноженное на вещь, равно кубу и числу». Здесь Челеби говорит об уравнении, которое решал ал-Каши:

$$45x=x^3+0{,}785\,039\,343\,364\,4006.$$

Джемшид ал-Каши нашел для синуса одного градуса значение

$$\sin 1^\circ=0,017\,452\,406\,437\,283\,571.$$

В трудах Самаркандской школы вычислительная математика стран Востока достигла наивысшего расцвета. В 1449 г. Улугбек был убит в результате заговора, организованного реакционными кругами, и научная школа распалась. Математические исследования в странах ислама пошли на убыль.

Математика стран ислама оказала благотворное воздействие на развитие европейской науки. Ученые средневековой Европы благодаря переводам с арабского на латынь, познакомились с открытиями египтян, вавилонян, индийцев, греков и ученых стран ислама. Они стали строить математику на прочном фундаменте, используя все ценное, что создали их предшественники.

8. Создание буквенной символики.

После того, как в середине первого тысячелетия распалась Римская империя, на территории Европы возникли небольшие феодальные государства, враждовавшие между собой. Стимулов для развития науки не было. В хозяйстве и в быту использовали лишь некоторые арифметические и геометрические сведения: правила действий с целыми числами и дробями, правила измерения геометрических фигур.

С XI века начинается эпоха развитого феодализма. Ремесло отделяется от сельского хозяйства, растут города, ширится торговля, укрепляется денежное обращение. И начиная с XI в. в Западной Европе появляются первые университеты, которые впоследствии сыграли важную роль в развитии математики. Древнейший университет в Европе — медицинский был основан в Салерно. Около 1100 г. был открыт университет в Болонье. В конце XII в. открыты университеты в Париже и Оксфорде, в 1209 г. в Кембридже. В XIV — XV вв. основаны университеты в Праге, Кракове, в Вене, Гейдельберге, Лейпциге, Базеле и т. д.

Первые самостоятельные математики появились в Европе в XIII в. Это были Леонардо Пизанский и Иордан Неморарий. Они создали замечательные оригинальные работы, оказавшие глубокое влияние на развитие западноевропейской математики.

О жизни и творчестве Леонардо Пизанского мы уже писали (см. Часть 1, раздел 5).

О жизни И. Неморария достоверно неизвестно ничего. Имеется ряд весьма убедительных соображений, согласно которым он является Иорданом Саксонским, избранным в 1222 г. в Париже главой влиятельного монашеского ордена доминиканцев. Иордан Саксонский родился в Германии около 1185 г., умер в Париже в 1237 г.

Книга И. Неморария «Арифметика», изложенная в десяти книгах, содержит 500 страниц. Ее важнейшая особенность состоит в том, что Неморарий систематически использует буквы вместо произвольных чисел. Тем самым он положил начало буквенному исчислению.

Древние греки производили операции с отрезками и обозначали их двумя буквами *ab*, где *a* — начало, *b* — конец отрезка. Тех же обозначений придерживался Леонардо Пизанский. Он не вычерчивал в тексте отрезков, но говоря о величинах, по-прежнему обозначал их двумя буквами. Например, Леонардо Пизанский писал: «Если числа *ab* и *bc* делятся на 9, то их сумма *ac* разделится на 9».

Иордан Неморарий в «Арифметике» сделал важный шаг вперед. Он работает не с отрезками, а с числами и для обозначения числа всегда использует одну букву.

Однако у Неморария не было знака равенства, знаков для вычитания, умножения, деления, только сумму двух чисел он записывал как *ab*. Поэтому Неморарию приходилось выводить новые буквы. Так, например, наше выражение $\frac{2ab}{c}$ у него записывалось так: умножим *a* на *b*, получим *d*; умножим *d* на 2, получим *e*; разделим *e* на *c*, получим *f*.

Из-за такого нагромождения букв чрезвычайно затруднялось чтение математического текста, и буквенные обозначения теряли свое главное преимущество — наглядность.

В современной символике запись $\frac{2ab}{c}$ сразу показывает, какие действия нужно произвести над данными числами, чтобы получить искомую величину. Напротив, у Неморария конечный результат выражается через буквы, которых не было вначале.

Таким образом, заменяя числа буквами, Наморарий еще не производил операции с буквами. Но все же он сделал большой шаг вперед по сравнению с математиками стран ислама, которые не использовали буквенных обозначений, решали только уравнения с числовыми коэффициентами, а все правила формулировали словесно.

Неморарий написал также обширный алгебраический трактат «О данных числах», в котором также, как в «Арифметике», широко использовал буквенные обозначения. Его трактат состоит из четырех книг и содержит решения 115 задач на линейные и квадратные уравнения и их системы.

У Неморария нет особого термина и знака для искомой величины. Неизвестное число он называет *numerus*, в отличие от данного числа, которое у него называется *numerus datus*. У него имеется термин *radix* (корень) только в применении к квадратным корням, слово *quadratum* — для обозначения квадрата неизвестной величины.

Совершенствование алгебраической символики красной нитью проходило через все учебники арифметики и алгебры, созданные в XIV — XVI вв. Европейские математики ввели знак равенства и знаки для арифметических операций, знаки для неизвестной величины и ее степеней, в результате чего словесные правила были заменены формулами, а общие алгебраические выражения сами стали предметом вычислений. Этот процесс получил определенное завершение в трудах Ф. Виета.

А начало процесса, несомненно, положено трудами замечательного ученого XIII в. Иордана Неморария, который заменив произвольные числа буквами, внес в европейскую математику идею буквенного исчисления.

Крупнейшим алгебраистом XV в. был итальянец Лука Пачоли (ок. 1445— ок. 1515), который называл алгебру *arte maggiore* —«великим искусством». Символ R у него означал корень квадратный, R_3— кубический корень. Свободный член уравнения Пачоли обозначал n^0 (*numero* — число), x — *Co* (*Cosa* — вещь), x^2— *Ce* (*sensa* — квадрат), x^3— *Cu* (*cuba* — куб).

Здесь мы видим аналогию с геометрической алгеброй древних греков, где было три основных элемента: сторона квадрата, площадь квадрата, объем куба. В наших обозначениях: x, x^2, x^3.

Для записи последующих степеней Пачоли применял мультипликативный принцип.

x^4— *ce. ce.* (*censo de censo*)
x^5— $p^0 r^0$ (*primo relato* — «первое *relato*»)
x^6— *ce. cu.* (*censo de cubo*)
x^7—$2^0 r^0$ («второе *relato*»)
x^8— *ce. ce. ce.* (*censo de censo de censo*)
x^9— *cu. cu.* (*cubo de cubo*) и т. д.

Названия x^5, x^7, x^{11} и других простых степеней, которые нельзя выразить в виде произведения чисел 2 и 3, у Пачоли состоят из номера простой степени и слова *relato*.

Покажем, что Диофант использовал аддитивный принцип обозначения степеней (см. Часть 2, раздел 6). Сравним обозначения Диофанта и Пачоли.

Диофант	Лука Пачоли	Современная запись
величина	*co*	x
квадрат	*ce*	x^2
куб	*cu*	x^3
квадрато—квадрат	*ce ce.*	x^4
квадрато—куб	$p^0 r^0$	x^5
кубо—куб	*ce. cu.*	x^6

Заметим, что у Диофанта $x^6=x^{3+3}$ (аддитивный принцип), у Пачоли $x^6=x^{2\cdot 3}$ (мультипликативный принцип).

Сложение у Пачоли обозначалось знаком *p* (*plus*), а вычитание знаком *m* (*minus*).

Следующий шаг в усовершенствовании символики сделали немецкие алгебраисты XVI в., которых называют «коссистами». Дело в том, что они обозначали алгебру словом *Coss* от итальянского *Cosa* — вещь. Так, Ян Видман, о котором мы уже писали (см. Часть 1, раздел 5) в книге по арифметике называл алгебраические правила так: «*Regel Algebre oder Coss*». Ян Видман был первым, кто начал в университете чтение лекций по алгебре.

В первых коссистских рукописях использовался аддитивный принцип обозначения степеней, а в последующих — мультипликативный.

Как в геометрической алгебре древних имелись три основные степени: *Coβ* — вещь, *Zensus* или *Quadrat* — квадрат, *Cubus* — куб.
Затем использовались следующие обозначения:

$$r - x,\quad Z - x^2,\quad c - x^3,$$

$$ZZ - x^4,\quad ss\,(surdosolidum) - x^5,$$

$$Zc - x^6,\quad \varepsilon\beta is\,(bissurdosolidum) - x^7.\quad ZZZ - x^8 \text{ и т. д.}$$

«*Surdosolidum*» — буквально «глухое тело». Это латинский эквивалент арабского слова «ассам» — «немой, глухой», которым арабы переводили греческое слово «невыразимый».

Слово «невыразимый», которое использовал для этой цели еще в XI в. византийский ученый Михаил Пселл, означало, что числа 5 и 7 нельзя выразить как произведение чисел 2 и 3.

Терминология коссистов была распространена не только в Германии, но и во многих странах Европы. Ее использовал Л. Ф. Магницкий в своей «Арифметике» (1703). У него x^2— «зензус», x^3—«кубус», x^4—«зензизенз», x^5—«сурдесолидус», x^6—«зензикубус», x^7—«бисурдесолидус» и т. д.

