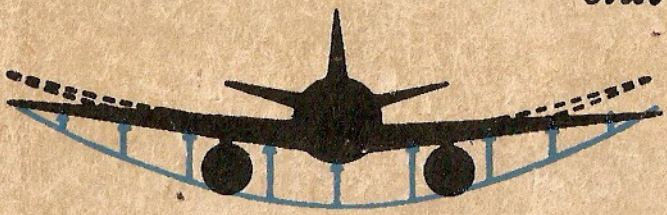
Ф.В.Долинский, М.Н.Михайлов

КРАТКИЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

учебное пособие для вузов



ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная действительность требует ускорения научно-технического прогресса, роста производительности труда, улучшения качества выпускаемых машин, повышения их производительности, долговечности и надежности в эксплуатации. Исключительная роль в этом отношении принадлежит инженерам-механикам, машиностроителям, конструкторам – цвету творческой инженерной мысли. В связи с изложенным особую значимость приобретает улучшение преподавания курса сопротивления материалов, фундаментальной основы инженерной подготовки.

При написании пособия большое внимание обращалось на строгость определений и полноту выводов. Изложение теоретического материала в основном отличается от традиционного. Особенно это относится к I, II, V, XI, XII, XIII и XV главам.

При изложении материала авторы стремились к наибольшему использованию опыта, накопленного многолетней работой в высшей школе по очной, вечерней и заочной формам обучения.

Материал пособия распределен между авторами следующим образом: **Ф. В. Долинским** написаны главы II (§ II.12, § II.13), III, IV, VI, VII (§ VII.3 – § VII.7), VIII, IX (§ IX.1 – § IX.4), XII (кроме § XII.1), XIII (кроме § XIII.3); **М. Н. Михайловым** – главы I, II (§ II.1 – § II.11), V, VII (§ VII.1, § VII.2), IX (§ IX.5), X, XI, XII (§ XII.1), XIII (§ XIII.3), XIV, XV.

Все пожелания и критические замечания авторы просят направлять в адрес издательства: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Авторы

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

§ I.1. Общие определения

Механической системой (в дальнейшем – просто системой) называется совокупность твердых тел, в которой положение и движение каждого тела определяется положением и движением остальных.

Твердые тела (или просто тела), входящие в состав системы, называются ее элементами.

Явление изменения линейных и угловых размеров тела называется **деформацией**. Деформация является следствием изменения средних расстояний между частицами (молекулами, атомами, ионами) вещества тела.

Будем называть деформацию, вызванную действием на тело сил, **силовой**, а вызванную изменением его температуры – **температурной.** Совместную силовую и температурную деформацию назовем **смешанной**.

Силы и изменение температуры, действующие на тело, называют **внешними факторами**. Приложение к телу внешних факторов называется **нагружением**, а их удаление (снятие) – **разгрузкой**.

В отличие от теоретической механики, которая рассматривает тело как абсолютно твердое, сопротивление материалов изучает его деформированное состояние. Несмотря на принципиальную разницу в основном свойстве, которым эти науки наделяют изучаемый объект, сопротивление материалов при решении всех своих задач опирается на основы теоретической механики, и изучение предмета без знания этих основ невозможно.

В дальнейшем понятия вещества и материала считаем идентичными.

Свойство материала тела полностью восстанавливать сразу после разгрузки те взаимные положения частиц (те размеры тела), которые были до нагружения, называется **упругостью**. Материалы подавляющего большинства тел этим свойством практически обладают при условии, что внешние факторы, приложенные к телу, не превышают определенных (предельных) в каждом частном случае значений.

Деформация, полностью исчезающая сразу после разгрузки, называется **упругой**.

Если внешние факторы превысят предельные значения, то после разгрузки взаимные положения частиц материала

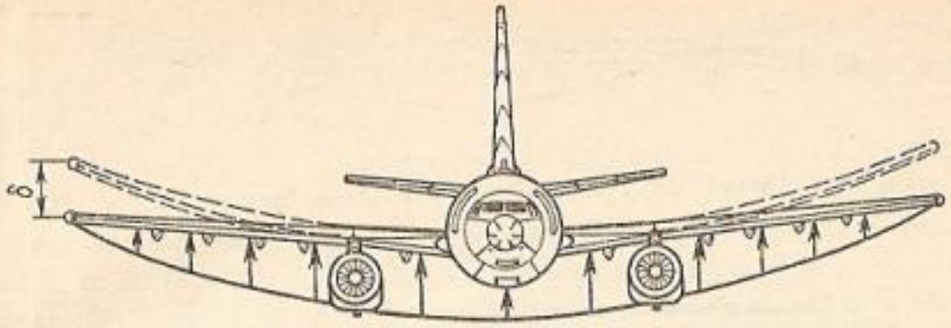


Рис. I.1

тела, а следовательно, и его размеры будут отличны от первоначальных.

Деформация, остающаяся в теле после разгрузки, получила название **остаточной** или **пластической**, а способность тела приобретать пластическую деформацию – **пластичности**.

При дальнейшем увеличении значений внешних факторов деформация достигает размеров, при которых существование тела как единого целого становится невозможным, и наступает его разделение на части (разрушение).

Ни один элемент системы в процессе ее эксплуатации не должен не только разрушаться, но также не должен недопустимо искажаться после разгрузки за счет пластической деформации.

Разрушение хотя бы одного элемента системы или появление в нем недопустимой пластической деформации называется **опасным** или **предельным состоянием**.

Способность системы выдерживать действие внешних факторов без возникновения опасного состояния называется **прочностью**.

Упругая деформация системы может стать такой, что система, оставаясь прочной, будет неспособна выполнять свое назначение. Например, если перемещение конца крыла самолета δ (рис. I.1) превысит допустимое значение, аэродинамические характеристики крыла окажутся настолько искаженными, что оно не сможет нормально работать. В дальнейшем, как и на рис. I.1, форму системы после деформации изображаем штриховыми линиями.

Способность системы выдерживать действие внешних факторов без недопустимых перемещений ее точек при упругой деформации элементов системы называется **жесткостью**.

В некоторых определенно нагруженных элементах систем, при определенных значениях внешних факторов, называемых **критическими**, малые возмущения вызывают относи-



Рис. I.2

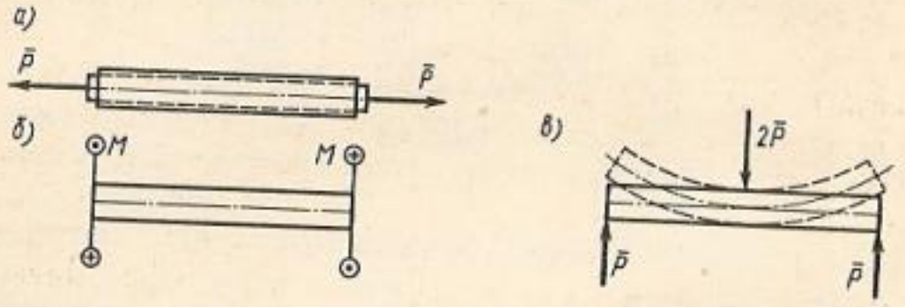


Рис. I.3

тельно большие перемещения, причем иногда элементы сохраняют прочность. Это явление называют **потерей устойчивости**. Например, гибкая планка с прямой осью (рис. I.2) типа рейсшины, после того как приложенные вдоль ее оси сжимающие силы превысят критическое значение на 0,1 %, получает наибольшее относительное перемещение точки оси планки, в тридцать раз большее относительного увеличения значений сжимающих планку сил. После потери устойчивости хотя бы одним элементом система не может нормально работать.

При проектировании любого сооружения, машины или прибора, при выборе материалов, форм и размеров их частей следует руководствоваться не только требованиями эксплуатационного назначения этих систем, но также требованиями их прочности, жесткости и устойчивости. Расчеты систем на прочность, жесткость и устойчивость называют **прочностными**.

На основании повседневного опыта и сведений, полученных в курсе физики, можно сформулировать общие свойства деформации:

1. Форма тела после деформации (характер деформации) зависит от взаимной ориентации тела и приложенных к нему сил. В качестве примера на рис. I.3 изображены три деформации бруса: *а* – растяжение, *б* – кручение, *в* – изгиб.

2. Величина деформации зависит от трех факторов: величин и законов изменения внешних сил и температуры, действующих на тело (внешний фактор); размеров тела и его формы (геометрический фактор); количества и качества материала тела (физический фактор).

Следовательно, изменять прочность, жесткость и устойчивость можно, изменяя или характер деформации, или перечисленные факторы.

Обычно характер деформации, внешние факторы и габаритные размеры системы при прочностном расчете являются заданными, так как они определяются ее назначением. При этом условии увеличение прочности может быть достигнуто либо увеличением количества рационально расположенного материала, идущего на изготовление системы, либо заменой его материалом более высокого качества.

Если бы наибольшее количество материала, идущее на изготовление системы не ограничивалось требованиями ее максимально возможного облегчения и экономии, а наименьшее – требованиями прочности, жесткости и устойчивости, то надобность в прочностных расчетах отпала бы вообще. Требование экономии материала, как по количеству, так и по качеству, в пояснении не нуждается. Требование максимально возможного облегчения системы можно пояснить на примере любого летательного аппарата, который будет выполнять свое назначение тем лучше, чем он будет легче, а будучи перетяжелен, не поднимется вообще.

Согласно марксистско-ленинскому диалектическому методу источником развития любой науки является существование, развитие и борьба противоречий, заключенных в явлениях, которые она изучает.

Противоречие между требованиями прочности, жесткости и устойчивости, с одной стороны, и требованием минимально возможного количества материала, идущего на изготовление системы – с другой, явилось стимулом возникновения и дальнейшего развития науки о прочности, жесткости и устойчивости, так как только прочностной расчет может оптимально удовлетворить этим требованиям.

После сказанного можно дать следующее определение: **сопротивление материалов – наука, методами которой находятся размеры и формы элементов систем, обеспечивающие им прочность, жесткость и устойчивость при наименьшем количестве материала, идущего на изготовление.**

Первая попытка аналитического подхода к исследованию вопросов сопротивления твердых тел разрушению (случай изгиба консольной балки) принадлежит **Галилею** (1638). Предполагая тела абсолютно твердыми, он, естественно, не установил, что их прочность определяется деформацией и поэтому не смог дать исчерпывающего решения задачи. Однако уже сама ее постановка представляла положи-

тельный факт, а некоторые высказанные им соображения оказали помощь последующим исследователям.

Основной закон сопротивления материалов, устанавливающий связь между действующими на тело силами и его деформацией, был открыт **Робертом Гуком** (1660) опытным путем и носит его имя. Он был сформулирован Гуком в такой форме: *ut tensio sic vis*, что означает: *каково перемещение, такова и сила.*

На базе этого закона началось развитие науки о прочности, которое шло одновременно по двум неразрывно связанным направлениям – теоретическому и экспериментальному, так как:

1) одна из основных особенностей метода сопротивления материалов состоит в том, что все основные выводы этой науки базируются на заранее принятых гипотезах и предположениях, которые должны проверяться, а иногда и выдвигаться экспериментом;

2) целый ряд задач допускает только приближенное математическое решение и точность этого решения должна проверяться опытом;

3) величины, характеризующие упругие, пластические и прочностные свойства различных материалов, называемые их механическими характеристиками, без знания которых теоретические выводы сопротивления материалов потеряли бы всякий практический смысл, могут быть получены только опытным путем;

4) наиболее ответственные системы и их элементы, например авиационные, перед тем как поступить в серийное производство, проходят лабораторные испытания, в которых доводятся до разрушения, в результате чего определяется разрушающая нагрузка, которая сравнивается с расчетной.

По мере развития техники строительства и машиностроения усложнялись задачи, стоящие перед наукой о прочности и увеличивалось их число, появлялись проблемы, решения которых не могут быть получены методами сопротивления материалов. Это привело к тому, что возникают науки: в начале XIX в.– теория упругости, а в начале XX в.– теория пластичности, ставящие в основном те же задачи, что и сопротивление материалов, но решающие их другими методами с применением более сложного математического аппарата.

Методами этих наук удалось решить ряд практически важных задач, которые оказались «непосильными» для сопротивления материалов. Точные решения теории упругости

и теории пластичности служат также для обоснования гипотез, принятых при выводах, сделанных **методами сопротивления** материалов, и оценки точности приближенных решений, полученных этими методами.

§ I.2. Предположения о материале тела

Материалы тел обладают таким многообразием свойств, что учет их всех приведет либо к чрезмерно громоздким расчетным формулам, либо к невозможности применения аппарата математического анализа в прочностных расчетах. Поэтому, оценивая свойства материала по степени влияния их на прочность, жесткость и устойчивость системы, наделяют его только основными, отбрасывая второстепенные при данных условиях. Подчеркиваем, что свойства второстепенные при данных условиях с их изменением могут стать основными.

В дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, будем принимать для материалов тел четыре гипотезы.

1. **Материалы тел предполагаются совершенно упругими.** Из этой гипотезы следует независимость окончательной деформации тела от порядка приложения внешних факторов.

2. **Материалы предполагаются изотропными.** Это означает, что они обладают одинаковыми свойствами в данной точке тела по различным направлениям. В противном случае материалы называются анизотропными. Примером анизотропного материала является дерево, которое расколоть вдоль волокон легче, чем поперек.

3. **Материалы предполагаются однородными.** Отсюда следует, что они обладают одинаковыми свойствами в своих различных точках.

Второе и третье предположения позволят в дальнейшем записать уравнения закона Гука в наиболее простом виде.

4. **Для вещества тела принимается гипотеза сплошности.** Предполагается, что материал заполняет объем, ограниченный поверхностью тела, без пустот.

Эта гипотеза дает возможность рассматривать вещество тела как непрерывную среду, пренебрегая его молекулярным строением, а также существованием пустот и неметаллических включений по граням сочленений кристаллических зерен. Принятие ее позволяет применять в сопротивлении материалов аппарат непрерывных функций математического анализа.

§ I.3. Понятие о большой и малой жесткостях тел и систем. Геометрический метод определения перемещений

Возможность использования твердых тел как строительных материалов основывается на том, что деформации этих тел чрезвычайно малы по сравнению с их размерами. Тела и системы, обладающие этим свойством, называются телами и системами **большой жесткости**, а не обладающие – **малой**. Заметить деформации у тел большой жесткости невооруженным глазом, как правило, нельзя и для их измерения пользуются чувствительными приборами, которые называются **тензометрами**.

Во всех задачах курса предполагается, что тела и системы обладают большой жесткостью. Принятие этого предположения позволяет:

составлять уравнения статики для недеформированного состояния системы и переносить результаты их решения на состояние деформированное;

считать углы между одними и теми же элементами системы до и после деформации равными;

считать изменение угла

$$\Delta\beta = \sin(\Delta\beta) = \operatorname{tg}(\Delta\beta) \text{ и } \cos(\Delta\beta) = 1.$$

В качестве примера, поясняющего эти утверждения, на рис. I.4 рассматриваются совместно геометрические построения схем нагружения симметричной фермы до и после деформации. Прочностной расчет фермы начинается с определения реакций опор в ее деформированном состоянии. В силу симметрии узел C переместится по вертикали, заняв положение C_2, а реакции опор будут равны по величине и симметричны. Из условия равновесия узла C_2 можно составить единственное независимое уравнение статики

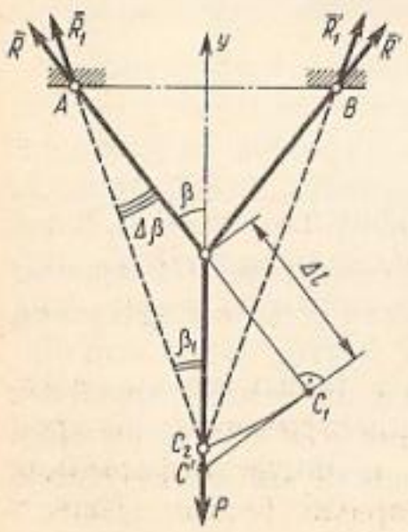


Рис. I.4

$$\sum Y = 2R_1 \cos\beta_1 - P = 0, \qquad \text{(I.1)}$$

в котором β_1 – неизвестный угол, зависящий от деформации фермы.

Если ферма имеет малую жесткость ($\beta - \beta_1 = \Delta\beta > 5°$), то задача по определению R_1 окажется статически неопределимой, потому что в уравнение (I.1) входят две

неизвестные величины R_1 и β_1. Чтобы их однозначно найти, необходимо, рассмотрев совместную деформацию стержней фермы, составить еще одно уравнение – уравнение совместности перемещений. Для фермы малой жесткости уравнение совместности перемещений, как и уравнение (I.1), будет нелинейным относительно R_1 и β_1. Нелинейность системы уравнений для неизвестных при расчете систем малой жесткости, решение которых представляет значительные математические трудности, и то, что системы малой жесткости сравнительно редко встречаются в современном машиностроении,– основные причины, по которым эти системы в обычных курсах сопротивления материалов не рассматриваются.

Если же ферма (рис. I.4) имеет большую жесткость ($\beta - \beta_1 = \Delta\beta \leqslant 5°$), то можно считать $R_1 = R$ и $\beta_1 = \beta$, где R и β – реакция опоры и угол в недеформированном состоянии фермы. Тогда из уравнения (I.1) реакция R найдется очень просто, так как угол β известен:

$$R = \frac{P}{2\cos\beta}.$$

На рис. I.4 Δl – изменение длины стержня в результате деформации (абсолютное удлинение стержня); $\cup C_1C_2$ – дуга радиуса AC_1; C_1C' – перпендикуляр, восставленный к первоначальному положению стержня. Если ферма имеет большую жесткость, то перемещение узла

$$\delta_C = CC_2 \approx CC'. \qquad \text{(I.2)}$$

Из $\triangle CC_1C'$

$$CC' = \frac{\Delta l}{\cos\beta},$$

или, учитывая (I.2),

$$\delta_C \approx \frac{\Delta l}{\cos\beta}. \qquad \text{(I.3)}$$

В ферме большой жесткости δ_C, найденное по (I.3), будет совпадать с его точным значением не меньше чем до пяти значащих цифр, что является вполне достаточной для практических целей точностью.

Метод определения перемещений и зависимостей между ними, основанный на совместном геометрическом построении схем нагружения системы до и после деформации, а также на замене дуг перпендикулярами, будем называть геометрическим.

§ I.4. Силы упругости и понятие о напряжении

Между двумя частицами материала существуют силы взаимного притяжения и отталкивания, которые зависят от среднего расстояния между ними, а следовательно, изменяются при деформации. Теория, объясняющая эту зависимость, дается физикой твердого тела, и мы в дальнейшем воспользуемся элементами ее выводов.

Равнодействующую силу притяжения и отталкивания $\Delta\bar{f}_{ij}$ между частицами вещества, среднее расстояние между которыми r (рис. I.5), назовем элементарной силой упругости, с которой частица j действует на частицу i. Зависимость Δf_{ij} от r дается уравнением

$$\Delta f_{ij} = \frac{A}{r^m} - \frac{B}{r^n}, \qquad \text{(I.4)}$$

где A, B, m, n – постоянные, зависящие от вещества твердого тела; A/r^m – элементарная сила притяжения; B/r^n – элементарная сила отталкивания.

График зависимости (I.4) изображен на рис. I.6. При r, равном r_0, $\Delta f_{ij} = 0$. Если r увеличивается по сравнению с r_0, то элементарная сила упругости будет силой притяжения, а если уменьшается, то силой отталкивания. В обоих случаях $\Delta\bar{f}_{ij}$ и $\Delta\bar{r}_{ij} = \bar{r} - \bar{r}_0$ – перемещение частицы i относительно j противоположны по направлению. При $r \geqslant r_1$ происходит отрыв частиц, так как увеличению r сопутствует уменьшение элементарной силы упругости. На участке AB графика зависимость $\Delta f_{ij} = \varphi(r)$ можно считать прямо пропорциональной

$$\Delta\bar{f}_{ij} = -C\,\Delta\bar{r}_{ij},$$

где C – постоянная, зависящая от материала тела.

Надо отметить, что величины сил $\Delta\bar{f}_{ij}$ быстро убывают с увеличением расстояний между частицами так, что практи-

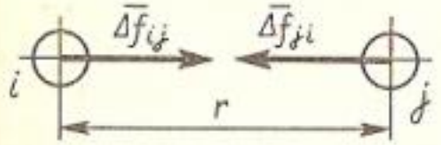


Рис. I.5

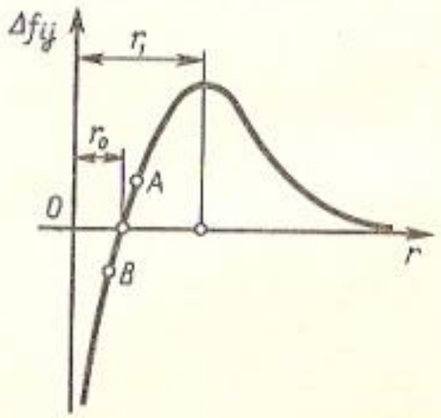


Рис. I.6

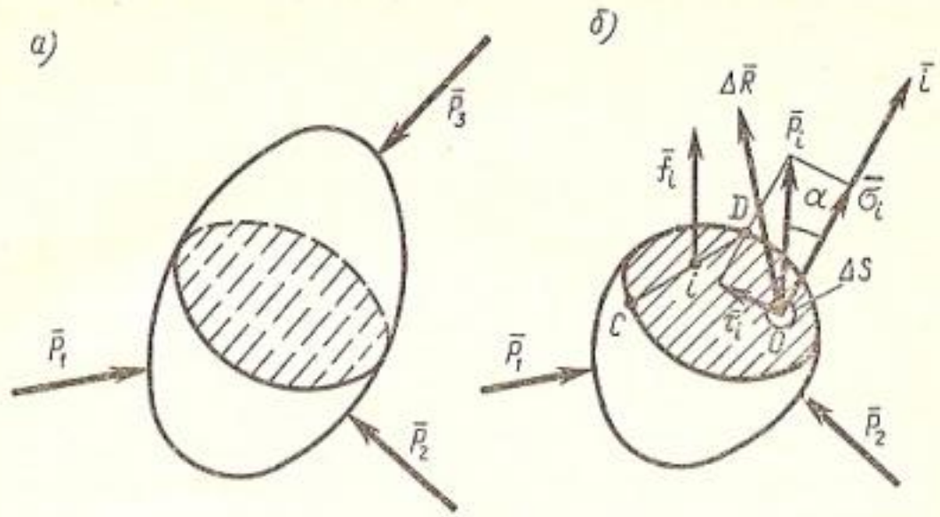


Рис. I.7

чески данная частица взаимодействует с отстоящими от нее не далее чем на четыре параметра кристаллической решетки. Для кристаллических тел эти расстояния r_{max} имеют порядок 10^{-9} м.

Проведем в нагруженном теле (рис. I.7, *а*) произвольное сечение и мысленно отбросим любую часть тела по одну сторону от него. По аксиоме статики, чтобы оставшаяся часть (рис. I.7, *б*) сохранила первоначальное состояние, действие отброшенной части на нее следует заменить системой сил упругости. Силой упругости $\bar{f}_i$ (рис. I.7, *б*) назовем геометрическую сумму элементарных сил упругости, действующих на частицу i со стороны частиц отброшенной части:

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\bar{f}_{ij},$$

где n – число частиц отброшенной части, практически взаимодействующих с частицей i.

Система сил упругости распределена по объему (слою), основанием которого является проведенное сечение, а высотой (толщиной) r_{max}. В силу малости r_{max} по сравнению с размерами тела считают, что частицы этого объема вместе с действующими на них силами упругости расположены в плоскости проведенного сечения.

Распределение сил упругости по произвольной линии в сечении CD схематически показано на рис. I.8 и будет дискретным (прерывистым). На рис. I.8 точки пунктира соответствуют неизображенным силам. Однако гипотеза сплошности позволяет рассматривать это распределение как непрерывное и дифференцируемое, если соединить концы

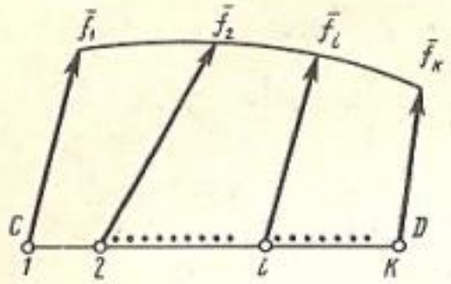


Рис. I.8

векторов $\bar{f}_i$ гладкой кривой C_1D_1 и принять уравнение этой кривой за закон распределения сил упругости по линии CD. Применяя это рассуждение к любой линии в сечении, получим представление о законе распределения сил упругости по сечению как о непрерывном и дифференцируемом.

Поверхностная плотность или интенсивность сил упругости в произвольной точке O сечения, нормаль к которому $\bar{i}$, определяется напряжением $\bar{p}_i$ как предел отношения $\Delta\bar{R}/\Delta S$ при $\Delta S \to 0$ (рис. I.7, *в*), где ΔS – площадка, окружающая точку O; $\Delta\bar{R}$ – равнодействующая сил упругости, действующих по этой площадке

$$\bar{p}_i = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\bar{R}}{\Delta S},$$

$$\text{или } \bar{p}_i = \frac{d\bar{R}}{dS}. \qquad \text{(I.5)}$$

Для удобства физического и математического анализа напряжение $\bar{p}_i$ разлагается на нормальное и касательное, являющиеся соответственно составляющими $\bar{p}_i$ по нормали к сечению и по его плоскости.

На рис. I.7, *б*: $\sigma_i = p_i \cos\alpha$ – нормальное напряжение в точке O по проходящему через нее сечению, нормаль к которому i; $\tau_i = p_i \cos\alpha$ – касательное напряжение в точке O по тому же сечению.

Напряжение в данной точке тела зависит от величин и законов распределения внешних факторов, от положения сечения, проходящего через эту точку, от геометрии тела; в случае задания перемещений точек тела напряжение зависит также и от его материала. Единица измерения – паскаль (Па).

§ I.5. Компоненты напряженного состояния и свойство парности касательных напряжений

Как мы установили, при действии на тело внешних факторов в нем возникают силы упругости, поверхностная плотность которых в каждой точке любого сечения тела определяется напряжением. Это состояние тела называется напряженным.

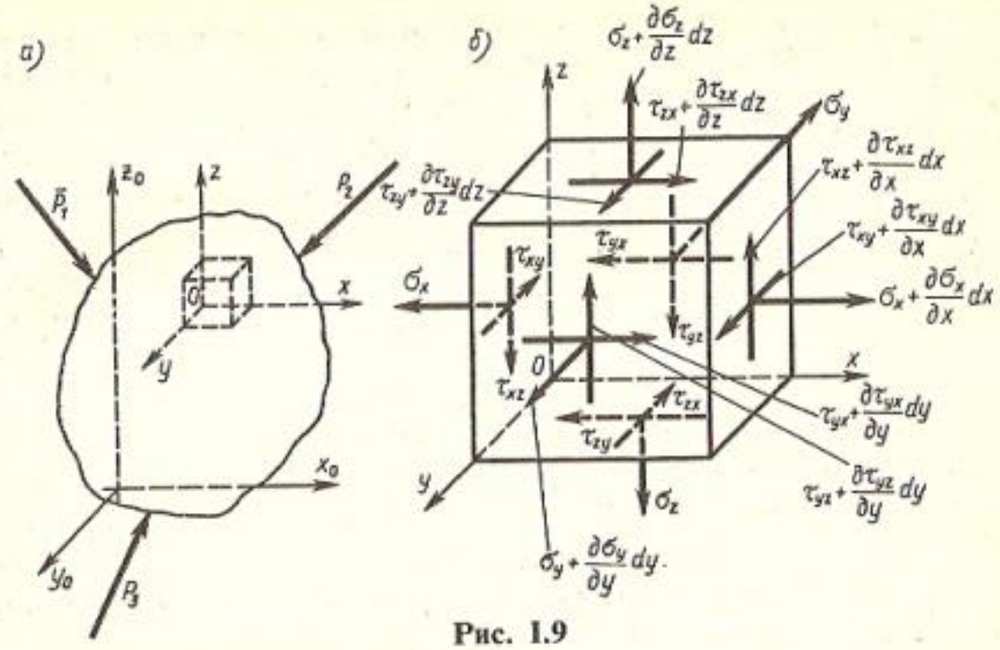


Рис. I.9

Свяжем с телом систему координатных осей x_0, y_0, z_0 и у его произвольной точки O мысленно вырежем элемент с гранями, параллельными координатным плоскостям (взаимно перпендикулярными), и бесконечно малыми ребрами dx, dy, dz (рис. I.9, *а*).

Заменим действие отброшенных частей тела на элемент силами упругости, которые ввиду бесконечной малости ребер можно считать равномерно распределенными по граням. Интенсивность сил упругости зададим напряжениями, которые на каждой грани разложим по координатным осям (рис. I.9, *б*).

Составляющие (проекции) напряжений, действующих по граням, совпадающим с координатными плоскостями, по координатным осям (на координатные оси), называются компонентами напряженного состояния в данной точке тела, определяющими напряженное состояние в этой точке.

Нормальным напряжениям присваивается индекс нормали к грани, по которой они действуют, а касательным напряжениям – два индекса: первый – нормаль к грани, по которой они действуют, а второй – ось, которой они параллельны. Нормальный компонент считается положительным, если он действует от грани. Касательный компонент положителен, если, действуя по грани, внешняя нормаль к которой совпадает по направлению с координатной осью, сам совпадает по направлению с координатной осью, которой он параллелен, или наоборот. Компоненты напряженного состояния, учитывая сказанное в § I.4, являются непрерывными и дифференцируемыми функциями от координат во

всем объеме, занимаемом материалом тела. Если координата получает бесконечно малое приращение, то и каждый компонент получает соответствующее бесконечно малое приращение, как это показано на рис. I.9, *б*.

Вырезанный элемент должен находиться в равновесии, поэтому сумма моментов всех сил, на него действующих относительно любой оси, например оси z, должна равняться нулю. Пренебрегая в этом уравнении членами четвертого порядка малости по сравнению с членами третьего порядка малости, например моментами нормальных сил упругости, действующих по граням, нормальным к оси x:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right) dydz \frac{dy}{2},$$

получим

$$\Sigma m_z = \tau_{xy} dxdydz - \tau_{yx} dxdydz = 0,$$

откуда

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tag{I.6}$$

по аналогии,

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Свойство парности касательных напряжений (свойство парности) читается так:

по взаимно перпендикулярным площадкам действуют равные касательные напряжения, направленные или к линии их пересечения, или от нее.

Напряженное состояние тела будет определено, если будут найдены шесть компонентов напряженного состояния σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} в каждой его точке.

§ I.6. Свойство касательного напряжения в точке контура поперечного сечения

Рассмотрим сечение цилиндрического бруса, нормальное к оси (поперечное) (рис. I.10, *а*). Предположим, что в произвольной точке контура поперечного сечения касательное напряжение $\bar{\tau}$ направлено произвольно по отношению к контуру. Разложим это напряжение на два компонента $\bar{\tau}_n$ и $\bar{\tau}_t$, направленные соответственно по нормали и по касательной к контуру. Если существует напряжение $\bar{\tau}_n$ в плоскости сечения, то по свойству парности должно существовать равное ему по величине напряжение $\bar{\tau}_n'$ на поверхности бруса,

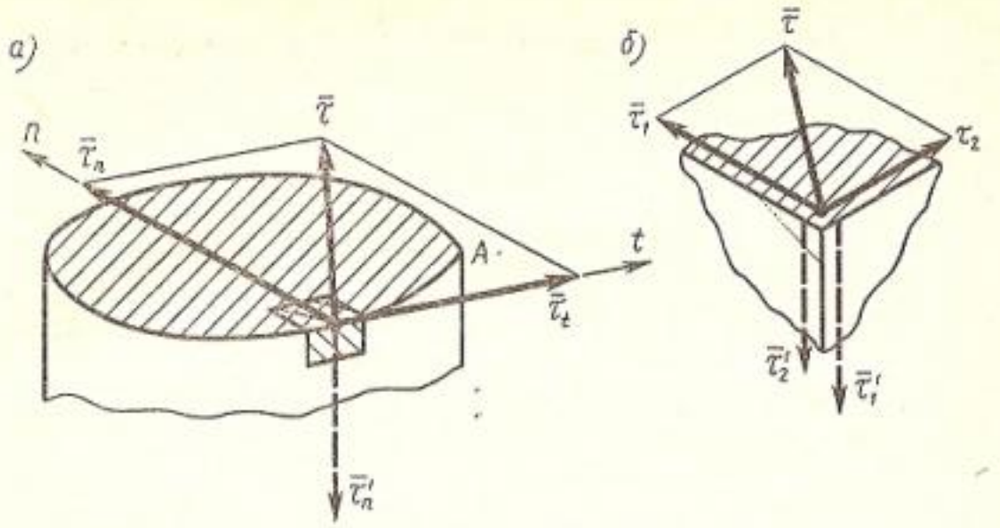


Рис. I.10

так как заштрихованные площадки на рис. I.10, *а* взаимно перпендикулярны. Если поверхность бруса свободна от сил, параллельных оси бруса (продольных), то $\bar{\tau}_n'$ на поверхности, а следовательно, и $\bar{\tau}_n$ в плоскости сечения равняются нулю.

Итак, доказано свойство:

в точке контура поперечного сечения цилиндрического бруса, поверхность которого свободна от продольных сил, касательное напряжение направлено по касательной к контуру.

Покажем, что в вершине выходящего угла поперечного сечения цилиндрического бруса касательное напряжение равно нулю. На рис. I.10, *б* изображен вырезанный из бруса (рис. I.10, *а*) угол A, образованный поперечным сечением (заштрихованная грань) и боковой поверхностью (грани, свободные от штриховки). Предположив, что в вершине угла поперечного сечения действует касательное напряжение $\bar{\tau}$, разложим его по направлениям, перпендикулярным сторонам угла, лежащим в поперечном сечении. Полученные компоненты $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ в плоскости сечения равны нулю, так как равны нулю $\bar{\tau}_1'$ и $\bar{\tau}_2'$ на поверхности бруса.

§ I.7. Компоненты деформации и обобщенный закон Гука

В произвольной точке A (рис. I.11) недеформированного тела возьмем три направления AB, AC, AD, соответственно параллельные осям x, y, z, связанным с телом. После деформации они займут соответственно положения $A'B'$, $A'C'$ и $A'D'$.

Линейной деформацией (относительным удлинением) в точке A по направлению x, обозначаемой ε_x, называется пре-

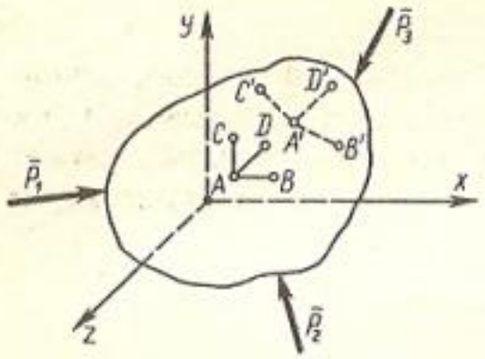


Рис. I.11

дел отношения $(A'B' - AB)/AB$ при стремлении точки B к точке A:

$$\varepsilon_x = \lim_{B \to A} \frac{A'B' - AB}{AB},$$

по аналогии,

$$\varepsilon_y = \lim_{C \to A} \frac{A'C' - AC}{AC},$$

$$\varepsilon_z = \lim_{D \to A} \frac{A'D' - AD}{AD}.$$

Изменение прямого угла между двумя направлениями в точке A, например между направлениями AB и AC, называется угловой деформацией (углом сдвига, относительным сдвигом) между направлениями x и y в этой точке и обозначается γ_{xy}. Следовательно,

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{B \to A \\ C \to A}} \left(< B'A'C' - \frac{\pi}{2} \right),$$

по аналогии,

$$\gamma_{yz} = \lim_{\substack{C \to A \\ D \to A}} \left(< C'A'D' - \frac{\pi}{2} \right), \quad \gamma_{zx} = \lim_{\substack{D \to A \\ B \to A}} \left(< D'A'B' - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, термин «деформация» употребляется в сопротивлении материалов, теории упругости и теории пластичности в двояком смысле: в первом – деформацией называют **явление изменения размеров тела**, а во втором – деформациями называют **относительные удлинения и углы сдвига.**

Безразмерные величины ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} в совокупности называются **компонентами деформации в данной точке тела**. Они будут непрерывными функциями координат во всем объеме тела. В телах большой жесткости при упругой деформации компоненты деформации не превышают тысячных долей единицы и иногда задаются в процентах.

Из опыта следует, что между компонентами напряженного состояния и компонентами деформации в данной точке тела существуют зависимости, называемые **обобщенным законом Гука.**

Этот закон читается так:

до тех пор, пока величины внешних факторов, приложенных к телу, не превысят определенных (предельных) значений, между компонентами напряженного состояния и компонентами деформации в данной точке тела существуют линейные зависимости вида

$$\varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx};$$
$$\varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx};$$
$$\varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx};$$
$$\gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx};$$
$$\gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx};$$
$$\gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx},$$

где для однородного материала коэффициенты C_{ij} – постоянные, зависящие от материала.

Как показывают теоретические исследования, с которыми можно познакомиться, например, по книге *П. Ф. Попковича* «Теория упругости», для изотропного материала уравнения обобщенного закона Гука запишутся в виде

$$\varepsilon_x = A\sigma_x + B(\sigma_y + \sigma_z);$$
$$\varepsilon_y = A\sigma_y + B(\sigma_z + \sigma_x);$$
$$\varepsilon_z = A\sigma_z + B(\sigma_x + \sigma_y); \qquad (I.7)$$
$$\gamma_{xy} = C\tau_{xy};$$
$$\gamma_{yz} = C\tau_{yz};$$
$$\gamma_{zx} = C\tau_{zx}.$$

Постоянные величины A, B, C, входящие в уравнения (I.7), выражаются через две упругие константы изотропного материала, определяемые для каждого материала экспериментально.

§ I.8. Классификация внешних сил и принцип Сен-Венана

Внешние силы классифицируются по способу приложения к телу и по характеру действия на тело. По способу приложения к телу внешние силы делятся на поверхностные, объемные и сосредоточенные.

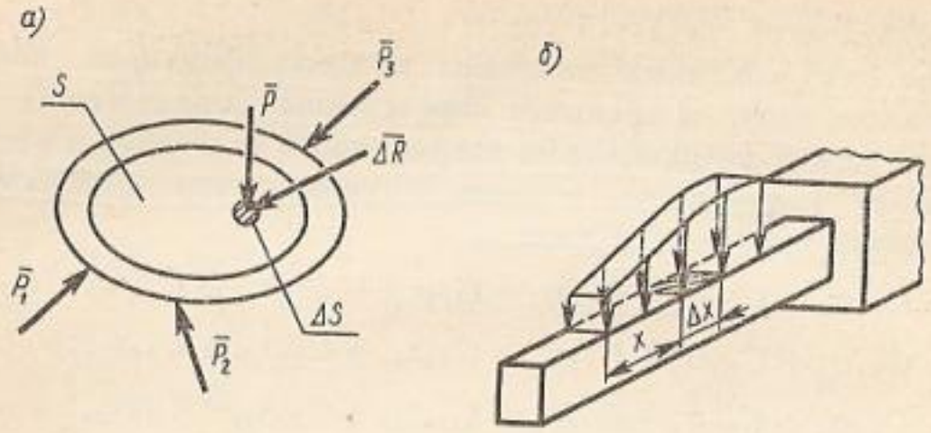


Рис. I.12

1. **Поверхностными** называются силы, распределенные по поверхности, размеры которой одного порядка с размерами поверхности тела. Поверхностными, например, будут аэродинамические силы, действующие в полете на крыло самолета (см. рис. I.1), или силы давления воды, действующие на обшивку корпуса корабля.

Поверхностной интенсивностью $\bar{p}$ в каждой точке поверхности S, по которой распределена нагрузка, называется предел отношения $\Delta\bar{R}/\Delta S$ при $\Delta S \to 0$ (рис. I.12, *а*), где ΔS – площадка, окружающая произвольную точку поверхности S, а $\Delta\bar{R}$ – равнодействующая поверхностных сил, действующих по этой площадке:

$$\bar{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\bar{R}}{\Delta S}.$$

Единица измерения $[p] = \text{Па}$.

2. **Объемными** называются силы, распределенные по всему объему тела. Примерами таких сил являются силы веса и силы инерции. Объемной интенсивностью k в каждой точке объема тела называется предел отношения $\Delta\bar{R}/\Delta V$ при $\Delta V \to 0$, где ΔV – объем, окружающий произвольную точку тела; ΔR – равнодействующая объемных сил, распределенных по этому объему.

Единица измерения $[k] = \text{Н}/\text{м}^3$.

Заметим, что собственный вес детали при прочностном расчете машиностроительных систем почти никогда не учитывается, так как равнодействующая собственных сил веса оказывается пренебрежимо малой по сравнению с прочими силами, действующими на деталь.

Часто поверхностные или объемные силы изменяются только в одном направлении, например при нагружении бруса (рис. I.12, *б*). В этом случае поверхностная или объемная нагрузка называется **погонной**.

Погонной интенсивностью $\bar{q}$ в каждой точке направления изменения нагрузки называется предел отношения $\Delta\bar{R}/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\bar{q} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\bar{R}}{\Delta x},$$

где $\Delta\bar{R}$ – равнодействующая погонных сил, действующих по площадке длиной Δx или объему высотой Δx.

Единица измерения $[q] = \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Французским ученым *Сен-Венаном* в 1855 г. для упрощения решения прочностных задач было выдвинуто положение, носящее название **принципа Сен-Венана** и в современной инженерной практике использующееся в такой формулировке:

При замене данной системы внешних сил статически эквивалентной изменение компонентов деформации и напряженного состояния, имеющее практическое значение, произойдет только в объеме тела, размеры которого имеют порядок наибольшего размера поверхности, по которой распределена данная система, и включающем эту поверхность.

На рис. I.13, *а, б* изображены две системы сил, распределенные по торцовому сечению (рис. I.13, *в*) одного и того же бруса и нормальные к этому сечению. Эти системы статически эквивалентны, если в них соответственно равны

$$R = \int\int_F p\,dF, \quad M_z = \int\int_F y p\,dF, \quad M_y = \int\int_F z p\,dF.$$

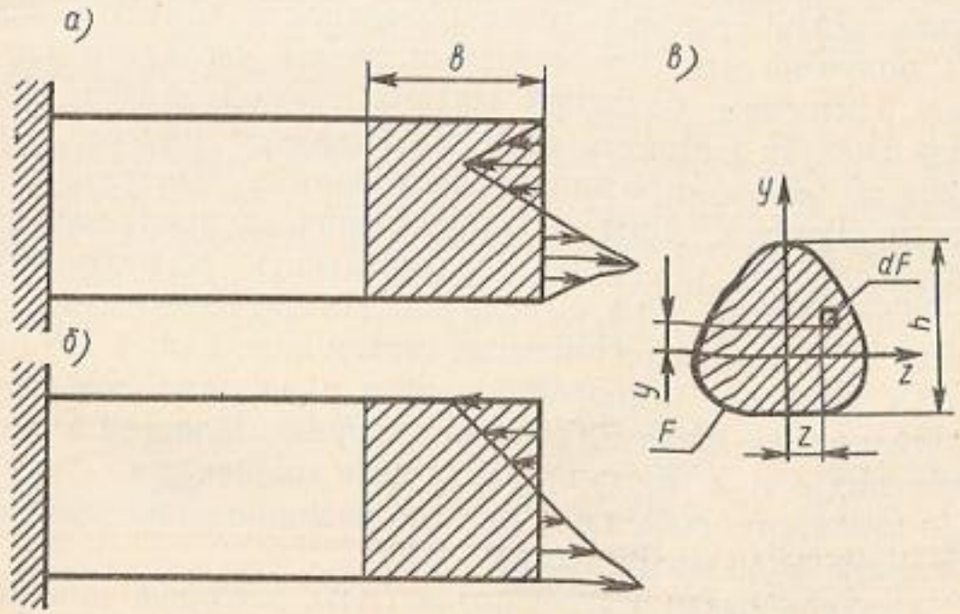


Рис. I.13

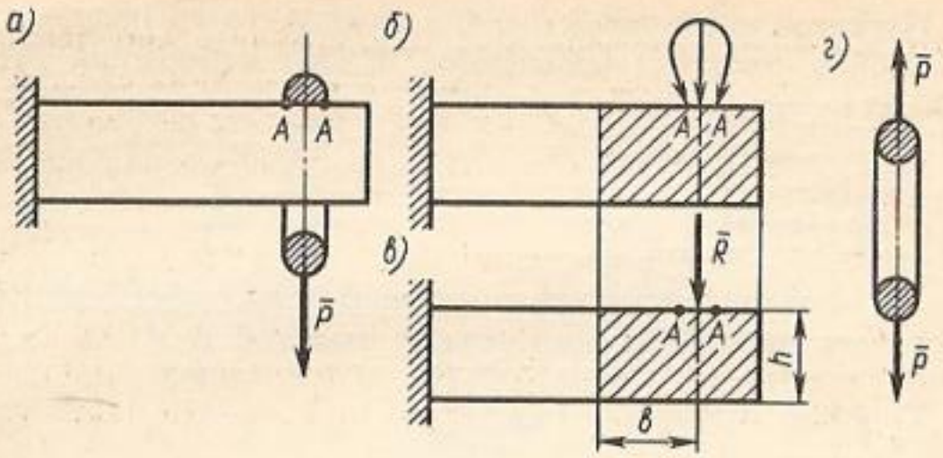


Рис. I.14

При этом условии деформация и напряженное состояние за пределами заштрихованной области ($b \approx h$) в обоих случаях нагружения практически одинаковы.

3. **Сосредоточенной** силой $\bar{P}$ называется равнодействующая поверхностных сил, распределенных по поверхности, размеры которой малы по сравнению с расстоянием до точки, в которой определяются компоненты напряженного и деформированного состояний.

Единица в СИ – ньютон (Н).

Разберем это определение на примере деформации стержня, нагруженного через серьгу силой P (рис. I.14, *а*). Прочностной расчет стержня следует начать с замены действия на него серьги системой сил, распределенной по поверхности контакта, след которой AA, образующейся в результате их взаимной деформации. На рис. I.14, *б* схематически показана такая замена. Значение поверхностной интенсивности в каждой точке поверхности контакта может быть получено только методами теории упругости как результат решения сложной математической задачи. Такую задачу следует решать, если представляют интерес напряженное и деформированное состояния в заштрихованной области стержня. Для их определения за пределами этой области следует заменить распределенную нагрузку равнодействующей (рис. I.14, *в*), величина которой элементарно находится из условия равновесия серьги (рис. I.14, *г*). По принципу Сен-Венана, деформированное и напряженное состояние бруса за пределами заштрихованных областей в схемах нагружения *б* и *в* будут практически одинаковы.

По характеру действия на тело внешние силы делятся на статические и динамические.

1. **Статическими** называются силы, которые прикладываются к телу, возрастая от нуля до рабочего значения,

и сохраняют это значение в течение сравнительно длительного промежутка времени. Скорость нарастания силы dP/dt в процессе нагружения должна быть достаточно малой для того, чтобы можно было пренебречь влиянием сил инерции на прочность.

2. **Динамическими** называются силы, скорость нарастания которых велика, или силы, которые изменяют свое значение в течение сравнительно короткого промежутка времени. Выражения «промежуток времени сравнительно длинный» и «скорость нарастания силы достаточно мала» будут уточнены в дальнейшем.

§ I.9. Классификация тел по их форме

По геометрическим признакам и по применяемой к ним методике расчета все тела делятся на: брус (рис. I.15, *а*), оболочку (рис. 1.15, *б*), пластину (рис. I.15, *в*) и просто тело.

1. **Брус (стержень)** – тело, два размера которого одного порядка, а третий – значительно больше. Геометрически стержень можно образовать движением некоторой фигуры вдоль линии AB таким образом, что центр тяжести фигуры совпадает с этой линией, а плоскость фигуры нормальна к линии в каждой ее точке. Форма и размеры фигуры в процессе движения могут изменяться. Линия AB называется осью стержня, а фигура – его поперечным сечением. Площадь поперечного сечения обозначим F. Стержень с прямой осью будем называть **стержнем**, а поперечное сечение иногда – просто **сечением**.

Продольное сечение – сечение призматического стержня плоскостью, параллельной оси, а волокно – линия в этом стержне, параллельная оси.

Участок стержня – его часть, ограниченная сечениями, в которых или приложены сосредоточенные силы, или функции $q = q(x)$, $F = F(x)$, $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$, где ΔT – изменение температуры, претерпевают разрыв, становятся недифференцируемыми, меняют структуру, или ограниченная сечениями, между которыми существует промежуток (зазор). Гра-



Рис. I.15

ничные сечения участков обозначают арабскими цифрами, а участки – римскими. Участку присваивается номер его правого сечения.

2. **Оболочка** – тело, образованное поверхностями, расстояния между которыми малы по сравнению с их размерами. Эти расстояния называются толщинами оболочки. Геометрическое место средин толщин оболочки называется ее срединной поверхностью.

3. **Пластина** – оболочка, у которой срединная поверхность – плоскость.

4. За телом, у которого все размеры одного порядка (например, шарик шарикоподшипника), сохраняется название **тела**. (Тела в этом смысле сопротивлением материалов не рассматриваются и их расчетом занимается теория упругости.)

§ I.10. Метод сечений

Задача метода сечений состоит в определении составляющих главного вектора и вектора главного момента системы сил упругости, действующих в данном поперечном сечении бруса.

Он состоит из четырех операций, которые могут быть последовательно записаны начальными буквами своих названий – РОЗУ (разрезаем, отбрасываем, заменяем, уравновешиваем). Для решения поставленной задачи:

1. Мысленно **разрезаем** интересующим нас сечением брус на две части, например левую и правую (рис. I.16, *а*).

2. Одну из частей, безразлично какую, **отбрасываем** и рассматриваем оставшуюся (левую) (рис. I.16, *б*).

3. **Заменяем** действие отброшенной части на оставшуюся системой сил упругости, непрерывно распределенной по се-

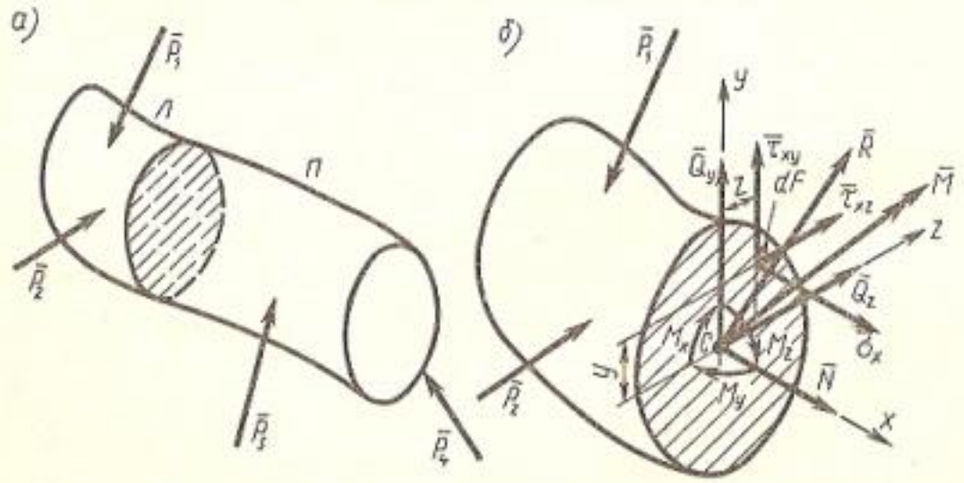


Рис. I.16

чению, которую приводим к главному вектору сил $\bar{R}$ и вектору главного момента $\bar{M}$.

Вектор главного момента удобно изображать с двумя стрелками, чтобы отличать его от вектора силы (рис. I.16, *б*). За точку приведения принимаем центр тяжести или центр изгиба сечения. В точке приведения помещаем начало прямоугольной системы координат. Ось x направляем по нормали к сечению, а оси y и z располагаем в его плоскости. Приняв за точку приведения центр тяжести сечения, разлагаем $\bar{R}$ и $\bar{M}$ по координатным осям, в результате получаем три составляющие силы $\bar{N}$, $\bar{Q}_y$, $\bar{Q}_z$ и три составляющие пары $\bar{M}_x$, $\bar{M}_y$, $\bar{M}_z$. Составляющие $\bar{R}$ и $\bar{M}$ рассматриваются для отсеченной части как внешние силы и пары и называются внутренними силовыми факторами.

Каждому внутреннему силовому фактору присваивается определенное название, одинаковое с названием соответствующей проекции $\bar{R}$ или $\bar{M}$, и величина каждого из них выражается на основании (I.5) через компоненты напряженного состояния по формулам:

$N = \int\limits_F \sigma_x dF$ – нормальное усилие, проекция $\bar{R}$ на нормаль к сечению или проекция нормальных сил упругости в сечении на ось x;

$Q_y = \int\limits_F \tau_{xy} dF$ и $Q_z = \int\limits_F \tau_{xz} dF$ – перерезывающие силы, проекции $\bar{R}$ на оси y и z соответственно или проекции касательных сил упругости в сечении на оси y и z;

$M_x = \int\limits_F (z\tau_{xy} - y\tau_{xz})\, dF$ – проекция $\bar{M}$ на нормаль к сечению или момент касательных сил упругости в сечении относительно оси x;

$M_y = \int\limits_F z\sigma_x dF$ и $M_z = \int\limits_F y\sigma_x dF$ – изгибающие моменты относительно осей y и z, проекции $\bar{M}$ на оси y и z соответственно или моменты нормальных сил упругости в сечении относительно осей y и z.

4. Силы, действующие на отсеченную часть, представляют общий случай пространственной системы сил. Так как отсеченная часть должна находиться в равновесии (должна быть уравновешена), то должны удовлетворяться в своем равенстве нулю шесть уравнений статики:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma m_x = 0,$$
$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma m_y = 0,$$
$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma m_z = 0.$$

Уравнений статики столько, сколько неизвестных внутренних силовых факторов, поэтому задача по их определению через внешние силы, приложенные к брусу, всегда однозначно разрешима.

Рассмотрим последовательно одно из уравнений проекций сил, например $\Sigma X = 0$, и одно из уравнений моментов сил относительно оси, например $\Sigma m_x = 0$. Для проекций сил получим

$$\sum X = N + P_{1x} + P_{2x} = 0. \qquad \text{(I.8)}$$

В уравнение (I.8) вошли проекции сил, действующих на брус по левую сторону от проведенного сечения. Поэтому из уравнения (I.8)

$$|\bar{N}| = |\sum^{\text{лев}} P_{ix}|, \qquad \text{(I.9)}$$

где $\Sigma \bar{P}_{ix}$ – алгебраическая сумма проекций на ось x сил, действующих на брус по левую сторону от проведенного сечения.

По аналогии с (I.9)

$$|\bar{N}| = |\sum^{\text{прав}} P_{kx}|, \qquad \text{(I.10)}$$

где $\sum^{\text{прав}} P_{kx}$ – алгебраическая сумма проекций на ось x сил, действующих на брус по правую сторону от проведенного сечения.

Объединяя (I.9) и (I.10), получим выражение $|\bar{N}|$ через проекции внешних сил, приложенных к брусу:

$$|\bar{N}| = |\sum^{\text{лев}} P_{ix}| = |\sum^{\text{прав}} P_{kx}|. \qquad \text{(I.11)}$$

На основании (I.11) формулируем правило:

абсолютная величина проекции $\bar{R}$ на любую ось в данном сечении равняется абсолютной величине алгебраической суммы проекций всех сил по одну сторону от сечения на ту же ось.

Для моментов сил относительно оси получим

$$\Sigma m_x = M_x + mom_x \bar{P}_1 + mom_x \bar{P}_2 = 0. \qquad \text{(I.12)}$$

В уравнение (I.12) вошли моменты сил, действующих на брус по левую сторону от проведенного сечения. Поэтому из (I.12) по аналогии с (I.11)

$$|\bar{M}_x| = |\sum^{\text{лев}} mom_x \bar{P}_i| = |\sum^{\text{прав}} mom_x \bar{P}_k|, \qquad \text{(I.13)}$$

где $\sum^{\text{лев}} mom_x \bar{P}_i$ и $\sum^{\text{прав}} mom_x \bar{P}_k$ – суммы моментов сил, действующих на брус слева и справа от проведенного сечения относительно оси x.

На основании (I.13) формулируем правило:

абсолютная величина проекции $\bar{M}$ на любую ось в данном сечении равняется абсолютной величине алгебраической суммы моментов всех сил по одну сторону от сечения относительно той же оси.

Если проекция внешних сил по одну сторону от сечения на ось или их момент относительно оси равны нулю, то равняется нулю и соответствующий внутренний силовой фактор в этом сечении.

Знаки внутренних силовых факторов не связываются с направлением координатных осей, а определяются либо деформацией бруса, либо направлением приложенных к нему внешних силовых факторов.

§ I.11. Закон Гука во внешних факторах и перемещениях

Рассмотрим тело (рис. I.17), закрепленное таким образом, что перемещения его точек могут происходить только за счет деформации. Пусть к телу приложены силы $\bar{P}_1, \ldots, \ldots, \bar{P}_n$; кроме того, пусть задано изменение температуры тела, произвольно распределенное по его объему $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$.

Перемещением точки тела по направлению $\bar{v}$, которое обозначается δ_v, называется проекция ее перемещения $\bar{\delta}$ на это направление.

В сопротивлении материалов закон Гука используется в двух формах. Первую из них, следующую из опыта, будем называть **законом Гука** во внешних факторах и перемещениях и читать так:

до тех пор, пока величины внешних факторов, приложенных к телу, не превысят определенных значений, между ними и перемещением любой точки тела по любому направлению существует линейная зависимость.

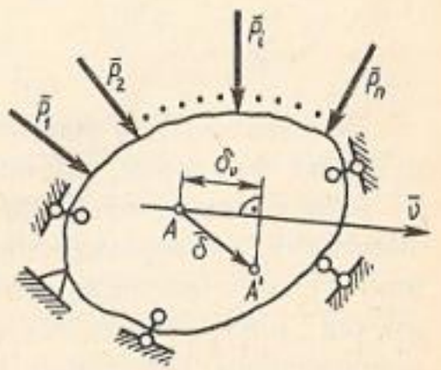


Рис. I.17

Уравнение закона в этой форме запишется в виде

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \delta_{vi} P_i + \delta_{vT} \Delta T_A, \qquad \text{(I.14)}$$

где δ_{vi} и δ_{vT} – коэффициенты, зависящие от выбранного направления в точке, от материала и геометрии тела соответственно, зависящие от законов распределения сил и температуры и независящие от их величин; ΔT_A – изменение температуры в произвольно выбранной точке тела A, за которое обычно принимают его наибольшее значение ΔT_{max}.

Уравнение (I.14) справедливо при любых допускаемых значениях внешних факторов, в том числе и при:

$P_1 \neq 0;\ P_2 = \ \ldots\ = P_n = 0,\ \Delta T_A = 0,$ тогда $\delta_{vP_1} = \delta_{v1} P_1$;

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$P_1 = P_2 = \ \ldots\ = P_{n-1} = 0,\ P_n \neq 0,\ \Delta T_A = 0,$ тогда (I.15)

$\delta_{vP_n} = \delta_{vn} P_n$;

$P_1 = P_2 = \ \ldots\ = P_n = 0,\ \Delta T_A \neq 0,$ тогда $\delta_{v\Delta T} = \delta_{vT} \Delta T_A$.

В (I.15) δ_{vP_i} – перемещение точки тела по направлению v при действии на тело только силы $\bar{P}_i$; $\delta_{v\Delta T}$ – перемещение точки тела по направлению v при действии на тело только температуры.

Из (I.15) очевидно, что: δ_{vi} – перемещение точки по направлению v при действии на тело только единичной безразмерной силы, приложенной по направлению и вместо силы $\bar{P}_i$; δ_{vT} – перемещение точки по направлению v при действии на тело температуры $\Delta T_A = 1$ К, распределенной по заданному закону. Единицы в СИ δ_{vi} – м/Н, δ_{vT} – м/К.

Подставив выражения $\delta_{vi} P_i$ и $\delta_{vT} \Delta T_A$ из (I.15) в (I.14), получим

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \delta_{vP_i} + \delta_{v\Delta T}. \qquad \text{(I.16)}$$

Равенство (I.16) выражает **принцип независимости действия внешних факторов,** который читается так:

если справедлив закон Гука во внешних факторах и перемещениях, то перемещение точки тела по данному направлению от всех внешних факторов, действующих на него, равняется алгебраической сумме ее перемещений по этому направлению, найденных при действии на тело каждого внешнего фактора отдельно.

Как следствие, такая же зависимость существует между внешними факторами, с одной стороны, и внутренними силовыми факторами в любом сечении бруса, компонентами напряженного состояния и деформации в любой точке тела по любому направлению – с другой.

Покажем, что при отсутствии линейной зависимости между внешними факторами и перемещениями принцип независимости действия внешних факторов несправедлив. Пусть $\delta_v = \delta_{11} P_1^2 + \delta_{22} P_2^2 + \delta_{12} P_1 P_2$, если $P_2 = 0$, то $\delta_{vP_1} = \delta_{11} P_1^2$, если $P_1 = 0$, то $\delta_{vP_2} = \delta_{22} P_2^2$; видим, что $\delta_v \neq \delta_{vP_1} + \delta_{vP_2}$.

Задачи, в которых справедлив закон Гука в первой форме, называются **линейными**. Во второй форме закон Гука дан в § I.7. Физическим обоснованием как закона Гука в силах и перемещениях, так и обобщенного закона Гука служит прямо пропорциональная зависимость $\Delta \bar{f}_{ij} = -C \Delta \bar{r}_{ij}$, приведенная в § I.4.

§ I.12. Понятие о расчетной схеме механической системы

Расчетной схемой (моделью) механической системы называется ее упрощенное представление, принимаемое за основу прочностного расчета. Расчетная схема определяется: совокупностью принимаемых гипотез; методикой расчета, которую собираются применить; упрощенным изображением элементов системы; условным представлением действующих на систему сил; пренебрежением некоторыми размерами и конструктивными деталями элементов, которое практически не сказывается на их прочности. Для одной и той же системы можно построить несколько расчетных схем, как правило, с их усложнением – усложняется расчет и повышается точность получаемых результатов.

В качестве примера приведем построение расчетной схемы фермы. Для стержней фермы принимаются четыре гипотезы об их материале (см. § I.2), гипотеза Бернулли и гипотеза о ненадавливаемости волокон; жесткие клепаные или сварные узлы заменяются шарнирами и на основании этого доказывается, что стержни будут работать или на растяжение, или на сжатие; стержни изображаются линиями, соответствующими их осям; внешние силы считаются приложенными в узлах; влияние концентрации напряжений вокруг заклепочных отверстий на прочность не учитывается.

§ I.13. Понятие о начальных несовершенствах элемента системы

Начальными несовершенствами элемента системы назовем существующие до деформации отклонения его свойств от расчетных (номинальных). Для нагруженного стержня начальными несовершенствами являются: кривизна оси, несовершенства опорных устройств, неоднородность материала, смещения точек приложения равнодействующих, действующих на стержень сил. Для круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, например, такими несовершенствами помимо первых трех перечисленных для стержня будут: отклонение формы линии пересечения срединной поверхности с поперечным сечением от круговой и переменность толщины.

Элемент системы без начальных несовершенств назовем **идеальным**.

Существование начальных несовершенств – следствие неизбежных недостатков технологии изготовления элементов, а также сборки и нагружения систем. Поэтому осуществление идеального элемента практически невозможно, хотя понятие этого элемента широко используется в теоретических исследованиях вопросов прочности, жесткости и устойчивости.

Согласно определению теории вероятностей, начальные несовершенства – случайные величины, как показывают исследования реальных систем, достаточно малые по сравнению с соответствующими номинальными величинами, определяющими свойства элемента. Например, для стержня, нагруженного на концах сосредоточенными силами, приложенными в центрах тяжести поперечных сечений (рис. I.2), можно считать

$$\psi = \frac{\delta_0 + e}{l} < 0{,}01, \qquad (I.17)$$

где δ_0 – наибольшее начальное отклонение оси стержня от прямой (наибольший начальный прогиб стержня); e – эксцентриситет приложения сил.

В дальнейшем, давая определение явлений, изучаемых в курсе, считаем, что внешние силы прикладываются к элементу в его идеальном состоянии и за счет начальных несовершенств и деформации не изменяются. Если в изучаемом явлении наличие начальных несовершенств практически не сказывается на прочностных свойствах элемента, то о них упоминать не будем.

Глава II: РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ II.1. Определение нормального усилия в поперечном сечении стержня

Деформация стержня, нагруженного продольными силами (силами, параллельными оси стержня), равнодействующие которых в каждом его поперечном сечении совпадают с осью, называется растяжением или сжатием (рис. II.1).

В дальнейшем для упрощения записи черточек над обозначениями векторов ставить не будем.

Применяя к стержню (рис. II.1) метод сечений, рассматриваем его отсеченную часть слева от произвольного сечения $a - a$ в пределах IV участка (рис. II.2). Так как внешние силы, действующие на отсеченную часть, ни проекций на оси y и z, ни моментов относительно осей x, y, z не дают, то в сечении $a - a$ $Q_y = Q_z = M_x = M_y = M_z = 0$. Следовательно, силы упругости в любом поперечном сечении стержня приведутся к единственному внутреннему силовому фактору N – нормальному усилию, проходящему через его центр тя-

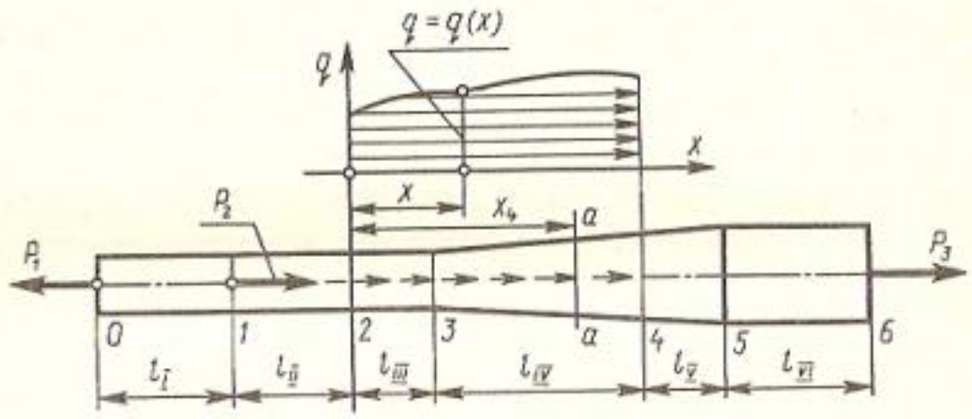


Рис. II.1

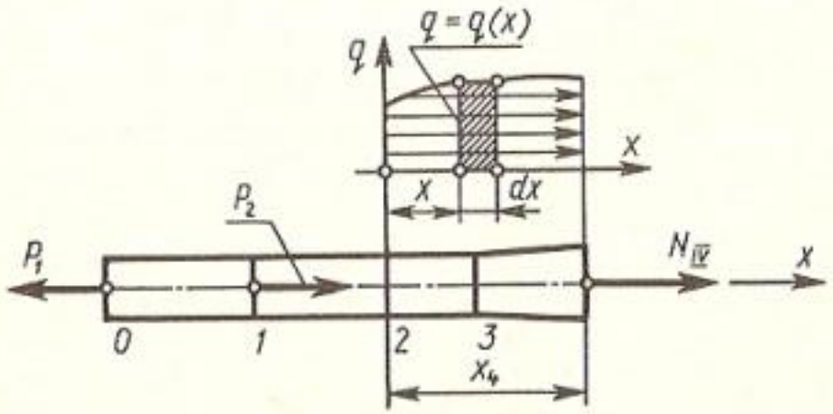


Рис. II.2

жести. Нормальное усилие считается положительным, если оно действует от сечения, т. е. вызывает растяжение, и отрицательным, если действует на сечение, т. е. вызывает сжатие. Неизвестное усилие всегда предполагается растягивающим.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией с уравнением $q = q(x)$ (см. рис. II.1), называется **грузовой** и обозначается Ω_{x_i}, где индекс x_i указывает или номер участка, или текущее сечение в его пределах. Обычно оси x и q на графике не показывают, ограничиваясь заданием направления распределенной нагрузки.

Значение N_{IV} – нормального усилия в текущем сечении IV участка найдем, рассмотрев уравнение равновесия, составленное для отсеченной части стержня:

$$\Sigma X = -P_1 + P_2 + \int_0^{x_4} q dx + N_{IV} = 0, \qquad \text{(II.1)}$$

где $\int_0^{x_4} q dx = \Omega_{x_4}$ – часть грузовой площади по левую сторону от текущего сечения в пределах IV участка. Из уравнения (II.1) получим

$$N_{IV} = P_1 - P_2 - \Omega_{x_4}. \qquad \text{(II.2)}$$

Обобщая выражение (II.2), формулируем правило для определения N:

нормальное усилие в поперечном сечении стержня при растяжении или сжатии равняется алгебраической сумме сосредоточенных сил и грузовых площадей по одну сторону от сечения.

Выражение N на основании этого правила запишется так:

$$N = \sum^{лев} P_i + \sum^{лев} \Omega_j = \sum^{прав} P_m + \sum^{прав} \Omega_n. \qquad \text{(II.3)}$$

Внешние силы, действующие от сечения, входят в выражение (II.3) со знаком плюс, так как вызывают растяжение, а действующие на сечение – со знаком минус, так как вызывают сжатие.

§ II.2. Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) и коэффициент Пуассона

Рассмотрим растянутый стержень постоянного сечения (призматический), нормальное усилие в поперечных сечениях которого – постоянно (рис. II.3, *а*). Опыт показывает, что

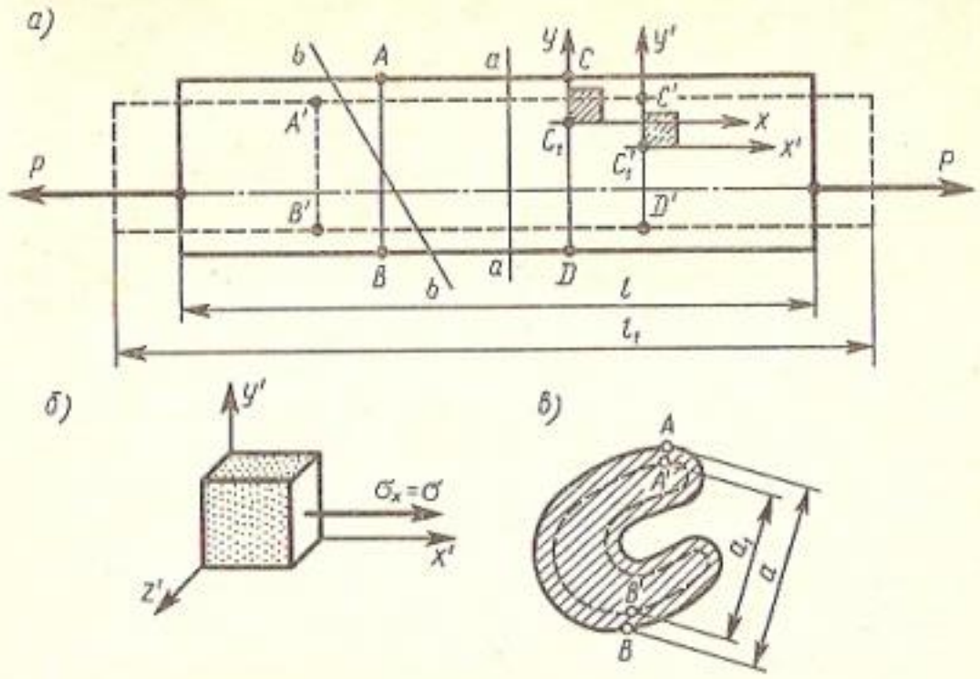


Рис. II.3

в результате деформации продольные размеры стержня увеличиваются, а поперечные уменьшаются. При сжатии будут наблюдаться обратные явления. Из опыта также следует, что линии AB и CD, нанесенные на поверхности стержня, лежащие в поперечных сечениях до деформации, после деформации займут соответственно положения $A'B'$ и $C'D'$, лежащие в поперечных сечениях. При сжатии стержня будет наблюдаться аналогичное явление. Это наблюдение позволяет сформулировать предположение, называемое *гипотезой Бернулли*:

при растяжении и сжатии призматического стержня нормальное усилие в поперечных сечениях которого постоянно, сечения плоские и нормальные к оси до деформации остаются плоскими и нормальными к оси после деформации.

Справедливость гипотезы Бернулли подтверждается решением задачи о растяжении (сжатии) призматического стержня при $N = \text{const}$ методом теории упругости.

На рис. II.3, *а*:

l – расстояние между концевыми сечениями стержня до деформации;

l_1 – расстояние между теми же сечениями после деформации;

a – расстояние между произвольными точками поперечного сечения стержня (рис. II.3, *в*) до деформации;

a_1 – расстояние между теми же точками после деформации.

Обозначим:

$\Delta l = l_1 - l$ – абсолютное продольное удлинение (при растяжении $\Delta l > 0$);

$\Delta a = a_1 - a$ – абсолютное поперечное удлинение (при растяжении $\Delta a < 0$);

$\varepsilon_x = \varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ – относительное продольное удлинение (продольная деформация);

$\varepsilon_y = \varepsilon_0 = \dfrac{\Delta a}{a}$ – относительное поперечное удлинение (поперечная деформация).

Коэффициентом Пуассона μ называется абсолютная величина отношения ε_0 к ε

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right|.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0 = -\mu\varepsilon. \qquad \text{(II.4)}$$

Из опыта следует, что для данного материала μ – величина постоянная, являющаяся первой физической константой материала, определяющей его упругие свойства. Значения μ находятся экспериментально и у изотропных материалов $0 < \mu < 0{,}5$.

§ II.3. Формула для определения нормального напряжения в поперечном сечении стержня

Из гипотезы Бернулли следует, что элемент у произвольной точки стержня C_1 с ортогональными гранями, лежащими до деформации в продольных и поперечных сечениях (на рис. II.3, *а* этот элемент заштрихован), после деформации будет иметь ортогональные грани, лежащие в продольных и поперечных сечениях. Следовательно, для вырезанного из стержня элемента (рис. II.3, *б*)

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \ ,$$

и на основании последних трех уравнений обобщенного закона Гука (1.7) по его граням

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx}.$$

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня, в поперечных сечениях которого нормальное усилие постоянно, касательные напряжения в продольных и поперечных сечениях равны нулю.

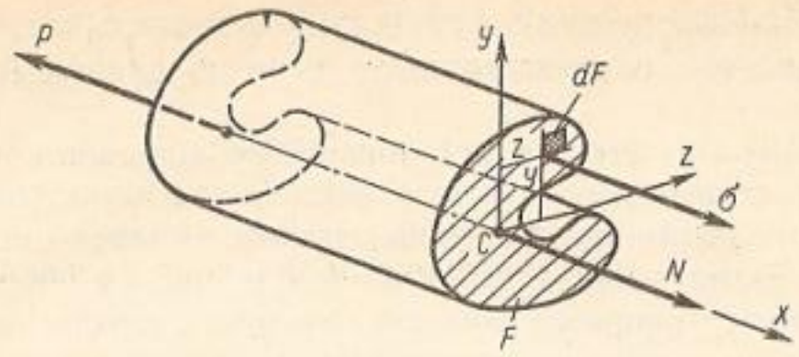


Рис. II.4

Для растянутого (сжатого) стержня помимо гипотезы Бернулли примем гипотезу о ненадавливаемости волокон, из которой следует, что нормальные напряжения по граням элемента, лежащим в продольных сечениях стержня (граням, нормальным к осям y' и z'), равны нулю. Таким образом, в любой точке растянутого или сжатого стержня для элемента (рис. II.3, *б*) отличным от нуля будет единственный компонент напряженного состояния σ_x, нормальный к поперечному сечению, который в дальнейшем будем обозначать σ.

Так как на основании гипотезы Бернулли продольные деформации $\varepsilon = \varepsilon_x$ всех волокон одинаковы, а на основании гипотезы о ненадавливаемости волокон $\sigma_y = \sigma_z = 0$, то из первого уравнения обобщенного закона Гука (I.7) следует, что нормальные напряжения σ во всех точках поперечного сечения равны (нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению).

Проведя в стержне (см. рис. II.3, *а*) произвольное сечение $a - a$, рассмотрим его левую отсеченную часть (рис. II.4). Из определения нормального усилия

$$N = \int\limits_F \int \sigma \mathrm{d}F = \sigma \iint\limits_F \mathrm{d}F = \sigma F \, ,$$

или

$$\sigma = \frac{N}{F}. \qquad \text{(II.5)}$$

Напряженное состояние призматического стержня при растяжении (сжатии) и $N = \mathrm{const}$ называется **однородным** (одинаковым во всех его точках), а напряженное состояние в любой его точке – **одноосным**.

Как показывают решения задач о растяжении (сжатии) призматического стержня методами теории упругости, формулой (II.5) можно пользоваться и при переменном нормальном усилии в поперечных сечениях стержня.

§ II.4. Определение нормального и касательного напряжений в произвольном сечении стержня

Проведем в стержне (см. рис. II.3, *а*) наклонное сечение *в – в* и рассмотрим его левую отсеченную часть (рис. II.5). Положение наклонного сечения отсеченной части определим углом α между нормалью к нему i и осью x. Вследствие однородности напряженного состояния в стержне напряжения p_i по наклонному сечению распределены равномерно, и они параллельны оси x. Площадь наклонного сечения

$$F_i = F/\cos\alpha .$$

Из условия равновесия отсеченной части

$$\Sigma X = -P + p_i F/\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$p_i = \frac{P}{F}\cos\alpha ,$$

или

$$p_i = \sigma\cos\alpha .$$

Проецируя p_i на нормаль к наклонному сечению и его плоскость, получим

$$\sigma_i = \sigma\cos^2\alpha ; \qquad (II.6)$$

$$\tau_i = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha . \qquad (II.7)$$

Из формул (II.6) и (II.7) следует:

1. Нормальные напряжения достигают наибольшего значения при $\alpha = 0$, т. е. в поперечных сечениях.

2. Касательное напряжение достигает наибольшего значения при $\alpha = 45°$, т. е. в сечениях, наклоненных к оси стержня под углом 45°, причем

$$\tau_{max} = [\tau_i]_{\alpha=45°} = \frac{\sigma}{2}.$$

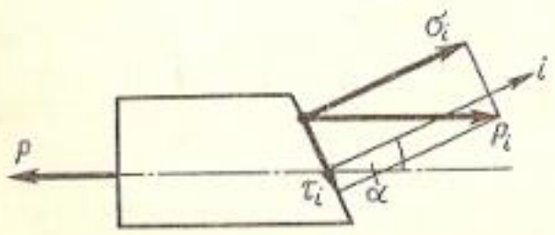


Рис. II.5

3. Нормальные напряжения, действующие в этих сечениях,

$$[\sigma]_{\alpha=45°} = \frac{\sigma}{2}.$$

§ II.5. Результаты механических испытаний на растяжение

Механические испытания на растяжение проводятся на стандартных образцах для того, чтобы результаты испытаний были сравнимы между собой. Форма наиболее распространенного образца для испытаний на растяжение дана на рис. II.6. Он представляет стержень круглого поперечного сечения, имеющий на концах цилиндрические утолщения, называемые головками, которые служат для закрепления образца в захватах испытательной машины. Конические переходы от головок к цилиндрической части служат для исключения влияния концентрации напряжений на результаты испытаний (о концентрации напряжений см. ниже). На этом рисунке: d_0 – первоначальный диаметр, берется 5, 10 или 15 мм; $F_0 = \pi d_0^2/4$ – первоначальная площадь поперечного сечения; l_0 – длина образца; l_1 – рабочая длина образца; l – расчетная длина или база тензометра – длина, на которой определяется Δl. Обычно $l_1 \approx 1{,}5l$.

По результатам испытаний строится график зависимости $P = P(\Delta l)$ – диаграмма растяжения или характеристика образца, в которой P – растягивающая сила, созданная на образце, а Δl – соответствующее этой силе изменение расчетной длины. На рис. II.7 схематически изображены диаграммы растяжения образцов из четырех металлов: малоуглеродистой стали *1*, легированной стали *2*, меди *3*, чугуна *4*, при температурах в диапазоне от –10 до 200 °С.

Все материалы в известной степени условно делятся на пластичные и хрупкие. Типичными представителями пластичных материалов являются углеродистые стали, незакаленные легированные стали, медь, свинец, алюминий, а хрупких – чугун, закаленная легированная сталь, камень, стекло. Таким образом, диаграммами растяжения типа *1*, *2*, *3* обладают пластичные материалы, а типа *4* – хрупкие. На рис. II.7 и везде в дальнейшем индекс P относится к растяжению, а индекс C к сжатию.

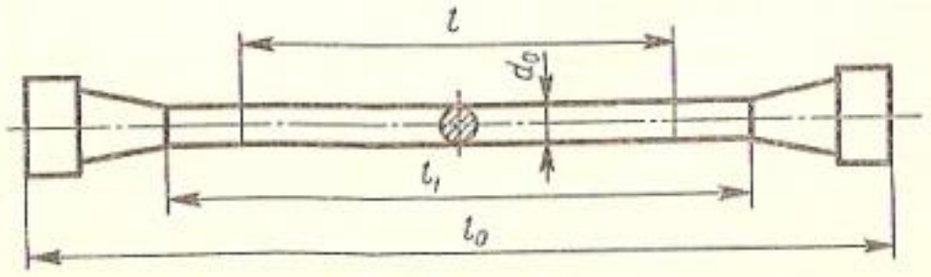


Рис. II.6

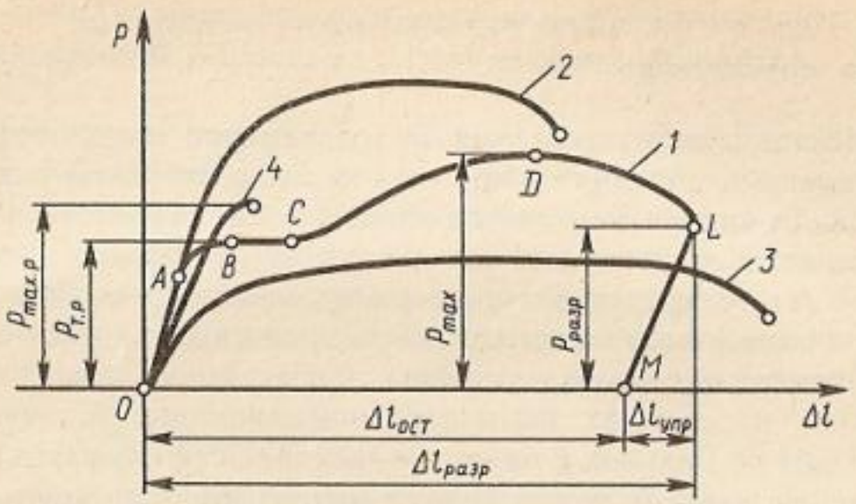


Рис. II.7

Рассматривая диаграмму *1* – типовую диаграмму пластичного материала и результаты испытаний, на основании которых она построена, отмечаем следующее:

1. До тех пор, пока $\Delta l \leqslant \Delta l_A$, справедлив закон Гука в силах и перемещениях

$$P = C\Delta l,$$

где C – коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии образца и его материала.

2. При $\Delta l = \Delta l_B$ наступает явление текучести, состоящее в том, что абсолютные удлинения растут, а нагрузка $P_{т.р}$ остается постоянной. Горизонтальный участок BC диаграммы называется площадкой текучести. Кроме того, при $\Delta l > \Delta l_A$ на первоначально шлифованной поверхности образца появляются линии, наклоненные к его оси под углами, близкими к 45°, называемые *линиями Чернова – Людерса.* Число этих линий с увеличением Δl растет, наклоны их делаются беспорядочными и поверхность образца становится матовой. До тех пор, пока $\Delta l < \Delta l_B$, площадь поперечного сечения образца уменьшается незначительно и практически можно считать, что она равняется F_0. При увеличении Δl по сравнению с Δl_B уменьшение площади уже будет существенно и его можно иногда заметить даже невооруженным глазом. Площадь поперечного сечения образца при данном значении силы P будем называть соответствующей этому значению P.

3. При $P = P_{max}$, где P_{max} – максимальная сила, созданная на образце, прямолинейная до этого образующая его поверхности искривляется и на образце появляется шейка (рис. II.8), $F_н = \pi d_н^2/4$ – наименьшая площадь поперечного сечения шейки.

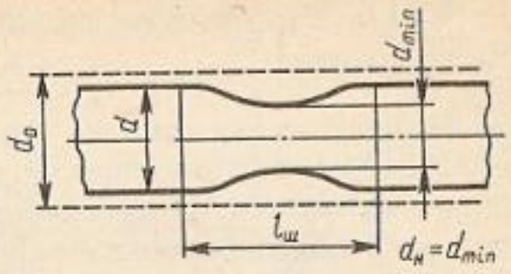


Рис. II.8

Уменьшение наименьшей площади сечения шейки при дальнейшем увеличении Δl приводит к разрушению образца при $P = P_{разр}$, где $P_{разр}$ – сила, при которой происходит разрушение образца.

4. Непосредственно перед разрушением образца зависимость $P = P(\Delta l)$ изобразится линией $ML \parallel OA$ – физический закон. На рис. II.7: $\Delta l_{разр}$ – абсолютное удлинение образца при разрушении; $\Delta l_{упр}$ – абсолютное упругое удлинение образца, исчезающее после разрушения; $\Delta l_{ост} = l' - l$ – остаточное абсолютное удлинение образца при разрушении, где l' – расчетная длина после разрушения, определяемая путем соединения частей разорванного образца и измерения расстояния между рисками, нанесенными на его поверхности, которое первоначально равнялось l.

После разрушения образца определяются величины δ и ψ:

$$\delta = \frac{l' - l}{l} 100\% \text{ – относительное остаточное удлинение}$$

при разрушении;

$$\psi = \frac{F_0 - F_{min}}{F_0} 100\% \text{ – относительное остаточное сужение}$$

при разрушении, где F_{min} – минимальная площадь поперечного сечения шейки. Эти величины являются характеристиками пластических свойств материала: чем они больше, тем материал пластичнее. Для сталей, например, $\delta = 8 \div 45\%$.

Рассматривая диаграмму *4* – типовую диаграмму растяжения хрупкого материала и результаты испытаний, на основании которых она построена, отмечаем следующее:

1. Явление текучести у образца из хрупкого материала не наблюдается и площадь его поперечного сечения в процессе деформации уменьшается крайне незначительно, так что практически ее можно считать равной F_0.

2. Разрушение происходит без предварительного образования шейки при весьма малых относительных остаточных удлинениях ($\delta \leqslant 0{,}7\%$).

§ II.6. Результаты механических испытаний на сжатие

Испытания на сжатие проводятся на цилиндрических образцах круглого поперечного сечения, формы которых изображены на рис. II.9 сплошными линиями. Отношение h/d для этих образцов во избежание потери ими устойчивости и перекоса, которые исказят результаты испытания, приходится брать не больше трех. Образец из пластичного материала при сжатии не разрушается, принимая в процессе испытания бочкообразную форму, показанную на рис. II.9, *а* штриховой линией. Поэтому $P_{\max c}$ для образцов из пластичных материалов не существует. Зависимость $P = P(\Delta l)$ – диаграмма сжатия образца из пластичного материала изображена на рис. II.10 линией *1*. До тех пор, пока $\Delta l \leqslant \Delta l_A$, справедлив закон Гука в силах и перемещениях. При $P = P_{т.с}$ начинается явление текучести.

Бочкообразная форма, которую принимает образец из пластичного материала в процессе испытания на сжатие, обусловливается тем, что между опорами машины и его торцовыми сечениями существуют силы трения, препятствующие свободному поперечному расширению этих сечений. Напряженное состояние в таких образцах не будет одноосным и найденное значение $P_{т.с}$ будет условным.

Образец из хрупкого материала при сжатии разрушается, оставаясь практически цилиндрическим, по сечению, составляющему с его осью угол, близкий к 45° (рис. II.9, *б*). Диаграмма сжатия образца из хрупкого материала показана на рис. II.10 линией *2*.

Для устранения влияния сил трения на результаты испытания следует взять трубчатый образец с коническими

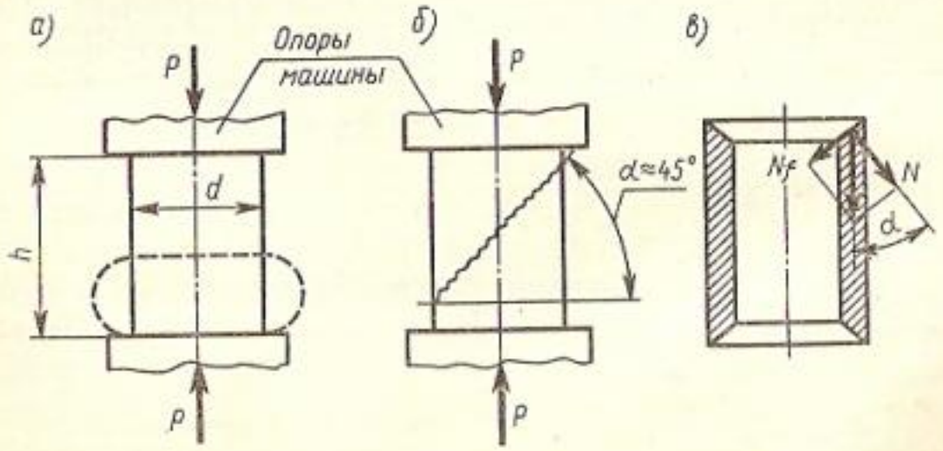


Рис. II.9

торцовыми сечениями и с коническими опорами машины (*образец Лихарева*).

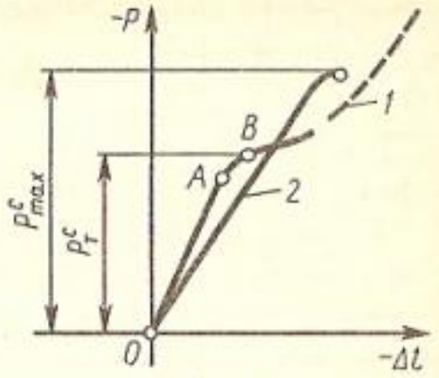


Рис. II.10

Такой образец и схема сил, на него действующих, показаны на рис. II.9, *в*, где f – коэффициент трения между материалами образца и опор, а $\operatorname{tg}\alpha = f$. Этот образец будет испытывать одноосное сжатие во всех своих сечениях, и его форма в процессе испытания будет цилиндрической. Однако изготовление таких образцов и опор к ним трудоемко и дорогостояще, поэтому они в настоящее время используются только в экспериментальных научно-исследовательских работах.