Создателем буквенного исчисления по праву считают Франсуа Виета (1540—1603), крупнейшего математика XVI в.

Юрист по образованию, Виет увлекся астрономией и приступил к работе над усовершенствованием тригонометрических таблиц. Он издал в Париже в 1579 г. уже упоминавшийся «Математический канон» — таблицы, в которых используются десятичные дроби (см. Часть 1, раздел 4).

Виет был советником короля Генриха III, а после его смерти — короля Генриха IV. Он помог Генриху III в расшифровке переписки его врагов с испанским двором. Исследуя попавшие к нему в руки письма, Виет раскрыл тайну шифра, состоявшего из 500 знаков. Испанцы в страхе утверждали, что на службе французского короля находится дьявол.

Свои алгебраические идеи Виет изложил в сочинении «Введение в аналитическое искусство», в котором предложил преобразовать алгебру в мощное математическое исчисление. Он писал: «Все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, легко решаются десятками с помощью нашего искусства».

Виет предложил: «Искомые величины будем обозначать буквой *A* или другой гласной *E, I, O, U*, а данные — буквами *B, D, G* или другими согласными».

Буквами для обозначения величин пользовались Иордан Неморарий, Лука Пачоли и многие другие математики. И поэтому может показаться, что Виет ввел в символику не так много. На самом же деле он сделал важнейший шаг вперед, благодаря которому математика получила возможность не только решать отдельные уравнения, но и находить общие закономерности, проводить доказательство в общем виде.

Благодаря символике Виета можно записать квадратное уравнение в виде $x^2+px+q=0$ и исследовать его. Пусть x_1 и x_2— корни уравнения. Тогда $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+px+q$. Откуда получаем

$$x^2-(x_1+x_2)\,x+x_1+x_2=x^2+px+q$$

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=q \\ x_1+x_2=p \end{cases} \text{— Это формулы Виета}$$

Рассмотрим теперь кубическое уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$.
Пусть x_1, x_2, x_3— его корни. Можно записать

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+px^2+qx+r.$$

Отсюда получаем формулы, связывающие коэффициенты кубического уравнения и его корни

$$p=-(x_1+x_2+x_3)$$

$$q=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

$$r=-x_1x_2x_3$$

Виет нашел аналогичные формулы также для уравнений четвертой и пятой степеней. Он ввел термин «коэффициент».

Математики первой половины XVII в. развили идеи Виета и усовершенствовали его обозначения. Символика Декарта близка к современной. Он обозначил неизвестные не гласными, а последними буквами алфавита. Отсюда наши обозначения x, y, z.

9. Решение уравнений третьей и четвертой степеней.

XV и XVI столетия вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения» Для нее характерен расцвет науки и культуры, связанный с глубокими социальными преобразованиями. В недрах феодализма создавалась новая формация — буржуазное общество. В Европе появились компас, часы и порох, дешевая бумага и книгопечатание. Развивается промышленность, требующая технических усовершенствований и изобретений, появляются стимулы для развития науки. Развитие торговли привело к исключительному росту мореплавания и к великим географическим открытиям.

Революционный переворот в естествознании произошел благодаря учению Коперника (1473—1543). Его гелиоцентрическая система мира пришла на смену геоцентрической системе Птолемея. Для обоснования новой картины мира необходимо было развивать математику, механику, физику.

В XV — XVI вв. расцвет науки происходит главным образом в Италии, Франции и Германии, а позднее в конце XVI в. в Голландии, которая в это время переживала первую в Европе буржуазную революцию.

Итальянские математики XVI в. сделали крупнейшее математическое открытие. Они нашли формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Рассмотрим произвольное кубическое уравнение

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

и покажем, что с помощью подстановки $y=x-\dfrac{a}{3}$ его можно преобразовать к виду $x^3+px+q=0$.

Пусть $y=x+\alpha$. Получим $(x+\alpha)^3+a(x+\alpha)^2+b(x+\alpha)+c=0$, $x^3+(3\alpha+a)x^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)x+(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)=0$. Положим $3\alpha+a=0$, т. е. $\alpha=-\dfrac{a}{3}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$x^3+px+q=0.$$

Такая запись впервые появилась у Декарта, который рассматривал уравнения как с положительными, так и с отрицательными коэффициентами. Математики XVI в. решали уравнения только с положительными коэффициентами. Поэтому они изучали три вида кубических уравнений:

$$x^3=ax+b,\quad x^3+ax=b,\quad x^3+b=ax.$$

Уравнения записывались словами. Например, вместо $x^3+ax=b$ писали: «куб с вещами вместе равны какому-нибудь числу».

Лука Пачоли в книге «Сумма арифметики» (1491) заявил что для решения кубических уравнений «искусством алгебры еще не дан способ, как не дан способ квадратуры круга». Это была одна из первых печатных книг по математике, написанная к тому же не на латыни, а на итальянском языке. Слова Пачоли стали отправным пунктом для исследований итальянских ученых.

В 1505 г. профессор математики Болонского университета Шипион (Сципион) дель Ферро нашел формулу для решения уравнения

$$x^3+ax=b.$$

но не опубликовал ее, а сообщил своему ученику Антонио Марио Фиоре.

Н. Тарталья

В XVI в. было распространено соревнование между учеными, проводившееся в форме диспута. Математики предлагали друг другу определенное число задач, которые нужно было решить к началу поединка. Выигрывал тот, кто решил большее число задач.

Антонио Фиоре постоянно участвовал в турнирах и всегда выигрывал, так как владел формулой для решения кубических уравнений. Победитель получал денежное вознаграждение, ему предлагали почетные, высоко оплачиваемые должности.

Двенадцатого февраля 1535 г. должен был состояться турнир между Фиоре и Тартальей. Никколо Тарталья (1500—1557) родился в Брешии в бедной семье. Его мать не смогла полностью расплатиться с учителем, и Никколо узнал в школе лишь начало азбуки до буквы «к». Всеми остальными знаниями он овладел самостоятельно.

Когда мальчику было шесть лет, он получил удар мечом в гортань в храме, где спрятался вместе с родственниками от французских войск, захвативших Брешию. С тех пор Никколо говорил с трудом. Отсюда его прозвище — Тарталья («заика»).

Тарталья преподавал математику в Вероне, Венеции, Брешии. Перед турниром с Фиоре он получил от противника 30 задач, увидел, что все они сводятся к кубическому уравнению $x^3+ax=b$, $a>0$, $b>0$. и приложил все силы для его решения.

Отыскав формулу, Тарталья решил все задачи, предложенные ему Фиоре, и выиграл турнир. Через день после поединка он нашел формулу для решения уравнения

$$x^3=ax+b,\ a>0,\ b>0 \qquad (1)$$

Это было величайшее открытие. После того, как в Древнем Вавилоне была найдена формула для решения квадратных уравнений, выдающиеся математики в течение двух тысячелетий безуспешно пытались найти формулу для решения кубических уравнений. Метод решения Тарталья держал в тайне. Рассмотрим уравнение

$$x^3=ax+b$$

Тарталья использовал подстановку $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$
Из (1) он получил $(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})^3=a(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})+b$

$$u+v+3\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v}\,(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})=a(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})+b$$

$$u+v=b,\ 3\sqrt[3]{uv}=a$$

Для u и v получена система $\begin{cases} u+v=b \\ uv=\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \end{cases}$.

Значит, они являются корнями квадратного уравнения

$$y^2-by+\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$$

Следовательно, для отыскания x имеем формулу

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+$$
$$+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad (2)$$

Ее называют сейчас формулой Кардано так как она впервые была опубликована в 1545 г. в книге Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах».

Джироламо Кардано (1501—1556) окончил университет в Падуе. Его главным занятием была медицина. Кроме того он занимался философией, математикой, астрологией, составлял гороскопы Петрарки, Лютера, Христа, английского короля Эдуарда VI. Папа римский пользовался услугами Кардано-астролога и покровительствовал ему. Кардано умер в Риме. Существует легенда, что он покончил жизнь самоубийством в тот день, который предсказал, составляя собственный гороскоп, как день своей смерти.

Кардано неоднократно обращался к Тарталье с просьбой сообщить ему формулу для решения кубических уравнений и обещал хранить ее в тайне. Он не сдержал слово и опубликовал формулу, указав, что Тарталье принадлежит честь открытия «такого прекрасного и удивительного, превосходящего все таланты человеческого духа».

Дж. Кардано

В книге Кардано «Великое искусство» опубликована также формула для решения уравнений четвертой степени, которую открыл Луиджи Феррари (1522—1565) — ученик Кардано, его секретарь и поверенный.

Изложим метод Феррари. Запишем общее уравнение четвертой степени

$$y^4+py^3+qy^2+ry+s=0.$$

С помощью подстановки $y=x+\alpha$ его можно привести к виду

$$x^4+ax^2+bx+c=0 \qquad (3)$$

Используя метод дополнения до полного квадрата, запишем

$$x^4+ax^2+\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}.$$

Феррари ввел параметр t и получил

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2=\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2+2t\left(x^2+\frac{a}{2}\right)+t^2.$$

Отсюда

$$x^4+ax^2+bx+c=\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2-$$
$$-2t\left(x^2+\frac{a}{2}\right)-t^2-\frac{a^2}{4}+bx+c$$

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2=2tx^2-bx+\left(at+t^2+\frac{a^2}{4}-c\right). \qquad (4)$$

В левой части уравнения (4) стоит полный квадрат, а в правой квадратный трехчлен относительно x. Чтобы правая часть была полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена равнялся нулю, т. е. число t должно удовлетворять уравнению

$$b^2=8t\left(at+t^2+\frac{a^2}{4}-c\right). \qquad (5)$$

Кубическое уравнение (5) Феррари решил по формуле Кардано. Пусть t_0 — корень уравнения (5). Тогда уравнение (4 запишется в виде

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t_0\right)^2=2t_0\left(x-\frac{b}{4t_0}\right)^2$$

Отсюда получаем два квадратных уравнения

$$x^2+\frac{a}{2}+t_0=\pm\sqrt{2t_0}\left(x-\frac{b}{4t_0}\right).$$

Они дают четыре корня исходного уравнения (3).

Итак, чтобы решить уравнение четвертой степени методом Феррари, нужно решить вспомогательное кубическое уравнение, а затем два квадратных.

Теория кубических уравнений привела математиков к открытию мнимых чисел. Дело в том, что, решая кубические уравнения, итальянские алгебраисты приходили в отдельных задачах к парадоксальному результату, который называли неприводимым случаем.

Приведем пример. Рассмотрим уравнение

$$x^3=15x+4 \qquad (6$$

Легко проверить, что $x=4$ — корень этого уравнения.

Естественно считать, что, используя формулу Кардано (2), мы найдем этот корень. Проведем вычисления, учитывая, что $a=15$, $b=4$. По формуле (2) находим

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \qquad (7)$$

Как понять выражение $\sqrt{-121}$? На этот вопрос первым ответил инженер Рафаэль Бомбелли (ок. 1526—1573), работавший в Болонье. В 1572 г. он издал книгу «Алгебра», в которой ввел в математику число i такое, что

$$i\cdot i=-1. \qquad (8)$$

Бомбелли сформулировал правила операций с числом i:

$$1\cdot i=i \quad (-1)\cdot i=-i \quad i\cdot i=-1 \quad (-i)\ (i)=1$$

$$1\cdot(-i)=-i \quad (-1)\ (-i)=i \quad i\cdot(-i)=1 \quad (-i)\ (-i)=-1$$

Согласно теории Бомбелли выражение $\sqrt{-121}$ можно записать так:

$$\sqrt{-1\cdot 121}=\sqrt{i\cdot i\cdot 121}=11i,$$

а корень уравнения (6), имеющий вид (7) можно записать следующим образом

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}. \qquad (9)$$

Затем Бомбелли рассмотрел комплексные числа

$$a+bi,$$

где a и b — действительные числа.

Покажем, как производится сложение комплексных чисел:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Пример.

$$(2+7i)+(1+5i)=3+12i.$$

Умножение комплексных чисел производится следующим образом.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdii=$$

$$=ac+(bc+ad)i-bd=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

Пример.

$$(2+i)^2=(2+i)(2+i)=4+2i+2i+i\cdot i=4+4i-1=3+4i$$

Итак,

$$(2+i)^2=3+4i$$

Найдем $(2+i)^3$.

$$(2+i)^3=(3+4i)(2+i)=6+8i+3i+4i\cdot i=6+11i-4=2+11i$$

Легко показать, что $(2-i)^3=2-11i$.

Выражение (9) для x можно переписать так:

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}=2+i+2-i=4$$

Таким образом, с помощью нового понятия комплексного числа $a+bi$ мы нашли корень уравнения (6), применив формулу Кардано. «Неприводимый случай» получил разъяснение. Однако остался вопрос: что такое комплексное число $a+bi$? Ответ на него математики искали в течение двух последующих столетий. Лишь в XIX в. была получена геометрическая интерпретация комплексного числа.

В XVI — XVII в. природа мнимого числа i была окутана мистическим туманом. Лейбниц называл его «чудесным прибежищем божественного духа, амфибией, между бытием и небытием». Тем не менее число i в XVII в. записали в виде $\sqrt{-1}$, а числа $a+b\sqrt{-1}$ постоянно использовали для решения квадратных и кубических уравнений.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2+1=0.$$

Оно не имеет действительных корней. Если же применить теорию комплексных чисел, то будут найдены два корня уравнения

$$x_1=i,\ x_2=-i.$$

В 1629 г. голландский ученый Альбер Жирар (1595—1632) впервые сформулировал теорему, утверждающую, что алгебраическое уравнение степени n имеет n корней, если учитывать кратность корней и использовать комплексные числа.

Первую попытку доказать теорему предпринял Декарт Он ввел термин для чисел $a+bi$, назвав их мнимыми, воображаемыми (*imaginaire*).

В течение нескольких столетий теорему о числе корней называли основной теоремой алгебры. Выдающиеся математики XVIII в.— Эйлер, Даламбер, Лагранж, Вандермонд — давали ей различные доказательства. Начиная с 1799 г., Гаусс дал основной теореме алгебры четыре доказательства. Он ввел термин «комплексное число».

Л. Эйлер установил замечательное соотношение между показательной и тригонометрическими функциями

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

используя комплексные числа. С их помощью была получена первая интерпретация неевклидовой геометрии, в которой геометрия Лобачевского была представлена как геометрия на «мнимой сфере». В XIX в. была построена теория функций комплексного переменного, вообще обобщающая математический анализ. Начало этим важнейшим теориям положили итальянские алгебраисты XVI в.

10. Новый облик алгебры.

Подведем итоги. Мы видели, что, начиная с древнейших времен, алгебра всегда была в центре внимания математиков. Ее основным объектом всегда было уравнение, а главная задача состояла в том, чтобы найти правила отыскания корней уравнений.

При решении уравнений второй, третьей и четвертой степеней были найдены формулы, с помощью которых корни уравнений выражаются через коэффициенты с помощью арифметических операций и извлечения корней. Так, решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ производится по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

содержащей квадратный радикал $\sqrt{b^2-4ac}$. Решение кубических уравнение производится по формуле Кардано, содержащей кубические и квадратные радикалы. Уравнение четвертой степени сводится к решению кубического и квадратных уравнений.

Естественно, что перед математикой стал вопрос о поисках формул для решения в радикалах алгебраических уравнений степени n, где $n\geqslant 5$. Математики XVIII в.— Эйлер, Чирнгауз, Вандермонд, Безу и другие — отдали много сил решению этой проблемы, но не пришли к успеху.

Мы видели, что Тарталья с помощью подстановки $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$ свел кубическое уравнение к квадратному. Феррари сумел свести к кубическому уравнению четвертой степени. Математики XVIII в. совершали искусные алгебраические преобразования, производили всевозможные подстановки, пытаясь

понизить степень алгебраических уравнений. Методы, приводящие к цели при $n=3$ и $n=4$ в случае $n=5$ приводили к уравнениям более высокой степени. Этим эмпирическим поискам положил конец знаменитый мемуар Лагранжа, с которого началась новая эпоха в решении алгебраических уравнений.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) в трактате «Размышление об алгебраическом решении уравнений», опубликованном в 1770 г., подверг критическому анализу все методы решения алгебраических уравнений степеней $n=2$, 3, 4 и показал, что в случае $n\geqslant 5$ они не приводят к цели. Таким образом, в отличие от всех предшествующих ученых, Лагранж изучал не

Ж. Лагранж

Н. Абель

сами уравнения, а методы их решения. Его мемуар стал исходной точкой исследований Абеля, Гаусса, Галуа, которые в XIX в. стали основоположниками новой алгебры.

Молодой норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802—1829) доказал в 1826 г. теорему о неразрешимости в радикалах уравнений пятой и высших степеней.

Он писал: «Я принимался решать уравнения, не зная, возможно ли это. В этом случае, быть может, и удастся найти решение, хотя и не наверняка; но, если, к несчастью, решение не существует, можно безрезультатно потратить вечность на его поиски... Вместо того, чтобы искать некое соотношение, не зная заранее, существует ли оно, нужно выяснить, действительно ли существует такое соотношение».

Итак, в начале XIX в. выяснилось, что для общего алгебраического уравнения степени $n\geqslant 5$

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

не существует формулы, по которой корни уравнения можно выразить через его коэффициенты с помощью алгебраических операций и радикалов.

Возможно, однако, что существуют классы уравнений, которые разрешимы в радикалах. Первый важный класс таких уравнений нашел Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) в своих «Арифметических исследованиях», опубликованных в 1801 г. Это сочинение было настольной книгой всех крупных математиков XIX в. Оно оказало влияние и на юного Эвариста Галуа. Гаусс исследовал класс уравнений:

$$x^n-1=0.$$

Молодой французский математик Э. Галуа (1811—1832) в двадцать лет погибший на дуэли, построил теорию решения алгебраических уравнений, основанную на понятии группы. Он прожил короткую, но чрезвычайно яркую жизнь, наполненную революционной борьбой и активной научной работой.