§ II.7. Диаграмма напряжений

По диаграммам растяжения и сжатия строится график зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ – диаграмма напряжений или характеристика материала при растяжении-сжатии, в которой

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{II.8}$$

Построенную таким образом диаграмму следует считать условной, так как в ней σ определяется делением силы P не на соответствующую ей площадь поперечного сечения, а на первоначальную. Кроме того, после образований шейки деформация образца сосредоточивается в ее области, а деформация его остальной части не увеличивается и определять ε по формуле (II.8) при $\Delta l > \Delta l_D$ нельзя. Однако построение диаграммы в координатах (II.8) сравнительно просто и требованиям прочностных расчетов при упругих деформациях, а также оценке сравнительных механических свойств материалов она удовлетворяет.

Типовая диаграмма напряжений пластичного материала дана на рис. II.11, *а*. У многих материалов участок OA практически прямолинеен, и его уравнение запишется в виде

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{II.9}$$

Подставив в (II.9)

$$\sigma = \frac{N}{F} \text{ и } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

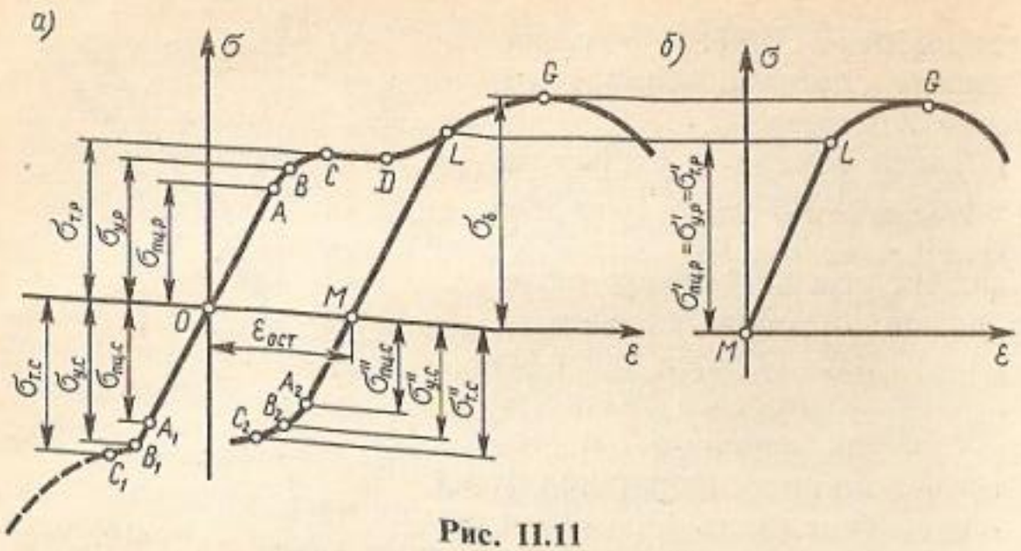


Рис. II.11

получим формулу для определения абсолютного удлинения стержня (см. рис. II.3, *а*)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \qquad \text{(II.10)}$$

которая является выражением закона Гука в силах и перемещениях при растяжении-сжатии.

Входящее в формулу (II.10) произведение EF называется **жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии.**

Уравнение (II.9) будет частным случаем первого уравнения (I.7), когда $\sigma_y = \sigma_z = 0$, и выражает закон Гука при растяжении-сжатии: до тех пор, пока нормальное напряжение в поперечном сечении стержня не превысит определенной величины, между ним и продольной деформацией стержня существует прямо пропорциональная зависимость.

Коэффициент пропорциональности в (II.9) E называется **модулем продольной упругости** (модулем упругости при растяжении-сжатии, модулем упругости первого рода). Для каждого материала E определяется экспериментально и имеет размерность напряжения; E вторая константа, вместе с μ полностью определяющая упругие свойства материала.

На диаграмме напряжений (рис. II.11, *а*) можно отметить ряд характерных точек, ординаты которых имеют определенные обозначения и названия. Первая из них – точка A, имеющая ординатой $\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности, наибольшее напряжение, до которого сохраняется зависимость (II.9); вторая – B, имеющая ординатой σ_y – предел упругости, наибольшее напряжение, до которого деформации упруги.

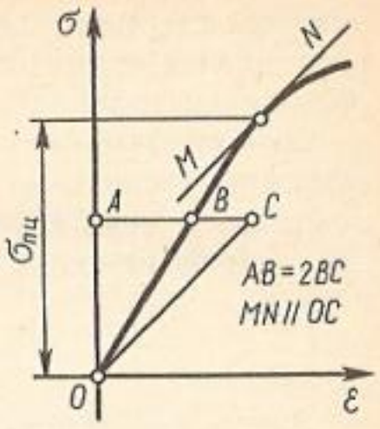


Рис. II.12

Незначительные пластические деформации в поликристаллическом теле могут появляться при самых небольших значениях внешних сил, что, в свою очередь, приведет к некоторому, практически не имеющему значения, искривлению участка OA. Поэтому экспериментально полученные значения $\sigma_{пц}$ и σ_y в сильной степени зависят от чувствительности тензометра, которым пользовались при испытании, и чем эта чувствительность выше, тем раньше будет замечено появление пластических деформаций и нарушение прямо пропорциональной зависимости между σ и ε, тем ниже будут значения $\sigma_{пц}$ и σ_y. Поэтому за $\sigma_{пц}$ и σ_y принимают некоторые условные напряжения, до которых соответственно практически зависимость между σ и ε можно считать прямо пропорциональной, а деформации упругими.

За $\sigma_{пц}$ принимается напряжение, при котором $d\varepsilon/d\sigma$ увеличивается на 50% по сравнению с значением в начале координат. На рис. II.12 показано его практическое определение. За σ_y принимается напряжение, при котором остаточная деформация равняется 0,005%.

Следующее характерное напряжение $\sigma_т$ – предел текучести. При наличии на характеристике горизонтального участка CD (площадки текучести) $\sigma_т$ определяется как отношение нагрузки, при которой происходит явление текучести, к первоначальной площади поперечного сечения образца:

$$\sigma_т = \frac{P_т}{F_0}.$$

Напряжение $\sigma_в$ или $\sigma_{пч}$ – временное сопротивление или предел прочности, определяется как отношение максимальной нагрузки, созданной на образце, к первоначальной площади его поперечного сечения

$$\sigma_в = \frac{P_{max}}{F_0}.$$

Временное сопротивление обычно принимается за условную оценку сопротивления материалов разрушению, хотя оно не является ни максимальным напряжением, созданным в поперечном сечении образца, ни напряжением, при котором происходит разрушение. Это сравнительная для раз-

личных материалов величина, принимаемая за критерий сопротивления разрушению, потому что ее практическое определение просто.

Если образец получит деформацию $\varepsilon_L > \varepsilon_y$, то после разгрузки он будет иметь остаточную деформацию $\varepsilon_{ост}$. Опыт показывает, что $LM \parallel OA$. На этом основании формулируется закон разгрузки

$$\varepsilon = \varepsilon_{ост} + \frac{\sigma}{E}. \qquad (II.11)$$

Диаграмма напряжений предварительно пластически деформированного образца дана на рис. II.11, *б*. Видим, что значения $\sigma_{пц.р}$, $\sigma_{у.р}$ и $\sigma_{т.р}$ за счет предварительной пластической деформации растяжения при повторном растяжении повысились. Это явление называется упрочнением или наклепом. Если тот же образец подвергнуть сжатию, то окажется, что $\sigma'_{пц.с} < \sigma_{пц.с}$, $\sigma'_{у.с} < \sigma_{у.с}$, $\sigma'_{т.с} < \sigma_{т.с}$, т. е. значения $\sigma_{пц.с}$, $\sigma_{у.с}$ и $\sigma_{т.с}$ за счет предварительной пластической деформации растяжения уменьшаются. Это явление называется **эффектом Баушингера**.

Характеристики многих материалов не имеют площадки текучести, поэтому для них за предел текучести принимается условное напряжение, при котором остаточная деформация равняется 0,2%. Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$, а его практическое определение показано на рис. II.13.

Для многих пластичных материалов $\sigma_{пц}$, $\sigma_у$ и $\sigma_т$ при растяжении и сжатии практически соответственно равны. Такие материалы называют одинаково работающими на растяжение и сжатие.

Величины μ, E, $\sigma_{пц}$, $\sigma_у$, $\sigma_т$, $\sigma_в$, δ и ψ называются механическими характеристиками материала.

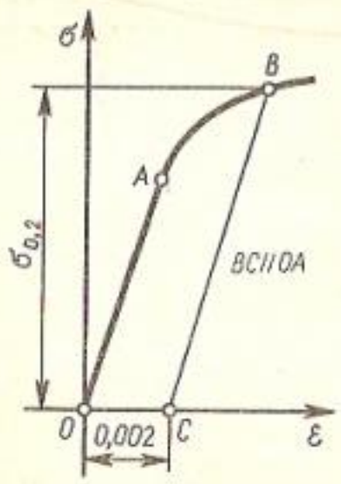


Рис. II.13

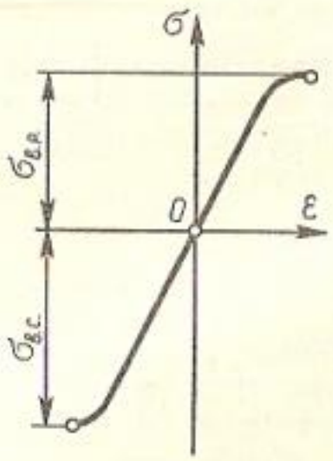


Рис. II.14

Типовая характеристика хрупкого материала, на которой $\sigma_{в.р} = P_{max\,р}/F_0$, а $\sigma_{в.с} = P_{max\,с}/F_0$, показана на рис. II.14.

Сопоставляя характеристики пластичного и хрупкого материалов и результаты испытаний, на основании которых они построены, можно сформулировать основные признаки деления материалов на пластичные и хрупкие:

1) относительное остаточное удлинение при разрушении δ у пластичных материалов сравнительно велико, а у хрупких мало;

2) образцы из пластичных материалов при растяжении разрушаются с предварительным образованием шейки, а образцы из хрупких материалов – без ее образования;

3) у пластичных материалов наблюдается явление текучести, а у хрупких – нет, поэтому понятия предела текучести для хрупких материалов не существует;

4) образцы из хрупких материалов разрушаются при сжатии, а из пластичных – нет, поэтому понятия предела прочности при сжатии для пластичных материалов не существует;

5) многие пластичные материалы примерно одинаково работают на растяжение и сжатие, а хрупкие, как правило, значительно лучше работают на сжатие, чем на растяжение, и для них $\sigma_{в.с} > \sigma_{в.р}$.

Существуют материалы, которые лучше работают на растяжение, чем на сжатие, и для них $\sigma_{в.р} > \sigma_{в.с}$. Таким свойством обладают древесина, древесно-слоистые пластики, некоторые пластмассы.

Значения основных механических характеристик для некоторых материалов даны в табл. 1.

Таблица 1

Материал	$E \cdot 10^5$, МПа	$\sigma_{т.р}$, МПа	$\sigma_{т.с}$, МПа	$\sigma_{в.р}$, МПа	$\sigma_{в.с}$, МПа	δ, %	ψ, %
Сталь Ст3	2	240	240	450	–	26	50
Сталь 15	2	210	210	350	–	28	55
Сталь 45	2	340	340	610	–	24	45
Сталь 30ХГСА (закалка и отпуск 500 °С)	2	950	950	1200	–	13	50
Сталь 30ХГСА, (закалка и отпуск 200 °С)	2	1400	1400	1700	–	10	40
Сталь 40ХНВА закаленная		1700	2100	2100	–	10	40

Продолжение

Материал	$E \cdot 10^5$, МПа	$\sigma_{т.р}$, МПа	$\sigma_{т.с}$, МПа	$\sigma_{в.р}$, МПа	$\sigma_{в.с}$, МПа	δ, %	ψ, %
Сталь У8 незакаленная	2	250	430	630	–	25	45
Чугун СЧ15–32	1,5	–	–	150	640	0,6	–
Медь прутковая	1,1	250	250	320	–	15	45
Алюминий	0,7	50	50	84	–	35	–
Дуралюмин Д16	0,75	240	240	420	–	18	–
Сосна (вдоль волокон)	0,1	–	–	100	50	–	–
Дельта-древесина	0,2	–	–	250	160	–	–
Текстолит	0,3	75	115	127	168	1,5	–

§ II.8. Выражение постоянных A и B, входящих в уравнения обобщенного закона Гука, через упругие константы материала E и μ

Если в первом уравнении (I.7) положить $\sigma_y = \sigma_z = 0$, то получим уравнение

$$\varepsilon_x = A\sigma_x,$$

выражающее закон Гука при растяжении-сжатии. Сопоставляя это уравнение с (II.9), найдем

$$A = \frac{1}{E}, \qquad \text{(II.12)}$$

После подстановки (II.12) в уравнения (I.7) при $\sigma_y = \sigma_z = 0$, будем иметь

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x, \quad \varepsilon_y = B\sigma_x.$$

Подставив выражения для ε_x и ε_y в зависимость (II.4), получим

$$B\sigma_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_x,$$

откуда

$$B = -\frac{\mu}{E}. \qquad \text{(II.13)}$$

После подстановки (II.12) и (II.13) в (I.7) будем иметь

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z));$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)); \qquad \text{(II.14)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)).$$

Уравнения (II.14), являющиеся частью уравнений обобщенного закона Гука, называют законом Гука при трехосном растяжении-сжатии. Сжимающие нормальные напряжения должны подставляться в (II.14) со знаком минус.

§ II.9. Дифференциальные и интегральные зависимости между q и N, ε и δ

Пусть на i-ом участке стержня заданы $F = F(x)$, $q = q(x)$, $\Delta T = \Delta T(x)$ (рис. II.15, *а, б, в*). Вырежем на участке элемент бесконечно малой длины dx (рис. II.16). Пусть N – нормальное усилие в левом сечении элемента, а δ – перемещение этого сечения. Так как для правого сечения элемента x получает бесконечно малое приращение dx, нормальное усилие в правом сечении и его перемещение получат бесконечно малые приращения, равные соответственно dN и $d\delta$. В силу бесконечной малости dx интенсивность нагрузки q и изменение температуры ΔT можно считать постоянными по длине элемента. Элемент находится в равновесии, поэтому

$$\Sigma x = N + dN - N + q\,dx = 0,$$

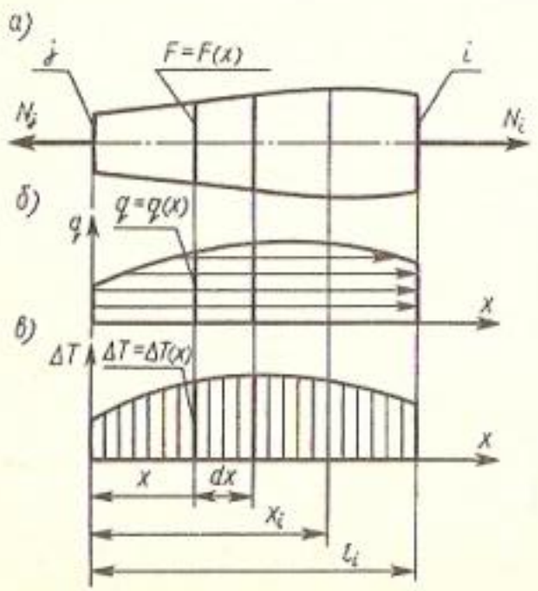
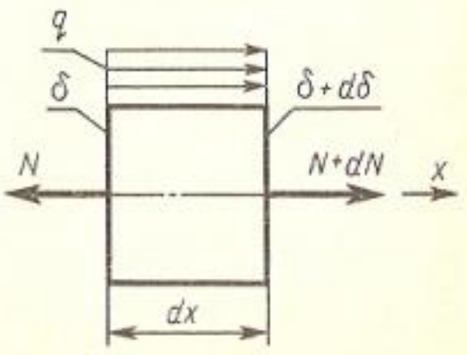


Рис. II.15

Рис. II.16



откуда

$$\frac{dN}{dx} = -q. \tag{II.15}$$

Из (II.15)

$$N = -\int_0^{x_j} q dx + N_j. \tag{II.16}$$

Абсолютное удлинение $\Delta dx = d\delta$, поэтому

$$\frac{d\delta}{dx} = \varepsilon. \tag{II.17}$$

Из (II.17)

$$\delta = \int_0^{x_j} \varepsilon dx + \delta_j. \tag{II.18}$$

В (II.16) и (II.18) N_j – нормальное усилие в левом сечении участка (начале координат), δ_j – перемещение этого сечения (перемещение начала координат).

В (II.17) и (II.18)

$$\varepsilon = \alpha \Delta T + \frac{N}{EF},$$

где α – коэффициент линейного расширения материала участка, поэтому

$$\delta = \int_0^{x_j} \left(\alpha \Delta T + \frac{N}{EF} \right) dx + \delta_j. \tag{II.19}$$

В (II.19) первое слагаемое называется относительным перемещением, а второе – переносным. Перемещение сечения считается положительным, если оно совпадает по направлению с осью x. При $\Delta T = 0$ (силовая задача) знак относительного перемещения совпадает со знаком усилия на участке.

§ II.10. Расчет на прочность

В машиностроении проводятся два вида расчета на прочность – расчет по допускаемым напряжениям и расчет по несущей способности, отличающиеся состоянием системы, которое в каждом из них принимается за опасное. Познакомимся с первым из этих расчетов.

В расчете по допускаемым напряжениям за опасное состояние системы принимается то, при котором расчетное напряжение хотя бы в одной из ее точек достигает предельного значения. Предельное напряжение обозначим $\sigma_{пр}$.

Для элементов систем, изготовленных из пластичных материалов, за опасное состояние принимается появление недопустимых пластических деформаций и поэтому для них $\sigma^p_{пр} = \sigma_{т.р}$, $\sigma^c_{пр} = \sigma_{т.с}$, а для изготовленных из хрупких материалов – разрушение, поэтому для них $\sigma^p_{пр} = \sigma_{в.р}$, $\sigma^c_{пр} = \sigma_{в.с}$. Расчетными напряжениями при растяжении-сжатии будут либо σ_{max} – наибольшее растягивающее напряжение, либо $|\sigma_{min}|$ – наибольшее по абсолютной величине сжимающее напряжение в системе (стержне).

Расчеты на прочность по допускаемым напряжениям могут быть проектировочными и проверочными.

I. **Проектировочным** называется расчет, в котором по заданным – схеме нагружения, силам, материалу и части геометрических размеров системы – требуется определить ее остальные геометрические размеры.

Условие прочности проектировочного расчета записывается так:

$$\sigma_{max} = \left[\frac{N}{F} \right]_{max} \leqslant \frac{\sigma^p_{пр}}{[n]} = [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_{min}| = \left| \left[\frac{N}{F} \right]_{min} \right| \leqslant \frac{\sigma^c_{пр}}{[n]} = [\sigma]_c. \tag{II.20}$$

В (II.20) $[\sigma]_p$ – допускаемое напряжение на растяжение, $[\sigma]_c$ – допускаемое напряжение на сжатие, $[n]$ – нормативный запас прочности.

Из условий (II.20) определяются два значения F, найденные из расчета системы на прочность по растяжению и по сжатию, и в качестве рабочего (безопасного) для системы принимается большее.

Если материал элементов системы одинаково работает на растяжение и сжатие, или $\sigma^p_{пр} = \sigma^c_{пр} = \sigma_{пр}$, то для него условие прочности запишется так:

$$|\sigma|_{max} = \left| \frac{N}{F} \right|_{max} \leqslant \frac{\sigma_{пр}}{[n]} = [\sigma], \tag{II.21}$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие.

В условии прочности (II.20) предельные напряжения при растяжении и сжатии делятся на число $[n]$ – нормативный запас прочности, в результате чего расчетные напряжения

сравниваются не с предельными, а с допускаемыми. В противном случае (если бы $[n]=1$) не было учтено влияние на прочность ряда факторов, основными из которых являются:

1. **Неточность определения расчетных напряжений за счет отклонения условий работы системы от принятых в расчете.** Например, определяя напряжения в растянутом или сжатом стержне, мы предполагаем, что его ось – прямая линия и равнодействующие внешних сил, приложенных к стержню, с ней совпадают. В реальном стержне будут и некоторые начальные искривления оси и эксцентриситеты равнодействующих, не поддающиеся предварительному определению, поэтому напряжения, найденные по формуле (II.5), будут несколько меньше действительных.

2. **Некоторый разброс значений экспериментально найденных характеристик материала, которые служат базой расчета на прочность.**

Эти значения могут отличаться от указанных в справочных таблицах хотя бы за счет различного качества одного и того же материала, определяемого технологией изготовления и термической обработкой. Степень разброса зависит от материала. Например, для стали она будет меньше, чем для чугуна, вследствие ее большой однородности.

3. **Неточность определения значений внешних факторов и возможность их увеличения в процессе эксплуатации системы.**

4. **Эксплуатационное назначение системы и связанная с ним серьезность последствий, которое повлечет возникновение в ней опасного состояния.**

5. **Срок жизни системы, определяющий износ и степень коррозии ее элементов.**

Значение $[n]$ определяется по формуле

$$[n]=[n]_1\cdot[n]_2\cdot\ldots\cdot[n]_k, \qquad \text{(II.22)}$$

где $[n]_i$ – частный нормативный запас прочности, учитывающий влияние на прочность одного из факторов. Выбор величин $[n]_i$ основывается на статистической обработке результатов практики эксплуатации систем и их испытаний.

По этому методу в различных отраслях машиностроения и строительства рассчитаны значения нормативных запасов прочности и утверждены в законодательном порядке. Инженер, производящий прочностной расчет, должен пользоваться ими как данными.

Если $\sigma_{пр}=\sigma_т$, то $[\sigma]=\dfrac{\sigma_т}{[n]_т}$, где $[n]_т$ – нормативный запас прочности по текучести, а если $\sigma_{пр}=\sigma_в$, то $[\sigma]=\dfrac{\sigma_в}{[n]_в}$, где $[n]_в$ – нормативный запас прочности по разрушению, причем $[n]_в>[n]_т$.

Проектировочный расчет всегда желателен, но, к сожалению, не всегда возможен. В системах типа крыла, фюзеляжа или оперения самолета, например, по причине их конструктивной сложности приходится проводить не проектировочный расчет, а проверочный.

II. **Проверочным** (поверочным) называется расчет, в котором по данным – расчетной схеме, материалу, силам и всем геометрическим размерам системы – требуется оценить ее прочность.

Итогом проверочного расчета является определение запаса прочности n – числа, показывающего, во сколько раз надо одновременно и пропорционально увеличить действующие на систему внешние факторы для того, чтобы наступило опасное состояние.

В случае линейной зависимости между внешними факторами и напряжениями запас прочности системы, материал элементов которой неодинаково работает на растяжение и сжатие, следует найти по формулам (II.23) и принять в качестве ее запаса прочности меньшее из полученных значений:

$$n_р=\frac{\sigma^р_{пр}}{\sigma_{max}},\quad n_с=\frac{\sigma^с_{пр}}{|\sigma_{min}|}. \qquad \text{(II.23)}$$

Запас прочности должен быть больше единицы и находиться в пределах значений нормативных запасов прочности, принятых в данной отрасли машиностроения.

Если материал системы одинаково работает на растяжение и сжатие, то

$$n=\frac{\sigma_{пр}}{|\sigma|_{max}}. \qquad \text{(II.24)}$$

В расчете по несущей способности за опасное состояние принимается состояние системы, при котором ее равновесие становится невозможным при дальнейшем увеличении внешних сил. Этот расчет будет изложен в § XIV.5.

§ II.11. Концентрация напряжений и ее влияние на прочность при статическом нагружении

Концентрацией напряжений называется явление увеличения напряжений по сравнению с номинальными (определяемыми по формулам сопротивления материалов) в ме-

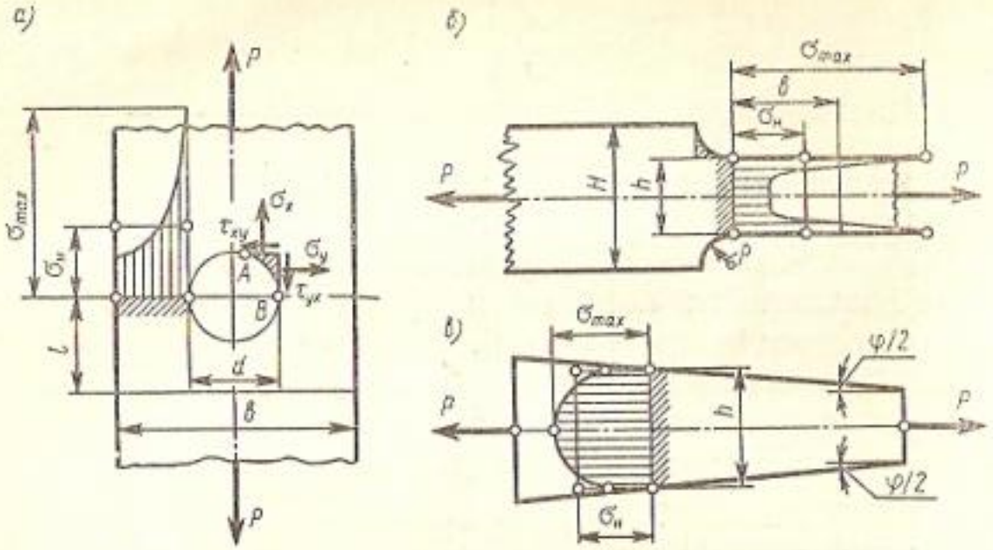


Рис. II.17

стах изменения формы сечения, или формы детали. На рис. II.17, *а, б, в* изображены три источника концентрации в растянутых полосах: *а* – отверстие, *б* – переход с одного размера на другой, *в* – клиновидное изменение формы. В сечениях с наибольшим σ_{max} (опасных) схем *а* и *б* и в произвольном сечении клина схематически показаны законы изменения напряжений – действительный и номинальный. Номинальные напряжения определяются по формулам: $\sigma_н = P/[(b-d)t]$ – схема *а*, $\sigma_н = P/(ht)$ – схемы *б* и *в*, где t – толщина полос.

Значения σ_{max} и действительные законы распределения напряжений по сечениям в области источника концентрации могут быть получены или решением задачи методами теории упругости, и мы в дальнейшем воспользуемся их результатами, или экспериментально, если решить задачу о концентрации напряжений методами теории упругости не удается. Количественно концентрация напряжений оценивается теоретическим коэффициентом концентрации

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_н}.$$

На рис. II.18, *а, б, в* изображены графики зависимости α от форм источников концентрации, соответствующие схемам нагружения *а, б* и *в* (см. рис. II.17). Концентрация напряжений в схемах *а* и *б* носит резко выраженный местный характер и в сечениях, достаточно удаленных от источника концентрации, распределение напряжений будет практически номинальным (аналогия с принципом Сен-Венана). В схеме *а* при $b/d = 2$ распределение напряжений будет практи-

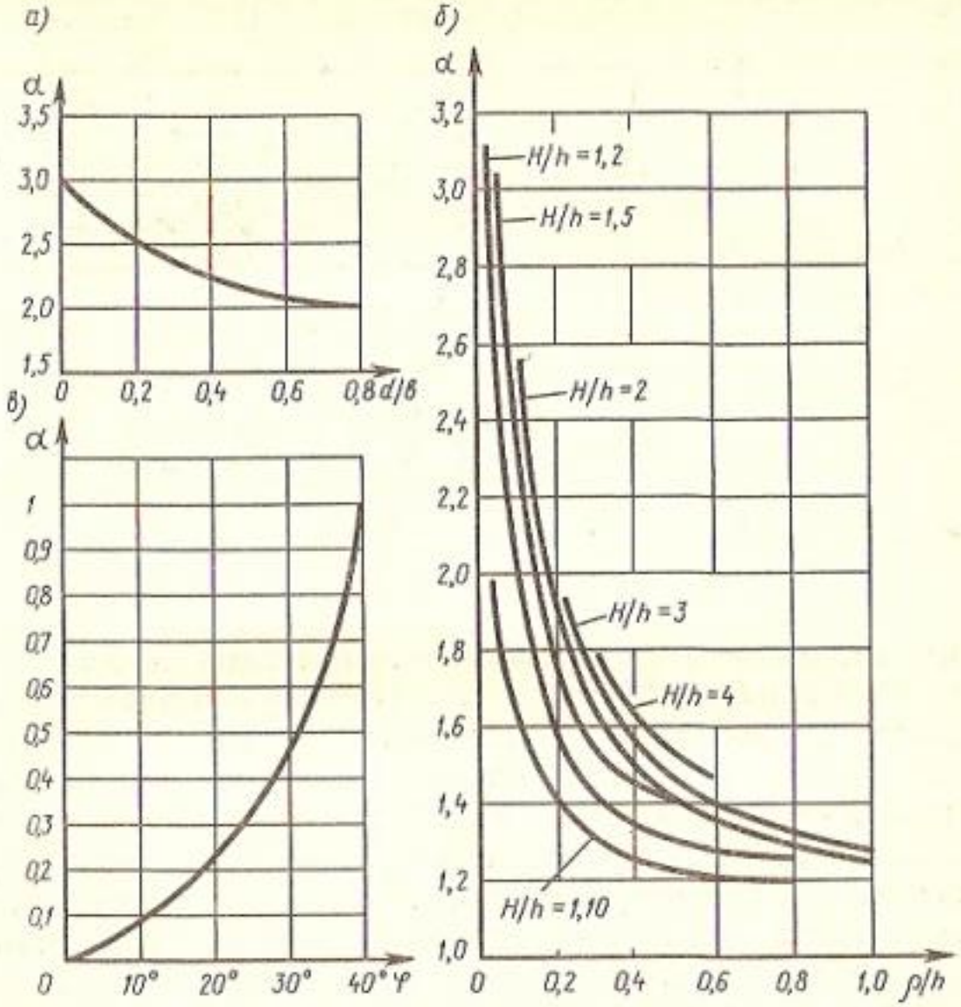


Рис. II.18

чески равномерным и в сечениях, для которых $l = 3d$, а в схеме *в* – при $b \geqslant h$. В схеме *в* при $\varphi \leqslant 30°$ напряжения по поперечным сечениям, как это видно из графика зависимости $\alpha = \alpha(\varphi)$, можно считать распределенными равномерно.

Из рассмотрения условий равновесия бесконечно малых заштрихованных элементов на рис. II.17 можно заключить, что в области источника концентрации напряженное состояние не только неоднородно, но и не одноосно. Действительно, если существует напряжение σ_x в грани элемента, совпадающей с поперечным сечением (рис. II.17, *а*), то должно (для его равновесия) существовать касательное напряжение τ_{yx} по грани, совпадающей с продольным сечением, так как поверхность *AB* свободная от сил. По свойству парности (I.6) существует напряжение τ_{xy}, что, в свою очередь, требует существования напряжения σ_y.

Расчет на прочность брусьев, материал которых пластичен, следует вести по номинальным напряжениям, не учитывая влияния на прочность концентрации напряжений. Для

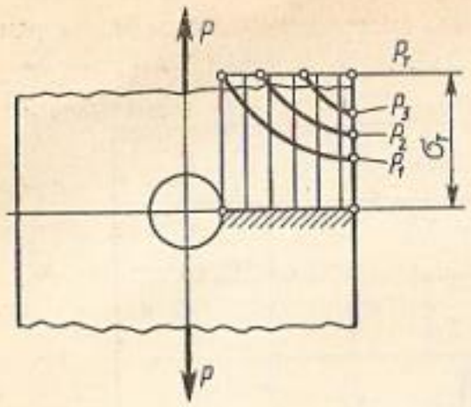


Рис. II.19

некоторого обоснования этого утверждения рассмотрим прочность растянутой полосы с отверстием, в которой $\sigma_{max} = \sigma_т$ при $P = P_1$, с точки зрения расчета по несущей способности. Если диаграмма напряжений материала полосы имеет площадку текучести, то при $P_3 > P_2 > P_1$ наибольшее напряжение по опасному сечению остается равным $\sigma_т$.

Распределение напряжений, соответствующее значениям этих сил, показано на рис. II.19. За счет местного характера концентрации напряжений, а следовательно, малой по сравнению с размерами полосы области пластической деформации в зоне отверстия и за счет того, что упругодеформированная часть стержня не позволит свободно развиваться пластической деформации в этой области, состояние стержня при $P_1 < P_2 < P_3 < P_т$ не опасно и его остаточная деформация после разгрузки будет меньше предельной. Опасное состояние наступит при $P = P_т$, т. е. при равенстве напряжений $\sigma_т$ во всех точках опасного сечения, так как будет устранено препятствие к свободному развитию пластической деформации в этом сечении и равновесие частей полосы при дальнейшем увеличении силы P становится невозможным. Составим условие прочности стержня, соответствующее этому состоянию:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leqslant \frac{P_т}{F[n]} = \frac{\sigma_т}{[n]} = [\sigma].$$

Видим, что оно не отличается от условия (II.21), полученного из расчета по номинальным напряжениям.

Не оказывая влияния на прочность всего стержня, концентрация напряжений за счет пластической деформации может вызывать искажение формы отверстия, которое для некоторых систем окажется недопустимым (герметичные заклепочные швы, заклепочные узлы). Для таких систем расчет стержней и листов на прочность по номинальным напряжениям следует дополнить расчетом на смятие заклепочного отверстия.

Для таких хрупких материалов, как чугун, концентрацию напряжений при расчете на прочность учитывать то же самое не нужно. Вследствие неоднородности этих материалов в них существуют внутренние источники концентрации в виде включений и трещин, так что наличие внешних источников концентрации не увеличит максимальных напряжений по опасным сечениям.

Расчет на прочность стержней из таких однородных хрупких материалов, как закаленная сталь, должен вестись с учетом концентрации напряжений. При проектировочном расчете допускаемые напряжения должны определяться по формулам

$$[\sigma]_р = \frac{\sigma_{в.р}}{\alpha[n]_в}, \quad [\sigma]_с = \frac{\sigma_{в.с}}{\alpha[n]_в}.$$

При проверочном расчете запасы прочности должны определяться по формулам

$$n_р = \frac{\sigma_{в.р}}{\alpha\sigma_{н.max}}; \quad n_с = \frac{\sigma_{в.с}}{\alpha|\sigma_{н.min}|}.$$

§ II.12. Расчеты плоских ферм и ферменных систем

Система – геометрически неизменяема, если взаимные перемещения ее точек могут происходить только за счет деформации.

Фермой называется геометрически неизменяемая система, состоящая из стержней с прямой осью, нагруженная в точках пересечения осей стержней (узлах) или вдоль осей стержней и сохраняющая геометрическую неизменяемость при замене жестких соединений стержней шарнирами (рис. II.20, *а, б*). Ферма, узлы которой являются шарнирами (рис. II.20, *б*), называется **шарнирной**. Если все стержни фермы и силы лежат в одной плоскости, то она называется

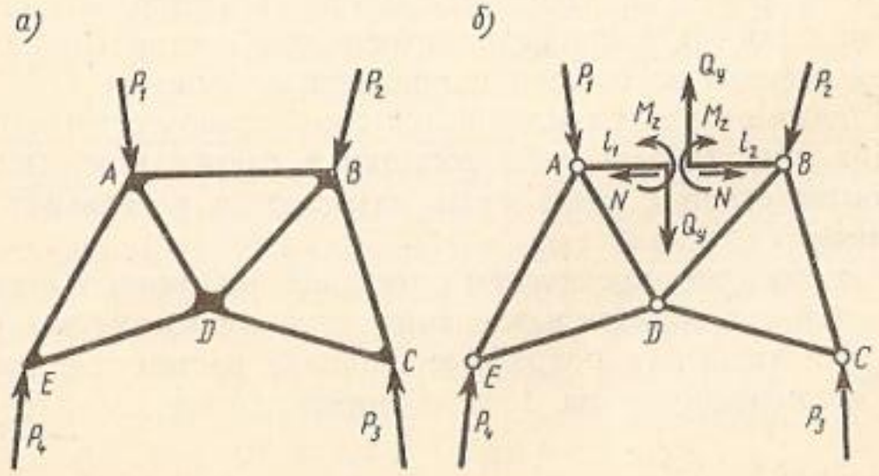


Рис. II.20

плоской. Узлы (шарниры) ферм будем обозначать буквами, а стержни – числами.

В поперечных сечениях стержней шарнирной фермы может существовать только один внутренний силовой фактор N – нормальное усилие, т. е. стержни фермы испытывают растяжение или сжатие. Действительно, разрежем стержень AB (рис. II.20, *б*) поперечным сечением на две части, заменив действие одной из них на другую внутренними силовыми факторами N, Q_y, M_z, которые по закону действия и противодействия будут направлены так, как это показано на рис. II.20, *б*. Левая и правая части разрезанного стержня не должны вращаться относительно шарниров A и B соответственно. Поэтому

$$\Sigma m_A = Q_y l_1 - M_z = 0 \ , \quad \Sigma m_B = Q_y l_2 + M_z = 0 \ .$$

Так как определитель этой системы однородных уравнений

$$\Delta = l_1 + l_2 \neq 0 ,$$

она может иметь для неизвестных только нулевые решения

$$Q_y = 0 \ , \quad M_z = 0 \ .$$

Любой элемент системы, имеющий прямую ось, ограниченный по концам шарнирами и не несущий поперечной нагрузки, испытывает или растяжение, или сжатие, и мы назовем его ферменным.

Ферменной назовем систему, в которой все считающиеся деформированными элементы являются ферменными.

В § VII.4 будет доказано, что в поперечных сечениях стержней фермы с жесткими узлами возникают только нормальные усилия, равные усилиям в соответствующих стержнях шарнирной фермы. Поэтому расчетные схемы ферм берутся шарнирными. Неизвестные усилия в стержнях всегда предполагаются растягивающими и при составлении уравнений статики их следует направлять от сечения.

Стержни в узлах соединяются с помощью косынки и заклепок (рис. II.21, *а*) либо косынки и сварки (рис. II.21, *б*). В соответствии с этим узлы называются **клепаными** или **сварными**.

Так как при определении площадей поперечных сечений стержней, сходящихся в клепаном узле, диаметры заклепок еще неизвестны, то потребные площади растянутых стержней увеличиваются на 15% и определяются по формуле

$$F \geqslant 1{,}15 \frac{N}{[\sigma]_p} . \qquad \text{(II.25)}$$

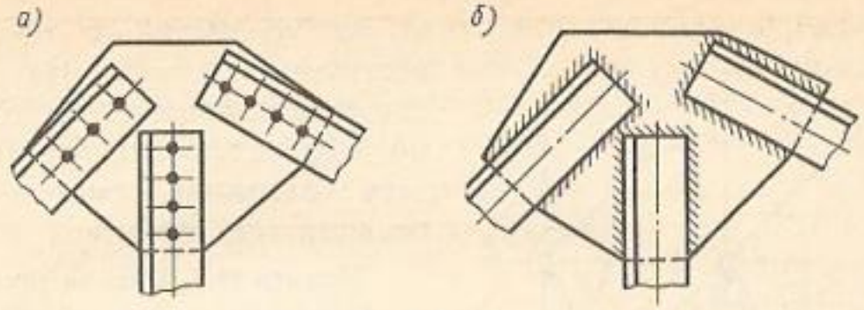


Рис. II.21

Тем самым на основании расчетной практики предполагается, что уменьшение площади поперечного сечения за счет сверления заклепочного отверстия не превысит 15%. Для сжатых стержней этого увеличения делать не надо, так как считается, что заклепка полностью передает часть усилия, приходящегося на поперечное сечение заклепочного отверстия.

Система называется **статически определимой**, если усилия во всех ее стержнях и реакции опор могут быть найдены из уравнений статики. В противном случае она называется статически неопределимой.

Степенью статической неопределимости ферменной системы называется разность между числом неизвестных усилий в ее стержнях и числом независимых уравнений статики, которое можно составить для их определения:

$$k = n - p , \qquad \text{(II.26)}$$

где k – степень статической неопределимости системы; n – число неизвестных сил; p – число независимых уравнений статики.

При расчете статически неопределимой системы на основании геометрического метода определения перемещений (см. § I.3) надо составить для нее p уравнений статики. Далее следует, рассмотрев совместную деформацию элементов системы (картину деформации или картину перемещений), составить зависимости между абсолютными удлинениями стержней, которые называются уравнениями совместности перемещений (уравнениями совместности или уравнениями перемещений) в геометрической форме. Число уравнений совместности должно равняться k системы. Затем надо выразить входящие в эти уравнения Δl_i, пользуясь (II.10) или (II.19), через N_i и ΔT_i, где i – номер стержня или участка, в результате чего получим k уравнений совместности в физической форме. Уравнения статики в совокупности с уравнениями совместности в физической форме образуют систе-

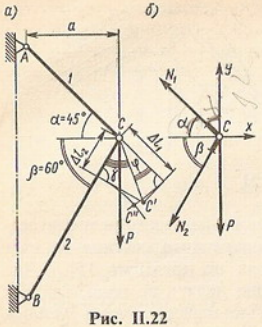


Рис. II.22

му n уравнений с n неизвестными силами. Из этой системы уравнений однозначно определяются усилия во всех стержнях системы и реакции всех ее опор.

Пример II.1. Считая поперечные сечения стержней фермы (рис. II.22, *а*) состоящими из двух равнобоких уголков, подобрать их номера по сортаменту и определить перемещение узла C. Исходные данные: $P = 10^2$ кН; $a = 1$ м; $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; материал Ст3, $\sigma_т = 240$ МПа; $[n]_т = 2$; узел C клепаный.

1. Для определения усилий в стержнях пользуемся методом вырезания узлов. Вырезаем узел C (рис. II.22, *б*) и рассматриваем его равновесие. Действующие на узел C силы представляют плоскую, сходящуюся систему, для которой можно составить два независимых уравнения статики. Составив их, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_2:

$$\Sigma X = -N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\beta = 0,$$

$$\Sigma Y = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta - P = 0$$

и, следовательно, ферма статически определима.

Перепишем систему в нормальном виде:

$$\begin{cases} \cos\alpha N_1 + \cos\beta N_2 = 0, \\ \sin\alpha N_1 - \sin\beta N_2 = P. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$N_1 = \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{10^2 \cdot 0{,}5}{0{,}965} = 51{,}8 \text{ кН},$$

$$N_2 = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = -\frac{10^2 \cdot 0{,}71}{0{,}965} = -73{,}6 \text{ кН}.$$

Знак минус в выражении N_2 означает, что стержень *2* испытывает сжатие.

2. Подбираем номера уголков сечений стержней.

Так как расчет проектировочный, определяем значение допускаемого напряжения $[\sigma] = \dfrac{\sigma_т}{[n]_т} = 240/2 = 120$ МПа.

Стержень *1* растянут. По (II.25)

$$F^{L}_{потр} \geqslant \frac{5{,}18 \cdot 1{,}15 \cdot 10^4}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^8} = 2{,}48 \text{ см}^2 - \text{потребная площадь одного уголка.}$$

По ГОСТ 8509 – 72 подбираем номер уголка, сравнивая площадь F^{L}, соответствующую этому номеру, с $F^{L}_{потр}$. В качестве рабочей (безопасной) выбирается наименее отличающаяся от $F^{L}_{потр}$ бо́льшая площадь или меньшая при условии, что относительное отклонение

$$\Delta = \frac{F^{L}_{потр} - F^{L}}{F^{L}} 100\,\% < 5\,\%.$$

Для стержня *1* выбираем уголок № 3 ($32 \times 32 \times 4$) с $F^{L} = 2{,}43$ см^2, так как $\Delta = 2{,}47\,\%$. Следовательно, $F_1 = 4{,}86$ см^2, для стержня *2*

$$F^{L}_{потр} = \frac{7{,}36 \cdot 10^4}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^8} = 3{,}07 \text{ см}^2.$$

Выбираем для него уголок № 5 ($50 \times 50 \times 3$) с $F^{L} = 2{,}96$ см^2, так как $\Delta = 3{,}72\,\%$. Следовательно, $F_2 = 5{,}92$ см^2.

3. При определении перемещений узлов ферм и зависимостей между абсолютными удлинениями стержней во всех задачах этой главы будем пользоваться геометрическим методом. Этот метод не обладает универсальностью и им удобно пользоваться только в тех системах, в которых количество стержней невелико, и особенно удобно, если система симметрична. Однако он хорош тем, что дает наглядное представление о картине деформации системы и поэтому всегда используется в начальной стадии обучения. Напомним, что основным положением этого метода при определении положений узлов фермы после деформации является замена дуг на фермах большой жесткости перпендикулярами к первоначальным положениям стержней, считая, что точки C' и C'' на рис. II.22, *а* совпадают. На данном рис. это не очевидно, так как абсолютные удлинения стержней *1* и *2* изображены для возможности геометрического построения в сильно увеличенном масштабе по сравнению с масштабом системы. Если бы масштабы абсолютных удлинений были одинаковы с масштабом системы, то эти точки практически совпадали бы.

Из рис. II.22, *а* получим систему трех уравнений с тремя неизвестными δ_C, γ и φ ($\delta_C = CC'$):

$$\begin{cases} \delta_C = \Delta l_1 / \cos\varphi, \\ \delta_C = |\Delta l_2| \cos\gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma + \varphi = \pi. \end{cases}$$

Решаем ее, исключая φ и δ_C

$$-\frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{|\Delta l_2|}{\cos\gamma},$$

откуда

$$\Delta l_1 \cos\gamma = |\Delta l_2| [\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma];$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta l_1 + |\Delta l_2| \cos(\alpha+\beta)}{|\Delta l_2| \sin(\alpha+\beta)} = \frac{\psi + \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ где } \psi = \frac{\Delta l_1}{|\Delta l_2|}.$$

По (II.10)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{\cos\alpha E F_1} = \frac{5{,}18\cdot 10^4\cdot 10^4}{0{,}71\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 4{,}86} = 0{,}0751 \text{ см};$$

$$|\Delta l_2| = \frac{|N_2| a}{\cos\beta E F_2} = \frac{7{,}36\cdot 10^4\cdot 10^4}{0{,}5\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 5{,}92} = 0{,}124 \text{ см}.$$

Вычисляем:

$$\psi = \frac{0{,}075}{0{,}124} = 0{,}605,\ \sin(\alpha+\beta) = 0{,}965,\ \cos(\alpha+\beta) = -0{,}256;$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{0{,}605 - 0{,}256}{0{,}965} = 0{,}362,\ \cos\gamma = 0{,}943;$$

$$\delta_C = \frac{|\Delta l_2|}{\cos\gamma} = \frac{0{,}124}{0{,}943} = 0{,}132 \text{ см},\ \gamma = 20^\circ.$$

Перемещение узла C определено полностью, так как найдены его величина и направление. Отношение δ_C к наименьшему габаритному размеру системы составляет $\frac{0{,}132}{100}100\% = 0{,}132\%$, что является подтверждением ее большой жесткости и правильности примененного метода расчета.

Пример II.2. Для системы (рис. II.23, *а*) определить допускаемое значение равнодействующей распределенной нагрузки $[P]$ и перемещение узла C при этом значении силы, считая брус AC абсолютно твердым (жестким). Площадь поперечного сечения стержня $F = 5$ см^2; $\varphi = 45^\circ$; остальные данные взять из примера II.1.

1. Отбрасываем связи и заменяем их действие на брус AC силами (рис. II.23, *б*). Для определения трех неизвестных сил A_x, A_y и N можно составить три независимых уравнения статики (общий случай плоской системы сил)

$$\Sigma m_A = 0,\quad \Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0.$$

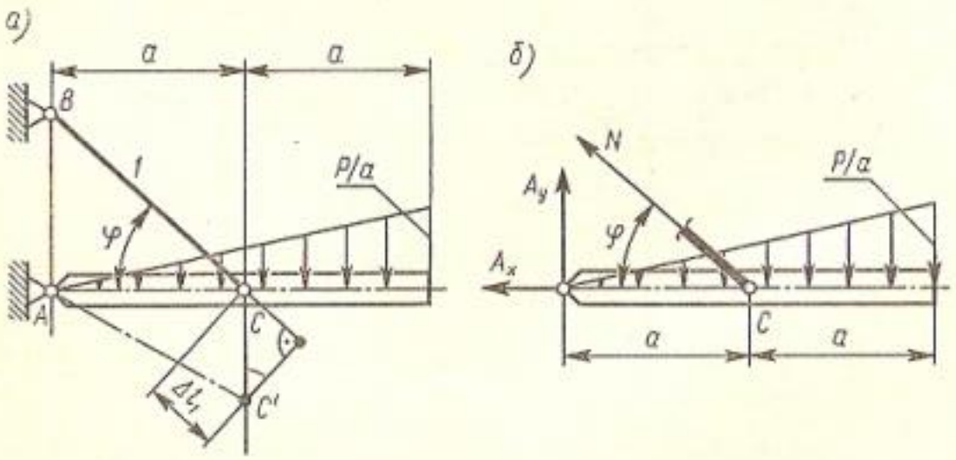


Рис. II.23

Число уравнений статики равно числу неизвестных сил, поэтому система статически определима. Нормальное усилие в стержне можно найти, рассмотрев только первое из этих уравнений. Заменив распределенную нагрузку ее равнодействующей P, равной грузовой площади и проходящей через центр тяжести этой площади, получим

$$\Sigma m_A = \frac{P}{a}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{4a}{3} - Na\sin\varphi = 0,\quad N = \frac{4P}{3\sin\varphi} = \frac{4P}{3\cdot 0{,}71} =$$

$$= 1{,}89P.$$

2. Допускаемым называют значение силы P, при котором расчетное напряжение в системе равняется допускаемому, обозначая его $[P]$.

Условие для определения $[P]$ запишется так: $\sigma_{max} = [\sigma]$, или

$$\frac{1{,}89[P]}{1{,}15F} = [\sigma],$$

откуда

$$[P] = \frac{1{,}15[\sigma]F}{1{,}89} = \frac{1{,}15\cdot 1{,}2\cdot 10^8\cdot 5\cdot 10^{-4}}{1{,}89} = 3{,}65\cdot 10^4 \text{ Н}.$$

3. Абсолютно твердых тел не существует. Выражение «...считая брус AC абсолютно твердым» означает, что деформация бруса мала по сравнению с деформациями стержней и ею можно пренебречь. При этом ось бруса после деформации принимается прямой линией (рис. II.23, *а*). Из этого рисунка

$$\delta_C = \frac{\Delta l_1}{\sin\varphi} = \frac{Na}{\sin\varphi\cos\varphi EF} = \frac{1{,}89\cdot 3{,}65\cdot 10^4\cdot 1}{0{,}5\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 5\cdot 10^{-4}} =$$

$$= 1{,}38\cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Пример II.3. Для фермы (рис. II.24, *а*) требуется: определить значение F при действии на нее силы P; определить усилия в стержнях, если сила P снята, а стержни *1* нагреваются на ΔT; определить за-

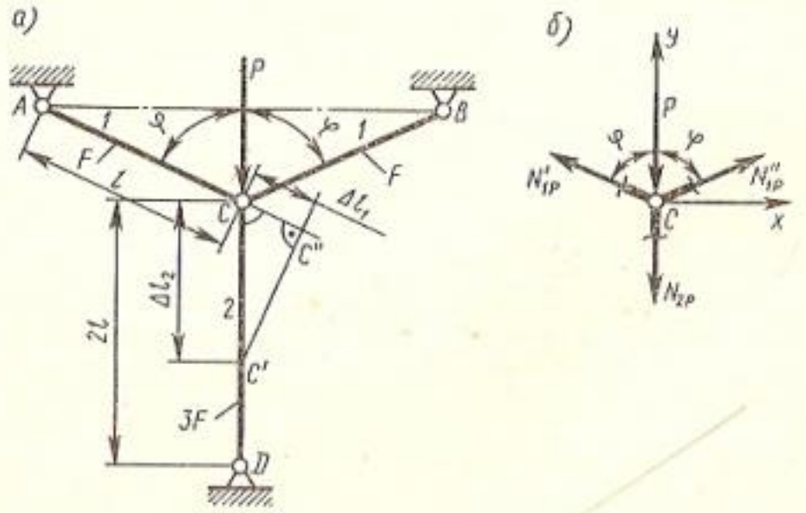


Рис. II.24

пас прочности при совместном действии на ферму силы P и нагрева стержней *1* на ΔT, считая значение F равным определенному при действии на ферму силы P. Исходные данные: $P = 4 \cdot 10^4$ Н; $\varphi = 60°$; материал стержней *1* сталь 45, имеющая $\sigma_т = 370$ МПа; $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа; материал стержня *2* дюраль Д16, имеющий $\sigma_{0,2} = 220$ МПа; $E_д = 7{,}5 \cdot 10^4$ МПа; $\Delta T = 100$ *K*; коэффициент линейного расширения стали $\alpha_{ст} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ $1/K$; $[n]_т = 1{,}5$.

1. Определяем значение F при действии на ферму силы P.

Находим усилия в стержнях при действии на ферму силы P. Для этого, вырезав узел C (рис. II.24, *б*), составляем уравнения статики – **картину усилий**. Индекс P в обозначениях усилий говорит о том, что они определяются при действии на систему только силы.

Проектируя действующие на узел C силы на ось x, получим

$$\Sigma X = N''_{1P} \sin\varphi - N'_{1P} \sin\varphi = 0, \qquad \text{(II.27)}$$

откуда

$$N''_{1P} = N'_{1P} = N_{1P}. \qquad \text{(II.28)}$$

Равенство (II.28) является следствием симметрии фермы: **в симметричных стержнях симметричных ферм усилия равны**. Поэтому с самого начала расчета следует считать усилия в таких стержнях равными. Для каждого узла это равносительно использованию одного уравнения статики.

Проектируя действующие на узел C силы на ось y и учитывая равенство (II.28), получим

$$\Sigma Y = 2N_{1P}\cos\varphi - N_{2P} - P = 0. \qquad \text{(II.29)}$$

Так как уравнение статики одно $p = 1$, а неизвестных два $n = 2$, по (II.26)

$$k = 2 - 1 = 1,$$

или ферма (рис. II.24, *а*) один раз статически неопределима.

Составляем уравнение совместности перемещений в геометрической форме. Из картины перемещений (рис. II.24, *а*)

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\varphi. \qquad \text{(II.30)}$$

Чтобы получить уравнение совместности в физической форме, выражаем Δl_i через N_i, сопоставляя для каждого стержня картины усилий и перемещений. Для стержней, у которых эти картины не совпадают (например, для стержня *2* – на картине усилий – растяжение, а на картине перемещений – сжатие), абсолютные удлинения, выраженные через усилия, будут отрицательны. Это означает, что для того, чтобы совместная деформация стержней фермы была возможна, либо усилие, либо удлинение должно переменить знак. Подчеркиваем, что пренебрежение этим правилом приведет к совершенно неверному решению задачи. По (II.10)

$$\Delta l_1 = \frac{N_{1P} l}{E_{ст} F}, \quad \Delta l_2 = -\frac{N_{2P} 2l}{3E_д F}.$$

Из исходных данных $\psi = \dfrac{E_{ст}}{E_д} = 2{,}67$.

Подставив Δl_1 и Δl_2, выраженные через N_{1P} и N_{2P}, в (II.30), получим уравнение совместности перемещений в физической форме

$$3N_{1P} + 2\psi\cos\varphi N_{2P} = 0. \qquad \text{(II.31)}$$

Уравнения (II.29) и (II.31) составят систему

$$\begin{cases} 2\cos\varphi\, N_{1P} - N_{2P} = P, \\ 3N_{1P} + 2\psi\cos\varphi N_{2P} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем усилия в стержнях:

$$N_{1P} = \frac{2P\cos\varphi}{3 + 4\psi\cos^2\varphi} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5}{3 + 4 \cdot 2{,}67 \cdot 0{,}25} = 1{,}88 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

$$N_{2P} = -\frac{3P}{3 + 4\psi\cos^2\varphi} = -\frac{3 \cdot 4 \cdot 10^4}{5{,}72} = -2{,}12 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Рассчитываем допускаемые напряжения:

$$[\sigma_1] = \frac{\sigma_т}{[n]_т} = \frac{370}{1{,}5} = 247 \text{ МПа},$$

$$[\sigma_2] = \frac{\sigma_{0,2}}{[n]_т} = \frac{220}{1{,}5} = 147 \text{ МПа},$$

где $[\sigma]_1$ и $[\sigma]_2$ – допускаемые напряжения для материалов *1* и *2* стержней соответственно.

Определяем F из условия прочности растянутых стержней:

$$F \geqslant \frac{N_{1P}}{[\sigma]_1} = \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{247 \cdot 10^6} = 7{,}61 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0{,}761 \text{ см}^2.$$

Определяем F из условия прочности сжатого стержня:

$$F = \frac{|N_{2P}|}{3[\sigma]_2} = \frac{2{,}12 \cdot 10^4}{3 \cdot 147 \cdot 10^6} = 4{,}81 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0{,}481 \text{ см}^2.$$

Принимаем для F большее из полученных значений. Следовательно,

$$F_1 = F = 0{,}761 \text{ см}^2, \quad F_2 = 3F = 3 \cdot 0{,}761 = 2{,}28 \text{ см}^2,$$

где F_1 – площадь стержня *1*, а F_2 – площадь стержня *2*.

При этих значениях площадей напряжения в стержнях *1* равны допускаемым, а стержень *2* недогружен ($\sigma_2 < [\sigma]_2$).

Нельзя принять $F_1 = 0{,}761$ см^2, а $F_2 = 3 \cdot 0{,}481 = 1{,}44$ см^2, и тем как бы добиться равенства существующих напряжений, допускаемым во всех стержнях, так как в уравнение совместности вошло отношение $F_2/F_1 = 3$.

2. Определяем усилия в стержнях фермы, если сила P снята, а стержни *1* нагреваются на $\Delta T = 100$ К.

Покажем, что при нагревании статически определимой фермы усилия в ее стержнях не возникают, а в статически неопредели-

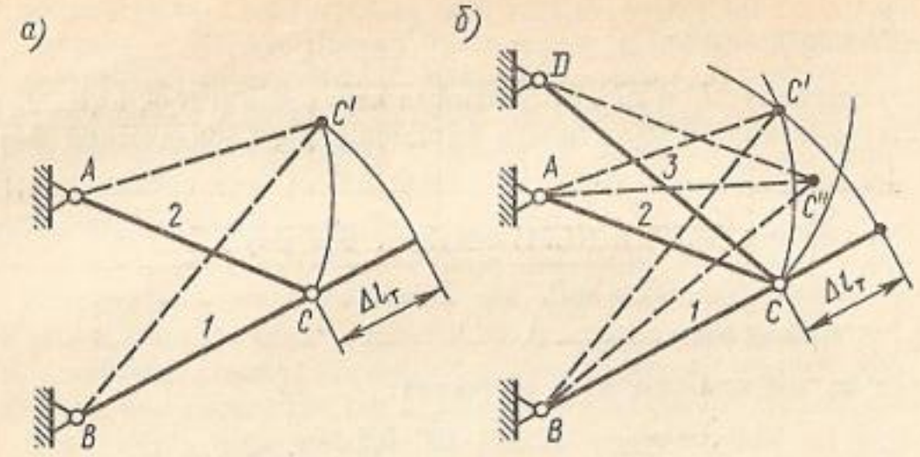


Рис. II.25

мой – возникают. Система (рис. II.25, *а*) статически определима. Представим, что стержень *1* этой системы не соединен со стержнем *2* и нагрет на ΔT. В результате нагрева он получит абсолютное температурное удлинение $\Delta l_T = \alpha \Delta T l_1$. На рис. II.25, *а* дано геометрическое построение, показывающее, что стержни *1* и *2* можно соединить без силовой деформации и узел *C*, переместившись, займет положение *C'*. Повторяя аналогичное рассуждение для статически неопределимой системы (рис. II.25, *б*), видим, что для соединения узла *C'* со стержнем *3* все стержни системы должны испытать помимо температурной и силовую деформацию, в результате которой в них возникнут усилия, называемые температурными, и узел *C* займет окончательное положение *C''*.

Для определения температурных усилий в стержнях системы (рис. II.26, *а*), вырезав узел *C* и используя симметрию системы, изображаем картину усилий (рис. II.26, *б*). Для вырезанного узла можно составить единственное независимое уравнение статики

$$\Sigma Y = 2N_{1T}\cos\varphi - N_{2T} = 0. \qquad \text{(II.32)}$$

Индекс т в обозначениях усилий говорит о том, что они определяются при действии на систему только температуры.

Заметим, что уравнение статики температурной задачи (II.32) может быть получено из уравнения статики силовой задачи (II.29), если положить силу *P* равной нулю. Поэтому при расчетах систем, испытывающих смешанную деформацию и при раздельном определении усилий от сил и температуры, картина температурных усилий не нужна.

В уравнение (II.32) входят два неизвестных усилия, следовательно, система (рис. II.26, *а*) один раз статически неопределима. Из картины перемещений (рис. II.26, *а*) получим уравнение совместности перемещений в геометрической форме

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\varphi. \qquad \text{(II.33)}$$

Видим, что уравнения (II.30) и (II.33) совпадают.

Уравнения совместности перемещений в геометрической форме силовой и температурной задач в данной системе будут всегда

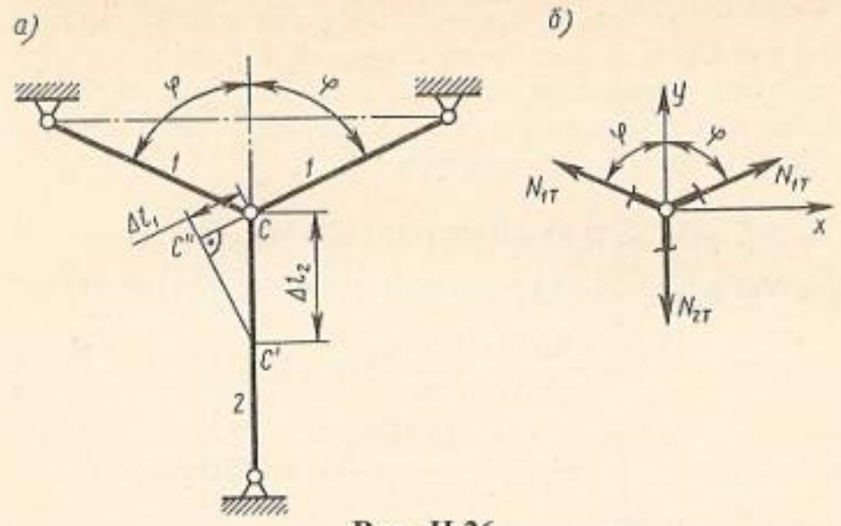


Рис. II.26

одинаковы и поэтому картина перемещений (рис. II.26, *а*) не нужна. Для стержня *1*, испытывающего силовую и температурную деформации, картины усилий и перемещений совпадают, поэтому

$$\Delta l_1 = \Delta l_T + \Delta l_N = \alpha_{CT}\Delta T l + \frac{N_{1T} l}{E_{CT} F}. \qquad \text{(II.34)}$$

Для стержня *2*, испытывающего только силовую деформацию, картины усилий и перемещений не совпадают, поэтому

$$\Delta l_2 = -\frac{N_{2T} 2l}{3E_A F}. \qquad \text{(II.35)}$$

Подставив (II.34) и (II.35) в (II.33), получим уравнение совместности в физической форме

$$3N_{1T} + 2\psi\cos N_{2T} + 3\alpha_{CT}\Delta T E_{CT} F = 0. \qquad \text{(II.36)}$$

Уравнения (II.32) и (II.36) составляют систему

$$\begin{cases} 2\cos\varphi N_{1T} - N_{2T} = 0; \\ 3N_{1T} + 2\psi\cos\varphi N_{2T} = -3\alpha_{CT}\Delta T E_{CT} F. \end{cases}$$

Решая ее и принимая $F = 0{,}761$ см^2, найдем

$$N_{1T} = -\frac{3\alpha_{CT}\Delta T E_{CT} F}{3 + 4\psi\cos^2\varphi} = -\frac{3 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7{,}61 \cdot 10^{-5}}{5{,}72} = -9{,}98 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

$$N_{2T} = -\frac{6\alpha_{CT}\Delta T E_{CT} F\cos\varphi}{3 + 4\psi\cos^2\varphi} = -9{,}98 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

У начинающего изучать курс часто возникает вопрос: «Почему длина стержня *1* увеличилась, а усилие в нем сжимающее?» Все дело в том, что стержень *1* испытывает смешанную деформацию и температурная деформация растяжения больше абсолютной величины силовой деформации сжатия.

3. Определяем запас прочности фермы при совместном действии на нее силы P и нагрева стержней 1 на ΔT.

Пользуясь принципом независимости действия внешних факторов, находим усилия и напряжения в стержнях фермы при совместном действии силы и температуры:

$$N_1 = N_{1p} + N_{1T} = (1{,}88 - 0{,}998)\cdot 10^4 = 0{,}882\cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$N_2 = N_{2p} + N_{2T} = -(2{,}12 + 0{,}998)\cdot 10^4 = -3{,}12\cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0{,}882\cdot 10^4}{0{,}761\cdot 10^{-4}} = 116 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{3{,}16\cdot 10^4}{2{,}28\cdot 10^{-4}} = -136 \text{ МПа}.$$

Пользуясь (II.23), определяем

$$n_p = \frac{370}{116} = 3{,}19, \quad n_c = \frac{220}{136} = 1{,}62.$$

Принимаем в качестве запаса прочности фермы меньшее из полученных значений

$$n = 1{,}62.$$

Пример II.4. Для фермы (рис. II.27, *а*) требуется: определить усилия в стержнях при действии на нее только сил; определить усилия в стержнях при нагревании стержней *1* на ΔT, а стержня *3–4* – на $2\Delta T$; определить усилия в стержнях при совместном действии сил и температуры. Площади стержней указаны на рисунке, а материал их одинаков. Коэффициент линейного расширения материала – α.

1. Составляем уравнения статики.

Из условия равновесия узла A (рис. II.27, *б*)

$$\Sigma Y = -2N_{1p}\cos\beta - N_{3p} - 2P = 0.$$

Из условия равновесия узла B (рис. II.27, *в*)

$$\Sigma Y = -2N_{2p}\cos\varphi - N_{4p} = 0.$$

Из условия равновесия вырезанной части стержня *3–4* (рис. II.27, *г*)

$$\Sigma X = N_{3p} + P - N_{4p} = 0.$$

Так как неизвестных усилий четыре, а уравнений статики для их определения только три, система один раз статически неопределима.

При изображении деформированного состояния системы узлам можно давать любые возможные перемещения, ибо во многих случаях установить их действительные направления без предварительного решения задачи невозможно, и размышление над этим будет бесполезной тратой времени. Думать следует над тем, чтобы уравнение совместности перемещений составлялось проще, т. е. чтобы все перемещения и абсолютные удлинения входили в его геометрическую форму со знаком плюс, а картины усилий и перемещений, если это возможно, совпадали, как, например, это сделано на рис. II.27, *а*.

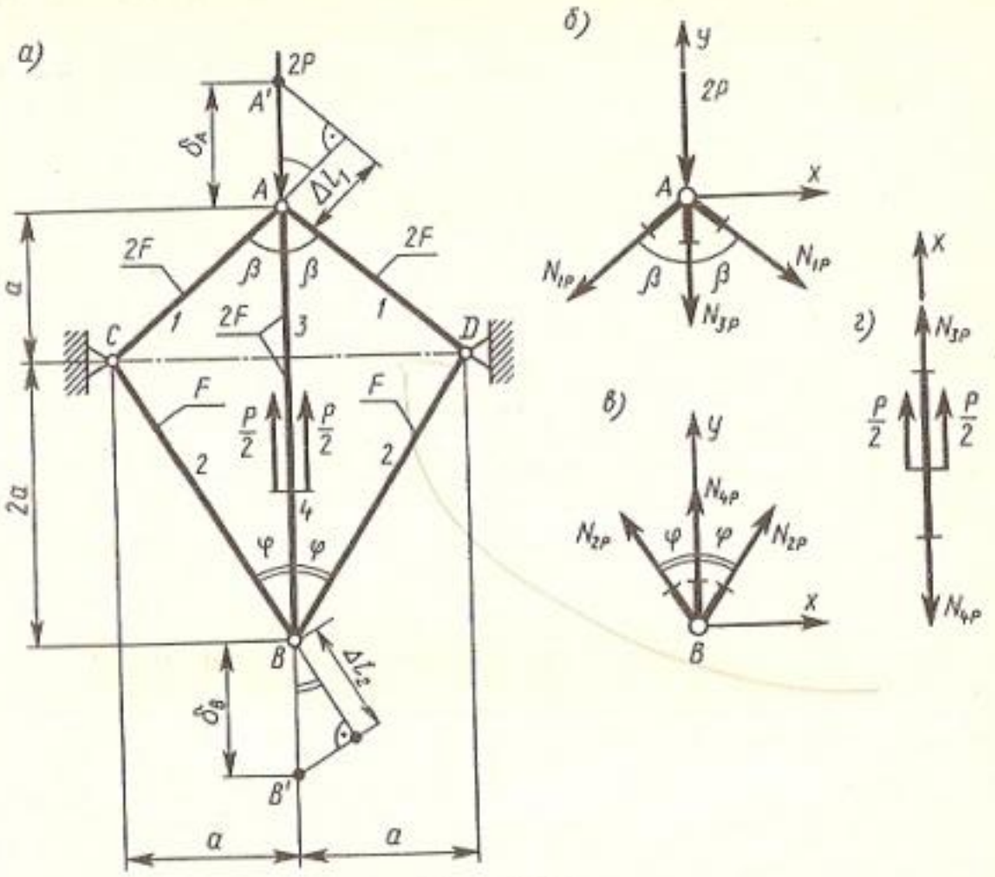


Рис. II.27

Составляем уравнения совместности перемещений в геометрической форме. Из рис. II.27, *а*

$$\delta_A + \delta_B = \Delta l_3 + \Delta l_4, \text{ или } \frac{\Delta l_1}{\cos\beta} + \frac{\Delta l_2}{\cos\varphi} = \Delta l_3 + \Delta l_4.$$

Находим: $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $l_1 = \sqrt{2}\,a$, $l_2 = \sqrt{5}\,a$.

Составляем уравнение совместности в физической форме:

$$\frac{N_{1p}a}{EF} + \frac{5N_{2p}a}{2EF} = \frac{N_{3p}a}{EF} + \frac{N_{4p}a}{2EF}.$$

После подстановки в уравнения статики значений $\cos\beta$ и $\cos\varphi$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,N_{1p} + N_{3p} = -2P; \\ N_{2p} = -\frac{\sqrt{5}}{4}N_{4p}; \\ N_{3p} = N_{4p} - P; \\ 2N_{1p} + 5N_{2p} - 2N_{3p} - N_{4p} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$N_{1p} = -0{,}768P;\ N_{2p} = -0{,}046P;\ N_{3p} = -0{,}918P;\ N_{4p} = 0{,}082P.$

2. Уравнения статики температурной задачи получаем из уравнений статики силовой задачи, полагая в них $P = 0$ и учитывая, что $N_{3т} = N_{4т}$:

$$\begin{cases} -2N_{1т}\cos\beta - N_{3т} = 0; \\ 2N_{2т}\cos\varphi + N_{3т} = 0\ . \end{cases}$$

Уравнение совместности перемещений в геометрической форме будет таким же, как в силовой задаче: $\dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta} + \dfrac{\Delta l_2}{\sin\beta} = \Delta l_{3-4}$.

В этом уравнении

$$\Delta l_1 = \alpha\Delta T\sqrt{2}\,a + \frac{N_{1т}\sqrt{2}\,a}{2EF},\quad \Delta l_2 = \frac{N_{2т}\sqrt{5}\,a}{EF},$$

$$\Delta l_{3-4} = 6\alpha\Delta T a + \frac{3N_{3т}a}{2EF}$$

и уравнение совместности в физической форме запишется в виде

$$\frac{N_{1т}a}{EF} + \frac{5N_{2т}a}{2EF} - \frac{3N_{3т}a}{2EF} = 4\alpha\Delta T a.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} N_{1т} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}N_{3т}; \\ N_{2т} = -\dfrac{\sqrt{5}}{4}N_{3т}; \\ 2N_{1т} + 5N_{2т} - 3N_{3т} = 8\alpha\Delta TEF. \end{cases}$$

Решая ее и обозначая $\alpha\Delta TEF = t$, найдем

$N_{1т} = 0{,}788t,\ N_{2т} = 0{,}621t,\ N_{(3-4)т} = -1{,}11t.$

3. По принципу независимости действия внешних факторов

$N_1 = -0{,}768P + 0{,}788t;$

$N_2 = -0{,}046P + 0{,}621t;$

$N_3 = -0{,}918P - 1{,}11t;$

$N_4 = 0{,}082P - 1{,}11t.$

Пример II.5. Провести проверочный расчет фермы примера II.4 при $P = 10^2$ кН, $F = 5\cdot10^{-4}$ м^2, $\Delta T = 30$ К, материал – сталь 15.

1. Определим напряжения во всех стержнях и участках фермы:

$$\frac{t}{F} = \alpha\Delta TE = 75\cdot10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2F} = -0{,}768\cdot\frac{10^5}{10^{-3}} + 0{,}788\frac{75\cdot10^6}{2} = -47{,}3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -0{,}046\cdot\frac{10^5}{5\cdot10^{-4}} + 0{,}621\cdot75\cdot10^6 = 37{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2F} = -0{,}918\cdot\frac{10^5}{10^{-3}} - 1{,}11\frac{75\cdot10^6}{2} = -133 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{2F} = 0{,}082\cdot\frac{10^5}{10^{-3}} - 1{,}11\frac{75\cdot10^6}{2} = -33{,}4 \text{ МПа};$$

$\sigma_{max} = 37{,}4$ МПа, $\sigma_{min} = -133$ МПа;

$|\sigma|_{max} = 133$ МПа.

2. Определяем запас прочности системы по (II.24)

$$n = \frac{210}{133} = 1{,}58.$$

Пример II.6. В системе (рис. II.28, *а*) определить допускаемое значение зазора $[\Delta]$ при соединении точек C и C_1, считая допускаемое напряжение $[\sigma]$ и площадь F заданными, а брус AC абсолютно жестким.

1. Определяем монтажные усилия в стержнях.

При изготовлении элементов системы невозможно обеспечить их расчетные размеры, указанные на чертежах. Между действительными и номинальными размерами стержня всегда существует разность, которая должна для каждой конкретной детали не превышать определенной величины. В машиностроительных системах эта величина, как правило, чрезвычайно мала по сравнению с размерами детали. Например, для стержня она не превышает его максимального упругого удлинения. Соединение элементов статически определимой системы возможно без их предварительной деформации и, следовательно, возникновением напряжений в элементах системы не сопровождается. Монтаж статически неопределимой системы возможен только при деформации ее элементов, приво-

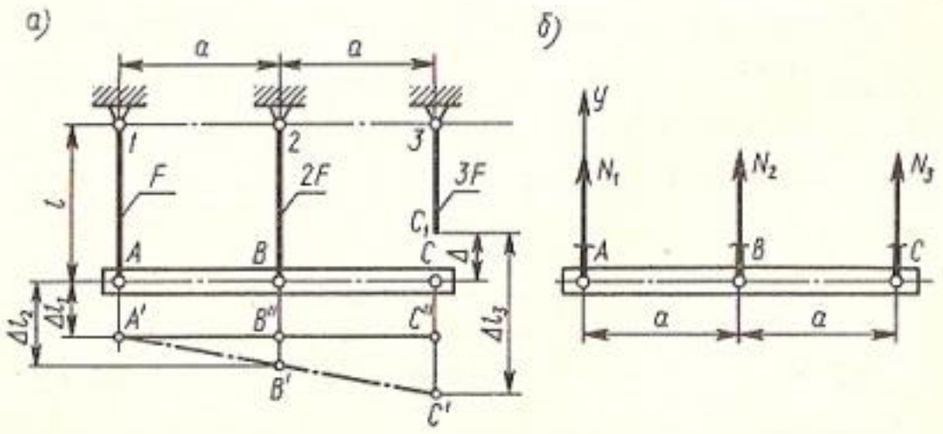


Рис. II.28

дящей к возникновению в них напряжений, которые называются монтажными. Объяснение этому для ферм можно получить из рис. II.25, если заменить Δl_T на Δ.

В результате соединения точек C и C_1 (рис. II.28, *а*), хотя бы путем нагрева стержня *3* и его последующего охлаждения до начальной температуры, в стержнях системы возникнут усилия, называемые монтажными. Заменим действие стержней на брус AC этими усилиями (рис. II.28, *б*), представляющими плоскую параллельную систему сил, для которой можно составить два независимых уравнения статики в двух вариантах:

$$\text{I}\begin{cases}\Sigma m_A = N_3 \cdot 2a + N_2 a = 0;\\ \Sigma Y = N_1 + N_2 + N_3 = 0;\end{cases}\qquad \text{II}\begin{cases}\Sigma m_A = N_3 2a + N_2 a = 0;\\ \Sigma m_B = N_3 a - N_1 a = 0.\end{cases}$$

Второй вариант предпочтительнее, так как в его второе уравнение входят два неизвестных усилия, а во второе уравнение первого варианта – три.

Система (рис. II.28, *а*) один раз статически неопределима. Дадим брусу AC возможное перемещение $A'C'$, самое удобное для составления уравнения совместности. Проведя $A'C''$ параллельно AC, из подобия треугольников $A'B'B''$ и $A'C'C'''$ получим

$$C'C'' = 2B'B'', \text{ но } B'B'' = \Delta l_2 - \Delta l_1, \text{ а } C'C''' = \Delta l_3 - \Delta l_1 - \Delta,$$

откуда

$\Delta l_3 - 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta$ – уравнение совместности в геометрической форме, в котором

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{3EF},\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{2EF},\ \Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}.$$

В выражение Δl_3 подставляем $l_3 = l$, а не $l_3 = l - \Delta$, так как зазор Δ чрезвычайно мал по сравнению с l.

Получаем $\dfrac{N_3 l}{3EF} - 2\dfrac{N_2 l}{2EF} + \dfrac{N_1 l}{EF} = \Delta$ – уравнение совместности в физической форме.

Имеем систему:

$$\begin{cases} N_2 = -2N_3;\\ N_1 = N_3;\\ 3N_1 - 3N_2 + N_3 = \dfrac{3\Delta EF}{l},\end{cases}$$

из которой

$$N_1 = N_3 = \frac{3\Delta EF}{10l},\quad N_2 = -\frac{3\Delta EF}{5l}.$$

2. **Допускаемым** называется такое значение зазора $[\Delta]$, при котором расчетное напряжение в системе после монтажа будет равно допускаемому. Так как

$$\sigma_1 = \frac{3\Delta E}{10l};\quad \sigma_2 = -\frac{3\Delta E}{10l};\quad \sigma_3 = \frac{\Delta E}{10l},$$

то

$$\sigma_{max} = \frac{3[\Delta]E}{10l} = [\sigma],$$

откуда

$$[\Delta] = \frac{10[\sigma]l}{3E}.$$

Пример II.7. Определить усилия в стержнях системы (рис. II.29, *а*) при действии силы P и нагревании стержней на ΔT. Материалы стержней различны $E_1/E_2 = \psi_1$, отношение коэффициентов линейного расширения $\alpha_1/\alpha_2 = \psi_2$, площади поперечных сечений стержней равны F.

1. Для общего случая плоской системы сил (рис. II.29, *б*) можно составить три независимых уравнения статики:

$$\Sigma m_C = 0;\quad \Sigma X = 0;\quad \Sigma Y = 0,$$

следовательно, система один раз статически неопределима, так как неизвестных сил четыре (N_1, N_2, C_x и C_y). Для определения усилий в стержнях следует использовать только первое уравнение статики (компоненты реакции в шарнире C нас не интересуют):

$$\Sigma m_C = N_1 a \sin\beta - 2N_2 a \sin\varphi - P \cdot 2a = 0.$$

2. В результате деформации абсолютно жесткой брус AB повернется вокруг шарнира C и займет положение $A'B'$. Из рис. II.29, *а* видно, что $BB' = 2AA'$, или

$2\dfrac{\Delta l_1}{\sin\beta} = \dfrac{\Delta l_2}{\sin\varphi}$ – уравнение совместности в геометрической форме.

Так как $l_1 = \dfrac{a}{\cos\beta}$, а $l_2 = \dfrac{2a}{\cos\varphi}$, то $\Delta l_1 = \left(\alpha_1 \Delta T + \dfrac{N_1}{E_1 F}\right)\dfrac{a}{\cos\beta}$ (картины усилий и перемещений для стержня *1* совпадают); $\Delta l_2 = -\left(\alpha_2 \Delta T + \dfrac{N_2}{E_2 F}\right)\dfrac{2a}{\cos\varphi}$ (картины усилий и перемещений для стержня *2* не совпадают).

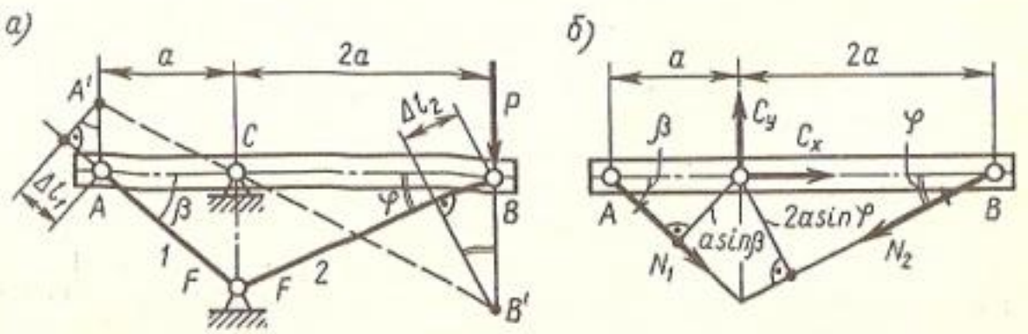


Рис. II.29

Уравнение совместности в физической форме запишется в виде

$$2\left(\alpha_1\Delta T+\frac{N_1}{E_1F}\right)\frac{a}{\sin\beta\cos\beta}=-\left(\alpha_2\Delta T+\frac{N_2}{E_2F}\right)\frac{2a}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Определяем

$$\sin\beta=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt{2}N_1-4N_2=4\sqrt{5}P,\\ 4N_1+5\psi_1N_2=-(4+5\psi_2)\alpha_1E_1\Delta TF.\end{cases}$$

Решая ее, находим

$$N_1=\frac{20\sqrt{5}P-4(4+5\psi_2)\alpha_1E_1\Delta TF}{5\sqrt{10}\psi_1+16},$$

$$N_2=-\frac{16\sqrt{5}P+\sqrt{10}(4+5\psi_2)\alpha_1E_1\Delta TF}{5\sqrt{10}\psi_1+16}.$$

§ II.13. Расчет стержня

Пример II.8. Для стержня (рис. II.30, *а*), заделанного концевым сечением, построить эпюры N, σ и δ и определить размер сечения d. Исходные данные: $q=1000$ Н/см; $l=50$ см; материал чугун СЧ15-32: $\sigma_{в.р}=150$ МПа, $\sigma_{в.с}=640$ МПа, $E=1{,}5\cdot10^5$ МПа; $[n]_в=4$. На участках I, II и III поперечное сечение стержня – круг, а на участке IV – квадрат.

Заделанным называется сечение, не имеющее перемещений относительно системы отсчета. Совокупность связей, наложенных на это сечение, называется заделкой. В заделанном сечении после отбрасывания связей могут существовать шесть компонентов реакций связей: A_x, A_y, A_z, M_{A_x}, M_{A_y}, M_{A_z}. Так как внешние силы не дают проекций на оси y и z и моментов относительно осей x, y, z, то отличным от нуля будет единственный компонент $A_x=A$, направленный вдоль оси бруса (рис. II.30, *а*). Для системы сил, действующих на стержень (рис. II.30, *а*), можно составить одно независимое уравнение статики $\Sigma X=0$ (система сил, действующих вдоль оси), из которого определится A. Следовательно, стержень статически определим. Для решения поставленной задачи нахождение A не обязательно, так как усилие в любом сечении можно найти, рассматривая правую отсеченную часть стержня.

Эпюрами N и σ называются графики изменения этих величин вдоль оси бруса, которые, по принятому правилу, штрихуются по нормали к оси. Слева от каждого эпюра в квадратных скобках указывается величина, на которую следует умножить числовое значение ординаты, чтобы получить величины N и σ в данном сечении.

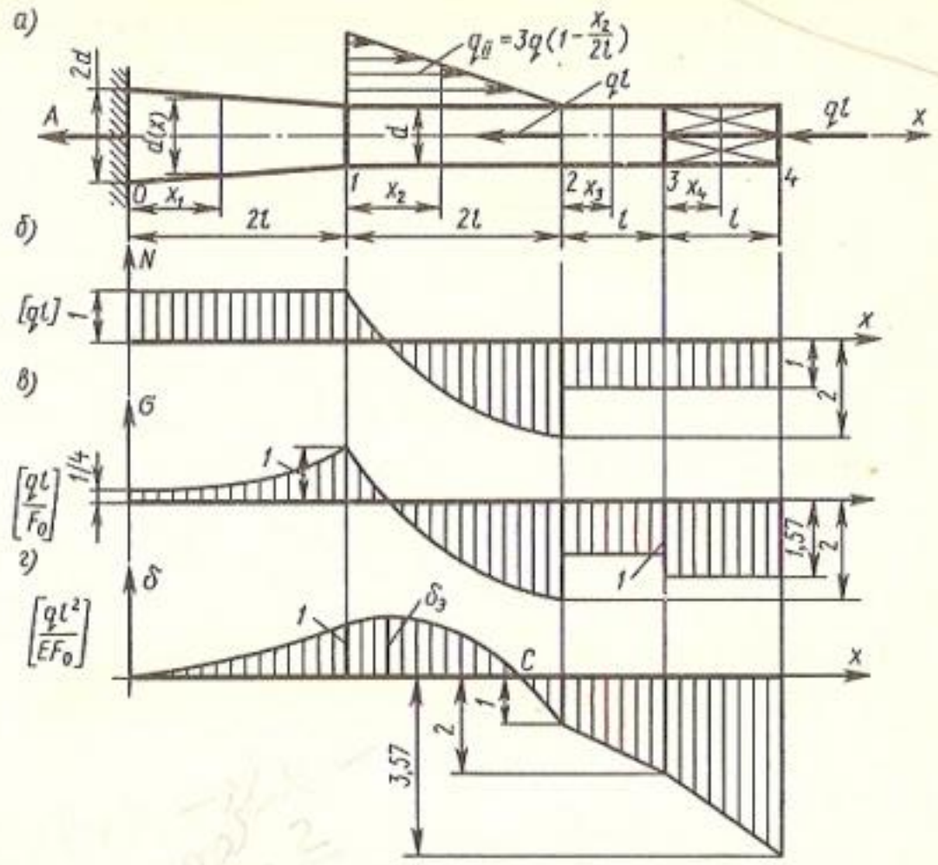


Рис. II.30

Погонные интенсивности $q_I=q_{III}=q_{IV}=0$. Погонная интенсивность на втором участке изменяется по линейному закону

$$q_{II}=ax_2+b. \tag{II.37}$$

Неизвестные постоянные a и b определяются из граничных условий: $[q_{II}]_{x_2=0}=3q$, $[q_{II}]_{x_2=2l}=0$. Подставив граничные условия в (II.37), найдем

$$b=3q;\ a\cdot2l+3q=0,\ a=-\frac{3q}{2l},$$

откуда

$$q_{II}=3q\left(1-\frac{x_2}{2l}\right),\ a\leqslant x_2\leqslant2l.$$

1. **Строим эпюр N.**

Для составления уравнений нормальных усилий по участкам воспользуемся выражением (II.3). Рассматриваем часть стержня справа от текущих сечений в пределах участков. Находим:

$$N_I=-ql-ql+\frac{3ql\cdot2l}{2}=ql$$

(постоянно на участке);

$$N_{II}=-ql-ql+\frac{q_{II}(2l-x_2)}{2}=\frac{3q(2l-x_2)^2}{4l}-2ql,$$

или окончательно

$N_{II} = \frac{ql}{4}\left(3\frac{x_2^2}{l^2} - 12\frac{x_2}{l} + 4\right)$ – уравнение параболы, график которой обращен выпуклостью вниз; значения N_{II} в граничных сечениях *1* и *2* равны:

$$N_1 = [N_{II}]_{x_2=0} = ql; \quad N_2 = [N_{II}]_{x_2=2l} = -2ql;$$

усилия $N_{III} = N_{IV} = -ql$ (постоянны на участках).

По уравнениям N_i построен эпюр N (рис. II.30, *б*).

2. **Строим эпюр σ.**

Обозначим $F_I = \frac{\pi[d(x)]^2}{4}$ – площадь текущего сечения в пределах первого участка. Текущий диаметр $d(x)$ является линейной функцией от x_1

$$d(x) = a_1 x_1 + b_1. \qquad \text{(II.38)}$$

Неизвестные постоянные a_1 и b_1 определяются из граничных условий: $[d(x)]_{x_1=0} = 2d$, $[d(x)]_{x_1=2l} = d$. Подставив граничные условия в (II.38), найдем

$$b_1 = 2d; \; a_1 \cdot 2l + 2d = d; \; a_1 = -\frac{d}{2l}.$$

Следовательно,

$$d(x) = d\left(2 - \frac{x_1}{2l}\right);$$

$$F_I = \frac{\pi d^2}{4}\left(2 - \frac{x_1}{2l}\right)^2;$$

$$F_I = F_0\left(2 - \frac{x_1}{2l}\right)^2; \; 0 \leqslant x_1 \leqslant 2l;$$

$$F_{II} = F_{III} = F_0, \text{ где } F_0 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$F_{IV} = \frac{d^2}{2} = 0{,}637F_0.$$

Для составления уравнений напряжений по участкам пользуемся формулой (II.5). Из этой формулы:

$\sigma_I = \frac{ql}{F_0\left(2 - \frac{x_1}{2l}\right)^2}$ – уравнение кривой, график которой обращен выпуклостью вниз;

$$\sigma_0 = [\sigma_I]_{x_1=0} = \frac{ql}{4F_0}; \quad \sigma_1 = [\sigma_I]_{x_1=2l} = \frac{ql}{F_0};$$

$$\sigma_{II} = \frac{ql}{4F_0}\left(3\frac{x_2^2}{l^2} - 12\frac{x_2}{l} + 4\right);$$

$$\sigma_1 = \frac{ql}{F_0}; \; \sigma_2 = [\sigma_{II}]_{x_2=2l} = -\frac{2ql}{F_0};$$

$$\sigma_{III} = -\frac{ql}{F_0}; \; \sigma_{IV} = -\frac{ql}{0{,}637F_0} = -1{,}57\frac{ql}{F_0}.$$

Эпюр σ построен на рис. II.30, *в*.