В ночь перед дуэлью Галуа еще раз просмотрел свою работу по теории алгебраических уравнений и переслал ее своему другу О. Шевалье. Она была опубликована лишь в 1846 г.

Галуа родился в эпоху наполеоновской империи, пережил Реставрацию и застал начало царствования Луи-Филиппа. Он вступил в республиканскую партию, которая в то время была самой передовой политической группировкой. Республиканцы считали, что сущность прогресса состоит в стремлении к социальной справедливости, а ее основой являются равные права и равные обязанности граждан.

Э. Галуа

Политика правительства Луи-Филиппа противоречила интересам народа. В июле 1830 г. в стране начался голод, возникли беспорядки. Буржуазия, в зависимости от колебаний политического маятника, искала поддержки то справа, то слева, забывая об общественном благе и социальной справедливости. Республиканцев сплачивало их оппозиционное отношение к существующему режиму.

За революционную деятельность Галуа был исключен из Нормальной школы, студентом которой он являлся, а затем приговорен к тюремному заключению. Его последнее письмо заканчивается словами: «Прощайте! Я отдал немалую толику своей жизни для общего блага».

Ранняя смерть Галуа была невосполнимой утратой для науки. В течение нескольких десятилетий математики изучали его теорию, улучшали ее, заполняли обнаруженные в ней пробелы. В результате изменился сам предмет алгебры. Сейчас она занимается не решением алгебраических уравнений, а исследованием алгебраических структур — групп, колец, полей.

Птолемей однажды спросил Евклида, нет ли в геометрии более краткого пути, чем его «Начала», на что тот ответил, что в геометрии нет царских дорог.

ПРОКЛ

ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ.

1. Первые понятия и теоремы.

Возникновение первых геометрических понятий непосредственно связано с повседневной жизнью человека: с измерением полей, строительством жилых зданий и амбаров, с изготовлением и украшением предметов быта.

Уже в далекой древности скребки и ножи изготовлялись в форме ромбов, треугольников, сегментов. Поля обычно имели форму прямоугольника. При строительстве домов и измерений земель выработался ряд правил для обращения с прямыми линиями. Английское слово «*straight*» — «прямой» родственно глаголу «*stretch*» — «натягивать». Во многих странах людей, которые занимались разделом земли на участки, называли «натягивателями веревки». Слово «линия» (*linea*) происходит от латинского *linum* — «лен», «льняная нить».

С давних пор человек вел счет времени, наблюдая за движением Солнца, Луны и звезд. При мореплавании пользовались созвездиями как ориентирами. Так возникали первые представления об окружностях, шарах, углах.

Большинство геометрических терминов произошло от греческих слов, означающих названия конкретных предметов. Так термин «куб» произошел от греческого слова, означающего игральную кость. Термин введен пифагорейцами, затем он встречается у Евклида.

Слово «центр» (латинское *centrum*) означало палку с заостренным концом, которой погоняли быков; позднее оно обозначало ножку циркуля, помещенного в центр описываемой окружности.

Термин «ромб» происходит от греческого «бубен», а «трапеция» — от слова «столик» (сравни наше слово «трапеза»).

Слово «сфера» произошло от греческого «шар», «мяч». Оно встречается у Платона и Аристотеля, т. е. до Евклида. Греческое «конус» означало понятия: «сосновая шишка», «верхушка шлема», «остроконечный предмет». Термин «конус» вошел в математику благодаря работам Евклида и Архимеда. Термин «цилиндр» происходит от греческого слова «валик», которое образовалось от греческого глагола «вращаю», «катаю».

Термин «точка» происходит от греческого глагола «ткнуть». Тот же смысл имеет латинское *punctum*, от которого произошло слово *Punkt* — «точка». Латинское *pungo* значит «укалываю» (сравни с медицинским термином «пункция»).

Итак, в Древней Греции уже была создана система геометрических терминов для обозначения абстрактных геометрических фигур.

В Древнем Египте еще не было терминов «фигура», «сторона фигуры». Использовались слова «поле», «границы поля», «длина» и «ширина» поля. Греческий историк Геродот указывал, что развитие геометрии в Древнем Египте связано с необходимостью после каждого разлива Нила заново распределять поля между их владельцами.

В папирусах Древнего Египта, которые дошли до наших дней, содержатся точные правила для вычисления площадей треугольников и трапеций. Для вычисления площади круга использовали формулу

$$S=\left(\frac{8}{9}d\right)^2,$$

где d — диаметр круга. Отсюда следует, что для числа π было получено хорошее приближение

$$\pi=4\left(\frac{8}{9}\right)^2\simeq 3{,}1605.$$

Для вычисления площади четырехугольника со сторонами a, b, c, d использовалась формула

$$S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$

Ее применяли к участкам, форма которых близка к прямоугольной. Сознавали ли египтяне, что эта формула является приближенной? На этот вопрос мы ответить не можем. Египетские тексты не содержали доказательств. В них были только правила для отыскания площадей и объемов.

Египтяне умели рассчитывать количество материалов, необходимых для строительства пирамид. Они решали многочисленные задачи на вычисление зерна в амбарах, которые обычно имели форму куба, параллелепипеда, призмы или цилиндра. Объем амбара находили с помощью правила, согласно которому площадь основания нужно умножить на высоту.

Самое большое достижение египетской геометрии состоит в использовании формулы для объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями a^2 и b^2:

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

В египетских текстах нет никаких сведений о теореме, которую мы сейчас называем теоремой Пифагора. Однако греческие ученые, побывавшие в Египте, сообщали о том, что там имеется правило для построения прямого угла. Использовалась веревка, разделенная на 12 равных частей. Ее натягивали в виде треугольника со сторонами 3, 4, 5.

Эти сведения относятся к середине первого тысячелетия до

н. э. А задолго до этого времени теорема о связи между сторонами прямоугольного треугольника

$$a^2+b^2=c^2$$

была известна в Вавилоне.

В Древнем Вавилоне знали много так называемых «пифагоровых троек». До нас дошла таблица, содержащая тройки: 60, 45, 75, т. е. 4·15, 3·15, 5·15, тройки 72, 65, 97, а также еще более сложные, например, 3456, 3367, 4825. Ясно, что эта таблица не могла быть составлена с помощью простого подбора. Наверняка, вавилоняне знали какой-нибудь общий прием для отыскания «пифагоровых троек».

Математики Древнего Вавилона, кроме простейших фигур, рассмотренных в Египте, изучили также некоторые правильные многоугольники, сегменты круга, усеченный конус. Они решали задачи, связанные с подобием геометрических фигур.

Площадь круга и длину окружности вавилоняне вычисляли, считая, что $\pi=3$. В одном тексте встречается лучшее приближение

$$\pi=3\frac{1}{8}=3{,}125.$$

Площадь круга S и длину его окружности c в Вавилоне впервые связали формулой

$$S=\frac{c^2}{12}.$$

Позднее это правило использовали в Индии и в Китае.

Вавилонская геометрия, также как и египетская, теснейшим образом связана с практикой. Она использовалась при межевании земель, строительстве домов, плотин, каналов, возведении насыпей. Сохранились планы земельных участков, имеющих форму треугольников, прямоугольников, трапеций.

Итак, геометрия древнейших цивилизаций была тесно связана с практикой. Правила устанавливались наощупь, многие из них были приближенными. Никаких следов рассуждений и доказательств не обнаружено.

Совершенно иначе выглядела геометрия Древней Греции. Она превратилась в науку, основанную на строгих доказательствах. Усвоив все конкретные знания, полученные в Египте и Вавилоне, греки решительным образом порвали с прагматизмом ученых Востока. Они выдвинули на первое место строгость логического построения, изящество и точность доказательств.

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии (первая половина VI в. до н. э.). Ее основатель Фалес доказал, что диаметр делит круг пополам, доказал теорему о равенствах углов при основании равнобедренного треугольника, теорему о равенстве вертикальных углов, а также теорему о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим углам.

Доказательства теорем Фалес, вероятно, проводил с помощью наложения фигур. Математик и астроном Прокл (410—485), живший в Афинах, в своих комментариях к «Началам» Евклида дал краткий обзор развития геометрии от Фалеса до Евклида. Он писал: «Иногда Фалес рассматривал вопрос несколько обще, иногда более опираясь на наглядность».

Фалес умел измерять высоту пирамид по теням, которые они отбрасывают. Для этого рядом с пирамидой он устанавливал вертикальный шест, а затем использовал утверждение: длина тени пирамиды относится к длине тени шеста как неизвестная высота пирамиды к длине шеста.

Фалес использовал теоремы геометрии также для решения практической задачи определения расстояния корабля от берега. Пусть корабль находится в точке B, а наблюдатель в точке A (рис. 21).

Чтобы найти расстояние AB, построим треугольник ABC, где C — точка, доступная наблюдателю, $\angle BAC = 90°$. Продолжим прямую AC так, чтобы выполнялось равенство $CD = AC$ и проведем DE перпендикулярно CD.

Углы $\angle ACB$ и $\angle DCE$ равны как вертикальные, $\triangle ABC = \triangle DEC$ по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $DE = AB$. Измерив DE, найдем расстояние AB.

Итак, Фалес строил геометрию как отвлеченную теоретическую науку, а затем применял ее для решения практических задач.

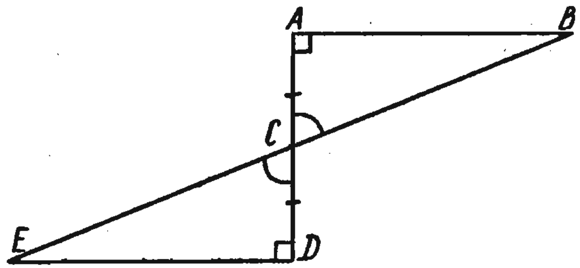

Рис. 21

Коренное преобразование геометрии произвел Пифагор и ученые его школы. Они доказали теорему Пифагора, пришли к открытию несоизмеримых отрезков и создали геометрическую алгебру, все построения в которой проводились с помощью циркуля и линейки.

Перед античной наукой, накопившей большое число новых фактов, утверждений, теорем, встала задача систематического изложения геометрии, выяснения ее логических основ. Впервые такую попытку предпринял Гиппократ Хиосский (ок. 450—430 гг. до н. э.). Его исследования были продолжены другими учеными. Завершил этот труд Евклид в своем знаменитом

сочинении «Начала». Д. Я. Стройк пишет: «В истории Западного мира «Начала», после Библии, вероятно, наибольшее число раз изданная и более всего изучавшаяся книга. После изобретения книгопечатания появилось более тысячи изданий, а до того эта книга, преимущественно в рукописном виде, была основой при изучении геометрии. Большая часть нашей школьной геометрии заимствована часто буквально из первых шести книг «Начал», и традиция Евклида до сих пор тяготеет над нашим элементарным обучением».

Евклид

2. Аксиоматическое построение геометрии.

Евклид (365— ок. 300 гг. до н. э.) работал в Александрии, столице царства Птолемеев. Птолемей I основал Мусейон — дом Муз, в который приглашали выдающихся ученых всего мира. При Мусейоне работали лаборатории, зоологический и ботанический сады, обсерватория. Богатейшая библиотека к I в. н. э. насчитывала 700 тысяч рукописей. Мусейон субсидировался государством, ученые получали жалованье. В Александрии III в. до н. э. математика пережила свой золотой век.

О жизни Евклида почти ничего неизвестно. Мы не знаем, откуда он был родом, где и когда учился. Математик Папп, живший в Александрии в IV в. н. э., писал о том, что Евклид был очень доброжелателен, корректен, порядочен и совершенно лишен тщеславия.

Как и другие математики Древней Греции, Евклид занимался астрономией, оптикой, теорией музыки. До нас дошли его сочинения: «Феномены» (сферическая астрономия), «Оптика» (учение о перспективе), «Сечение канона» (теория музыки). В книге «Данные» Евклид изучал вопрос о том, каким должно быть минимальное число величин, чтобы сделать задачу определенной. В сочинении «Ложные заключения», которое до нас не дошло, он исследовал логические основы математики.

Систематизация огромного математического материала, которую осуществил Евклид, требовала создания системы научных принципов. Развитие геометрии в Древней Греции протекало в тесном сотрудничестве математиков и философов. Аристотель, а затем Платон, к школе которого принадлежал, по-видимому, Евклид, утверждали, что все научные положения должны выводиться из некоторых посылок (допущений) с помощью цепочки умозаключений.

В основе «Начал» Евклида лежит система определений, аксиом и постулатов. «Начала» состоят из тринадцати книг, и каждая начинается с определений. В первой книге 35 определений. В XVIII в. геометр Ламберт писал: «То, что Евклид предпосылает в таком изобилии определения, есть нечто вроде номенклатуры. Он, собственно говоря, поступает так, как поступает, например, ремесленник, начиная знакомить учеников с названиями орудий своего мастерства».

Приведем первые девять определений:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Концы линий суть точки.
4. Прямая линия есть та, которая одинаково лежит относительно всех своих точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы же или края поверхности суть линии.
7. Плоская поверхность есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.
8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух линий на плоскости, встречающихся и не лежащих на одной прямой.
9. Когда же линии, содержащие угол, суть прямые, то угол называется прямолинейным.

Следующие 25 определений вводят понятия прямого угла, перпендикуляра, тупого угла, острого угла, круга, окружности, треугольника, четырехугольника, квадрата, прямоугольника, ромба и другие.

Наконец, приводится определение параллельных прямых, сыгравшее огромную роль в дальнейшем развитии математики.

«Параллельные прямые суть, те, которые лежат в одной плоскости и, будучи продолжены в обе стороны, нигде не встречаются».

Заметим, что определения Евклида можно разбить на две группы: рабочие определения и описательные. Рабочие служат для построения теории. Они постоянно используются при доказательстве теорем. Таковы определения прямого угла, треугольника, ромба и другие.

Определения «точки» и «линии» (первое и второе) носят описательный характер, и впоследствии Евклид их не употребляет. Да и как можно было бы использовать туманное определение прямой? То же самое относится и к определению плоскости (см. определение 7). В современной аксиоматике нет описательных определений.

Анализ определений Евклида показывает, что для него исходными понятиями являются «длина» и «ширина». Это еще раз подчеркивает неразрывную связь геометрии и землемерия. Установление точных границ земельных участков требовало сужения пограничной черты, что привело науку к абстрактному понятию «линии, не имеющей ширины».

Наблюдения за солнечными лучами, техника, строительные работы и другие практические задачи привели к понятиям прямой и плоскости. Это абстрактные понятия.

Замечательный математик Н. И. Лобачевский (1792—1856) писал: «Поверхности, линии, точки, как их определяет геометрия, существуют только в нашем воображении... В природе нет ни прямых, ни кривых линий, нет плоскостей и кривых поверхностей: в ней находим одни тела, так что все точки, созданные нашим воображением, существуют в одной теории».

В первой книге «Начал» Евклид формулирует пять аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства величин. Их ввел в математику Евдокс.

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляют равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

Все аксиомы, кроме четвертой, относятся не только к геометрическим величинам, но и к числам. Четвертая аксиома является единственной, в которой говорится о движении (совмещении).

В доказательствах Евклид использует идею движения. Так, в первой книге «Начал» доказывается признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. Евклид производит наложение одного треугольника на другой. При этом он, разумеется, считает, что при движении сохраняются длины сторон и углы треугольника. Однако в его аксиоматике нет соответствующих аксиом.

Можно привести и другие примеры, показывающие, что в аксиоматике Евклида имеются пробелы. В следующем разделе будет показано, что Евклид использовал идею непрерывности, хотя в его системе нет аксиом, на которые он мог бы в этом вопросе опереться.

Эти недостатки в аксиоматике Евклида были обнаружены и преодолены лишь в конце XIX в. Наиболее распространенная в наше время и общепризнанная система аксиом геометрии принадлежит Д. Гильберту. Впервые она появилась в 1899 г. в его сочинении «Основания геометрии».

Н. И. Лобачевский

В первой книге «Начал» Евклид приводит пять постулатов:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описана окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.

5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встречаются с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

В первых трех постулатах Евклид описывает построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки. Четвертый постулат — это знаменитый постулат о параллельных. Он утверждает, что если $\alpha+\beta<180°$, то прямые пересекаются в некоторой точке O (см. рис. 22).

Пятый постулат удивлял ученых сложностью своей формулировки. Он больше напоминал теорему, чем постулат. Поэтому уже древнегреческие ученые пытались заменить его другим, более простым предложением. Прокл в V в. н. э. дал ему следующую формулировку: через точку M, лежащую вне прямой I в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной (рис. 23).

При построении геометрии Евклид попытался как можно дольше обходиться без использования пятого постулата. Таковы первые 28 предложений его «Начал». К ним относятся: построение равностороннего треугольника на данном отрезке; построение отрезка и угла, равных данному; теоремы о равенстве треугольников; теорема о смежных и вертикальных углах; деление отрезка и угла пополам; проведение перпендикуляра к прямой; теорема о том, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего с ним не смежного; построение треугольника по трем сторонам.

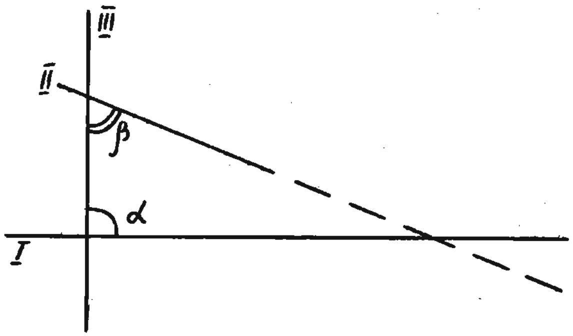

Рис. 22

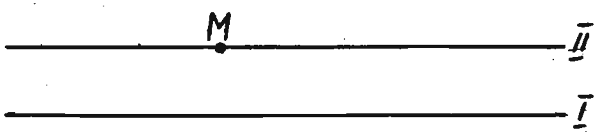

Рис. 23

Впоследствии Янош Бойяи (Больяи) (1802—1860), исследуя геометрию, независящую от пятого постулата, назвал ее абсолютной.