3. **Строим эпюр δ.**

Эпюром δ называется график перемещений сечений стержня в направлении его оси относительно любого сечения стержня, принятого за неподвижное. Чаще всего за неподвижное принимают сечение, связанное с системой отсчета, – в нашем примере левое.

Для составления уравнения δ_i по участкам пользуемся формулой (II.19), считая $\Delta T = 0$ (силовая задача).

Входящее в (II.19) перемещение δ_j равно для первого участка $\delta_0 = 0$, так как нулевое сечение принимается за неподвижное

$$\delta_I = \int_0^{x_1} \frac{ql}{EF_0\left(2 - \frac{x_1}{2l}\right)^2} dx_1;$$

обозначим $t = 2 - \frac{x_1}{2l}$, $dx_1 = -2ldt$;

$$\delta_I = -\frac{2ql^2}{EF_0}\int_2^{2-x_1/2l} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{2ql^2}{EF_0}\left|_2^{2-x_1/2l} - \frac{1}{t}\right.,$$

или $\delta_I = \frac{ql^2}{EF_0} \cdot \frac{x_1}{4l - x_1}$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 2l$;

$$\delta_1 = [\delta_I]_{x_1=2l} = \frac{ql^2}{EF_0}.$$

Из (II.17) при $\Delta T = 0$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF}, \qquad \text{(II.39)}$$

т. е. тангенс угла наклона касательной к очертанию эпюра δ на участке при постоянном E будет пропорционален ординатам эпюра σ. Так как на первом участке σ положительно и возрастает, очертание эпюра σ_I будет обращено выпуклостью вниз.

На втором участке входящее в (II.19) перемещение

$$\delta_j = \delta_1 = \frac{ql^2}{EF_0};$$

$$\delta_{II} = \frac{ql^2}{4EF_0}\int_0^{x_2}\left(3\frac{x_2^2}{l^2} - 12\frac{x_2}{l} + 4\right)dx_2 + \frac{ql^2}{EF_0};$$

или

$$\delta_{II} = \frac{ql^2}{4EF_0}\left(\frac{x_2^3}{l^3} - 6\frac{x_2^2}{l^2} + 4\frac{x_2}{l} + 4\right),\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2l;$$

$$\delta_2 = [\delta_{II}]_{x_2=2l} = \frac{ql^2}{4EF_0}(8 - 24 + 8 + 4) = -\frac{ql^2}{EF_0}.$$

Очертание эпюра δ_{II} обращено выпуклостью вверх, так как на втором участке $\frac{d^2\delta_{II}}{dx_2^2} < 0$. В сечении, для которого $N = \sigma = 0$, на основании (II.39) в эпюре δ будет экстремум. Для определения $\delta_э$ – экстремального значения δ_{II} находим x_0 (рис. II.30, *в*)

$$\frac{d\delta_{II}}{dx_2} = \frac{ql^2}{EF_0}\left(3\frac{x_0^2}{l^2} - 12\frac{x_0}{l} + 4\right) = 0,$$

$$3\frac{x_0^2}{l^2} - 12\frac{x_0}{l} + 4 = 0;$$

$$\left(\frac{x_0}{l}\right)_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3}.$$

Принимаем для x_0 значение, находящееся в пределах $0 \leqslant x_0 \leqslant 2l$. Следовательно,

$$x_0 = \frac{(6 - 2\sqrt{6})l}{3} = 0{,}367l;$$

$$\delta_э = [\delta_{II}]_{x=x_0} = \frac{ql^2}{4EF_0}(0{,}0494 - 0{,}808 + 1{,}47 + 4) = 1{,}18\frac{ql^2}{EF_0}.$$

Если $N_i/(EF)_i$ на участке постоянно, то из (II.19) при $\Delta T = 0$

$$\delta = \frac{N_i x_i}{(EF)_i} + \delta_j. \qquad \text{(II.40)}$$

На третьем участке $\delta_j = \delta_2 = -\frac{ql^2}{EF_0}$:

$$\delta_{III} = -\frac{qlx_3}{EF_0} - \frac{ql^2}{EF_0},$$

или

$$\delta_{III} = -\frac{ql^2}{EF_0}\left(\frac{x_3}{l} - 1\right),\ 0 \leqslant x_3 \leqslant l;$$

$$\delta_3 = -\frac{2ql^2}{EF_0}.$$

На четвертом участке $\delta_j = \delta_3 = -\frac{2ql^2}{EF_0}$:

$$\delta_{IV} = -\frac{ql^2}{EF_0}\left(1{,}57\frac{x_4}{l} + 2\right),\ 0 \leqslant x_4 \leqslant l;$$

$$\delta_4 = -3{,}57\frac{ql^2}{EF_0}.$$

Эпюр δ построен на рис. II.30, *г*.

Сечения бруса, расположенные слева от неподвижного сечения *c*, переместились вправо, так как их перемещения положительны, т. е. совпадают по направлению с осью x, а сечения – справа от сечения *c* переместились влево, так как их перемещения отрицательны.

4. **Определяем значение *d*.**

Рассчитываем значения допускаемых напряжений:

$$[\sigma]_р = \frac{\sigma_{в.р}}{[n]_в} = \frac{150}{4} = 37{,}5\ \text{МПа};\ [\sigma]_с = \frac{\sigma_{в.с}}{[n]_в} = \frac{640}{4} =$$

$$= 160\ \text{МПа}.$$

Из эпюра σ

$$\sigma_{max} = \frac{ql}{F_0};\ \sigma_{min} = -\frac{2ql}{F_0}.$$

Находим значение F_0 из расчета по растяжению:

$$\frac{ql}{F_0} \leqslant [\sigma]_р,\ F_0 \geqslant \frac{ql}{[\sigma]_р} = \frac{10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{37{,}5 \cdot 10^6} = 13{,}3\ \text{см}^2.$$

Находим значение F_0 из расчета по сжатию:

$$\frac{2ql}{F_0} \leqslant [\sigma]_с,\ F_0 \geqslant \frac{2ql}{[\sigma]_с} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{160 \cdot 10^6} = 6{,}25\ \text{см}^2.$$

Принимая для F_0 большее из полученных значений, находим

$$d = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 13{,}3}{3{,}14}} = 4{,}12\ \text{см}.$$

Пример II.9. Для стержня (рис. II.31, *а*) решить задачу в условии примера II.8.

1. **Определяем реакции опор.**

Заменив действие опор на стержень реакциями A и B, получим схему нагружения (рис. II.31, *б*). Для определения реакций можно составить только одно независимое уравнение статики

$$\Sigma X = -A + 2ql - ql + B = 0,\ \text{или}\ B = A - ql.$$

Следовательно, стержень один раз статически неопределим.

Составляем уравнение совместности перемещений в геометрической форме из того условия, что в схеме нагружения (рис. II.31, *б*) сечение *4* относительно сечения *O* перемещаться не должно. При соблюдении этого условия стержни в схемах нагружения *а* и *б* бу-

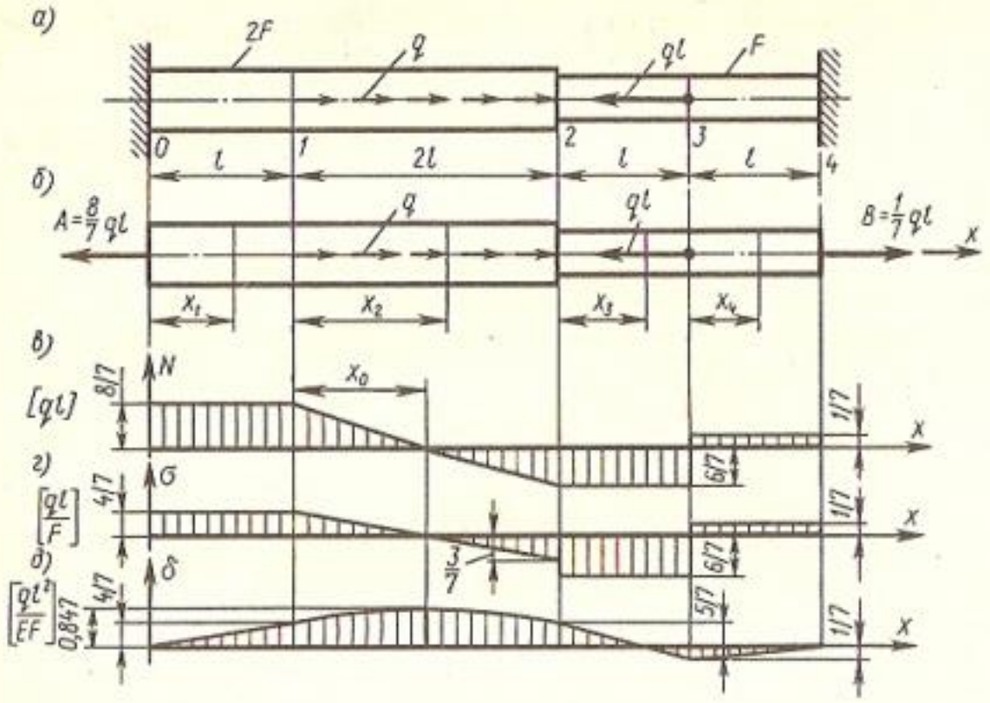


Рис. II.31

дут работать одинаково. Обозначив перемещение сечения i относительно сечения j (относительное) через δ_{i-j}, будем иметь

$$\delta_{4-0} = \delta_{1-0} + \delta_{2-1} + \delta_{3-2} + \delta_{4-3} = 0 \ . \qquad \text{(II.41)}$$

Уравнениями усилий по участкам (при q, постоянном на участке, грузовая площадь обычно не изображается) будут

$$N_{\text{I}} = A, \ N_{\text{II}} = A - qx_2, \ N_{\text{III}} = A - 2ql, \ N_{\text{IV}} = A - ql.$$

Выражения относительных перемещений, входящих в уравнение (II.40), через усилия получим, пользуясь (II.19), полагая $\Delta T = 0$.

Для каждого относительного перемещения δ_j равняется нулю, так как при составлении уравнения совместности сечение j предполагается неподвижным. Для участков с $N_i/(EF)_i = \text{const}$ при определении перемещений пользуемся выражением (II.40). Находим

$$\delta_{1-0} = \frac{Al}{2EF}; \ \delta_{2-1} = \frac{1}{2EF}\int_0^{2l}(A - qx_2)\,dx_2 = \frac{1}{EF}(Al - ql^2);$$

$$\delta_{3-2} = \frac{(A-2ql)\,l}{EF}; \ \delta_{4-3} = \frac{(A-ql)\,l}{EF}.$$

Подставив относительные перемещения в (II.41), получим уравнение совместности перемещений в физической форме

$$\frac{Al}{2EF} + \frac{Al-ql^2}{EF} + \frac{Al-2ql^2}{EF} + \frac{Al-ql^2}{EF} = 0 \ .$$

Из этого уравнения $A = \frac{8}{7}ql$.

Из уравнения статики после определения A находим $B = \frac{1}{7}ql$.

2. **Строим эпюр N (рис. II.31, в).**

Составляем уравнения нормальных усилий на участках:

$$N_{\text{I}} = \frac{8}{7}ql; \ N_{\text{II}} = ql\left(\frac{8}{7} - \frac{x_2}{l}\right), \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2l;$$

$$N_{\text{I}} = [N_{\text{II}}]_{x_2=0} = \frac{8}{7}ql; \ N_2 = [N_{\text{II}}]_{x_2=2l} = -\frac{6}{7}ql;$$

$$N_{\text{III}} = -\frac{6}{7}ql; \ N_{\text{IV}} = \frac{1}{7}ql.$$

3. **Строим эпюр σ (рис. II.31, г).**

Составляем уравнения напряжений на участках:

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{4ql}{7EF}; \ \sigma_{\text{II}} = \frac{ql}{14F}\left(8 - 7\frac{x_2}{l}\right); \ \sigma_1 = \frac{4ql}{7F}; \ \sigma_2 = -\frac{3ql}{7F};$$

$$\sigma_{\text{III}} = -\frac{6ql}{7F}; \ \sigma_{\text{IV}} = \frac{ql}{7F}.$$

4. **Строим эпюр δ (рис. II.31, д).**

Принимаем за неподвижное нулевое сечение и составляем уравнения перемещений на участках

$$\delta_{\text{I}} = \frac{4ql}{7EF}x_1, \ 0 \leqslant x_1 \leqslant l; \ \delta_1 = \frac{4ql^2}{7EF};$$

$$\delta_{\text{II}} = \frac{1}{2EF}\int_0^{x_2}\left(\frac{8}{7}ql - qx\right)dx + \frac{4ql^2}{7EF},$$

или

$$\delta_{\text{II}} = \frac{ql^2}{EF}\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\frac{x_2}{l} - \frac{x_2^2}{4l^2}\right)$$ — уравнение параболы, график которой обращен выпуклостью вверх. Из этого уравнения

$$\delta_1 = \frac{4ql^2}{7EF}, \ \delta_2 = [\delta_{\text{II}}]_{x_2=2l} = \frac{ql^2}{EF}\left(\frac{4}{7} + \frac{8}{7} - 1\right) = \frac{5ql^2}{7EF}.$$

Экстремальное значение δ_3 на втором участке найдем, подставив в δ_{II} вместо x_2 значение $x_0 = \frac{8}{7}l$:

$$\delta_3 = \frac{ql^2}{EF_0}\left(\frac{4}{7} + \frac{32}{49} - \frac{16}{49}\right) = \frac{44ql^2}{49EF};$$

$$\delta_{\text{III}} = \frac{ql^2}{7EF}\left(5 - 6\frac{x_3}{l}\right), \ 0 \leqslant x_3 \leqslant l; \ \delta_3 = -\frac{ql^2}{7EF};$$

$$\delta_{\text{IV}} = \frac{ql^2}{7EF}\left(\frac{x_4}{l} - 1\right), \ 0 \leqslant x_4 \leqslant l; \ \delta_4 = 0.$$

Последнее равенство подтверждает правильность решения задачи. Если расчет приходится проводить не в простых, а в десятичных дробях, то относительное перемещение концевых сечений может оказаться отличным от нуля. Задача в этом случае считается решенной правильно, если отклонение $\Delta \leqslant 5\%$.

5. **Проводим расчет на прочность.**

Определяем значение F из расчета по растяжению

$$\sigma_{max} = \frac{4ql}{7F} \leqslant [\sigma]_p, \text{ откуда } F \geqslant \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 37{,}5 \cdot 10^6} = 7{,}62 \text{ см}^2.$$

Определяем F из расчета по сжатию

$$|\sigma_{min}| = \frac{6ql}{7F} \leqslant [\sigma]_c, \text{ откуда } F \geqslant \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2{,}68 \text{ см}^2.$$

Принимаем $F = 7{,}62$ см^2.

Обычно в целях экономии места и времени преобразования схемы нагружения бруса *а* в *б* не делают, изображая компоненты реакций связей прямо на опорах. Изобразив таким образом реакции, мы должны забыть о существовании опорных устройств и считать сечения, на которые они наложены, свободными.

После решения примеров II.8 и II.9 можно сформулировать свойства эпюр силовой задачи, которыми следует пользоваться для контроля правильности их построения.

Свойства эпюра *N*.

1. На участке стержня без распределенной нагрузки очертание эпюра параллельно оси x; на участке с равномерно распределенной нагрузкой очертание эпюра наклонно к оси x; на участке с неравномерно распределенной нагрузкой очертание эпюра криволинейно.

2. В сечении с приложенной к стержню сосредоточенной силой – скачок (скачок – разность между последующей и предыдущей ординатами); если сила совпадает по направлению с осью x, то скачок – отрицателен, а если не совпадает, то – положителен.

3. Излом (резкое изменение тангенса угла наклона касательной) – в сечении со скачком в эпюре q.

4. Экстремум – в сечении с $q = 0$.

Свойства эпюра σ.

1. На участке с $F = \text{const}$ повторяются все свойства эпюра N.

2. В сечении, в котором площадь F изменяется скачком, – скачок.

3. На участке с непрерывно переменной площадью сечения очертание эпюра криволинейно.

Свойства эпюра δ.

1. Очертание эпюра на участке стержня с $F = \text{const}$, свободном от распределенной нагрузки, прямолинейно, а на участке с переменной площадью сечения или с распределенной нагрузкой – криволинейно.

2. Скачок – либо в граничных сечениях зазора, либо на свободном конце стержня.

3. Излом – в сечении, в котором скачок в эпюре σ.

4. Экстремум – в сечении с $N = 0$.

5. По (II.19) взаимное перемещение сечений стержня i и j при постоянном E и расстоянии между ними l_k

$$\delta_{i-j} = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} \sigma dx = \frac{\Omega_\sigma}{E},$$

где Ω_σ – площадь эпюра σ между сечениями j и i; n – число участков стержня между этими сечениями. Следовательно, взаимные перемещения сечений стержня равны площади эпюра σ между этими сечениями, деленной на E; для непрерывного стержня с заделанными концами площадь эпюра σ равна нулю; при наличии зазора между сечениями стержня площадь эпюра σ, деленная на E, равняется зазору.

Пример II.10. Для стержня с промежуточным зазором $\Delta = \frac{1}{2}\alpha\Delta T l$ и заданным законом изменения температуры нагрева на первом участке (рис. II.32, *а*) построить эпюры N, ε и δ.

Вследствие нагрева первого участка сечение *1* соприкоснется с сечением *2*, вместе с ним переместится вправо и оба участка бруса будут деформированы. Первый будет испытывать смешанную деформацию, а третий – силовую, так как $\Delta T_{III} = 0$.

1. **Определяем реакции опор.**

Составляем уравнение статики.

$$\Sigma X = A - B = 0 \quad \text{или} \quad A = B.$$

Так как уравнение одно, а неизвестных два, стержень один раз статически неопределим.

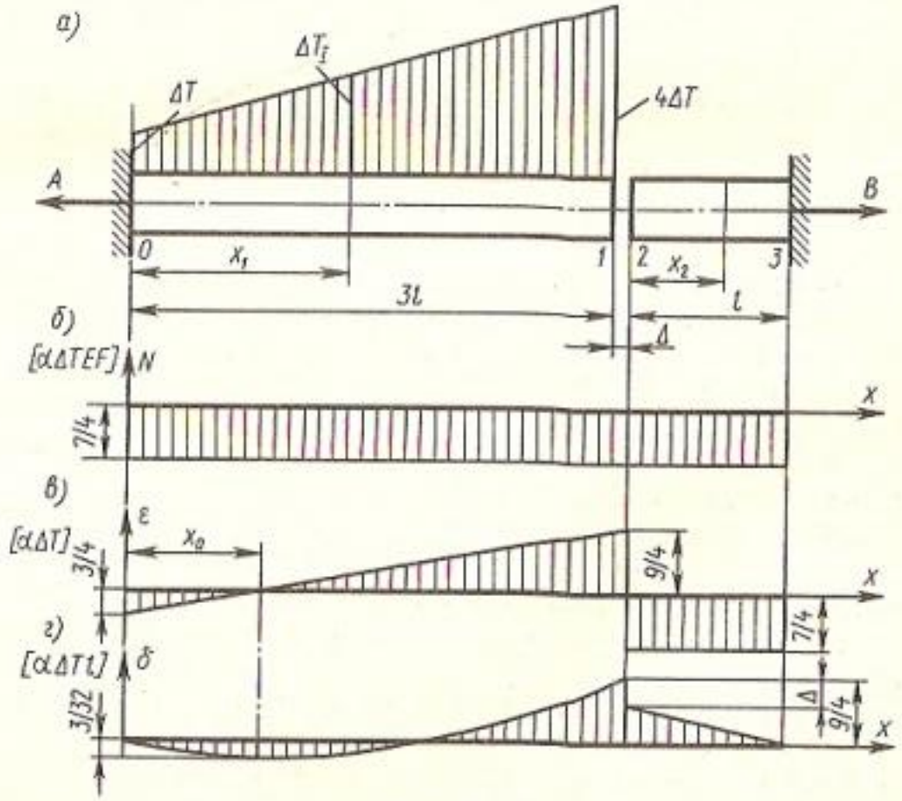


Рис. II.32

Составляем уравнение совместности в геометрической форме $\delta_{3-0} = \delta_{1-0} + \delta_{2-1} + \delta_{3-2} = 0$ — так как сечение *3* относительно нулевого не перемещается.

Закон изменения ΔT_I — линейный и $[\Delta T_I]_{x_1=0} = \Delta T$, а

$$[\Delta T_I]_{x_1=3l} = 4\Delta T, \text{ поэтому } \Delta T_I = \Delta T\left(1 + \frac{x_1}{l}\right),$$

следовательно,

$$\varepsilon_I = \frac{A}{EF} + \alpha\Delta T\left(1 + \frac{x_1}{l}\right),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 3l;\ \varepsilon_{II} = \frac{A}{EF}.$$

По (II.19):

$$\delta_{1-0} = \int_0^{3l}\left[\frac{A}{EF} + \alpha\Delta T\left(1 + \frac{x_1}{l}\right)\right]dx_1 = \frac{3Al}{EF} + \frac{15}{2}\alpha\Delta Tl.$$

Определяем δ_{2-1} и δ_{3-2}:

$\delta_{1-2} = \delta_{1-0} - \delta_{2-0} = \Delta$, или $\delta_{2-1} = \delta_{2-0} - \delta_{1-0} = -\Delta$;

$$\delta_{3-2} = \frac{Al}{EF}.$$

Уравнение совместности в физической форме будет таким:

$$\frac{3Al}{EF} + \frac{15}{2}\alpha\Delta Tl - \frac{1}{2}\alpha\Delta Tl + \frac{Al}{EF} = 0.$$

Из этого уравнения:

$$A = -\frac{7}{4}\alpha\Delta TEF.$$

2. **Строим эпюр N (рис. II.32, *б*).**

На участках

$$N_I = N_{III} = -\frac{7}{4}\alpha\Delta TEF.$$

3. **Строим эпюр ε (рис. II.32, *в*).**

На участках

$$\varepsilon_I = \alpha\Delta T\left(\frac{x_1}{l} - \frac{3}{4}\right);\ \varepsilon_0 = -\frac{3}{4}\alpha\Delta T;\ \varepsilon_1 = \frac{9}{4}\alpha\Delta T;\ \ \varepsilon_{II} = -\frac{7}{4}\alpha\Delta T.$$

4. **Строим эпюр δ (рис. II.32, *г*).**

Составляем уравнение перемещений на первом участке стержня. На основании (II.18)

$$\delta_I = \alpha\Delta T\int_0^{x_1}\left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4}\right)dx,$$

или

$$\delta_I = \frac{\alpha\Delta Tl}{2}\left(\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{3}{2}\frac{x_1}{l}\right)$$ — уравнение параболы, график которой обращен выпуклостью вниз.

Определяем

$$\delta_1 = [\delta_I]_{x_1=3l} = \frac{9}{4}\alpha\Delta Tl.$$

Согласно зависимости (II.17) в эпюре δ_I при $x = x_0$ будет экстремум, причем

$$\delta_* = [\delta_I]_{x_1=\frac{3}{4}l} = \frac{\alpha\Delta Tl}{2}\left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{32}\alpha\Delta Tl.$$

Находим

$$\delta_2 = \delta_1 - \Delta = \frac{9}{4}\alpha\Delta Tl - \frac{1}{2}\alpha\Delta Tl = \frac{7}{4}\alpha\Delta Tl.$$

По (II.19)

$$\delta_{III} = \frac{7}{4}\alpha\Delta Tl - \frac{7}{4}\alpha\Delta Tx_3,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant l,$$

или

$$\delta_{III} = \frac{7}{4}\alpha\Delta Tl\left(1 - \frac{x_3}{l}\right),\ \delta_3 = [\delta_{III}]_{x_3=l} = 0,$$

что говорит о правильности решения задачи.

Отметим свойства эпюр ε и δ при смешанной деформации стержня, которыми следует пользоваться для контроля правильности их построения.

1. Площадь эпюра ε равняется зазору между двумя любыми сечениями стержня. Действительно, если концевые сечения стержня обозначены 0 и n, а между двумя любыми сечениями стержня существует зазор Δ, то согласно формуле (II.18)

$$\delta_{n-0} = \sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\varepsilon_i dx - \Delta = 0,$$

или площадь эпюра ε, которую обозначим Ω_ε, равна зазору $\Omega_\varepsilon = \Delta$; если $\Delta = 0$, то $\Omega_\varepsilon = 0$.

Площадь эпюра ε, построенного для стержня, заделанного своими концами, не имеющего зазоров, должна равняться нулю.

2. Согласно зависимости (II.17) в сечениях с $\varepsilon = 0$ в эпюре δ будет экстремум.

Глава III. ЧИСТЫЙ СДВИГ И СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ

§ III.1. Определение нормального и касательного напряжений по произвольной площадке при чистом сдвиге

Чистым сдвигом называется напряженное состояние, в котором отличным от нуля будет только один касательный компонент напряженного состояния, например $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. В элементе, испытывающем чистый сдвиг (рис. III.1, *а*), считая τ_{xy} заданным, найдем σ_i и τ_i по произвольному сечению, параллельному оси z, рассмотрев равновесие его части AOB (рис. III.1, *б*), для которой это сечение будет наклонной гранью. Обозначим: α – угол между осью x и нормалью i к наклонной грани (площадке); F – площадь наклонной грани. Следовательно, $F\cos\alpha$ – площадь грани, нормальной к оси x, $F\sin\alpha$ – площадь грани, нормальной к оси y. Составим уравнения статики

$$\Sigma i = \sigma_i F - \tau_{xy} F\cos\alpha\sin\alpha - \tau_{yx} F\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

или

$$\sigma_i = \tau_{xy}\sin 2\alpha\,; \qquad \text{(III.1)}$$

$$\Sigma t = \tau_i F - \tau_{xy} F\cos^2\alpha + \tau_{yx} F\sin^2\alpha = 0,$$

или

$$\tau_i = \tau_{xy}\cos 2\alpha\,. \qquad \text{(III.2)}$$

Из (III.2) вытекает, что по площадкам, параллельным оси z и составляющим с осями x и y углы 45°, а следовательно, взаимно перпендикулярным, $\tau_i = 0$.

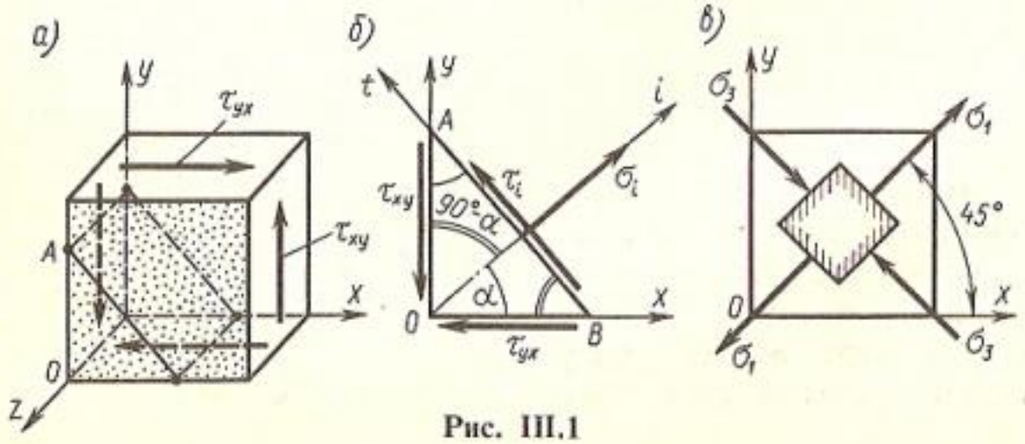


Рис. III.1

Площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, называются главными. В каждой точке элемента их будет три (третья перпендикулярна оси z) (рис. III.1, *в*). Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными. Они обозначаются σ_1, σ_2, σ_3, причем $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ в алгебраическом смысле. Из (III.1) следует, что $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_{xy}$ и чистый сдвиг можно определять как напряженное состояние, в котором первое и третье главные напряжения равны по величине и противоположны по знаку, а второе равняется нулю.

§ III.2. Закон Гука при чистом сдвиге и зависимость между E и G

Выразим постоянную C, входящую в уравнения обобщенного закона Гука (I.7), через упругие постоянные E и μ изотропного материала. Для этого рассмотрим деформацию элемента, испытывающего чистый сдвиг (рис. III.2). Для упрощения вывода его ребра в направлениях осей x и y приняты равными. В результате деформации верхняя грань переместится параллельно нижней на ΔS (сдвинется), отсюда и название напряженного состояния, при котором эта деформация возникает. Перемещение ΔS называется **абсолютным сдвигом.**

Из $\Delta AA'B$ $\Delta S = a\gamma_{xy}$, так как для тела большой жесткости $\gamma_{xy} \cong \operatorname{tg}\gamma_{xy}$. На этом же основании дуга заменена перпендикуляром AA''. Из $\triangle AA'A''$ $\Delta S = \sqrt{2}\,\Delta l_{AO}$.

Приравнивая выражения ΔS, получаем: $a\gamma_{xy} = \sqrt{2}\,\Delta l_{AO}$, но $\Delta l_{AO} = \sqrt{2}\,\varepsilon_{AO}a$, поэтому $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{AO}$. (III.3)

Деформацию ε_{AO} можно выразить через τ_{xy}, если воспользоваться одним из уравнений (II.14), например первым:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)).$$

Ребро заштрихованного элемента (рис. III.2), испытывающего двухосное растяжение и сжатие, совпадает с AO, поэтому их деформации равны и могут быть

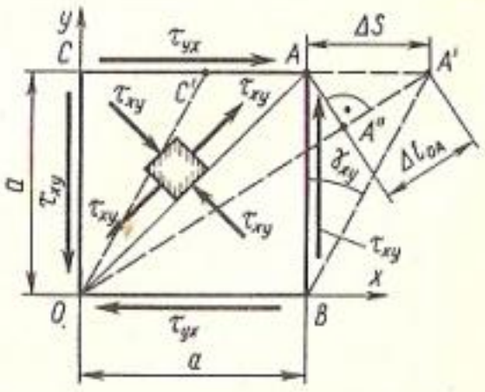


Рис. III.2

найдены из этого уравнения, если положить в нем $\varepsilon_x = \varepsilon_{AO}$; $\sigma_x = \sigma_1 = \tau_{xy}$; $\sigma_y = \sigma_3 = -\tau_{xy}$; $\sigma_z = \sigma_2 = 0$. В результате найдем, что

$$\varepsilon_{AO} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}. \qquad \text{(III.4)}$$

Подставив выражение ε_{AO} из (III.4) в (III.3), получим

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \qquad \text{(III.5)}$$

Коэффициент пропорциональности в уравнении (III.5) обозначается через G и называется **модулем поперечной упругости** (модулем упругости при сдвиге, модулем упругости второго рода)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad \text{(III.6)}$$

Выражение (III.6) принято называть зависимостью между E и G для изотропного материала.

Следовательно,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \qquad \text{(III.7)}$$

По аналогии,

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz},\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

Уравнения (III.7) называются **законом Гука при чистом сдвиге в напряжениях и деформациях**. Они вместе с уравнениями (II.14) образуют обобщенный закон Гука (I.7).

§ III.3. Определение $M_к$ при кручении

Кручением называется деформация стержня, нагруженного парами, плоскости действия которых перпендикулярны его оси (рис. III.3).

На рис. III.3 в виде спирали (один из способов представления) изображена распределенная моментная нагрузка (погонная) и указано направление ее действия. Такой вид нагружения, например, испытывает в полете крыло самолета. После приведения аэродинамических сил в каждом сечении к центру изгиба (о центре изгиба см. § V.11) крыло (рис. III.4) окажется нагруженным распределенными поперечной и моментной нагрузками. Погонная моментная нагрузка задается погонной моментной интенсивностью $m = m(x)$ в каждом сечении бруса. Площадь графика, ограниченного линией $m = m(x)$, называется **моментной грузовой площадью.**

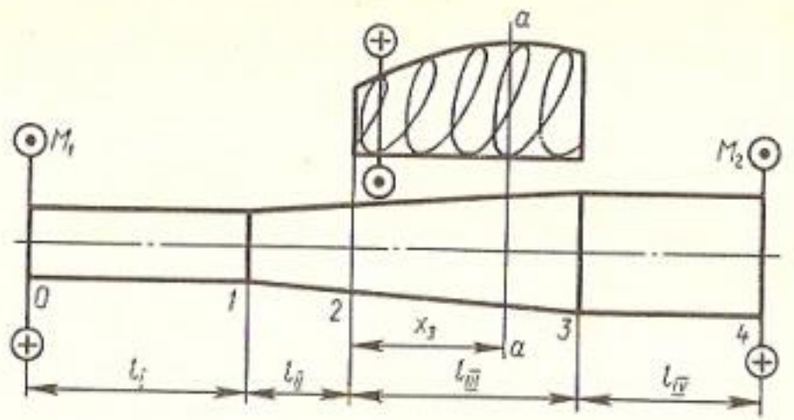


Рис. III.3

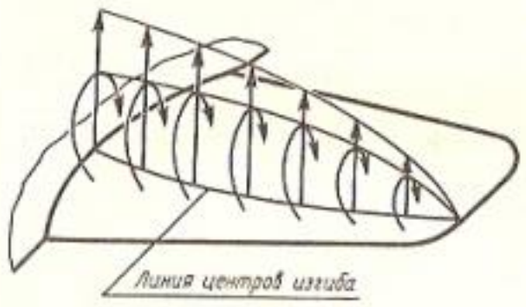


Рис. III.4

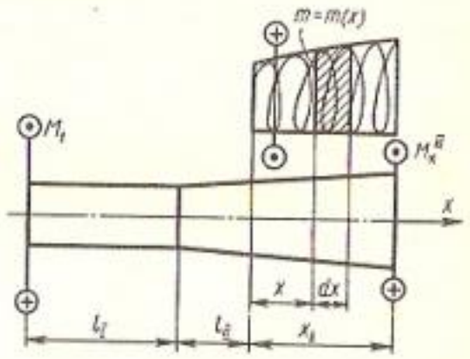


Рис. III.5

Единица в СИ: $m = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}}$.

Внешние сосредоточенные пары, задаваемые на схеме нагружения своими моментами, и распределенная моментная нагрузка, прилагаемые к брусу, называются скручивающими.

Применяя к стержню (см. рис. III.3) метод сечений, рассматриваем его часть слева от произвольного сечения, например $a - a$ в пределах *III* участка (рис. III.5).

Так как скручивающие пары и распределенная моментная нагрузка, действующие на отсеченную часть, не дадут проекций на оси x, y, z и моментов относительно осей y и z, силы упругости в любом поперечном сечении стержня приведутся к единственному внутреннему силовому фактору – крутящему моменту $M_к$. Крутящий момент считается положительным, если он возникает от скручивающей пары, вращающей отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на пару со стороны сечения (рис. III.6, *а, б*).

Значение $M_к$ – крутящего момента в пределах *III* участка (на *III* участке) найдем, рассмотрев условие равновесия отсеченной части (см. рис. III.5):

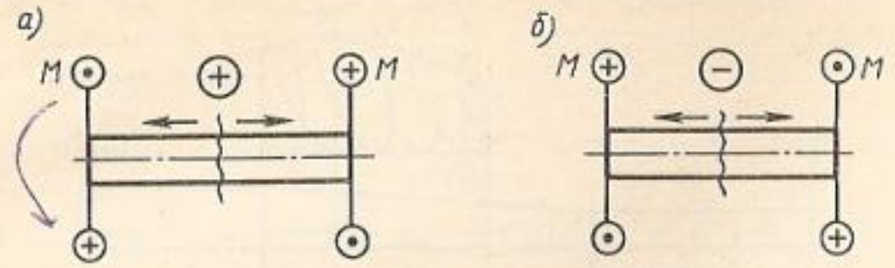


Рис. III.6

$$\Sigma m_x = M_1 - \int_0^{x_3} m dx + M_к^{III} = 0, \qquad \text{(III.8)}$$

где $\int_0^{x_3} m dx = \Omega_{x_3}$ – часть моментной грузовой площади по левую сторону от текущего сечения.

Из (III.8) получим

$$M_к^{III} = -M_1 + \Omega_{x_3}. \qquad \text{(III.9)}$$

Обобщив равенство (III.9), сформулируем правило для определения $M_к$: **крутящий момент в поперечном сечении стержня равняется алгебраической сумме моментов сосредоточенных скручивающих пар и моментных грузовых площадей по одну сторону от сечения.** Из этого правила

$$M_к = \sum^{лев} M_i + \sum^{лев} \Omega_j = \sum^{прав} M_m + \sum^{прав} \Omega_n. \qquad \text{(III.10)}$$

§ III.4. Дифференциальная и интегральная зависимости между m и $M_к$

Возьмем участок бруса (рис. III.7, *а*) и рассмотрим равновесие его элемента бесконечно малой длины dx (рис. III.7, *б*). Составим уравнение статики

$$\Sigma m_x = M_к + m dx - M_к - dM_к = 0,$$

из которого

$$\frac{dM_к}{dx} = m. \qquad \text{(III.11)}$$

Из (III.11)

$$M_к = \int_0^{x_i} m\,dx + M_к^{(i-1)}, \qquad \text{(III.12)}$$

где $M_к^{(i-1)}$ – крутящий момент в левом сечении участка (в начале координат).

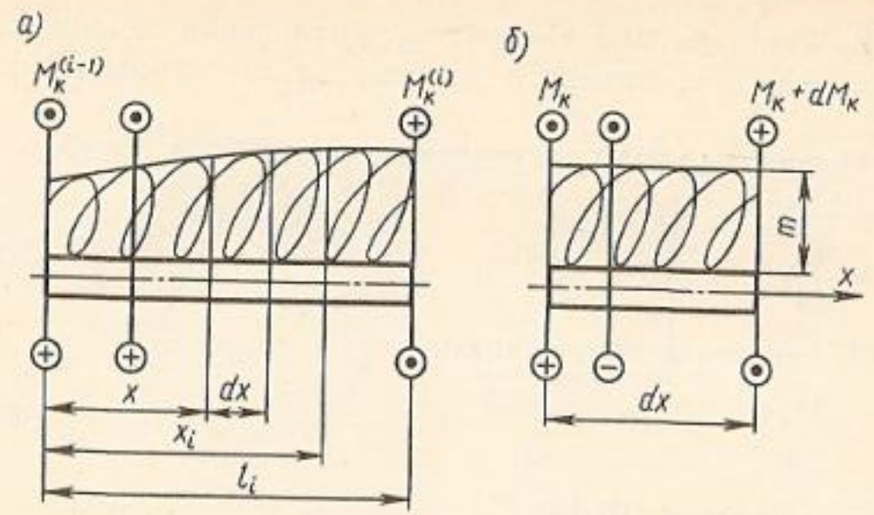


Рис. III.7

§ III.5. Общие замечания о кручении

1. Принимаем предположения, которые подтверждаются решением задачи о кручении методами теории упругости.

При кручении поперечные сечения стержня поворачиваются друг относительно друга около прямой, называемой **осью кручения** (в дальнейшем ось x), как недеформирующиеся в своей плоскости (жесткие) диски. Это предположение называют гипотезой жесткости сечения в своей плоскости. Точка пересечения оси кручения с поперечным сечением называется центром кручения. Угол поворота произвольного поперечного сечения стержня, как жесткого целого, относительно сечения, принятого за неподвижное, будем обозначать $\varphi = \varphi(x)$ и называть углом закручивания, а через φ_{j-i} будем обозначать угол закручивания сечения j относительно сечения i.

Точки поперечного сечения любой формы, за исключением кольцевой, неодинаково перемещаются в направлении оси кручения, за счет чего оно превращается в некоторую поверхность (депланирует).

Если точки поперечного сечения могут свободно перемещаться в направлении оси кручения, то кручение называется свободным, в противном случае оно называется стесненным. При свободном кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные силы упругости, а следовательно, только касательные напряжения.

2. Максимальное касательное напряжение в сечении любой формы при кручении всегда определяется по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}, \qquad \text{(III.13)}$$

где $W_к$ – модуль или момент сопротивления сечения кручению, величина которого зависит от его формы и размеров.

3. **Погонным углом закручивания** называется производная от φ по x

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \tag{III.14}$$

Как увидим в дальнейшем, всегда

$$\theta = \frac{M_к}{GJ_к}, \tag{III.15}$$

откуда, учитывая (III.14),

$$\varphi = \int_0^{x_i} \frac{M_к}{GJ_к} dx + \varphi_{i-1}, \tag{III.16}$$

где φ_{i-1} – угол закручивания сечения, находящегося в начале координат; $GJ_к$ – жесткость сечения стержня при кручении; $J_к$ – геометрическая характеристика жесткости, которая зависит от размеров и формы сечения.

4. Первая цель решения задачи о кручении стержня состоит в определении закона распределения касательных напряжений по его поперечному сечению и получении выражений $W_к$ и $J_к$ для этого сечения. Общих формул для $W_к$ и $J_к$ получить нельзя, поэтому для каждой формы поперечного сечения бруса задача кручения должна решаться самостоятельно. После определения $W_к$ и $J_к$, τ_{max} и φ находятся соответственно по формулам (III.13) и (III.16).

§ III.6. Кручение стержня кольцевого поперечного сечения

Для стержня кольцевого поперечного сечения справедлива гипотеза Бернулли.

Предположим, что касательное напряжение в любой точке поперечного сечения (рис. III.8, *а*) с координатами ρ, α направлено произвольно по отношению к радиусу. Разложим его на два компонента: $\tau_{x\alpha}$ – нормальный к радиусу и $\tau_{x\rho}$ – направленный по радиусу. Рассмотрим деформацию элемента, вырезанного из бруса (рис. III.8, *б*). Отрезок $OA = OA'$ – из гипотезы жесткости сечения в своей плоскости; $\gamma_{x\rho} = 0$ – из гипотезы Бернулли (поперечное сечение остается плоским). Но $\tau_{x\rho} = G\gamma_{x\rho}$ – закон Гука при чистом сдвиге, поэтому $\tau_{x\rho} = 0$ и $\tau = \tau_{x\alpha}$.

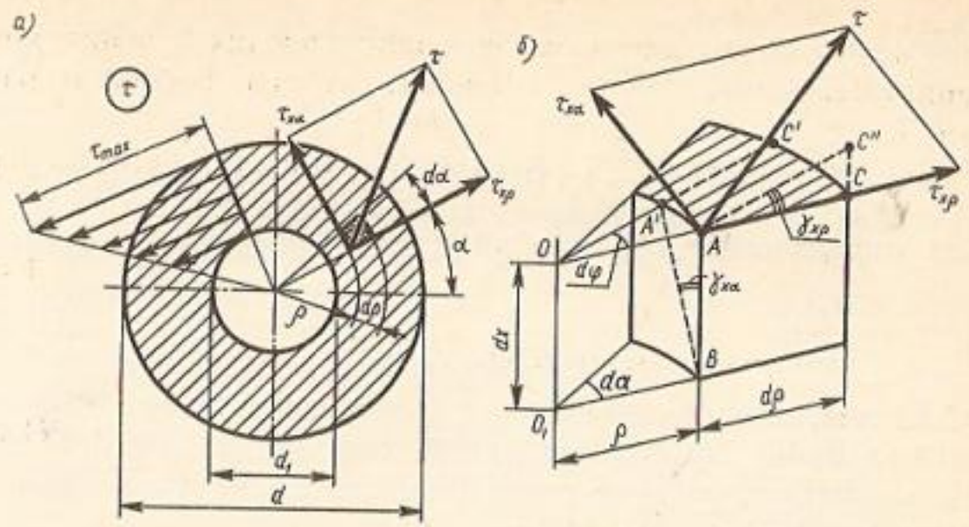


Рис. III.8

Следовательно, касательное напряжение в любой точке поперечного сечения перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку. Таким образом, принятые гипотезы позволили установить направление τ в любой точке поперечного сечения.

Найдем зависимость между τ и ρ. Из $\triangle OAA'$ $AA' = \rho d\varphi$; из $\triangle BAA'$ $AA' = \gamma_{x\alpha} dx$, следовательно, $\gamma_{x\alpha} = \frac{d\varphi}{dx}\rho = \theta\rho$, но $\tau_{x\alpha} = G\gamma_{x\alpha}$, поэтому

$$\tau = G\theta\rho. \tag{III.17}$$

Согласно определению крутящий момент $M_к$ – равнодействующая пара касательных сил упругости действующих в сечении, поэтому

$$M_к = \iint_F \rho\tau dF. \tag{III.18}$$

Подставив выражение τ из (III.17) в (III.18), получим

$$M_к = G\theta \iint_F \rho^2 dF.$$

Интеграл, входящий в выражение $M_к$, обозначается J_p и называется **полярным моментом инерции**

$$I_p = \iint_F \rho^2 dF. \tag{III.19}$$

Таким образом,

$$\theta = \frac{M_к}{GI_p}, \tag{III.20}$$

или

$$I_к = I_p. \qquad \text{(III.21)}$$

Подставляя $G\theta = \dfrac{\tau}{\rho}$ из (III.17) в (III.20), получим формулу для определения τ в любой точке поперечного сечения

$$\tau = \frac{M_к}{I_p}\rho. \qquad \text{(III.22)}$$

Касательные напряжения в поперечном сечении изменяются вдоль радиуса по линейному закону, достигая наибольшего значения в точках наружного контура сечения при $\rho_{max} = d/2$: $\tau_{max} = \dfrac{M_к d}{2I_p}$, или

$$W_к = \frac{2I_p}{d}. \qquad \text{(III.23)}$$

График распределения τ по радиусу, называемый эпюром касательных напряжений и обозначаемый τ, показан на рис. III.8, *а*.

Для определения $I_к$ и $W_к$ через размеры сечения следует вычислить I_p для кольца:

$$I_p = \int_F\int \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{d_{1/2}}^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}(1-c^4) \cong 0{,}1d^4(1-c^4); \qquad \text{(III.24)}$$

$$W_к = \frac{\pi d^3}{16}(1-c^4) \cong 0{,}2d^3(1-c^4), \qquad \text{(III.25)}$$

где $c = d_1/d$. Для круга при $c = 0$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0{,}1d^4, \qquad \text{(III.26)}$$

$$W_к = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0{,}2d^3. \qquad \text{(III.27)}$$

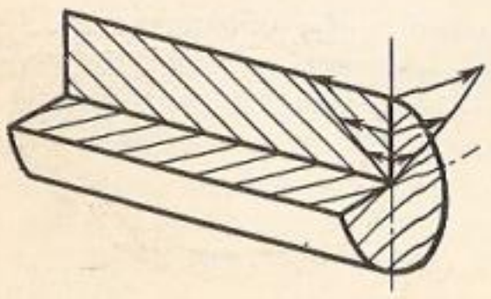


Рис. III.9

При кручении, по свойству парности касательных напряжений, будут существовать касательные напряжения в продольных сечениях бруса, распределенные по тому же закону, что и в поперечных сечениях.

На рис. III.9 показаны законы распределения касательных напряжений в продольных и поперечных сечениях стержня круглого поперечного сечения.

§ III. 7. Формула для определения касательного напряжения в стержне односвязного тонкостенного сечения

Стержень называется **тонкостенным**, если он образован поверхностями, расстояния между которыми малы по сравнению с размерами этих поверхностей (рис. III.10, *а*). Расстояние между поверхностями t называется **текущей толщиной**. Геометрическое место средин толщин называется **срединной поверхностью стержня**, которой он иногда задается. Линия пересечения срединной поверхности с поперечным сечением называется его **средней линией**. Стержень можно считать тонкостенным, если $a_{min}/t_{max} \geqslant 10$, где a_{min} – наименьший габаритный размер сечения по средней линии. Сечение стержня называется n-связным, если оно образовано $n+1$ замкнутыми линиями. Если $n = 0$, то сечение называется **сплошным**.

Высказать соображения о практически равномерном распределении касательных напряжений по толщине и их направлении можно из чисто физических представлений. Рассмотрим участок сечения (рис. III.11, *а*). В точках A и B толщины касательные напряжения направлены по касательным к наружному и внутреннему контурам сечения (см. § 1.6). В точке C напряжение может отклоняться от направления касательной к средней линии в этой точке, однако это отклонение, а также разница в значениях τ_A, τ_B и τ_C в силу тонкостенности сечения не могут быть значительными. Поэтому касательные напряжения можно практически счи-

а) *б)*

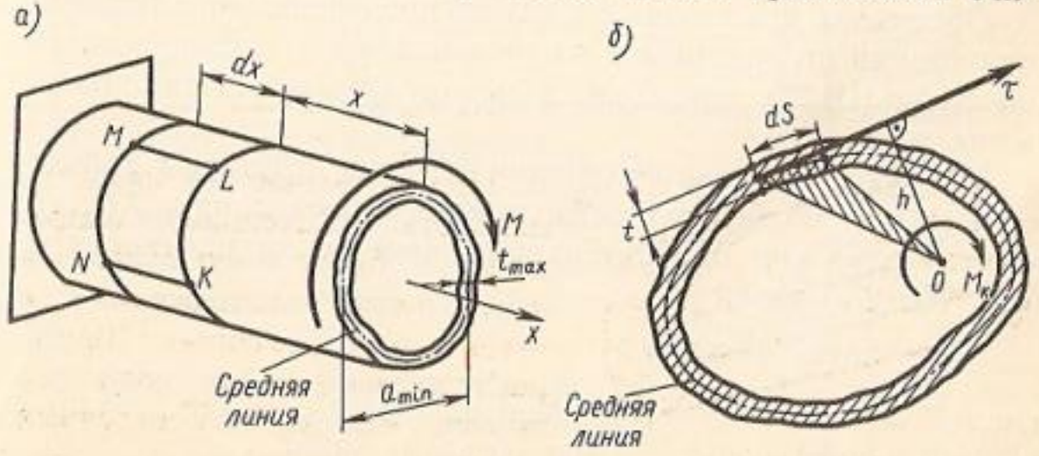


Рис. III.10

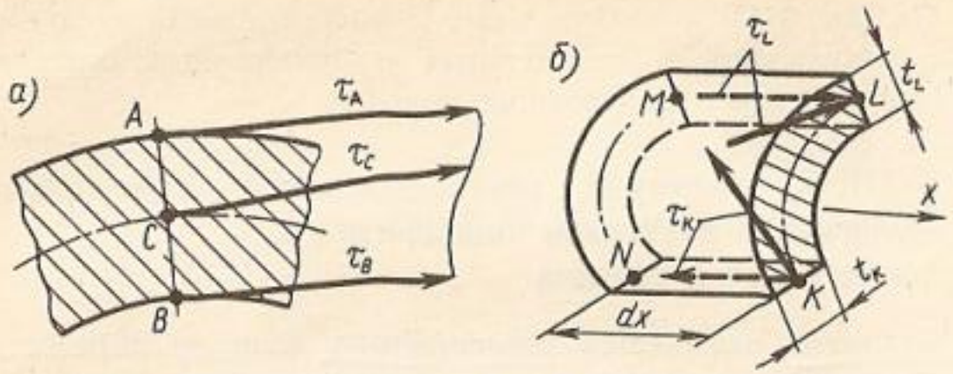


Рис. III.11

тать равномерно распределенными по толщине и направленными по касательной к средней линии сечения.

Рассмотрим равновесие элемента $KLMN$, вырезанного из стержня поперечными сечениями (следы KL и MN) и сечениями, нормальными к средней линии (следы ML и NK), у которого KL – произвольно (см. рис. III.10, *а*). Если в точках K и L поперечного сечения действуют касательные напряжения τ_K и τ_L, то по свойству парности по граням KN и ML будут действовать соответственно равные напряжения. По этим граням касательные напряжения распределены равномерно, так как по толщине они распределены равномерно, а размер KN бесконечно мал (рис. III.11, *б*).

Из условия равновесия элемента

$$\Sigma X = -\tau_K t_K dx + \tau_L t_L dx = 0,$$

откуда

$$\tau_K t_K = \tau_L t_L = \tau t = \text{const}. \qquad \text{(III.28)}$$

Произведение касательного напряжения на толщину, соответствующую точке средней линии, в которой оно действует, постоянно.

Обосновав предположения о распределении касательных напряжений по толщине и их направлении, а также доказав равенство (III.28), переходим к выводу формулы для определения τ.

Так как в поперечном сечении стержня действуют только касательные силы упругости, приводящиеся к паре $M_к$, то момент этих сил относительно любой точки плоскости O (рис. III.10, *б*) равен

$$M_к = \oint h\tau t dS = \tau t \oint h dS, \qquad \text{(III.29)}$$

где h – перпендикуляр, опущенный из O на линию действия τ, а dS – дифференциал дуги средней линии.

Интеграл в (III.29) берется по контуру средней линии.

В (III.29): $hdS = 2dF_{ср}$, где $dF_{ср}$ – площадь заштрихованного треугольника; следовательно, $\oint hdS = 2F_{ср}$, где $F_{ср}$ – площадь, ограниченная средней линией сечения.

Тогда из (III.29)

$$\tau = \frac{M_к}{2F_{ср}t}. \qquad \text{(III.30)}$$

Наибольшее касательное напряжение будет в точке средней линии, для которой $t = t_{min}$, поэтому

$$W_к = 2F_{ср}t_{min}. \qquad \text{(III.31)}$$

§ III.8. Определение геометрической характеристики жесткости $I_к$ односвязного тонкостенного сечения

Сформулируем принцип возможных перемещений для упругой системы и положим его в основу вывода формулы для определения $I_к$.

Если точка тела A (рис. III.12) находится в равновесии под действием внешней силы P, силы упругости f и реакции связи R, то сумма проекций этих сил на любое направление ν равна нулю:

$$\Sigma\nu = P\cos\alpha + f\cos\beta + R\cos\gamma = 0. \qquad \text{(III.32)}$$

Возможным назовем любое перемещение точки, совместимое с наложенными на нее связями, а также с требованиями большой жесткости и неразрывности тела. Дадим точке A возможное перемещение AA', совпадающее с направлением ν, и умножим уравнение (III.32) на это перемещение, получим

$$P\cdot AA'\cdot\cos\alpha + f\cdot AA'\cdot\cos\beta + R\cdot AA'\cdot\cos\gamma = 0. \qquad \text{(III.33)}$$

Левая часть уравнения (III.33) будет работой всех сил, приложенных к точке A на ее возможном перемещении AA'. Следовательно, работа всех сил, приложенных к любой точке тела, на ее возможном перемещении равна нулю, если тело находится в равновесии.

Для механической системы, являющейся совокупностью материальных точек, принцип возможных перемещений формулируется так:

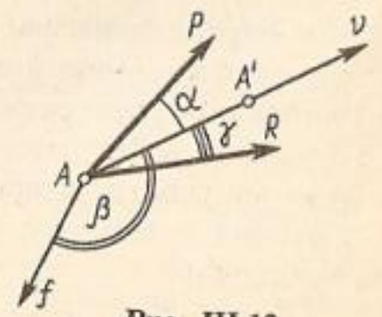


Рис. III.12

если система находится в равновесии, то сумма работ, приложенных к ней внешних сил, сил уп-

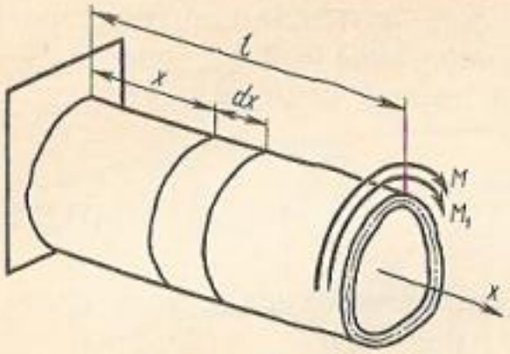


Рис. III.13

ругости и реакций связей на любом возможном бесконечно малом (практически достаточно малом) **перемещении, равна нулю.**

Требование достаточной малости возможных перемещений необходимо для того, чтобы силы, действующие на любую точку системы, на этих перемещениях можно было считать постоянными.

Обозначив в выражении (III.33): A_P – работу внешних сил, A_y – работу сил упругости, A_R – работу реактивных сил на основании принципа возможных перемещений, получим

$$A_P + A_y + A_R = 0. \qquad \text{(III.34)}$$

Пусть к стержню (рис. III.13) в его свободном концевом сечении вначале прикладывается единичная безразмерная скручивающая пара $M_1 = 1$. В результате ее действия в текущей точке средней линии поперечного сечения стержня возникает касательное напряжение τ_1, определяемое по формуле (III.30). Так как $M_к = M_1 = 1$,

$$\tau_1 = \frac{1}{2F_{ср}t}. \qquad \text{(III.35)}$$

Затем к стержню в том же сечении прикладывается скручивающая пара M, под действием которой это сечение стержня повернется относительно заделанного сечения на угол φ. Примем этот поворот за возможное перемещение для стержня, находящегося в равновесии под действием пары M_1. Тогда работа внешних сил в (III.34) с учетом выражения (III.16) для φ

$$A_P = 1 \cdot \varphi = \frac{Ml}{GI_к}. \qquad \text{(III.36)}$$

Для определения работы сил упругости в (III.34) рассмотрим деформацию участка стержня длиной dx (рис. III.14, *а*). Работа сил упругости $d(dA_y)$, действующих на элемент этого участка $tdSdx$ (рис. III.14, *б*), будет отрицательной, так как сила упругости, действующая по площадке tdS, всегда направлена в сторону, противоположную перемещению этой площадки:

$$d(dA_y) = -\tau_1 tdS \cdot CC', \qquad \text{(III.37)}$$

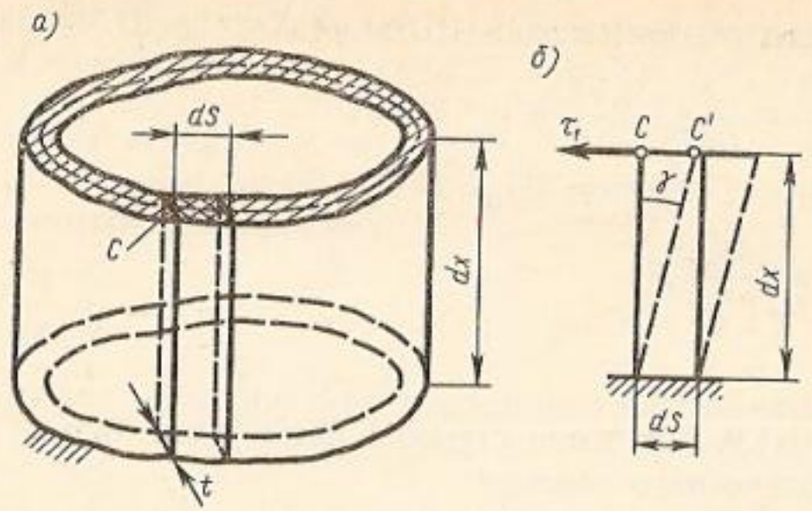


Рис. III.14

где CC' – перемещение площадки tdS элемента при действии на стержень пары M. Следовательно,

$$CC' = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx,$$

где по формуле (III.30), так как $M_к = M$,

$$\tau = \frac{M}{2F_{ср}t},$$

$$\text{или } CC' = \frac{M}{G2F_{ср}t}. \qquad \text{(III.38)}$$

Подставив выражения (III.35) и (III.38) в (III.37), найдем

$$d(dA_y) = -\frac{Mdx}{G4F_{ср}^2 t} dx.$$

Работа сил упругости, действующих в участке стержня длиной dx,

$$dA_y = -\frac{Mdx}{G4F_{ср}^2} \oint \frac{dS}{t}. \qquad \text{(III.39)}$$

Интеграл, входящий в выражение A_y, берется по контуру средней линии сечения.

Работа сил упругости, действующих в стержне, из выражения (III.39):

$$A_y = \frac{M}{G4F_{ср}^2} \oint \frac{dS}{t} \int_0^l dx = \frac{Ml}{G4F_{ср}^2} \oint \frac{dS}{t}. \qquad \text{(III.40)}$$

Работа реактивных сил в (III.34) $A_R = 0$, так как заделанное сечение неподвижно.

Подставив выражения (III.36) и (III.40) в (III.34), получим

$$\frac{Ml}{GI_к} - \frac{Ml}{G4F_{ср}^2}\oint\frac{dS}{t} = 0,$$

откуда

$$I_к = \frac{4F_{ср}^2}{\oint\frac{dS}{t}}. \qquad \text{(III.41)}$$

§ III.9. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения

Нам удалось определить $W_к$ и $I_к$ для тонкостенного замкнутого сечения и кольца, потому что мы смогли указать направление τ в любой точке этих сечений: в первом – на основании физических соображений, а во втором – на основании гипотезы Бернулли. Гипотеза Бернулли при кручении, как уже отмечалось ранее, справедлива только для кольца. Поэтому определить $W_к$ и $I_к$ методами сопротивления материалов для произвольной формы сечения нельзя и нам приходится пользоваться результатами решения этой задачи методами теории упругости.

Решение задачи о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения впервые получено Сен-Венаном на основании выдвинутого им полуобратного метода, и в наше время считается классическим. Следы поперечного сечения на поверхности стержня до и после деформации изображены на рис. III.15, *а*. Максимального значения касательное напряжение достигает в средней точке длинной стороны. По теореме

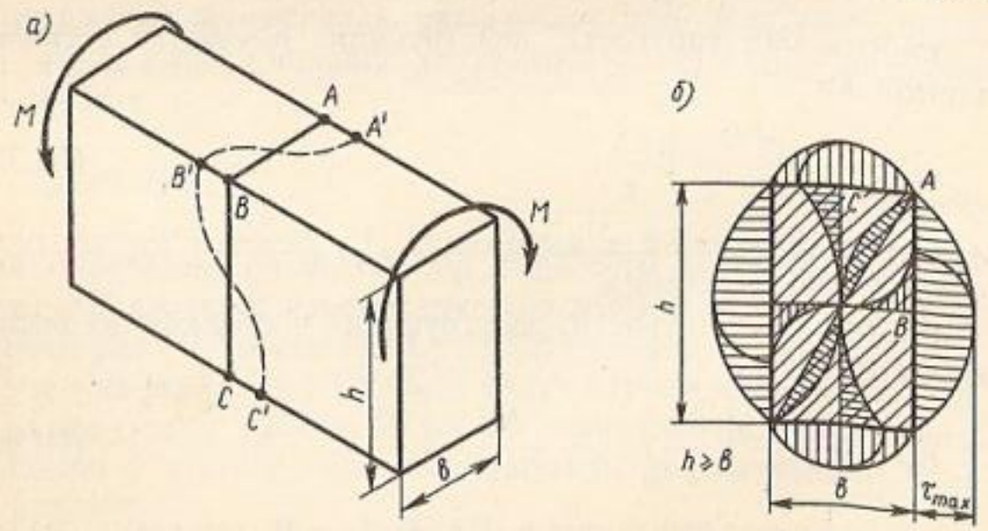


Рис. III.15

о касательном напряжении (см. § I.6) в угловых точках касательные напряжения равны нулю, а в точках контура сечения направлены по касательной к контуру. Распределение касательных напряжений по характерным линиям сечения (эпюр τ) показано на рис. III.15, *б*. Из решения Сен-Венана для прямоугольного сечения:

$$W_к = \alpha b^2 h; \qquad \text{(III.42)}$$

$$I_к = \beta b^3 h. \qquad \text{(III.43)}$$

Касательное напряжение посредине короткой стороны

$$\tau_c = \gamma\tau_{max}. \qquad \text{(III.44)}$$

Коэффициенты α, β и γ зависят от отношения h/b (только от формы сечения) и берутся из табл. 2.

Таблица 2

h/b	1	1,5	1,75	2	3	4	6	8	10	00
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	1/3
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	1/3
γ	1	0,859	0,820	0,795	0,793	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

§ III.10. Кручение стержня тонкостенного разомкнутого сечения

Если средняя линия тонкостенного сечения незамкнута, то сечение называется **разомкнутым** (открытым). Разомкнутое сечение можно считать тонкостенным, если $S_i/t_i \geqslant 10$ (см. рис. III.17, *б*).

Для стержня, сечение которого – вытянутый прямоугольник с $h/b > 10$, траектории касательных напряжений по сечению показаны на рис. III.16, *а*, а эпюры напряжений по его характерным линиям – на рис. III.16, *б*. Для этого сечения из табл. 2 $\alpha = \beta \cong 1/3$. Исследования показали, что с достаточной для практических целей точностью в разомкнутом сечении (рис. III.16, *в*) $W_к$ и $I_к$ можно определять по формулам для вытянутого прямоугольника, если считать $t = b$, а $S = h$. Тогда

$$W_к = \frac{1}{3}t^2 S, \qquad \text{(III.45)}$$

$$I_к = \frac{1}{3}t^3 S. \qquad \text{(III.46)}$$

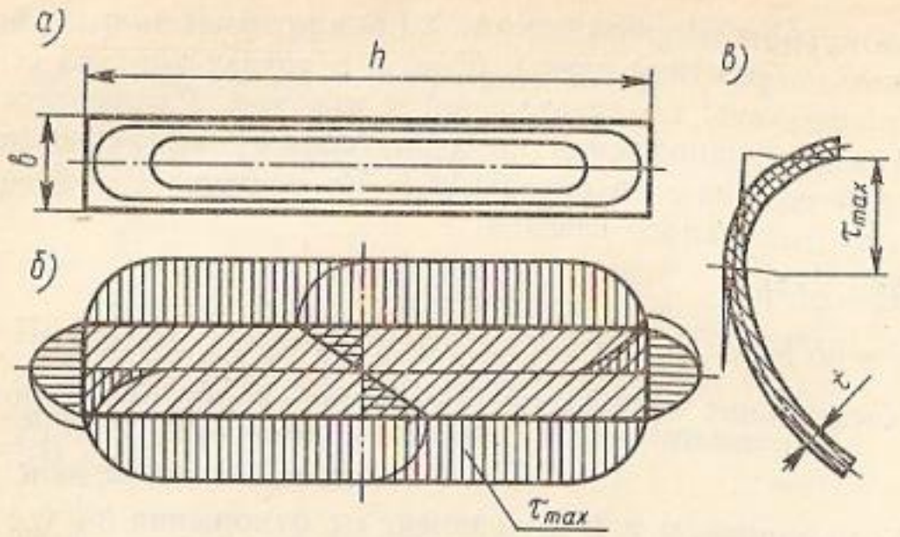


Рис. III.16

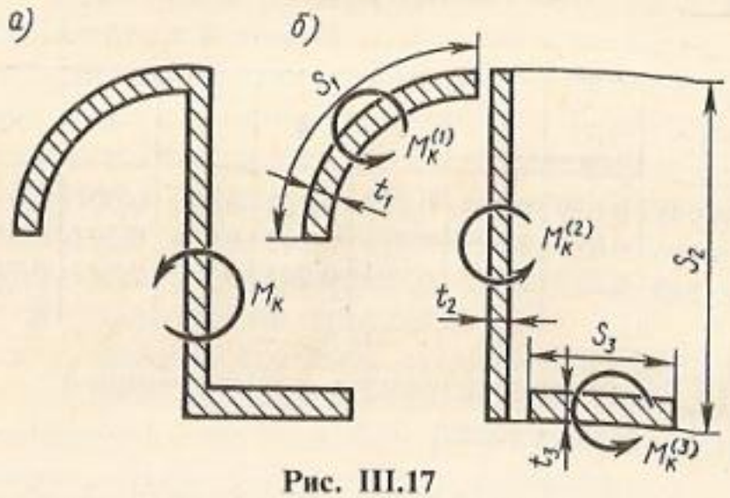


Рис. III.17

Сечение, состоящее из n полос (участков) разной толщины (рис. III.17, *а*) с $S_i/t_i \geqslant 10$, можно рассматривать как разъединенное (рис. III.17, *б*), в котором $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n$, так как все участки сечения должны поворачиваться на один угол. Если $M_к^{(i)}$ – часть крутящего момента, воспринимаемого i-м участком, то

$$M_к = M_к^{(1)} + M_к^{(2)} + \ldots + M_к^{(n)}. \qquad \text{(III.47)}$$

По (III.15)

$$\theta = \frac{M_к^{(1)}}{GI_к^{(1)}} = \frac{M_к^{(2)}}{GI_к^{(2)}} = \ldots = \frac{M_к^{(n)}}{GI_к^{(n)}}. \qquad \text{(III.48)}$$

Подставляя $M_к^{(i)}$ из (III.48) в (III.47), получим

$$M_к = \theta G \sum_{i=1}^{n} I_к^{(i)};\ M_к^{(i)} = \frac{M_к^{(i)} I_к^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} I_к^{(i)}};$$

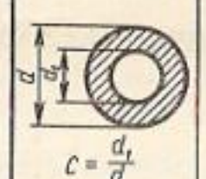
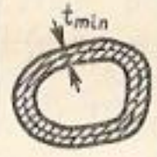
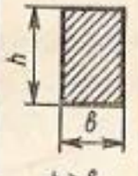
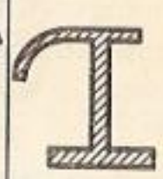
$$\tau_{max} = \left[\frac{M_к^{(i)}}{W_к^{(i)}}\right]_{max} = \frac{M_к t_{max}}{\sum_{i=1}^{n} I_к^{(i)}},$$

откуда $$W_к = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^3 S_i}{3t_{max}},$$

$$I_к = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} t_i^3 S_i.$$

Выражения $W_к$ и $I_к$ для рассмотренных форм сечений сведены в табл. 3.

Таблица 3

Форма сечения					
$W_к$	$0{,}2d^3(1-c^4)$	$2F_{ср} \cdot t_{min}$	$\alpha \cdot b^2 \cdot h$	$\frac{1}{3}t^2 S$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^3 S_i}{3t_{max}}$
$J_к$	$0{,}1d^4(1-c^4)$	$4F_{ср}^2 / \oint \frac{dS}{t}$	$\beta \cdot b^3 \cdot h$	$\frac{1}{3}t^3 S$	$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} t_i^3 S_i$

§ III.11. Результаты механических испытаний и расчеты на прочность и жесткость при кручении

На рис. III.18 изображен тонкостенный трубчатый образец, который при кручении будет испытывать чистый однородный сдвиг, так как распределение напряжений по толщине его сечений в силу тонкостенности можно считать равномерным. По результатам испытаний такого образца строится диаграмма кручения – график зависимости $M_к =$

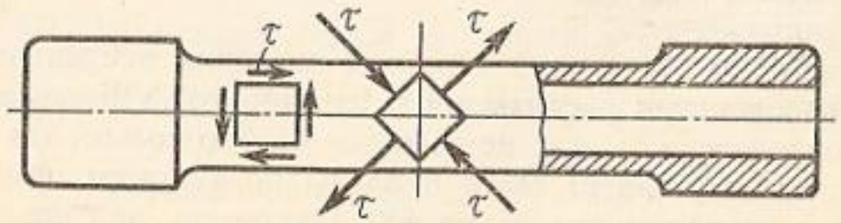


Рис. III.18

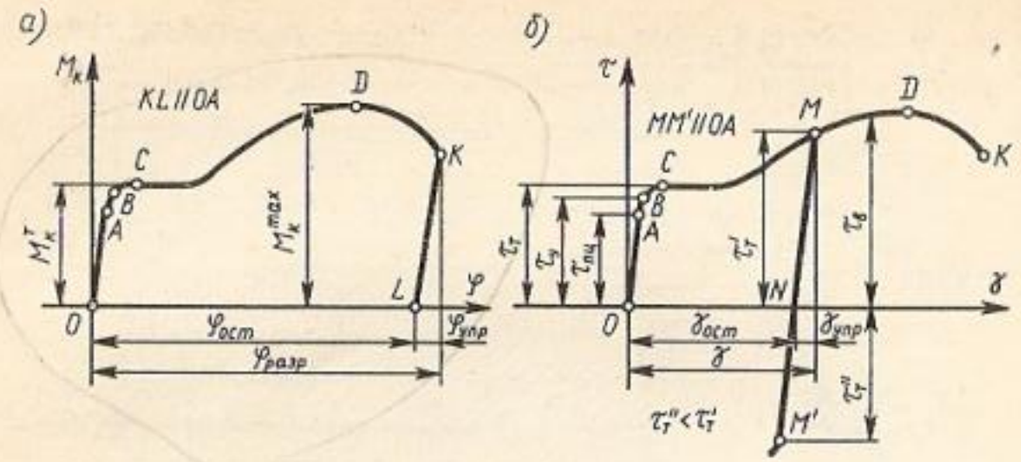


Рис. III.19

$= M_к(\varphi)$ (рис. III.19, *а*). По диаграмме кручения, в свою очередь, строится диаграмма напряжений при чистом сдвиге (характеристика материала при чистом сдвиге, диаграмма сдвига) – график зависимости $\tau = \tau(\gamma)$ (рис. III.19, *б*), в котором $\tau = \dfrac{M_к}{2\pi dt^2}$, а $\gamma = \dfrac{\varphi d}{2l}$. Все, что говорилось о диаграмме растяжения, а также о диаграмме напряжений и расчете на прочность при растяжении, можно перенести на чистый сдвиг, если заменить символы P, Δl, F, σ, ε, E, EF соответственно на $M_к$, φ, $W_к$, τ, γ, G, $GJ_к$, за исключением явлений уменьшения площади сечения и образования шейки, которые при кручении отсутствуют.

Условие прочности проектировочного расчета при кручении

$$|\tau_{max}|_{max} = \left|\frac{M_к}{W_к}\right|_{max} \leqslant \frac{\tau_{пр}}{[n]} = [\tau]. \qquad \text{(III.49)}$$

Условие прочности поверочного расчета при кручении

$$n = \frac{\tau_{пр}}{|\tau_{max}|_{max}} > 1. \qquad \text{(III.50)}$$

За $\tau_{пр}$ для пластичного материала принимается $\tau_т$ – предел текучести при сдвиге, а для хрупкого $\tau_в$ – предел прочности при сдвиге; $|\tau_{max}|_{max}$ – наибольшее по длине бруса касательное напряжение.

Если для материала известны значения предельных характеристик при растяжении и сжатии, то экспериментальное определение $\tau_т$ и $\tau_в$ не является необходимым, так как $\tau_т$ и $\tau_в$ для него могут быть найдены по теориям прочности (о теориях прочности см. гл. IX). Например, для пластичного материала, одинаково работающего на растяжение



Рис. III.20

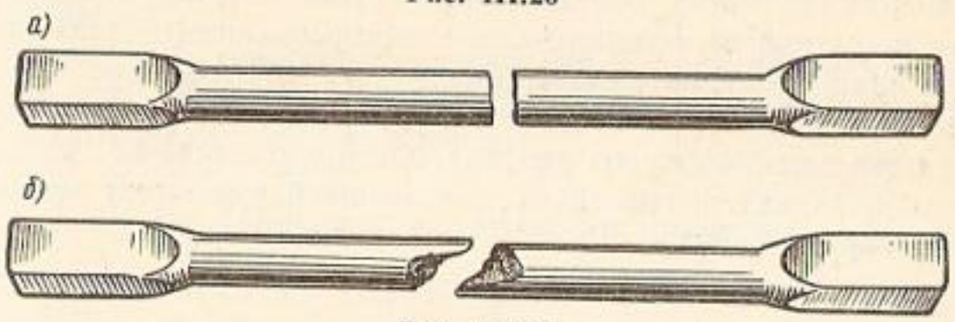


Рис. III.21

и сжатие,

$$\tau_т \cong 0{,}6\sigma_т. \qquad \text{(III.51)}$$

Изготовление тонкостенных образцов трудоемко и дорогостояще, поэтому они, как правило, используются в экспериментальных научно-исследовательских работах, а обычные механические испытания проводятся на сплошных образцах круглого поперечного сечения (рис. III.20).

Построение диаграммы сдвига по диаграмме кручения, полученной по результатам испытания такого образца, процедура более сложная, чем по диаграмме кручения, полученной на тонкостенном образце, вследствие неоднородности напряженного состояния в нем.

Образец из пластичного материала разрушается по поперечному сечению (рис. III.21, *а*) – сечению, в котором действует τ_{max}. Образец из хрупкого материала разрушается по винтовой поверхности, след которой составляет с образующей образца угол 45° (рис. III.21, *б*) – по поверхности, в которой действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Помимо расчета на прочность длинные брусья, работающие на кручение (валы), следует рассчитывать на жесткость по формуле

$$|\theta| = \left|\frac{180^\circ M_к}{\pi G J_к}\right| \leqslant [\theta]. \qquad \text{(III.52)}$$

В (III.52) $[\theta]$ – допускаемый погонный угол закручивания, равный: $[\theta] = 2^\circ \dfrac{1}{м}$ – при статической нагрузке, $[\theta] = 0{,}25^\circ \dfrac{1}{м}$ – переменной нагрузке, $[\theta] = 0{,}15^\circ \dfrac{1}{м}$ – при ударной нагрузке.

§ III.12. Рациональная форма поперечного сечения

Из всех сечений, имеющих одинаковый момент сопротивления кручению, рациональным будет сечение, обладающее наименьшей площадью, т. е. обеспечивающее наименьшее количество материала, идущее на изготовление бруса при заданном $M_к$, а следовательно, и его наименьший вес. Рациональность формы сечения обычно оценивают безразмерной характеристикой $\omega_к$, называемой **удельным моментом сопротивления**

$$\omega_к = \frac{W_к}{\sqrt{F^3}}. \qquad \text{(III.53)}$$

В табл. 4 даны значения $\omega_к$ для некоторых форм сечений.

Таблица 4

Сечение	[	I	$\frac{h}{2}=2$		$C=0,7$	$\frac{S}{t}=10$
$\omega_к$	0,04-0,05	0,05-0,07	0,18	0,21	0,37	1,16

Из этой таблицы видно, что при кручении наиболее рациональными будут тонкостенные замкнутые сечения, обладающие наибольшими значениями $\omega_к$, и нерациональными – тонкостенные разомкнутые.

§ III.13. Концентрация напряжений при кручении

На рис. III.22 изображены два источника концентрации напряжений при кручении: *а* – галтель (переход с одного диаметра вала на другой) и *б* – шпоночная канавка, а также

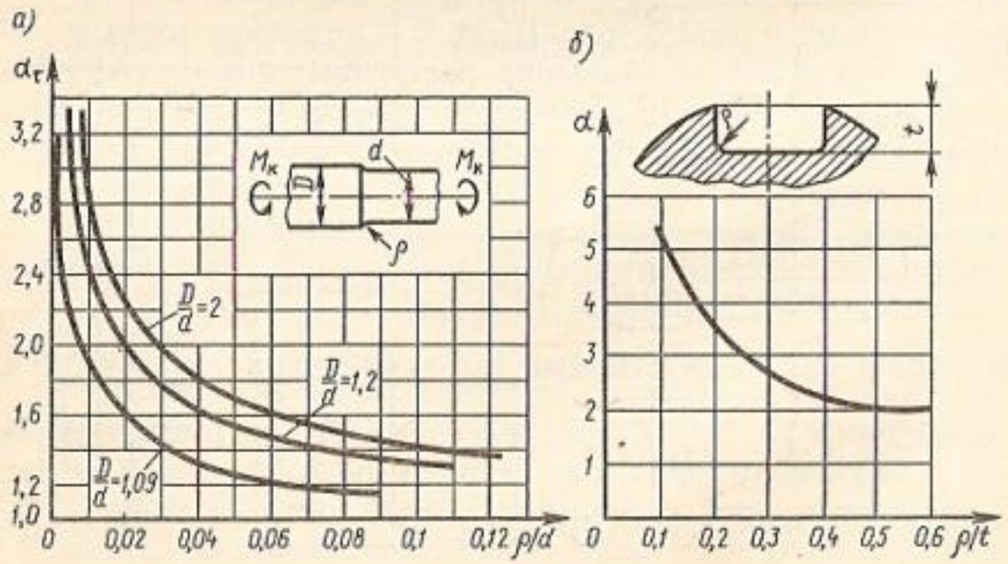


Рис. III.22

графики изменения α в зависимости от формы источника концентрации.

Из графиков видно, что с увеличением ρ значение α уменьшается.

Все, что говорилось о влиянии концентрации напряжений на прочность при статическом растяжении-сжатии, можно повторить для кручения.

§ III.14. Примеры расчетов на кручение

Пример III.1. Для стержня, заделанного концевыми сечениями (рис. III.23, *а*), построить эпюры $M_к$, τ_{max} и φ и определить его запас прочности, если $\tau_т$ – задан.

1. Заменяем действие опор на стержень реактивными парами с моментами M_0 и M_4 (рис. III.23, *б*). Для системы моментов пар, приложенных к стержню, можно составить одно независимое уравнение статики и, следовательно, стержень будет один раз статически неопределим, так как управление

$$\Sigma m_x = -M_0 + 2ml - ml + M_4 = 0 \quad \text{или} \quad M_4 = M_0 - ml$$

содержит два неизвестных момента пар M_0 и M_4.

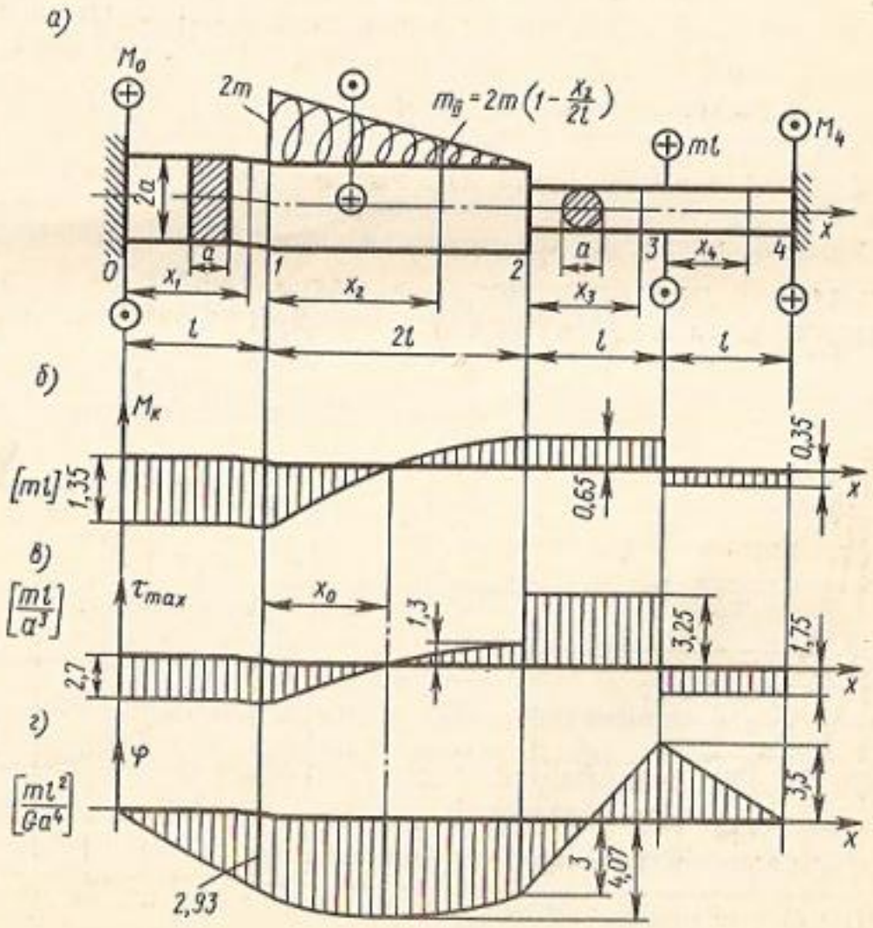


Рис. III.23

Составляем уравнения совместности перемещений в геометрической форме. Так как сечение *4* относительно сечения *O* не поворачивается,

$$\varphi_{4-0} = \varphi_{1-0} + \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} = 0.$$

Составляем уравнения крутящих моментов по участкам

$$M_к^{I} = -M_0;\ M_к^{II} = -M_0 + \left[2m + \frac{m}{l}\left(2l - x_2\right)\right]\frac{x_2}{2},$$

или

$$M_к^{II} = -M_0 + 2mx_2 - \frac{m}{2l}x_2^2;\ M_к^{III} = -M_0 + 2ml;\ M_к^{IV} =$$

$$= -M_0 + ml.$$

Воспользовавшись (III.16), выражаем относительные углы закручивания, входящие в уравнения совместности в геометрической форме, через крутящие моменты и жесткости на участках

$$\varphi_{1-0} = -\frac{M_0 l}{GI_к^{I}};\ \varphi_{2-1} = \frac{1}{GI_к^{I}}\int_0^{2l}\left(-M_0 + 2mx_2 - \frac{m}{2l}x_2^2\right)dx_2 =$$

$$= \frac{l}{GI_к^{I}}\left(-2M_0 + \frac{8}{3}ml\right);$$

$$\varphi_{3-2} = \frac{(-M_0 + 2ml)l}{GI_к^{III}};\ \varphi_{4-3} = \frac{(-M_0 + ml)l}{GI_к^{IV}}.$$

Составим уравнение совместности в физической форме

$$-\frac{M_0 l}{GI_к^{I}} + \frac{l}{GI_к^{I}}\left(-2M_0 + \frac{8}{3}ml\right) + \frac{(-M_0 + 2ml)l}{GI_к^{III}} +$$

$$+ \frac{(-M_0 + ml)l}{GI_к^{III}} = 0,$$

из которого

$$M_0 = \frac{8 + 9\dfrac{I_к^{I}}{I_к^{III}}}{9 + 6\dfrac{I_к^{I}}{I_к^{III}}}ml.$$

По (III.43) для прямоугольника $I_к^{I} = \beta b^3 h$, где для $h/b = 2$ из табл. 2 $\beta = 0{,}229$, следовательно,

$$I_к^{I} = 0{,}229a^3 \cdot 2a = 0{,}458a^4 \approx 0{,}46a^4.$$

По (III.26) для круга

$$I_к^{III} = 0{,}1a^4,$$

и отношение

$$\frac{I_к^{I}}{I_к^{III}} = 4{,}6.$$

Подставляя это отношение в выражение M_0, найдем

$$M_0 = \frac{8 + 9 \cdot 4{,}6}{9 + 6 \cdot 4{,}6}ml = 1{,}35ml.$$

Строим эпюр $M_к$ – график изменения крутящего момента в поперечных сечениях стержня в направлении его оси.

Подставив найденное значение M_0 в составленные ранее уравнения крутящих моментов, получим:

$$M_к^{I} = -1{,}35ml;\ M_к^{II} = ml\left(-1{,}35 + 2\frac{x_2}{l} - \frac{x_2^2}{2l^2}\right),\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2l;$$

$$M_к^{III} = 0{,}65ml;\ M_к^{IV} = -0{,}35ml.$$

По этим уравнениям на рис. III.23, *б* построен эпюр $M_к$.

Строим эпюр τ_{max} – график изменения максимального касательного напряжения в поперечных сечениях стержня в направлении его оси.

По (III.42) для прямоугольника $W_к = \alpha b^2 h$, где из табл. 3 $\alpha = 0{,}246$, следовательно,

$$W_к^{I} = 0{,}246a^2 \cdot 2a = 0{,}492a^3 \approx 0{,}5a^3.$$

По (III.25) для круга

$$W_к^{III} = 0{,}2a^3.$$

Основываясь на (III.13), составляем уравнения τ_{max} на участках стержня:

$$\tau_{max}^{I} = -\frac{1{,}35ml}{0{,}5a^3} \text{ или } \tau_{max}^{I} = -2{,}7\frac{ml}{a^3};$$

$$\tau_{max}^{II} = \frac{2ml}{a^3}\left(-1{,}35 + 2\frac{x_2}{l} - \frac{x_2^2}{2l^2}\right);$$

$$\tau_{max}^{III} = \frac{0{,}65ml}{0{,}2a^3} \text{ или } \tau_{max}^{III} = 3{,}25\frac{ml}{a^3};$$

$$\tau_{max}^{IV} = -\frac{0{,}35ml}{0{,}2a^3} \text{ или } \tau_{max}^{IV} = -1{,}75\frac{ml}{a^3}.$$

Эпюр τ_{max} построен на рис. III.23, *в*.

Строим эпюр φ – график углов закручивания поперечных сечений стержня относительно одного из них, принятого за неподвижное.

Пользуясь (III.16), составляем уравнения углов закручивания на участках, приняв за неподвижное нулевое сечение стержня:

$$\varphi_I = \frac{M_к^{I} x_1}{GI_к^{I}} = -\frac{1{,}35mlx_1}{G0{,}46a^4} = -2{,}93\frac{ml}{Ga^4}x_1,\ 0 \leqslant x_1 < l;$$

$$\varphi_{II} = \frac{ml}{GI_к^I}\int_0^{x_2}\left(-1{,}35 + 2\,\frac{x}{l} - \frac{x^2}{2l^2}\right)dx_2 - 2{,}93\frac{ml^2}{Ga^4} =$$

$$= \frac{ml^2}{0{,}46Ga^4}\left(-1{,}35\frac{x_2}{l} + \frac{x_2^2}{l^2} - \frac{x_2^3}{l^3}\right) - 2{,}93\frac{ml^2}{Ga^4},$$

или

$$\varphi_{II} = \frac{ml^2}{Ga^4}\left(-2{,}93 - 2{,}93\frac{x_2}{l} + 2{,}17\frac{x_2^2}{l^2} - 0{,}392\frac{x_2^3}{l^3}\right);$$

$$\varphi_2 = [\varphi_{II}]_{x_2 = 2l} = \frac{ml^2}{Ga^4}(-2{,}93 - 2{,}93\cdot 2 + 2{,}17\cdot 4 - 0{,}362\cdot 8) =$$

$$= -3\frac{ml^2}{Ga^4}.$$

Очертание φ_{II} на эпюре φ будет обращено выпуклостью вниз, так как тангенс угла наклона касательной на основании (III.14) будет пропорционален ординатам $M_к^{II}$, который на втором участке меняет знак с отрицательного на положительный. Значение x_0 найдем, приравняв $M_к^{II}$ нулю:

$$x_0^2 + 4lx_0 + 2{,}7l^2 = 0,$$

откуда

$$x_0 = (2 \pm 1{,}14)l.$$

Принимаем для x_0 его значение в пределах *II* участка:

$$x_0 = 0{,}86l.$$

Находим

$$\varphi_э = [\varphi_{II}]_{x_2 = x_0} = \frac{ml^2}{Ga^4}[-2{,}93 - 2{,}93\cdot 0{,}86 + 2{,}17\cdot(0{,}86)^2 -$$

$$- 0{,}362\cdot(0{,}86)^3] = -4{,}07\frac{ml^2}{Ga^4};$$

$$\varphi_{III} = \frac{ml^2}{Ga^4}\left(6{,}5\frac{x_3}{l} - 3\right),\ 0 \leqslant x_3 \leqslant l;\ \varphi_3 = 3{,}5\frac{ml^2}{Ga^4};$$

$$\varphi_{IV} = \frac{ml^2}{Ga^4}\left(3{,}5 - 3{,}5\frac{x_4}{l}\right),\ 0 \leqslant x_4 \leqslant l;\ \varphi_4 = 0,$$

что подтверждает правильность решения задачи.