Начиная с предложения 29, Евклид использует пятый постулат. С его помощью он доказывает, что две прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой; решает задачу на проведение через данную точку прямой, параллельной данной прямой; доказывает теорему о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Затем изучаются свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата. Доказывается теорема Пифагора и обратная ей теорема.

В связи со сложностью пятого постулата и его малой наглядностью было предпринято большое число попыток доказать его как теорему, т. е. вывести его из остальных аксиом и постулатов. Вопрос о пятом постулате рассматривался учеными на протяжении двух тысяч лет.

По-видимому, первым сочинением, посвященным этому вопросу, был не дошедший до нас трактат Архимеда «О параллельных линиях». Затем пятый постулат пытались доказать Клавдий Птолемей, Прокл и другие ученые античности. Теория параллельных привлекла внимание многих математиков Арабского Востока. Первый труд по этому вопросу был написан ал-Аббасом ал-Джаухари, работавшим под руководством ал-Хорезми. Два трактата, специально посвященных попыткам доказательства пятого постулата, принадлежат Сабиту ибн-Корре (836-901).

Ибн ал-Хайсам (965-1039) рассмотрел теорию параллельных в двух сочинениях: в трактате «О разрешении сомнений в книге Евклида «Начала» и в «Книге комментариев к введениям книги Евклида «Начала». Он исследовал четырехугольник с тремя прямыми углами и выдвинул три гипотезы о четвертом угле этого четырехугольника, который можно считать острым, тупым или прямым (рис. 24).

Я. Больяи

Ал-Хайсам основывался на представлении о равномерном поступательном движении. Он рассматривал отрезок, перпендикулярный прямой. Один конец отрезка движется вдоль прямой. Тогда второй конец описывает прямую, равноотстоящую от данной прямой.

Исследования ал-Хайсама подверг критике Омар Хайям, который вслед за Аристотелем считал, что в геометрию нельзя вводить движение. Омар Хайям доказал пятый постулат, базируясь на принципе: две сходящиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения. Каждое из этих утверждений равносильно постулату Евклида.

Омар Хайям рассмотрел четырехугольник с двумя прямыми углами при основании AB и равными боковыми сторонами BC и AD (рис. 25). Он доказал, что углы α и α' при верхнем основании равны между собой и выдвинул три гипотезы:

1. $\alpha > 90°$ — гипотеза тупого угла
2. $\alpha = 90°$ — гипотеза прямого угла
3. $\alpha < 90°$ — гипотеза острого угла.

Исследования Хайяма по теории параллельных развил Насир ад-Дин ат-Туси. Он рассматривал четырехугольник Хайяма и три гипотезы о его углах в книге «Изложение Евклида».

Исследования ат-Туси были известны в Европе XVII в. и, таким образом, способствовали созданию неевклидовой геометрии. С ними был знаком Джон Валлис (1616—1703), предложивший доказательство пятого постулата, основанное на допущении: существуют подобные треугольники. Оно эквивалентно пятому постулату.

Итак, в течение многих столетий математики пытались доказать постулат Евклида о параллельных с помощью какого-либо другого предложения, которое они считали очевидным. Математики XVIII в. выбрали другой путь. Они рассматривали четырехугольник Хайяма и три выдвинутые им гипотезы.

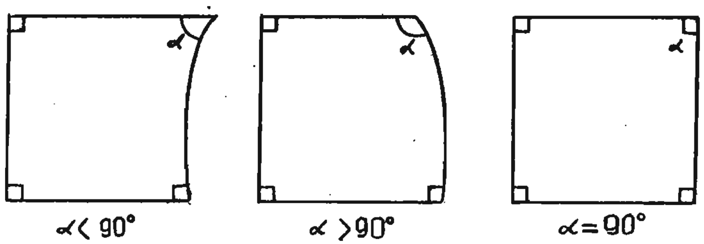

Рис. 24

Гипотеза прямого угла выполняется в геометрии Евклида. Гипотезу тупого угла ученые опровергали, считая, что она приводит к противоречию. Затем они принимали гипотезу острого угла и выводили из нее ряд следствий, которые позже вошли в неевклидову геометрию как теоремы.

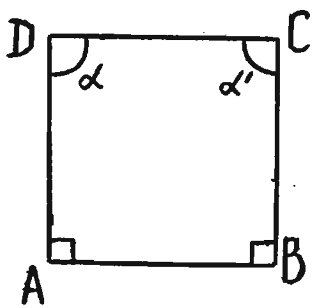

Рис. 25

Так поступал итальянец Д. Саккери (1667-1733) в работе «Евклид, освобожденный от всяких пятен». Таким же образом

рассуждал швейцарский математик Ламберт (1728-1777).

Допустив гипотезу острого угла, Ламберт доказал, что сумма углов всякого треугольника ABC меньше двух прямых

$$\angle A + \angle B + \angle C < 180°.$$

Это одна из теорем геометрии Лобачевского.

Ламберт нашел формулу для вычисления площади треугольника в геометрии, основанной на гипотезе острого угла

$$S = \rho^2(\pi - A - B - C). \qquad (1)$$

Он сравнивал ее с формулой для площади треугольника ABC на сфере радиуса r:

$$S = r^2(A + B + C - \pi).$$

К. Гаусс

Пусть $\rho = r \cdot i$, где $i \cdot i = -1$ (см. Часть, 2, раздел 9).
Тогда из формулы (1) вытекает формула (2).

Ламберт сделал проницательное замечание: «Я почти принужден прийти к заключению, что третья гипотеза находит себе применение на мнимой сфере». Третьей Ламберт называет гипотезу острого угла.

Саккери и Ламберт — предшественники новой, неевклидовой, геометрии. Ее творцами являются К. Ф. Гаусс, Я. Бойяи и Н. И. Лобачевский. Они построили геометрию, в которой выполняется гипотеза острого угла. Ее называют гиперболической геометрией. Позже Б. Риман (1826-1866) открыл так называемую эллиптическую геометрию, в которой выполняется гипотеза тупого угла. Эта гипотеза выполняется на сфере, если считать большие круги сферы прямыми линиями.

Гаусс (1777-1855), которого современники называли «королем математики», при жизни не опубликовал своих исследований по теории параллельных. В 1829 г. в письме к Бесселю он писал: «Я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком». (Беотийцы — жители древнегреческой провинции Беотии, которых жители Афин считали невежественными, глупыми людьми).

Я. Бойяи опубликовал свои исследования по новой геометрии в 1832 г. Он писал: «Многие идеи как бы имеют свою эпоху, во время которой они открываются одновременно в различных местах подобно тому, как весной фиалки вырастают всюду, где светит солнце».

Независимо от Гаусса и Бойяи к идеям о существовании неевклидовой геометрии пришел Николай Иванович Лобачевский. Он родился в Нижегородской губернии в небогатой семье землемера. Учился в Казанском университете, впоследствии работал в нем профессором, был ректором университета с 1827 по 1846 г.

11 февраля 1826 г. (по старому стилю) считают днем рождения неевклидовой геометрии. В этот день Лобачевский прочел доклад: «Рассуждения о принципах геометрии». В 1829 г., т. е. на три года раньше, чем Бойяи, Лобаческий опубликовал работу «О началах геометрии», в которой изложил основы неевклидовой геометрии.

Теории параллельных Лобачевский посвятил ряд сочинений, последнее из которых вышло в 1855 г. за год до его смерти. Он развил неевклидову геометрию наиболее полно и всю жизнь, не боясь «крика беотийцев», боролся за признание своих идей. Поэтому Лобачевского по праву называют «Коперником геометрии».

3. Конические сечения.

Как уже говорилось (см. Часть 2, раздел 5), решение задачи об удвоении куба Гиппократ Хиосский в V в. до н. э. свел к отысканию двух величин x и y таких, что

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b},$$

где a и b — данные числа.

Требовалось решить систему уравнений

$$x^2=ay$$
$$xy=ab,$$

т. е. найти точку пересечения кривых $x^2=ay$ и $xy=ab$.

Так математики Древней Греции впервые встретились с параболой и гиперболой. До этого времени геометрия изучала только прямые и окружности.

В IV в. до н. э. Менехм представил линии $x^3=ay$ и $xy=ab$ как сечения конусов вращения. Он рассмотрел три вида конусов: прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Менехм пересекал их плоскостями, перпендикулярными образующей конуса. В сечении получались кривые трех родов. Эти кривые Аполлоний позже назвал соответственно параболой, гиперболой и эллипсом.

Для чего было нужно это стереометрическое определение плоских кривых? Оно было необходимо для того, чтобы доказать их существование и непрерывность.

Древние греки не сомневались в существовании конусов, цилиндров и других поверхностей, полученных вращением окружностей и скольжением прямых по окружности.

Понятие непрерывности было одним из центральных в античной науке. Оно тесно связано с вопросом о строении материи, который в то время подвергался глубокому анализу и вызывал споры. Можно ли считать материю безгранично делимой или она состоит из неделимых частиц, не имеющих протяженности? Античные ученые высказывали разные взгляды как на строение материи, так и на существо линии. По одним взглядам, линия — результат движения точек, но точек не содержит, по другим — линия содержит точки, но не состоит из них.