Эпюр φ построен на рис. III.23, *г*.

2. Определяем запас прочности стержня.

По (III.50)

$$n = \frac{\tau_т}{|\tau_{max}|_{max}},\ |\tau_{max}|_{max} = 3{,}25\frac{ml}{a^3};\quad n = 0{,}308\frac{\tau_т a^3}{ml}.$$

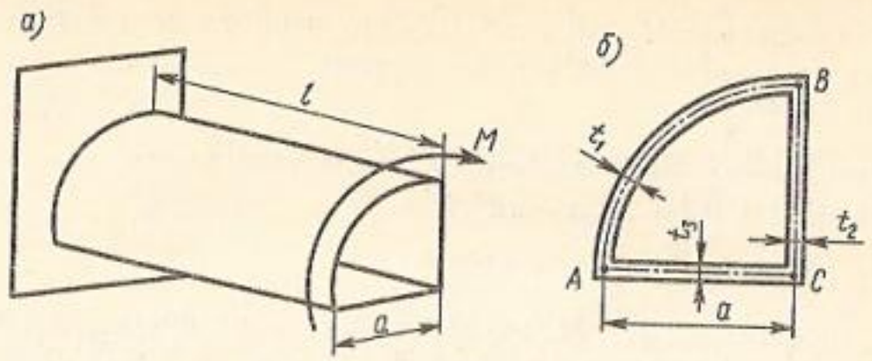


Рис. III.24

Пример III.2. Для стержня (рис. III.24, *а*) тонкостенного замкнутого сечения (рис. III.24, *б*) определить допускаемые значения момента скручивающей пары $[M]$ и угол закручивания концевого сечения при этом значении момента пары. Исходные данные: $l = 1$ м; $a = 30$ см; $t_3 = 2t_2 = 3t_1 = 3$ см; материал Ст 3, $[\tau] = 80$ МПа, $G = 8\cdot 10^4$ МПа.

1. Определяем $[M]$. По (III.49) : $[M] = [\tau]\,W_к$.

Из (III.31): $W_к = 2F_{ср}t_{min} = 2\dfrac{\pi a^2}{4}t_1 = \dfrac{3{,}14\cdot 900\cdot 1}{2} =$ $= 1{,}41\cdot 10^3$ см^3 и $[M] = 80\cdot 10^6\cdot 1{,}41\cdot 10^3\cdot 10^{-6} = 1{,}13\cdot 10^5$ Н·м.

По (III.16): $\varphi_c = \dfrac{[M]l}{GI_к}$, где $I_к = \dfrac{4F_{ср}^2}{\oint\dfrac{dS}{t}}$.

Из рис. III.24, *в*: $\oint\dfrac{dS}{t} = \dfrac{1}{t_1}\int\limits_{AB} dS + \dfrac{1}{t_2}\int\limits_{BC} dS + \dfrac{1}{t_3}\int\limits_{CA} dS = \dfrac{\pi a}{2t_1} +$ $+ \dfrac{a}{t_2} + \dfrac{a}{t_3} = 77{,}1,$

следовательно,

$$I_к = \frac{\pi^2 a^4}{4\cdot 77{,}1} = \frac{3{,}14\cdot 30^4}{4\cdot 77{,}1} = 2{,}59\cdot 10^4\ \text{см}^4;$$

$$\varphi_c = \frac{1{,}13\cdot 10^5\cdot 1}{8\cdot 10^{10}\cdot 2{,}59\cdot 10^{-4}} = 5{,}45\cdot 10^{-3}.$$

Пример III.3. Для стержней тонкостенного замкнутого (рис. III.25, *а*) и тонкостенного разомкнутого (рис. III.25, *б*) сечений найти отношение крутящих моментов, которые могут быть ими восприняты, и отношение углов закручивания при равных моментах скручивающих пар. Материалы стержней и их длины одинаковы.

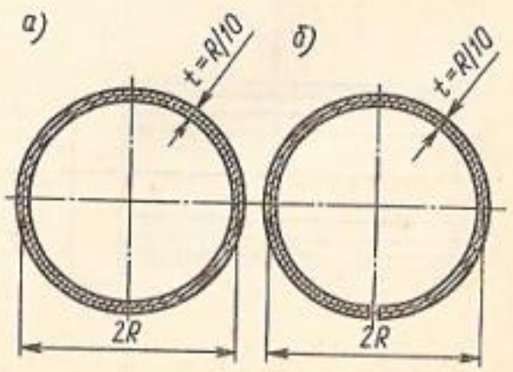


Рис. III.25

1. Определяем $M_к^{I}/M_к^{II}$, где $M_к^{I}$ – крутящий момент в стержне замкнутого сечения, а $M_к^{II}$ – разомкнутого.

По (III.49)

$M_к^{I} = [\tau] W_к^{I}$; $M_к^{II} = [\tau] W_к^{II}$; $M_к^{I}/M_к^{II} = W_к^{I}/W_к^{II}$.

По (III.31) $W_к^{I} = 2F_{ср}t = \pi R^3/5$.

По (III.45) $W_к^{II} = \frac{1}{3}t^2 S = \pi R^3/150$.

Следовательно, $M_к^{I}/M_к^{II} = 150/5 = 30$, т. е. прочность бруса тонкостенного разомкнутого сечения в 30 раз меньше, чем бруса такого же, но замкнутого сечения.

2. Определяем φ_{II}/φ_{I}, где φ_{I} – угол закручивания стержня замкнутого сечения, а φ_{II} – разомкнутого.

По (III.16) $\varphi_{II} = M_к l/(GI_к^{II})$, $\varphi_{I} = M_к l/(GI_к^{I})$ и $\varphi_{II}/\varphi_{I} = I_к^{I}/I_к^{II}$.

По (III.56) $I_к^{II} = \frac{1}{3}t^3 S = \pi R^4/1500$.

По (III.41) $I_к^{I} = \frac{4\pi^2 R^4 t}{4\pi R} = \pi R^4/5$.

Следовательно, $\varphi_{II}/\varphi_{I} = 1500/5 = 300$, т. е. жесткость бруса тонкостенного разомкнутого сечения в 300 раз меньше, чем тонкостенного замкнутого.

Из решения этой простой, но чрезвычайно поучительной задачи вытекает, что **сечения тонкостенных брусьев, работающих на кручение, следует делать замкнутыми.**

Пример III.4. Определить запас прочности узла (рис. III.26, *а*), считая диск A абсолютно твердым, а материалы бруса и трубки одинаковыми. Предел текучести материала при сдвиге – $\tau_т$.

Находим $M_к^{т}$ и $M_к^{б}$ – крутящие моменты, воспринимаемые соответственно трубкой и брусом.

Из условия равновесия диска (рис. III.26, *б*) $\Sigma m_x = M_к^{т} + M_к^{б} - M = 0$ и система один раз статически неопределима.

Диск A – абсолютно твердый, поэтому углы закручивания правых концевых сечений бруса и трубки равны и уравнение совместности в геометрической форме запишется в виде

$\varphi_б = \varphi_т$,

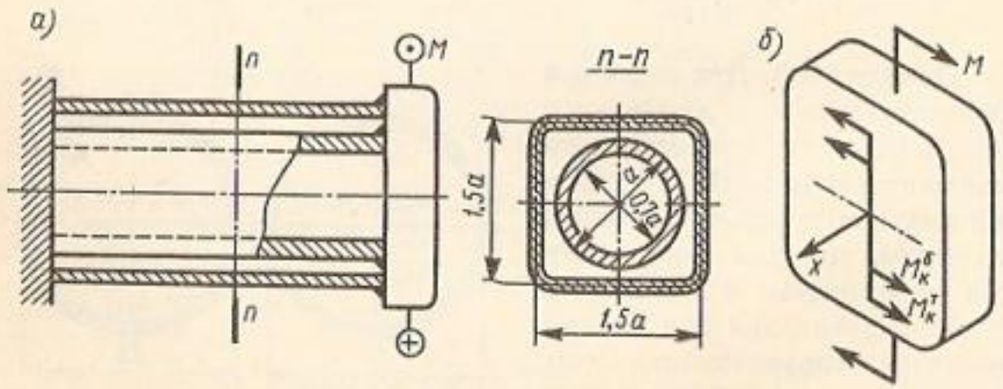


Рис. III.26

или в физической форме

$$\frac{M_к^{б} l}{GI_к^{б}} = \frac{M_к^{т} l}{GI_к^{т}}.$$

Подставляя в него $M_к^{б} = M - M_к^{т}$ из уравнения равновесия, получим

$$M_к^{I} = \frac{M}{1 + \frac{I_к^{б}}{I_к^{т}}}.$$

По (III.24) $I_к^{б} = 0{,}1d^4(1-c^4) = 0{,}1a^4(1-0{,}24) = 0{,}076a^4$.

По (III.41) $I_к^{т} = \frac{4F_{ср}^2}{\oint \frac{dS}{t}} = \frac{4\cdot(2{,}25)^2 a^4 a}{30\cdot 6a} = 0{,}113a^4$.

Находим $M_к^{т} = \frac{M}{1 + 0{,}076/0{,}113} = 0{,}6M$, $M_к^{б} = 0{,}4M$.

Напряжения $\tau_{max}^{т} = M_к^{т}/W_к^{т}$, $\tau_{max}^{б} = M_к^{б}/W_к^{б}$.

По (III.25) $W_к^{б} = 0{,}2d^3(1-c^4) = 0{,}2a^3(1-0{,}24) = 0{,}152a^3$.

По (III.31) $W_к^{т} = 2F_{ср}t = 2\cdot 2{,}25a^2 a/30 = 0{,}15a^3$.

Так как $M_к^{т} > M_к^{б}$, а $W_к^{т} < W_к^{б}$, то

$$|\tau_{max}|_{max} = \tau_{max}^{т} = \frac{0{,}6M}{0{,}15a^3} = 4\frac{M}{a^3}.$$

По (III.51) $n = \frac{\tau_т}{|\tau_{max}|_{max}} = 0{,}25\frac{\tau_т a^3}{M}$.

Глава IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ IV.1. Понятие о моментах сечения и зависимость между I_z, I_y и I_p

Под моментами сечения понимаются интегралы определенного вида, которым не следует придавать какого-либо физического смысла. Обращаясь к рис. IV.1, имеем:

$S_z = \int\int_F y dF$ и $S_y = \int\int_F z dF$ – статические моменты сечения относительно осей z и y соответственно;

$I_z = \int\int_F y^2 dF$ и $I_y = \int\int_F z^2 dF$ – осевые моменты инерции сечения относительно осей z и y соответственно;

$I_{zy} = \int\int_F zy dF$ – центробежный момент инерции сечения относительно осей z и y;

$I_p = \int\int_F \rho^2 dF$ – полярный момент инерции сечения относительно начала координат.

Моменты инерции I_z, I_y и I_p – всегда положительны и никогда не равняются нулю, а S_z, S_y и I_{zy} – могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Такие интегралы встречаются в последующих главах курса и с ними надо научиться оперировать.

Единицами статического момента и момента инерции сечения являются $см^3$ и $см^4$.

Зависимость между осевыми и полярными моментами инерции можно получить, если подставить в выражение I_p

$$\rho^2 = y^2 + z^2,$$

тогда

$$\int\int_F \rho^2 dF =$$

$$= \int\int_F y^2 dF + \int\int_F z^2 dF,$$

или

$$I_p = I_z + I_y. \qquad \text{(IV.1)}$$

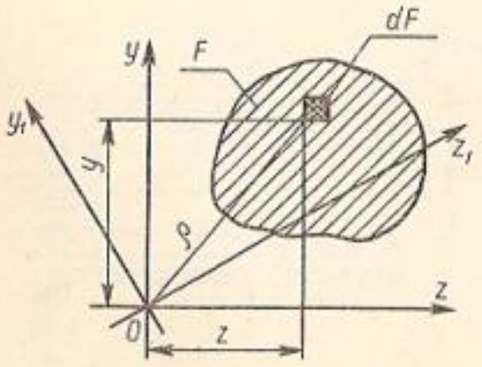


Рис. IV.1

Полярный момент инерции сечения относительно точки равен сумме его моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Следствие. **Сумма осевых моментов инерции сечения относительно любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через данную точку, есть величина постоянная:**

$$I_z + I_y = I_{z1} + I_{y1} = \text{const}. \qquad \text{(IV.2)}$$

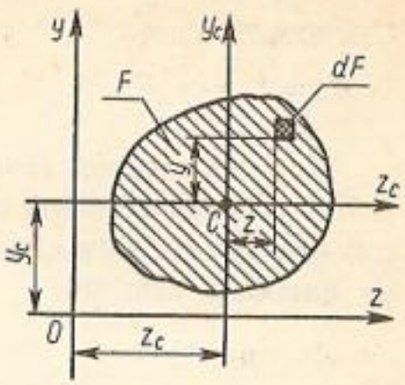


Рис. IV.2

§ IV.2. Понятие о центре тяжести сечения и свойство статического момента

Центром тяжести сечения называется точка (рис. IV.2), координаты которой определяются по формулам:

$$y_c = \frac{S_z}{F}, \quad z_c = \frac{S_y}{F}. \qquad \text{(IV.3)}$$

Понятию «центр тяжести» также не следует придавать физического смысла.

Если положение центра тяжести сечения известно, то из (IV.3)

$$S_y = z_c F, \quad S_z = y_c F. \qquad \text{(IV.4)}$$

Статический момент сечения относительно оси равняется его площади, умноженной на расстояние от центра тяжести сечения до этой оси.

Если ось y проходит через центр тяжести сечения, то $z_c = 0$ и $S_y = 0$.

Статический момент сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести (относительно центральной оси), равен нулю.

§ IV.3. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей (формулы параллельного переноса)

Из рис. IV.2

$$I_z = \int\int_F (y + y_c)^2 dF = \int\int_F y^2 dF + 2y_c \int\int_F y dF + y_c^2 \int\int_F dF, \quad \text{но}$$

$$\int\int_F y^2 dF = I_{z_c}, \quad \int\int_F y dF = S_{z_c} = 0, \quad \int\int_F dF = F.$$

Следовательно,

$$I_z = I_{z_c} + y_c^2 F. \qquad \text{(IV.5)}$$

Момент инерции сечения относительно оси равен его моменту инерции относительно центральной оси, параллельной ей, сложенному с произведением квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

Из рис. IV.2

$$I_{zy} = \int\int_F (z + z_c)(y + y_c)\, dF =$$

$$= \int\int_F zy dF + z_c \int\int_F y dF + y_c \int\int_F z dF + z_c y_c \int\int_F dF,$$

но

$$\int\int_F zy dF = I_{z_c y_c}, \quad \int\int_F z dF = S_{y_c} = 0.$$

Следовательно,

$$I_{zy} = I_{z_c y_c} + z_c y_c F. \qquad \text{(IV.6)}$$

Центробежный момент инерции сечения относительно перпендикулярных осей равняется центробежному моменту инерции относительно центральных осей, параллельных им, сложенному с произведением расстояний между осями на площадь сечения.

§ IV.4. Зависимости между моментами инерции относительно осей, проходящих через данную точку

Из аналитической геометрии известны формулы (рис. IV.3)

$$z_1 = z\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha,$$

в которых угол α отсчитывается от оси z в направлении против часовой стрелки. По определению,

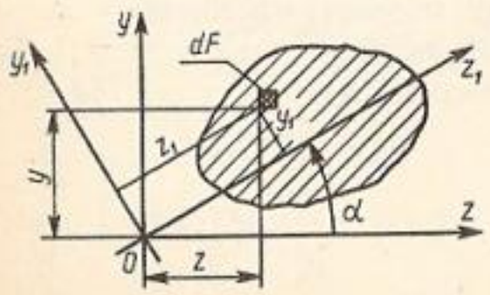


Рис. IV.3

$$I_{z_1} = \int\int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2\, dF =$$

$$= \cos^2\alpha \int\int_F y^2\, dF +$$

$$+ \sin^2\alpha \int\int_F z^2\, dF - I_{zy}\sin 2\alpha,$$

или

$$I_{z_1} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha. \qquad \text{(IV.7)}$$

По аналогии,

$$I_{y_1} = I_z\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha. \qquad \text{(IV.8)}$$

Для практического использования формулы (IV.7) и (IV.8) следует преобразовать

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha, \qquad \text{(IV.9)}$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha. \qquad \text{(IV.10)}$$

По определению,

$$I_{z_1 y_1} = \int\int_F (z\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - z\sin\alpha)\, dF =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha \int\int_F y^2 dF - \sin\alpha\cos\alpha \int\int_F z^2 dF +$$

$$+ \cos^2\alpha \int\int_F zy dF - \sin^2\alpha \int\int_F zy dF,$$

или

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha. \qquad \text{(IV.11)}$$

§ IV.5. Понятие о главных осях и главных моментах инерции. Определение положения главных осей и значений главных моментов инерции

Главными осями сечения, проходящими через данную точку, называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равняется нулю.

Главные оси иногда обозначаются цифрами *1* и *2*. Моменты инерции относительно главных осей называются главными. Главные моменты инерции иногда обозначают I_1 и I_2, причем $I_1 > I_2$.

Чтобы найти положения главных осей в данной точке O, выбирают в этой точке оси z и y (рис. IV.4), для которых I_z,

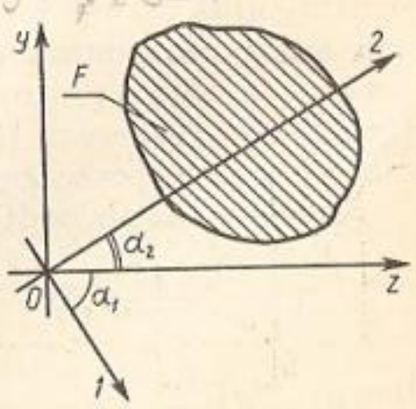


Рис. IV.4

I_y и I_{zy} определяются проще всего (как правило, по формулам параллельного переноса). Для определенности считаем, что $I_z > I_y$, $I_{zy} > 0$. Приравнивая $I_{z_1y_1}$ в формуле (IV.10) нулю, находим значения α_1 и α_2, определяющие соответственно положения первой и второй главных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \qquad \text{(IV.12)}$$

Тогда

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} + \frac{n\pi}{2},$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}$$

и

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} + \frac{\pi}{2},$$

причем при $I_z > I_y$, $I_{zy} > 0$ $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$. Из выражений для α_1 и α_2 заключаем, что главные оси взаимно перпендикулярны.

После определения α_1 и α_2 величины I_1 и I_2 находятся из (IV.9) по формуле

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha_{1,2} - I_{zy}\sin 2\alpha_{1,2}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Использование формул (IV.12) и (IV.13) для решения поставленной задачи содержит два недостатка: во-первых, по (IV.12) определяется не $\operatorname{tg}\alpha_{1,2}$, а $\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}$, по которому углы α_1 и α_2 без предварительного определения их градусной меры построить нельзя; во-вторых, в (IV.13) входят $\cos 2\alpha_{1,2}$ и $\sin 2\alpha_{1,2}$, которые надо предварительно найти. Преобразуем формулы (IV.12) и (IV.13) так, чтобы они были свободны от перечисленных недостатков.

Запишем формулы (IV.9), (IV.10) и (IV.11) в виде:

$$I_{z_1,y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + R\left(\frac{I_z - I_y}{2R}\cos 2\alpha - \frac{I_{zy}}{R}\sin 2\alpha\right);$$

$$I_{z_1y_1} = R\left(\frac{I_z - I_y}{2R}\cos 2\alpha - \frac{I_{zy}}{R}\sin 2\alpha\right),$$

где $R = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$.

Можем обозначить

$$\frac{I_z - I_y}{2R} = \cos\varphi, \quad \frac{I_{zy}}{R} = \sin\varphi,$$

так как

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Получим:

$$I_{z_1,y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + R\cos(2\alpha + \varphi); \qquad \text{(IV.14)}$$

$$I_{z_1y_1} = R\sin(2\alpha + \varphi). \qquad \text{(IV.15)}$$

Чтобы оси z_1 и y_1 стали главными, $I_{z_1y_1}$ из (IV.15) должен стать равным нулю, или

$$\sin(2\alpha + \varphi) = 0, \quad \cos(2\alpha + \varphi) = 1.$$

Следовательно, из (IV.14)

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_z + I_y \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}). \qquad \text{(IV.16)}$$

После того как по формуле (IV.16) будут найдены значения I_1 и I_2, определяются положения главных осей.

По известной из тригонометрии формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_{1,2}}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha_{1,2}}. \qquad \text{(IV.17)}$$

Приравняв выражения $\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}$ из (IV.12) и (IV.17), получим

$$\frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_{1,2}}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha_{1,2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha_{1,2} - \frac{I_z - I_y}{I_{zy}}\operatorname{tg}\alpha_{1,2} - 1 = 0. \qquad \text{(IV.18)}$$

Решая квадратное уравнение (IV.18) и помня, что $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}(I_z - I_y \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2})}{I_{zy}}. \qquad \text{(IV.19)}$$

Преобразуем (IV.19) к виду

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{I_z-\frac{1}{2}(I_z+I_y\pm\sqrt{(I_z-I_y)^2+4I_{zy}^2})}{I_{zy}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{I_z-I_{1,2}}{I_{zy}}. \qquad \text{(IV.20)}$$

§ IV.6. Свойство моментов инерции относительно главных осей

Найдем значение α, при котором I_{z_1} и I_{y_1} достигают экстремальных значений. Для этого продифференцируем I_{z_1} из (IV.7) по α и производную приравняем нулю:

$$\frac{dI_{z_1}}{d\alpha}=-I_z 2\sin\alpha\cos\alpha+I_y 2\sin\alpha\cos\alpha-I_{zy}2\cos 2\alpha=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2I_{zy}}{I_y-I_z}. \qquad \text{(IV.21)}$$

Значения α из формул (IV.12) и (IV.21) совпадают. Следовательно, моменты инерции относительно главных осей достигают экстремальных значений, т. е. главный момент инерции I_1 есть наибольший из всех моментов инерции относительно осей, проходящих через данную точку, а I_2 – наименьший.

Таким образом,

$$I_{1,2}=I_{\substack{\max\\\min}}.$$

§ IV.7. Свойство моментов инерции сечения относительно осей, из которых одна – его ось симметрии

Пусть ось y (рис. IV.5) будет осью симметрии сечения, а ось z ей перпендикулярна. В силу симметрии каждой площадке с положительным произведением координат справа будет соответствовать площадка с таким же, но отрицательным произведением координат слева, и поэтому

$$I_{zy}=\int_F\int zy\,dF=0.$$

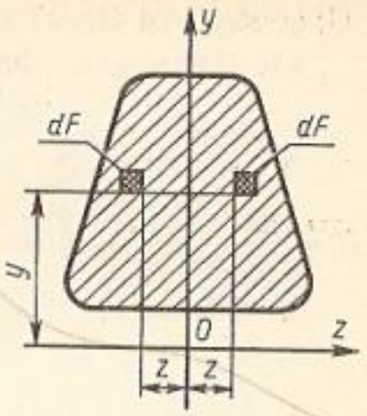


Рис. IV.5

Следовательно, **ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, есть главные оси сечения.**

§ IV.8. Свойство моментов инерции правильных фигур относительно центральных осей

Для правильных фигур (рис. IV.6) $I_{zy}=0$, а $I_z=I_y$. Для квадрата последнее равенство очевидно, так как он одинаково расположен относительно осей z и y. Для остальных фигур это можно доказать следующим образом: в правильной фигуре всегда найдется ось z_1, относительно которой она будет расположена так же, как относительно оси z, и поэтому $I_{z_1}=I_y$. Но из (IV.7)

$$I_{z_1}=I_z\cos^2\alpha_1+I_y\sin^2\alpha_1,$$

или

$$I_z(1-\cos^2\alpha_1)=I_y\sin^2\alpha_1,$$

откуда $I_z=I_y$;

$$I_u=I_z\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

или

$$I_u=I'_z.$$

Моменты инерции правильных фигур относительно центральных осей равны и любые взаимно перпендикулярные центральные оси будут главными.

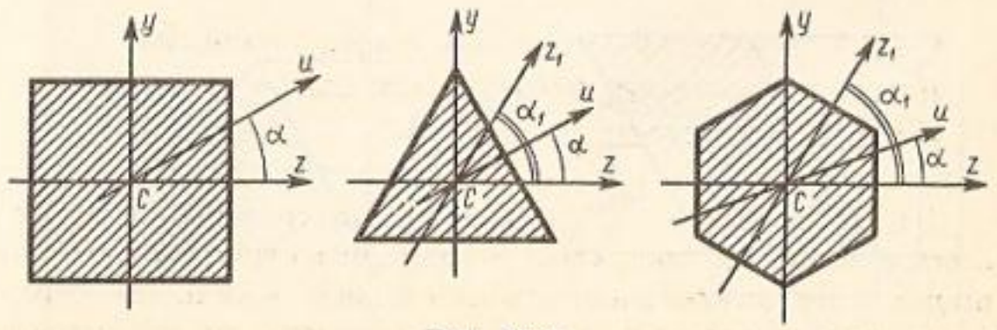


Рис. IV.6

§ IV.9. Геометрические характеристики некоторых элементарных фигур

1. **Кольцо** (рис. IV.7).

По (IV.1) $I_p = I_z + I_y$, но для кольца $I_z = I_y$, а из § III.6 $I_p = \frac{\pi d^4}{32}(1-c^4)$, поэтому

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}(1-c^4) \approx 0{,}05\pi d^4(1-c^4). \qquad \text{(IV.22)}$$

2. **Параллелограмм** (рис. IV.8).

По определению, $I_z = \iint\limits_F y^2 dF$, но $dF = bdy$,

$$I_z = b\int\limits_0^h y^2 dF = \frac{bh^3}{3},$$

поэтому по (IV.5)

$$I_{z_c} = I_z - \frac{h^2}{4}F = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{12}. \qquad \text{(IV.23)}$$

3. **Треугольник** (рис. IV.9):

$$I_z = \iint\limits_F y^2 dF, \text{ но } dF = b(y)dy = b\frac{h-y}{h}dy;$$

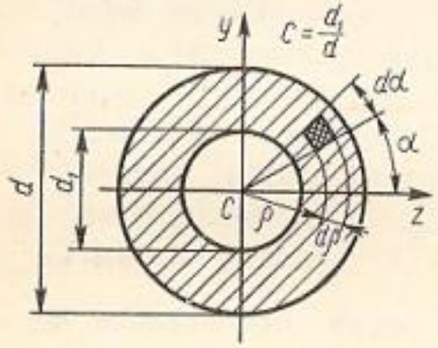


Рис. IV.7

$$I_z = \frac{b}{h}\int\limits_0^h y^2(h-y)dy = \frac{bh^3}{12}; \qquad \text{(IV.24)}$$

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9}\cdot\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \qquad \text{(IV.25)}$$

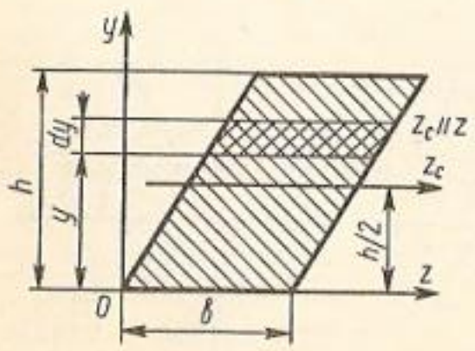


Рис. IV.8

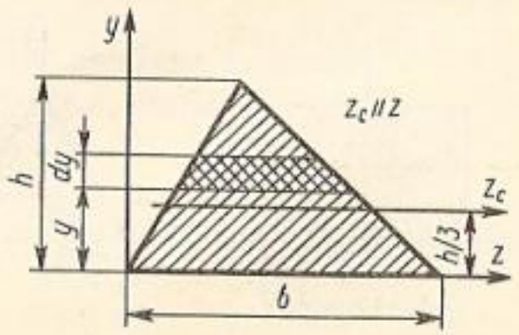


Рис. IV.9

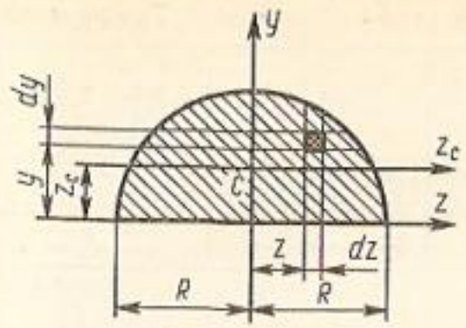


Рис. IV.10

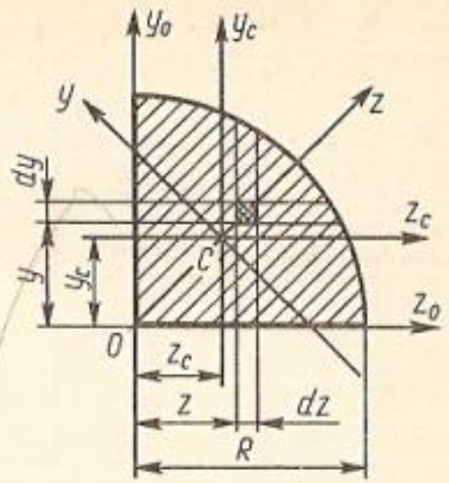


Рис. IV.11

4. **Полукруг** (рис. IV.10):

$$y_c = \frac{\bar{S}_z}{F};$$

$$S_z = \iint\limits_F y dF = 2\int\limits_0^R dz \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} y dy = \frac{2}{3}R^3;$$

$$y_c = \frac{2R^3 2}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R; \qquad \text{(IV.26)}$$

$$I_z = I_y = \frac{I_z^{\text{к}}}{2} = \frac{\pi R^4}{8} \approx 0{,}393R^4; \qquad \text{(IV.27)}$$

$$I_{z_c} = I_z - y_c^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{16R^2}{9\pi^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2} \approx 0{,}11R^4. \qquad \text{(IV.28)}$$

5. **Четверть круга** (рис. IV.11):

$$z_c = y_c = \frac{S_{z_c}}{F} = \frac{S_{z_c}^{\text{пк}}}{F^{\text{пк}}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R; \qquad \text{(IV.29)}$$

$$I_{z_c} = I_{y_c} = \frac{I_{z_c}^{\text{пк}}}{2} \approx 0{,}055R^4; \qquad \text{(IV.30)}$$

$$I_{z_0y_0} = \iint\limits_F zy dF = \int\limits_0^R z dz \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} y\,dy = \frac{R^4}{8};$$

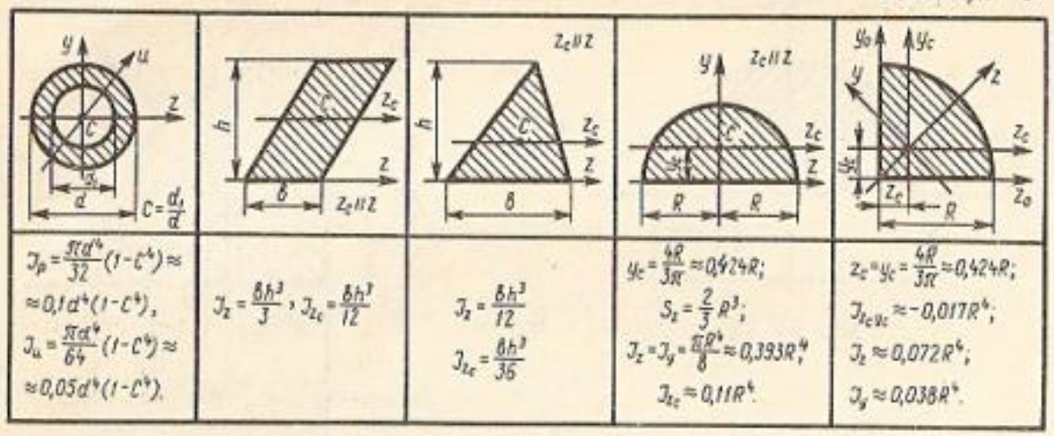
$$I_{z_cy_c} = I_{z_0y_0} - y_c z_c F = \frac{R^4}{8} - \frac{16R^2}{9\pi^2}\cdot\frac{\pi R^2}{4} \approx -0{,}017R^4. \qquad \text{(IV.31)}$$

Из (IV.6) при $\alpha = 45°$:

$$I_z = I_{z_c} - I_{z_cy_c} \approx 0{,}072R^4; \qquad \text{(IV.32)}$$

$$I_y = I_{y_c} + I_{z_cy_c} \approx 0{,}038R^4. \qquad \text{(IV.33)}$$

Таблица 5



$J_p=\frac{\pi d^4}{32}(1-c^4)\approx$ $\approx 0{,}1d^4(1-c^4)$, $J_u=\frac{\pi d^4}{64}(1-c^4)\approx$ $\approx 0{,}05d^4(1-c^4)$.	$J_z=\frac{bh^3}{3}$, $J_{z_c}=\frac{bh^3}{12}$	$J_z=\frac{bh^3}{12}$ $J_{z_c}=\frac{bh^3}{36}$	$y_c=\frac{4R}{3\pi}\approx 0{,}424R$; $S_z=\frac{2}{3}R^3$; $J_z=J_y=\frac{\pi R^4}{8}\approx 0{,}393R^4$; $J_{z_c}\approx 0{,}11R^4$.	$z_c=y_c=\frac{4R}{3\pi}\approx 0{,}424R$; $J_{z_cy_c}\approx -0{,}017R^4$; $J_z\approx 0{,}072R^4$; $J_y\approx 0{,}038R^4$.

Найденные геометрические характеристики элементарных фигур сведены в табл. 5.

§IV.10. Типовые примеры на определение геометрических характеристик плоских сечений

Все примеры этого параграфа решаются в условии: определить положение центра тяжести сечения, определить значения главных центральных моментов инерции, найти положение главных центральных осей.

Пример IV.1 (рис. IV.12).

1. Определяем положение центра тяжести сечения.

Центр тяжести сечения, имеющего ось симметрии, лежит на этой оси. Действительно, для сечения (рис. IV.12) z – ось симметрии, поэтому $S_z = 0$ и из (IV.3) $y_c = 0$.

Считаем, что сечение состоит из квадрата I и треугольника II. Через центр тяжести квадрата (точка C_1) и центр тяжести треугольника (точка C_2) проводим оси y_1 и y_2, перпендикулярные оси z.

Из (IV.3) $z_c = S_{y_1}/F$. По свойству интеграла

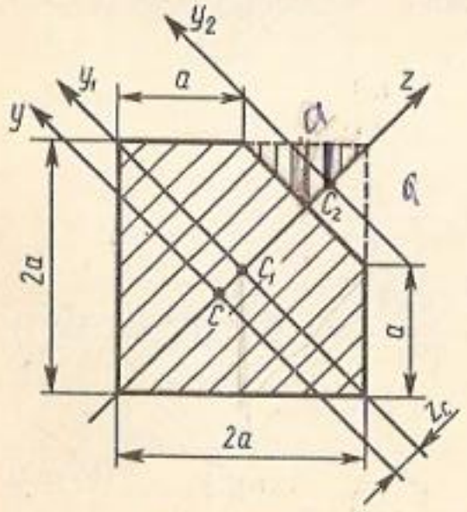


Рис. IV.12

$$S_{y_1} = S^{\mathrm{I}}_{y_1} - S^{\mathrm{II}}_{y_1}.$$

Из (IV.4) $S^{\mathrm{I}}_{y_1} = 0$, так как ось y_1 проходит через центр тяжести квадрата, а

$$S^{\mathrm{II}}_{y_1} = F^{\mathrm{II}} \cdot |C_1C_2| = \frac{a^2}{2}\left(a\sqrt{2} - \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

Следовательно, $S_{y_1} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = -\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Площадь сечения $F = F^{\mathrm{I}} - F^{\mathrm{II}} = 4a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{7}{2}a^2$.

Координата центра тяжести фигуры, отсчитываемая от оси y_1:

$$z_c = -\frac{2\sqrt{2}}{21}a \approx -0{,}134a.$$

2. Если сечение имеет ось симметрии, то положение его главных центральных осей находится без труда после определения положения центра тяжести из § IV.7. Оси z и y – главные центральные, так как ось z – ось симметрии, а ось y ей перпендикулярна и проходит через центр тяжести сечения.

3. Определяем значения главных центральных моментов инерции.

По свойству интеграла

$$I_z = I^{\mathrm{I}}_z - 2I^{\mathrm{III}}_z,$$

где I^{III}_z – момент инерции вертикально заштрихованного треугольника, для которого ось z проходит через основание.

По (IV.23), учитывая сказанное в § IV.11,

$$I^{\mathrm{I}}_z = \frac{2a \cdot 8a^3}{12} = \frac{4}{3}a^4.$$

По (IV.24)

$$I^{\mathrm{III}}_z = \frac{a\sqrt{2}\,a^3 2\sqrt{2}}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{1}{48}a^4.$$

Следовательно,

$$I_y = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{48}\right)a^4 = \frac{31}{24}a^4 \approx 1{,}89a^4.$$

По свойству интеграла

$$I_y = I^{\mathrm{I}}_y - I^{\mathrm{II}}_y.$$

По (IV.5)

$$I^{\mathrm{I}}_y = I^{\mathrm{I}}_{y_1} + z_c^2 F^{\mathrm{I}} = \frac{4}{3}a^4 + \frac{8}{441}a^2 \cdot 4a^2 = \frac{620}{441}a^4,$$

$$I^{\mathrm{II}}_y = I^{\mathrm{II}}_{y_2} + |C_2C|^2 \cdot F^{\mathrm{II}}.$$

По (IV.26)

$$I^{\mathrm{II}}_{y_2} = \frac{a\sqrt{2}\,a^3 \cdot 2\sqrt{2}}{8 \cdot 36} = \frac{1}{72}a^4.$$

Из рис. IV.12

$$|C_2C| = |C_1C_2| + z_c = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{21}\right)a = \frac{16\sqrt{2}}{21}a.$$

Следовательно,

$$I_y = \left(\frac{620}{441} - \frac{1}{72} - \frac{256\cdot 2}{441}\cdot\frac{1}{2}\right)a^4 \approx 0{,}815a^4.$$

Пример IV.2 (рис. IV.13).

Разбиваем сечение на полукруг *I* и треугольник *II*. Через центр тяжести полукруга и треугольника проводим оси z_1 и y_1, z_2 и y_2, относительно которых нам известны осевые моменты инерции этих элементарных фигур (см. табл. 5).

1. Положение центра тяжести сечения удобно определять относительно осей, проходящих через центр тяжести одной из составляющих его (элементарных) фигур, например относительно осей z_2 и y_2.

Тогда из (IV.2):

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{F};\ y_c = \frac{S_{z_1}}{F}.$$

Находим:

$$S_{y_1} = S_{y_1}^{\mathrm{I}} + S_{y_1}^{\mathrm{II}} = 0 + a^2\frac{2}{3}a = 0{,}667a^3;$$

$$S_{z_1} = S_{z_1}^{\mathrm{I}} + S_{z_1}^{\mathrm{II}} = 0 - a^2(0{,}424 + 0{,}667) = -1{,}09a^3;$$

$$F = F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}} = 1{,}57a^2 + a^2 = 2{,}57a^2;$$

$$z_c = \frac{0{,}667}{2{,}57}a = 0{,}259a,\ y_c = -\frac{1{,}09}{2{,}57}a = -0{,}425a.$$

2. Определяем значения главных центральных моментов инерции сечения. Через центр тяжести сечения (точку *C*) проводим оси *z* и *y*, соответственно параллельные осям с индексами *1* и *2*. Чтобы определить по (IV.16) значения главных моментов инерции сечения, надо найти его I_z, I_y и I_{zy}.

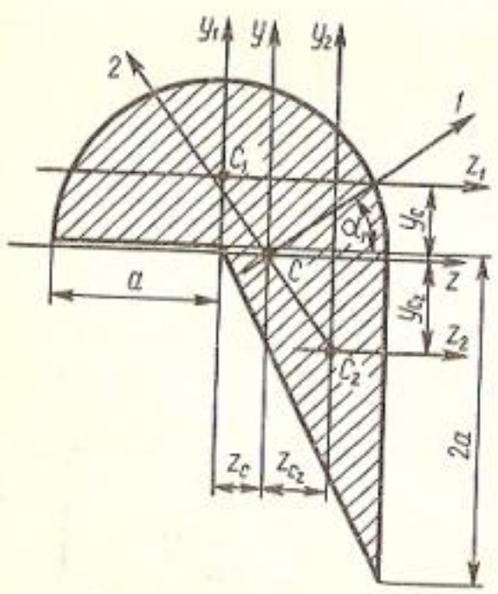


Рис. IV.13

По свойству интеграла и формуле (IV.5)

$$I_z = I_z^{\mathrm{I}} + I_z^{\mathrm{II}} =$$

$$= I_{z_1}^{\mathrm{I}} + y_c^2F^{\mathrm{I}} + I_{z_2}^{\mathrm{II}} + y_{c_2}^2F^{\mathrm{II}};$$

$$I_y = I_y^{\mathrm{I}} + I_y^{\mathrm{II}} =$$

$$= I_{y_1}^{\mathrm{I}} + z_c^2F^{\mathrm{I}} + I_{y_2}^{\mathrm{II}} + z_{c_2}^2F^{\mathrm{II}}.$$

Из табл. 5:

$$I_{z_1}^{\mathrm{I}} = 0{,}11a^4;\ I_{y_1}^{\mathrm{I}} = 0{,}393a^4;$$

$$I_{z_2}^{\mathrm{II}} = \frac{a\cdot 8a^3}{36} = 0{,}222a^4;$$

$$I_{y_2}^{\mathrm{II}} = \frac{2a\cdot a^3}{36} = 0{,}0556a^4.$$

Из рис. IV.13:

$$y_{c_2} = 0{,}424a + 0{,}667a - 0{,}425a = 0{,}666a;$$

$$z_{c_2} = 0{,}667a - 0{,}259a = 0{,}408a.$$

Находим:

$$I_z = (0{,}11 + 0{,}425^2\cdot 1{,}57 + 0{,}222 + 0{,}666^2\cdot 1) = 1{,}06a^4;$$

$$I_y = (0{,}393 + 0{,}259^2\cdot 1{,}57 + 0{,}0556 + 0{,}408^2\cdot 1) = 0{,}721a^4.$$

По свойству интеграла и формуле (IV.6):

$$I_{zy} = I_{zy}^{\mathrm{I}} + I_{zy}^{\mathrm{II}} = I_{z_1y_1}^{\mathrm{I}} + z_cy_cF^{\mathrm{I}} + I_{z_2y_2}^{\mathrm{II}} + z_{c_2}y_{c_2}F^{\mathrm{II}}.$$

Из § IV.7 $I_{z_1y_1}^{\mathrm{I}} = 0$, так как y – ось симметрии полукруга и оси z_1 и y_1 для него главные.

Определяем $I_{z_2y_2}^{\mathrm{II}}$.

По определению, центробежный момент инерции прямоугольного треугольника (рис. IV.14):

$$I_{z_0y_0} = \iint\limits_F zy\,dF = \int\limits_0^b z\,dz\int\limits_0^{h(1-z/b)} y\,dy = \frac{b^2h^2}{24}.$$

По (IV.6)

$$I_{zy} = I_{z_0y_0} - \frac{b}{3}\cdot\frac{h}{3}F = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{18}\right)b^2h^2 = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

Если оси *z* и *y* направлены от катетов (к катетам), то $I_{zy} < 0$; если же одна из этих осей направлена к катету, а другая от катета, то $I_{zy} > 0$.

Координаты центра тяжести полукруга и треугольника в осях *z* и *y* имеют разные знаки, поэтому их произведения отрицательны. Находим

$$I_{zy} = \left(0 - 0{,}425\cdot 0{,}259\cdot 1{,}57 - \frac{1\cdot 4}{72} - 0{,}666\cdot 0{,}408\right)a^4 = -0{,}5a^4.$$

По (IV.16)

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(1{,}06 +$$

$$+ 0{,}721 \pm \sqrt{(1{,}06 - 0{,}721)^2 + 4\cdot 0{,}25})a^4,$$

откуда

$$I_1 = 1{,}42a^4,\ I_2 = 0{,}363a^4.$$

Воспользовавшись (IV.2), проверяем правильность определения I_1 и I_2. Находим

$$I_1 + I_2 = (1{,}42 + 0{,}363)a^4 = 1{,}78a^4,$$

$$I_z + I_y = (1{,}06 + 0{,}721)a^4 = 1{,}78a^4.$$

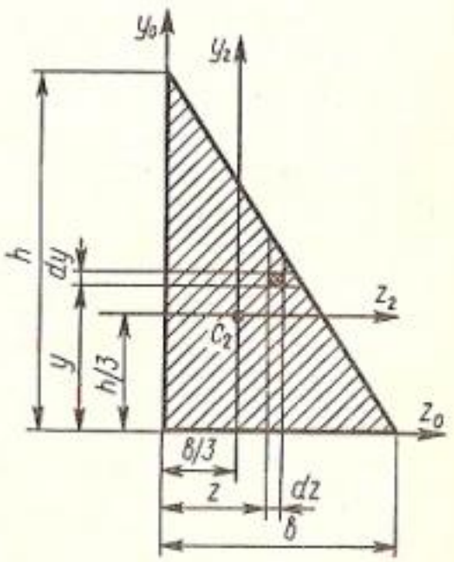


Рис. IV.14

Следовательно, I_1 и I_2 определены верно, если I_z, I_y и I_{zy} определены верно, так как

$$I_1 + I_2 = I_z + I_y.$$

3. Определяем положение главных центральных осей сечения. По (IV.19)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = (1{,}06 - 1{,}42)/(-0{,}5) = 0{,}72.$$

Главные центральные оси построены на рис. IV.13.

Пример IV.3 (рис. IV.15). Сечение состоит из швеллера № 20 и равнобокого уголка № 12,5 ($125 \times 125 \times 10$).

По ГОСТ 8509–72 выписываем необходимые геометрические характеристики этих фигур:

$I_{z_1}^{\Gamma} = I_{y_1}^{\Gamma} = 360$ см^4, $I_{z_0}^{\Gamma} = 571$ см^4, $F^{\Gamma} = 24{,}3$ см^2, $z_0^{\Gamma} = 3{,}45$ см;
$I_{z_2}^{]} = 1520$ см^4, $I_{y_2}^{]} = 113$ см^4, $F^{]} = 23{,}4$ см^2, $z_0^{]} = 2{,}07$ см.

1. Определяем координаты центра тяжести сечения:

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{S_{y_1}^{\Gamma} + S_{y_1}^{]}}{F^{\Gamma} + F^{]}} = \frac{0 - (z_0^{\Gamma} + z_0^{]})F^{]}}{F^{\Gamma} + F^{]}} = -\frac{(3{,}45 + 2{,}07)23{,}4}{24{,}3 + 23{,}4} =$$

$$= -2{,}71 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{S_{z_1}^{\Gamma} + S_{z_1}^{]}}{F^{\Gamma} + F^{]}} = \frac{0 - (h/2 - z_0^{\Gamma})F^{]}}{F^{\Gamma} + F^{]}} = -\frac{(10 - 3{,}45)23{,}4}{24{,}3 + 23{,}4} =$$

$$= -3{,}21 \text{ см}.$$

2. Определяем значения главных центральных моментов инерции. Находим: $y_{c_2} = 10 - 3{,}45 - 3{,}21 = 3{,}34$ см, $z_{c_2} = 3{,}45 + 2{,}07 - 2{,}71 = 2{,}81$ см;

$$I_z = I_z^{\Gamma} + I_z^{]} = I_{z_1}^{\Gamma} + y_c^2 F^{\Gamma} + I_{z_2}^{]} + y_{c_2}^2 F^{]} =$$

$$= 360 + 3{,}21^2 \cdot 24{,}3 + 1520 + 3{,}24^2 \cdot 23{,}4 = 2390 \text{ см}^4;$$

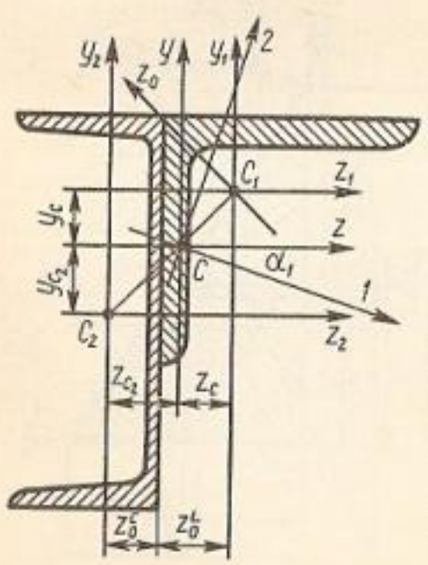


Рис. IV.15

$$I_y = I_y^{\Gamma} + I_y^{]} = I_{y_1}^{\Gamma} + z_c^2 F^{\Gamma} + I_{y_2}^{]} + z_{c_2}^2 F^{]} = 360 + 2{,}71^2 \cdot 24{,}3 +$$

$$+ 113 + 2{,}81^2 \cdot 23{,}4 = 837 \text{ см}^4,$$

$$I_{zy} = I_{zy}^{\Gamma} + I_{zy}^{]} =$$

$$= I_{z_1 y_1}^{\Gamma} + z_0 y_0 F^{\Gamma} + I_{z_2 y_2}^{]} + z_{c_2} y_{c_2} F^{]}.$$

Находим $I_{z_1 y_1}^{\Gamma}$ по способу третьей оси, который состоит в том, что если известны моменты инерции относительно трех осей, проходящих через данную точку, можно определить момент инерции относительно любой оси (осей), проходящей через эту точку. По (IV.2) при $\alpha = 135°$:

$$I_{z_0}^{\Gamma} = I_{z_1}^{\Gamma} + I_{z_1 y_1}^{\Gamma},$$

или

$$I_{z_1 y_1}^{\Gamma} = 571 - 360 = 211 \text{ см}^4.$$

Подсчитываем:

$$I_{zy} = 211 + 2{,}71 \cdot 3{,}21 \cdot 24{,}3 + 0 + 2{,}81 \cdot 3{,}34 \cdot 23{,}4 = 642 \text{ см}^4;$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(2390 + 837 \pm \sqrt{(2390 - 837)^2 + 4 \cdot 642^2},$$

откуда

$$I_1 = 2620 \text{ см}^4; \; I_2 = 606 \text{ см}^4.$$

Проверяем правильность определения I_1 и I_2. Для этого находим

$$I_1 + I_2 = 3230 \text{ см}^4; \; I_z + I_y = 3230 \text{ см}^4.$$

Так как $I_1 + I_2 = I_z + I_y$, то главные центральные моменты инерции сечения найдены верно, если I_z, I_y и I_{zy} найдены верно.

3. Определяем положение главных центральных осей сечения:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2390 - 2620}{642} = -0{,}358.$$

Главные центральные оси построены на рис. IV.15.

Глава V. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

§ V.1. Основные определения

Для каждого стержня существует линия, называемая линией центров изгиба. Положение этой линии относительно стержня зависит только от геометрии его поперечных сечений. В стержне, имеющем продольную плоскость симметрии, она лежит в этой плоскости, а в стержне, сечение которого имеет две оси симметрии, она совпадает с осью. Определение положения линии центров изгиба изложено в § V.11. Если линии действия равнодействующих внешних сил в каждом сечении стержня пересекаются с его линией центров изгиба, то он не испытывает кручения.

Поперечный изгиб – деформация стержня, нагруженного силами, перпендикулярными оси (поперечными) (рис. V.1, *а*), линии действия равнодействующих которых в каждом поперечном сечении пересекаются с линией центров изгиба (рис. V.1, *б*) и парами, плоскости действия которых нормальны к поперечным сечениям.

Стержень, работающий на поперечный изгиб, называется балкой.

Если равнодействующие внешних сил в каждом сечении балки лежат в разных плоскостях или в одной плоскости, не параллельной плоскости действия хотя бы одной из пар, то поперечный изгиб называется косым.

Ось балки после деформации называется упругой линией. В случае косого изгиба упругая линия – пространственная кривая.

Плоский косой изгиб – частный случай косого изгиба, при котором равнодействующие внешних сил в каждом сечении балки лежат в одной плоскости, называемой силовой, а пары – в плоскостях, ей параллельных. В общем случае плоского косого изгиба упругая линия – плоская кривая, плоскость которой не параллельная силовой плоскости. Линия пересечения силовой плоскости с поперечным сечением называется **силовой линией**.

Прямой (простой, плоский) поперечный изгиб – частный случай плоского косого изгиба, при котором плоскость упругой линии параллельна силовой плоскости.

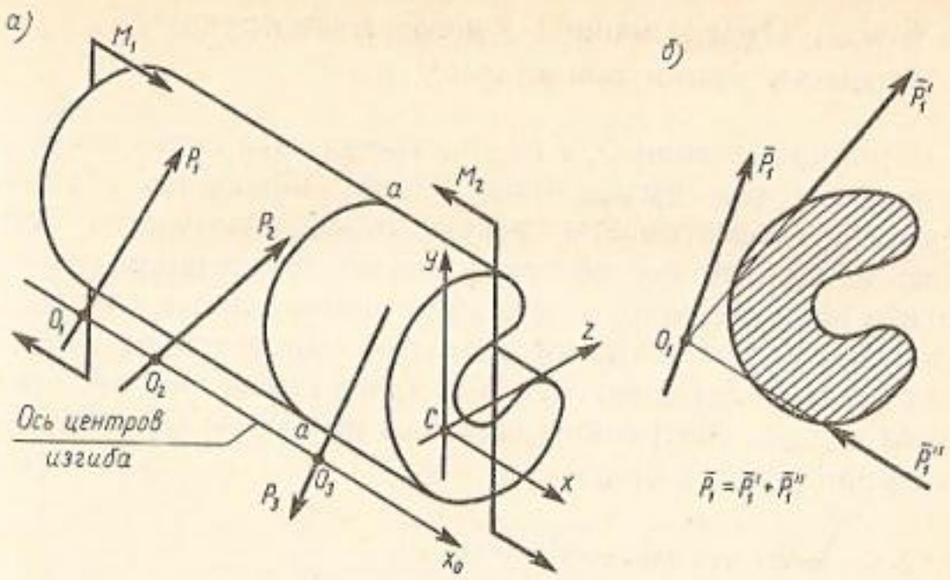


Рис. V.1

Рассмотрим призматическую балку (рис. V.2), у которой силовая плоскость – плоскость симметрии. Изгиб этой балки будет прямым (в силу продольной симметрии упругая линия лежит в плоскости симметрии). Пусть балка имеет поперечные пазы, в которые до деформации свободно, но плотно входят бруски A и B. В результате деформации бруски A окажутся зажатыми, а бруски B выпадут. Из этого опыта следует, что верхние волокна балки испытывают сжатие, а нижние растяжение. Следовательно, в балке должны существовать волокна, не испытывающие продольной деформации.

Поверхность в балке, волокна которой не испытывают продольной деформации, называется **нейтральным слоем**.

Нейтральная линия (нейтральная ось) – линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением.

В § V.7 будет доказано, что при прямом поперечном изгибе нейтральная и силовая линии перпендикулярны. Силовую линию в дальнейшем всегда будем обозначать y, а нейтральную – z.

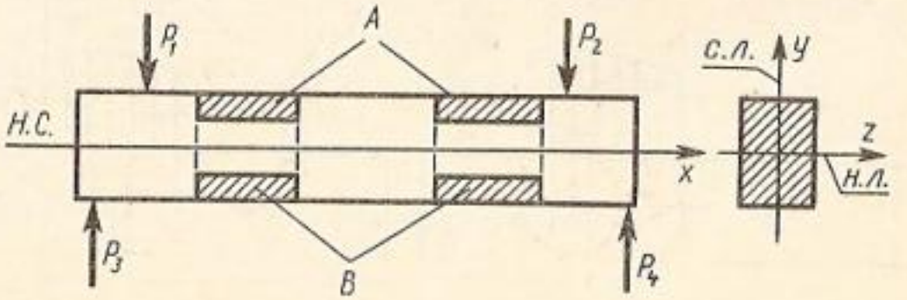


Рис. V.2

§ V.2. Определение Q_y и M_z в поперечных сечениях балки при прямом изгибе

При определении Q_y и M_z балка задается своей осью или линией центров изгиба (рис. V.3, *а*). Обращаясь к методу сечений, рассматриваем левую отсеченную часть балки (рис. V.3, *б*). Так как по определению деформации прямого изгиба внешние силовые факторы, приложенные к балке, ни проекций на оси x и z, ни моментов относительно осей x и y не дают, силы упругости в ее поперечном сечении приведутся к двум внутренним силовым факторам Q_y и M_z. Для отсеченной части балки

$$\Sigma Y = -P_1 + \int_0^{x_3} q\,dx - Q_y^{\text{III}} = 0 \ .$$

Заметим, что момент пары M_1 в уравнение $\Sigma Y = 0$ не вошел, так как проекция пары на любую ось равна нулю. В этом уравнении

$$\int_0^{x_3} q\,dx = \Omega_{x_3},$$

где Ω_{x_3} – часть грузовой площади слева от сечения в пределах третьего участка. Получим

$$Q_y^{\text{III}} = \Omega_{x_3} - P_1. \qquad \text{(V.1)}$$

Обобщая выражение (V.1), формулируем правило для определения Q_y:

перерезывающая сила Q_y в поперечном сечении балки равна алгебраической сумме сосредоточенных сил и грузовых площадей по одну сторону от сечения.

Из этого правила

$$Q_y = \sum^{\text{лев}} P_i + \sum^{\text{лев}} \Omega_j = \sum^{\text{прав}} P_m + \sum^{\text{прав}} \Omega_n. \qquad \text{(V.2)}$$

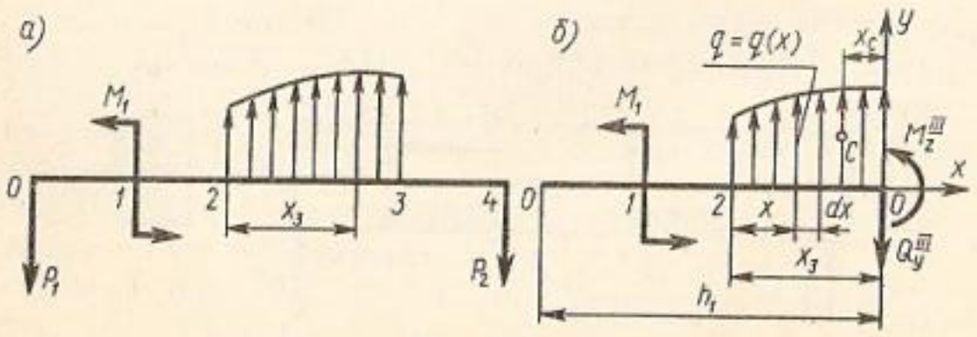


Рис. V.3

Для отсеченной части балки

$$\Sigma m_0 = P_1 h_1 + M_1 - \int_0^{x_3} (x_3 - x)\,q\,dx + M_z^{\text{III}} = 0 \ , \qquad \text{(V.3)}$$

где

$$\int_0^{x_3} (x_3 - x)\,q\,dx = S_y^{\Omega_{x_3}},$$

$S_y^{\Omega_{x_3}}$ – статический момент площади Ω_{x_3} относительно оси y сечения. По формуле (IV.4)

$$S_y^{\Omega_{x_3}} = \Omega_{x_3} x_c,$$

где x_c – расстояние от центра тяжести Ω_{x_3} до оси y. Следовательно, момент распределенной нагрузки относительно оси z сечения равен ее площади по одну сторону от сечения, умноженной на расстояние от центра тяжести этой площади до оси y сечения. Из (V.3) получим

$$M_z = -M_1 - P_1 h_1 + \Omega_{x_3} x_c. \qquad \text{(V.4)}$$

Обобщая выражение (V.4), формулируем правило для определения M_z:

изгибающий момент M_z в поперечном сечении балки равняется алгебраической сумме моментов всех сил и пар, расположенных по одну сторону от сечения относительно оси z сечения. Из этого правила

$$M_z = \sum^{\text{лев}} M_{\text{д}} + \sum^{\text{лев}} P_i h_i + \sum^{\text{лев}} \Omega_j x_{cj} =$$

$$= \sum^{\text{прав}} M_l + \sum^{\text{прав}} P_m h_m + \sum^{\text{прав}} \Omega_n x_{\text{сп}}. \qquad \text{(V.5)}$$

§ V.3. Дифференциальные и интегральные зависимости между q и Q_y, Q_y и M_z, q и M_z

Возьмем произвольно нагруженный участок балки (рис. V.4, *а*). На этом рисунке $Q_y^{(i-1)}$ – значение Q_y в левом сечении участка, $M_z^{(i-1)}$ – значение M_z в том же сечении.

Вырезаем на участке элемент бесконечно малой длины dx и рассматриваем его равновесие (рис. V.4, *б*). Для элемента

$$\Sigma Y = Q_y - Q_y - dQ_y + q\,dx = 0, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = q \, . \qquad \text{(V.6)}$$

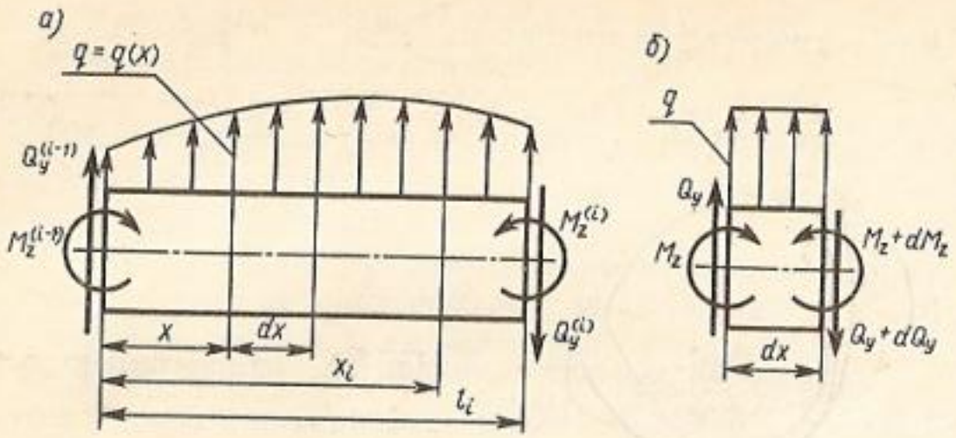


Рис. V.4

Из дифференциальной зависимости (V.6) следует интегральная зависимость:

$$Q_y = \int_0^{x_i} q\,dx + Q_y^{(i-1)}. \qquad \text{(V.7)}$$

Для элемента

$$\Sigma m_0 = M_z - M_z - dM_z + (Q_y + dQ_y)\,dx + \frac{q\,dx}{2}\,dx = 0.$$

Пренебрегая в этом уравнении членами второго порядка малости по сравнению с членами первого порядка малости, получим

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y. \qquad \text{(V.8)}$$

Из (V.8) следует интегральная зависимость:

$$M_z = \int_0^{x_i} Q_y\,dx + M_z^{(i-1)}. \qquad \text{(V.9)}$$

Продифференцировав (V.8) по x, найдем

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = q. \qquad \text{(V.10)}$$

§ V.4. Опорные устройства балок при плоском изгибе

Цилиндрическая подвижная опора (подвижный шарнир) допускает поворот опорного сечения балки и его перемещение параллельно опорной плоскости. Реакция пересекается с осью опорного цилиндра и перпендикулярна опорной плоскости. Эту опору части называют катковой или катком. Условные изображения опоры даны на рис. V.5.

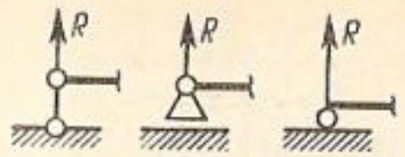


Рис. V.5

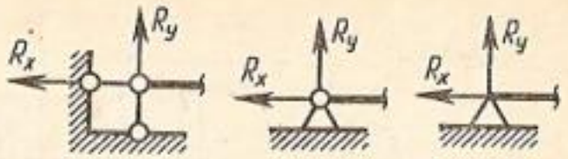


Рис. V.6

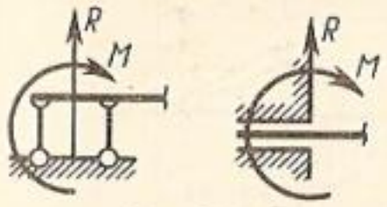


Рис. V.7

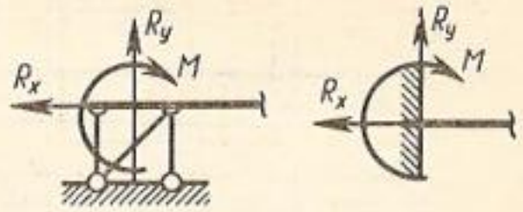


Рис. V.8

Цилиндрическая неподвижная опора (неподвижный шарнир) допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция пересекается с осью опорного цилиндра (проходит через ось шарнира). При определении реакция разлагается на две составляющие. Условные изображения опоры даны на рис. V.6.

Защемленная подвижная опора (подвижная заделка) допускает перемещение опорного сечения балки параллельно опорным плоскостям. Реакция состоит из силы, перпендикулярной опорным плоскостям, и пары. Условные изображения опоры даны на рис. V.7.

Защемленная неподвижная опора (заделка) исключает угловое и линейное перемещения опорного сечения. Реакция состоит из произвольно направленной силы, которая разлагается на две составляющие, и пары. Условные изображения опоры даны на рис. V.8.

§ V.5. Техника построения эпюр Q_y и M_z на балках

Пример V.1. Построить эпюры на двухопорной балке с консолью (рис. V.9, *а*).

1. Определяем реакции опор.

Для системы сил, действующих на балку, можно составить три независимых уравнения статики:

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma m_B = 0\ . \qquad \text{(V.11)}$$

Число уравнений равно числу неизвестных опорных реакций (рис. V.9, *а*), и поэтому балка статически определима. Из первого уравнения

$$\Sigma X = A_x = 0\ .$$

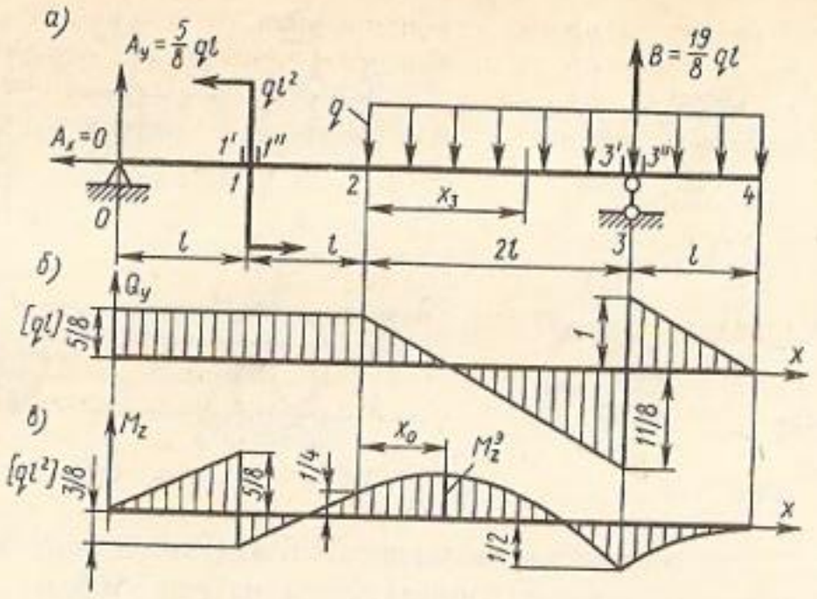


Рис. V.9

По определению деформации поперечного изгиба внешние силы перпендикулярны оси балки. Значит, компонент реакции, совпадающий по направлению с осью балки, всегда равен нулю, как единственная сила, дающая проекцию на ее направление, и на схеме нагружения A_x можно не изображать.

Из уравнений:

$$\Sigma m_B = A_y 4l - ql^2 - 3ql\frac{1}{2}l = 0, \quad A_y = \frac{5}{8}ql;$$

$$\Sigma Y = \frac{5}{8}ql - 3ql + B = 0, \quad B = \frac{19}{8}ql.$$

2. При растяжении-сжатии и кручении мы строили эпюры внутренних силовых факторов в основном по их уравнениям на участках.

При поперечном изгибе мы используем другой способ, ведущий к цели быстрее и состоящий в том, что при построении эпюр значения внутренних силовых факторов определяются по границам участка и граничные ординаты (граничные значения ординат) эпюр соединяются линиями на основании дифференциальных зависимостей (V.6), (V.8) и (V.10).

Эпюром Q_y называется график изменения перерезывающей силы вдоль оси балки.

Примем для внешних сил, входящих в выражения Q_y по участкам, такое правило знаков: внешняя сила, совпадающая по направлению с осью Q_y, входит в выражение перерезывающей силы со знаком плюс, если построение идет в положительном направлении оси x, и со знаком минус, если оно идет в противоположном направлении.

При выбранном направлении осей (рис. V.9, *б*) и построении эпюра слева направо внешняя сила, направленная вверх, входит

в выражение Q_y с плюсом, а направленная вниз – с минусом; при построении эпюра справа налево – наоборот, силы, направленные вниз, входят в выражение Q_y с плюсом, а вверх – с минусом.

Определяем значения Q_y по границам участков, рассматривая левую отсеченную часть. На основании (V.2) $Q_y^I = Q_y^{II} = \frac{5}{8}ql$ – перерезывающие силы на *I* и *II* участках; $Q_y^{(3')} = \frac{5}{8}ql - 2ql = -\frac{11}{8}ql$ – перерезывающая сила в сечении *3'*, расположенном бесконечно близко слева от сечения *3*.

Значения ординат $Q_y^{(2)}$ и $Q_y^{(3')}$ следует соединить прямой линией, так как на *III* участке $q_{III} = \text{const}$ и из (V.6) тангенс угла наклона касательной к очертанию эпюра Q_y на этом участке должен быть постоянен, а таким свойством обладает только прямая линия (рис. V.9, *б*).

Значения Q_y на границах четвертого участка находим, рассматривая правую отсеченную часть (на нее действует меньше сил, чем на левую): $Q_y^{(4)} = 0$, так как справа от сечения *4* сил нет; $Q_y^{(3'')} = ql$ (сечение *3''* расположено бесконечно близко справа от сечения *3*). Значения ординат $Q_y^{(3'')}$ и $Q_y^{(4)}$ на том же основании, что и на третьем участке, соединяем прямой линией.

3. **Эпюром** M_z называется график изменения изгибающего момента вдоль оси балки.

Примем для изгибающего момента следующее правило знаков: изгибающий момент в сечении положителен, если положительна создаваемая им кривизна упругой линии балки, и наоборот (рис. V.10, *а, б*). Следовательно, знак изгибающего момента совпадает со знаком второй производной от уравнения упругой линии в данном сечении.

При направлении осей y и M_z вверх (см. рис. V.9, *а, в*) изгибающий момент от внешнего фактора положителен, если он изгибает балку выпуклостью вниз. Для того чтобы не ошибиться в знаке изгибающего момента, сечение, в котором он определяется, следует мыслить заделанным, а опоры отброшенными.

На основании (V.5) $M_z^{(0)} = 0$, так как сила *A* слева от сечения *O* момента в этом сечении не дает.

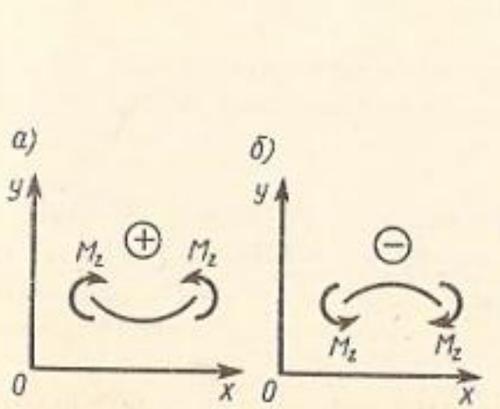


Рис. V.10

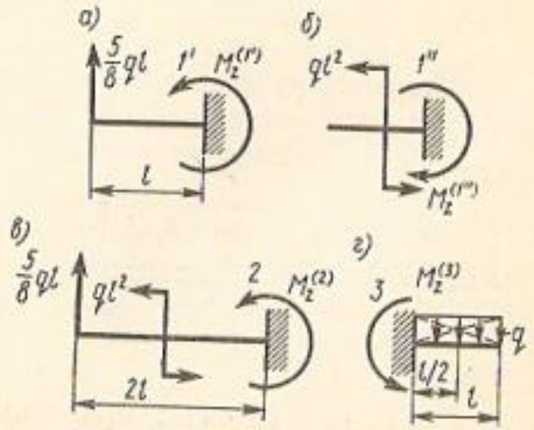


Рис. V.11

Сечения *1'* и *1"* бесконечно близко расположены слева и справа от сечения *1*, в котором приложена сосредоточенная пара. Момент $M_z^{(1')}$ из условия равновесия отсеченной части (рис. V.11, *а*) вращает ее против часовой стрелки и будет положителен, так как изгибает балку выпуклостью вверх. На основании (V.5)

$$M_z^{(1')} = \frac{5}{8} ql.$$

Интенсивность $q_I = 0$, поэтому из (V.10) кривизна очертания M_z^I на эпюре равняется нулю и значения ординат $M_z^{(0)}$ и $M_z^{(1')}$ следует соединить прямой линией (см. рис. V.9, *в*).

При определении $M_z^{(1")}$ воспользуемся принципом независимости действия сил. От силы A_y изгибающий момент в сечении *1"* положителен и равен $M_z^{(1')}$ (плечи силы относительно сечений *1'* и *1"* равны). Момент от пары отрицателен, так как изгибает балку выпуклостью вверх (рис. V.11, *б*) и равен ql^2 (момент пары относительно любой точки плоскости постоянен), следовательно,

$$M_z^{(1")} = \frac{5}{8} ql^2 - ql^2 = -\frac{3}{8} ql^2.$$

Из рис. V.11, *в* $M_z^{(2)} = \frac{5}{8} ql \cdot 2l - ql^2 = \frac{1}{4} ql^2$.

Интенсивность $q_{II} = 0$, поэтому значения ординат $M_z^{(1")}$ и $M_z^{(2)}$ соединяем прямой линией.

Эпюр M_z^{IV} строим, рассматривая правую отсеченную часть (рис. V.11, *г*). В граничных сечениях четвертого участка

$$M_z^{(4)} = 0, \quad M_z^{(3)} = -ql\frac{l}{2} = -\frac{ql^2}{2}.$$

Интенсивность $q_{IV} = -q$, так как направление распределенной нагрузки на участке противоположно направлению оси *y*. Поэтому из (V.10) кривизна очертания эпюра M_z^{IV} отрицательна (очертание обращено выпуклостью вверх). На этом основании можно высказать правило, чрезвычайно удобное для быстрого построения очертания эпюра M_z: очертание эпюра M_z на участке обращено выпуклостью в сторону, противоположную (навстречу) направлению распределенной нагрузки.

Опираясь на это правило, соединяем значения $M_z^{(2)}$ и $M_z^{(3)}$, $M_z^{(3)}$ и $M_z^{(4)}$ кривыми линиями, обращенными выпуклостью вверх. На основании (V.8) в сечении *4* кривая очертания M_z касается оси *x*, так как $Q_y^{(4)} = 0$.

По (V.8) в сечении с $Q_y = 0$ в эпюре M_z – экстремум. Для определения $M_z^?$ – экстремального значения M_z на третьем участке – находим x_0. Из рис. V.9, *в* $x_0/(2l - x_0) = 5/11l$, откуда $x_0 = 5/8l$.

На основании (V.5)

$$M_z^? = \frac{5}{8} ql\left(2l + \frac{5}{8}l\right) - ql^2 - \frac{q}{2}\left(\frac{5}{8}l\right)^2 = \frac{57}{128} ql^2.$$

После решения примера V.1 формулируем свойства эпюр Q_y и M_z, которыми следует пользоваться для контроля правильности их построения, предполагая ось *x* направленной слева направо.

Свойства эпюра Q_y.

1. По (V.6) очертание эпюра на участке с $q = 0$ – параллельно оси *x*, с $q = \text{const}$ – наклонно, с переменной q – криволинейно.

2. В сечении с сосредоточенной силой – скачок, равный по величине силе и совпадающий с ней по направлению (при построении эпюра в направлении оси *x* от силы, направленной вверх, – скачок вверх, а от направленной вниз – скачок вниз).

3. Излом – в том сечении, в котором скачок в эпюре q.

Свойства эпюра M_z.

1. По (V.10) очертание эпюра на участке с $q = 0$ – прямолинейно, с $q \neq 0$ – криволинейно и обращено выпуклостью навстречу нагрузке; по (V.8) на участке с $Q_y = 0$ очертание эпюра – параллельно оси *x*.

2. В сечении с сосредоточенной парой – скачок по величине, равный моменту пары. При построении эпюра в направлении оси *x* скачок вверх (положителен), если изгибающий момент, создаваемый парой, справа от нее – положителен, и вниз (отрицателен), если изгибающий момент, создаваемый парой, справа от нее – отрицателен.

3. Излом – в сечении с сосредоточенной силой.

4. Экстремум – в сечении с $Q_y = 0$.

5. В концевых шарнирных и катковых опорах $M_z = 0$, если в сечениях этих опор не приложено сосредоточенных пар.

Взяв произвольно нагруженную балку (рис. V.12, *а*), докажем еще одно свойство эпюра Q_y. При определении M_z в произвольном сечении балки (рис. V.12, *б*) пары M_1 и M_2 слева от сечения можно считать приложенным в начале координат (значение M_z от этого не изменится). Тогда по (V.9)

$$M_z = \int_0^{x_i} Q_y dx - M_1 + M_2. \qquad \text{(V.12)}$$

Обобщив (V.12), получим:

$$M_z = \Omega_{x_i}^{Q} y + \sum_{j=1}^{k} M_j, \qquad \text{(V.13)}$$

а) *б)*

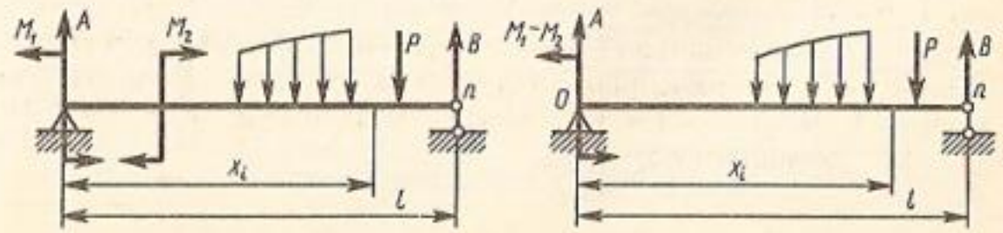


Рис. V.12

где $\int_0^{x_i} Q_y dx = \Omega_{x_i}^{Q_y}$ – площадь эпюра Q_y слева от сечения; $\sum_{j=1}^{k} M_j$ – алгебраическая сумма моментов сосредоточенных пар, общее число которых k, слева от сечения. Знак момента пары совпадает со знаком скачка от нее на эпюре M_z. Таким образом, изгибающий момент в сечении равняется части площади эпюра Q_y, сложенной с алгебраической суммой моментов сосредоточенных пар по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент в правом концевом сечении балки n равен нулю, поэтому по (V.12)

$$M_z^{(n)} = \Omega_{Q_y} + \sum_{j=1}^{m} M_j = 0,$$

или

$$\Omega_{Q_y} = -\sum_{j=1}^{m} M_j, \qquad \text{(V.14)}$$

где Ω_{Q_y} – площадь эпюра Q_y; m – общее число пар, приложенных к балке. Следовательно, площадь эпюра Q_y равняется алгебраической сумме моментов сосредоточенных пар, приложенных к балке с обратным знаком. Если сосредоточенных пар к балке не приложено или сумма их моментов равна нулю, то $\Omega_{Q_y} = 0$.

Пример V.2. Построить эпюры на консольной балке (рис. V.13, *а*).

1. **Консольной** называется балка, заделанная одним концом. Три компонента реакции в ее заделанном сечении находятся из уравнений (V.11). Однако эпюры Q_y и M_z можно построить без предварительного определения реакций, рассматривая правую отсеченную часть балки (ведя построение со свободного конца балки).

2. Строим эпюр Q_y (рис. V.13, *б*). В граничных сечениях второго участка

$$Q_y^{(2')} = -ql;\ Q_y^{(1)} = -ql + 2ql = ql.$$

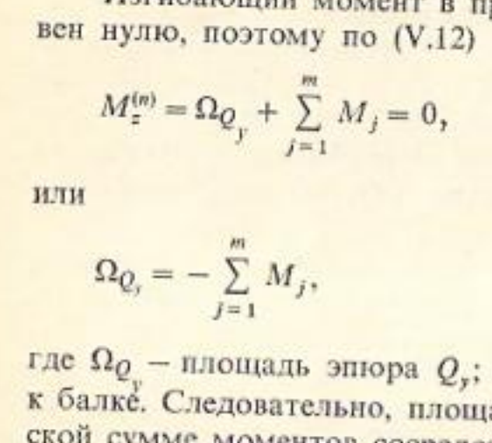


Рис. V.13

Значения $Q_y^{(1)}$ и $Q_y^{(2')}$ следует соединить кривой, обращенной выпуклостью вниз, так как $q_{II} < 0$ и увеличивается, следовательно, должен увеличиваться тупой угол касательной к кривой с осью x. В сечении 2 касательная к этой кривой горизонтальна, так как $q_2 = 0$. На первом участке

$$Q_y^{I} = Q_y^{(1)} = ql.$$

Значение $A_y = ql$ находится как скачок в нулевом сечении эпюра Q_y.

3. Строим эпюр M_z (рис. V.13, *в*). В граничных сечениях участков

$$M_z^{(2)} = 0,\ M_z^{(1)} = ql \cdot 2l - 2ql \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} ql^2;$$

$$M_z^{(0)} = ql \cdot 3l - 2ql \frac{5}{3} l = -\frac{1}{3} ql^2.$$

Значение $M_A = -\frac{1}{3} ql^2$ определяется как скачок в нулевом сечении эпюра M_z. Знак минус в выражении M_A означает, что его направление противоположно указанному на рис. V.13, *а*.

Для определения M_z^3 составляем уравнение $Q_y^{II} = ql\left(-1 + \frac{x_0^2}{2l^2}\right) = 0$, из которого $x_0 = \sqrt{2}\, l$ и

$$M_z^3 = ql\sqrt{2}\, l - \frac{q\sqrt{2}\, l}{2l} \cdot \sqrt{2}\, l \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} l = \frac{2\sqrt{2}}{3} ql^2.$$

Пример V.3. Построить эпюры на трехопорной балке с промежуточным шарниром (рис. V.14, *а*).

1. Для определения трех реакций A, B, C (рис. V.14, *а*) к уравнениям (V.11) $\sum Y = 0$ и $\sum m_A = 0$ следует добавить уравнение, составленное из условия того, что момент сил, действующих на балку по одну сторону от шарнира 2, например правых, относительно шарнира $\sum_{\text{прав}} m_2 = 0$. При этом условии будет исключен взаимный поворот частей балки вокруг этого шарнира.

Распределенную трапециевидную нагрузку, основываясь на принципе независимости действия сил, удобно разбить на равно-

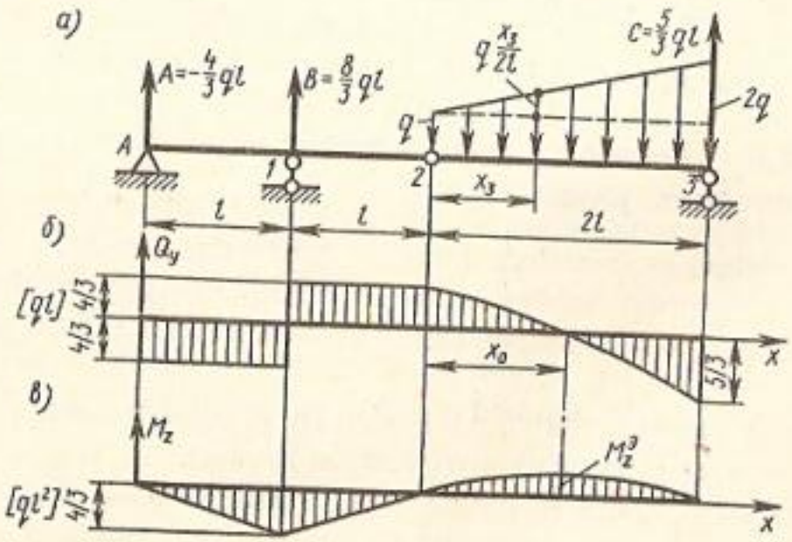


Рис. V.14

мерную и треугольную. На рис. V.14, *а* линия разбиения изображена штрихами. Находим реакции опор

$$\sum^{\text{прав}} m_2 = C\cdot 2l - 2ql\cdot l - \frac{1}{2}q\cdot 2l\frac{4}{3}l = 0, \quad C = \frac{5}{3}ql;$$

$$\Sigma m_A = Bl - 2ql\cdot 3l - ql\cdot\frac{10}{3}l + \frac{5}{3}ql\cdot 4l = 0, \quad B = \frac{8}{3}ql;$$

$$\Sigma Y = A + \frac{8}{3}ql - 3ql + \frac{5}{3}ql = 0, \quad A = \frac{4}{3}ql.$$

2. Строим эпюр Q_y (рис. V.14, *б*). Находим

$$Q_y^{\text{I}} = -\frac{4}{3}ql; \quad Q_y^{\text{II}} = -\frac{4}{3}ql + \frac{8}{3}ql = \frac{4}{3}ql;$$

$$Q_y^{(3')} = -\frac{5}{3}ql.$$

Интенсивность q_{III} – отрицательна и убывает, поэтому значения ординат $Q_y^{(2)}$ и $Q_y^{(3')}$ соединяем кривой, обращенной выпуклостью вверх, так как должен убывать тупой угол касательной к очертанию Q_y^{III} с осью x.

3. Строим эпюр M_z (рис. V.14, *в*).

Единственное значение изгибающего момента, которое надо определить для построения эпюра, $M_z^{(1)} = -\frac{4}{3}ql^2$. В шарнире $M_z = 0$, так как из этого условия определялись реакции опор. Находим

$$[Q_y^{\text{III}}]_{x_3 = x_0} = ql\left(\frac{4}{3} - \frac{x_0}{l} - \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{l^2}\right) = 0;$$

$$x_0^2 + 2lx_0 - \frac{8}{3}l^2 = 0;$$

$$x_0 = l(-1 + \sqrt{1 + 8/3}) = 0{,}92l;$$

$$M_z^2 = [M_z^{\text{III}}]_{x_3 = x_0} = 0{,}92ql^2(1{,}33 - 0{,}46 - 0{,}141) = 0{,}671ql^2.$$

§ V.6. Техника построения эпюр N, Q_y и M_z на плоских рамах

Балочным называется элемент системы, в поперечных сечениях которого могут возникать шесть внутренних силовых факторов: M_z и M_y (один из них обязательно), M_k, Q_y, Q_z и N.

Рамой называется геометрически неизменяемая система, все элементы (участки) которой балочные.

Если оси участков рамы, оси симметрии их поперечных сечений и равнодействующие внешних сил в каждом сечении лежат в одной плоскости, то рама называется плоской. Ось

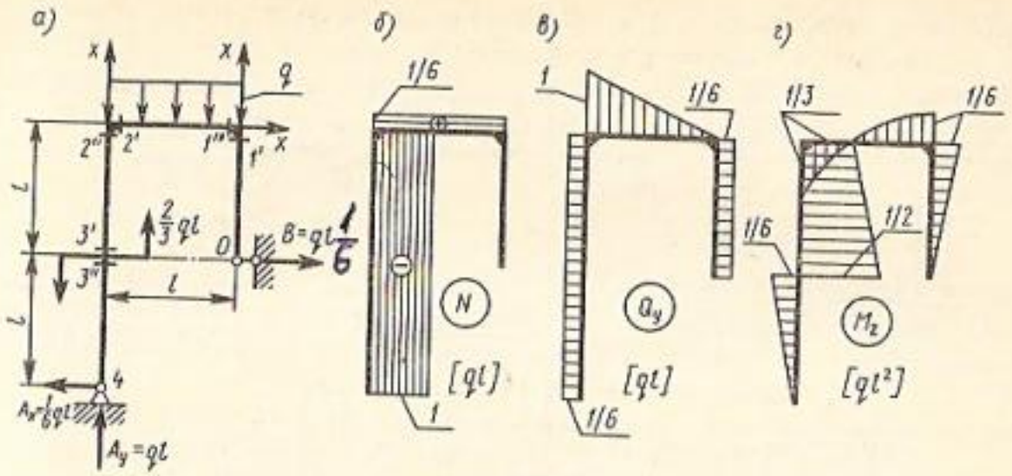


Рис. V.15

симметрии поперечного сечения рамы (силовую линию) будем обозначать y, а нейтральную – z.

Силы упругости в поперечном сечении участка плоской рамы, как это следует из метода сечений, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам N, Q_y и M_z. Эпюры N, Q_y и M_z на рамах обозначаются соответственно N, Q_y и M_z.

Пример V.4. Построить эпюры на двухопорной раме (рис. V.15, *а*).

1. Для определения реакций опор составляем уравнения (V.11), из которых

$$\Sigma m_A = Bl + ql\frac{l}{2} - \frac{2}{3}ql^2 = 0, \quad B = \frac{1}{6}ql;$$

$$\Sigma Y = A_y - ql = 0, \quad A_y = ql;$$

$$\Sigma X = \frac{1}{6}ql - A_x = 0, \quad A_x = \frac{1}{6}ql.$$

При построении эпюр, найдя значения N, Q_y и M_z в граничных сечениях участков, откладываем их по нормали к оси рамы и соединяем линиями, используя дифференциальные зависимости (V.6), (V.8) и (V.10). На рис. V.16 изображены отсеченные части рамы, соответствующие граничным сечениям, и внутренние силовые факторы в этих сечениях.

2. Строим эпюр N (рис. V.15, *б*).

Нормальное усилие в сечении равно алгебраической сумме проекций всех сил по одну сторону от сечения на нормаль к нему. Нормальное усилие считается положительным, если оно действует от сечения (вызывает растяжение), и отрицательным, если действует на сечение (вызывает сжатие).

Нормальное усилие на участке $0-1$ $N_{(0-1)} = 0$, так как сила B проекции на ось участка не дает (рис. V.16, *а*); $N_{(1-2)} = \frac{1}{6}ql -$

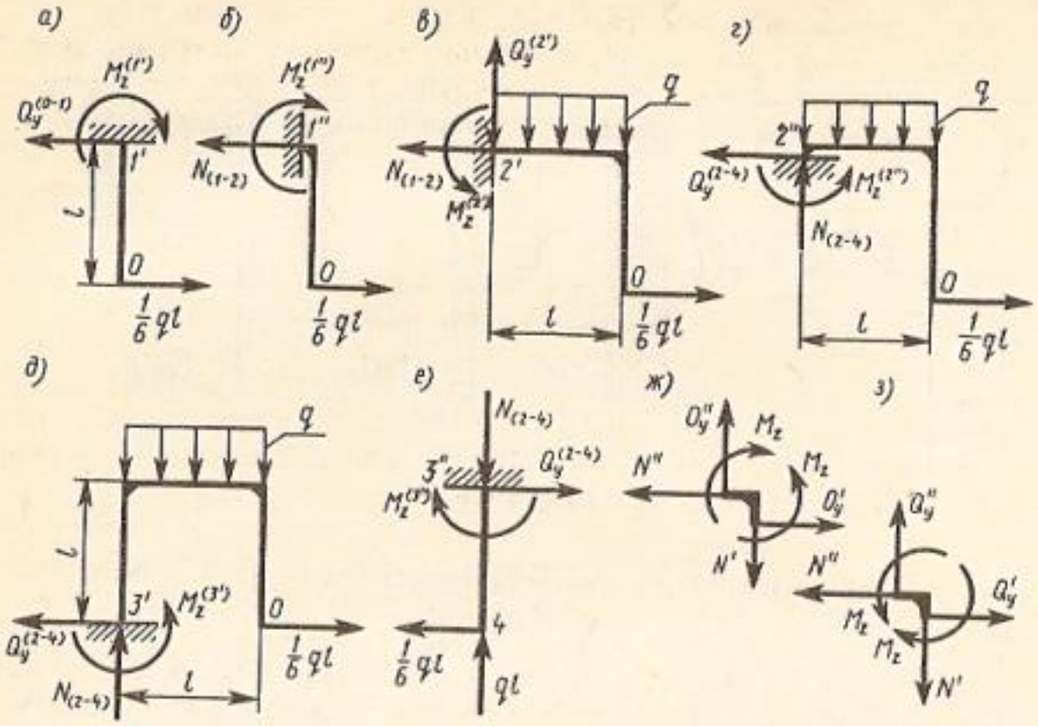


Рис. V.16

растяжение (рис. V.16, *б*, *в*); $N_{(2-4)} = -ql$ – сжатие (рис. V.16, *д* и *е*).

Значения ординат эпюра N откладываются по любую сторону от оси участка с обязательным указанием их знака на участке. Штриховать эпюр удобно параллельно оси участка (продольная сила).

3. Строим эпюр Q_y (рис. V.15, *в*).

Перерезывающая сила Q_y сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил по одну сторону от сечения на плоскость сечения (ось y сечения).

Перед построением эпюра Q_y следует на схеме нагружения рамы изобразить произвольное для каждого участка направление его оси x (рис. V.15, *а*). Ордината Q_y откладывается в направлении проекций внешней силы, от которой она возникает, если построение идет в направлении оси x на участке, и в направлении, противоположном проекции внешней силы, если построение идет в направлении, противоположном оси x.

Перерезывающая сила на участке $0-1$ – $Q_y^{(0-1)} = \frac{1}{6}ql$ (рис. V.16, *а*). Ордината $Q_y^{(0-1)}$ откладывается вправо (в направлении силы B), так как построение идет в направлении оси x участка; $Q_y^{(1'')} = 0$ (рис. V.16, *б*); $Q_y^{(2')} = ql$ (рис. V.16, *в*) и откладывается вверх (построение на участке $1-2$ идет против оси x); $Q_y^{(2-4)} = \frac{1}{6}ql$ (рис. V.16, *д* и *е*). Ординаты $Q_y^{(1'')}$ и $Q_y^{(2')}$ соединяются прямой линией (на участке $1-2$ $q = \text{const}$).

4. Строим эпюр M_z (рис. V.15, *г*).

Изгибающий момент M_z в сечении равняется алгебраической сумме моментов всех сил и пар по одну сторону от сечения относительно сечения (оси z сечения). Ординаты M_z откладываются на сжатом волокне участка.

Находим: $M_z^{(0)} = 0$, $M_z^{(1')} = \frac{1}{6}ql^2$ (рис. V.16, *а*).

Из рис. V.16, *а* видно, что $M_z^{(1')}$ создает сжатое волокно справа от оси, поэтому его значение откладывается вправо от нее. Ординаты $M_z^{(0)}$ и $M_z^{(1')}$ соединяются прямой линией (на этом участке $q = 0$).

Значение $M_z^{(1'')} = M_z^{(1')}$, потому что плечи внешних сил по одну сторону от сечений $1'$ и $1''$ (рис. V.16, *а*, *б*) относительно этих сечений равны. Пара $M_z^{(1'')}$ создает сжатое волокно вверху (рис. V.16, *б*).

В сечениях, бесконечно близких к угловым, если в них не приложено сосредоточенных пар, как это вытекает из условий равновесия вырезанных углов рам (рис. V.16, *ж*, *з*), изгибающие моменты равны и создают сжатые волокна либо снаружи, либо внутри угла. Поэтому значения ординат изгибающих моментов по сторонам углового сечения в эпюре M_z откладываются по одну сторону от оси (или внутрь угла, или наружу).

На участке $1-2$ M_z от силы B создает сжатое волокно вверху, а от распределенной нагрузки – внизу (рис. V.16, *в*). Значит,

$$M_z^{(2')} = \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{6}ql^2 = \frac{1}{3}ql^2.$$

Ординаты $M_z^{(1'')}$ и $M_z^{(2')}$ соединяются кривой линией (параболой), обращенной выпуклостью вверх (навстречу распределенной нагрузке). По сделанному замечанию значение $M_z^{(2'')} = M_z^{(2')}$ и откладывается внутрь угла 2.

Изгибающий момент в сечении 3 создает только распределенная нагрузка (рис. V.16, *е*) и $M_z^{(3')} = ql^2/2$.

Из рис. V.16 $M_z^{(3'')} = ql^2/6$.

Пример V.5. Построить эпюры на консольной раме (рис. V.17, *а*).

Определение реакций в заделанном сечении консольной рамы не является необходимым, так как построение эпюр можно выполнить, идя со свободного конца рамы.

1. Строим эпюр N (рис. V.17, *б*).

Сила P проекций на оси участков $0-1$, $2-3$, $4-5$ не дает, поэтому $N_{(0-1)} = N_{(2-3)} = N_{(4-5)} = 0$; $N_{(3-4)} = -P$ – сжатие, $N_{(3-4)} = P$ – растяжение.

2. Строим эпюр Q_y (рис. V.17, *в*).

Сила P проекций на плоскости поперечных сечений участков $1-2$ и $3-4$ не дает, поэтому $Q_y^{(1-2)} = Q_y^{(3-4)} = 0$.

На остальных участках $Q_y^{(0-1)} = Q_y^{(2-3)} = Q_y^{(4-5)} = P$.

3. Строим эпюр M_z (рис. V.17, *г*).

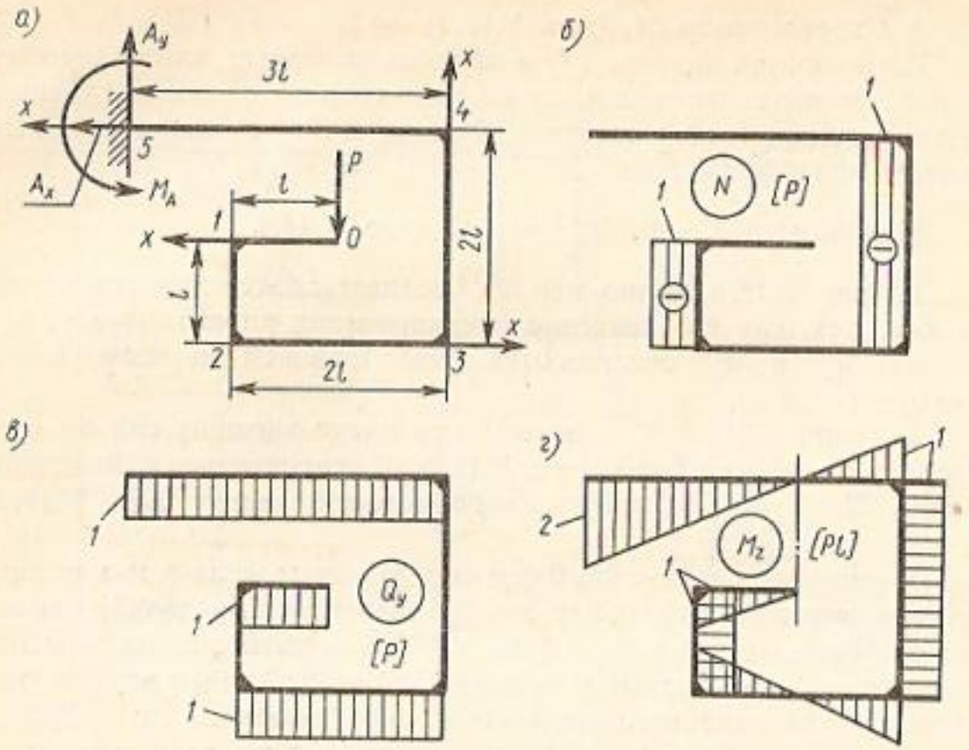


Рис. V.17

При построении эпюра M_z следует определить только единственное значение изгибающего момента $M_z^{(1')} = M_z^{(1'')} = Pl$.

На участках $1-2$ и $3-4$ M_z – постоянен (линия действия силы P параллельна их осям); в сечениях пересечения осей участков $2-3$ и $4-5$ с линией действия силы P $M_z = 0$; изломов и скачков на этих участках быть не может (сил и пар на участках нет) и эпюр на них строится проведением гладких прямых через известные граничные и нулевые значения M_z.

Компоненты реакции найдутся как скачки в заделанном сечении соответствующих эпюр:

$$A_x = 0,\ A_y = P,\ M_A = 2Pl.$$

Пример V.6. Построить эпюры на двухопорной раме с наклонным участком (рис. V.18, *а*).

1. Определяем реакции опор:

$$\Sigma X = A_x = 0;$$

$$\Sigma m_A = B \cdot 2l - M = 0, \quad B = \frac{M}{2l};$$

$$\Sigma Y = \frac{M}{2l} + A_y = 0, \quad A_y = -M/2l.$$

2. Строим эпюр N (рис. V.18, *б*). Находим

$$N_{(0-1)} = N_{(3-4)} = 0, \quad N_{(1-3)} = -\frac{\sqrt{2}\,M}{4l} - \text{сжатие.}$$

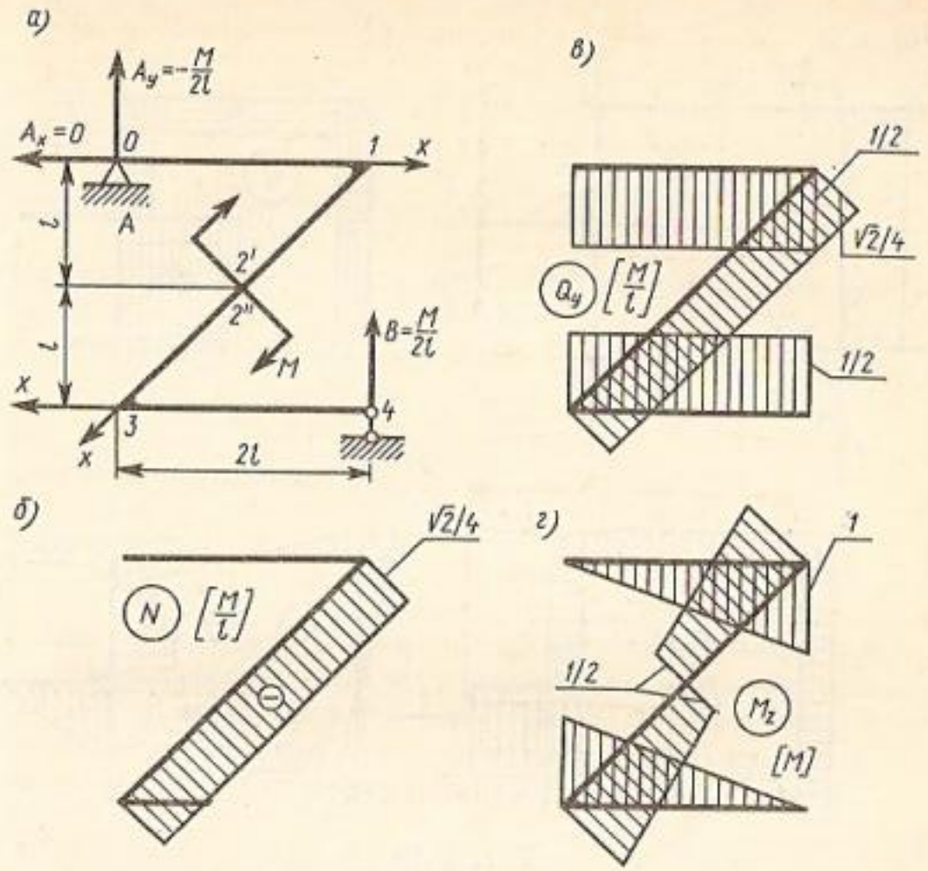


Рис. V.18

3. Строим эпюр Q_y (рис. V.18, *в*). Находим:

$$Q_y^{(0-1)} = Q_y^{(3-4)} = \frac{M}{l}; \quad Q_y^{(1-3)} = \frac{\sqrt{2}\,M}{4l}.$$

4. Строим эпюр M_z (рис. V.18, *г*). Находим:

$$M_z^{(0)} = M_z^{(4)} = 0; \quad M_z^{(1)} = M_z^{(3)} = M; \quad M_z^{(2')} = M_z^{(2'')} = \frac{M}{2}.$$

Пример V.7. Построить эпюры на раме с промежуточными шарнирами (рис. V.19, *а*).

1. Для определения пяти реакций (рис. V.19, *а*) к трем уравнениям (V.11) следует добавить два уравнения, составленные из условий равенства нулю моментов сил, действующих на раму по одну сторону от шарниров *4* и *6* относительно этих шарниров. Построение эпюр можно выполнить после того, как будут найдены A_x и A_y (рама станет консольной), и определение B_x, B_y и M_B не является необходимым. Поэтому уравнения (V.11) использовать не следует. Составляем систему уравнений

$$\sum^{\text{прав}} m_4 = A_x 2l - A_y l - P2l = 0;$$

$$\sum^{\text{верх}} m_6 = A_x l - A_y 2l - P3l = 0,$$

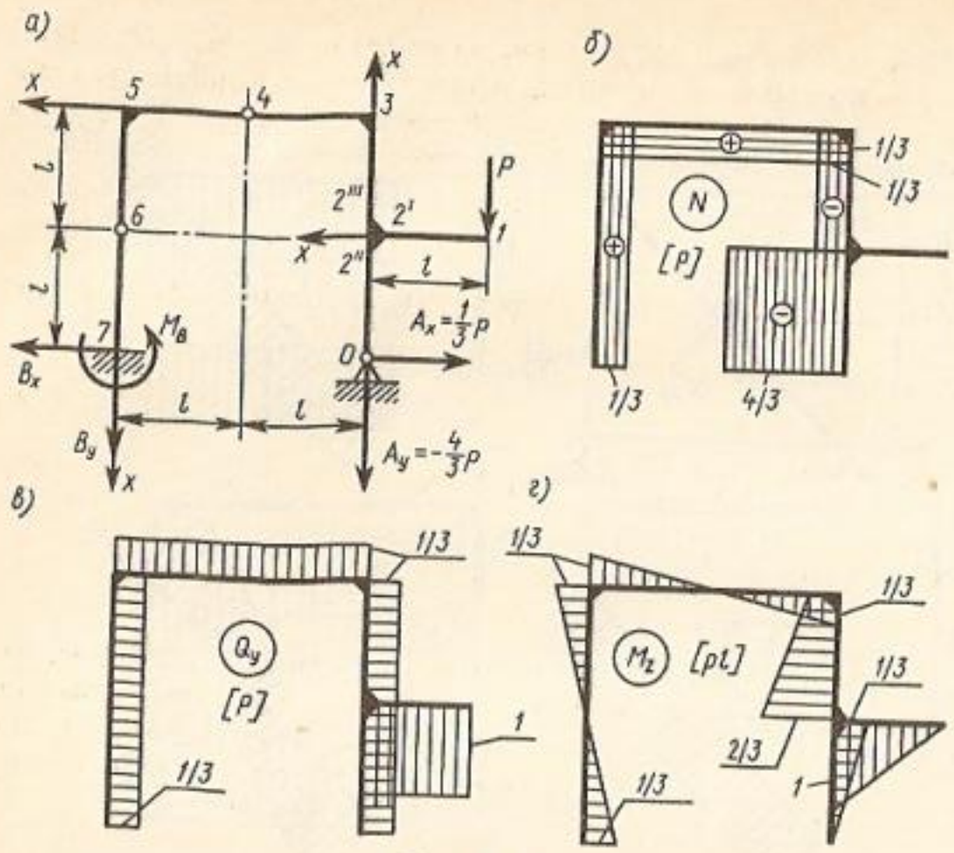


Рис. V.19

или

$$\begin{cases} 2A_x - A_y = 2P; \\ A_x - 2A_y = 3P. \end{cases}$$

Из этой системы $A_x = \frac{1}{3}P$, $A_y = -\frac{4}{3}P$.

2. Строим эпюр N (рис. V.19, *б*). Находим:

$$N_{(0-2)} = -\frac{4}{3}P \text{ – сжатие;} \quad N_{(1-2)} = 0; \quad N_{(2-3)} = -\frac{P}{3} \text{ – сжатие;}$$

$$N_{(3-5)} = \frac{1}{3}P \text{ – растяжение;} \quad N_{(6-7)} = N_{(5-6)} = \frac{1}{3}P \text{ – растяжение.}$$

3. Строим эпюр Q_y (рис. V.19, *в*). Находим:

$$Q_y^{(1-2)} = P; \quad Q_y^{(0-3)} = Q_y^{(3-5)} = Q_y^{(5-7)} = \frac{1}{3}P.$$

4. Строим эпюр M_z (рис. V.19, *г*). Находим:

$$M_z^{(2'')} = \frac{1}{3}Pl; \quad M_z^{(2')} = Pl; \quad M_z^{(2'')} = Pl - \frac{1}{3}Pl = \frac{2}{3}Pl; \quad M_z^{(5)} = \frac{1}{3}Pl.$$

После определения $M_z^{(3)}$ эпюры на участках $3-5$ и $5-7$ строятся как гладкие прямые линии, проходящие через шарниры (в шарнирах $M_z = 0$). Реакции в опоре B найдутся после построения эпюр:

$$B_x = \frac{1}{3}P, \quad B_y = \frac{1}{3}P, \quad M_B = \frac{1}{3}Pl.$$

Пример V.8. Построить эпюры на трехшарнирном контуре (рис. V.20, *а*).

1. Определяем реакции опор:

$$\Sigma m_A = B3l - ql\frac{4}{3}l = 0, \quad B = \frac{4}{9}ql;$$

$$\Sigma Y = \frac{4}{3}ql - ql + A_y = 0, \quad A_y = \frac{5}{9}ql, \quad A_x = 0.$$

2. Определив реакции опор, разрезаем один из шарниров, например шарнир O (рис. V.20, *б*), и определяем в нем перерезывающую силу C_y и нормальное усилие C_x (M_z в шарнире равен нулю). После определения C_y и C_x эпюры на контуре строятся как на разомкнутой раме. Составляем систему уравнений

$$\sum^{\text{прав}} m_4 = C_x 2l + C_y 3l - \frac{8}{9}ql^2 = 0,$$

$$\sum^{\text{прав}} m_2 = C_x l + C_y 2l - \frac{4}{3}ql^2 = 0,$$

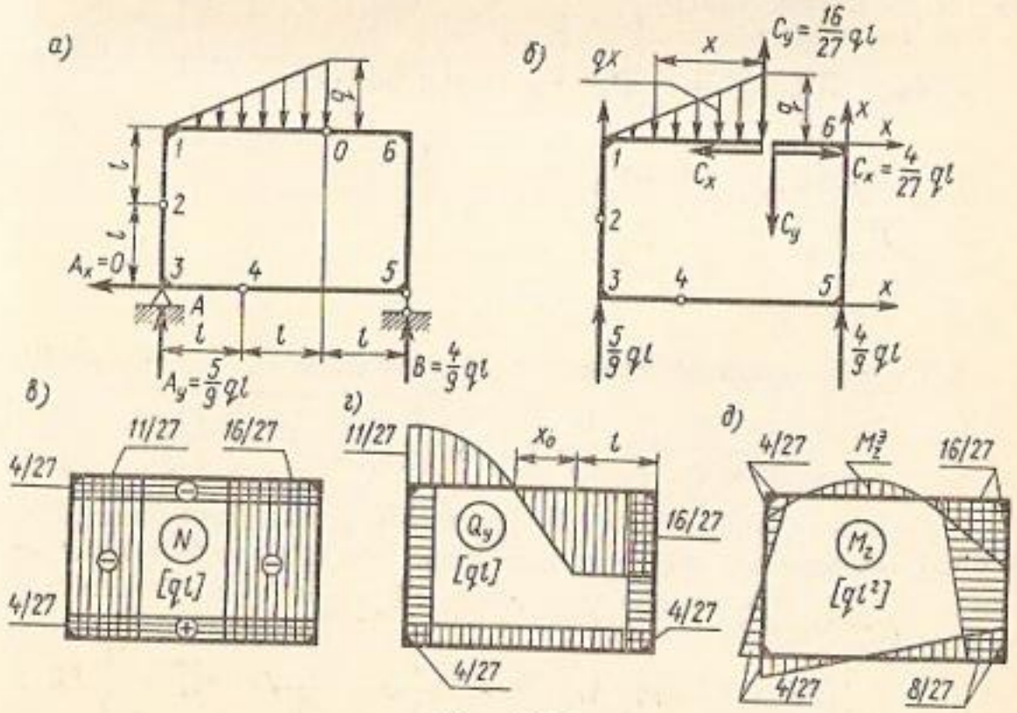


Рис. V.20

или

$$\begin{cases} 2C_x + C_y = \dfrac{8}{9}ql, \\ C_x + 2C_y = \dfrac{4}{3}ql; \end{cases}$$

из этой системы $C_x = \dfrac{4}{27}ql$, $C_y = \dfrac{16}{27}ql$.

3. Строим эпюр N (рис. V.20, *в*). Находим:

$N_{(0-1)} = N_{(0-6)} = -\dfrac{4}{27}ql$ – сжатие; $N_{(6-5)} = -\dfrac{16}{27}ql$ – сжатие;

$N_{(5-3)} = \dfrac{4}{27}ql$ – растяжение; $N_{(1-3)} = -\dfrac{11}{27}ql$ – сжатие.

4. Строим эпюр Q_y (рис. V.20, *г*). Находим:

$$Q_y^{(0)} = \frac{16}{27}ql;\ Q_y^{(1)} = \frac{11}{27}ql;\ Q_y^{(6-5)} = \frac{4}{27}ql;\ Q_y^{(5-3)} = \frac{4}{27}ql;\ Q_y^{(1-3)} = \frac{4}{27}ql.$$

Значения ординат $Q_y^{(0)}$ и $Q_y^{(1)}$ соединяем кривой линией (квадратная парабола), обращенной выпуклостью вверх, так как q на участке $0-1$ при движении в направлении оси x уменьшается до нуля.

Для определения x_0 (рис. V.20, *б*) составляем уравнение на участке $0-1$ (рис. V.20, *б*)

$$q(x) = -q\left(1 - \frac{x}{2l}\right);\quad Q_y = \frac{16}{27}ql - \left(q + q\left(1 - \frac{x}{2l}\right)\right)\frac{x}{2},\ \text{или}$$

$$Q_y = \frac{ql}{4}\left(\frac{64}{27} - 4\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right),\ \text{откуда}$$

$$x_0^2 - 4lx_0 + \frac{64}{27}l = 0,\quad x_0 = 0{,}46l.$$

5. Строим эпюр M_z (рис. V.20, *д*). Находим:

$$M_z^{(0)} = 0;\ M_z^{(1)} = \frac{4}{3}ql^2 - \frac{16}{27}ql \cdot 2l = \frac{4}{27}ql^2;\ M_z^{(6)} = \frac{16}{27}ql^2.$$

Значения ординат $M_z^{(0)}$ и $M_z^{(1)}$ соединяем кривой (кубическая парабола), обращенной выпуклостью вверх. Изгибающий момент на участке $0-1$ достигает экстремального значения $M_z^э$ в сечении, для которого $Q_y = 0$. Поэтому

$$M_z^э = ql^2\left(\frac{16}{27}\cdot 0{,}46 - \frac{0{,}46^2}{2} + \frac{0{,}46^3}{12}\right) = 0{,}176ql^2.$$

§ V.7. Вывод формулы для определения нормальных напряжений при прямом чистом изгибе

Изгиб балки называется **чистым**, если в ее поперечных сечениях действуют только нормальные силы упругости, приводящиеся к изгибающему моменту. **Чистый изгиб** называется **прямым**, если плоскость упругой линии балки параллельна силовой плоскости.

Рассмотрим участок балки (рис. V.21, *а*) произвольного постоянного поперечного сечения (рис. V.21, *б*), испытывающий прямой чистый изгиб. На этих рисунках: mm и nn – следы поперечных сечений, отстоящих от деформации на бесконечно малое расстояние dx (бесконечно близких); AA_1 и BB_1 – волокна, лежащие до деформации соответственно в нейтральном слое и на произвольном расстоянии y от него; z – нейтральная линия; y_0 – силовая линия.

При чистом изгибе призматической балки справедливы:

гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений): сечения плоские и нормальные к оси балки до деформации остаются плоскими и нормальными к ее оси после деформации;

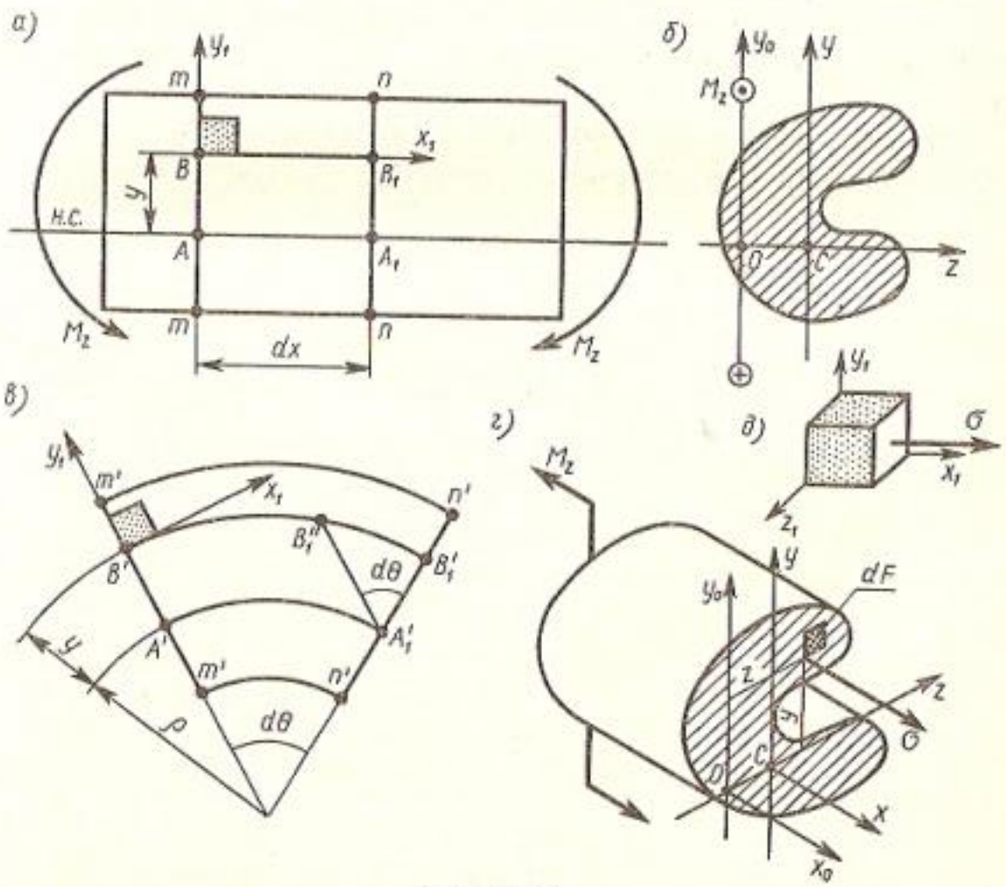


Рис. V.21

гипотеза о ненадавливаемости волокон: нормальные напряжения в продольных сечениях балки равны нулю.

Опираясь на гипотезу Бернулли и требование того, чтобы изгиб был прямым, изображаем форму элемента *mmnn* после деформации (рис. V.21, *в*).

В этом элементе:

1. Сечения *mm* и *nn*, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга вокруг своих нейтральных линий; нейтральные линии сечений должны быть перпендикулярны силовой плоскости для того, чтобы плоскость упругой линии была ей параллельна, и, следовательно, при прямом изгибе силовая и нейтральная линии перпендикулярны; нейтральный слой – цилиндрическая поверхность и все волокна после деформации – плоские кривые; $m'm'$ и $n'n'$ – положения сечений *mm* и *nn* после деформации; $d\theta$ – взаимный угол поворота поперечных сечений, расстояние между которыми до деформации dx; $A'A_1'$ – волокна, лежащие после деформации в нейтральном слое; $B'B_1'$ – волокна, отстоящие после деформации на произвольном расстоянии y от нейтрального слоя; ρ – радиус кривизны волокон, лежащих в нейтральном слое.

2. Элемент у точки B с ортогональными гранями до деформации (рис. V.21, *а*) по гипотезе Бернулли имеет ортогональные грани и после деформации (рис. V.21, *б*). Следовательно, для него (рис. V.21, *д*) $\gamma_{x_1y_1} = \gamma_{y_1z_1} = \gamma_{z_1x_1} = 0$, и из обобщенного закона Гука (I.7) касательные напряжения в продольных и поперечных сечениях участка равны нулю.

Относительное продольное удлинение волокна $B'B_1'$:

$$\varepsilon = \frac{\cup B'B_1' - BB_1}{BB_1}. \qquad (V.15)$$

Но $BB_1 = AA_1$ (рис. V.21, *а*) и $\cup A'A_1' = AA_1 = dx$, так как длины волокон, расположенных в нейтральном слое, не изменяются.

Проводим $A_1'B_1'' \| A'B'$. Из рис. V.21, *в*: $\cup B'B_1' - BB_1 = \cup B_1'B_1''$, $\cup B_1B_1'' = yd\theta$, $\cup A'A_1' = \rho d\theta$.

Подставив в (V.15) выражения $\cup B'B_1'$ и BB_1 через y, ρ и $d\theta$, получим

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \qquad (V.16)$$

Волокна балки друг на друга не давят (вторая гипотеза), поэтому элемент с ортогональными гранями, лежащими в продольных и поперечных сечениях, а значит и волокна

участка испытывают одноосное растяжение или сжатие. Подставив в выражение закона Гука при растяжении-сжатии (II.9) выражение ε из (V.16), получим

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \qquad (V.17)$$

Чтобы найти положения нейтральной и силовой линий относительно сечения и выразить σ через M_z, рассмотрим равновесие левой части участка, отсеченной сечением $m-m$ (рис. V.21, *г*). Уравнения $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$, $\sum m_{x_0} = 0$ удовлетворяются для отсеченной части, тождественно, т. е. справедливы при любых значениях, действующих на нее сил упругости и M_z.

Из условия равновесия отсеченной части:

1. $\Sigma X_0 = \int\int_F \sigma dF = 0.$

Подставляя в это уравнение выражение σ из (V.17), получим:

$$\frac{E}{\rho}\int\int_F y dF = \frac{E}{\rho} S_z = 0, \text{ но } \frac{E}{\rho} \neq 0,$$

поэтому

$$S_z = 0 \ . \qquad (V.18)$$

Следовательно, нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения – точку C (рис. V.21, *б*), упругая линия лежит в нейтральном слое и ρ будет ее радиусом кривизны.

2. $\Sigma m_{y_0} = \int\int_F z\sigma dF = 0.$

Подставляя в это уравнение выражение σ из (V.17), получим:

$$\frac{E}{\rho}\int\int_F zy dF = \frac{E}{\rho} I_{zy_0} = 0, \text{ но } \frac{E}{\rho} \neq 0,$$

поэтому

$$I_{zy_0} = 0 \ . \qquad (V.19)$$

Следовательно, силовая и нейтральная линии – главные оси поперечного сечения и поэтому взаимно перпендикулярны.

Если оси y и z – главные центральные оси сечения, то оси y_0 и z, если $y_0 \| y$, то же самое главные.

Действительно, $I_{zy} = 0$ по условию, а $y_c = 0$ из рис. V.21, *б*,

поэтому

$$I_{zy_0} = 0. \tag{V.20}$$

Любая ось, перпендикулярная главной центральной оси, в совокупности с ней – главные оси сечения.

Таким образом, положение изгибающего момента M_z относительно сечения при условии перпендикулярности его плоскости одной из главных центральных осей поперечного сечения, которая будет нейтральной линией, – произвольно.

3. $\Sigma m_z = M_z - \iint\limits_F y\sigma dF = 0$.

После подстановки в это уравнение σ из (V.17) получим

$$M_z = \frac{E}{\rho}\iint\limits_F y^2 dF,$$

где $\iint\limits_F y^2 dF = I_z$ – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \tag{V.21}$$

Выражение (V.21) называется **основным уравнением изгиба**, а произведение EI_z – жесткостью поперечного сечения балки относительно оси z при изгибе. Подставив отношение $\frac{E}{\rho}$ из (V.21) в (V.17), получим

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \tag{V.22}$$

Зависимость (V.22) есть уравнение нормальных напряжений при чистом прямом изгибе в плоскости оси y (плоскости, перпендикулярной главной центральной оси сечения z).

По аналогии, при изгибе в плоскости оси z (плоскости, перпендикулярной второй главной центральной оси сечения y), уравнение напряжений будет таким

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z. \tag{V.23}$$

§ V.8. Расчет на прочность при прямом чистом изгибе (расчет по нормальным напряжениям)

Как следует из (V.22), нормальные напряжения в точках поперечного сечения, находящихся на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны и пропорциональны этому

расстоянию. Закон распределения нормальных напряжений по сечению (эпюр σ), обозначаемый σ, показан на рис. V.22.

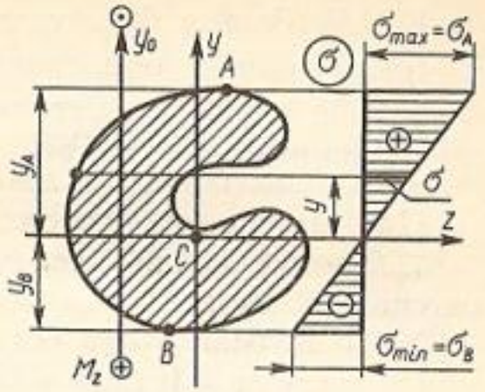


Рис. V.22

Составим условие прочности проектировочного расчета балки

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{M_z}{I_z} y_A \leqslant [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_{min}| = |\sigma_B| = \frac{M_z}{I_z}|y_B| \leqslant [\sigma]_c. \tag{V.24}$$

Если материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие, то

$$|\sigma|_{max} = \frac{M_z}{W_z} \leqslant [\sigma], \tag{V.25}$$

где

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}}. \tag{V.26}$$

В (V.25) W_z – момент или модуль сопротивления сечения изгибу относительно оси z, названный так потому, что отношение наибольших изгибающих моментов, которые могут быть восприняты балками разных поперечных сечений из одинакового материала, равно отношению моментов сопротивления их поперечных сечений

$$\frac{M_z^{\mathrm{I}}}{M_z^{\mathrm{II}}} = \frac{W_z^{\mathrm{I}}}{W_z^{\mathrm{II}}}.$$

Для кольца $I_z = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4)$, $y_{max} = \frac{d}{2}$; поэтому по формуле (V.26)

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}(1 - c^4) \approx 0{,}1d^3(1 - c^4). \tag{V.27}$$

Для прямоугольника $I_z = \frac{bh^3}{12}$, $y_{max} = \frac{h}{2}$; поэтому по формуле (V.26)

$$W_z = \frac{bh^2}{6}. \tag{V.28}$$

§ V.9. Вывод формулы для определения касательных напряжений при прямом поперечном изгибе в балках нетонкостенного (сплошного) сечения

При выводе принимаем предположения:

1. Сечение балки имеет ось симметрии, и эта ось является силовой линией.

2. По прямой в сечении, параллельной нейтральной линии, касательные напряжения равны и параллельны силовой линии (рис. V.23, *в*).

3. Нормальные напряжения при прямом поперечном изгибе можно определять по формуле (V.22), полученной для прямого чистого изгиба.

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями (рис. V.23, *а*), следы которых AA_1 и BB_1, и сечением, параллельным нейтральному слою до деформации, след которого AB, вырежем элемент AA_1B_1B (рис. V.23, *в*) и рассмотрим его равновесие. На этом рисунке: b – ширина сечения по линии, в точках которой определяется напряжение τ_{xy} (рис. V.23, *б*); $F_{отс}$ – часть площади поперечного сечения, расположенная по одну сторону от этой линии.

По грани элемента, параллельной нейтральному слою, в силу свойства парности будут действовать равномерно распределенные напряжения τ_{yx} (по принятому предположению по линии AA они распределены равномерно, а размер AB бесконечно мал). Касательные силы упругости, действующие по граням элемента, совпадающим с поперечными сечениями, проекций на ось x не дадут.

Составляем уравнение

$$\Sigma X = -\iint\limits_{F_{отс}} \sigma dF - \tau_{yx} b dx + \iint\limits_{F_{отс}} (\sigma + d\sigma)\, dF = 0,$$

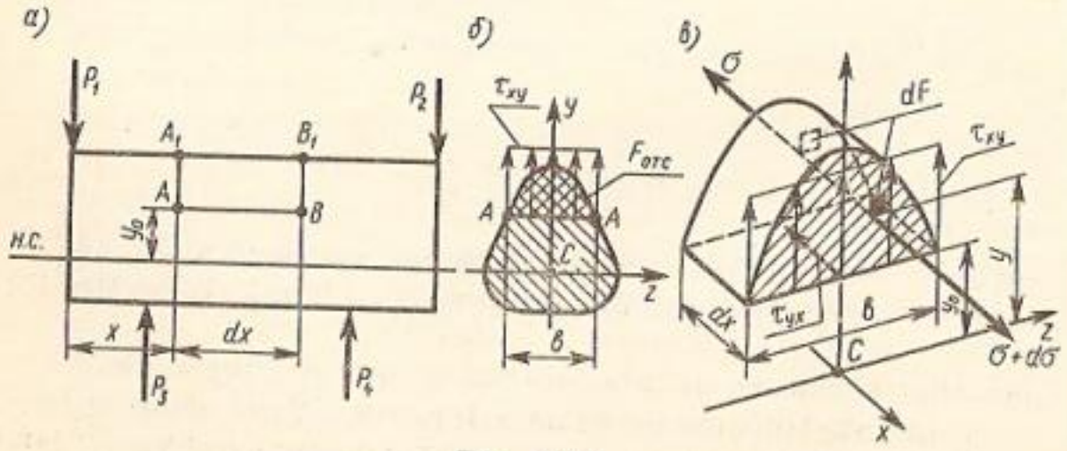


Рис. V.23

из которого

$$\tau_{yx} b dx = \iint\limits_{F_{отс}} d\sigma dF.$$

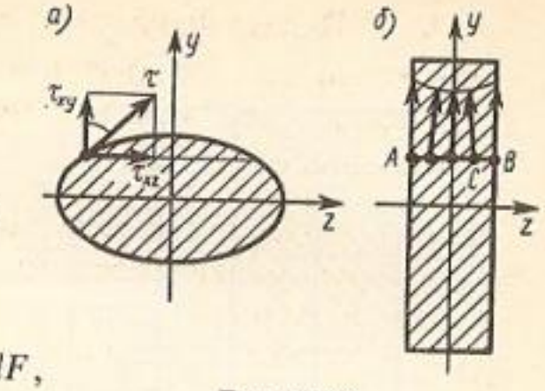


Рис. V.24

Но по (V.22) $d\sigma = \dfrac{dM_z}{I_z} y$, поэтому

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{1}{bI_z} \iint\limits_{F_{отс}} y dF,$$

где $\iint\limits_{F_{отс}} y dF = S_z^{отс}$ – статический момент $F_{отс}$ относительно нейтральной линии.

По формуле (V.8) $\dfrac{dM_z}{dx} = Q_y$, следовательно,

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{I_z b}. \qquad (V.29)$$

Чтобы оценить применимость формулы (V.29) для различных форм поперечных сечений балок, возьмем сечение, вытянутое вдоль нейтральной линии (рис. V.24, *а*). В точке контура сечения касательное напряжение направлено по касательной к контуру (свойство § I.6). Поэтому напряжение τ в произвольной точке контура будет направлено по касательной к нему, а не параллельно оси y, как это предполагалось при выводе. Горизонтальный компонент τ_{xz}, как это видно из рис. V.24, *а*, который при выводе не учитывался вообще, может оказаться больше τ_{xy}. Следовательно, формула (V.29) для определения τ в произвольной точке такого сечения непригодна. Если же сечение вытянуто вдоль силовой линии (рис. V.24, *б*), то по тому же свойству и симметрии $\tau_A = \tau_B$ и параллельны оси y, а τ_c с осью y совпадает. Чисто физические соображения подсказывают, что между точками A и C, C и B касательные напряжения сильно отклоняться от вертикали не могут, а также распределение их по линии AB не может сильно отличаться от равномерного. Для таких сечений формула (V.29) должна давать достаточную для практических целей точность. Чтобы убедиться в этом, найдем значение τ_{max} в прямоугольном сечении (рис. V.25, *а*) и сравним его с точными значениями, которые получаются решением той же задачи методом теории упругости.

В прямоугольном сечении выражение $Q_y/(I_z b)$ постоянно для любой его точки и касательное напряжение будет изме-

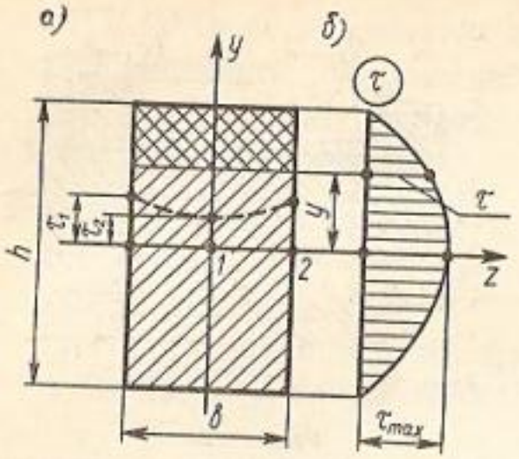


Рис. V.25

няться по закону изменения $S_z^{отс}$ – статического момента отсеченной части площади сечения. На рис. V.25, *а* эта площадь заштрихована дважды. Находим:

$$S_z^{отс} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right),$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

$$\tau_{xy} = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \qquad (V.30)$$

Уравнение (V.30) – уравнение параболы, график которой (эпюр τ) построен на рис. V.25, *б*. Касательное напряжение достигает наибольшего значения в точках нейтральной линии сечения:

$$\tau_{max} = [\tau_{xy}]_{y=0} = \frac{3Q_y}{2F}. \qquad (V.31)$$

Результаты решения той же задачи методом теории упругости таковы:

1. По нейтральной линии выполняется одна часть второго предположения – касательные напряжения в точках нейтральной линии параллельны оси *y*.

2. Касательные напряжения в средней и крайней точках нейтральной линии определяются по формулам:

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{Q_y}{F}, \quad \tau_2 = \alpha_2 \frac{Q_y}{F}.$$

Значения α_1 и α_2 при $\mu = 0{,}25$ даны в табл. 6, а характер распределения напряжений по нейтральной линии показан на рис. V.25, *а* пунктиром.

Таблица 6

h/b	1/2	1	2	3
α_1	1,28	1,41	1,47	1,49
α_2	2,98	1,69	1,55	1,501

Из этой таблицы видно, что с увеличением вытянутости сечения вдоль оси *y* значения α_1 и α_2 стремятся к 3/2 и уже при $h/b = 2$ значение τ_{max}, полученное по формуле (V.29), отличается от точного на 3,2 %.

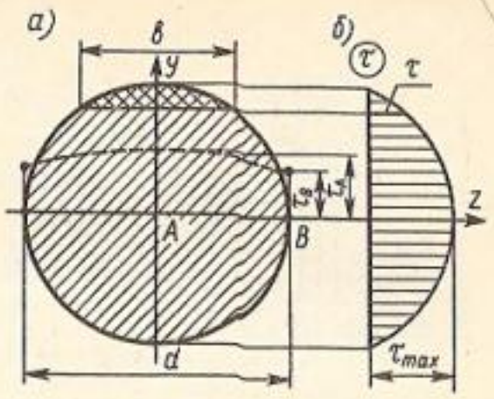


Рис. V.26

В круглом сечении τ_{xy}, найденное по формуле (V.29), изменяется по закону изменения отношения $S_z^{отс}/b\,(y)$ (рис. V.26, *а*). Можно доказать, что это отношение достигает максимума на нейтральной линии. Эпюр τ изображен на рис. V.26, *б*:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z^{max}}{I_z d},$$

где S_z^{max} – статический момент части сечения по одну сторону от нейтральной линии относительно этой линии.

Из § IV.10

$$S_z^{max} = \frac{2}{3}R^3 = \frac{d^3}{12},$$

или

$$\tau_{max} = \frac{4Q_y}{3F}. \qquad (V.32)$$

Из решения той же задачи методом теории упругости вытекает, что, так же как в прямоугольнике, по нейтральной линии τ направлено параллельно оси *y*, а его значения в средней и крайней точках при $\mu = 0{,}25$ будут

$$\tau_{max} = \tau_A = 1{,}38\frac{Q_y}{F}, \quad \tau_B = 1{,}23\frac{Q_y}{F}.$$

Действительный характер распределения напряжений по диаметру показан на рис. V.26, *а* штриховой линией. Видим, что даже в круге – сечении, которое никак нельзя назвать вытянутым вдоль оси *y*, приближенное значение τ_{max} отличается от точного только на 3,76 %, хотя для определения τ в произвольной точке этого сечения приближенная формула (V.29) непригодна.

Проведенные вывод и анализ позволяют заключить следующее:

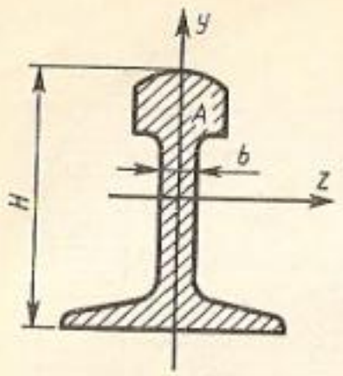


Рис. V.27

1. Формула (V.25), полученная *Д. И. Журавским* в 1858 г., хотя непригодна для определения касательного напряжения в любой точке произвольного сечения, например в точке A сечения (рис. V.27), дает возможность найти практически точное значение τ_{max} при условии, что $H/b \geqslant 2$, демонстрируя этим изящное и простое инженерное решение очень трудной и чаще точно неразрушимой математической задачи.

2. Задача по определению касательного напряжения в любой точке произвольного (несимметричного) нетонкостенного сечения методами сопротивления материалов не решается, и ее решение точно или приближенно получают методами теории упругости.

§ V.10. Вывод формулы для определения касательных напряжений в балках тонкостенного разомкнутого сечения при прямом поперечном изгибе

При выводе формулы принимаем предположения:

1. Касательные напряжения распределяются по толщине сечения равномерно и направлены по касательной к средней линии сечения. Обоснование этого предположения будет таким же, как при определении касательных напряжений в брусьях тонкостенного замкнутого сечения (рис. III.12).

2. Нормальные напряжения в поперечных сечениях можно определять по формуле (V.22).

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, следы которых AB и CD, и сечением, нормальным к средней линии, след которого BC (размер CD произволен), вырезаем из тонкостенной балки элемент $ABCD$ (рис. V.28, *а*). По грани элемента BC (рис. V.28, *б*) в силу свойства парности будут действовать равномерно распределенные касательные напряжения τ, равные напряжениям в точке B поперечного сечения. Из условия равновесия элемента

$$\Sigma X = \iint\limits_{F_{\text{отс}}} \sigma dF + \tau t dx - \iint\limits_{F_{\text{отс}}} (\sigma + d\sigma)\, dF = 0, \quad \text{или}$$

$$\iint\limits_{F_{\text{отс}}} d\sigma dF = \tau t dx,$$

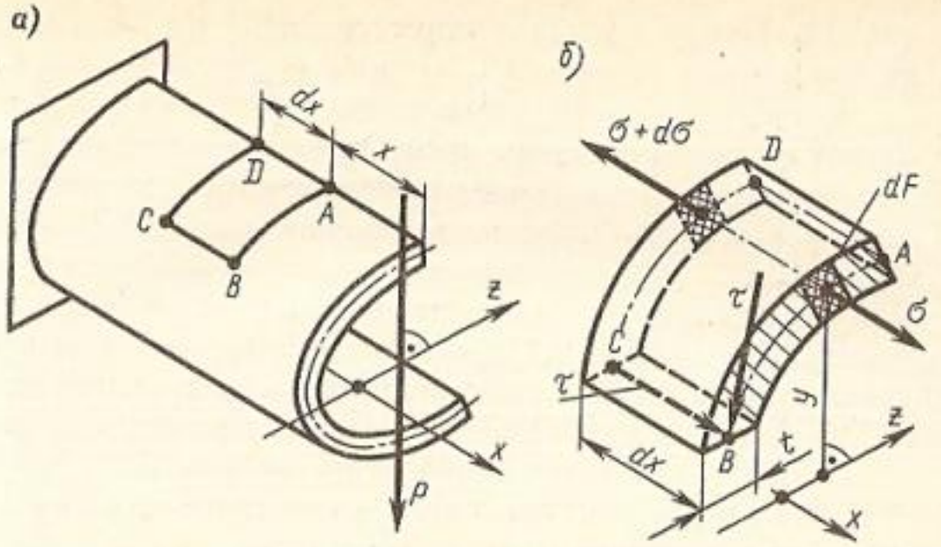


Рис. V.28

но $d\sigma = \dfrac{dM_z}{I_z} y$, поэтому

$$\tau = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^{\text{отс}}}{I_z t},$$

где $S_z^{\text{отс}} = \iint\limits_{F_{\text{отс}}} y dF$ – статический момент части площади сечения по одну сторону от точки средней линии, в которой определяется τ. Окончательно, учитывая (V.8),

$$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{I_z t}, \tag{V.33}$$

где τ_{Q_y} – касательное напряжение в текущей точке средней линии при изгибе балки в плоскости, перпендикулярной оси z. По аналогии, при изгибе балки в плоскости, перпендикулярной оси y,

$$\tau_{Q_z} = \frac{Q_z S_y^{\text{отс}}}{I_y t}. \tag{V.34}$$

Формулы (V.33) и (V.34) по структуре совпадают с формулой (V.29), однако принципиальная разница у них огромна. По формуле (V.29) приближенно определяется компонент полного касательного напряжения τ_{xy} для сплошных сечений, у которых силовая линия – ось симметрии, по формулам (V.33) и (V.34), практически точно, определяются полные касательные напряжения в тонкостенных сечениях с произвольной формой средней линии.

§ V.11. Центр изгиба тонкостенного разомкнутого сечения

Встает вопрос: при каком взаимном расположении внешних сил и балки σ и τ в точках ее поперечного сечения можно определять соответственно по формулам (V.22) и (V.23), (V.33) и (V.34)?

Для того чтобы нормальные напряжения определялись по формулам (V.22) и (V.23), как это следует из их вывода, внешние силы и пары нужно приложить перпендикулярно одной из главных центральных осей поперечного сечения и эта ось при таком нагружении будет нейтральной линией (рис. V.29, *а, б*). На этих рисунках тонкостенные балки заданы своими срединными поверхностями.

Вопрос о применимости формул (V.33) и (V.34) сложнее, и, чтобы ответить на него, следует найти положения линий действия равнодействующих касательных сил упругости Q_y и Q_z в сечении.

При действии в сечении только касательных напряжений, определяемых по (V.33), равнодействующая касательных сил упругости Q_y перпендикулярна оси z (рис. V.29, *в*). Направление Q_y найдем из формулы

$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \tau_{Q_y} \cos\alpha t dS,$$

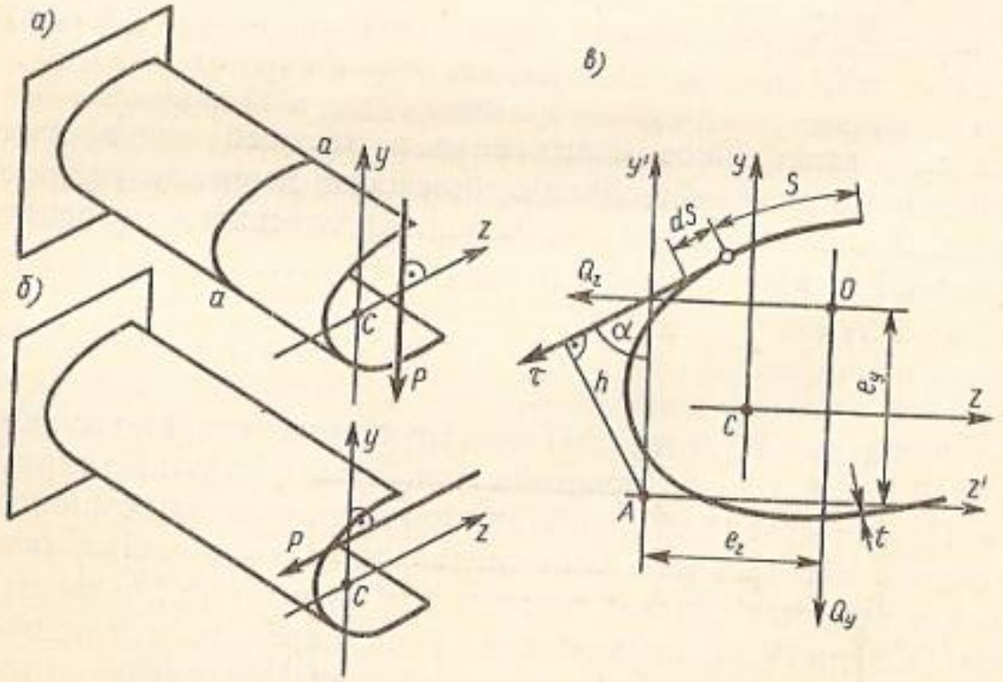


Рис. V.29

в которой n – число участков средней линии; i – номер участка; α – угол между направлениями Q_y и τ_{Q_y}; S_i – длина i-го участка.

Для определения положения линии действия Q_y воспользуемся теоремой статики: момент равнодействующей плоской системы сил относительно точки равен сумме моментов составляющих сил относительно этой точки. На рис. V.29, *в* оси z' и y' параллельны главным центральным осям. Основанием для выбора положения моментной точки A является возможно большее упрощение последующих вычислений.

Из рис. V.29, *в*

$$Q_y e_z = -\sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} h\tau t dS, \tag{V.35}$$

где e_z – расстояние между осью y' и линией действия Q_y

Подставив в (V.35) τ_{Q_y} из (V.33), получим

$$e_z = -\frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} h S_z^{\text{отс}} dS. \tag{V.36}$$

При действии в сечении только касательных напряжений, определяемых по (V.34) (рис. V.29, *в*), по аналогии с (V.36), получим

$$e_y = \frac{1}{I_y} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} h S_y^{\text{отс}} dS, \tag{V.37}$$

где e_y – расстояние между осью z' и линией действий Q_z.

Как вытекает из (V.36) и (V.37), положение точки O – центра изгиба (рис. V.29, *в*) зависит только от геометрии сечения и, следовательно, для данного сечения оно будет единственным, так же как положение его центра тяжести.

Понятию «центр изгиба» можно дать несколько определений, различных по форме, но одинаковых по смыслу:

1. Центр изгиба – точка, координаты которой определяются по формулам (V.36) и (V.37).

2. Центр изгиба – точка пересечения линий действия Q_y и Q_z при действии в сечении напряжений, определяемых по формулам (V.33) и (V.34).

3. Центр изгиба – точка, через которую всегда проходит равнодействующая касательных сил упругости в сечении, если напряжения в нем определяются по формулам (V.33) и (V.34).

4. Центр изгиба – точка, относительно которой момент касательных сил упругости в сечении, если напряжения

в нем определяются по формулам (V.33) и (V.34), равен нулю.

В сечениях, имеющих ось симметрии, центр изгиба лежит на этой оси. В сечениях, имеющих две оси симметрии, он совпадает с центром тяжести. Геометрическое место центров изгиба называется линией, а в стержнях постоянного сечения – осью центров изгиба.

Рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. V.30) стержня (см. рис. V.29, *а*). На рис. V.30 x_0 – ось центров изгиба.

При прямом поперечном изгибе силы упругости в сечении стержня приводятся к двум внутренним силовым факторам M_z и Q_y. Если на отсеченную часть действуют только P, M_z и Q_y (линия действия Q_y, при определении напряжения по формуле (V.33) проходит через точку O), она в равновесии не находится, так как момент относительно оси x_0 от M_z и Q_y равен нулю, а момент от силы P равен PH. Следовательно, при таком взаимном расположении силы P и стержня в его сечениях помимо касательных напряжений, определяемых по (V.33), возникнут дополнительные касательные напряжения, являющиеся интенсивностью дополнительных касательных сил упругости, приводящихся к паре $M_к$, лежащей в плоскости сечения – крутящему моменту, и стержень помимо изгиба испытывает кручение. Крутящий момент $M_к = 0$, если $H = 0$, т. е. если линия действия равнодействующей внешних сил в сечении пересекается с x_0.

Выводы.

1. Для того чтобы стержень не испытывал кручения и касательные напряжения в его сечениях определялись по формулам (V.33) и (V.34), линии действия равнодействующих внешних сил в каждом сечении должны пересекаться с линией центров изгиба.

2. Крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов внешних сил по одну сторону от сечения относительно нормали к его плоскости, проходящей через центр изгиба.

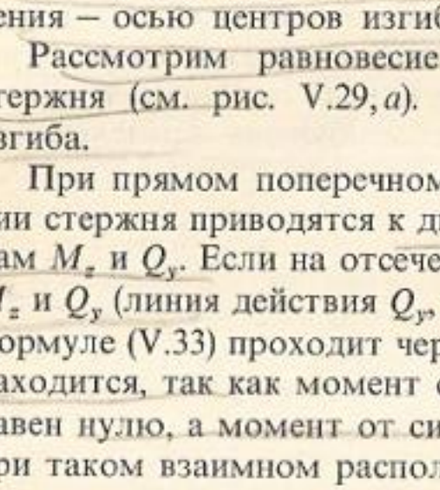


Рис. V.30

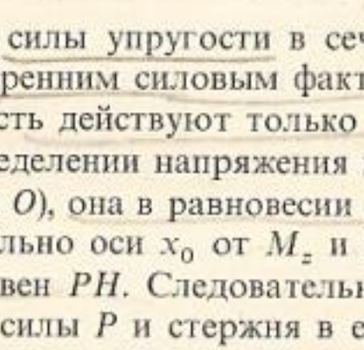


Рис. V.31

1. Положение центра изгиба в нетонкостенном сечении методами сопротивления материалов найти нельзя, так как мы не умеем определять полное касательное напряжение при поперечном изгибе в его произвольной точке. Найденные методами теории упругости точные решения говорят о том, что в нетонкостенных сечениях расстояние между центром тяжести и центром изгиба невелико по сравнению с размерами сечения. Например, для полукруга радиуса R при $\mu = 0{,}3$ расстояние между ними равняется $0{,}125R$. Следовательно, в не очень точных расчетах крутящий момент в брусьях нетонкостенного сечения можно определять, беря момент внешних сил по одну сторону от сечения относительно оси бруса.

2. Центром изгиба тонкостенных сечений, у которых средние линии участков пересекаются в одной точке, будет эта точка (рис. V.31). Действительно, если касательные напряжения в сечении определяются по формулам (V.33) и (V.34), момент касательных сил упругости относительно точки O равен нулю, поэтому должен быть равен нулю момент относительно этой точки их равнодействующей Q, а это будет только тогда, когда линия ее действия будет проходить через точку пересечения средних линий участков сечений.

§ V.12. Две теоремы о касательных напряжениях в тонкостенных сечениях

Теорема 1. В точках средней линии сечения, в которых касательные напряжения противоположны, они обращаются в нуль.

Пусть в точке D сечения касательные напряжения противоположны (рис. V.32, *а*). Проводим продольное сечение (след DK), раздвигаем половины вырезанной части балки и смотрим на них сверху (рис. V.32, *б*, *в*). На сторонах продольного сечения должны удовлетворяться свойство парности и закон действия и противодействия. На рис. V.32, *б* мы удовлетворили свойству парности, но нарушили закон действия и противодействия. На рис. V.32, *в* удовлетворили закону действия и противодействия, но на правых площадках нарушали свойство парности. Следовательно, свойство парности и закон действия и противодействия по сторонам продольного сечения в точке D могут одновременно удовлетворяться только при $\tau_D = 0$.

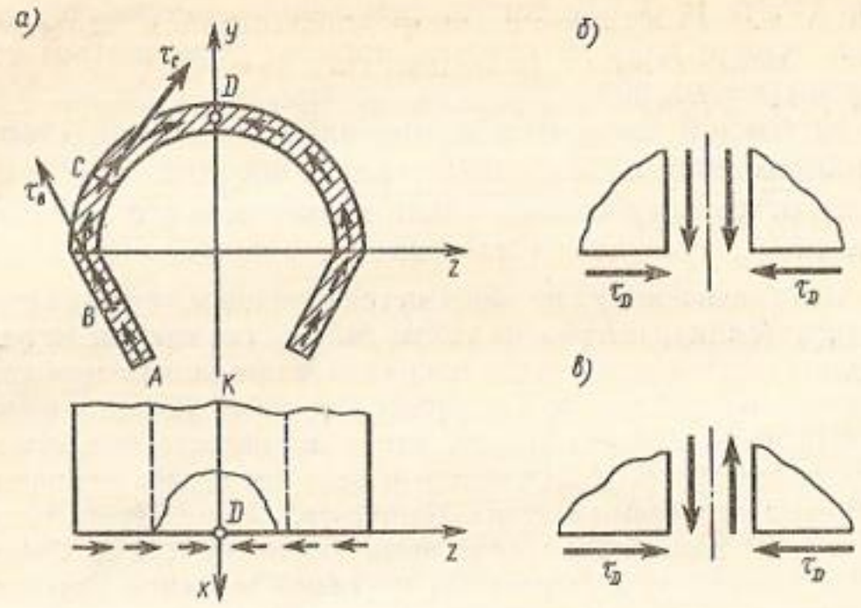


Рис. V.32

Следствие: так как на участке тонкостенного сечения из (V.33) касательные напряжения изменяются по закону изменения отношения $S_z^{отс}/t$, а $Q_y/I_z = \text{const}$, то касательные напряжения могут быть противоположны только в тех точках средней линии, для которых $S_z^{отс} = 0$.

Теорема 2. В любой точке средней линии (рис. V.32, *а*) касательное напряжение

$$\tau_C = \tau_B + \frac{Q_y S_z^{BC}}{I_z t},$$

где S_z^{BC} – статический момент части площади сечения между точками B и C.

Действительно,

$$\tau_c = \frac{Q_y S_z^{AC}}{I_z t}, \text{ но } S_z^{AC} = S_z^{AB} + S_z^{BC},$$

поэтому

$$\tau_c = \frac{Q_y (S_z^{AB} + S_z^{BC})}{I_z t} = \frac{Q_y S_z^{AB}}{I_z t} + \frac{Q_y S_z^{BC}}{I_z t},$$

или

$$\tau_C = \tau_B + \frac{Q_y S_z^{BC}}{I_z t}. \qquad \text{(V.38)}$$

§ V.13. Построение эпюр касательных напряжений на тонкостенных разомкнутых сечениях и определение положений их центров изгиба

Во всех примерах этого параграфа считаем толщину сечения постоянной.

В примерах V.9 – V.11 построить на сечениях, симметричных относительно нейтральной линии, эпюры касательных напряжений и определить положения их центров изгиба.

Пример V.9 (рис. V.33).

1. Изображаем поток касательных напряжений (направление касательных напряжений в точках средней линии сечения).

При изображении потока следует пользоваться правилом: приняв направление касательных напряжений для $S_z^{отс} > 0$, совпадающим с направлением движения по участку средней линии сечения, для $S_z^{отс} < 0$ мы должны считать это направление противоположным направлению движения при условии, что $F_{отс}$ в обоих случаях увеличивается. Направление потока в обоих случаях меняется на противоположное, если $F_{отс}$ – уменьшается. Поток касательных напряжений изображен на рис. V.33, *а* стрелками внутри сечения.

2. Пользуясь формулой (V.33), составляем уравнения касательных напряжений по участкам. Так как $Q_y/I_z t = \text{const}$ для любой точки средней линии, то касательные напряжения на участках сечения изменяются по законам изменения для них $S_z^{отс}$.

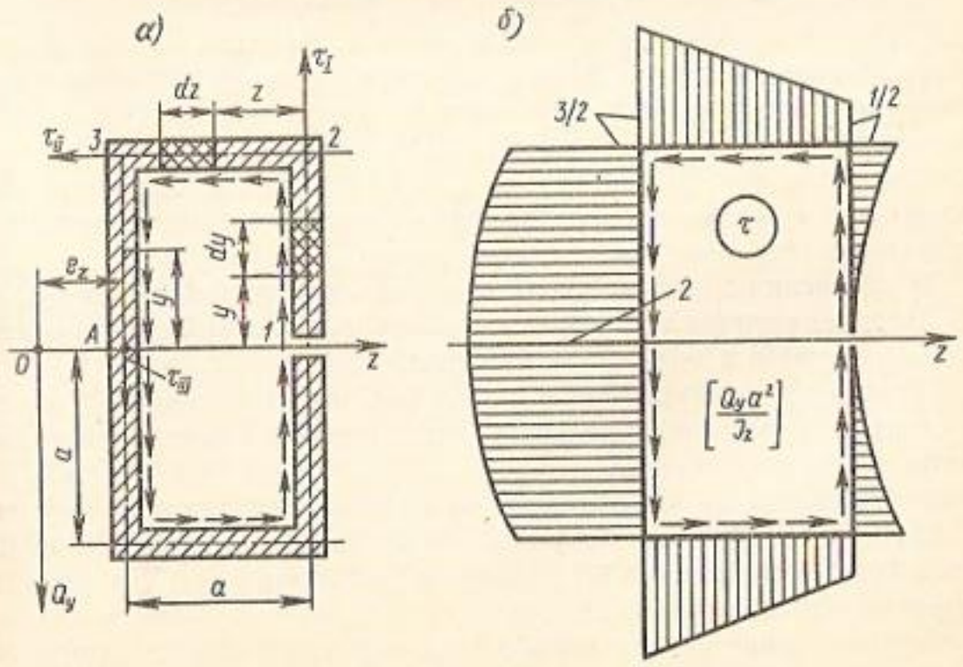


Рис. V.33

I участок. Отсеченная площадь $F^{I}_{отс} = ty$; ордината центра тяжести этой площади $y_c = y/2$, поэтому $S^{I}_z = \frac{t}{2} y^2$ – уравнение статического момента отсеченной части площади на первом участке; в этом уравнении $0 \leqslant y \leqslant a$.

II участок. Определяем

$$S^{II}_z = \frac{a^2 t}{2} + atz,$$

или

$$S^{II}_z = a^2 t \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{a}\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant a.$$

III участок. Определяем

$$S^{III}_z = [S^{II}_z]_{z=a} + t\left(a - y\right)\left(y + \frac{a-y}{2}\right),$$

или

$$S^{III}_z = a^2 t \left(2 - \frac{y^2}{2a^2}\right), \quad 0 \leqslant y \leqslant a.$$

Подставив найденные выражения для $S^{отс}_z$ в (V.33), получим уравнения касательных напряжений на участках средней линии:

$$\tau_I = \frac{Q_y}{2I_z} y^2, \quad \tau_{II} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{a}\right), \quad \tau_{III} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(2 - \frac{y^2}{2a^2}\right).$$

Находим значения τ в граничных точках участков средней линии и τ_{max}:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{Q_y a^2}{2I_z}, \quad \tau_3 = \frac{3Q_y a^2}{2I_z}, \quad \tau_{max} = \frac{2Q_y a^2}{I_z}.$$

3. Эпюры τ строятся на средней линии сечения. Ординаты напряжений откладываются по нормалям к средней линии по одну и ту же сторону от нее, если построение идет в направлении потока. При движении по потоку можно откладывать ординаты как вправо, так и влево, но, выбрав одно из направлений отложения, следует им пользоваться в процессе всего построения.

В уравнении τ_I коэффициент при y^2 положителен, поэтому кривая очертания эпюра τ на первом участке (парабола) будет обращена выпуклостью к средней линии (рис. V.33, *б*).

Уравнение τ_{II} – уравнение прямой. Следует помнить, что на участках сечения, параллельных нейтральной линии, очертания эпюра τ – прямолинейны.

В уравнении τ_{III} коэффициент при y^2 отрицателен, поэтому парабола будет обращена выпуклостью от средней линии. Эпюр на нижней половине сечения будет симметричен эпюру на его верхней половине относительно оси z.

4. Положение центра изгиба можно было найти по формуле (V.36), однако для лучшего усвоения изучающим процесса определения положения этой важнейшей точки сечения проделаем этот процесс с самого начала (с составления равенства моментов равнодействующей и составляющих относительно выбранной точки).

Из эпюра τ видно, что Q_y будет направлена вниз, так как равнодействующая касательных сил упругости, направленных вниз, больше равнодействующей этих сил, направленных вверх. Предполагаем, что линия ее действия расположена на расстоянии e_z слева от средней линии третьего участка (рис. V.33, *а*). За моментную принимаем точку A, это удобно, потому что силы упругости на третьем участке момента относительно точки A не дадут и вычисления будут короче. По рис. V.33, *а* составим равенство моментов Q_y и сил упругости в сечении относительно точки A

$$Q_y e_z = 2\left(\int_0^a a\tau_I t dy + \int_0^a a\tau_{II} t dz\right). \tag{V.39}$$

Скобка правой части множится на два, так как по симметрии сечения относительно оси z моменты сил упругости его нижней части около точки A равны моментам сил упругости его верхней части около этой точки. Силы упругости вращают сечение вокруг точки A в том же направлении, что и Q_y, поэтому их моменты вошли в равенство со знаком плюс. Подставив в равенство (V.39) уравнения τ_I и τ_{II}, получим

$$e_z = \frac{2at}{I_z}\left(\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dy + a^2 \int_0^a \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{a}\right) dz\right) =$$

$$= \frac{2at}{I_z}\left|\frac{y^3}{6} + \frac{a^2 z}{2} + \frac{az^2}{2}\right|_0^a = \frac{7a^4 t}{3I_z}.$$

Чтобы выразить e_z через a, вычислим I_z сечения

$$I_z = 2\ (I^I_z + I^{II}_{z_1} + a^2 F^{II}) = 2\left(\frac{8a^3 t}{12} + \frac{t^3 a}{12} + a^3 t\right).$$

Пренебрегая при определении моментов инерции тонкостенных сечений членами, содержащими t^3, как малыми по сравнению с членами, содержащими a^3, найдем

$$I_z = \frac{10}{3} a^3 t, \quad e_z = 0{,}7a.$$

Значение e_z – положительно. Это означает, что точка O – центр изгиба – расположена слева от точки A, как мы и предположили в начале решения задачи.

Пример V.10 (рис. V.34, *а*).

1. Обычно тонкостенное сечение задают его средней линией. Для возможности изображения текущих значений τ их можно несколько смещать вверх или вниз от точек, в которых они действуют (условность) (рис. V.34, *а*). Уравнения τ на наклонном и вертикальном участках составляются несколько проще, и вычисления по определению положения центра изгиба будут короче, если y на

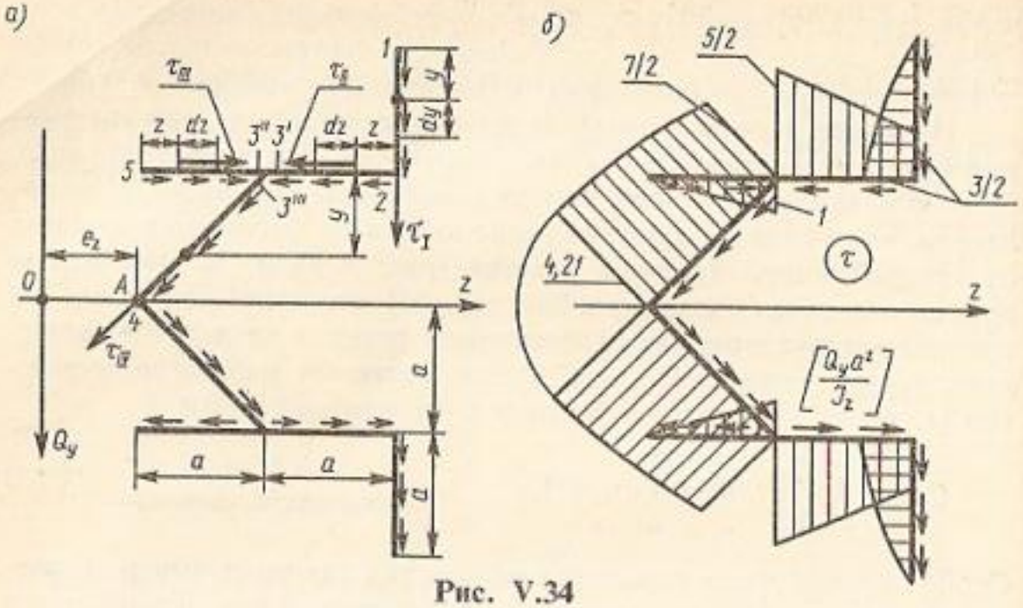


Рис. V.34

них отсчитывать соответственно от точек *3* и *1*, а не от нейтральной линии. Составляем уравнения τ_i по участкам:

$$\tau_I = \frac{Q_y}{I_z} y\left(2a - \frac{y}{2}\right),\ 0 \leqslant y \leqslant a;$$

$$\tau_{II} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{3}{2} + \frac{z}{a}\right),\ 0 \leqslant z \leqslant a;$$

$$\tau_{III} = \frac{Q_y a}{I_z} z,\ 0 \leqslant z \leqslant a;$$

$$S_z^{IV} = [S_z^{II}]_{z=a} + [S_z^{III}]_{z=a} + \sqrt{2}\, ty\left(a - \frac{y}{2}\right),$$

$$\tau_{IV} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2}\right)\right),\ 0 \leqslant y \leqslant a.$$

Находим:

$$\tau_1 = 0,\ \tau_2 = \frac{3Q_y a^2}{2I_z},\ \tau_{3'} = \frac{5Q_y a^2}{2I_z},\ \tau_{3''} = \frac{Q_y a^2}{I_z},$$

$$\tau_{3'''} = \frac{7Q_y a^2}{2I_z},\ \tau_{max} = \frac{4{,}21 Q_y a^2}{I_z}.$$

Эпюр τ построен на рис. V.34, *б*.

2. При определении положения центра изгиба за моментную примем точку *A*. Тогда

$$Q_y e_z = 2\left(-\int_0^a 2a\tau_I t dy + \int_0^a a\tau_{II} t dz - \int_0^a a\tau_{III} t dy\right).$$

Моменты сил упругости на *I* и *III* участках вошли в это равенство со знаками минус, так как они вращают сечение вокруг

точки *A* в направлениях, противоположных вращению сечения моментом от Q_y. Подставляя в равенство уравнения τ_I, τ_{II} и τ_{III} и интегрируя, получим

$$e_z = \frac{2a^4 t}{I_z}\left(-\frac{5}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{a^4 t}{3I_z}.$$

Находим

$$I_z = 2\left(I_{z_1}^{I} + F^{I}\frac{9}{4}a^2 + I_{z_2}^{II} + F^{II}a^2 + I_z^{IV}\right) =$$

$$= 2a^3 t\left(\frac{1}{12} + \frac{9}{4} + 2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 9{,}61 a^3 t,$$

$$e_z = -0{,}0347a.$$

Знак минус в выражении e_z означает, что центр изгиба расположен справа от точки *A*.

Пример V.11 (рис. V.35).

1. Составляем уравнения τ_i по участкам

$$\tau_I = \frac{\sqrt{2}\, Q_y}{I_z} y(2a - y),\ 0 \leqslant y \leqslant a.$$

Покажем определение $S_z^{отс}$ для площади, включающей криволинейный тонкостенный участок (рис. V.35, *а*). На криволинейном участке

$$y = a\cos\alpha,\ dF = tdS = atd\alpha.$$

Следовательно,

$$S_z^{II} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2 t + a^2 t\int_0^{\varphi}\cos\alpha d\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2 t + a^2 t\,|\sin\alpha|_0^{\varphi},$$

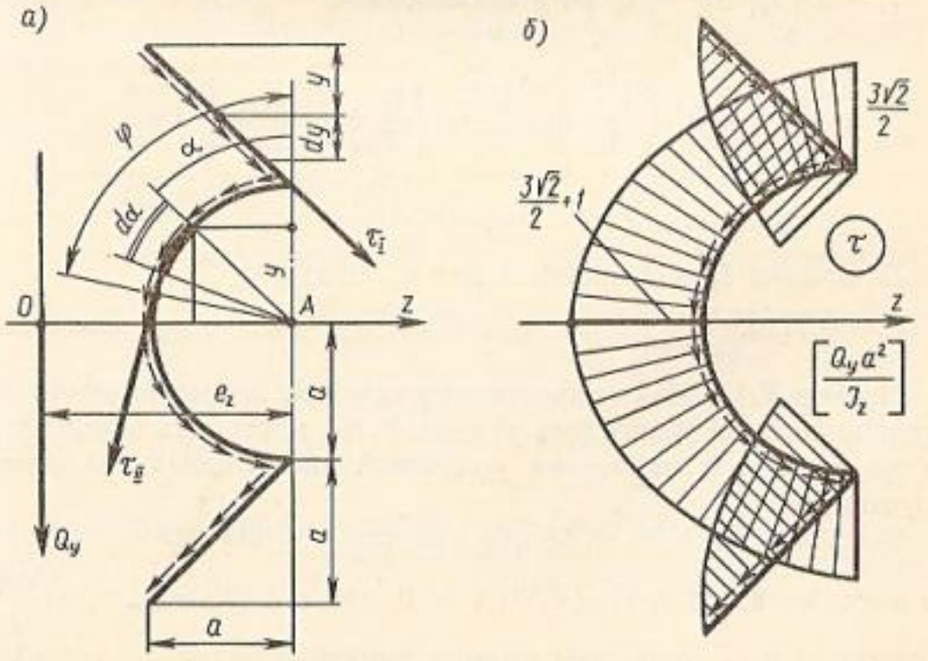


Рис. V.35

или

$$S_z^{II} = a^2 t\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sin\varphi\right),$$

$$\tau_{II} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sin\varphi\right),$$

из которого

$$\tau_1 = 0,\ \tau_2 = \frac{3\sqrt{2}\,Q_y a^2}{I_z},\ \tau_{max} = [\tau_{II}]_{\varphi=\pi/2} = \frac{(3\sqrt{2}+2)\,Q_y a^2}{2I_z}.$$

Эпюр τ построен на рис. V.35, *б*.

2. За моментную точку следует принять центр окружности средней линии второго участка, так как плечи сил упругости на этом участке относительно точки *A* будут постоянны и равны *a* (рис. V.35, *a*). Тогда

$$Q_y e_z = -2\int_0^a \frac{\sqrt{2}}{2} a\tau_I \sqrt{2}\, a t dy + \int_0^{\pi} a\tau_{II} a t d\varphi.$$

Подставляя в это равенство уравнения τ_I и τ_{II} и интегрируя, получим

$$e_z = \frac{a^4 t}{I_z}\left(-2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{6}\right) + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2} + 2\right) = 6{,}3\frac{a^4 t}{I_z}.$$

Находим

$$I_z = 2\left(I_{z_1}^{I} + F^{I}\frac{9}{4}a^2\right) + a^3 t\int_0^{\pi}\cos^2\alpha d\alpha =$$

$$= a^3 t\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\sqrt{2}}{2} + \left|\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right|_0^{\pi}\right) =$$

$$= a^3 t\,(0{,}236 + 6{,}36 + 1{,}57) = 8{,}17 a^3 t.$$

Подставив I_z в выражение для e_z, получим

$e_z = 0{,}771a$.

Пример V.12. Для тонкостенных сечений, симметричных относительно силовой линии (ось *y*) (рис. V.36), построить эпюры τ без предварительного написания уравнений касательных напряжений по участкам.

Сечение (рис. V.36, *a*). Центр тяжести сечения лежит посредине его высоты на оси *y*. Из (V.31) $\tau_1 = 0$, так как $S_z^{(1)} = 0$; $\tau_2 = \frac{Q_y a^2}{I_z}$; значения τ_1 и τ_2 соединяем прямой линией (участок *1–2* параллелен оси *z*).

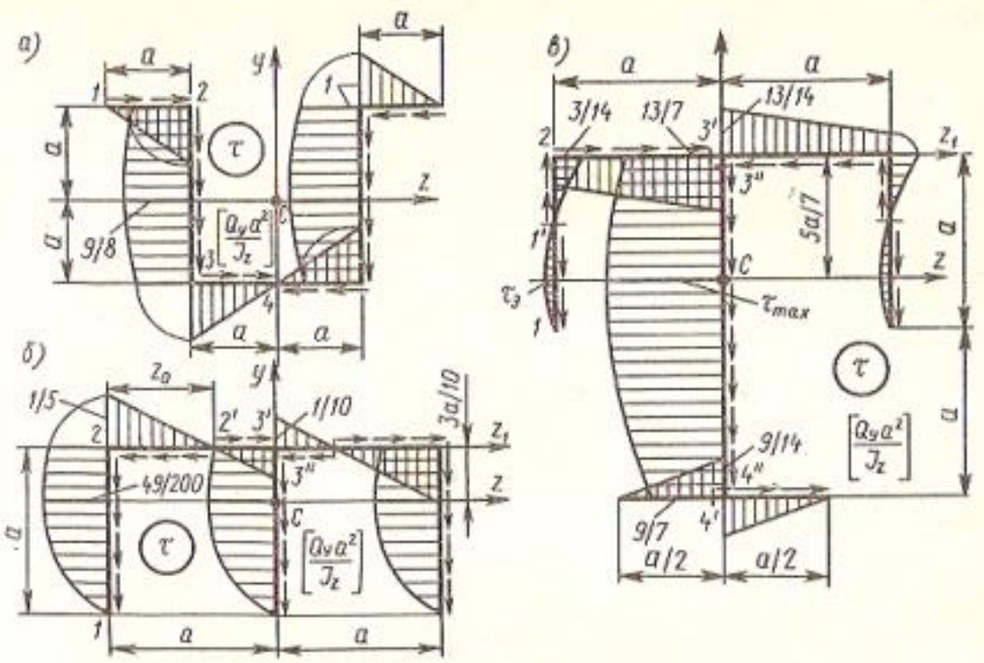


Рис. V.36

Максимального значения τ достигает на нейтральной линии, так как при движении от точки *2* к нейтральной линии $S_z^{отс}$ увеличивается, а от нейтральной линии к точке *3* – уменьшается ($S_z^{отс}$ части площади участка *2–3* снизу от нейтральной линии отрицателен). Находим

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z^{max}}{I_z t} = \frac{Q_y}{I_z t}\left(a^2 t + at\frac{1}{2}a\right) = \frac{3Q_y a^2}{2I_z}.$$

Напряжение $\tau_3 = \tau_2$ и τ на участке *2–3* изменяется по параболическому закону; $\tau_4 = 0$, так как $S_z^{(1-4)} = 0$.

Сечение (рис. V.36, *б*). Определяем положение нейтральной линии.

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = -\frac{3a^2 t}{2\cdot 5at} = -\frac{3}{10}a.$$

Знак статического момента при определении τ никакого значения не имеет и в формулу (V.31) следует подставить $|S_z^{отс}|$.

Напряжения $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{Q_y a}{I_z}\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) = \frac{Q_y a^2}{5I_z}$;

$$\tau_{max} = \frac{Q_y}{I_z}\cdot\frac{7}{10}a\cdot\frac{7}{20}a = \frac{49Q_y a^2}{200I_z}.$$

Для определения положения точки средней линии, в которой $S_z^{отс}$ обращается в нуль, а следовательно, меняет знак, приравняв $S_z^{(1-2')}$ нулю, получим

$$S_z^{(1-2')} = a^2 t\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{z_0}{a}\right) = 0,\ z_0 = \frac{2}{3}a.$$

Напряжения $\tau_{3'} = \dfrac{Q_y a^2}{10 I_z}$, $\tau_{3''} = \tau_2$.

Сечение (рис. V.36, *в*). Находим:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = -\frac{5a^2 t}{7at} = -\frac{5}{7}a;$$

$\tau_1 = 0$; $\tau_{1'} = 0$, так как $S_z^{(1-1')} = 0$; $\tau_3 = \dfrac{2Q_y a^2}{49 I_z}$;

$$\tau_2 = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3Q_y a^2}{14 I_z};\quad \tau_{3'} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{3}{14} + \frac{5}{7}\right) = \frac{13 Q_y a^2}{14 I_z};$$

$$\tau_{3''} = 2\tau_{3'};\quad \tau_{\max} = \frac{Q_y a^2}{I_z}\left(\frac{13}{7} + \frac{5\cdot 5}{7\cdot 14}\right) = \frac{2\,07 Q_y a^2}{98 I_z};$$

$$\tau_{4'} = \frac{Q_y}{I_z}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{9}{2}a = \frac{9Q_y a^2}{14 I_z};\quad \tau_{4''} = 2\tau_{4'}.$$

Пример V.13. Построить эпюр τ на тонкостенном замкнутом сечении, у которого силовая линия – ось симметрии (рис. V.37, *а*).

1. Определяем:

$$y_c = \frac{S_{z_4}}{F} = \frac{(2\cdot 3 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 1{,}5)a^2 t}{12at} = 1{,}42a;$$

$$I_{z_4} = I_{z_4}^{\mathrm{I}} + I_{z_4}^{\mathrm{II}} + I_{z_4}^{\mathrm{III}} = \left(2\cdot 9 + 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{27}{3}\right)a^3 t =$$

$$= 38a^3 t,$$

$$I_z = I_{z_4} - y_c^2 F = (38 - 12\cdot 1{,}42^2)\,a^3 t = 13{,}8a^3 t.$$

2. Поток касательных напряжений будет симметричен относительно оси *y*. По первой теореме § V.12 $\tau_0 = \tau_4 = \tau_6 = 0$. Следовательно, сечение в точках *0*, *4* и *6* можно считать разомкнутым. Используя вторую теорему § V.12, строим эпюр τ (рис. V.37, *б*).

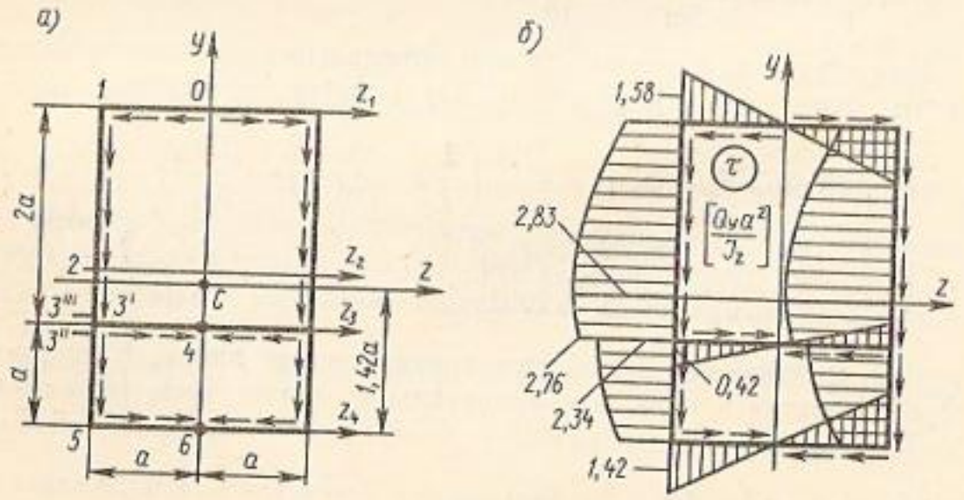


Рис. V.37

Определяем

$$\tau_1 = \frac{Q_y S_z^{(0-1)}}{I_z t} = 1{,}58\frac{Q_y a^2}{I_z},$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{(0-2)}}{I_z t} = \frac{Q_y(1{,}58 + 0{,}5\cdot 1{,}58^2)a^2}{I_z} = 2{,}83\frac{Q_y a^2}{I_z},$$

$$\tau_{3'} = \frac{Q_y |S_z^{(4-3')}|}{I_z t} = 0{,}42\frac{Q_y a^2}{I_z},\quad \tau_5 = \frac{Q_y |S_z^{(6-5)}|}{I_z t} = 1{,}42\frac{Q_y a^2}{I_z},$$

$$\tau_{3''} = \frac{Q_y |S_z^{(6-3'')}|}{I_z t} = 2{,}34\frac{Q_y a^2}{I_z},\quad \tau_{3'''} = \tau_{3'} + \tau_{3''} = 2{,}76\frac{Q_y a^2}{I_z}.$$

§ V.14. Расчет на прочность при прямом поперечном изгибе

Покажем, что гипотеза Бернулли при существовании в поперечных сечениях балки касательных сил упругости несправедлива. Рассмотрим для этого часть боковой поверхности консольной балки (рис. V.38, *а*) прямоугольного поперечного сечения, нагруженной силой на конце. Опираясь на принцип независимости действия сил, найдем перемещение произвольной точки поперечного сечения в направлении оси балки δ_x от действия в этом сечении только касательных сил упругости. Деформация элемента *dx*, *dη* при чистом сдвиге и его новое положение изображены на рис. V.38, *б*, где $d\delta_x$ – перемещение верхней грани элемента относительно нижней в направлении оси *x* за счет чистого сдвига. Находим:

$$d\delta_x = \gamma_{xy} d\eta = \frac{\tau_{xy}}{G} d\eta;\ \text{учитывая (V.30),}$$

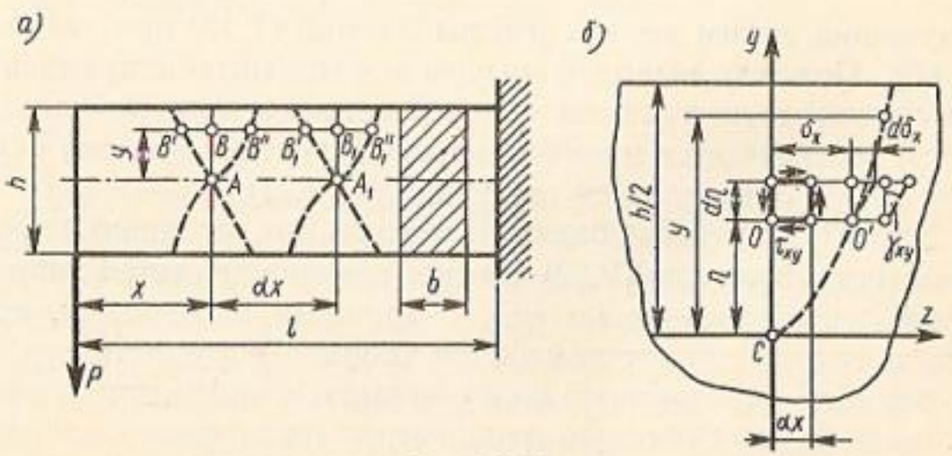


Рис. V.38

$$d\delta_x = \frac{\upsilon Q_y}{bh^3 G}\left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right)d\eta, \qquad \text{откуда}$$

$$\delta_x = \frac{6Q_y}{bh^3 G}\int_0^y \left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right)d\eta, \qquad \text{или}$$

$$\delta_x = \frac{6Q_y}{bh^3 G}\left(\frac{h^2}{4}y - \frac{y^3}{3}\right). \qquad \text{(V.40)}$$

Следовательно, сечение, плоское до деформации при действии в нем касательных напряжений, определяемых по формуле (V.29), превращается в цилиндрическую параболическую поверхность третьего порядка, след которой на боковой поверхности балки показан на рис. V.38, *б* штриховой линией.