Выясняя сущность непрерывности, Аристотель писал: «Непрерывность то, что в процессе движения не обнаруживает перерывов, непрерывность — это абсолютная связь последующего с предыдущим».

В античной науке имеются и другие описания интуитивных представлений о непрерывной величине как о сплошной, не имеющей пробелов, состоящей из касающихся друг друга частиц.

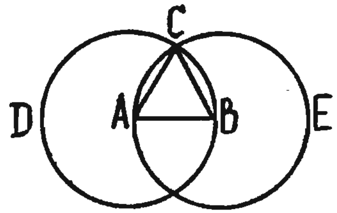

Рис. 26

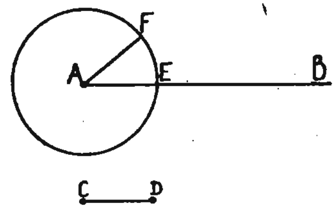

Рис. 27

Все рассуждения, связанные с непрерывностью, были основаны на представлении о движении. В качестве непрерывных величин выступали линии, описанные движением точки; поверхности, описанные движением линий. Непрерывность считали неотъемлемым свойством движения. Аристотель в «Физике» писал о том, что непрерывность присуща пространству, времени и движению.

Простейшие линии — прямая и окружность — считались непрерывными. Покажем, что Евклид в «Началах» использует это утверждение. Он рассмотрел задачу о построении на отрезке AB, как на основании, равностороннего треугольника (рис. 26). Евклид пишет: «Из точки A, как из центра, радиусом AB опишем окружности BCD, из точки B, как из центра, тем же радиусом AB опишем окружность ACE. Из точки C, в которой пересекаются обе окружности, проведем к точкам A и B прямые CA и CB. Треугольник ABC будет требуемым».

Утверждение, что окружности пересекаются, безусловно, основано на их непрерывности. Его нельзя было бы сделать, не прибегая к каким-либо дополнительным предположениям, если бы окружность состояла из дискретного ряда точек.

Затем Евклид решает задачу о построении разности двух отрезков AB и CD (рис. 27). Он пишет: «Из точки A проведем отрезок прямой AF, равный CD; из точки A, как из центра, радиусом AF опишем окружность EFH, которая пересечется с AB в точке E». Утверждение, что прямая и окружность пересекаются, можно сделать только основываясь на их непрерывности.

Непрерывность поверхностей, полученных движением непрерывных линий, не вызывала сомнений у древнегреческих ученых. Поэтому кривые, которые были получены Менехмом как сечения конусов, были восприняты как непрерывные. Они были всесторонне изучены и обогатили математический аппарат.

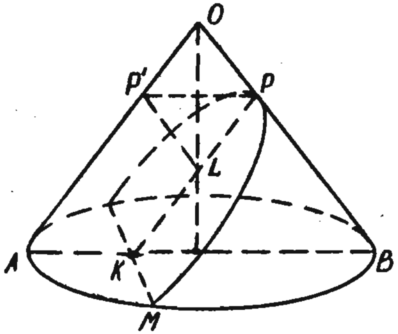

Рис. 28

Полную теорию конических сечений построил Аполлоний (ок. 260—190 гг. до н. э.) — знаменитый геометр эпохи эллинизма.

Аполлоний родился в Малой Азии, получил образование в Александрии. Затем он вернулся в родные места. Он работал в Пергаме — городе на малоазиатском побережье, который в ту эпоху был одним из крупнейших экономических и культурных центров. В библиотеке Пергама хранилось до 200 тысяч свитков. Она уступала только Александрийской библиотеке.

Аполлоний внес большой вклад в астрономию. Для объяснения видимых движений Солнца и планет он разработал теорию эпициклов и эксцентрических окружностей, на основе которой Клавдий Птолемей создал свою знаменитую систему мира.

Главный труд Аполлония «Конические сечения» состоит из восьми книг. Первые 4 дошли до нас в оригинале, следующие 3— в арабском переводе. Восьмая книга утеряна. Сведения о ее содержании привел Папп (конец III в. до н. э.).

Аполлоний обобщил подход Менехма. Он рассматривал любой круговой конус и проводил сечения плоскостью, расположенной под любым углом к образующей.

Аполлоний первый стал учитывать обе полости конуса, что позволило считать две ветви гиперболы единой кривой.

Рассмотрим сечение прямоугольного конуса вращения плоскостью, перпендикулярной его образующей (рис. 28). $AO \perp OB$, $PK \perp OB$. Следовательно, $PK \parallel AO$, $P'P \parallel AK$. AP′PK — параллелограмм,

$$P'P = AK.$$

Так как AMB — полукруг (рис. 29), то выполняется равенство

$$MK^2 = AK \cdot KB. \qquad (2)$$

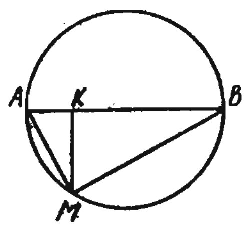

Рис. 29

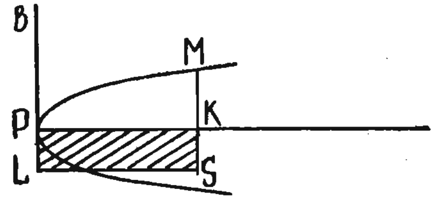

Рис. 30

В $\triangle AOB$ $AO = OB$, поэтому $\angle OAB = 45°$. Так как $PK \parallel AO$, то $\angle PKB = 45°$. Отсюда следует равенство

$$KB = \sqrt{2PK^2}. \qquad (3)$$

Из квадрата $OPLP'$ (рис. 28) получаем $PP' = \sqrt{2LP^2}$. Учитывая равенство (1), имеем

$$AK = \sqrt{2\,LP^2}. \qquad (4)$$

Наконец, из равенства (2), (3), (4) находим, что

$$MK^2 = 2LP \cdot PK. \qquad (5)$$

На языке греческой математики — это уравнение параболы, которая получается в результате сечения конуса плоскостью (рис. 28).

Греки формулировали полученный результат следующим образом: квадрат, построенный на полухорде KM, в каждой точке равен прямоугольнику $PKSL$, построенному на отрезке PK оси и на постоянном отрезке PL (рис. 30).

Чтобы записать уравнение параболы на языке современной математики, рассмотрим систему координат с началом в точке P, где PB — ось y, PK — ось x. Тогда $MK = y$, $PK = x$. Обозначим $PL = p$. Уравнение (5) получит вид

$$y^2 = 2px.$$

Это уравнение параболы, записанное с помощью буквенной алгебры, которая была создана в XVI в.

В XVII в. Ферма и Декарт на основе теории конических сечений Аполлония построили аналитическую геометрию. Они переложили рассуждения древних греков, применявших геометрическую алгебру, на язык буквенного исчисления.

Конические сечения широко используются в математике, механике и астрономии. Галилео Галилей (1564—1642) показал, что брошенный камень (или снаряд) летит в пустоте по параболе. Иоганн Кеплер (1571—1630) открыл закон: планеты движутся по эллипсам.

А. Эйнштейн так писал о Кеплере: «К восхищению перед этим замечательным человеком добавляется еще одно чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, в которой мы рождены. Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел».

Таким образом, теория конических сечений, развитая греками «впрок» как абстрактная математическая теория, не связанная с практикой, оказалась необходимой в математическом естествознании.

4. Вычисление площадей и объемов.

Как уже говорилось, ученые Древнего Египта и Вавилона умели находить площади простейших геометрических фигур. Математики Древней Греции первыми начали исследовать правильные многогранники. Теэтет, ученик пифагорейца Феодора, знал уже все правильные многогранники: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Евклид в XIII книге «Начал» показал, как их построить, как выразить их ребра через радиус описанной сферы, доказал, что других правильных многогранников не существует. Результаты, изложенные Евклидом, принадлежат в основном Теэтету.

Во II в. до н. э. к «Началам» Евклида» присоединили книгу XIV, написанную Гипсиклом, в которой сравнивались объемы и поверхности додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу. Позже, в VI в. н. э., к «Началам» была присоединена еще книга XV, составленная в школе Исидора Милетского, жившего в Византии. В ней содержались некоторые предложения, относящиеся к правильным многогранникам.

Вычисление объемов тел в античной математике было тесно связано с проблемой о строении материи, которая в то время вызывала споры между учеными.

В V — IV вв. до н. э. работал замечательный философ Демокрит, считавший, что материя состоит из неделимых частиц — атомов. Он искал общие законы движения атомов для объяснения процессов движения, изменения, развития, происходящих в мире. Евсевий Памфил, христианский епископ IV в., писал: «Демокрит говорил, что он предпочел бы найти одно причинное объяснение, нежели приобрести себе персидский престол».

Мы очень мало знаем о творчестве Демокрита. По свидетельству Архимеда, он установил, что пирамида равновелика 1/3 призмы, имеющей с ней одинаковые основания и высоту, а конус равновелик 1/3 соответствующего цилиндра. Но доказательств Демокрит не дал.