Встает вопрос о применимости формулы (V.22), в основу вывода которой была положена гипотеза Бернулли, при прямом поперечном изгибе.

Если перерезывающая сила на участке балки постоянна, то, как следует из формулы (V.29), искажение всех ее поперечных сечений одинаково и $B_1B_1'' = BB''$ (рис. V.38, *а*). При действии в поперечных сечениях только нормальных сил упругости они после деформации остаются плоскими и нормальными к упругой линии, поворачиваясь относительно своего первоначального положения на некоторый угол. Перемещения точек B и B_1 в направлении оси x на счет действия только нормальных сил упругости будут соответственно BB' и B_1B_1'. Относительное удлинение волокна

$$\varepsilon = \frac{B_1'B_1 - B_1''B_1 - BBB' + BB''}{BB_1} = \frac{B_1'B_1 - BBB'}{BB_1}$$

получилось таким же, как и в выражении (V.15) при чистом изгибе. Поэтому вывод формулы нормальных напряжений при чистом и поперечном прямых изгибах, если $Q_y = \text{const}$, ничем не отличается и нормальные напряжения в обоих случаях будут определяться по формуле (V.22).

Если Q_y на участке балки переменна, то установить применимость формулы (V.22) можно, сравнив значения напряжений, определяемых по ней, с точными значениями, которые даются для данной балки теорией упругости.

Возьмем двухопорную балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. V.39). Для этой балки

$$M_z^{max} = \frac{ql^2}{8}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

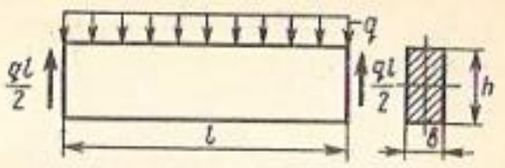


Рис. V.39

По формуле (V.25)

$$\sigma_{max} = \frac{3ql^2}{4bh^2}.$$

Из решения этой задачи методом теории упругости

$$\sigma_{max} = \frac{3ql^2}{4bh^2}\left(1 + \frac{4}{15}\cdot\frac{h^2}{l^2}\right). \qquad \text{(V.41)}$$

Длинными называются балки, у которых

$$\frac{l}{h} \geqslant 5,$$

где l – длина балки; h – высота ее поперечного сечения.

Второй член в скобках выражения (V.41) дает поправку к формуле сопротивления материалов, учитывающую влияние изменения Q_y. Для длинных балок этот член не больше 4/375 и им, конечно, можно пренебречь по сравнению с единицей. Следовательно, и в этом случае σ_{max} можно определять по формуле (V.22).

Общий вывод: максимальные нормальные напряжения в длинных балках при прямом поперечном изгибе можно определить по формуле (V.22).

Сравним значение σ_{max} и τ_{max} в балке (рис. V.38, *а*), у которой

$$M_z^{max} = Pl, \; Q_y = P.$$

Из формул (V.25) и (V.28) $\sigma_{max} = \dfrac{6Pl}{bh^2}$.

Из формулы (V.30) $\tau_{max} = \dfrac{3P}{2bh}$, или

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 4\frac{l}{h}. \qquad \text{(V.42)}$$

Для длинных балок отношение (V.42) не меньше 20, т. е. σ_{max} больше τ_{max} не меньше чем в 20 раз.

Учитывая, что в длинных балках нетонкостенного сечения τ_{max} мало по сравнению с σ_{max} и то, что τ_{max} для многих форм сечений действует в тех точках, в которых $\sigma = 0$ или мало, расчет их на прочность ведут так же, как и при чистом изгибе, только по нормальным напряжениям, и условие прочности проектировочного расчета нетонкостен-

ной балки при прямом поперечном изгибе будет таким (см. рис. V.22):

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} y_A \leqslant [\sigma]_p, \qquad (V.43)$$

$$|\sigma_{min}| = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} |y_B| \leqslant [\sigma]_c.$$

Для балки, материал которой одинаково работает на растяжение и сжатие,

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma]. \qquad (V.44)$$

Условие прочности поверочного расчета запишется так:

$$n_p = \frac{\sigma^p_{пр}}{\sigma_{max}} > 1, \; n_c = \frac{\sigma^c_{пр}}{|\sigma_{min}|} > 1. \qquad (V.45)$$

Для балок, сечение которых тонкостенно, расчет по нормальным напряжениям при прямом поперечном изгибе можно рекомендовать как первое приближение с обязательной последующей проверкой по касательным напряжениям из условия

$$\tau_{max} \leqslant [\tau].$$

Если в балке существует сечение, в котором $|Q_y|$ и $|M_z|$ сравнимы с $|Q_y|_{max}$ и $|M_z|_{max}$, то поверочный расчет следует проводить еще и по этому сечению с использованием теорий прочности. Такой расчет проделан в гл. IX.

§ V.15. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе

Сечения балок, материал которых одинаково работает на растяжение и сжатие, должны быть прежде всего симметричны относительно нейтральной линии для того, чтобы σ_{max} и $|\sigma_{min}|$ равнялись $[\sigma]$. Для дальнейшего выяснения рациональности форм сечений таких балок рассмотрим поперечное сечение в виде прямоугольника (рис. V.40, *а*). Найдем часть изгибающего момента M^I_z, действующего в сечении, воспринимаемую его дважды заштрихованной центральной частью, площадь которой F' равна половине площади прямоугольника, обозначив ее M'_z. Найдем

$$M'_z = \iint_{F'} y\sigma dF = \frac{M^I_z}{I_z} \iint_{F'} y^2 dF = \frac{M^I_z}{I_z} I'_z,$$

где I'_z – момент инерции дважды заштрихованной части сечения.

Следовательно,

$$\frac{M'_z}{M^I_z} = \frac{I'_z}{I_z} = \frac{8a^4}{64a^4} = \frac{1}{8}.$$

Центральная половина площади воспринимает только $^1/_8$ общего изгибающего момента, действующего в сечении, и поэтому прямоугольник нельзя считать рациональной формой поперечного сечения балки, работающей на изгиб.

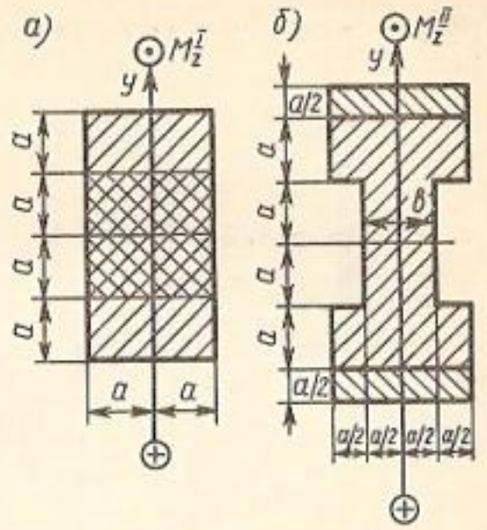


Рис. V.40

Попробуем изменить форму сечения, сохранив его площадь (рис. V.40, *б*) и обозначив через M^{II}_z изгибающий момент, который может быть им воспринят. Вычислим моменты сопротивления сечений *I* и *II*

$$W^I_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{16}{3} a^3, \; W^{II}_z = \frac{2}{5a}\left(\frac{2 \cdot 125a^4}{12} - \frac{8a^4}{12}\right) = \frac{121}{15} a^4.$$

Следовательно, $\frac{M^{II}_z}{M^I_z} = \frac{W^{II}_z}{W^I_z} = 1{,}51.$

Вследствие увеличения W^{II}_z по сравнению с W^I_z, явившегося результатом перенесения материала балки от нейтрального слоя на периферию, максимальный изгибающий момент, который может быть ей воспринят, увеличился на 51%.

Требование увеличения W_z не является единственным, предъявляемым к рациональной форме сечения данной площади. Во избежание появления больших напряжений от M_y и больших перемещений в направлении оси *z* при незначительном отклонении поперечных сил от направления оси *y*, I_y и W_y сечения не должны быть очень малы по сравнению с I_z и W_z (см. косой изгиб). Размер *b* (рис. V.40, *б*) (толщина стенки) должен быть достаточно велик, для того чтобы касательные напряжения не превысили допускаемых или чтобы стенка не потеряла устойчивости. Увеличение W_z не должно чрезмерно увеличивать габаритные размеры сечения. Сечение данной площади будет рациональным, если его форма оптимально удовлетворяет всем этим требованиям.

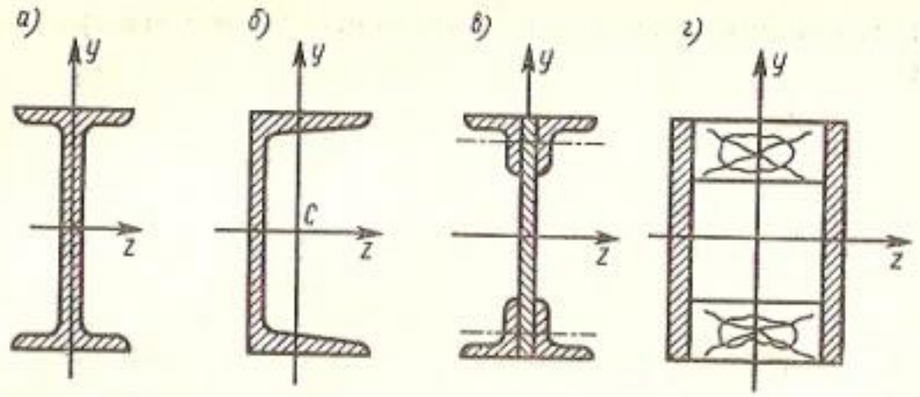


Рис. V.41

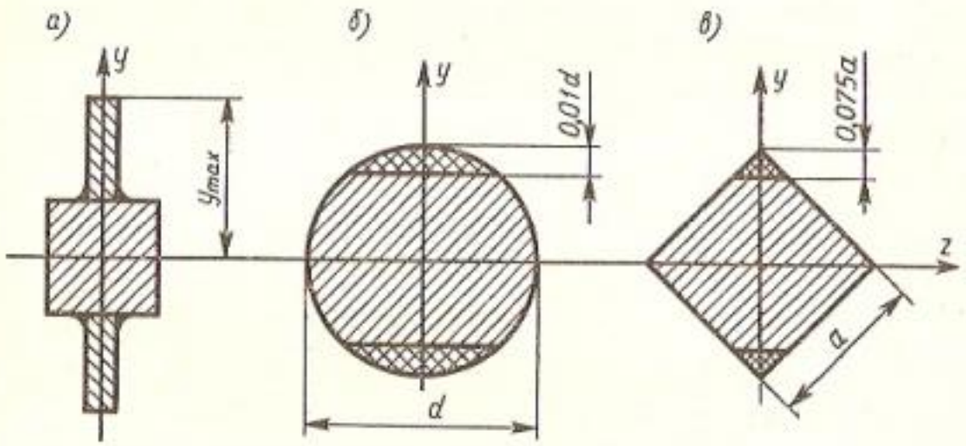


Рис. V.42

Стремление к рациональному использованию материала балок, работающих на изгиб, привело к созданию прокатных профилей типа двутавр и швеллер (рис. V.41, *а, б*) и конструкций в виде клепаных металлических и клееных деревянных балок, сечения которых показаны на рис. V.41, *в, г*.

Возможны исключительные случаи уменьшения прочности балок в результате увеличения площади их поперечных сечений. Например, пытаясь усилить балку приваркой тонких продольных полос, получили ее сечение в виде, изображенном на рис. V.42, *а*. Отношение I_z/y_{max} такого сечения может оказаться меньше W_z исходного за счет того, что степень увеличения I_z будет меньше степени увеличения y_{max}. С другой стороны, уменьшение площадей круга и квадрата (рис. V.42, *б, в*) приводит к тому, что после удаления дважды заштрихованных частей их моменты сопротивления окажутся максимальными.

Рациональность формы сечения оценивается безразмерной характеристикой ω_z, называемой удельным моментом

сопротивления сечения относительно главной центральной оси z

$$\omega_z = \frac{W_z}{\sqrt{F^3}}.$$

Значения ω_z для некоторых форм сечений даны в табл. 7.

Таблица 7

Форма		C = 0,7	z №10	z №20
ω_z	0,141	0,294	0,913	1,35

Сечение считается тем рациональнее, чем больше его ω_z.

Балки, материал которых неодинаково работает на растяжение и сжатие, должны иметь сечения, несимметричные относительно нейтральной линии (рис. V.43). Чтобы σ_{max} и $|\sigma_{min}|$ в таких сечениях равнялись соответственно $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ (балка была равнопрочной), их форма должна удовлетворять требованию

$$\frac{y_A}{|y_B|} = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c}.$$

Пример V.14. Определить размеры поперечных сечений балки при прямом поперечном изгибе (рис. V.44, *а*), считая сечения и материал балки поочередно: прямоугольником $h/b = 2$ (рис. V.45, *а*), Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа; тонкостенным, $t = 0{,}5$ см (рис. V.45, *б*), дюраль, $[\sigma] = 120$ МПа; двутавром (рис. V.45, *в*), Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа; тав-

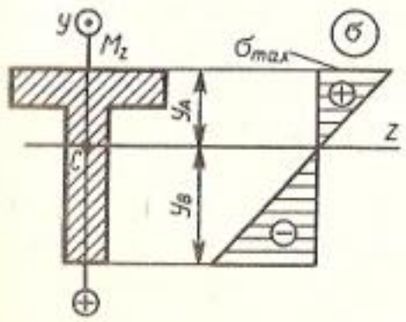


Рис. V.43

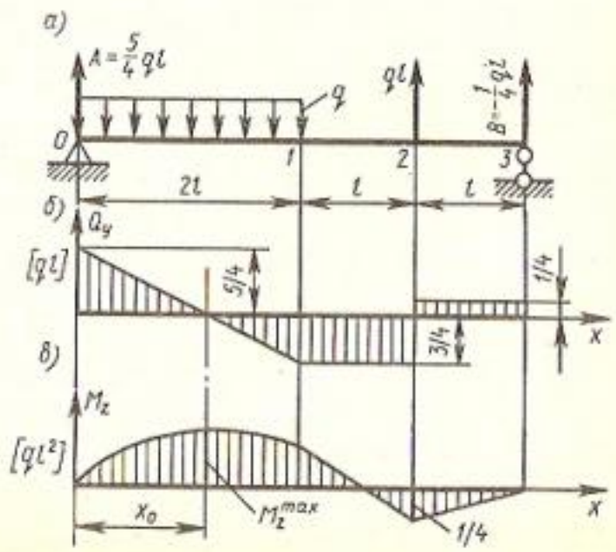


Рис. V.44 ⟶

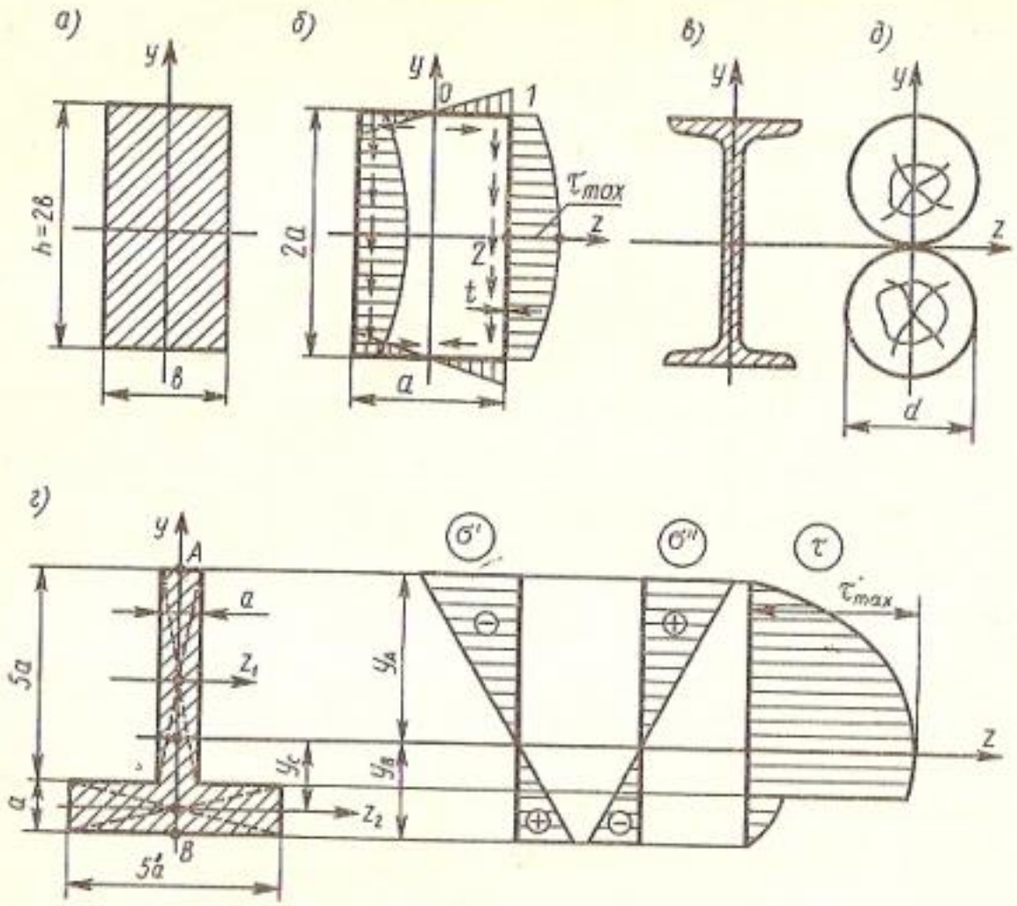


Рис. V.45

ром (рис. V.45, *г*), чугун, $[\sigma]_p = 30$ МПа, $[\sigma]_c = 50$ МПа; состоящим из двух кругов (рис. V.45, *д*), сосна, $[\sigma] = 10$ МПа. Принять $q = 100$ кН/м, $l = 0{,}5$ м.

1. В схеме нагружения балки (рис. V.44, *а*) определяем реакции опор

$$\Sigma m_A = B \cdot 4l + ql \cdot 3l - 3ql \cdot l = 0, \quad B = -\frac{1}{4}ql;$$

$$\Sigma Y = A - 2ql + ql - \frac{1}{4}ql = 0, \quad A = \frac{5}{4}ql.$$

Строим эпюры Q_y и M_z (рис. V.44, *б*, *в*).

Определив из рис. V.44, *б* $x_0 = \frac{5}{4}l$, находим

$$M_z^{max} = M_z^? = ql^2\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{32}ql^2.$$

2. Определяем размер b_1 прямоугольного сечения, считая нейтральной линией ось z.

По (V.28) $W_z = \frac{b_1 h^2}{6} = \frac{2}{3}b_1^3$.

По (V.44) $\sigma_{max} = \frac{75ql^2}{64b_1^3} \leqslant [\sigma]$,

откуда

$$b_1 \geqslant \sqrt[3]{\frac{75ql^2}{64[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{75 \cdot 10^{?} \cdot 0{,}25}{64 \cdot 1{,}6 \cdot 10^8}} = 5{,}68 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5{,}68 \text{ см}.$$

Определяем размер b_2 прямоугольного сечения, считая нейтральной линией ось y. Находим

$$W_y = \frac{hb_2^2}{6} = \frac{1}{3}b_2^3.$$

Из условия прочности балки при двух возможных положениях сечения следует

$$|M_z|_{max} \leqslant [\sigma]\, W_z = [\sigma]\, W_y,$$

или

$$b_2 = \sqrt[3]{2}\; b_1 = \sqrt[3]{2} \cdot 5{,}68 = 7{,}16 \text{ см}.$$

Полученный результат ($b_1 < b_2$) говорит о том, что если это возможно по конструктивным соображениям, сечение балки следует располагать так, чтобы нейтральной линией была его главная центральная ось с большим моментом сопротивления.

3. Определяем размер тонкостенного сечения.

Из примера V.9 для этого сечения

$$I_z = \frac{10}{3}a^3 t;$$

так как в сечении $y_{max} = a$, по формуле (V.26)

$$W_z = \frac{10}{3}a^2 t;$$

по (V.44) $\sigma_{max} = \frac{15ql^2}{64a^2 t} \leqslant [\sigma]$,

откуда

$$a \geqslant \sqrt{\frac{15ql^2}{64t[\sigma]}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{64 \cdot 0{,}005 \cdot 1{,}2 \cdot 10^8}} = 9{,}88 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9{,}88 \text{ см}.$$

Проводим проверку прочности балки по касательным напряжениям в сечении с $Q_y^{max} = \frac{5}{4}ql$, считая $a = 9{,}88$ см.

Эпюр τ для сечения построен на рис. V.45, *б* и

$$\tau_{max} = \frac{Q_y^{max} S_z^{(0-2)}}{I_z t} = \frac{5ql \cdot 3a^2 t}{4 \cdot 10a^3 t} = \frac{15 \cdot 10^5}{4 \cdot 9{,}88 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 38 \text{ МПа}.$$

Так как $[\tau] = 0{,}6[\sigma] = 72$ МПа и $\tau_{max} \leqslant [\tau]$, принимаем в качестве рабочего (безопасного) найденное значение

$a = 9{,}88$ см.

4. Подбираем номер двутавра.

По условию (V.44)

$$W_z^{\text{потр}} = \frac{|M_z|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25ql^2}{32[\sigma]} = \frac{25 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{32 \cdot 1{,}6 \cdot 10^8} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 122 \text{ см}^3,$$

где $W_z^{\text{потр}}$ – потребный момент сопротивления сечения, или момент сопротивления, при котором максимальное по абсолютной величине нормальное напряжение в балке будет равно допускаемому.

По ГОСТу следует подобрать сечение (профиль) с W_z, наименее отличающимся от $W_z^{\text{потр}}$. Если выбирается профиль, у которого $W_z < W_z^{\text{потр}}$, то должно быть

$$\Delta = \frac{W_z^{\text{потр}} - W_z}{W_z} 100\% \leqslant 5\%.$$

В нашем примере выбираем двутавр № 18, имеющий: $W_z = 143$ см^3, $I_z = 1290$ см^4, $S_z^{\max} = 81{,}4$ см^3, $F = 23{,}4$ см^2, $d = 0{,}51$ см.

Проводим проверку прочности балки, сечение которой двутавр № 18, по касательным напряжениям. Находим

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_z^{\max}}{I_z d} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5 \cdot 81{,}4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1{,}29 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}51 \cdot 10^{-2}} = 77{,}3 \text{ МПа}.$$

Останавливаемся на двутавре № 18, потому что для него

$$\tau_{\max} = 77{,}3 \text{ МПа} < [\tau] = 0{,}6[\sigma] = 96 \text{ МПа}.$$

Отношение весов балок постоянного сечения, имеющих одинаковые длины, нагружение и материал, будет равно отношению площадей их поперечных сечений. Найдем отношение весов балок прямоугольного и двутаврового сечений в примере (обозначенных G_1 и G_2)

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{2 \cdot 5{,}68^2}{23{,}4} = 2{,}76.$$

Из этого отношения очевидно преимущество двутаврового сечения перед прямоугольным.

5. Определяем размер тавра a.

Находим положение центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{S_{z_2}}{F} = \frac{5a^2 3a}{10a^2} = \frac{3}{2}a.$$

Находим момент инерции сечения относительно нейтральной линии

$$I_z = I_z^{\text{I}} + I_z^{\text{II}} = \frac{125}{12}a^4 + 5a^2\frac{9}{4}a^2 + \frac{5a^4}{12} + 5a^2\frac{9}{4}a^2 = \frac{100}{3}a^4.$$

Определяем размер a из расчета по сечению с $|M_z|_{\max}$. Так как материал балки лучше работает на сжатие, чем на растяжение, располагаем тавр полкой вниз, чтобы в сечении с $|M_z|_{\max}$ волокна с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением

испытывали сжатие. Из эпюра нормальных напряжений σ' в этом сечении, построенном на рис. V.45, *г*, и условия прочности (V.43) следует, что размер a следует определить из расчета по точкам A и B сечения. Находим размер a из расчета по точке A. По (V.43)

$$|\sigma_A| = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} y_A = \frac{3ql^2}{32a^3} \leqslant [\sigma]_c,$$

откуда

$$a \geqslant \sqrt[3]{\frac{3ql^2}{32[\sigma]_c}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{32 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 3{,}61 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3{,}61 \text{ см}.$$

Находим размер a из расчета по точке B

$$\sigma_B = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} |y_B| = \frac{3ql^2}{64a^3} \leqslant [\sigma]_p,$$

откуда

$$a \geqslant \sqrt[3]{\frac{3ql^2}{64[\sigma]_p}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{64 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 3{,}39 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3{,}39 \text{ см}.$$

Особенность расчета балок, материал которых неодинаково работает на растяжение и сжатие, состоит в необходимости определения размера a из расчета не только по сечению с $|M_z|_{\max}$, но также из расчета по сечению с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом, знак которого противоположен знаку $M_z^{\max}$. В балке (рис. V.44) таким будет сечение *2* с изгибающим моментом $M_z^{(2)} = -\frac{1}{4}ql^2$. Из эпюра нормальных напряжений σ'', построенного на рис. V.45, *г*, и условия прочности (IV.43) следует, что определение размера a надо проводить по точке A сечения *2*. На основании (V.43)

$$\sigma_A = \frac{|M_z^{(2)}|}{I_z} y_A = \frac{ql^2 \cdot 4a \cdot 3}{4 \cdot 100a^4} \leqslant [\sigma]_p,$$

откуда

$$a \geqslant \sqrt[3]{\frac{3ql^2}{100[\sigma]_p}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{100 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 2{,}92 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2{,}92 \text{ см}.$$

В расчете по нормальным напряжениям из трех найденных значений a в качестве рабочего (безопасного) принимаем большее значение

$$a = 3{,}61 \text{ см}.$$

Методику построения эпюра касательных напряжений при прямом поперечном изгибе на нетонкостенном сечении, имеющем несколько участков, рассмотрим, построив эпюр τ на сечении рис. V.45, *г*. Сечение состоит из двух участков, причем на первом участке

его ширина $b_I = a$, а на втором – $b_{II} = 5a$. Составляем уравнение статического момента отсеченной части на первом участке

$$S_z^I = a(4a - y)\left(y + \frac{4a - y}{2}\right),$$

или

$$S_z^I = \frac{a}{2}(16a^2 - y^2).$$

Подставив это уравнение и $b_I = a$ в (V.29), получим уравнение касательных напряжений на первом участке

$$\tau_{xy}^I = \frac{Q_y}{I_z}(16a^2 - y^2),$$

которое является уравнением параболы. Эпюр τ_{xy}^I построен на рис. V.45, *г*. Наибольшее касательное напряжение в сечении, которое будет в точках нейтральной линии,

$$\tau_{max} = [\tau_{xy}^I]_{y=0} = \frac{8Q_y a^2}{I_z} = \frac{6Q_y}{25a^2}.$$

Подставив в выражение τ_{max} значения $Q_y = Q_y^{max} = \frac{5ql}{4} = 6{,}25 \cdot 10^4$ Н и $a = 3{,}61$ см, найдем максимальное касательное напряжение в балке

$$\tau_{max} = \frac{6 \cdot 6{,}25 \cdot 10^4}{25 \cdot 3{,}61^2 \cdot 10^{-4}} = 11{,}5 \text{ МПа}.$$

Еще раз убеждаемся в том, что в балках нетонкостенного сечения касательные напряжения малы по сравнению с нормальными (наибольшее нормальное напряжение в балке $\sigma_{max} = 50$ МПа).

Эпюр τ на втором участке сечения построим, использовав следующее рассуждение: при переходе через линию раздела участков вниз касательное напряжение уменьшается в 5 раз, так как $b_{II} = 5a$, а выражение $Q_y S_z^{отс}/I_z$ для точек сечения, бесконечно близко расположенных сверху и снизу от линии раздела, одинаково. В нижних точках сечения $\tau_{xy} = 0$, так как $S_z^{отс} = 0$ (отсеченной частью будет все сечение). Закон изменения τ_{xy}^{II} – параболический.

6. Определяем диаметр d бревен. Находим:

$$I_z = 2I_z^{\circ} = 2\left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d^2}{4}\right) = \frac{5\pi d^4}{32},$$

$$y_{max} = d, \quad W_z = \frac{5\pi d^3}{32}; \qquad \sigma_{max} = \frac{5ql^2}{\pi d^3} \leqslant [\sigma], \text{ откуда}$$

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25}{3{,}14 \cdot 10^7}} = 13{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 13{,}4 \text{ см}.$$

§ V.16. Дифференциальное уравнение упругой линии

Рассмотрим упругую линию балки, работающей в условиях чистого прямого изгиба (рис. V.46, *а*). Из основного уравнения изгиба (V.21) следует, что она будет дугой окружности.

При чистом изгибе сечения балки, оставаясь плоскими, перемещаются и поворачиваются относительно своих первоначальных положений. Перемещением сечения будем называть перемещение его центра тяжести. Обозначим перемещение концевого сечения балки δ и разложим его по направлениям осей x и y на δ_x и δ_y; угол поворота этого сечения обозначим θ. Из рис. V.46, *а*

$$\delta_y = \rho(1 - \cos\theta).$$

Так как длина упругой линии равна l – длине оси балки до деформации, то $\rho\theta = l$ и

$$\delta_x = \rho(\theta - \sin\theta).$$

Составим отношение

$$\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{1 - \cos\theta}{\theta - \sin\theta}.$$

Известны разложения

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots,$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots.$$

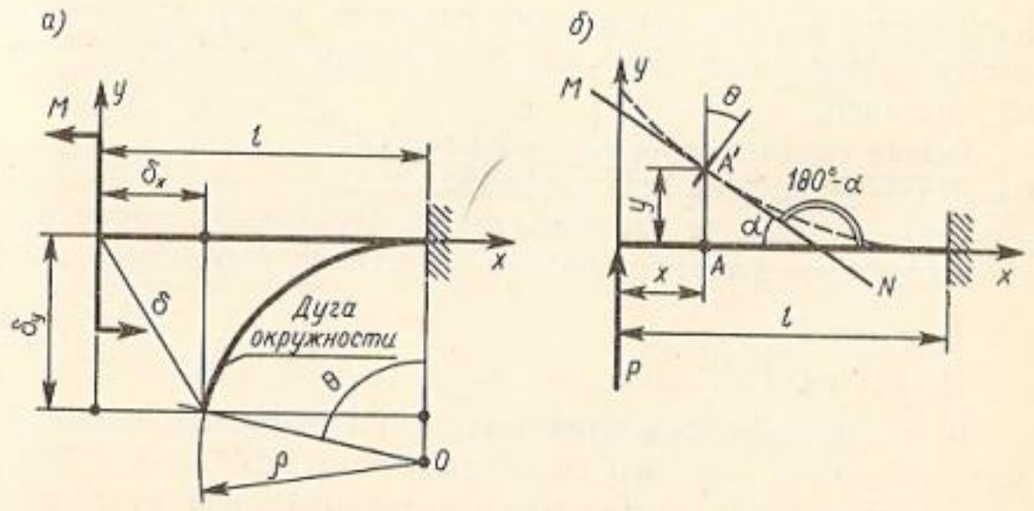


Рис. V.46

Считая $\theta \leqslant 5°$, или

$$\theta \leqslant 0{,}0872,$$

и сохранив в разложениях по два члена, подставим их и принятое значение θ в составленное отношение. Будем иметь

$$\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{3}{\theta} \geqslant 34{,}4.$$

Этот результат говорит о том, что при малых деформациях балки δ_x – величина, пренебрежимо малая по сравнению с δ_y. Поэтому в балках большой жесткости считают, что их сечения перемещаются только в направлениях, перпендикулярных положениям осей до деформации, и называют эти перемещения прогибами.

Рассмотрим упругую линию балки, работающей в условиях прямого поперечного изгиба (рис. V.46, *б*). Прогиб текущего сечения балки обозначим y. При поперечном изгибе сечение не остается плоским, поэтому под его углом поворота будем понимать угол между нормалями к оси балки и упругой линии в этом сечении, лежащими в плоскости изгиба. Из рис. V.46, *б*: $\theta = \alpha$ (MN – касательная к упругой линии в текущей точке A),

$$y' = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\theta.$$

В балках большой жесткости θ – величина малая, поэтому

$$\operatorname{tg}\theta = \theta$$

или

$$\theta = -y'.$$

Знак минус в этом выражении означает, что в выбранной системе координат поворот сечения по часовой стрелке отрицателен.

Задача состоит в том, чтобы найти:

$\theta = \theta(x)$ – уравнение углов поворота,

$y = y(x)$ – уравнение упругой линии (уравнение прогибов).

Из математического анализа известна формула кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \qquad \text{(V.46)}$$

В длинных балках влиянием Q_y на величину кривизны упругой линии, как это будет показано ниже (см. § VI.4), можно пренебречь, считая, что в их сечениях действует только M_z. Подставляя в (V.45) выражение $1/\rho$ через M_z из (V.21),

получим дифференциальное уравнение упругой линии на участке балки

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}. \qquad \text{(V.47)}$$

Интегрирование дифференциального уравнения (V.47) даже в простейших случаях нагружения связано с большими математическими трудностями, и для балок большой жесткости его упрощают, пренебрегая квадратом y' (квадратом угла поворота сечения) в знаменателе уравнения, как величиной малой, по сравнению с единицей. В результате получают дифференциальное уравнение упругой линии балки (участка) большой жесткости

$$y'' = \frac{M_z}{EI_z}. \qquad \text{(V.48)}$$

Изгибающий момент должен определять y'' как по величине, так и по знаку, и его следует подставлять в (V.48) со знаком, принятым для M_z ранее.

Интегрируя (V.48), получаем общие решения для углов поворота сечений и прогибов на участке балки

$$\theta = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C,$$

$$y = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + Cx + D.$$

Произвольные постоянные C и D, входящие в эти решения, должны определяться из граничных условий для участка балки.

Пример V.15. Определить прогибы балок (рис. V.47) в сечениях C (максимальные), считая $EI_z = \text{const}$.

Балка (рис. V.47, *а*).

1. Составляем, предварительно определив реакции, дифференциальное уравнение упругой линии. Изгибающий момент в текущем сечении

$$M_z = -Pl + Px,$$

и по (V.47)

$$EI_z y'' = -Pl + Px.$$

2. Интегрируем это дифференциальное уравнение

$$EI_z y' = -Plx + \frac{Px^2}{2} + C, \quad EI_z y = -\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + Cx + D.$$

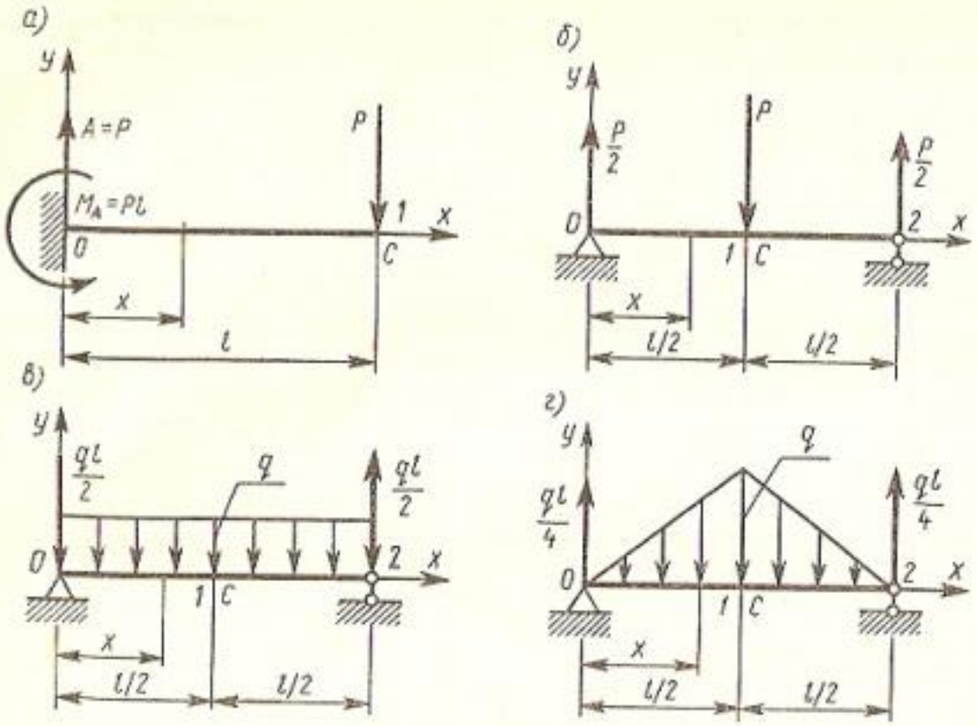


Рис. V.47

3. Выписываем граничные условия: $[y]_{x=0} = 0$, так как сечение в начале координат не перемещается; $[y']_{x=0} = 0$, так как сечение в начале координат не поворачивается.

4. Подставив граничные условия в общие решения, найдем

$$C = D = 0.$$

5. Выписываем уравнение упругой линии и определяем

$$EI_z y = -\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6},$$

$$y_c = [y]_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EI_z}. \qquad (V.49)$$

Знак минус в выражении y_c означает, что сечение C переместилось вниз (противоположно положительному направлению оси y).

Балка (рис. V.47, *б*).

1. Составляем дифференциальное уравнение упругой линии первого участка

$$EI_z y_1'' = \frac{Px}{2}.$$

2. Интегрируя его, находим

$$EI_z y_1' = \frac{Px^2}{4} + C, \quad EI_z y_1 = \frac{Px^3}{12} + Cx + D.$$

3. Выписываем граничные условия: $[y_1]_{x=0} = 0$, так как сечение в начале координат не перемещается; $[y_1']_{x=l/2} = 0$, так как сечение C в силу симметрии балки не поворачивается.

4. Подставив граничные условия в общие решения для y_1 и y_1', получим

$$D = 0, \quad C = -\frac{Pl^2}{16}.$$

5. Запишем уравнение упругой линии на первом участке

$$EI_z y_1 = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2 x}{16},$$

откуда

$$y_c = [y_1]_{x=l/2} = -\frac{Pl^3}{48EI_z}. \qquad (V.50)$$

Балка (рис. V.47, *в*).

1. Составим дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI_z y_1'' = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

2. Интегрируя его, получим

$$EI_z y_1' = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C, \quad EI_z y_1 = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D.$$

3. Выпишем граничные условия:

$$[y_1]_{x=0} = 0, \quad [y_1']_{x=l/2} = 0.$$

4. Найдем: $D = 0$; $\frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} + C = 0$, откуда

$$C = -\frac{ql^3}{24}.$$

5. Запишем уравнение упругой линии

$$EI_z y_1 = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3 x}{24},$$

из которого

$$y_c = [y_1]_{x=l/2} = -\frac{5ql^4}{384EI_z}. \qquad (V.51)$$

Балка (рис. V.47, *г*).

1. Составим дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI_z y_1'' = \frac{qlx}{4} - \frac{qx^3}{3l}.$$

2. Интегрируя его, получим

$$EI_z y_1' = \frac{qlx^2}{8} - \frac{qx^4}{12l} + C, \quad EI_z y_1 = \frac{qlx^3}{24} - \frac{qx^5}{60l} + Cx + D.$$

3. Выпишем граничные условия: $[y_1]_{x=0} = 0$, $[y_1']_{x=l/2} = 0$.

4. Найдем: $D=0$; $\frac{ql^3}{32}-\frac{ql^3}{192}+C=0$, $C=-\frac{5ql^3}{192EI_z}$.

5. Запишем уравнение упругой линии

$$EI_z y_1=\frac{qlx^3}{24}-\frac{qx^5}{60l}-\frac{5ql^3x}{192},$$

из которого

$$y_c=[y_1]_{x=l/2}=-\frac{ql^4}{120EI_z}. \qquad (V.52)$$

§ V.17. Косой изгиб

1. Уравнение нормальных напряжений.

Поперечный изгиб балки, при котором внешние силы лежат или в разных плоскостях (см. рис. V.1, *а*), или в одной плоскости, не перпендикулярной ни одной из главных центральных осей поперечного сечения, называется косым изгибом.

Найдем внутренние силовые факторы, к которым приводятся силы упругости в поперечном сечении балки при косом изгибе. Для этого, проведя сечение $a-a$ (см. рис. V.1, *а*), рассмотрим равновесие ее левой отсеченной части (рис. V.48, *а*). На этом рисунке: z и y – главные центральные оси поперечного сечения; оси z_0 и y_0 параллельны им и проходят через центр изгиба сечения.

Нормальное усилие N и крутящий момент $M_к$ в сечении равны нулю, так как по определению поперечного изгиба внешние силы проекций на ось x_0 и моментов относительно оси x_0 не дают. Внутренние силовые факторы, отличные от нуля, найдутся (см. метод сечений) из равенств:

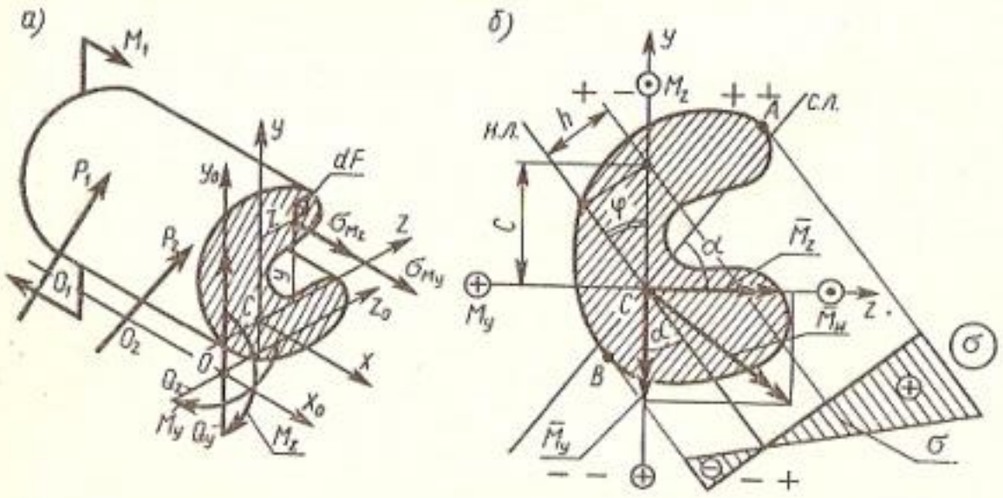


Рис. V.48

$$Q_y=\sum_{\text{лев}} P_{iy}=\sum_{\text{прав}} P_{ky},\quad M_y=\sum_{\text{лев}}\text{mom}_y P_i=\sum_{\text{прав}}\text{mom}_y P_k,$$
$$Q_z=\sum_{\text{лев}} P_{iz}=\sum_{\text{прав}} P_{kz},\quad M_z=\sum_{\text{лев}}\text{mom}_z P_i=\sum_{\text{прав}}\text{mom}_z P_k. \qquad (V.53)$$

Опираясь на принцип независимости действия сил, рассматриваем две деформации балки: в первой из них в поперечных сечениях действуют только Q_y и M_z, а во второй – только Q_z и M_y. Обе деформации являются прямыми поперечными изгибами, при которых мы умеем определять нормальные напряжения в произвольной точке сечения с координатами z и y по формулам (V.22) и (V.23). Нормальное напряжение в этой точке при совместном действии в сечении M_z и M_y найдется как их алгебраическая сумма

$$\sigma=\sigma_{M_z}+\sigma_{M_y}$$

и уравнение нормальных напряжений при косом изгибе запишется так:

$$\sigma=\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z. \qquad (V.54)$$

Вопрос об определении касательных напряжений рассмотрим позже.

2. Расчет на прочность по нормальным напряжениям.

Рассмотрим поперечное сечение балки (рис. V.48, *б*). Изгибающие моменты M_z и M_y в этом сечении изобразим векторами согласно правилу, принятому в теоретической механике. Начала векторов поместим в центре тяжести сечения, так как от переноса M_z и M_y параллельно их плоскостям нормальные напряжения в точках сечения не изменятся. Оси z и y направим так, чтобы в точках первой четверти нормальные напряжения от M_z и M_y были растягивающими. При этом условии, подставив в (V.54) координаты точки сечения с их знаками, получим напряжение в этой точке с его знаком.

Силовой линией назовем линию пересечения плоскости действия изгибающего момента

$$M_u=\sqrt{M_z^2+M_y^2}$$

с плоскостью поперечного сечения. Силовая линия всегда пройдет через первую и третью четверти и будет иметь угловой коэффициент

$$K_1=\frac{M_z}{M_y}.$$

Опасными назовем точки сечения, в которых нормальные напряжения достигают наибольших по абсолютной величине значений. Чтобы определить их положения, найдем уравнение нейтральной линии в сечении (линии, в точках которой $\sigma = 0$), приравняв для этого σ из (V.54) нулю. Получим

$$\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0,$$

или

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} z.$$

Из этого уравнения видно, что нейтральная линия будет прямой, проходящей через вторую и четвертую четверти, так как ее угловой коэффициент

$$K_2 = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

отрицателен.

Если $I_z \neq I_y$, то нейтральная и силовая линии не перпендикулярны, так как произведение их угловых коэффициентов

$$K_1 K_2 = -\frac{I_z}{I_y} \neq -1.$$

В балках с поперечными сечениями, у которых $I_z = I_y = I_u$ (круг, квадрат), силовая и нейтральная линии перпендикулярны и нормальные напряжения в сечениях таких балок определяются по формуле для прямого изгиба

$$\sigma = \frac{M_u}{I_u} V,$$

где u – нейтральная линия; V – расстояние от точки, в которой определяется σ, до нейтральной линии.

Напишем уравнение семейства прямых, параллельных нейтральной линии:

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} z + C,$$

в котором C – отрезок, отсекаемый прямой семейства на оси y. Подставив y из этого уравнения в (V.54), получим

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} C,$$

или

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z \sin \varphi} h,$$

где h – расстояние от прямой семейства до нейтральной линии. Из последнего равенства следует, что в точках прямой семейства нормальные напряжения равны, пропорциональны расстоянию от этой прямой до нейтральной линии и поэтому наибольшие по абсолютной величине напряжения существуют в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. Эти точки будут точками касания прямых, параллельных нейтральной линии с контуром сечения (на рис. V.48, *б* – точки A и B). Эпюр σ построен на этом же рисунке.

Составим условие прочности проектировочного расчета, воспользовавшись уравнением (V.54)

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A \leqslant [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_B| = \frac{M_z}{I_z} |y_B| + \frac{M_y}{I_y} |z_B| \leqslant [\sigma]_c. \qquad \text{(V.55)}$$

Для балок, материалы которых одинаково работают на растяжение и сжатие,

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right|_{\max} \leqslant [\sigma]. \qquad \text{(V.56)}$$

При проверочном расчете определяются

$$n_A = \frac{\sigma^p_{\text{пр}}}{\sigma_A}, \quad n_B = \frac{\sigma^c_{\text{пр}}}{|\sigma_B|}$$

и в качестве запаса прочности балки принимается меньшее из полученных значений.

Если очертания эпюр M_z и M_y прямолинейны, расчеты балок постоянного сечения на прочности следует проводить по сечениям, в которых один из моментов M_z или M_y достигает наибольшего значения (по возможно опасным сечениям).

3. Определение прогибов.

Внешние силы, приложенные к балке, разлагаются по главным центральным осям сечений, в которых они действуют (рис. V.49). Если на балку действуют только силы, лежащие в плоскости, перпендикулярной главной центральной оси z, то изгиб будет прямым. Тогда нейтральной ли-

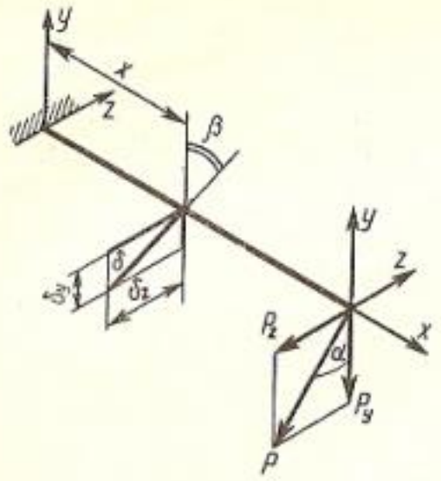


Рис. V.49

нией сечения будет ось z, и воспользовавшись универсальными уравнениями углов поворота и прогибов, найдем прогиб δ_y текущего сечения балки в направлении оси y. Аналогично, при действии на балку сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси y, определим δ_z – прогиб в текущем сечении по направлению оси z. По принципу независимости действия сил прогиб δ текущего сечения балки и его направление найдем по формулам

$$\delta = \sqrt{\delta_z^2 + \delta_y^2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\delta_y}{\delta_z}.$$

Если внешние силы лежат в одной плоскости (плоский косой изгиб) (рис. V.49), то, как следует из уравнения упругой линии балки (пример V.15, балка рис. V.46, *а*),

$$\delta_y = \frac{P\cos\alpha}{EI_z}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right), \quad \delta_z = \frac{P\sin\alpha}{EI_y}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right).$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (V.57)$$

Так как β не зависит от x, упругая линия при плоском косом изгибе – плоская кривая, плоскость которой (при $I_z \neq I_y$) не параллельна силовой плоскости.

Из выражения (V.57) видно, что в сечениях балок при прямом поперечном изгибе I_z не должен значительно превышать I_y, ибо небольшие отклонения внешних сил от направления оси y, что практически всегда возможно, могут вызывать большие прогибы в направлении оси z.

4. Определение касательных напряжений.

Рассмотрим тонкостенное сечение (рис. V.50, *а*). Перерезывающую силу Q, к которой приводятся касательные силы упругости в сечении, разложим по направлениям его главных центральных осей на Q_y и Q_z. Опираясь на принцип независимости действия сил, строим эпюры касательных напряжений, сначала при действии в сечении только касательных сил упругости, приводящихся к Q_y (рис. V.50, *б*), а затем только к Q_z (рис. V.50, *в*). Касательное напряжение в любой точке средней линии может быть найдено как ал-

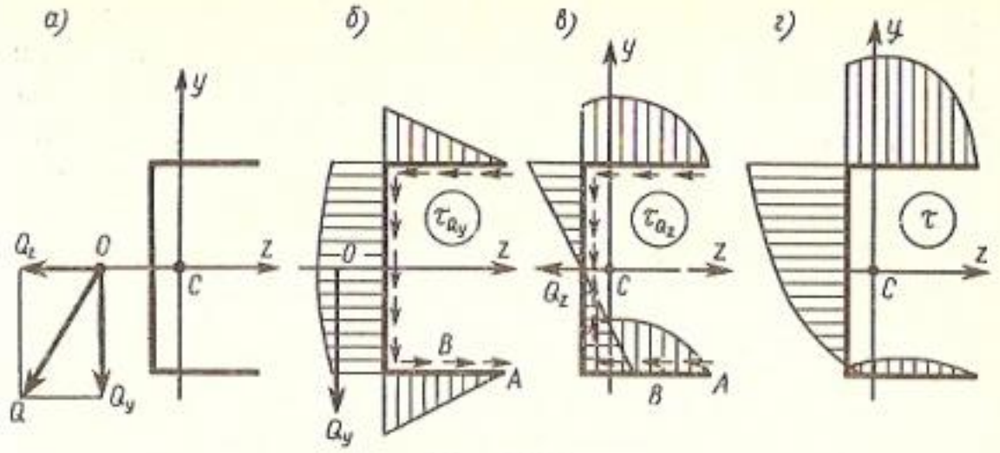


Рис. V.50

гебраическая сумма напряжений в этой точке этих эпюр. Напряжения, отложенные по одну сторону от средней линии, складываются, а по разные стороны – вычитаются, например:

$$\tau_B = |\tau_{Q_y}^B - \tau_{Q_z}^B| = \left|\frac{Q_y S_z^{AB}}{I_z t} - \frac{Q_z S_y^{AB}}{I_y t}\right|.$$

Эпюр, полученный алгебраическим суммированием ординат эпюр τ_{Q_y} и τ_{Q_z}, будет эпюром касательных напряжений при действии в сечении перерезывающей силы Q. Его характер показан на рис. V.50, *г*.

Определить касательные напряжения в точках произвольного нетонкостенного сечения методом сопротивления материалов при косом изгибе нельзя, и эта задача точно или приближенно решается методами теории упругости.

Так же как при прямом поперечном изгибе, расчет на прочность длинных балок нетонкостенного сечения ведется только по нормальным напряжениям. Расчет на прочность балок тонкостенного сечения должен проводиться с учетом касательных напряжений.

При решении задачи на косой изгиб могут встретиться, как уже сказано в его определении, два случая: первый – внешние силы, действующие на балку, лежат в одной плоскости, не перпендикулярной главной центральной оси поперечного сечения, и второй – внешние силы лежат в разных плоскостях. Примеры V.16 и V.17 последовательно соответствуют этим случаям.

Пример V.16. Для балки (рис. V.51, *а*) определить допускаемое значение погонной интенсивности $[q]$, считая $l = 5a$, a, t и $[\sigma]$ заданными.

1. Строим эпюры Q и M_u в плоскости действия сил (рис. V.51, *б*). По этим эпюрам находим изгибающий момент и перерезы-

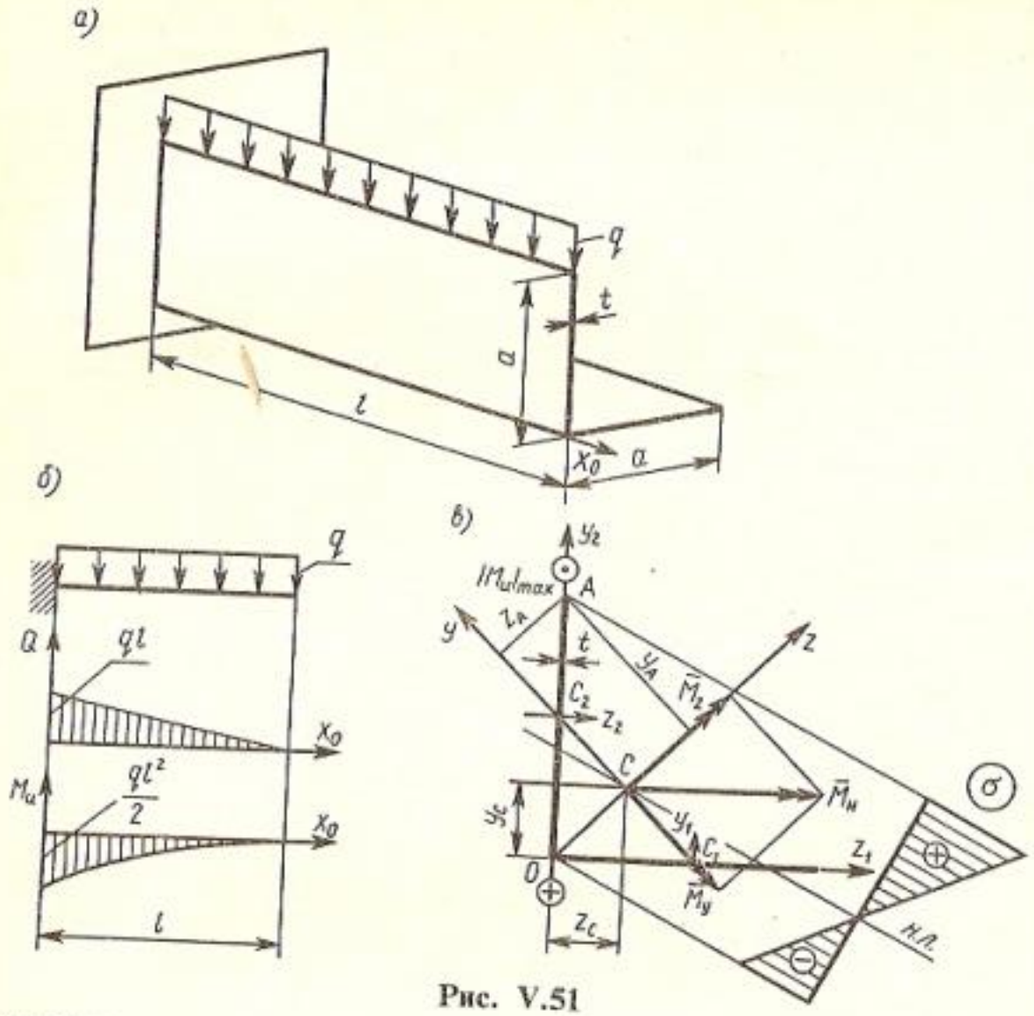


Рис. V.51

вающую силу в опасном сечении

$$Q_0 = ql,\ |M_и|_{max} = \frac{ql^2}{2}.$$

2. Определяем положение главных центральных осей и значения главных центральных моментов инерции сечения (рис. V.51, *в*). Так как ось z – ось симметрии сечения, координаты его центра тяжести будут равны

$$z_c = y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{a \cdot at}{2 \cdot 2at} = \frac{1}{4}a.$$

Оси z и y будут главными центральными осями сечения, причем ось y пройдет через центры тяжести, составляющих сечение прямоугольников. При определении I_z и I_y составляющие сечение прямоугольники могут рассматриваться как параллелограммы с основаниями $b = \sqrt{2}\,t$ и высотами $h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. По формулам § IV.9 момент инерции сечения относительно оси z, проходящей через основания, составляющих сечение параллелограммов

$$I_z = 2\,\frac{bh^3}{3} = 2\,\frac{\sqrt{2}\,t \cdot 2\sqrt{2}\,a^3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{3}a^3t;$$

момент инерции сечения относительно оси y, проходящей через центры тяжести параллелограммов,

$$I_y = 2\,\frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}a^3t.$$

3. Составляем уравнение нормальных напряжений. Силовая линия (рис. V.51, *в*) не перпендикулярна ни одной из главных центральных осей сечения, поэтому изгиб балки будет косым. Разлагая вектор $\bar{M}_и$ по главным центральным осям сечения, найдем

$$M_z = M_y = \frac{\sqrt{2}}{4}ql^2.$$

Подставляя найденные величины M_z, M_y, I_z и I_y в (V.54), получим уравнение нормальных напряжений в опасном сечении балки

$$\sigma = \frac{3\sqrt{2}\,ql^2}{4a^3t}(y + 4z),$$

откуда уравнение нейтральной линии в этом сечении запишется в виде

$$y = -4z.$$

4. Определяем $[q]$.

Построив нейтральную линию сечения и проведя к его контуру касательные параллельно нейтральной линии, видим, что наиболее удаленной от нейтральной линии точкой будет точка A (рис. V.51, *в*) с координатами

$$y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ z_A = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

Подставив координаты точки A в уравнение напряжений, получим

$$\sigma_{max} = \frac{3\sqrt{2}\,ql^2}{4a^2t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = \frac{9ql^2}{4a^2t}.$$

По условию прочности (V.56) $\frac{9[q]l^2}{4a^2t} = [\sigma]$, откуда

$$[q] = \frac{4[\sigma]a^2t}{9l^2}.$$

5. Проводим проверку прочности опасного сечения балки по касательным напряжениям. Разлагаем Q по главным центральным осям сечения

$$Q_{y_0} = Q_{z_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}ql.$$

Строим эпюры $\tau_{Q_{y_0}}$, $\tau_{Q_{z_0}}$ и τ (рис. V.52, *а, б, в*).

По формулам (V.33) и (V.34)

$$\tau_{Q_{y_0}} = \frac{3\sqrt{2}\,ql\sqrt{2}(2a - z)z}{4 \cdot 2a^3t},$$ или

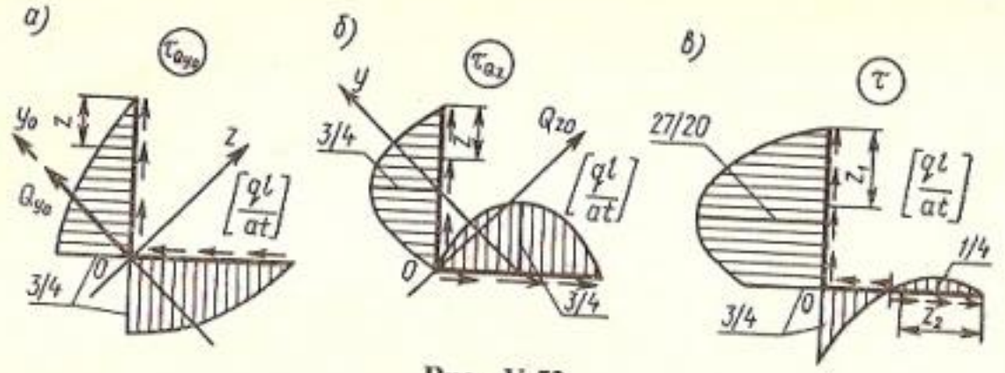


Рис. V.52

$$\tau_{Q_{y_0}} = \frac{3ql(2a-z)z}{4a^3t},\ 0 \leqslant z \leqslant a; \qquad \tau_{Q_{z_0}} = \frac{12\sqrt{2}\,ql\sqrt{2}(a-z)z}{4\cdot 2a^3t},\ \text{или}$$

$$\tau_{Q_{z_0}} = \frac{3ql(a-z)z}{a^3t},\ 0 \leqslant z \leqslant a;$$

$$\tau_{\text{I}} = |\tau^{\text{I}}_{Q_{y_0}} + \tau^{\text{I}}_{Q_{z_0}}| = \frac{3ql(6a-5z_1)z_1}{4a^3t},\ 0 \leqslant z_1 \leqslant a;$$

$$\tau_{\text{II}} = |\tau^{\text{II}}_{Q_{y_0}} - \tau^{\text{II}}_{Q_{z_0}}| = \frac{3ql(2a-3z_2)z_2}{4a^3t},\ 0 \leqslant z_2 \leqslant a;$$

$$\tau_{\max} = \frac{27ql}{20at};$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{9\cdot 20\cdot l}{4\cdot 27\cdot a} = \frac{9\cdot 20\cdot 5}{4\cdot 27} = 8{,}33;$$

следовательно,

$$\tau_{\max} < 0{,}6\,[\sigma],$$

т. е. $\tau_{\max}$ меньше допускаемого напряжения на сдвиг.

Кроме этого, следует проводить проверку тонкостенного сечения по одной из теорий прочности, что можно сделать после их изучения.

Пример V.17. Определить запас прочности балки (рис. V.53, *а*).

Исходные данные: $P = 8$ кН; $l = 50$ см; сечение балки двутавр № 12, имеющий: $I_z = 350$ см^4; $I_y = 27{,}9$ см^4, $S_z^{\max} = 33{,}7$ см^3, $b = 6{,}4$ см, $d = 0{,}48$ см, $t = 7{,}3$ мм; материал сталь 45, $\sigma_т = 340$ МПа.

1. Приложенные к балке силы разлагаем по главным центральным осям сечений, в которых они действуют, и определяем реакции опор (рис. V.53, *а*). Из уравнений статики

$$\Sigma m_{B_z} = A_y 3l - \frac{\sqrt{2}}{2}P2l - Pl = 0,\ A_y = 0{,}8P;$$

$$\Sigma m_{B_y} = A_z 3l - \frac{\sqrt{2}}{2}P2l = 0,\ A_z = 0{,}47P;$$

$$\Sigma Y = 0{,}8P - 0{,}71P - P + B_y = 0,\ B_y = 0{,}91P.$$

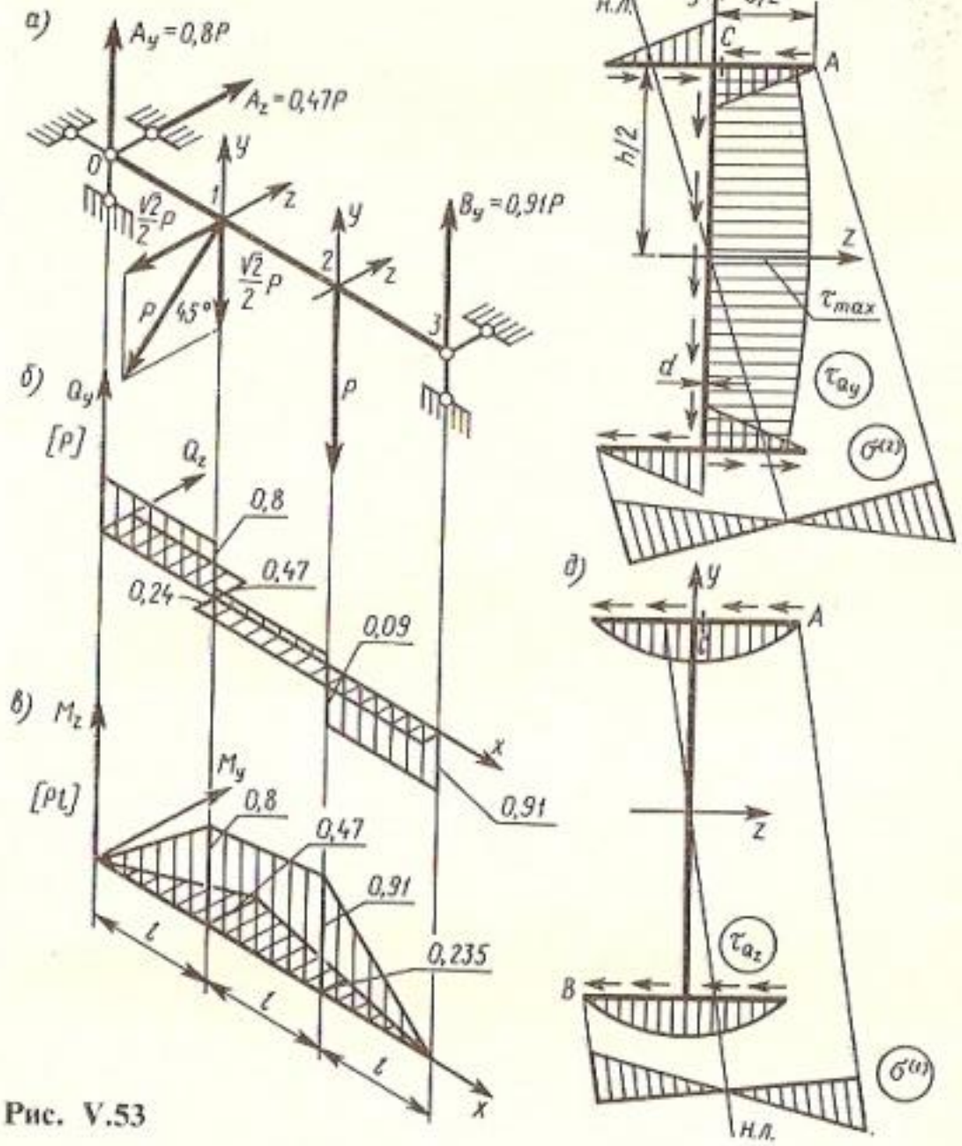


Рис. V.53

2. Пользуясь выражениями (V.53), строим эпюры Q_y и Q_z, M_z и M_y (рис. V.53, *б*, *в*).

3. Определяем запас прочности балки по нормальным напряжениям n_σ в сечениях *2* и *1*, в которых один из моментов M_z или M_y достигает наибольшего значения (возможно опасных).

В сечении *2*: $M_z = 0{,}91Pl$, $M_y = 0{,}235Pl$.

Подставляя в (V.54) значения M_z, M_y, I_z, I_y, P и l, найдем уравнение нормальных напряжений в этом сечении

$$\sigma = 80(0{,}13y + 0{,}42z);$$

$y = -3{,}24z$ – уравнение нейтральной линии.

Опасными и равноопасными будут точки A и B сечения (рис. V.53, *г*). Подставив в выражение $y_A = 6$ см, $z_A = 3{,}2$ см, получим

$$\sigma = 80\cdot(0{,}13\cdot 6 + 0{,}42\cdot 3{,}2) = 170\ \text{МПа}; \qquad n_\sigma^{(2)} = \frac{340}{170} = 2.$$

В сечении *1*: $M_z = 0{,}8Pl$, $M_y = 0{,}47Pl$; $\sigma = 80(0{,}114y + 0{,}84z)$ – уравнение напряжений; $y = -7{,}35z$ – уравнение нейтральной линии.

Опасными и равноопасными будут точки A и B (рис. V.53, *д*):

$$y_A = 6 \text{ см}, \; y_B = 3{,}2 \text{ см}; \quad \sigma_{max} = 270 \text{ МПа}; \quad n_\sigma^{(1)} = \frac{340}{270} = 1{,}26.$$

Обращаем внимание на то, что хотя наибольший изгибающий момент M_z в сечении *2* больше, чем в сечении *1*, опасным за счет того, что M_y в сечении *1* больше, чем M_y в сечении *2*, оказалось сечение *1*.

4. Определяем запас прочности балки по касательным напряжениям n_τ.

Находим максимальное касательное напряжение τ_{max} в балке. Эпюры τ от Q_y и Q_z в поперечном сечении построены на рис. V.53, *г* и V.53, *д*. Из этих эпюр видно, что τ_{max} будет равно либо $\tau_{max}^{Q_y}$ – наибольшему касательному напряжению от Q_y, существующем в сечениях третьего участка, либо τ_c – касательному напряжению в точке C средней линии сечения, в которой касательные напряжения от Q_y и Q_z складываются, а касательное напряжение от Q_z достигает наибольшего значения. Определяем

$$\tau_{max}^{Q_y} = \frac{0{,}91PS_z^{max}}{I_z d} = \frac{0{,}91 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 33{,}7 \cdot 10^{-6}}{350 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}48 \cdot 10^{-2}} = 14{,}6 \text{ МПа}.$$

За отсеченную часть сечения при определении τ_c можно принять прямоугольник с $F^{отс} = bt/2$, тогда

$$S_z^{отс} = \frac{bht}{4}, \; S_y^{отс} = \frac{b^2 t}{8}.$$

Определяем τ_c в сечениях первого участка

$$\tau_c = \tau_{Q_y}^c + \tau_{Q_z}^c = \frac{0{,}8Pbh}{4I_z} + \frac{0{,}47Pb^2}{4I_y} =$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} +$$

$$+ \frac{0{,}47 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 27{,}9 \cdot 10^{-8}} = 17{,}3 \text{ МПа}.$$

Определяем τ_c в сечениях третьего участка

$$\tau_c = \frac{0{,}91 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} +$$

$$+ \frac{0{,}24 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 27{,}9 \cdot 10^{-8}} = 11 \text{ МПа}.$$

Следовательно,

$$\tau_{max} = 17{,}3 \text{ МПа и } n_\tau = \frac{0{,}6\sigma_т}{\tau_{max}} = \frac{0{,}6 \cdot 340}{17{,}3} = 11{,}8.$$

В качестве запаса прочности балки n принимаем меньшее из всех найденных значений n_σ и n_τ

$$n = 1{,}22.$$

§ V.18. Внецентренное растяжение или сжатие

1. Уравнение нормальных напряжений.

Внецентренным растяжением или сжатием называется деформация стержня, нагруженного силами, параллельными его оси.

Найдем внутренние силовые факторы, к которым приводятся силы упругости в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении или сжатии. Для этого, проведя сечение $a-a$ (рис. V.54, *а*), рассмотрим равновесие его отсеченной части (рис. V.54, *б*). Точку пересечения линии действия силы P с поперечным сечением назовем полюсом; его координаты в главных центральных осях z и y обозначим z_P и y_P. Внутренние силовые факторы Q_y, Q_z и $M_к$ в поперечном сечении равны нулю, так как внешние силы, по определению деформации, ни проекций на оси z и y, ни моментов относительно оси x не дают. Внутренними силовыми факторами, отличными от нуля, будут

$$N = P, \; M_z = P_{y_P}, \; M_y = P_{z_P}.$$

На основании принципа независимости действия сил (рис. V.54, *б*) $\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}$, или

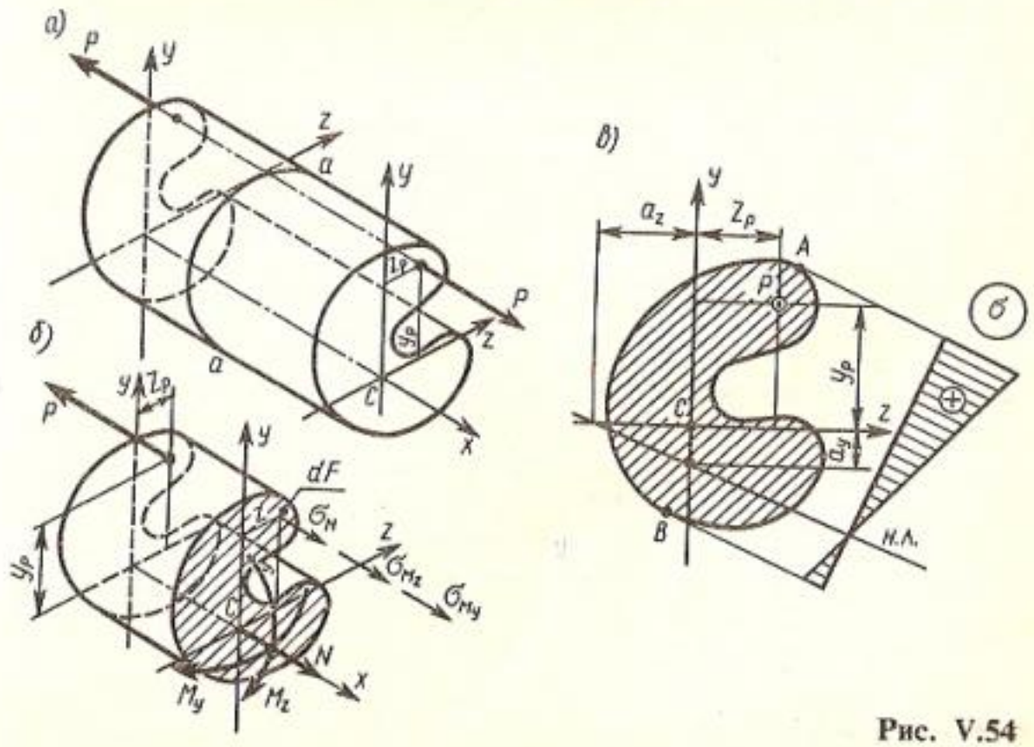


Рис. V.54

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Py_p}{I_z} y + \frac{Pz_p}{I_y} z. \qquad (V.58)$$

Вынося в правой части уравнения (V.58) первый член за скобку, получим уравнение напряжений в более удобном для расчета виде

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z\right), \qquad (V.59)$$

где через i_z и i_y обозначены: $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$ – радиус инерции сечения относительно оси z, $i_y = \sqrt{I_y/F}$ – радиус инерции сечения относительно оси y.

В дальнейшем оси z и y направляем так, чтобы полюс находился в первой четверти, а силу P подставляем в (V.59) с плюсом, если она растягивающая (действует от сечения), и с минусом, если она сжимающая (действует на сечение). При соблюдении этих условий подстановка в (V.59) координат точки с их знаками даст напряжение в ней по величине и знаку.

2. Определение положений опасных точек в поперечном сечении и расчет на прочность.

Приравняв уравнение напряжений нулю, найдем уравнение нейтральной линии в сечении

$$1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z = 0. \qquad (V.60)$$

Нейтральная линия будет прямой, не проходящей через начало координат, и ее удобно строить, определив отрезки, которые она отсекает на осях z и y

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P}, \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}. \qquad (V.61)$$

По тем же соображениям, что и при косом изгибе, опасными будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Нейтральная линия и эпюр σ построены на рис. V.54, *в*.

Составим условие прочности проектировочного расчета для стержня, материал которого неодинаково работает на растяжение и сжатие:

$$\sigma_A = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P y_A}{i_z^2} + \frac{z_p z_A}{i_y^2}\right) \leqslant [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_B| = \left|\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_p y_B}{i_z^2} + \frac{z_p z_B}{i_y^2}\right)\right| \leqslant [\sigma]_c. \qquad (V.62)$$

Для стержня, материал которого одинаково работает на растяжение и сжатие,

$$|\sigma|_{\max} = \left|\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2}\right)\right|_{\max} \leqslant [\sigma]. \qquad (V.63)$$

Так как при внецентренном растяжении или сжатии все сечения призматического стержня равноопасны, при расчете на прочность изображают только его поперечное сечение с указанием полюса и направления силы P. Если в сечении действует несколько внешних сил, то под P понимают их равнодействующую.

Изложенной методикой расчета на прочность при внецентренном растяжении (сжатии) следует пользоваться, если порядок размеров плеч сил относительно главных центральных осей поперечного сечения не превышает порядок размеров этого сечения, и можно пользоваться, если гибкость стержня мала (если стержень короткий). Условие малой гибкости стержня записывается в виде

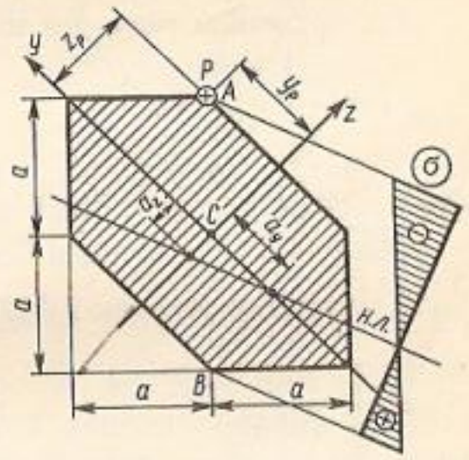


Рис. V.55

$$\frac{\mu l}{i_{\min}} \leqslant \beta \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}, \qquad (V.64)$$

где l – длина стержня; μ – коэффициент, зависящий от опорных устройств стержня равный: 1 – при шарнирном закреплении концов стержня, 2 – для стержня, заделанного одним концом, 0,5 – для стержня, заделанного двумя концами; $i_{\min}$ – наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня; β – коэффициент, равный 0,4 для сталей и 0,25 – для цветных металлов.

Если условие (V.64) не выполняется, то стержень должен рассчитываться на продольно-поперечный изгиб, изложенный в гл. XIII. Обоснование условия (V.64) дано в гл. XII.

Пример V.18. Определить размер a сечения (рис. V.55), считая P и $[\sigma]_c = 2\,[\sigma]_p$ заданными.

1. Определяем i_z^2 и i_y^2:

$$I_z = \frac{16a^3 a}{12} - 4\frac{\sqrt{2}a \cdot 2\sqrt{2}a^3}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{5}{4}a^4,$$

$$I_y = \frac{16a^3 a}{12} - 2\left(\frac{a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}a^3}{8 \cdot 36} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{8}{9}a^2\right) = \frac{5}{12}a^4;$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{5a^4}{4 \cdot 3a^2} = \frac{5}{12}a^2, \; i_y^2 = \frac{5}{36}a^2.$$

2. Подставив P, F, i_z^2, i_y^2, $z_p = y_p = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ в (V.59), получим уравнение нормальных напряжений

$$\sigma = -\frac{P}{3a^2}\left(1 + \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{y}{a} + \frac{18\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{z}{a}\right).$$

Определяем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях z и y:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{5\sqrt{2}}{36}a, \; a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{5\sqrt{2}}{12}a.$$

3. Определяем размер a из расчета по точке A:

$$y_A = z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}a;$$

$$|\sigma_A| = \frac{P}{3a^2}\left(1 + \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{18\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9P}{5a^2}.$$

По второму условию (V.62) $\frac{9P}{5a^2} \leqslant 2[\sigma]_p$, или

$$a \geqslant \sqrt{\frac{9P}{10[\sigma]_p}}.$$

Определяем размер a из расчета по точке B: $z_B = y_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$:

$$\sigma_B = -\frac{P}{3a^2}\left(1 - \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2 \cdot 2} - \frac{18\sqrt{2}\sqrt{2}}{5 \cdot 2}\right) = \frac{19P}{15a^2}.$$

По первому условию (V.62)

$$\frac{19P}{15a^2} \leqslant [\sigma]_p, \qquad \text{или}$$

$$a \geqslant \sqrt{\frac{19P}{15[\sigma]_p}}.$$

Принимаем для a большее из полученных значений

$$a = \sqrt{\frac{19P}{15[\sigma]_p}}.$$

Глава VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ VI.1. Потенциальная энергия деформации и общие теоремы сопротивления материалов

Геометрически неизменяемая система, элементами которой являются брусья, называется стержневой.

Изменение потенциальной энергии частиц вещества системы при ее деформации, создаваемой внешними силами, называется потенциальной энергией деформации.

В процессе нагружения система может прийти в колебательное движение. Потенциальная энергия деформации на основании теорем механики в любой момент времени t равна работе внешних сил, сил инерции и сил сопротивления, действующих на точки системы:

$$u(t) = A(t) - \iiint_m \left[\int \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\cos\alpha + \psi\frac{d\delta}{dt}\cos\beta\right)d\delta\right]dm,$$

где $u(t)$ – потенциальная энергия деформации; $A(t)$ – работа внешних сил; δ – текущее перемещение точки; m – масса системы; $\frac{d^2\delta}{dt^2}dm$ – элементарная сила инерции; $\frac{d\delta}{dt}dm$ – элементарная сила внутреннего трения, которую считаем пропорциональной скорости точки и направленной в сторону, ей противоположную; ψ – коэффициент пропорциональности, зависящий от материала тела; α – угол между направлением ускорения точки и ее перемещением; β – угол между направлением скорости точки и ее перемещением.

Если величины приложенных к телу сил, достигнув в конце процесса нагружения значений Q_1, Q_2, Q_3, …, Q_n, в дальнейшем остаются постоянными, то колебательное движение точек тела будет затухающим. Поэтому в положении статического равновесия, при котором ускорения и скорости всех точек системы равны нулю,

$$u = A,$$

где u – потенциальная энергия деформации в положении статического равновесия; A – работа внешних сил, соответствующая этому состоянию. Следовательно,

$$du = dA. \qquad \text{(VI.1)}$$

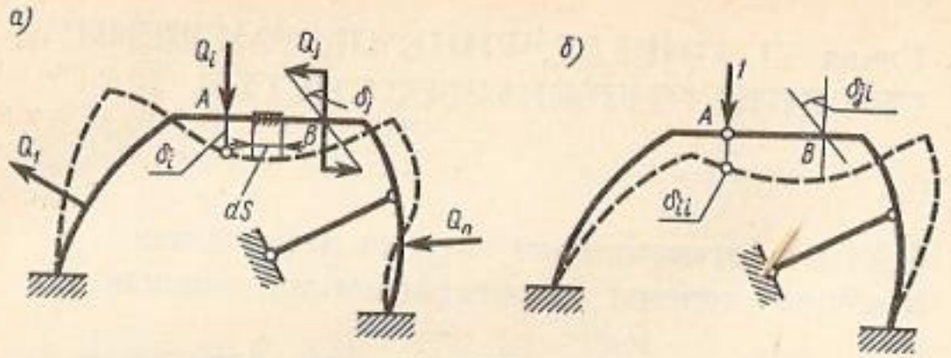


Рис. VI.1

В дальнейшем под Q_i будем понимать как величину сосредоточенной силы, так и величину момента пары и называть Q_i обобщенной силой. Под δ_i будем понимать: для сосредоточенной силы – перемещение точки ее приложения по направлению силы, для пары сил – поворот плоскости ее действия. Назовем δ_i обобщенным перемещением, соответствующим Q_i.

Из закона Гука в силах и перемещениях (I.14) для n обобщенных сил, действующих на механическую систему (рис. VI.1, *а*), получим систему n линейных уравнений, в которых δ_j выражены через Q_i:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} Q_i ;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(VI.2)}$$

В (VI.2) коэффициенты при Q_i называются единичными перемещениями или податливостями.

Из (I.14) δ_{ji} – перемещение сечения, в котором приложена j-я обобщенная сила по ее направлению, при действии на систему только единичной безразмерной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению Q_i. Или короче: δ_{ji} – перемещение сечения по направлению j от обобщенной единичной силы, приложенной по направлению i. Единичные перемещения показаны на рис. VI.1, *б*.

Выразив из системы (VI.2) обобщенные силы через обобщенные перемещения, получим систему n уравнений

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ji} \delta_i ;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(VI.3)}$$

В (VI.3) C_{ji} – жесткость по направлению j от единичного перемещения по направлению i, причем

$$C_{ji} = \frac{A_{ji}}{\Delta}, \qquad \text{(VI.4)}$$

где Δ – определитель системы уравнений (VI.2), A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента δ_{ji} этого определителя.

Если каждая обобщенная сила получит бесконечно малое приращение ΔQ_i, то каждое обобщенное перемещение получит бесконечно малое приращение $\Delta\delta_i$. Тогда приращение работы

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} (Q_i + \Delta Q_i)\,\Delta\delta_i ,$$

а дифференциал работы на основании (VI.1) есть дифференциал потенциальной энергии деформации

$$du = \sum_{i=1}^{n} Q_i d\delta_i . \qquad \text{(VI.5)}$$

Работа, а следовательно, и потенциальная энергия деформации являются функцией обобщенных перемещений

$$u = u(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_n).$$

Поэтому, как известно из математического анализа,

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \delta_i} d\delta_i . \qquad \text{(VI.6)}$$

Сопоставляя (VI.5) и (VI.6), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = Q_i . \qquad \text{(VI.7)}$$

Формула (VI.7) выражает **теорему Лагранжа: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенному перемещению равняется соответствующей обобщенной силе.**

Докажем симметрию матриц $\|C_{ji}\|$ и $\|\delta_{ji}\|$. Для этого подставим в (VI.7) выражения Q_i и Q_j из (VI.3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^{n} C_{ji}\delta_j ,\quad \frac{\partial u}{\partial \delta_j} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\delta_j .$$

Как известно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial \delta_j \partial \delta_i},$$

поэтому

$$C_{ij} = C_{ji} . \qquad \text{(VI.8)}$$

Из (VI.8) и (VI.4) следует, что

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{VI.9}$$

Равенство (VI.9) выражает **теорему взаимности перемещений: единичные перемещения с одинаковыми, но переставленными индексами, равны.**

Из (VI.2) дифференциалы перемещений

$$d\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} dQ_i\,;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{VI.10}$$

Подставив (VI.10) в (VI.5) и учитывая (VI.9), будем иметь

$$du = (\delta_{11}Q_1 + \ \ldots\ + \delta_{1n}Q_n)\,dQ_1 + \ldots$$
$$\ldots + (\delta_{n1}Q_1 + \ \ldots\ + \delta_{nn}Q_n). \tag{VI.11}$$

Следовательно, приняв во внимание (VI.2),

$$du = \sum_{i=1}^{n} \delta_i dQ_i. \tag{VI.12}$$

Работа является функцией обобщенных сил

$$u = u(Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n),$$

поэтому

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i. \tag{VI.13}$$

Сопоставив (VI.12) и (VI.13), получим

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_i. \tag{VI.14}$$

Формула (VI.14) выражает **теорему Кастилиано: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равняется соответствующему этой силе обобщенному перемещению.**

Чтобы получить $u = u(Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n)$, следует проинтегрировать (VI.13) по правилу интегрирования полного дифференциала. Из (VI.11) для двух обобщенных сил, действующих на систему,

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_{ii}Q_i + \delta_{ij}Q_j, \tag{VI.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ji}Q_i + \delta_{jj}Q_j. \tag{VI.16}$$

Из (VI.15)

$$u = \delta_{ii}\frac{Q_i^2}{2} + \delta_{ij}Q_jQ_i + f(Q_j), \tag{VI.17}$$

где $f(Q_j)$ – неизвестная функция только от Q_j.

Для ее определения дифференцируем (VI.17) по Q_j

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ij}Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}. \tag{VI.18}$$

Подставив в (VI.18) $\partial u/\partial Q_j$ из (VI.16), получим

$$\delta_{ji}Q_i + \delta_{jj}Q_j = \delta_{ij}Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j},$$

откуда, учитывая (VI.9)

$$f(Q_j) = \delta_{jj}\frac{Q_j^2}{2} + u_0, \tag{VI.19}$$

где u_0 – произвольная постоянная.

Подставив (VI.19) в (VI.17), будем иметь

$$u = \frac{1}{2}\delta_{ii}Q_i^2 + \delta_{ij}Q_iQ_j + \frac{1}{2}\delta_{jj}Q_j^2 + u_0. \tag{VI.20}$$

При $Q_i = Q_j = 0$ $u = 0$ и, следовательно, $u_0 = 0$.

Обобщая (VI.20) для n обобщенных сил, действующих на систему, получим

$$u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{ji}Q_jQ_i.$$

По аналогии,

$$u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\delta_j\delta_i.$$

Выражение для u можно представить так:

$$u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Q_j \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji}Q_i.$$

Учитывая (VI.2),

$$u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Q_j\delta_i. \tag{VI.21}$$

Формула (VI.21) выражает **теорему Клапейрона: в положении статического равновесия потенциальная энергия деформации равна сумме половин произведений обобщенных сил на соответствующие им обобщенные перемещения.**

§ VI.2. Выражение потенциальной энергии деформации системы через внутренние силовые факторы

Двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми по оси участка dS – бесконечно мало, вырежем на i-м участке системы (рис. VI.1, *а*) элемент. Силы упругости в поперечных сечениях элемента могут привестись к шести внутренним силовым факторам (рис. VI.2), которые для него должны рассматриваться как обобщенные силы. Под действием этих обобщенных сил правое сечение элемента переместится относительно левого, которое считаем неподвижным. Перемещения сечения в направлениях осей x, y, z от N, Q_y, Q_z и повороты его около осей x, y, z от M_k, M_y, M_z будут взаимно ортогональны, поэтому обобщенное перемещение, соответствующее каждому внутреннему силовому фактору, будет перемещение, вызванное им самим. Или по-другому: каждый внутренний силовой фактор будет совершать работу только на созданном им (на собственном) перемещении. На этом основании du – потенциальная энергия деформации элемента может быть найдена, как сумма потенциальных энергий деформации, определенных при действии на элемент каждого внутреннего силового фактора отдельно:

$$du = du_{M_z} + du_{M_y} + du_{M_k} + du_N + du_{Q_y} + du_{Q_z}. \qquad \text{(VI.22)}$$

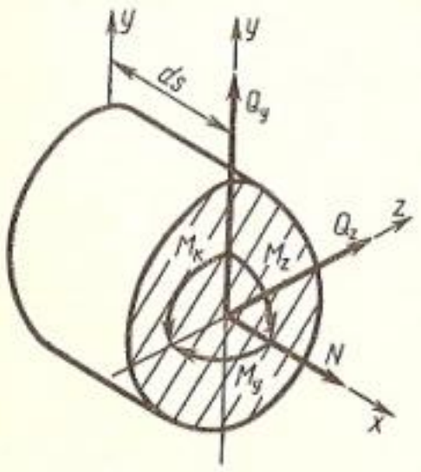


Рис. VI.2

При вычислении слагаемых, входящих в равенство (VI.22), пользуемся теоремой (VI.21). Из схемы нагружения (рис. VI.3, *а*)

$$du_{M_z} = \frac{M_z d\theta_z}{2},$$

где $d\theta_z$ – поворот правого сечения элемента, остающегося плоским при чистом изгибе, около оси z.

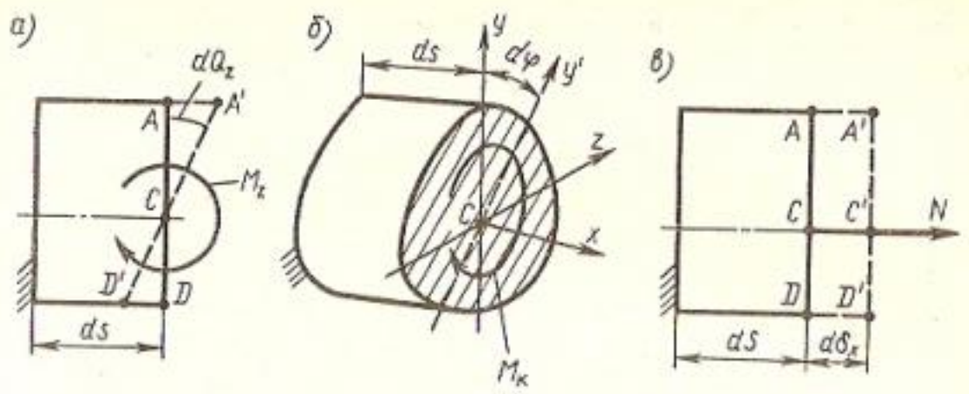


Рис. VI.3

Из дифференциального уравнения (V.48)

$$d\theta_z = \frac{M_z}{EI_z} dS,$$

поэтому

$$du_{M_z} = \frac{M_z^2}{2EI_z} dS. \qquad \text{(VI.23)}$$

По аналогии,

$$du_{M_y} = \frac{M_y^2}{2EI_y} dS. \qquad \text{(VI.24)}$$

Из схемы нагружения (рис. VI.3, *б*)

$$du_{M_k} = \frac{M_к d\varphi}{2},$$

где $d\varphi$ – угол поворота правого сечения элемента относительно левого около оси x.

Из выражений (III.14) и (III.15)

$$d\varphi = \frac{M_к}{GI_к} dS,$$

поэтому

$$du_{M_к} = \frac{M_к^2}{2GI_к} dS. \qquad \text{(VI.25)}$$

Из схемы нагружения (рис. VI.3, *в*)

$$du_N = \frac{N d\delta_x}{2},$$

где $d\delta_x$ – перемещение правого сечения элемента, остающегося плоским при растяжении (сжатии), в направлении оси x.

Из выражения (II.10)

$$d\delta_x = \frac{N}{EF} dS,$$

поэтому

$$du_N = \frac{N^2}{2EF} dS. \qquad \text{(VI.26)}$$

Угол сдвига γ_{xy} элемента (рис. VI.4, *а*) с размерами b, dS, dy (рис. VI.4, *б*) перемещен по высоте сечения h, поэтому для определения du_{Q_y} придется сначала вычислить $d(du_{Q_y})$ – потенциальную энергию деформации этого элемента. Касательные силы упругости, действующие по граням элемента, параллельным нейтральному слою, нормальны к перемещению, и, следовательно, их работа равна нулю. Для элемента: $\tau_{xy} b dy$ – сила, действующая по грани, совпадающей с поперечным сечением; $d\delta_y = \gamma_{xy} dS$ – перемещение этой грани. Тогда

$$d(du_{Q_y}) = \frac{1}{2} \tau_{xy} b dy \gamma_{xy} dS.$$

Из (V.29) $\tau_{xy} = \dfrac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{I_z b}$. Из (III.7) $\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = \dfrac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{G I_z b}$. Следовательно,

$$d(du_{Q_y}) = \frac{Q_y^2 \cdot dS \cdot (S_z^{\text{отс}})^2}{2GI_z^2 b} dy.$$

Представим du_{Q_y} как

$$du_{Q_y} = \eta_y \frac{Q_y^2}{2GF} dS. \qquad \text{(VI.27)}$$

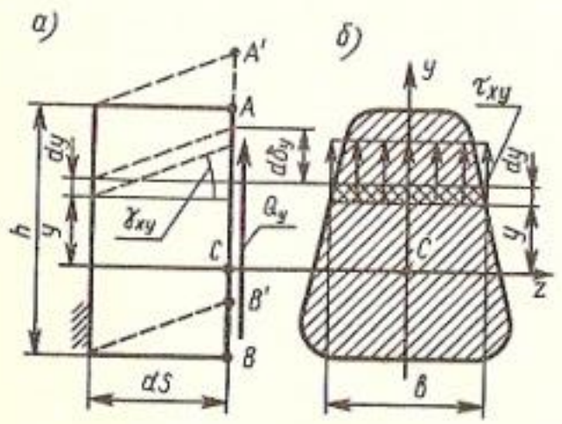


Рис. VI.4

По аналогии,

$$du_{Q_z} = \eta_z \frac{Q_z^2}{2GF} dS. \qquad \text{(VI.28)}$$

В (VI.27) и (VI.28) через η_y и η_z обозначены безразмерные коэффициенты, зависящие только от формы сечения

$$\eta_y = \frac{F}{I_z^2} \int_h \frac{(S_z^{\text{отс}})^2}{b} dy,$$

$$\eta_z = \frac{F}{I_y^2} \int_h \frac{(S_y^{\text{отс}})^2}{b} dy. \qquad \text{(VI.29)}$$

Значения коэффициентов для некоторых форм сечений даны в табл. 8.

Таблица 8

Форма сечения				
$\eta_z = \eta_y$	10/9	6/5	2,00	3,14

Подставив выражения (VI.23) – (VI.28) в равенство (VI.22), будем иметь

$$du = \frac{1}{2}\left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{GI_k} + \frac{N^2}{EF} + \eta_y \frac{Q_y^2}{GF} + \eta_z \frac{Q_z^2}{GF}\right) dS. \qquad \text{(VI.30)}$$

Обозначив n – число участков системы, S_i – длину i-го участка из (VI.30), получим для системы

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{GI_k} + \frac{N^2}{EF} + \right.$$

$$\left. + \eta_y \frac{Q_y^2}{GF} + \eta_z \frac{Q_z^2}{GF}\right) dS. \qquad \text{(VI.31)}$$

§ VI.3. Формула Мора для определения перемещения сечения по заданному направлению

Пусть требуется определить перемещение сечения C системы (рис. VI.5) по направлению ν. Недостаток теоремы Кастилиано состоит в том, что она пригодна для определения перемещений только тех сечений, в которых приложены обобщенные силы по направлению этих сил. Чтобы избежать этого недостатка, Мор предложил помимо внешних обобщенных сил, действующих на систему, приложить в том сечении,

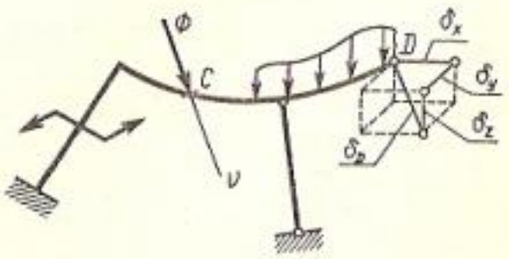


Рис. IV.5

в котором ищется перемещение, по направлению искомого перемещения, обобщенную фиктивную силу Ф. Если ищется линейное перемещение сечения, то Ф будет силой, а если его поворот, то – парой сил. Каждый внутренний силовой фактор в текущем сечении i-го участка системы будет суммой соответствующего внутреннего силового фактора от обобщенных сил, действующих на систему, которому присваиваем индекс P, и соответствующего внутреннего силового фактора от фиктивной силы. Каждый внутренний силовой фактор в текущем сечении i-го участка системы от Ф может быть найден как произведение силового фактора от безразмерной обобщенной единичной силы, приложенной к системе вместо и по направлению Ф на Ф. Тогда по формуле (VI.31) при совместном действии на систему заданных обобщенных сил и Ф

$$u=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{(M_{zp}+M_{z1}\Phi)^2}{EI_z}+\frac{(M_{yp}+M_{y1}\Phi)^2}{EI_y}+\right.$$
$$+\frac{(M_{kp}+M_{k1}\Phi)^2}{GI_k}+\frac{(N_p+N_1\Phi)^2}{EF}+$$
$$\left.+\eta_y\frac{(Q_{yp}+Q_{y1}\Phi)^2}{GF}+\eta_z\frac{(Q_{zp}+Q_{z1}\Phi)^2}{GF}\right)dS, \qquad \text{(VI.32)}$$

где M_{y1}, M_{z1}, M_{k1}, N_1, Q_{y1}, Q_{z1} – внутренние силовые факторы в текущем сечении i-го участка системы от действия на нее обобщенной единичной силы. По теореме Кастилиано (VI.11),

$$\delta_v=\left[\frac{\partial u}{\partial \Phi}\right]_{\Phi=0}.$$

Дифференцируя выражение (VI.32) по Ф и приравнивая в производной Ф нулю, получим формулу Мора для определения перемещения сечения системы по заданному направлению:

$$\delta_v=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{M_{zp}M_{z1}}{EI_z}+\frac{M_{yp}M_{y1}}{EI_y}+\frac{M_{kp}M_{k1}}{GI_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{N_pN_1}{EF}+\eta_y\frac{Q_{yp}Q_{y1}}{GF}+\eta_z\frac{Q_{zp}Q_{z1}}{GF}\right)dS. \qquad \text{(VI.33)}$$

Чтобы найти перемещение произвольного сечения D системы, пользуясь формулой Мора, следует определить перемещение этого сечения по трем взаимно перпендикулярным направлениям δ_x, δ_y, δ_z. Тогда

$$\delta_D=\sqrt{\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2}. \qquad \text{(VI.34)}$$

Направляющие косинусы этого перемещения найдутся по формулам

$$l=\frac{\delta_x}{\delta_D},\quad m=\frac{\delta_y}{\delta_D},\quad n=\frac{\delta_z}{\delta_D}. \qquad \text{(VI.35)}$$

Формула Мора для плоской стержневой системы (см. § V.6) запишется так:

$$\delta_v=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{M_{zp}M_{z1}}{EI_z}+\frac{N_pN_1}{EF}+\eta_y\frac{Q_{yp}Q_{y1}}{GF}\right)ds. \qquad \text{(VI.36)}$$

§ VI.4. Формула Мора для определения температурных перемещений сечения по заданному направлению

В основу вывода формулы положен принцип возможных перемещений, изложенный в § III.8.

Пусть дана система (рис. VI.6, *а*), находящаяся под действием температуры. Обозначим: n – число участков системы; i – номер ее произвольного участка.

Для определения перемещения сечения C по направлению ν рассмотрим систему без температуры, нагруженную безразмерной обобщенной единичной силой, приложенной в сечении C по направлению ν (рис. VI.6, *б*). Схему системы под действием температуры обозначим T, а схему нагружения системы обобщенной единичной силой обозначим *1*. Приняв за возможное перемещение системы ее деформиро-

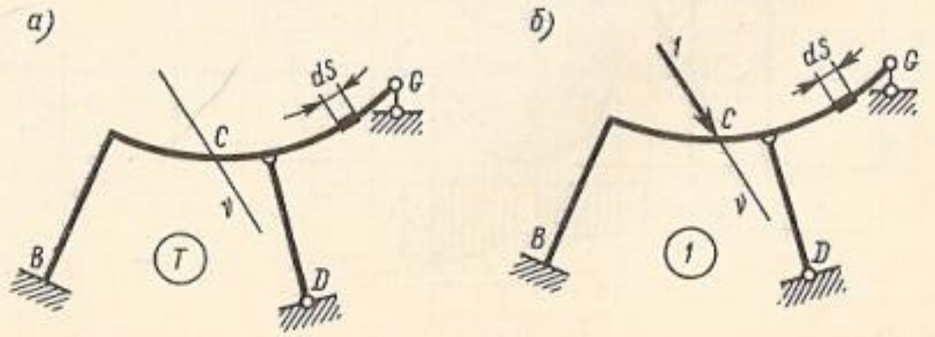


Рис. VI.6

ванное состояние в схеме *T*, найдем работу внешних, реактивных и упругих сил схемы нагружения *1* на этом возможном перемещении. По принципу возможных перемещений сумма этих работ равна нулю, так как система в состоянии *1* находится в равновесии.

Работа внешних сил

$$A_p = 1 \cdot \delta_v. \tag{VI.37}$$

Опоры B и D неподвижны, а реакция в опоре G направлена по нормали к любому ее возможному перемещению, поэтому работа реактивных сил

$$A_R = 0. \tag{VI.38}$$

Для определения работы сил упругости A_y рассмотрим один и тот же элемент, вырезанный из схемы T (рис. VI.7, *а*) и схемы *1* (рис. VI.7, *б*) двумя поперечными сечениями, расстояние dS между которыми бесконечно мало. Силы упругости в поперечном сечении элемента (рис. VI.7, *б*) могут привестись к шести внутренним силовым факторам, которым присваиваем индекс 1.

В дальнейшем, говоря о температуре, будем понимать под этим изменение температуры. Обозначим температуры крайних верхних и нижних, правых и левых волокон i-го участка соответственно $T_в$, $T_н$ и $T_н$, $T_л$. Считаем, что температура в направлениях осей y и z сечения изменяется линейно, будучи соответственно функцией только y и только z. Законы изменения температуры по поперечному сечению показаны на рис. VI.7, *а*.

Очевидно, что

$$T(y) = \frac{T_в - T_н}{a+b} y + \frac{T_в b + T_н a}{a+b},$$

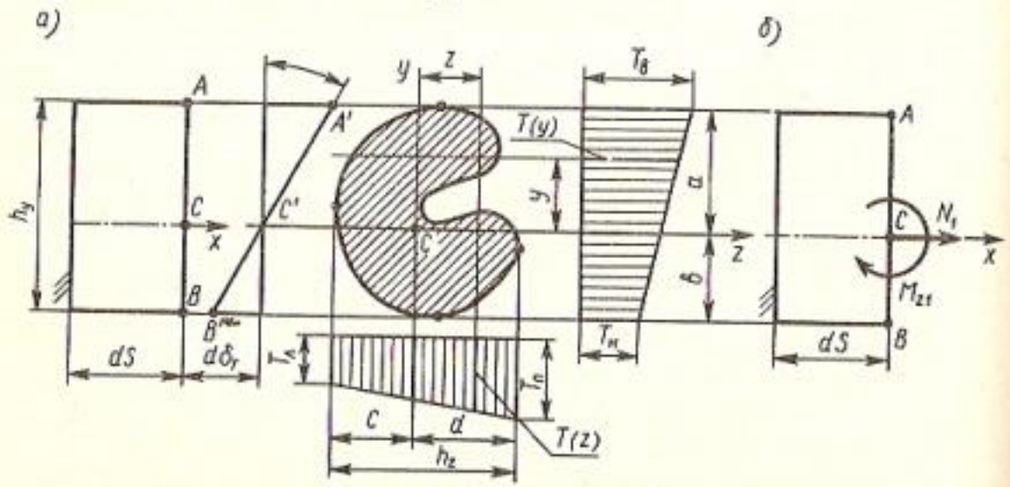


Рис. VI.7

$$T(z) = \frac{T_н - T_л}{c+d} z + \frac{T_н c + T_л d}{c+d}. \tag{VI.39}$$

Температура на оси элемента

$$\Delta T_c = [T(y)]_{y=0} + [T(z)]_{z=0},$$

или

$$\Delta T_c = \frac{T_в b + T_н a}{a+b} + \frac{T_н c + T_л d}{c+d}. \tag{VI.40}$$

Пусть $d\delta_т$ – возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения в схеме (рис. VI.7, *а*) от изменения температуры элемента

$$d\delta_т = \alpha \Delta T_c \, dS, \tag{VI.41}$$

где α – коэффициент линейного расширения материала элемента.

Пусть $d\theta_z^т$ – возможный относительный поворот концевых сечений элемента около оси z в схеме (рис. VI.7, *а*) от изменения температуры

$$d\theta_z^т = \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} dS, \tag{VI.42}$$

где $\Delta T_y = T_в - T_н$, h_y – наибольший размер поперечного сечения в направлении оси y.

По аналогии, возможный относительный поворот концевых сечений элемента вокруг оси z

$$d\theta_y^т = \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} dS, \tag{VI.43}$$

где $\Delta T_z = T_н - T_л$, а h_z – наибольший размер поперечного сечения в направлении оси z.

1. dA_y – работа сил упругости в элементе dS по абсолютной величине равна работе внутренних силовых факторов состояния (рис. VI.7, *б*) на возможных перемещениях состояния (рис. VI.7, *а*) и противоположна ей по знаку, так как силы упругости всегда направлены в сторону, противоположную направлению изменения расстояния между точками тела (см. § I.5).

2. Работа $M_{к1}$, Q_{y1} и Q_{z1} равна нулю, так как концевые сечения элемента при нагреве относительно оси x не поворачиваются, а Q_{y1} и Q_{z1} перпендикулярны направлению $d\delta_т$, поэтому

$$dA_y = -M_{z1} \, d\theta_z^т - M_{y1} \, d\theta_y^т - N \, d\delta_т. \tag{VI.44}$$

Подставляя (VI.41), (VI.42) и (VI.43) в (VI.44) и интегрируя полученное выражение по S_i – длине i-го участка и суммируя эти инте-

гралы по всем участкам системы, найдем A_y. Складывая A_p с A_y и приравнивая сумму нулю, получим формулу Мора для определения температурных перемещений сечений стержневой системы по заданному направлению:

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \left(M_{z1}\alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1}\alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_\epsilon \right) dS. \qquad \text{(VI.45)}$$

Пример VI.1. Определить горизонтальное перемещение δ_{cx} сечения C плоской рамы (рис. VI.8, *а*). Материал рамы – сталь. Поперечное сечение – прямоугольник.

1. Составляем уравнения внутренних силовых факторов в заданной схеме нагружения, считая N положительным, если оно действует от сечения; считая Q_y положительной, если она возникает от внешней силы, дающей положительную проекцию на внутреннюю нормаль к криволинейному участку рамы при построении в положительном направлении оси x; считая M_z положительным, если он увеличивает кривизну криволинейного участка рамы (сгибает участок): $M_{zp} = PR(1 - \cos\varphi)$, $N_p = P\cos\varphi$, $Q_{yp} = P\sin\varphi$.

2. Составим уравнения внутренних силовых факторов в единичной схеме нагружения. Для этого, сняв силу P, приложим в сечении единичную силу по направлению искомого перемещения (рис. VI.8, *б*)

$$M_{z1} = 1 \cdot R\sin\varphi, \; N_1 = -1 \cdot \sin\varphi, \; Q_{y1} = 1 \cdot \cos\varphi.$$

3. Покажем, как на основании (VI.29) определяются коэффициенты $\eta_z = \eta_y$ табл. 9. Из § V.9 для прямоугольника

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \qquad I_z = \frac{bh^3}{12}, \; F = bh;$$

$$\eta_y = \frac{72}{h^5}\int_0^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy = 72\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{48} + \frac{1}{160}\right) = \frac{6}{5}.$$

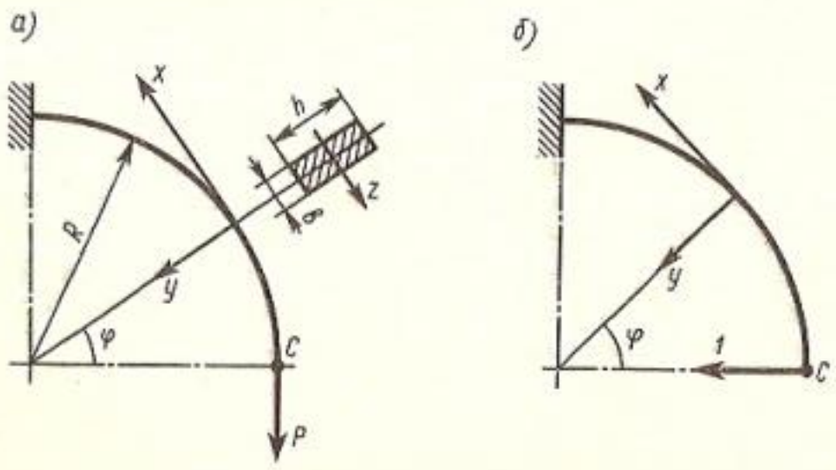


Рис. VI.8

4. Подставляя уравнения внутренних силовых факторов в (VI.36) и интегрируя, находим δ_{cx}. Учитывая, что $dS = Rd\varphi$, получим

$$\delta_{cx} = \frac{PR^3}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi(1-\cos\varphi)\,d\varphi - \frac{PR}{EF}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{6PR}{5GF}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{PR^3}{2EI_z} - \frac{PR}{2EF} + \frac{3PR}{5GF}.$$

Чтобы оценить влияние Q_{yp} и N_p на перемещение сечения, подставим в выражение δ_{cx}: $I_z = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$ и вынесем первый член – член от M_{zp} за скобку, приняв для стали $G = 0{,}4E$ и предположив, что члены от Q_{yp} и N_p одного знака (худший случай). Получим

$$\delta_{cx} = \frac{6PR^3}{bh^3E}\left(1 - \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

Если $\frac{R}{h} \geqslant 5$, то второй член в скобках не больше 0,0133, т. е. пренебрежение N_p и Q_{yp} в формуле (VI.19) изменит перемещение не больше чем на 1,33 %. Поэтому при определении перемещений в рамах, элементы которых длинные, члены от N_p и Q_{yp} в формуле (VI.33) не учитывают, так как они оказываются малыми по сравнению с членами от моментов. В соответствии с этим перемещение δ_v сечений плоских рам определяют по формуле

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\frac{M_{zp}M_{z1}}{EI_z}dS. \qquad \text{(VI.46)}$$

Пример VI.2. Определить угол поворота правого опорного сечения рамы (рис. VI.9, *а*) при совместном действии пары M и температуры, если $T_в = T$, $T_н = 2T$, $R/h_y = 5$, а поперечное сечение – симметрично относительно оси z.

1. Определяем угол поворота сечения при действии на раму только пары M. Для этого составляем уравнения изгибающих моментов на всех участках заданной схемы нагружения (рис. VI.9, *а*). Номер участка совпадает с индексом текущего угла φ для него. Так как на раму действует только пара, реакции в опорах будут вертикальны, равны по величине моменту пары, деленному на расстояние между опорами и противоположны по направлению

$$A_0 = B_0 = \frac{M}{2R}; \qquad M_{zp}^{\text{I}} = \frac{M}{2}(1-\cos\varphi_1), \; M_{zp}^{\text{II}} = -\frac{M}{2}(1-\cos\varphi_2).$$

Составляем уравнения изгибающих моментов на всех участках в единичной схеме нагружения (рис. VI.9, *б*)

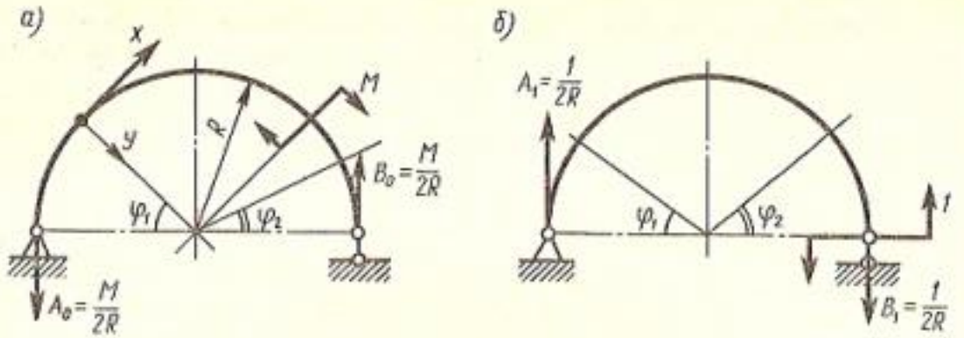


Рис. VI.9

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2R};$$

$$M_{z1}^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2}(1-\cos\varphi_1),\ M_{z1}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}(1+\cos\varphi_2).$$

Подставляем уравнения изгибающих моментов в (VI.46) и находим θ_B^M – угол поворота сечения B от действия на раму только пары M.

$$\theta_B^M = -\frac{MR}{4EI_z}\left[\frac{1}{2}\int_0^{3\pi/4}(1-\cos\varphi_1)^2 d\varphi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/4}(1-\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_2)\,d\varphi_2\right] = -0{,}433\,\frac{MR}{EI_z}. \qquad \text{(VI.47)}$$

Знак минус в окончательном выражении перемещения при определении его по формуле Мора означает, что перемещение противоположно направлению приложенной единичной обобщенной силы. Приложив (рис. VI.9, *б*) единичную пару против часовой стрелки, предполагаем, что и сечение поворачивается в этом направлении. Знак минус в выражении θ_A^M означает, что сечение поворачивается по часовой стрелке.

2. Определяем угол поворота сечения при действии на раму только температуры. Так как сечение симметрично относительно оси z, то в формулах (VI.40) и (VI.41) $a = b = h/2$ и

$$\Delta T_c = \frac{3}{2}T,\quad \Delta T_y = T_в - T_н = -T.$$

Знак минус в выражении ΔT_y означает, что при нагревании кривизна рамы (участка) уменьшается.

Так как при нагревании рама имеет только один участок, то за M_{z_1} можно взять как $M_{z_1}^{\mathrm{I}}$, так и $M_{z_1}^{\mathrm{II}}$, считая, что φ_1 или φ_2 изменяются в пределах от 0 до π. Следовательно,

$$N_1 = -\frac{1}{2R}\cos\varphi_1,\ M_{z_1} = -\frac{1}{2}(1-\cos\varphi_1).$$

Подставляем ΔT_c, ΔT_y, N_1 и M_{z_1} в (VI.46) и находим θ_B^T – угол поворота сечения A при действии на раму только температуры. По формуле (VI.46)

$$\theta_B^T = \frac{\alpha T}{2}\left[-\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\cos\varphi_1 d\varphi_1 + \frac{R}{h_y}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi_1)\,d\varphi_1\right] =$$

$$= \frac{\alpha T}{2}\left(-\frac{3}{2}\Big|\sin\varphi_1\Big|_0^{\pi} + \frac{R}{h_y}\Big|\varphi_1 - \sin\varphi_1\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi\alpha TR}{h_y} = 5\pi\alpha T/2.$$

Поворот сечения при совместном действии на раму пары и температуры θ_A на основании принципа независимости действия внешних факторов находим как алгебраическую сумму θ_B^M и θ_B^T:

$$\theta_B = \theta_B^M + \theta_B^T = -0{,}433\,\frac{MR}{EI_z} + 5\pi\alpha T/2.$$

Пример VI.3. Определить угол поворота правого сечения балки (рис. VI.10, *а*).

1. Составляем уравнения изгибающих моментов на всех участках в заданной схеме нагружения

$$M_{zp}^{\mathrm{I}} = \frac{3ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2},\ M_{zp}^{\mathrm{II}} = \frac{3ql}{2}x_2 - \frac{qx_2^2}{2}.$$

Составляем уравнения изгибающих моментов на всех участках балки в единичной схеме нагружения (рис. VI.10, *в*)

$$M_{z1}^{\mathrm{I}} = \frac{x_1}{3l},\ M_{z1}^{\mathrm{II}} = 1 - \frac{x_2}{3l}.$$

Составляем уравнения I_z на всех участках балки. Из рис. VI.10, *б*

$$b_{\mathrm{I}} = b\left(1+\frac{x_1}{l}\right),\ b_{\mathrm{II}} = b\left(1+\frac{x_2}{2l}\right).$$

Текущее сечение балки на обоих участках – прямоугольник с высотой h, поэтому

$$I_z^{\mathrm{I}} = \frac{b_{\mathrm{I}}h^3}{12} = \frac{bh^3}{12}\left(1+\frac{x_1}{l}\right) = I_z^0\left(1+\frac{x_1}{l}\right),$$

$$I_z^{\mathrm{II}} = \frac{b_{\mathrm{II}}h^3}{12} = \frac{bh^3}{12}\left(1+\frac{x_2}{2l}\right) = I_z^0\left(1+\frac{x_2}{2l}\right),$$

где I_z^0 – момент инерции концевых сечений балки относительно нейтральной линии.

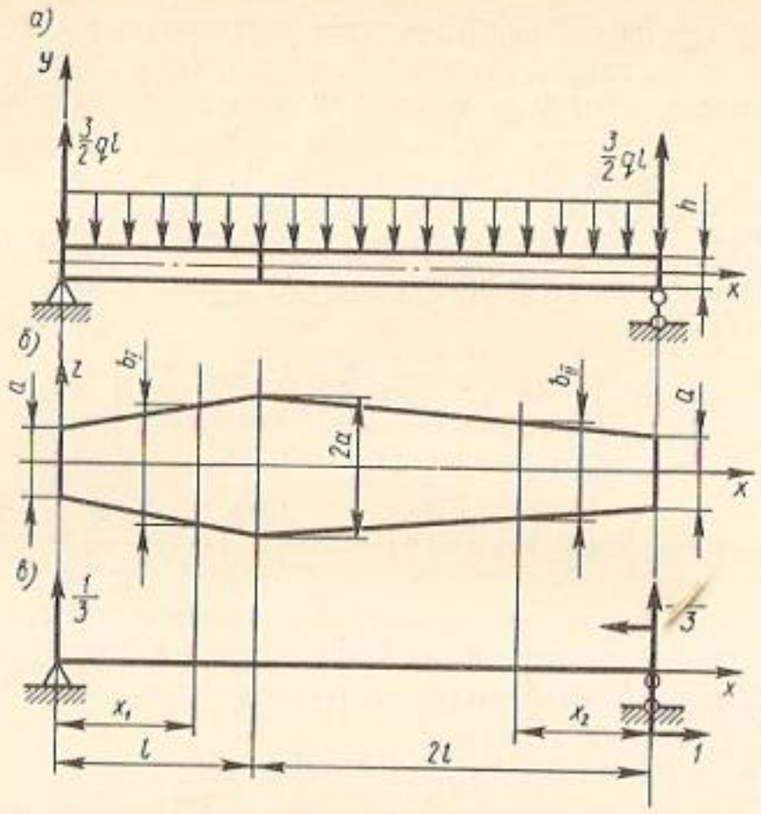


Рис. VI.10

2. Подставляем уравнения изгибающих моментов и уравнения моментов инерции в (VI.46), получим

$$\theta_B = \int_0^l \frac{\left(\frac{3ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\right)x_1}{3lEI_z^0\left(1+\frac{x_1}{2}\right)}dx_1 + \int_0^{2l}\frac{\left(\frac{3ql}{2}x_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\left(1-\frac{x_2}{3l}\right)}{EI_z^0\left(1+\frac{x_2}{2l}\right)}dx_2.$$

Обозначив $\frac{x_1}{l} = \frac{x_2}{l} = t$, найдем

$$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI_z^0}\left[\int_0^1 \frac{(3t-t^2)t}{t+1}dt + \int_0^2 \frac{(3t-t^2)(3-t)}{t+2}dt\right] =$$

$$= \frac{ql^3}{6EI_z^0}\left[\int_0^1\left(-t^2+4t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^2\left(t^2-8t+25-\frac{50}{t+2}\right)dt\right] =$$

$$= \frac{ql^3}{6EI_z^0}(71-96\ln 2) = 0{,}744\frac{ql^3}{EI_z^0}.$$

§ VI.5. Правило Верещагина

Правило Верещагина – графо-аналитический прием вычисления интегралов, входящих в формулы Мора. Правило применимо, если ось участка прямолинейна, и удобно применимо, если жесткость поперечных сечений по длине участка постоянна.

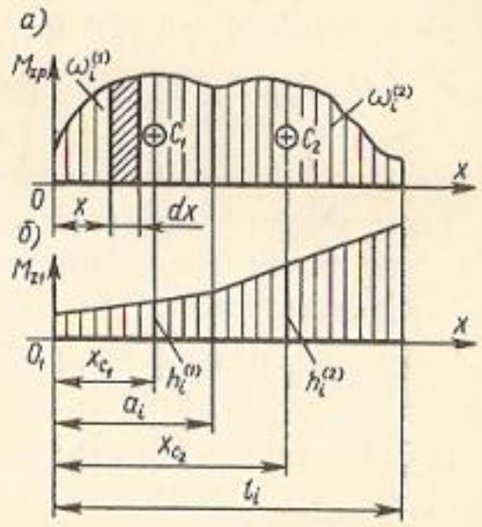


Рис. VI.11

При постоянной жесткости по длине участков формула (VI.46) запишется так:

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(EI_z)_i}\int_{l_i} M_{zp}M_{z1}dx. \qquad \text{(VI.48)}$$

Замена S_i на l_i и dS на dx подчеркивает, что ось участка прямолинейна.

Построим эпюры M_{zp} и M_{z1} на i-м участке (рис. VI.11). Так как момент от заданных сил может быть произвольной функцией от x $M_{zp} = M_{zp}(x)$, то очертание эпюра M_{zp} произвольно (рис. VI.11, *а*). При нагружении рамы единичными силой или парой изгибающий момент от этих факторов на любом ее участке будет линейной функцией от x:

$M_{z1} = k_1x + b_1$ – уравнение M_{z1} на длине a_i;

$M_{z2} = k_2x + b_2$ – уравнение M_{z2} на длине $l_i - a_i$.

Поэтому очертание M_{z1}, M_{z2} будет прямолинейно (рис. VI.11, *б*). Вычислим интеграл, стоящий под знаком суммы в (VI.48):

$$\int_{l_i} M_{zp}M_{z1}dx = \int_0^{a_i} M_{zp}(x)(k_1x+b_1)dx +$$

$$+ \int_{a_i}^{l_i} M_{zp}(x)(k_2x+b_2)dx = k_1\int_0^{a_i} xM_{zp}(x)dx + b_1\int_0^{a_i} M_{zp}(x)dx +$$

$$+ k_2\int_{a_i}^{l_i} xM_{zp}(x)dx + b_2\int_{a_i}^{l_i} M_{zp}(x)dx;$$

$$\int_0^{a_i} xM_{zp}(x)dx = S_y^{\omega_i^{(1)}} = x_{c1}\omega_i^{(1)}; \quad \int_0^{a_i} M_{zp}(x)\,dx = \omega_i^{(1)};$$

$$\int_{a_i}^{l_i} xM_{zp}(x)\,dx = S_y^{\omega_i^{(2)}} = x_{c2}\omega_i^{(2)}; \qquad \int_{a_i}^{l_i} M_{zp}(x)\,dx = \omega_i^{(2)},$$

где $\omega_i^{(1)}$ и $\omega_i^{(2)}$ – части площади эпюра M_{zp} слева и справа от сечения излома в эпюре M_{z1}, а x_{c_1} и x_{c_2} – абсциссы центров тяжести площадей $\omega_i^{(1)}$ и $\omega_i^{(2)}$. Итак,

$$\int_{l_i} M_{zp} M_{z1} dx = (k_1 x_{c_1} + b_1)\omega_i^{(1)} + (k_2 x_{c_2} + b_2)\omega_i^{(2)},$$

где $k_1 x_{c_1} + b_1 = h_i^{(1)}$ – ордината в единичном эпюре под центром тяжести площади $\omega_i^{(1)}$; $k_2 x_{c_2} + b_2 = h_i^{(2)}$ – ордината в единичном эпюре под центром тяжести площади $\omega_i^{(2)}$.

Следовательно,

$$\int_{l_i} M_{zp} M_{z1} dx = \omega_i^{(1)} h_i^{(1)} + \omega_i^{(2)} h_i^{(2)}$$

и (VI.48) запишется так:

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i h_i}{(EI_z)_i}. \qquad \text{(VI.49)}$$

Формула (VI.49) есть аналитическая запись правила Верещагина.

1. Хотя формула (VI.49) получена для определения перемещений сечений плоских рам (в частности балок), она пригодна для вычисления любого интеграла, входящего в (VI.33) и (VI.46).

2. Как следует из вывода правила, в том сечении, в котором имеется излом или скачок в единичном эпюре, площадь эпюра моментов от заданных сил должна разбиваться на две части. Подчеркиваем, что пренебрежение этим приведет к совершенно неверному решению задачи.

3. Если очертания M_{zp} и M_{z1} на участке прямолинейны, то безразлично, из какого эпюра брать площадь, а из какого ординату.

4. По правилу Верещагина можно вычислить любой интеграл вида $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, в котором $f(x)$ – произвольная, а $\varphi(x)$ – линейная функции.

Пример VI.4. Определить прогиб в сечении C балки (рис. VI.12, *а*).

1. Определяем реакции опор и строим эпюр M_{zp} (рис. VI.12, *б*).

2. Сняв силу P, прикладываем в сечении C силу, равную единице (рис. VI.12, *в*).

3. Определяем реакции опор в единичной схеме нагружения и строим эпюр M_{z1} (рис. VI.12, *г*).

4. Так как в сечении C единичного эпюра – излом, площадь эпюра моментов от заданных сил в этом сечении разбиваем на две части. Площадь правой части обозначим ω_1. Чтобы упростить вычисления по определению величины и центра тяжести левой площади (неправильный четырехугольник), разбиваем ее на два треугольника с площадями ω_3 и ω_4 и прямоугольник с площадью ω_2.

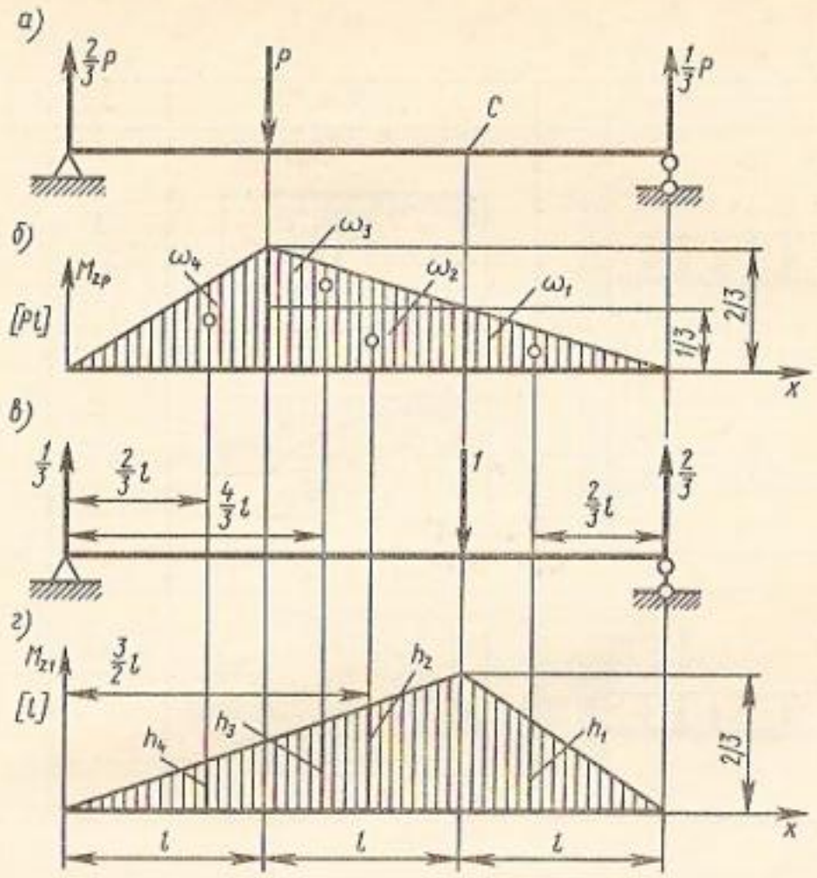


Рис. VI.12

Сделанное надо понимать так: разбивать площадь M_{zp} на любое число частей для упрощения вычислений мы имеем право, а разбить ее на две части в сечении C обязаны.

5. Определяем абсциссы центров тяжести всех площадей и наносим их на рисунок. Находим ω_i и h_i. Площадь всегда считаем положительной, а ординату положительной, если она располагается по одну сторону от оси с площадью, и наоборот. Получим

$$\omega_1 = \frac{Pl^2}{6},\ \omega_2 = \frac{Pl^2}{3},\ \omega_3 = \frac{Pl^2}{6},\ \omega_4 = \frac{Pl^2}{3};$$

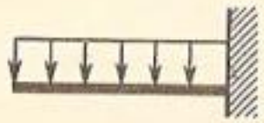
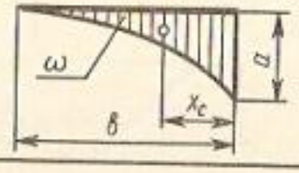
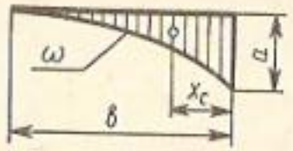
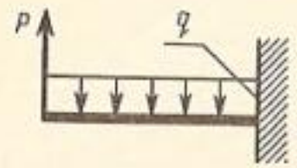
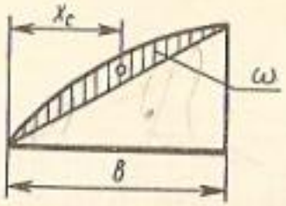
$$h_1 = \frac{4}{9}l,\ h_2 = \frac{1}{2}l,\ h_3 = \frac{4}{9}l,\ h_4 = \frac{2}{9}l.$$

6. На основании (VI.50)

$$y_C = \frac{Pl^3}{EI_z}\left(\frac{4}{54} + \frac{1}{6} + \frac{4}{54} + \frac{2}{27}\right) = \frac{7Pl^3}{18EI_z}.$$

Определение перемещений по правилу Верещагина иногда называют перемножением эпюр. Чтобы воспользоваться правилом Верещагина на участках с криволинейным очертанием эпюра M_{zp}, надо иметь готовые формулы для определения площадей эпюр изгибающих моментов и абсцисс их центров тяжести для некоторых нагружений консольной балки. Эти формулы даны в табл. 9.

Таблица 9

Нагружение	Эпюр M_{z0}	ω	x_c
		$\frac{ab}{3}$	$\frac{b}{4}$
		$\frac{ab}{4}$	$\frac{b}{5}$
		$\frac{qb^3}{12}$	$\frac{b}{2}$

Пример VI.5. Найти угол поворота сечения C балки (рис. VI.13, *а*).

1. Определив реакции опор, строим эпюр M_{zp} (рис. VI.13, *б*).

2. Сняв заданные силы, прикладываем в сечении C единичную пару (рис. VI.13, *в*).

3. Определив реакции опор в единичной схеме нагружения, строим эпюр M_{z1} (рис. VI.13, *в*).

4. Разбив в сечениях C и B эпюр M_{zp} на части, находим ω_i, пользуясь табл. 10, и h_i:

$$\omega_i = \frac{8ql^3}{12} = \frac{2}{3}ql^3; \quad h_1 = \frac{3}{4\cdot 3} = \frac{1}{4};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2ql^3 = \frac{1}{2}ql^3; \quad h_2 = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{3};$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot ql^3 = \frac{1}{6}ql^3; \quad h_3 = \frac{20\cdot 3}{9\cdot 4\cdot 3} = \frac{5}{9};$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}ql^3 = \frac{1}{24}ql^3; \quad h_4 = -\frac{26\cdot 3}{9\cdot 4\cdot 3} = -\frac{13}{18};$$

$$\omega_5 = \frac{1}{4}ql^3; \quad h_5 = \frac{1}{8};$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}ql^3 = \frac{3}{8}ql^3; \quad h_6 = \frac{1}{12}.$$

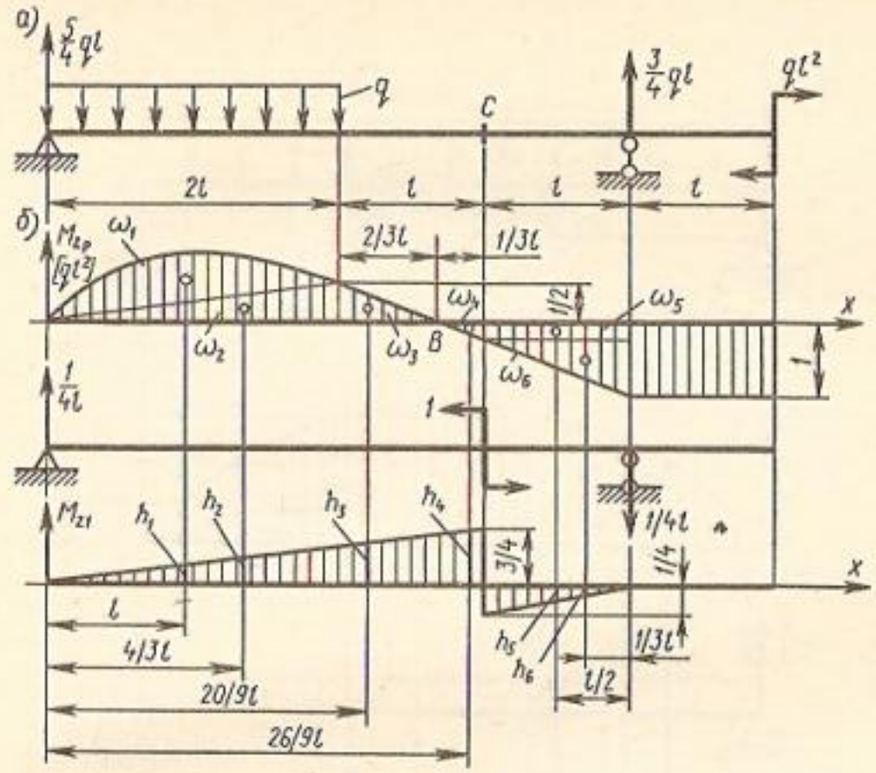


Рис. VI.13

5. На основании формулы (VI.49)

$$\theta_c = \frac{ql^3}{EI_z}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{9} - \frac{1}{24}\cdot\frac{13}{18} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}\right) = \frac{11ql^3}{24EI_z}.$$

Знак плюс в выражении θ_c говорит о том, что сечение поворачивается в сторону по направлению единичной пары.

Пример VI.6. Определить прогиб балки переменной жесткости (рис. VI.14, *а*) в сечении C.

Эпюры M_{zp} и M_{z1} построены на рис. VI.14, *б, г*. Находим ω_i и h_i:

$$\omega_1 = \frac{ql^3}{12}, \quad \omega_2 = \frac{ql^3}{2}, \quad \omega_3 = ql^3, \quad \omega_4 = \frac{2}{3}ql^3,$$

$$h_1 = \frac{1}{3}l, \quad h_2 = \frac{4}{9}l, \quad h_3 = \frac{4}{9}l, \quad h_4 = \frac{1}{3}l.$$

При перемножении эпюр первые два произведения делятся на $2EI_z$, а третье и четвертое – на EI_z:

$$y_c = ql^4\left[\frac{1}{2EI_z}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{EI_z}\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{57ql^3}{72EI_z}.$$

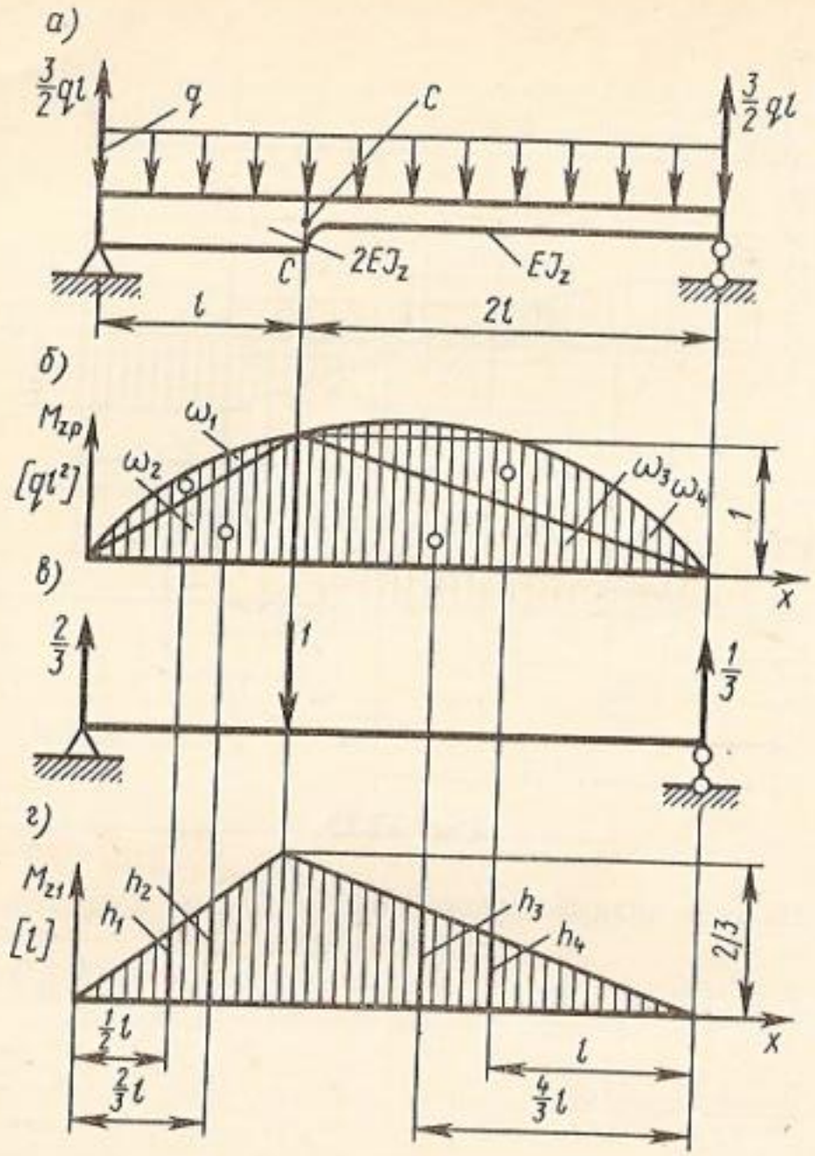


Рис. VI.14

Пример VI.7. Определить прогиб балки (рис. VI.15, *а*) в сечении *C*.

Чтобы избежать интегрирования при определении криволинейных площадей и абсцисс их центров тяжести эпюра M_{zp} (рис. VI.15, *б*), сводящего на нет достоинства правила Верещагина, которое тем и хорошо, что не связано с вычислением интегралов, эпюр M_{zp} следует расслоить.

Расслоенным называется эпюр, построенный отдельно от каждого внешнего силового фактора, действующего по одну сторону от выбранного сечения. При построении расслоенного эпюра одно из сечений выбранное, в котором имеется излом или скачок в единичном эпюре, или скачком меняется жесткость, считают заделанным и говорят, что эпюр расслоен относительно этого сечения. Правильный выбор заделанного сечения сокращает вычислительную работу.

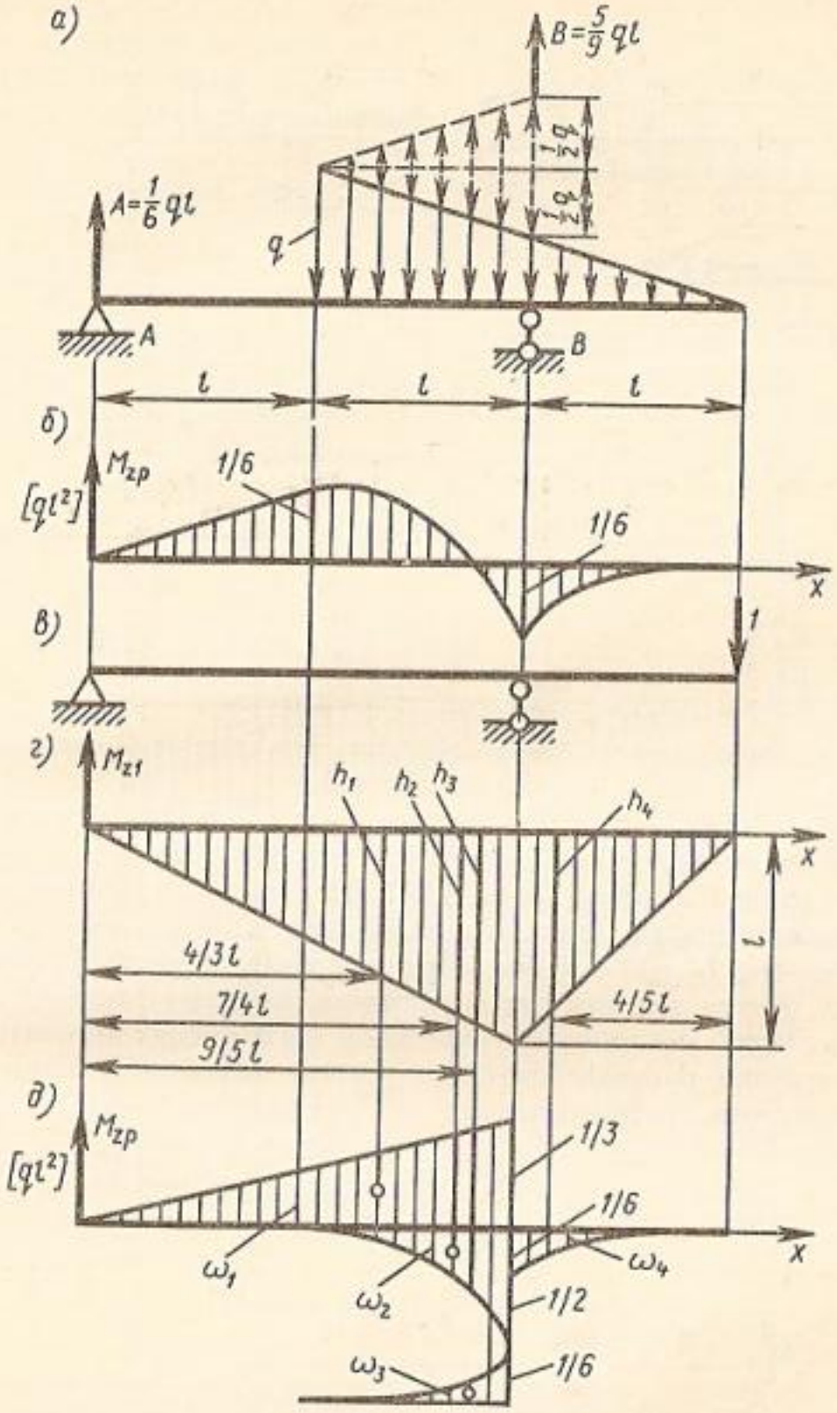


Рис. VI.15

В примере за заделанное следует принять опорное сечение балки B. Распределенную нагрузку слева от сечения *B* надо представить как равномерную и треугольную (рис. VI.15, *а*). Такое представление позволит использовать при определении площадей расслоенного эпюра и абсцисс их центров тяжести табл. 10. Взяв четыре схемы нагружения консольной балки (рис. VI.16), строим для каждой из них эпюр изгибающего момента. Совокупность этих эпюр и будет расслоенным эпюром (рис. VI.15, *д*). Алгебраическая

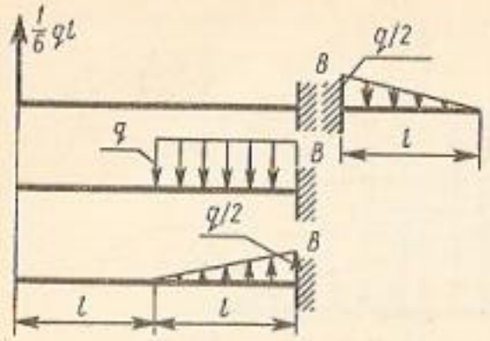


Рис. VI.16

сумма ординат эпюра (рис. VI.15, *д*) в любом сечении равна ординате эпюра (рис. VI.15, *б*). Значения ω_i и h_i находим, пользуясь табл. 10.

Определяем ω_i и h_i:

$$\omega_1 = \frac{1}{3}ql^3,\ \omega_2 = \frac{1}{6}ql^3,$$
$$\omega_3 = \frac{1}{48}ql^3,\ \omega_4 = \frac{1}{48}ql^3;$$

$$h_1 = -\frac{2}{3}l,\ h_2 = \frac{7}{8}l,\ h_3 = -\frac{9}{10}l,\ h_4 = \frac{4}{5}l.$$

По (VI.49)

$$y_c = \frac{ql^4}{EI_z}\left(-\frac{2}{9} + \frac{7}{48} - \frac{9}{480} + \frac{4}{240}\right) = -\frac{113ql^4}{1440EI_z}.$$

Знак минус в ответе для y_c означает, что сечение C переместится вверх.

Пример VI.8. Определить перемещение концевого сечения консольной балки переменной жесткости (рис. VI.17, *а*).

В сечении *1* эпюр M_{zp} (рис. VI.17, *б*) надо разбить на две части, так как левое произведение M_{zp} на M_{z1} должно делиться на $2EI_z$, а правое – на EI_z. Мы не можем определить, пользуясь табл. 10, абсциссу центра тяжести левой площади, поэтому эпюр M_{zp} следует расслоить, построив сначала эпюр изгибающих моментов от части нагрузки, распределенной по участку балки $1-2$, а затем от части нагрузки, распределенной по участку $0-1$ (рис. VI.17, *д*). Находим:

$$\omega_1 = \frac{1}{6}ql^3,\ \omega_2 = \frac{1}{2}ql^3,\ \omega_3 = \frac{1}{2}ql^3,\ \omega_4 = \frac{1}{6}ql^3;$$

$$h_1 = \frac{3}{4}l,\ h_2 = \frac{3}{2}l,\ h_3 = \frac{5}{3}l,\ h_4 = \frac{7}{4}l;$$

$$y_c = ql^4\left[\frac{1}{EI_z}\cdot\frac{3}{24} + \frac{1}{2EI_z}\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{24}\right)\right] = \frac{17ql^3}{16EI_z}.$$

Пример VI.9. Определить угол поворота сечения B рамы примера V.4, считая EI_z постоянной по участкам.

1. Эпюр изгибающих моментов на участке рамы $2-3$ следует расслоить, приняв за заделанное одно из концевых сечений участка. Принимая за заделанное сечение *3*, строим эпюр M_{zp} (рис. VI.18, *а*).

2. Сняв заданные силы, прикладываем в сечении B единичную пару и, определив реакции, строим эпюр M_{z1} (рис. VI.18, *б*).

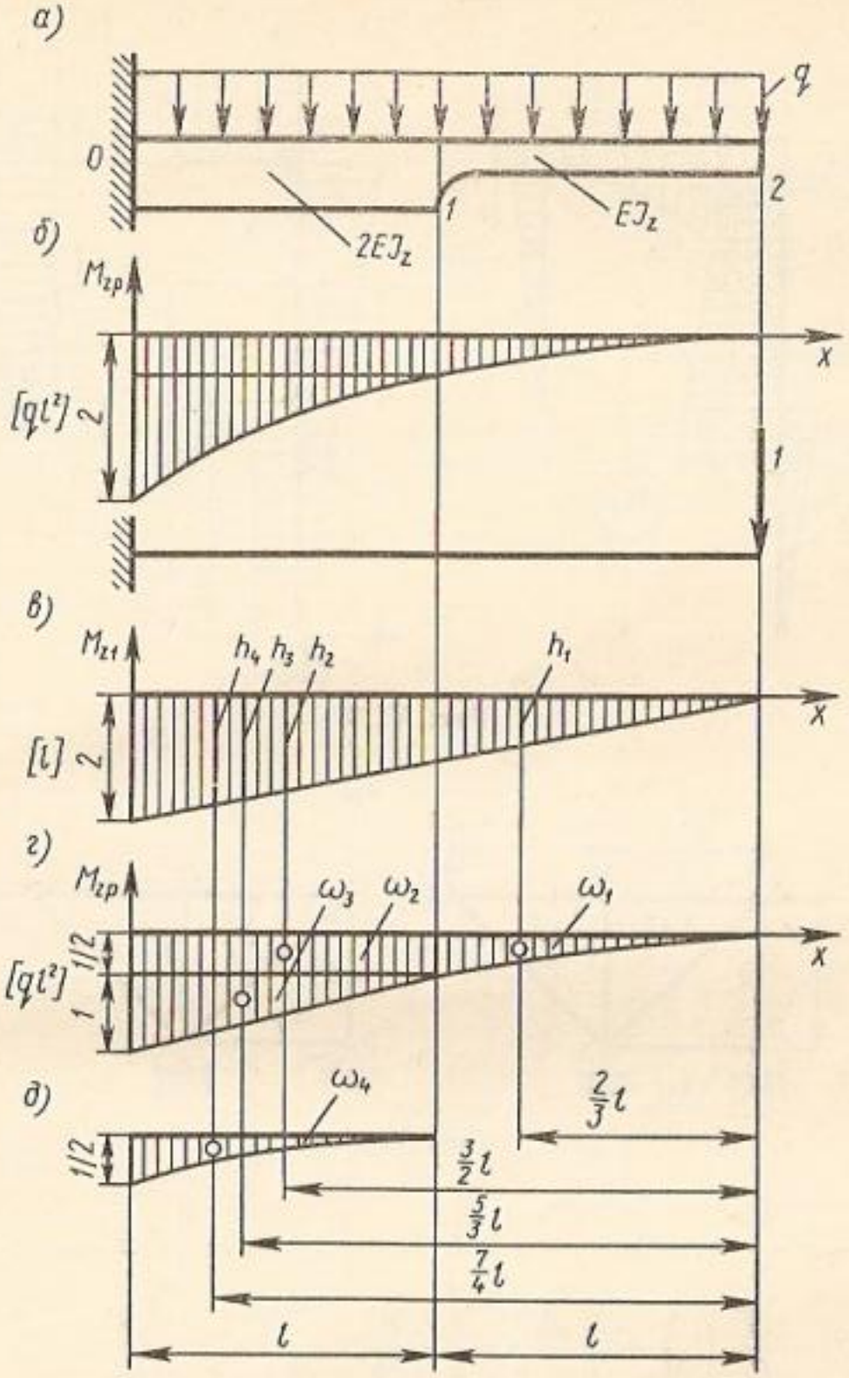


Рис. VI.17

3. Перемножая M_{zp} и M_{z1}, находим θ_B:

$$\omega_1 = \frac{1}{12}ql^3,\ \omega_2 = \frac{1}{6}ql^3,\ \omega_3 = \frac{1}{6}ql^3,\ \omega_4 = \frac{1}{3}ql^3,$$

$$\omega_5 = \frac{1}{12}ql^3,\ \omega_6 = \frac{1}{12}ql^3;$$

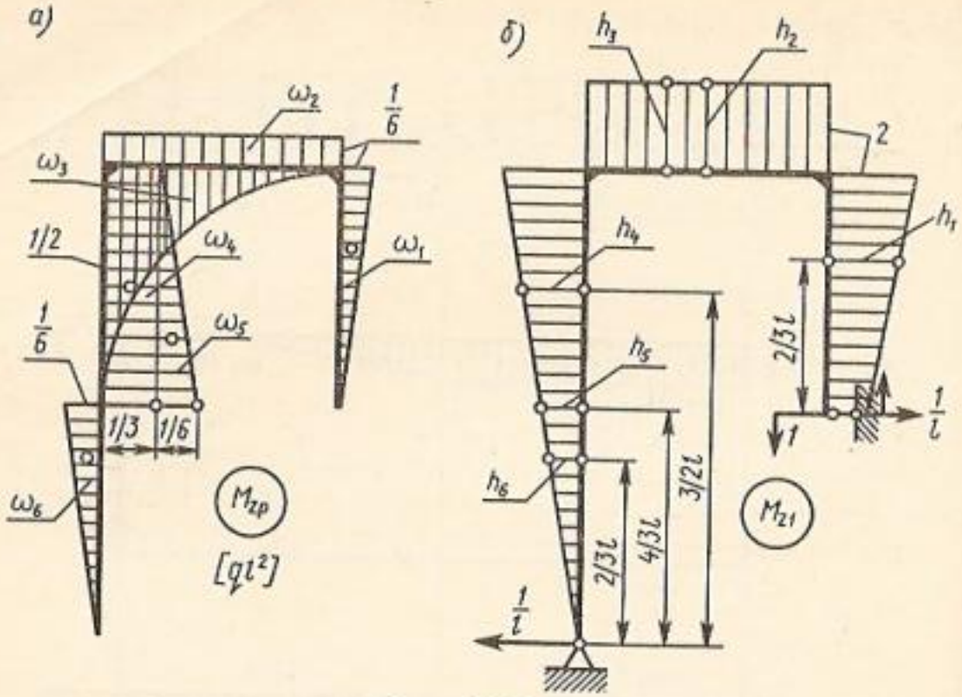


Рис. VI.18

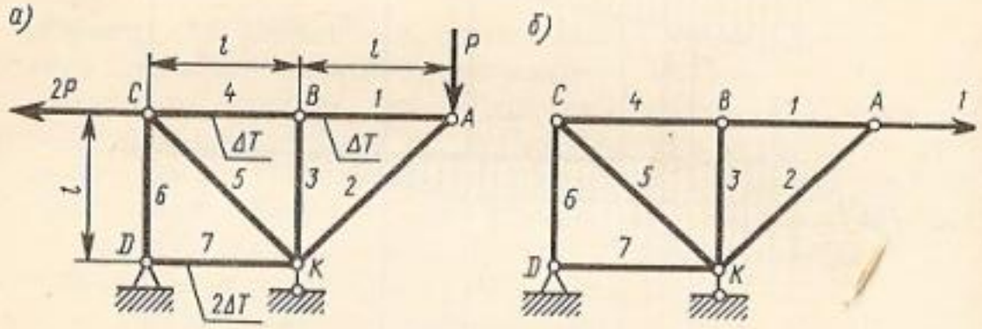


Рис. VI.19

$$h_1=\frac{5}{3},\ h_2=2,\ h_3=-2,\ h_4=-\frac{3}{2},\ h_5=-\frac{4}{3},\ h_6=\frac{2}{3};$$

$$\theta_B=\frac{ql^3}{EI_z}\left(\frac{5}{36}+\frac{2}{6}-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{4}{36}+\frac{2}{36}\right)=-\frac{15ql^3}{36EI_z}.$$

Пример VI.10. Определить горизонтальное перемещение узла A фермы (рис. VI.19, *а*) при совместном действии на нее сил и нагрева стержней, указанных на рисунке. Жесткости сечений стержней при растяжении (сжатии) даны в табл. 11.

Для фермы при равномерном распределении нормальных усилий по стержням и равномерном распределении температуры по их поперечным сечениям и длинам из (VI.33) и (VI.46)

$$\delta_v=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{N_{pi}}{(EF)_i}+\alpha_i\Delta T_i\right]N_{1i}l_i. \qquad \text{(VI.50)}$$

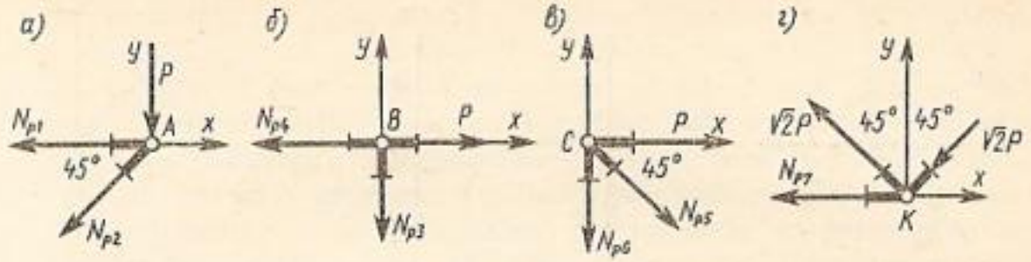


Рис. VI.20

Формула (VI.50) называется **суммой Мора для определения перемещений узлов фермы.**

1. Определяем усилия в стержнях при действии на ферму заданных сил, пользуясь методом вырезания узлов. Определение усилий следует начинать с узла, в котором сходятся два неизвестных усилия. Неизвестные усилия всегда предполагаются направленными от узла (растягивающими).

Узел A (рис. VI.20, *а*)

$$\Sigma Y=-P-N_{p2}\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\ N_{p2}=-\sqrt{2}P;$$

$$\Sigma X=-N_{p1}-N_{p2}\frac{\sqrt{2}}{2},\ N_{p1}=P.$$

Узел B (рис. VI.20, *б*)

$$\Sigma Y=-N_{3p}=0;\ \Sigma X=P-N_{p4}=0,\ N_{p4}=P.$$

Узел C (рис. VI.20, *в*)

$$\Sigma X=N_{p5}\frac{\sqrt{2}}{2}-2P+P=0,\ N_{p5}=\sqrt{2}\ P;$$

$$\Sigma Y=-N_{p5}\frac{\sqrt{2}}{2}-N_{p6}=0,\ N_{p6}=-P.$$

Узел K (рис. VI.20, *г*)

$$\Sigma X=-N_{p7}-\sqrt{2}P\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}P\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\ N_{p7}=-2P.$$

2. Сняв заданные силы, прикладываем в узле A единичную силу по горизонтальному направлению (рис. VI.19, *б*) и определяем усилия в стержнях от этой силы.

Узел A (рис. VI.21, *а*)

$$\Sigma X=-N_{11}+1=0,\ N_{11}=1;\ \Sigma Y=\frac{\sqrt{2}}{2}N_{12}=0,\ N_{12}=0.$$

Узел B (рис. VI.21, *б*)

$$\Sigma X=-N_{14}+1=0,\ N_{14}=1;\ \Sigma Y=N_{13}=0.$$

Узел C (рис. VI.21, *в*)

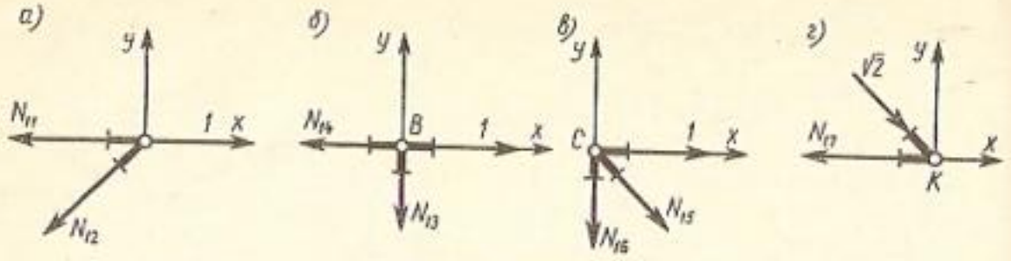


Рис. VI.21

$$\Sigma X = N_{15}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0,\ N_{15} = -\sqrt{2};$$

$$\Sigma Y = -N_{15}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{16} = 0,\ N_{16} = 1.$$

Узел K (рис. VI.21, *г*)

$$\sum X = -N_{17} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,\ N_{17} = 1.$$

Исходные данные, определенные усилия и входящие в формулу (VI.50) выражения для каждого стержня сводим в табл. 10. В первой графе таблицы помещены номера стержней.

Таблица 10

№ п/п	$(EE)_i$	l_i	N_{Pi}	N_{1i}	$\frac{N_{Pi}N_{1i}l_i}{(EF)_i}$	$\alpha\Delta l_i N_{1i}$
1	$2EF$	l	P	1	$Pl/(2EF)$	$\alpha\Delta Tl$
2	EF	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}P$	0	0	0
3	EF	l	0	0	0	0
4	$2EF$	l	P	1	$Pl/(2EF)$	$\alpha\Delta Tl$
5	EF	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}Pl/(EF)$	0
6	$2EF$	l	P	1	$Pl/(2EF)$	0
7	$2EF$	l	$-2P$	1	$-Pl/(EF)$	$2\alpha\Delta Tl$

Суммируя строки двух последних граф и складывая эти суммы, получим

$$\delta_{A_x} = \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}\right)\frac{Pl}{EF} + 4\alpha\Delta Tl.$$

Пример VI.11. Определить перемещение нулевого сечения плоскопространственной рамы (рис. VI.22, *а*). На участках $0-1$ и $1-2$ сечение стержня рамы – круг диаметра a; на участке $2-3$ сечение – прямоугольник $h/b = 3/2$, $b = a$; материал – сталь, $G = 0{,}4E$.

Рама называется плоскопространственной, если все ее участки и одна из главных центральных осей поперечных сечений лежат в одной плоскости, а внешние силы, действующие на раму, к этой плоскости перпендикулярны. В любом сечении плоскопространственной рамы равны нулю внутренние силовые факторы, лежащие в ее плоскости ($N = Q_z = M_y = 0$), так как внешние силы по одну сторону от сечения ни проекций на оси x, z (ось z лежит в плоскости рамы), ни моментов относительно оси y не дают.

Для длинных участков нетонкостенного сечения член от Q_y по сравнению с членами от M_z и $M_к$ в (VI.33) пренебрежимо мал и формула Мора для плоскопространственной рамы запишется так:

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{M_{zp}M_{z1}}{EI_z} + \frac{M_{кp}M_{к1}}{GI_к}\right)dS. \qquad \text{(VI.51)}$$

На прямолинейных участках интегралы, входящие в (VI.51), следует вычислять по правилу Верещагина.

1. Строим эпюры M_{zp} и $M_{кp}$.

При построении эпюр внутренних силовых факторов определяем их значения на границах участков и соединяем эти значения, пользуясь дифференциальными зависимостями (V.8), (V.10), (III.11).

Определяем M_{zp} на границах участков:

$M_{zp}^{(1)} = 0$; $M_{zp}^{(2')} = Pl$; $M_{zp}^{(2'')} = 0$ (ось z в сечении $2''$ пересекается с линией действия силы P); $M_{zp}^{(3)} = Pl$. Ординаты M_z откладываются на сжатом волокне.

Определяем $M_{кp}$ на границах участков (на участках):

$M_{кp}^{(0-2)} = 0$; $M_{кp}^{(2-3)} = Pl$.

Знак крутящего момента определяется по тому же правилу, что и в брусе, и проставляется на эпюре $M_к$.

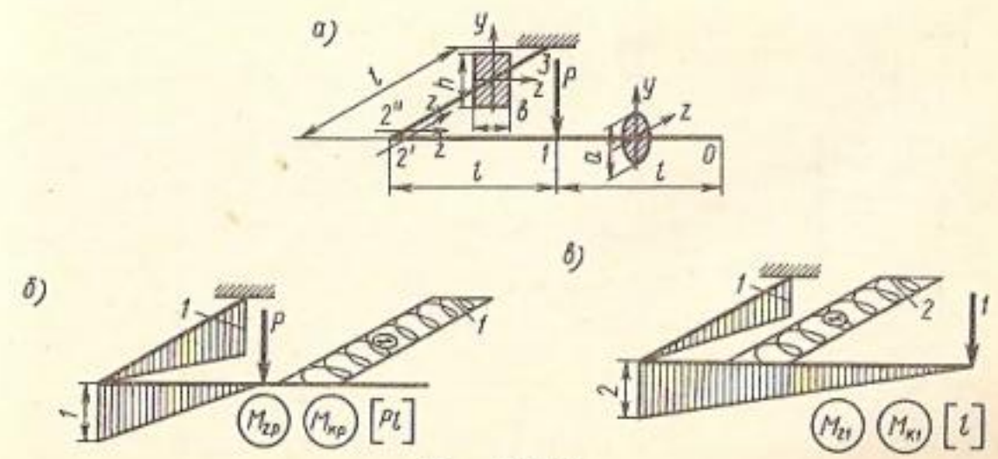


Рис. VI.22

Эпюры M_{zp} и M_{kp} строятся на одном рисунке (рис. VI.22, *б*). Очертания $M_к$ в отличие от M_z заполняются спиральной линией.

2. Строим эпюры M_{z1} и $M_{к1}$. Так как сечения плоскопространственной рамы перемещаются перпендикулярно ее плоскости, сняв с рамы силу P, прикладываем в сечении O вертикальную единичную силу (рис. VI.22, *в*). В граничных сечениях участков

$$M_{z1}^{(0)} = 0,\ M_{z1}^{(2')} = 2l,\ M_{z1}^{(2'')} = 0,\ M_{z1}^{(3)} = l;$$

$$M_{к1}^{(0-2)} = 0,\ M_{к1}^{(2-3)} = 2l.$$

Эпюры M_{z1} и $M_{к1}$ построены на рис. VI.22, *в*.

3. Выражаем жесткости на изгиб и кручение всех участков рамы через E и a, учитывая, что из табл. 2 для прямоугольника с отношением сторон $h/b = 3/2$ $\beta = 0{,}196$.

Находим

$$EI_z^{(0-2)} = 0{,}05Ea^4,\ EI_z^{(2-3)} = \frac{a \cdot 27a^3}{8 \cdot 12} = 0{,}281Ea^4,$$

$$GI_к^{(2-3)} = G\beta b^3 h = 0{,}4E \cdot 0{,}196a^3 \cdot 1{,}5a = 0{,}118Ea^4.$$

4. Пользуясь (VI.51) и (VI.49), определяем

$$\delta_0 = \frac{Pl^3}{Ea^4}\left(\frac{1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{0{,}281} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{0{,}118} \cdot 2\right) = 34{,}8\frac{Pl^3}{EI_z}.$$

§ VI.6. Расчет винтовых цилиндрических пружин

На рис. VI.23, *а* обозначены: $D_{ср}$ – средний диаметр витков пружины; d – диаметр проволоки; i – число рабочих витков; α – угол подъема витка. Величины $D_{ср}$, d, i и α называют параметрами пружины. Будем считать, что $D/d \geqslant 6$, а угол подъема витка мал ($\alpha \leqslant 15°$).

1. Вывод формулы для определения максимального касательного напряжения τ_{max} в пружине.

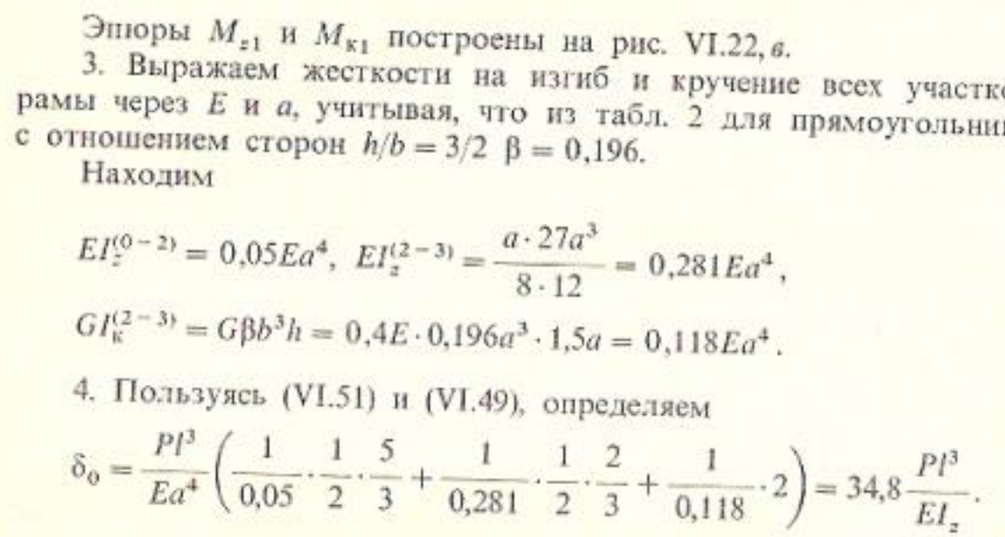


Рис. VI.23

Чтобы установить, к каким внутренним силовым факторам приводятся силы упругости в поперечном сечении витка пружины, разрезаем его плоскостью, проходящей через ось пружины, и рассматриваем равновесие верхней отсеченной части (рис. VI.23, *б*). В силу малости α сечение витка плоскостью можно считать поперечным (кругом диаметра d).

Для равновесия отсеченной части силы упругости в поперечном сечении витка должны привестись к

$$Q_y = P \text{ и } M_к = PD_{ср}/2.$$

Эпюры распределения касательных напряжений по поперечному сечению от Q_y и $M_к$ показаны на рис. VI.23, *в*.

Опасной будет точка A, так как в ней касательные напряжения от Q_y и $M_к$ достигают наибольших значений и оба направлены вниз. Следовательно, $\tau_{max} = \tau_A = \tau_A^{M_к} + \tau_A^{Q_y}$.

Из (III.13) $\tau_A^{M_к} = \dfrac{M_к}{W_к} = \dfrac{8PD_{ср}}{\pi d^3}$; из (V.31) $\tau_A^{Q_y} = \dfrac{4Q_y}{3F} = \dfrac{16P}{3\pi d^2}$, $\tau_{max} = \dfrac{8PD_{ср}}{\pi d^3}\left(1 + \dfrac{2}{3}d/D\right)$.

По принятому предположению $D/d \geqslant 6$, поэтому второе слагаемое в скобках не больше 1/9 и им по сравнению с единицей можно пренебречь. Это означает, что мы пренебрегаем напряжением от Q_y, как малым по сравнению с напряжением от M_k, считая, что пружина испытывает только кручение. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{8PD_{ср}}{\pi d^3}. \qquad \text{(VI.52)}$$

2. Вывод формулы для определения осадки пружины λ.

Осадкой пружины называется разность между высотами пружины после и до деформации (рис. VI.24). Следовательно,

$$\lambda = h_1 - h.$$

Для определения λ воспользуемся (VI.51). Находим:

$$M_{kp} = \frac{PD_{ср}}{2},\ M_{k1} = [M_{kp}]_{p=1} = \frac{D_{ср}}{2},$$

$$I_k = \frac{\pi d^4}{32},\ M_{zp} = 0.$$

Учитывая, что α – мал, длина оси витков пружины $l = \pi D_{ср} i$.

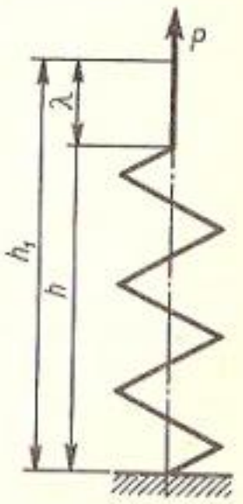


Рис. VI.24

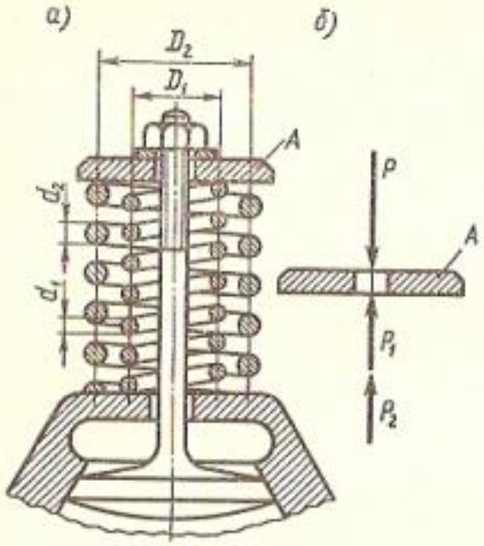


Рис. VI.25

По (VI.51)

$$\lambda = \int_0^{\pi D_{cp} i} \frac{8PD_{cp}^2}{Gd^4\pi} dx,$$

или

$$\lambda = \frac{8PD_{cp}^3 i}{Gd^4}. \qquad \text{(VI.53)}$$

Пример VI.12. Для пружинного узла (рис. VI.25, *а*) определить число оборотов, которое надо дать гайке, чтобы клапан был прижат с силой P; найти запас прочности узла при этом значении силы.

Исходные данные: $d_1 = d$; $d_2 = 1{,}2d$; $D_1 = 6d$; $D_2 = 9d$; $i_1 = 10$; $i_2 = 12$; t – шаг нарезки; $\tau_т$ – предел текучести материала при сдвиге; G – модуль упругости материала.

1. Шаг нарезки t – перемещение гайки за один оборот, и, следовательно, $n_{об} = \lambda/t$, где λ – осадка пружинного узла.

Шайбу A можно считать по сравнению с пружинами абсолютно твердой, и поэтому

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2.$$

Из (VI.53)

$$\lambda_1 = \frac{8P_1D_1^3 i_1}{Gd_1^4} = \frac{8P_2D_2^3 i_2}{Gd_2^4},$$

где P_1 и P_2 – силы, воспринимаемые первой и второй пружинами. Для их определения рассматриваем равновесие шайбы (рис. VI.25, *б*). Из условия равновесия $P = P_1 + P_2$.

Так как уравнение статики одно, а неизвестных два, система один раз статически неопределима.

Составляем уравнение совместности перемещений: $\lambda_1 = \lambda_2$ – уравнение совместности в геометрической форме,

$\frac{P_1D_1^3 i_1}{Gd_1^4} = \frac{P_2D_2^3 i_2}{Gd_2^4}$ – уравнение совместности в физической форме.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} P_2 = P - P_1, \\ \dfrac{P_1D_1^3 i_1}{Gd_1^4} = \dfrac{P_2D_2^3 i_2}{Gd_2^4}. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$P_1 = \frac{P}{\frac{D_1^3 i_1 d_2^4}{D_2^3 i_2 d_1^4} + 1} = \frac{P}{0{,}296 \cdot 0{,}833 \cdot 2{,}07 + 1} = 0{,}66P; \quad P_2 = 0{,}34P;$$

$$n_{об} = \frac{\lambda_1}{t} = \frac{8 \cdot 0{,}66P(6d)^3 \cdot 10}{Gd^4 t} = 1{,}14 \cdot 10^4 \frac{P}{Gdt}.$$

По формуле (VI.52)

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot 0{,}66P \cdot 6d}{3{,}14d^3} = 10{,}1 \frac{P}{d^2},$$

по формуле (III.50)

$$n = \frac{\tau_т}{|\tau_{max}|_{max}} = 0{,}099 \frac{\tau_т d^2}{P}.$$

Глава VII. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ СИЛ

§ VII.1. Определение числа лишних связей плоской системы

Числом степеней свободы системы называется число независимых координат, определяющих положение всех ее элементов. При определении числа степеней свободы элементы системы считают абсолютно твердыми.

Система (рис. VII.1, *а*) имеет шесть степеней свободы, так как для определения положений двух ее элементов относительно системы отсчета xy надо задать шесть независимых координат, за которые можно принять x_A, y_A, α_1, x_{B_2}, y_{B_2} и α_2.

Связями называются тела, уменьшающие число степеней свободы системы.

На рис. VII.1, *б* элементы системы (рис. VII.1, *а*) соединили шарнирно. Число независимых координат, определяющих их положения, уменьшилось до четырех x_A, y_A, x_B и α_2. Следовательно, плоский шарнир, в котором сходятся два элемента (двойной), уменьшает число степеней свободы на две (накладывает на систему две связи).

Аналогично можно показать, что катковая связь уменьшает число степеней свободы системы на единицу. Наоборот, удаление двойного шарнира или катка равносильно удалению соответственно двух связей и одной связи.

Связь (тело, уменьшающее число степеней свободы на единицу) можно условно изображать стержнем, шарнирно соединенным с частями системы. На рис. V.5 – V.8 таким

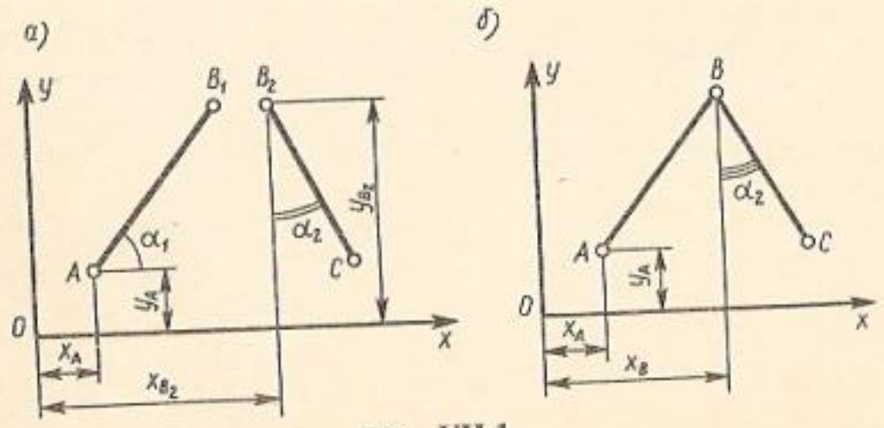


Рис. VII.1

образом изображены связи, соответствующие катку, шарниру, скользящей и глухой заделкам.

Так как тело имеет в плоскости три степени свободы, для его неподвижности относительно системы отсчета между ними должны существовать минимум три связи, направления которых не пересекаются в одной точке.

Если мысленно разрезать брус (рис. VII.2, *а*) сечением $a - a$ на две части, то для сохранения взаимной неподвижности частей можно представить их соединенными тремя связями (глухая заделка) (рис. VII.2, *б*). Значит, разрез системы по любому сечению эквивалентен удалению трех связей.

Напомним, что система геометрически неизменяема, если взаимные перемещения ее точек могут происходить только за счет деформации.

Связи, удаление которых не нарушает геометрической неизменяемости системы, называются лишними.

Контуром назовем замкнутую линию, образованную осями элементов системы, ограничивающую область, в пределах которой отсутствуют осевые линии, соединяющие точки контура.