В V в. до н. э. философ Анаксагор выдвинул иную, чем у Демокрита, концепцию строения материи. Он утверждал: «В малом не существует наименьшего, но всегда есть еще меньшее». Эта концепция и получила развитие в греческой математике. Она послужила основой для создания «метода исчерпывания», разработанного Евдоксом. Метод позволил греческим ученым совершать предельные переходы.

Евдокс Книдский был ключевой фигурой в греческой науке своего времени. Создав модель космоса, он фактически стал основоположником античной теоретической астрономии. Ему принадлежат сочинения по философии, географии, музыке и медицине.

К сожалению, сочинения Евдокса не дошли до нас. Мы можем судить о них лишь по отдельным цитатам, приводимым позднейшими авторами.

Известно, что Евдокс в молодости изучал математику у Архита в Таренте и медицину у Фелистиона в Сицилии. В 23 года он приехал в Афины, где учился в Академии Платона. Затем Евдокс учился астрономии у египетских жрецов.

Вернувшись в Грецию, Евдокс основал собственную школу в Кизике на Мраморном море. Там была построена обсерватория, где ученики Евдокса впервые в Греции вели систематические наблюдения за небесными светилами. Евдокс дал описание созвездий, видимых на широте Греции, составил звездный каталог. Ему приписывают первое определение длины земного меридиана. Умер Евдокс у себя на родине, в Книде, окруженный славой и почетом.

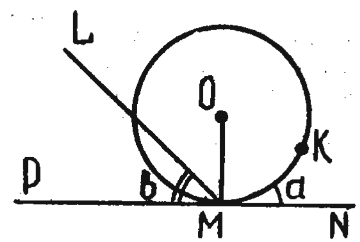

Рис. 31

В математике, помимо «метода исчерпывания», Евдокс создал строгую теорию отношений. Ее глубина была оценена по достоинству лишь во второй половине XIX в., когда трудами Дедекинда и других ученых была построена современная теория действительных чисел.

Евдокс ввел аксиому, которую сейчас принято называть аксиомой Архимеда.

Аксиома. Пусть даны две величины a и b. Тогда существуют такие целые числа n и m, что выполняются неравенства

$$na > b \text{ и } mb > a.$$

Если аксиома выполняется, то величины a и b называются архимедовыми.

Приведем пример неархимедовой величины. Пусть α — угол между дугой окружности и касательной в одном из концов дуги, $\alpha = \angle KMN$ (рис. 31). Угол α называется роговидным.

Пусть β — угол между касательной в точке M и любой секущей, проходящей через эту точку. На рис. 31 — это угол LMP

Очевидно, что угол $n\alpha$, где n — любое целое число, никогда не станет больше, чем угол β, т. е. неравенство $n\alpha > \beta$ не выполняется ни при каком n.

Затем Евдокс сформулировал лемму для архимедовых величин α и β. Если даны две величины α и β, где $\alpha > \beta$, то, вычитая из величины α больше ее половины, из полученного остатка больше его половины и т. д., через конечное число шагов получим остаток $\alpha_n < \beta$.


Архимед

Эту лемму Евклид изложил в X книге «Начал».

С помощью «метода исчерпывания» Евдокс доказал теоремы:

1) площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров (это предложение знал еще Гиппократ Хиосский);
2) объем пирамиды равен 1/3 объема призмы с теми же основанием и высотой;
3) объем конуса равен 1/3 объема цилиндра с теми же основанием и высотой.

Напомним, что оба последних результата получены Демокритом, но он не дал им строгого обоснования.

Евклид в «Началах» получил еще одну теорему:

4) объемы шаров относятся как кубы их диаметров.

Все последующие результаты в области отыскания площадей и объемов, полученные в античности, принадлежат великому греческому ученому Архимеду (287—212 гг. до н. э.). Он развил интеграционные методы, с помощью которых разыскал объемы сегментов эллипсоидов, параболоидов и двухполостных гиперболоидов, нашел площади поверхности сферы и сферического сегмента.

В работе «Измерение круга» Архимед установил для числа π границы $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Напомним, что в античности была поставлена задача о квадратуре круга (см. Часть 2, раздел 5). Пытаясь ее решить, Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) разыскал «квадрируемые луночки». Так называют фигуры, ограниченные дугами окружностей, для которых можно построить равновеликие квадраты. Гиппократ нашел три вида луночек. Рассмотрим один из них.

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $\angle B = 90°$. Построим окружность с центром в точке B и радиусом, равным AB. На гипотенузе AC как на диаметре построим полуокружность (рис. 32). Докажем, что площадь луночки, ограниченной дугой окружности AmC и дугой окружности AnC, равна площади треугольника ABC. Обозначим $AB = BC = R$.

Тогда $AC = \sqrt{2}R$. Подсчитаем площадь полукруга, ограниченного дугой окружности AmC и отрезком AC:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4}. \quad (3)$$

Подсчитаем площадь сектора, ограниченного дугой AnC и радиусами AB и BC:

$$\frac{1}{4}\pi R^2.$$

Площадь сегмента, ограниченного дугой окружности AnC и отрезком AC, равна

$$\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \quad (4)$$

где $\frac{1}{2}R^2$ — площадь треугольника ABC.

Чтобы найти площадь луночки, вычтем из площади полукруга (3) площадь сегмента (4).

$$S_{\text{луночки}} = \frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{R^2}{2}.$$

Итак, площадь луночки равна площади треугольника ABC.

Задача. Докажите, что сумма площадей луночек, лежащих между дугой полуокружности, построенной на гипотенузе произвольного прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, и дугами кругов, построенных на катетах того же тре-

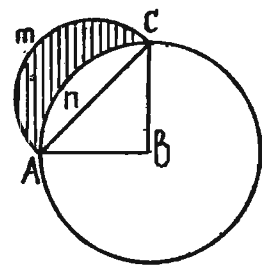

Рис. 32

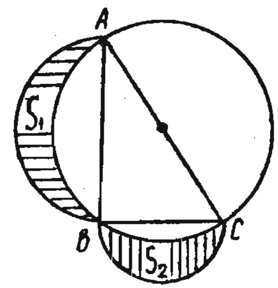

Рис. 33

угольника, как на диаметрах, равна площади рассматриваемого треугольника (рис. 33). Требуется доказать, что

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle ABC}.$$

Советские ученые Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов в 30-40-х годах доказали, что имеется пять видов квадрируемых луночек, но ни одна из них не квадрируема вместе с кругом.

Задача о квадратуре круга равносильна построению с помощью циркуля и линейки отрезка, длина которого равна $\sqrt{\pi}$.

В конце XIX в. было показано, что π является трансцендентным числом, т. е. не может быть корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Итак, построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{\pi}$, с помощью циркуля и линейки нельзя. Мы можем лишь вычислять приближенные значения числа π. Эта задача постоянно приковывает к себе внимание математиков, начиная с древнейших времен и до настоящего времени.

Китайский астроном, математик и инженер Цзу Чун-Чжи (430—501) в недошедшем до нас трактате доказал, что

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Ему же принадлежит приближение $\pi = 355/113$, которое вновь нашел немецкий математик В. Ото в XVI в.

Джемшид ал-Каши в «Трактате об окружности», законченном в 1424 г., нашел для числа π значение, содержащее 17 верных десятичных знаков, при этом ал-Каши пришел к убеждению, что число π иррационально. Он заметил, что найденное им значение числа π ближе к истине, чем значение Архимеда, и добавил: «Но всей истины не знает никто, кроме Аллаха».

В 1596 году голландский математик Лудольф ван Цейлен (1540—1610) получил 20 точных знаков числа π. Для этого он рассматривал многоугольник с числом сторон порядка 32 миллиарда 512 миллионов. После смерти ученого в его рукописях были найдены следующие 15 десятичных знаков. В знак уважения к памяти этого блестящего вычислителя число π долгое время называли числом Лудольфа.

В 1958 г. были опубликованы первые 10 000 десятичных знаков числа π, найденные при помощи электронной вычислительной машины. В 1961 году на электронной вычислительной машине фирмы ИБМ число π было вычислено с точностью до 100 625 знаков. Машина работала 8 час 1 мин и, кроме того, 42 мин занял перевод результата из двоичной формы в десятичную (см. [8], с. 429).

Приведем в заключение слова профессора Ясского университета Ф. Кымпан: «Число π присутствует в чертежах и вычислениях, выполняемых электронными машинами при подготовке и проведении полетов в космос; оно предоставляет необходимое количество своих десятичных знаков всякий раз, когда они нужны инженерам, рассчитывающим цилиндрические, сферические или конические части машин, физикам и астрономам... Куда бы мы ни обратили свой взор, мы видим проворное и трудолюбивое число π: оно заключено и в самом простом колесике, и в самой сложной автоматической машине» ([19], с. 157).

Мы рассказали кратко о первых шагах геометрии. Ее дальнейшее развитие связано с именами замечательных французских ученых Декарта и Ферма. В XVII столетии они ввели в математику систему координат, разработали аналитическую геометрию и тем самым положили начало процессу становления математики переменных величин.

ОГЛАВЛЕНИЕ.