Бесшарнирный контур (рис. VII.3, *а*) содержит три лишние связи, так как разрез его по любому сечению (рис. VII.3, *б*) геометрической неизменяемости не нарушает (в любом сечении разрезанного контура существуют три связи). Контур с одним шарниром (рис. VII.4, *а*) содержит две лишние связи, так как удаление шарнира (рис. VII.4, *б*) не нарушает его геометрической неизменяемости. Сопоставляя эти контуры, заключаем, что двойной шарнир уменьшает число лишних связей на единицу. Поэтому двухшарнирный (рис.

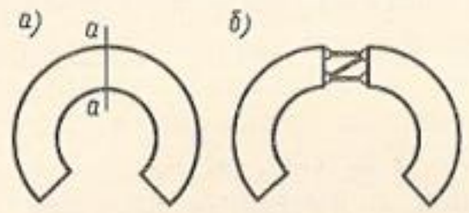


Рис. VII.2

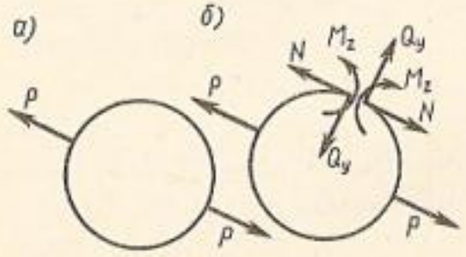


Рис. VII.3

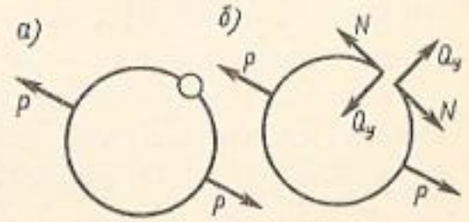


Рис. VII.4

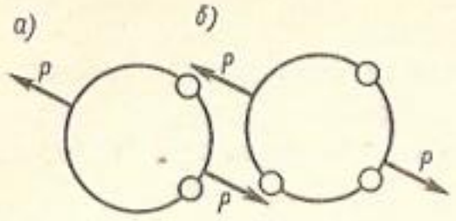


Рис. VII.5

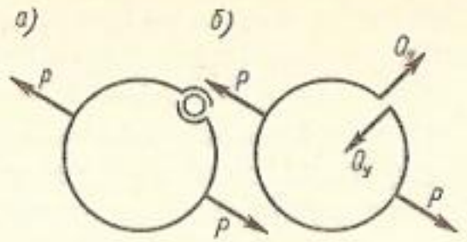


Рис. VII.6

VII.5, *а*) и трехшарнирный (рис. VII.5, *б*) контуры будут содержать соответственно одну лишнюю связь и ни одной лишней связи. Можно доказать, что шарнир, в котором сходятся i элементов, уменьшает число лишних связей системы на $i-1$. Контур с катковой связью (рис. VII.6, *а*) содержит одну лишнюю связь, так как удаление катка (рис. VII.6, *б*) его геометрической неизменяемости не нарушает. Следовательно, каток уменьшает число лишних связей контура на две.

По сказанному можно сформулировать безусловные признаки геометрической неизменяемости системы. Система геометрически неизменяема, если:

1) каждый контур, входящий в ее состав, содержит не больше трех шарниров;

2) любые две ее геометрически неизменяемые части соединяются не меньше чем тремя связями, направления которых не пересекаются в одной точке (в частности, не параллельны);

3) путем последовательного удаления ее геометрически неизменяемых частей вместе с тремя связями, присоединяющими их к системе, получим в результате геометрически неизменяемую систему.

Связи между частями системы называются внутренними. Если элемент системы не является расчетным объектом, то связи между ним и остальной частью системы назовем внешними. Элемент, не являющийся расчетным объектом, назовем опорным. Систему, не имеющую внешних связей, назовем свободной, а имеющую их – прикрепленной.

Пусть в системе: m – число лишних связей; n – число контуров; p_2 – число двойных шарниров; p_3 – число тройных шарниров; ...; p_i – число шарниров, в которых сходятся i элементов; $p_к$ – число катковых связей.

Каждый контур может содержать в себе не больше трех лишних связей, поэтому их максимально возможное число в системе равно $3n$; каждый шарнир уменьшает число лишних связей системы на единицу меньше, чем число сходящихся в нем элементов; каждый каток уменьшает число

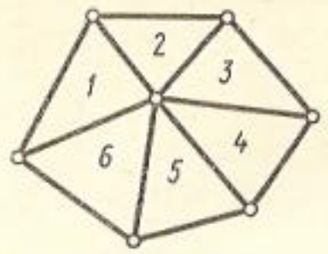


Рис. VII.7

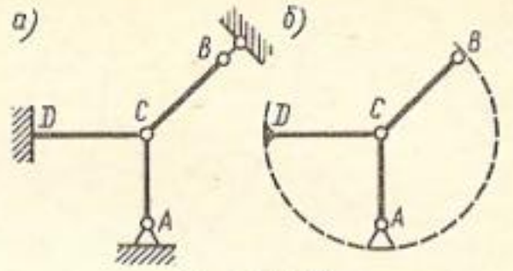


Рис. VII.8

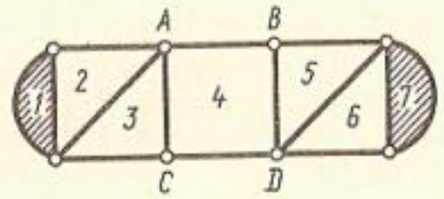


Рис. VII.9

лишних связей системы на две. Поэтому

$$m = 3n - p_2 - 2p_3 - \ldots - (i-1)p_i - 2p_к. \qquad \text{(VII.1)}$$

Формулой (VII.1) можно пользоваться, убедившись предварительно, что система геометрически неизменяема.

Приведем несколько примеров применения формулы (VII.1).

Пример VII.1. Свободная система (рис. VII.7) геометрически неизменяема, так как каждый контур, входящий в ее состав, содержит три шарнира.

Из рис. VII.7: $n = 6,\ p_3 = 6,\ p_6 = 1.$

По (VII.1) $m = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 1.$

Пример VII.2. Система (рис. VII.8, *а*) – прикрепленная. Чтобы воспользоваться формулой (VII.1), надо представить ее как свободную, заменив опорный элемент сплошной незамкнутой линией, показанной на рис. VII.8, *б* штрихами. Система (рис. VII.8, *б*) геометрически неизменяема, так как после удаления стержня BC, присоединенного к системе тремя связями, оставшийся контур DCA – геометрически неизменяем.

Из рис. VII.8, *б*: $n = 2,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1,\ p_к = 1.$

По (VII.1) $m = 3 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$

Пример VII.3. Система (рис. VII.9) геометрически изменяема, так как ее геометрически неизменяемые части соединены только двумя стержнями AB и CD. Попробуем подсчитать m системы по формуле (VII.1).

Из рис. VII.9: $n = 7,\ p_3 = 4,\ p_4 = 4.$

По (VII.1) $m = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 1.$

Полученный ответ неверен, потому что одна из двух лишних связей, содержащихся в заштрихованных контурах, компенсируется при использовании (VII.1) геометрической изменяемостью системы. Этот подсчет приведен нами для того, чтобы подчеркнуть неприменимость формулы (VII.1) для геометрически изменяемых систем.

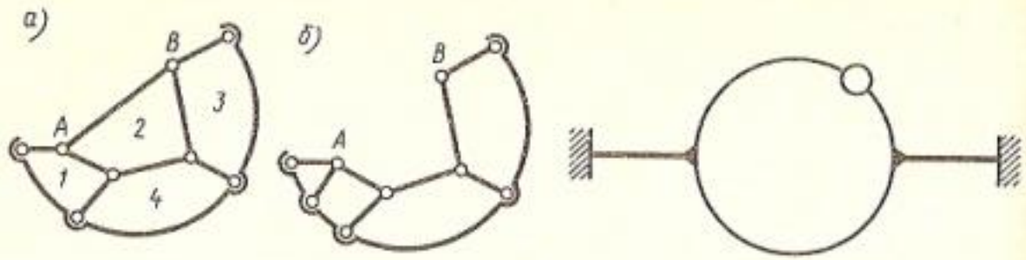


Рис. VII.10

Рис. VII.11

Пример VII.4. В системе (рис. VII.10, *а*) нет элемента, прикрепленного тремя связями. Для того чтобы установить ее геометрическую неизменяемость, удалив стержень AB, мы должны сохранить одну из четырех связей, прикрепляющих его к системе. Полученная система (рис. VII.10, *б*) геометрически неизменяема, поэтому неизменяема и заданная система.

Из рис. VII.10, *а*: $n = 4,\ p_2 = 4,\ p_3 = 4.$

По (VII.1) $m = 3 \cdot 4 - 4 - 2 \cdot 4 = 0.$

Определить число лишних связей достаточно простой системы можно, используя деление их на внешние и внутренние, не прибегая к формуле (VII.1). Например, система (рис. VII.11) содержит три лишние внешние связи, так как удаление одной из двух заделок взаимной неподвижности опорного элемента и системы не нарушает. Кроме этого, в систему входит один одношарнирный контур, содержащий две лишние связи. Следовательно, на систему наложено пять лишних связей.

§ VII.2. Степень статической неопределимости системы

Напомним, что система статически неопределима, если в любом ее сечении значения внутренних силовых факторов не могут быть найдены с помощью одних только уравнений статики.

Степенью статической неопределимости называется разность между числом уравнений, необходимых для определения значений внутренних силовых факторов в любом сечении системы, и числом уравнений статики, которое можно для этого использовать.

В дальнейшем степень статической неопределимости будем обозначать k.

По аксиоме статики связи можно отбрасывать, заменяя их действие на систему силами.

Разрезав контур (рис. VII.3, *а*) в произвольном сечении, мы отбрасываем три связи. Для того чтобы контур работал в тех же условиях, что и до разреза, следует заменить действие частей друг на друга тремя внутренними силовыми

факторами N, Q_y и M_z, возникающими в общем случае в поперечном сечении рамного элемента плоской системы, направленными в силу закона действия и противодействия, как показано на рис. VII.3, *б*. Для определения этих факторов ни одного уравнения статики использовать нельзя: все они обращаются в тождества, т. е. будут справедливы при любых значениях N, Q_y и M_z. Следовательно, замкнутый контур трижды статически неопределим. Одношарнирный контур (рис. VII.4, *а*), содержащий две лишние связи, по тем же соображениям будет дважды статически неопределим (в шарнире $M_z = 0$) (рис. VII.4, *б*).

Приведенные сопоставления между числом лишних связей, наложенных на систему, и степенью ее статической неопределимости, можно провести для любой системы. Из этих сопоставлений вытекает, что степень статической неопределимости равна числу лишних связей, наложенных на систему. Однако усилия по некоторым лишним связям могут оказаться известными, поэтому окончательно можно утверждать, что степень статической неопределимости не больше числа лишних связей, наложенных на систему:

$$k \leqslant m. \qquad \text{(VII.2)}$$

Система называется мгновенно изменяемой, если направления связей, соединяющих ее геометрически неизменяемые части, пересекаются в одной точке (рис. VII.12, *а*) или если эти части соединяются более чем двумя шарнирами, лежащими на одной прямой (рис. VII.13, *а*, *б*). Степень статической неопределимости мгновенно изменяемой системы будет больше числа лишних связей, наложенных на нее. Например, система (рис. VII.12, *а*) лишних связей не содержит, но определить усилия в стержнях из уравнений статики не удастся, так как (рис. VII.12, *б*)

$$\Sigma m_0 = p \cdot h \neq 0.$$

То же самое можно сказать и о системах (рис. VII.13, *а*, *б*).

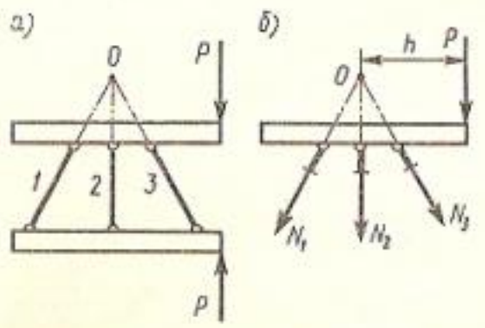


Рис. VII.12

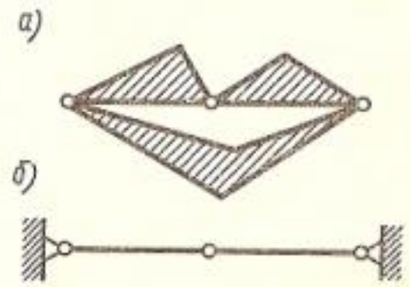


Рис. VII.13

Для определения внутренних силовых факторов в мгновенно изменяемых системах, даже если они не несут лишних связей, приходится рассматривать их деформированное состояние. Решение задачи осложняется тем, что в таких системах зависимость между силами и перемещениями нелинейна.

В заключение отметим, что при конструировании систем следует обращать особое внимание на то, чтобы они не были мгновенно изменяемыми, так как сравнительно небольшие внешние силы могут создавать в таких системах очень большие внутренние силовые факторы.

§ VII.3. Эквивалентная система и канонические уравнения метода сил

Эквивалентной называется система, полученная из заданной путем удаления лишних связей и замены их действия на систему обобщенными силами, которые в методе сил обозначаются x_i и называются лишними неизвестными. Процесс определения x_i иногда называют раскрытием статической неопределимости системы.

Основной системой назовем эквивалентную систему без заданных внешних факторов и лишних неизвестных.

Абсолютные и относительные обобщенные перемещения сечений в эквивалентной и основной (при ее нагружении) системах для краткости будем называть просто перемещениями. Обозначим через Δ_i – перемещение сечения по i-му направлению в заданной системе.

Пусть на заданную систему (рис. VII.14, *а*) наложено m лишних связей (пунктир на рисунке обозначает неизображенные связи). Преобразуя эту систему в эквивалентную, сохраняем между ней и опорным элементом, который обычно принимают за систему отсчета, для их взаимной неподвижности, три связи. Эквивалентную систему (рис. VII.14, *б*) обозначим Э.

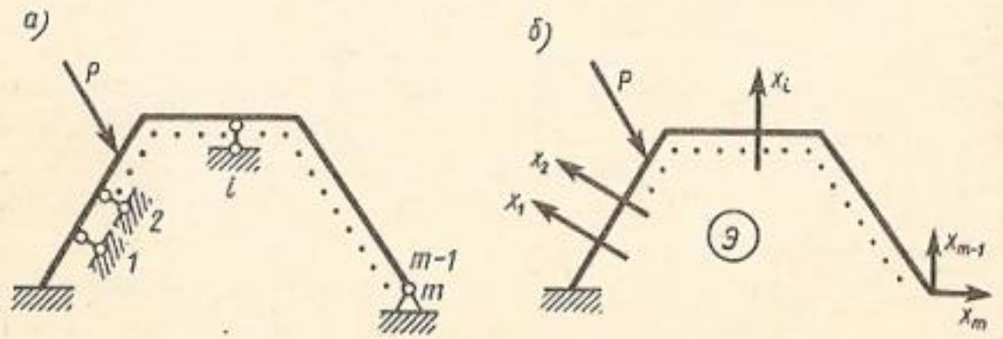


Рис. VII.14

Обозначим: δ_{ip} – перемещение сечения, в котором приложено x_i по его направлению, в основной системе при ее нагружении заданными силами (δ_{ip} – перемещение по i-му направлению в основной системе от заданных сил); δ_{iT} – перемещение по i-му направлению в основной системе от T (изменения температуры); δ_{ij} – перемещение по i-му направлению в основной системе от единичной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению x_j.

Как говорилось в § VI.1, δ_{ij} называют единичным перемещением или податливостью. Единичные перемещения с одинаковыми индексами называют главными.

Эквивалентная система будет работать как заданная, если перемещения сечений, в которых располагались лишние связи по направлению этих связей в эквивалентной системе, будут равны соответствующим перемещениям в заданной системе, т. е. если (рис. VII.14, *в*)

$$1)\ \delta_1 = \Delta_1,\ 2)\ \delta_2 = \Delta_2,\ \ldots,\ i)\ \delta_i = \Delta_i,\ \ldots,\ m)\ \delta_m = \Delta_m. \qquad \text{(VII.3)}$$

Отметим, что условий эквивалентности (VII.3) заданной и эквивалентной систем можно написать столько, сколько лишних неизвестных.

Из (I.14) и (VII.3) получим систему m канонических (приведенных к определенному виду) уравнений

$$\delta_i = \delta_{ip} + \delta_{iT} + \sum_{j=1}^{j=m} \delta_{ij} x_j = \Delta_i;\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad \text{(VII.4)}$$

Для большинства встречающихся в практике систем $\Delta_i = 0$, поэтому

$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{1T} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ \ldots\ + \delta_{1m}x_m = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{2T} + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ \ldots\ + \delta_{2m}x_m = 0, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{mp} + \delta_{mT} + \delta_{m1}x_1 + \delta_{m2}x_2 + \ \ldots\ + \delta_{mm}x_m = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII.5)}$$

Расчет статически неопределимых систем с использованием системы (VII.4) (системы канонических уравнений метода сил) носит название расчета по методу сил. Этот расчет ведется в определенном порядке, который изложен в примере VII.5.

Пример VII.5. Раскрыв статическую неопределимость рамы (рис. VII.15, *а*), построить на ней эпюры N, Q_y и M_z и определить угол поворота сечения C, считая $EI_z = \text{const}$.

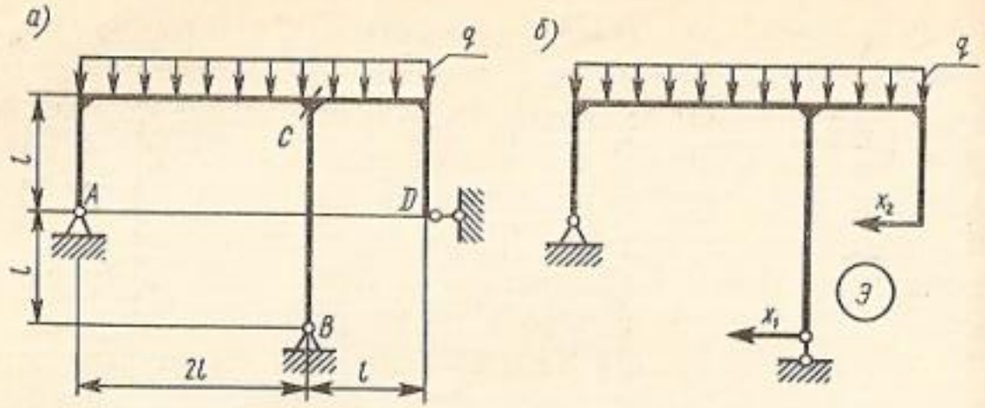


Рис. VII.15

1. Определяем число лишних связей, наложенных на систему.

Так как рама содержит пять внешних связей, а для сохранения взаимной неподвижности рамы и опорного элемента необходимо только три, $m = k = 2$.

2. Выбираем эквивалентную систему.

Число вариантов эквивалентной системы, в которую можно преобразовать заданную статически неопределимую систему, неограниченно велико. Выбирая эквивалентную систему, следует руководствоваться тем, чтобы расчет в выбранном варианте был проще. Рациональность выбранного варианта будем обосновывать в процессе расчета систем. В данном примере за эквивалентную примем систему (рис. VII.15, *б*), отбросив в заданной системе каток и заменив шарнир B катком.

3. Выписываем, пользуясь (VII.5), систему канонических уравнений метода сил. Число канонических уравнений для системы равно степени ее статической неопределимости:

$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0. \end{cases}$$

4. Находим перемещения, входящие в канонические уравнения.

Для этого рассматриваем нагружение основной системы только заданными силами (рис. VII.16, *а*), только единичной силой, приложенной по направлению x_1 (рис. VII.17, *а*), и только единичной силой, приложенной по направлению x_2 (рис. VII.18, *а*). Определив в каждой схеме нагружения реакции опор, строим эпюры изгибающих моментов, обозначив эпюр, соответствующий нагружению основной системы заданными силами, P, а эпюры нагружения основной системы единичными силами (единичные) i, где i – индекс при лишнем неизвестном, вместо которого приложена данная единичная сила. Эпюры построены на рис. VII.16, *б*, VII.17, *б* и VII.18, *б*.

Из (VI.46)

$$\delta_{ip} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \frac{M_{zp}M_{zi}}{EI_z} dS, \quad \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \frac{M_{zi}M_{zj}}{EI_z} dS. \qquad \text{(VII.6)}$$

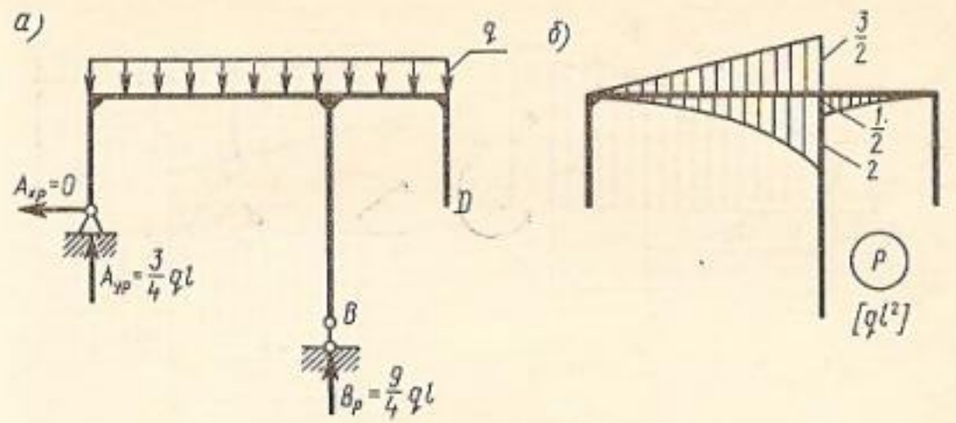


Рис. VII.16

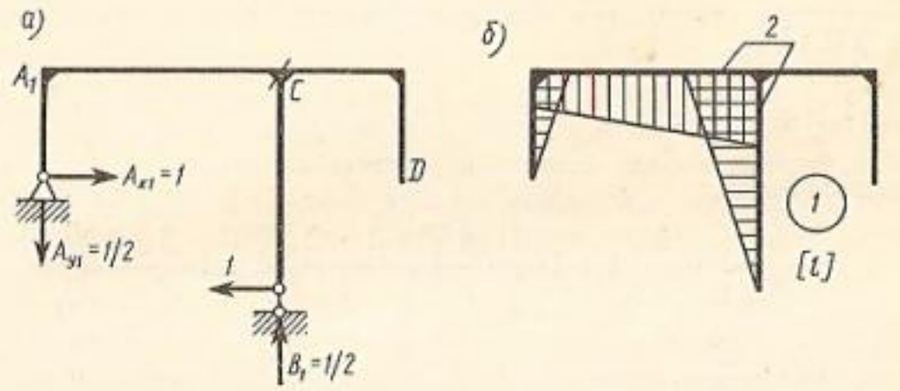


Рис. VII.17

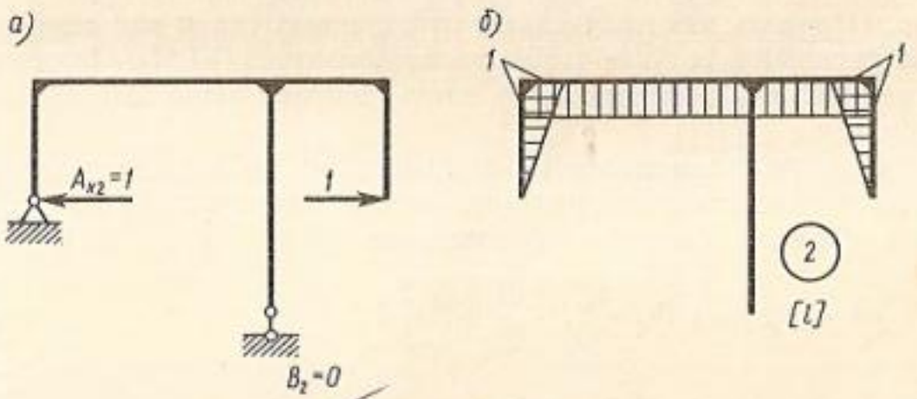


Рис. VII.18

Находим δ_{1p} – перемещение сечения B в схеме нагружения (рис. VII.16, *а*) по горизонтали. По (VII.6) оно будет равняться произведению эпюр P и 1.

Таким образом, индексы при перемещениях, входящих в канонические уравнения (индексы при коэффициентах и свободных членах этих уравнений), указывают на эпюры, которые при определении этих перемещений надо умножать друг на друга.

Полезно иметь готовую формулу для определения ординат, чтобы не изображать их под центрами тяжести площадей, при

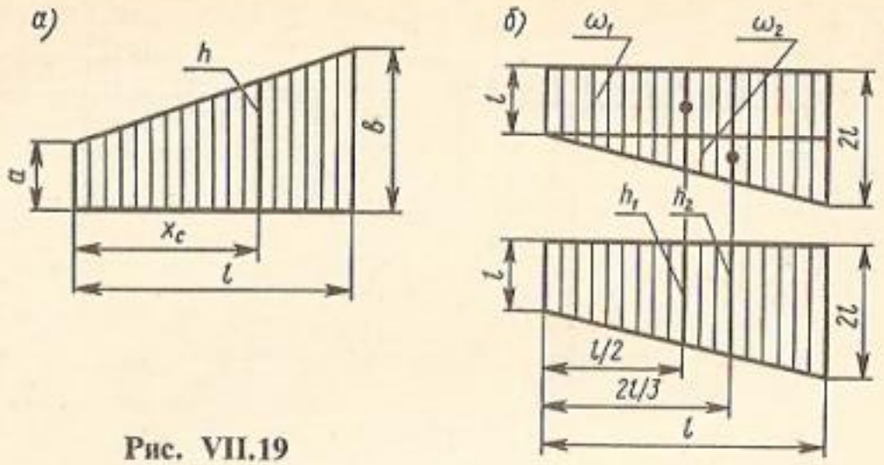


Рис. VII.19

пользовании правилом Верещагина. Ее можно получить из рис. VII.19, *а*

$$h = a + \frac{b-a}{l} x_c.$$

Следовательно,

$$\delta_{1p} = \frac{ql^4}{EI_z}\left[-\frac{3}{2}\left(1+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)+\frac{2\cdot 2}{3}\left(1+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{ql^4}{6EI_z}.$$

Находим δ_{11} – перемещение сечения B в схеме нагружения (см. рис. VII.17, *а*) по горизонтали. При его определении эпюр *1* следует рассматривать как полученный от заданных сил и как единичный, построенный для того, чтобы воспользоваться (VI.51). Поэтому говорят, что для определения δ_{ii} эпюр i следует умножить самого на себя.

При умножении эпюра *1* самого на себя на участке *1–2* следует мыслить две трапеции, расположенные одна над другой (рис. VII.19, *б*). Тогда их произведение

$$\omega h = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 = 2l^2 \cdot \frac{3l}{2} + l^2 \frac{5}{3} l$$

и

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI_z}\left(2\cdot\frac{4}{3}+2\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{23l^3}{3EI_z}.$$

По (VI.12) $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Находим

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{l^3}{EI_z}\left(\frac{1}{3}+3\right)=\frac{10l^3}{EI_z};$$

$$\delta_{2p} = \frac{ql^4}{EI_z}\left(-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)=0.$$

Равенство $\delta_{2p} = 0$ является преимуществом выбранной эквивалентной системы.

Находим

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{EI_z}\left(2\cdot\frac{1}{3}+3\right)=\frac{11l^3}{3EI_z}.$$

5. Подставляем найденные перемещения в систему канонических уравнений и, решая ее, определяем значения лишних неизвестных:

$$\begin{cases} 23x_1 + 10x_2 = \dfrac{1}{2}ql, \\ 10x_1 + 10x_2 = 0; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{11}{306}ql,\ x_2 = -\frac{10}{306}ql.$$

6. Строим эпюры N, Q_y и M_z.

Рассматриваем эквивалентную систему (рис. VII.20, *а*), к которой вместо x_1 и x_2 приложены их найденные значения. Эпюры, построенные на ней, будут эпюрами на заданной статически неопределимой раме.

По принципу независимости действия сил

$$R_j = R_{jp} + R_{j1}x_1 + \ \ldots\ + R_{jm}x_m.$$

В этом выражении: R_j – реакция по направлению j в любой опоре

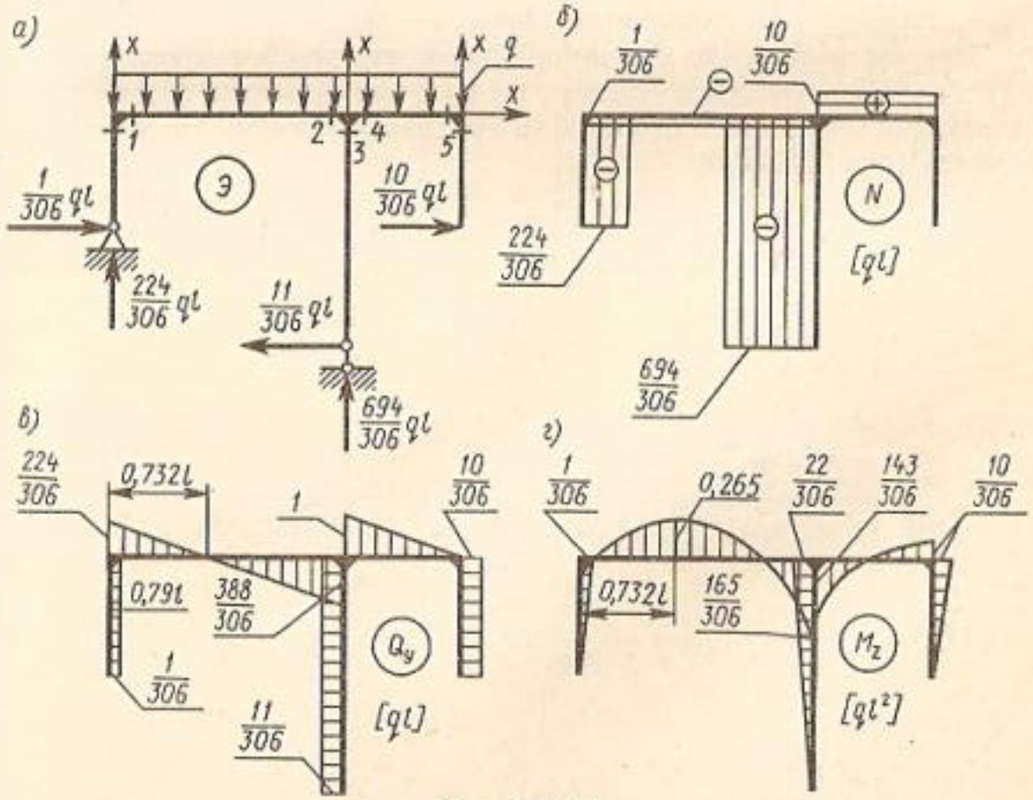


Рис. VII.20

эквивалентной системы; R_{jp} – реакция по направлению j в той же опоре при нагружении основной системы только заданными силами; R_{ji} – реакция по направлению j в той же опоре при нагружении основной системы только i-й единичной силой.

При определении R_j одно из направлений считается положительным. Знак минус в ответе означает, что R_j направлена в сторону, ему противоположную. Следовательно,

$$A_x = 1\cdot\frac{11}{306}ql + 1\left(-\frac{10}{306}ql\right) = \frac{1}{306}ql,$$

$$A_y = \frac{3}{4}ql - \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{306}ql = \frac{224}{306}ql,$$

$$B_y = \frac{9}{4}ql + \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{306}ql = \frac{694}{306}ql.$$

Эпюры N (рис. VII.20, *б*) и Q_y (рис. VII.20, *в*) строятся по обычным правилам их построения на статически определимых рамах.

По принципу независимости действия сил эпюр M_z можно быстрее построить, не рассматривая систему (рис. VII.20, *а*), а суммируя алгебраически ординаты эпюра P с ординатами всех единичных эпюр, умноженных на соответствующие значения лишних неизвестных в каждом сечении. Согласно этому правилу в произвольном сечении системы

$$M_z = M_{zp} + M_{z1}x_1 + \ldots + M_{zm}x_m. \qquad \text{(VII.7)}$$

В (VII.7): M_{zp} – ордината эпюра P в произвольном сечении; M_{zi} – ордината i-го единичного эпюра в том же сечении.

При суммировании ордината одного из эпюр считается положительной. Знак минус в ответе означает, что ордината M_z должна откладываться от оси в сторону, ей противоположную. На этом основании (рис. VII.20, *д*):

$$M_z^{(1)} = \left[1\cdot\frac{11}{306} + 1\left(-\frac{10}{306}\right)\right]ql^2 = \frac{1}{306}ql^2,$$

$$M_z^{(2)} = \left[\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{11}{306} + 1\left(-\frac{10}{306}\right)\right]ql^2 = \frac{165}{306}ql^2.$$

$$M_z^{(3)} = 2\cdot\frac{11}{306}ql^2 = \frac{22}{306}ql^2,$$

$$M_z^{(4)} = \left[\frac{1}{2} + 1\left(-\frac{10}{306}\right)\right]ql^2 = \frac{143}{306}ql^2,$$

$$M_z^{(5)} = 1\left(-\frac{10}{306}\right)ql^2 = -\frac{10}{306}ql^2.$$

Находим

$$M_z^3 = ql^2\left(\frac{224}{306} - \frac{0{,}732^2}{2} - 0{,}0033\right) = 0{,}265ql^2.$$

7. Проверяем правильность решения.

В какой бы эквивалентной системе не решалась задача, эпюр M_z при правильном решении должен быть одним и тем же. Поэтому произведение M_z на любой единичный эпюр в любой эквивалентной системе должно равняться нулю, так как оно является перемещением сечения, в котором находилась лишняя связь, по направлению этой связи в данной эквивалентной системе. Для полной проверки правильности решения следует взять единичный эпюр, отличный от тех, которые использовались при определении лишних неизвестных.

Возьмем эквивалентную систему (рис. VII.21, *а*) и построим первый единичный эпюр, назвав его проверочным и обозначив $M_{z1}^{п}$ (рис. VII.21, *б*). Эпюр $M_{z1}^{п}$ построен на схеме нагружения. Такое построение экономит место, время и, самое главное, дает большую наглядность.

Умножив M_z на $M_{z1}^{п}$, получим

$$\delta_{п} = \frac{ql^4}{EI_z}\left(-\frac{8}{12}\cdot 1 + \frac{2}{306}\cdot 1 + \frac{164}{306}\cdot\frac{4}{3} + \frac{10}{306}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 2 - \right.$$

$$\left. - \frac{153}{2\cdot 306}\cdot 2 + \frac{22}{306}\cdot\frac{8}{3} + \frac{5}{306}\cdot\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_z}\cdot\frac{-612 + 6 + 656 + 60 + 153 - 459 + 176 + 20}{306\cdot 3} = 0,$$

где $\delta_{п}$ – проверочное перемещение.

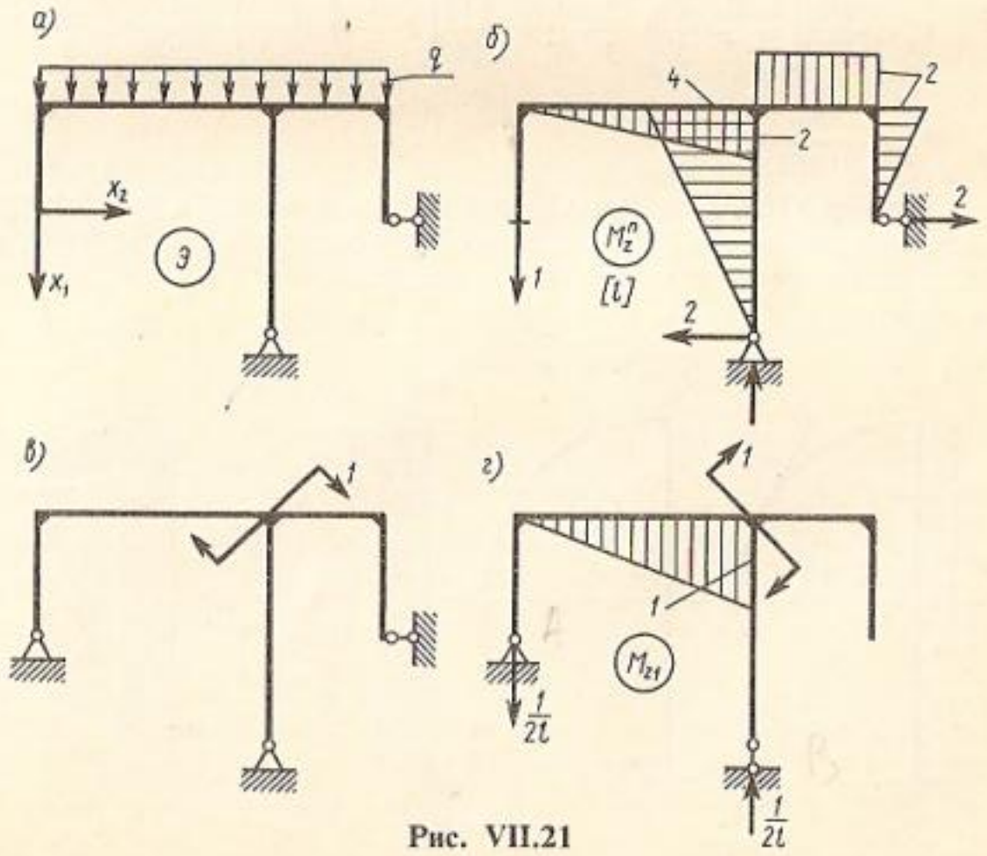


Рис. VII.21

Вместо того чтобы умножать M_z на $M_{z1}^{\text{п}}$, можно умножить на него поочередно P, 1, умноженный на x_1 и 2, умноженный на x_2, если сумма этих произведений окажется равной нулю, то решение верно. В нашем примере

$$\delta_{\text{п}} = \frac{ql^4}{EI_z}\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{11}{306}\left(2\cdot 1+1\cdot\frac{4}{3}+4\cdot\frac{4}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{10}{306}\left(2-2-\frac{1}{3}\cdot 2\right)\right]=0.$$

8. Определяем угол поворота сечения C.

Чтобы воспользоваться для определения θ_c правилом Верещагина, надо, сняв с заданной системы (рис. VII.21, *в*) внешние силы, приложить в сечении C единичную пару (рис. VII.21, *г*); построить на этой схеме нагружения единичный эпюр M_{z1} и умножить на него M_z. Однако построение M_{z1} на этой раме связано с предварительным раскрытием ее статической неопределимости. Так делать можно, но так делать никогда не нужно. Эквивалентная система работает как заданная и статически определима, поэтому перемещения следует искать не в заданной системе, а в эквивалентной. Сняв с системы (рис. VII.15, *б*) внешние силы и лишние неизвестные, прикладываем в сечении C единичную пару, определяем реакции и строим M_{z1} (рис. VII.21, *г*). Умножая поочередно на M_{z1} эпюр P, эпюр 1, умноженный на x_1, эпюр 2, умноженный на x_2, и, складывая эти произведения, найдем

$$\theta_c = \frac{ql^3}{EI_z}\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{11}{306}\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{2}{3}\right)-\frac{10}{306}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{25ql^3}{918EI_z}.$$

Пример VII.6. Для рамы (рис. VII.22, *а*), у которой температура наружных волокон T, а внутренних $2T$, построить эпюры N, Q_y и M_z. Сечение рамы симметрично относительно оси z, $l/h = 5$, $EI_z = \text{const}$.

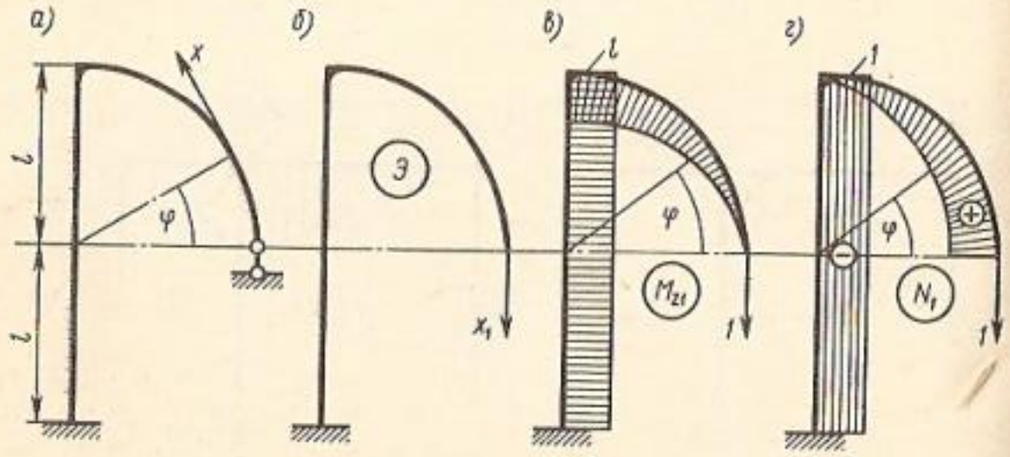


Рис. VII.22

1. Определяем $m = 4 - 3 = 1$.

2. Эквивалентная система изображена на рис. VII.22.

3. Выписываем каноническое уравнение

$$\delta_{1T} + \delta_{11}x_1 = 0.$$

4. Для определения δ_{1T} воспользуемся формулой (VI.45).

При построении эпюр внутренних силовых факторов на плоских криволинейных участках рам положительные значения ординат откладываются по нормали к оси участка в направлении к центру кривизны (внутрь участка), а отрицательные в противоположном направлении. Эпюры штрихуются по радиусу.

На криволинейном участке (рис. VII.22, *б*, *г*)

$$M_{z1} = l(1-\cos\varphi),\ N_1 = \cos\varphi.$$

Эпюры M_{z1} и N_1 построены на рис. VII.22, *в*, *г*.

По (VI.41) $\Delta T_c = \frac{3}{2}T$; по (VI.43) $\Delta T_y = -T$, так как изменения кривизны участков рамы от нагрева противоположны их изменениям от M_{z1}; $\Delta T_z = 0$.

По формуле (VI.46)

$$\delta_{1T} = \alpha Tl\left(-5\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)\,d\varphi - 1\cdot 2\cdot 5+\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi-\right.$$

$$\left.-1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\right)=-\alpha Tl(-5\cdot 0{,}57-10+1{,}5-3)=-14{,}4\alpha Tl;$$

определяем

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI_z}\left(\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi+2\right)=2{,}36\frac{l^3}{EI_z}.$$

5. Находим

$$x_1 = -\frac{\delta_{1T}}{\delta_{11}} = 6{,}1\frac{\alpha TEI_z}{l^2}.$$

6. Составляем уравнения N, Q_y и M_z на криволинейном участке

$$N = 6{,}1\frac{\alpha TEI_z}{l^2}\cos\varphi,\ Q_y = 6{,}1\frac{\alpha TEI_z}{l^2}\sin\varphi,$$

$$M_z = 6{,}1\frac{\alpha TEI_z}{l}(1-\cos\varphi).$$

7. Эпюры N, Q_y и M_z построены на рис. VII.23, *а*, *б*, *в*.

Пример VII.7. Построить эпюры N, Q_y и M_z на контуре (рис. VII.24, *а*).

1. Число лишних связей $m = 1$.

2. Эквивалентную систему получим, заменив шарнир B катковой опорой (рис. VII.24, *б*). Этот вариант будет лучшим, так как при построении эпюр P и 1 придется определять только один компонент реакции в катке.

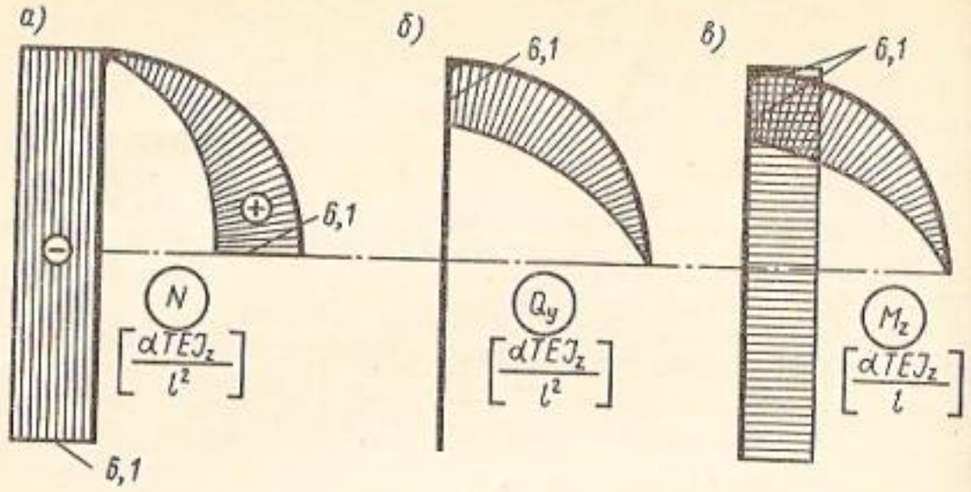


Рис. VII.23

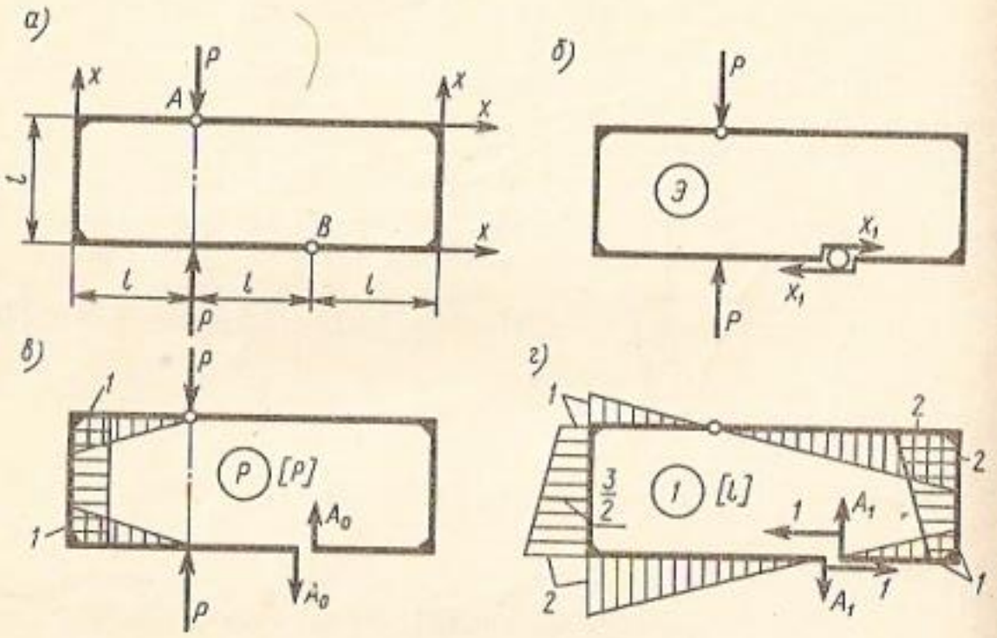


Рис. VII.24

3. Выпишем каноническое уравнение

$$\delta_{1p} + \delta_{11} x_1 = 0.$$

4. Из P и 1, построенных на рис. VII.24, *в, г*:

$$\delta_{1p} = -\frac{Pl^3}{EI_z}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\right) = -\frac{8Pl^3}{3EI_z},$$

$$\delta_{11} = 2\cdot\frac{l^3}{EI_z}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3} + 2\cdot\frac{4}{3}\right) = \frac{16l^3}{3EI_z}.$$

5. Находим $x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2}P$.

6. Эпюры N, Q_y и M_z построены на рис. VII.25, *а, б, в*.

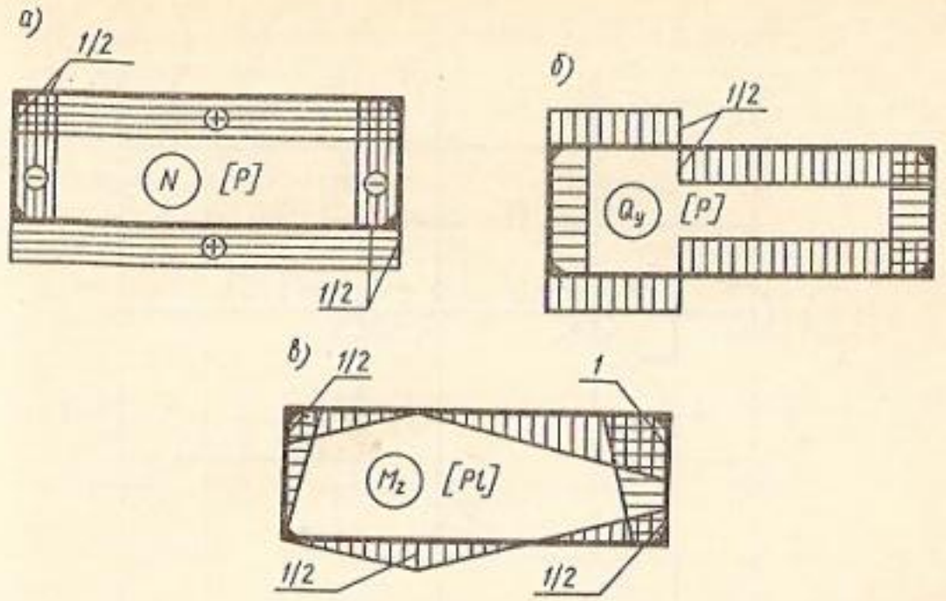


Рис. VII.25

Пример VII.8. Для трехпролетной балки (рис. VII.26, *а*) построить эпюры M_z и Q_y.

Пролетом многоопорной балки называется ее часть между двумя соседними опорами. Номер пролета определяется номером его правой опоры i.

1. Так как число неизвестных реакций в опорах балки равно пяти (x_0, C_0, C_1, C_2, C_3), а уравнений статики для их определения можно составить только два, то

$$K = 5 - 2 = 3.$$

2. При выборе эквивалентной системы за лишние неизвестные примем изгибающие моменты в опорных сечениях балки. Эквивалентная система показана на рис. VII.26, *б*.

3. Выписываем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{0p} + \delta_{00}x_0 + \delta_{01}x_1 + \delta_{02}x_2 = 0, \\ \delta_{1p} + \delta_{10}x_0 + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{20}x_0 + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII.8)}$$

4. Нагружение каждого пролета основной системы создаст деформацию изгиба только на этом пролете. Поэтому нагружение основной системы заданными силами можно рассматривать как совокупность двух опорных балок (рис. VII.26, *в*). Определив реакции опор каждой балки, строим эпюр P, расслоив его на третьем пролете относительно левого опорного сечения (рис. VII.26, *г*).

Единичные схемы нагружения и единичные эпюры, построенные на них, показаны на рис. VII.26, *д, е, ж*.

Замечательным свойством выбранной эквивалентной системы является то, что при ее нагружении единичными парами, приложенными вместо x_i, эпюры изгибающих моментов будут только на i-м и $(i+1)$-м пролетах. Следовательно, коэффициенты при неизвестных в i-м уравнении системы (VII.5) обратятся в нуль, по-

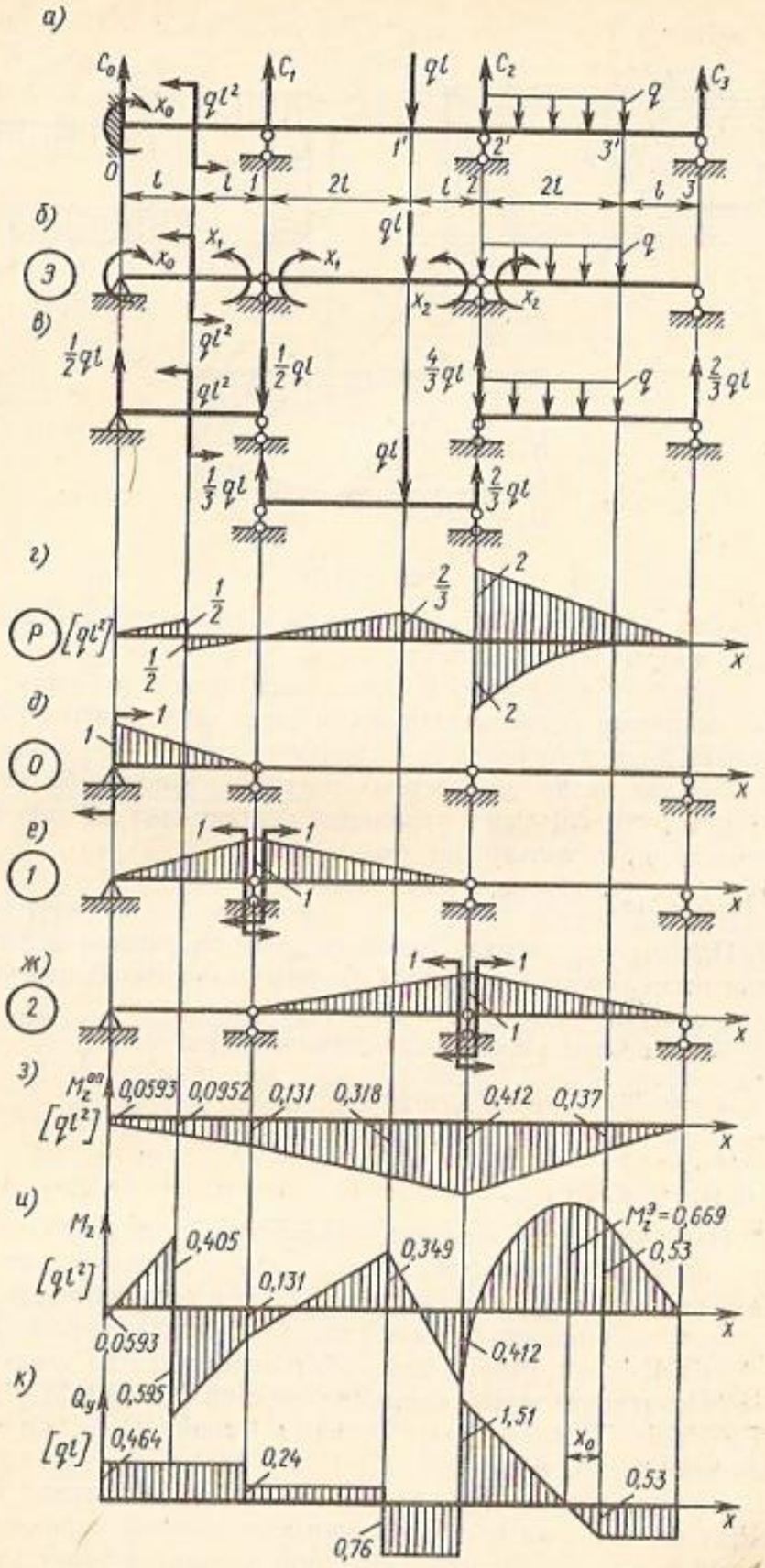


Рис. VII.26

скольку они получаются последовательным умножением *1, 2, ..., m* на *i*, за исключением $\delta_{i,i+1}$, δ_{ii}, $\delta_{i,i-1}$, и любое уравнение этой системы будет содержать не более трех неизвестных. Произведение *P* на *i* отлично от нуля только на *i*-м и $(i+1)$-м пролетах.

Не приводя промежуточных вычислений, запишем значения перемещений, входящих в систему (VII.8):

$$\delta_{0p} = \frac{ql^3}{12EI_z},\quad \delta_{1p} = \frac{4ql^3}{9EI_z},\quad \delta_{2p} = \frac{8ql^3}{9EI_z};$$

$$\delta_{00} = \frac{2l}{3EI_z},\quad \delta_{01} = \delta_{10} = \frac{l}{3EI_z},\quad \delta_{02} = \delta_{20} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{5l}{3EI_z},\quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{2EI_z},\quad \delta_{22} = \frac{2l}{EI_z}.$$

5. Подставив эти перемещения в (VII.8), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_0 + x_1 = -\dfrac{1}{4}ql^2, \\ 2x_0 + 10x_1 + 3x_2 = -\dfrac{8}{3}ql^2, \\ x_1 + 4x_2 = -\dfrac{16}{9}ql^2, \end{cases}$$

решая которую, найдем

$$x_1 = -\frac{47}{792}ql^2 = -0{,}0593ql^2,$$

$$x_2 = -\frac{52}{396}ql^2 = -0{,}131ql^2,$$

$$x_3 = -\frac{163}{396}ql^2 = -0{,}412ql^2.$$

6. Строим эпюры M_z и Q_y.

Отложив на опорах найденные, соответствующие им, значения x_i, построим эпюр $M_{z\,\text{оп}}$ – эпюр опорных моментов (рис. VII.26, *з*).

Изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме M_{zp} и $M_{z\,\text{оп}}$ в этом сечении

$$M_z = M_{zp} + M_{z\,\text{оп}}.$$

Эпюр M_z построен на рис. VII.26, *и*.

Перерезывающие силы на участках балки с прямолинейными очертаниями эпюра M_z будут тангенсами углов наклона этих очертаний. Следовательно,

$$Q_y^{(0-1)} = \frac{0{,}405 + 0{,}0593}{1}ql = 0{,}464ql,$$

$$Q_y^{(1-1')} = \frac{0{,}349 + 0{,}131}{2}ql = 0{,}24ql,$$

$$Q_y^{(1'-2)} = -(0{,}419 + 0{,}349)\,ql = -0{,}76ql,$$

$$Q_y^{(3'-3)} = -0{,}53ql.$$

Реакции C_0, C_1 и C_3 равны соответствующим скачкам в эпюре Q_y:

$$C_0 = 0{,}424ql,\ C_1 = -0{,}224ql,\ C_3 = 0{,}53ql.$$

Реакцию C_2 найдем из условия равновесия балки

$$\Sigma Y = 0{,}424ql - 0{,}224ql + 0{,}529ql - 3ql + C_2 = 0,$$

откуда

$$C_2 = 2{,}27ql.$$

После определения C_2 можно построить эпюр Q_y на участке $2-3'$, найдя $Q_y^{(2')}$, как разность между C_2 и $Q_y^{(3'-3)}$:

$$Q_y^{(2)} = (2{,}27 - 0{,}76)\,ql = 1{,}51ql.$$

Соединив значения ординат $Q_y^{(2')}$ и $Q_y^{(3')}$ и отложив ранее найденные значения ординат $Q_y^{(i-j)}$ на участках, получим эпюр Q_y (рис. VII.26, *к*), на котором

$$x_0 = 0{,}519l.$$

Зная x_0, определяем

$$M_z^2 = ql^2\left(0{,}529 \cdot 1{,}519 - \frac{0{,}519^2}{2}\right) = 0{,}669ql^2.$$

Пример VII.9. Для рамы (рис. VII.27, *а*) построить эпюр M_z, если ее правая опора перемещается вправо на Δ и поворачивается по часовой стрелке на угол Δ/l.

1. Число лишних связей $m = 2$.
2. Эквивалентная система показана на рис. VII.27, *б*.

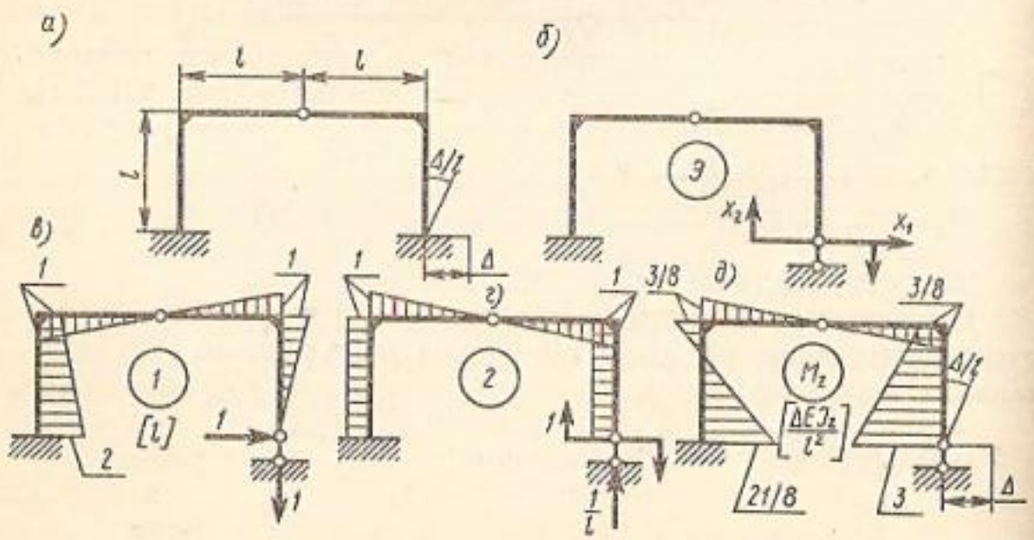


Рис. VII.27

3. Пользуясь (VII.4), выписываем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = \Delta, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = \Delta/l. \end{cases} \qquad \text{(VII.9)}$$

4. Эпюры *1* и *2* построены на рис. VII.27, *в, г*. Не приводя вычислений, выписываем значения δ_{ij}:

$$\delta_{11} = \frac{10l^3}{3EI_z},\ \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{8l^2}{3EI_z},\ \delta_{22} = \frac{8l}{3EI_z}.$$

5. Подставив δ_{ij} в (VII.9), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{10}{3}lx_1 - \frac{8}{3}x_2 = \frac{\Delta EI_z}{l^2}, \\ -\frac{8}{3}lx_1 + \frac{8}{3}x_2 = \frac{\Delta EI_z}{l^2}. \end{cases}$$

Решив ее, найдем

$$x_1 = \frac{3\Delta EI_z}{l^3},\ x_2 = \frac{27\Delta EI_z}{8l^2}.$$

6. Эпюр M_z построен на рис. VII.27, *д*.

§ VII.4. Расчет ферм

Как уже говорилось в § 2.12, стержни фермы с клепаными или сварными жесткими узлами работают на растяжение или сжатие как стержни соответствующей ей шарнирной фермы. Чтобы это доказать, преобразуем ферменный контур (рис. VII.28, *а*) в эквивалентный, заменив жесткие узлы шарнирами (рис. VII.28, *б*).

Выпишем систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 = 0, \\ \delta_{3p} + \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII.10)}$$

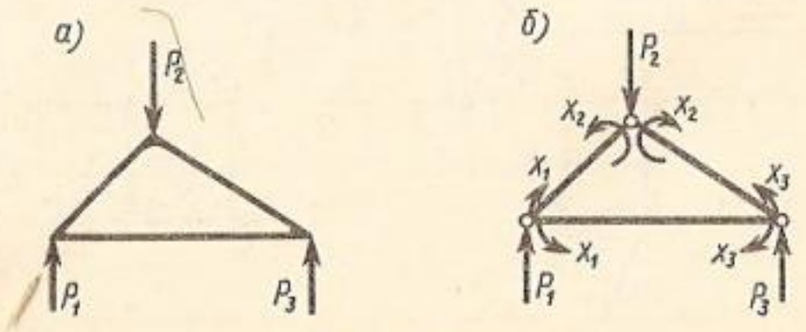


Рис. VII.28

Основная система – шарнирная ферма, поэтому изгибающие моменты в сечениях ее стержней при нагружении внешними силами равны нулю и, следовательно, из (VII.6)

$$\delta_{1p} = \delta_{2p} = \delta_{3p} = 0.$$

Система (VII.10) становится однородной. Ее определитель никогда не равен нулю, и поэтому она может иметь единственное решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Вывод: ферменный контур статически определим и замена жестких узлов шарнирами не изменяет работы его стержней.

Пример VII.10. Определить усилия в стержнях фермы (рис. VII.29, *а*).

1. Находим число лишних связей.
Из рис. VII.29, *а* $n = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$.
По (VII.1) $m = 3 \cdot 2 - 3 - 2 \cdot 1 = 1$.
2. Выбираем эквивалентную систему (рис. VII.29, *б*).
3. Выписываем каноническое уравнение

$$\delta_{1p} + \delta_{11} x_1 = 0.$$

4. Определяем усилия в стержнях при нагружении основной системы (рис. VII.29, *в*) силой P

$$\Sigma X = P \cdot \cos\beta - N_{p3} = 0,\ \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5},\ N_{p3} = \frac{\sqrt{5}}{5} P;$$

$$\Sigma Y = N_{p1} - P\cos\alpha = 0,\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ N_{p1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} P.$$

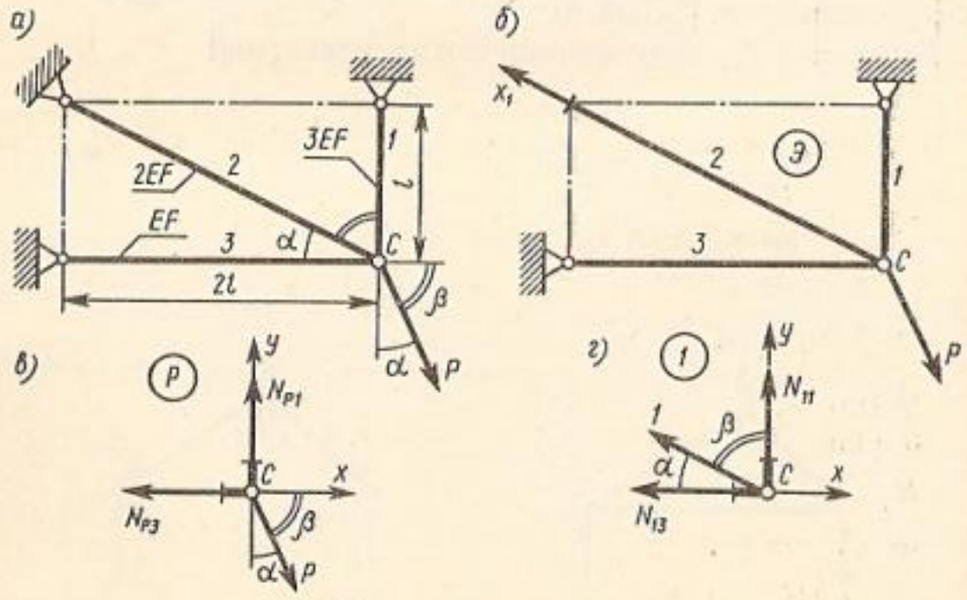


Рис. VII.29

Определяем усилия в стержнях при нагружении основной системы (рис. VII.29, *г*) единичной силой, приложенной по направлению x_1:

$$\Sigma X = -N_{13} - 1 \cdot \cos\alpha = 0,\ N_{13} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\Sigma Y = N_{11} + 1\cos\beta = 0,\ N_{11} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Из (VI.51)

$$\delta_{1p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{pi} N_{1i} l_i}{(EF)_i},\ \delta_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{1i}^2 l_i}{(EF)_i}.$$

Исходные данные, найденные усилия и входящие в δ_{1p} и δ_{11} выражения для каждого стержня сводим в табл. 11.

Таблица 11

№	$(EF)_i$	l_i	N_{Pi}	N_{1i}	$\frac{N_{Pi} N_{1i} l_i}{(EF)_i}$	$\frac{N_{1i}^2 l_i}{(EF)_i}$	N_i
1	$3EF$	l	$\frac{2\sqrt{5}}{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{2Pl}{15EF}$	$\frac{l}{15EF}$	$0{,}745P$
2	$2EF$	$\sqrt{5}l$	0	1	0	$\frac{\sqrt{5}l}{2EF}$	$0{,}335P$
3	EF	$2l$	$\frac{\sqrt{5}}{5}P$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{4Pl}{5EF}$	$\frac{8l}{5EF}$	$0{,}148P$

Суммируя строки шестой и седьмой графы, находим δ_{1p} и δ_{11}:

$$\delta_{1p} = -\frac{Pl}{EF}\left(-\frac{2}{15} + \frac{4}{5}\right) = -\frac{14Pl}{15EF},$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EF}\left(\frac{1}{15} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{8}{5}\right) = 2{,}79\frac{l}{EF}.$$

5. Находим $x_1 = -\delta_{1p}/\delta_{11} = 0{,}335P$.
6. Определяем усилия в стержнях по формуле

$$N_1 = N_{pi} + N_{1i} x_i,$$

из которой

$$N_1 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} 0{,}335\right) P = 0{,}745P,\ N_2 = 0{,}335P,$$

$$N_3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 0{,}335\right) P = 0{,}148P.$$

Расчету ферм при упругой деформации посвящен также первый пункт решения примера XIV.1.

§ VII.5. Расчет смешанных систем

Система называется смешанной или комбинированной, если ее элементы работают на разные деформации, например одна часть элементов работает на изгиб, а другая – на растяжение или одна часть элементов работает на изгиб, а другая – на кручение. Брус лучше работает на растяжение, чем на изгиб, в том смысле, что при равенстве расчетных напряжений в элементах системы своим допускаемым (при равнопрочности системы) поперечные сечения ферменных элементов будут значительно меньше поперечных сечений рамных. Вследствие этого пренебрегать деформациями ферменных элементов от нормального усилия при расчете статически неопределимых смешанных систем нельзя, так как они будут величинами одного порядка с деформациями рамных элементов от изгибающего момента. В смешанных системах δ_{ip} и δ_{ij} должны определяться из (VI.36) по формулам

$$\delta_{ip} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \frac{M_{zp} M_{zi}}{EI_z} dS + \sum_{k=1}^{m} \frac{N_{pk} N_{ik} l_k}{(EF)_k}, \qquad \text{(VII.11)}$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \frac{M_{zi} M_{zj}}{EI_z} dS + \sum_{k=1}^{m} \frac{N_{ik} N_{jk} l_k}{(EF)_k}, \qquad \text{(VII.12)}$$

где n – число рамных участков в системе; m – число ферменных элементов в системе.

Пример VII.11. Построить эпюры M_z на рамных элементах, N на ферменном элементе (тяге) и определить взаимное перемещение сечений A и B системы δ_{A-B} (рис. VII.30, *а*), если $I_z/F = l^2/4$.

1. Число лишних связей $m = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

2. Преобразуя смешанную систему в эквивалентную, за лишнюю связь следует принять тягу (рис. VII.30, *б*), так как в этом варианте $N_p \cdot N_1 = 0$ и вычисления по определению δ_{1p} будут короче.

3. Выписываем каноническое уравнение $\delta_{1p} + \delta_{11} x_1 = 0$.

4. На схемах нагружения P и 1 помимо эпюр изгибающего момента на рамных элементах должны строиться эпюры нормального усилия на тягах (рис. VII.30, *в*, *г*).

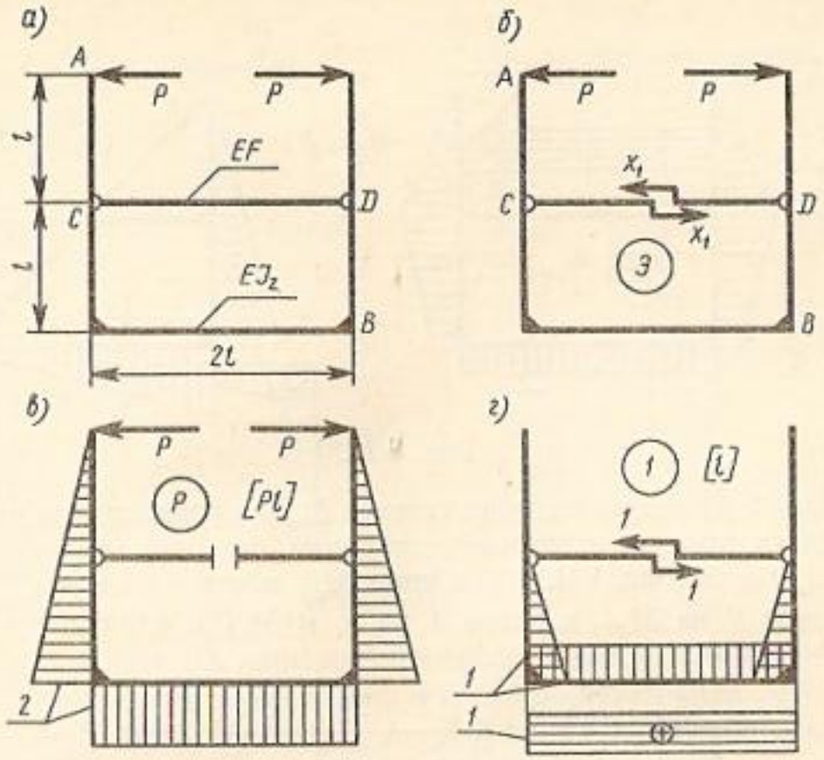


Рис. VII.30

По (VII.11)

$$\delta_{1p} = -\frac{Pl^3}{EI_z}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot 2\right) = -\frac{17Pl^3}{3EI_z}.$$

По (VII.12)

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI_z}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 1\right) + \frac{2l}{EF}. \qquad \text{(VII.13)}$$

Первое слагаемое в выражении (VII.13) есть взаимное перемещение сечений C и D в схеме нагружения 1, которое было бы δ_{11}, если бы тягу можно было считать абсолютно твердой. Второе слагаемое в этом выражении дает расхождение сторон разрезанного сечения тяги за счет ее деформации. Подставив в (VII.13) заданное выражение F через I_z, получим

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI_z}\left(\frac{2}{3} + 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{19l^3}{6EI_z}.$$

5. Находим

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{34}{19}P.$$

6. Эпюры M_z на рамных элементах и N на тягах строятся в смешанных системах на одном рисунке (рис. VII.31, *а*).

7. Для определения взаимного перемещения сечений A и B одно из них (например, B) в основной системе следует считать неподвижным (заделанным), а в другом A приложить единичную силу

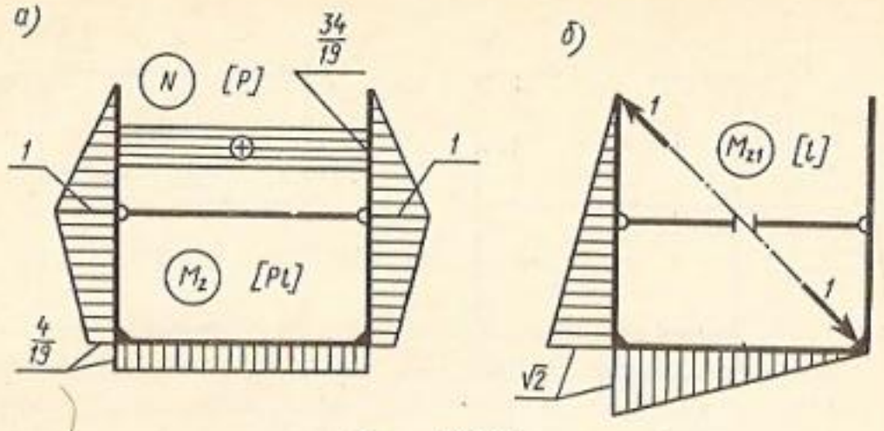


Рис. VII.31

по прямой, проходящей через сечение B. Это равносильно приложению двух противоположных единичных сил, приложенных в сечениях A и B (рис. VII.31, *б*). Эпюр M_{z1} построен на рис. VII.31, *в*. Умножив P на M_{z1}, а затем 1 на x_i и M_{z1} и сложив произведения, получим

$$\delta_{A-B} = \frac{Pl^3}{EI_z}\left[2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{34}{19}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{91\sqrt{2}}{114}\cdot\frac{Pl^3}{EI_z}.$$

§ VII.6. Использование симметрии при расчете статически неопределимых систем

1. Система называется **прямосимметричной** (симметричной), если она геометрически симметрична и внешние факторы, приложенные к ней, симметричны относительно оси геометрической симметрии.

Симметричная рама (рис. VII.32, *а*) имеет три лишние связи. Произвольно выбранный вариант эквивалентной системы, полученный, например, отбрасыванием одной из заделок (рис. VII.32, *б*), трижды статически неопределим. Для раскрытия статической неопределимости рамы в этом варианте придется составить и решить систему трех канонических уравнений (VII.10).

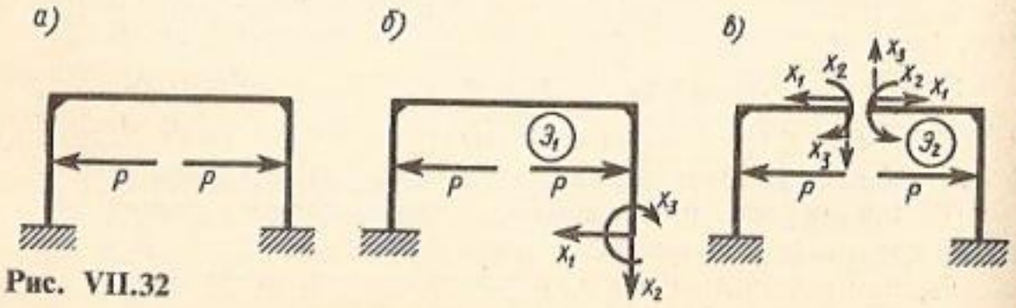


Рис. VII.32

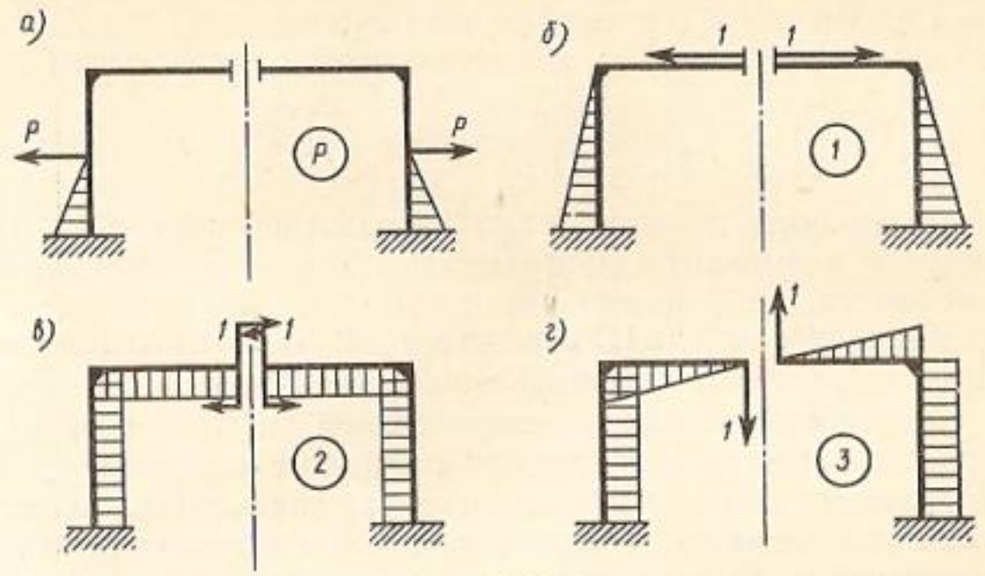


Рис. VII.33

Выберем другой вариант эквивалентной системы, приняв за лишние связи в сечении на оси симметрии (рис. VII.32, *в*). Уравнения (VII.10) для этого варианта требуют, чтобы относительный поворот, относительное перемещение по горизонтали и относительное перемещение по вертикали левой и правой сторон разрезанного сечения равнялись нулю.

Обратно симметричными назовем силы и эпюры, которые, для того чтобы они стали симметричны, на одной из половин геометрически симметричной системы надо повернуть вокруг ее оси на 180°.

Эпюры P, 1 и 2 (рис. VII.33, *а, б, в*), построенные на симметричном варианте основной системы от симметричных сил, симметричны, а эпюр 3 (рис. VII.33, *г*), построенный на этом варианте от обратно симметричных сил,– обратносимметричен. Любое произведение этих эпюр на левой половине системы будет перемещением левой стороны разрезанного сечения, а их произведение на правой половине – перемещением его правой стороны, в одной из схем нагружения основной системы. Следовательно, сумма этих произведений дает относительное перемещение сторон разрезанного сечения в этой схеме нагружения – один из коэффициентов или свободных членов уравнений системы (VII.11).

Произведение симметричного эпюра на обратносимметричный равно нулю, так как на одной из половин системы оно будет положительным, а на другой таким же по абсолютной величине, но отрицательным. Поэтому

$$\delta_{3p} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0.$$

Система (VII.11) распадается на систему двух уравнений с неизвестными x_1 и x_2 и на уравнение с неизвестным x_3:

$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0; \end{cases} \quad \text{(VII.14)}$$

$$\delta_{33}x_3 = 0. \quad \text{(VII.15)}$$

В уравнении (VII.15) перемещение δ_{33} – главное и нулю никогда не равно, следовательно, $x_3 = 0$.

Рациональный выбор эквивалентной системы позволил упростить решение задачи при раскрытии статической неопределимости рамы методом сил, так как в таком варианте рама дважды статически неопределима и вместо системы уравнений (VII.10) с тремя неизвестными решается система уравнений (VII.14) с двумя неизвестными.

Система называется обратно симметричной, если она геометрически симметрична и внешние факторы, приложенные к ней, обратносимметричны относительно оси геометрической симметрии.

Обратносимметричная рама (рис. VII.34, *а*) имеет три лишние связи. Выбирая эквивалентную систему, примем за лишние связи в сечении, лежащем на оси геометрической симметрии (рис. VII.34, *б*).

Эпюры *P* и *1* будут обратносимметричны, а *2* и *3* симметричны и поэтому

$$\delta_{2p} = \delta_{3p} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0.$$

Система уравнений (VII.11) распадается на уравнение с неизвестным x_1 и на систему однородных уравнений с неизвестными x_2 и x_3:

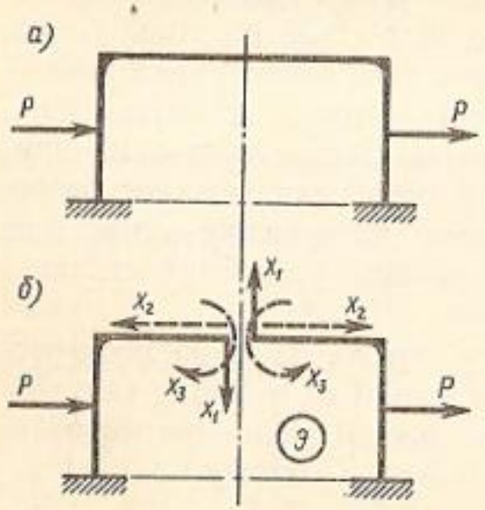


Рис. VII.34

$$\delta_{1p} + \delta_{11}x_1 = 0; \quad \text{(VII.16)}$$

$$\begin{cases} \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 = 0, \\ \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{(VII.17)}$$

Определитель системы (VII.17) нулю никогда не равен, так как $\delta_{22}\delta_{33} \neq \delta_{23}^2$, поэтому она может иметь для неизвестных только единственное решение

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Следовательно, в варианте эквивалентной системы (рис. VII.34, *б*) рама один раз статически неопределима и при раскрытии ее статической неопределимости придется решать уравнение (VII.16) с одним неизвестным.

Выводы.

1. В симметричных системах в сечениях, лежащих на оси симметрии, равны нулю обратносимметричные, а в обратносимметричных системах в сечениях, лежащих на оси геометрической симметрии, равны нулю симметричные внутренние силовые факторы.

2. Преобразуя статически неопределимые симметричные и обратносимметричные системы в эквивалентные, за лишние следует принимать либо связи в сечениях, лежащих на оси геометрической симметрии, либо симметричные связи в симметричных элементах. Такой выбор эквивалентной системы упростит расчет.

3. Лишние неизвестные, равные нулю из соображений прямой или обратной симметрии, изображать на эквивалентной системе не следует, выписывая систему канонических уравнений в соответствии со степенью ее статической неопределимости.

Пример VII.12. На симметричной раме (рис. VII.35, *а*) построить эпюры N, Q_y и M_z.

1. Определяем $m = 3$.

2. Для сохранения симметрии эквивалентной системы силу $2ql$ делим по сторонам разрезанного сечения поровну (рис. VII.35, *б*).

3. Системой канонических уравнений будет (VII.14), так как

$k = 2$.

4. Чтобы сократить место и время, эпюры *P*, *1* и *2* (рис. VII.36, *а, б, в*) строим на половине рамы. Найденные умножением этих эпюр δ_{ip} и δ_{ij} будут в 2 раза меньше действительных, что равносильно делению уравнений системы (VII.14) на два, и значения x_1 и x_2 при ее решении не изменятся. Находим:

$$\delta_{1p} = \frac{1}{2EI_z} \cdot \frac{ql^3}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{8EI_z}; \quad \delta_{11} = \frac{1}{2EI_z} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{6EI_z},$$

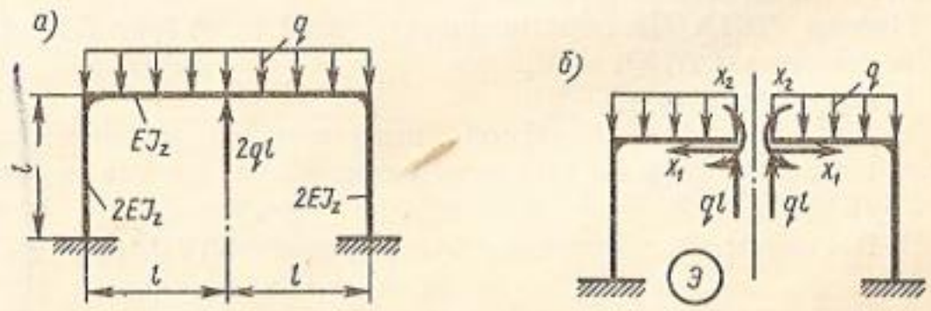


Рис. VII.35

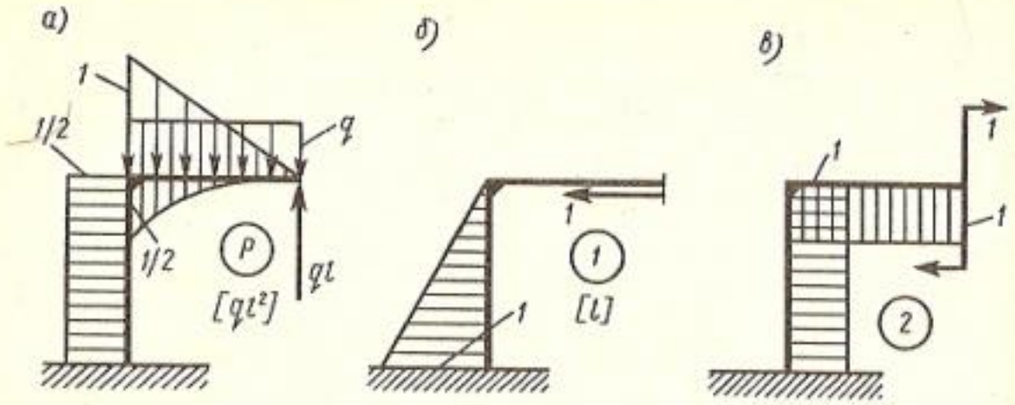


Рис. VII.36

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{1}{2EI_z}\cdot\frac{l^2}{2}\cdot 1=-\frac{l^2}{4EI_z},$$

$$\delta_{2P}=\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{ql^3}{2}\cdot 1+\frac{ql^3}{6}\right)-\frac{1}{2EI_z}\cdot\frac{ql^3}{2}\cdot 1=-\frac{7ql^3}{12EI_z},$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI_z}\cdot l\cdot 1+\frac{1}{2EI_z}\cdot l\cdot 1=\frac{3l}{2EI_z}.$$

Обращаем внимание на то, что коэффициенты и свободные члены системы (VII.14) имеют соответственно разные размерности. Это объясняется тем, что x_1 – сила, а x_2 – пара сил.

5. Составляем систему канонических уравнений

$$\begin{cases}\frac{l}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2=-\frac{1}{4}ql^2,\\ -\frac{l}{2}x_1+3x_2=\frac{7}{6}ql^2,\end{cases}$$

из которой

$$x_1=-\frac{2}{9}ql,\ x_2=\frac{19}{54}ql^2.$$

6. Отметим, что эпюры N и M_z, построенные на рис. VII.37, *а, в* – симметричны, а эпюр Q_y, построенный на рис. VII.37, *б* – обратносимметричен.

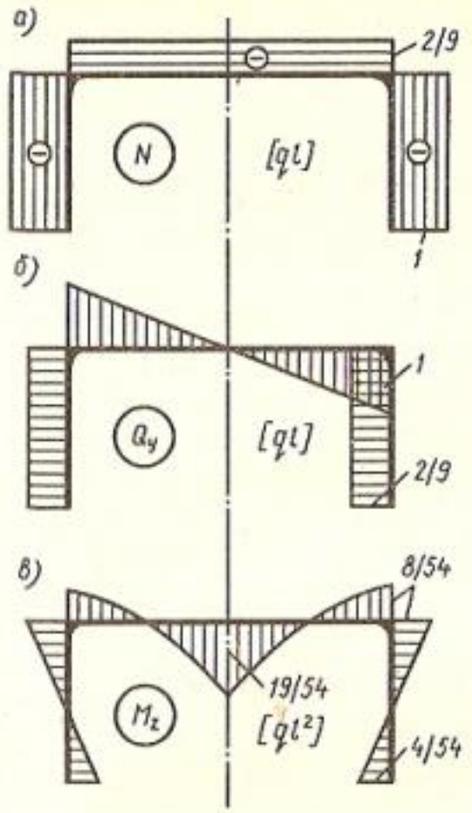
Пример VII.13. На обратносимметричной раме (рис. VII.38, *а*) построить эпюры N, Q_y и M_z.

1. Определяем $m=3$.

2. Для сохранения обратной симметрии эквивалентной системы пару $2M$ делим по сторонам разрезанного сечения поровну (рис. VII.38, *б*).

3. Каноническим уравнением будет уравнение (VII.16), так как $k=1$.

4. При определении δ_{1P} и δ_{11} эпюры P и 1 строим на половине системы (рис. VII.39, *а, б*). Находим:



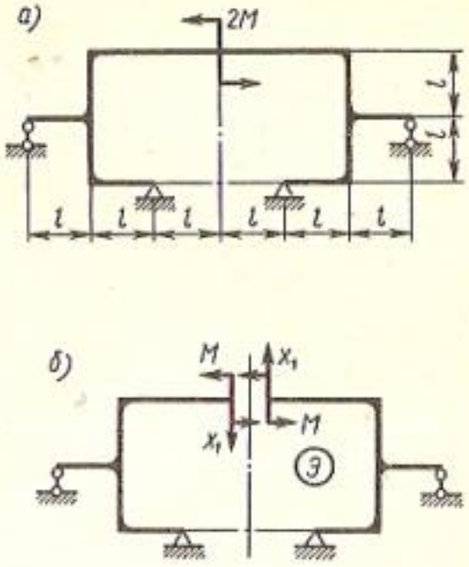


Рис. VII.38

Рис. VII.37

$$\delta_{1P}=-\frac{Ml^2}{EI_z}\left(2\cdot 1+1\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1\right)=-\frac{61Ml^2}{12EI_z},$$

$$\delta_{11}=\frac{l^3}{EI_z}\left(2\cdot\frac{4}{3}+2\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\cdot 1\right)=\frac{117l^3}{12EI_z}.$$

5. Определяем

$$x_1=\frac{61}{117}\cdot\frac{M}{l}.$$

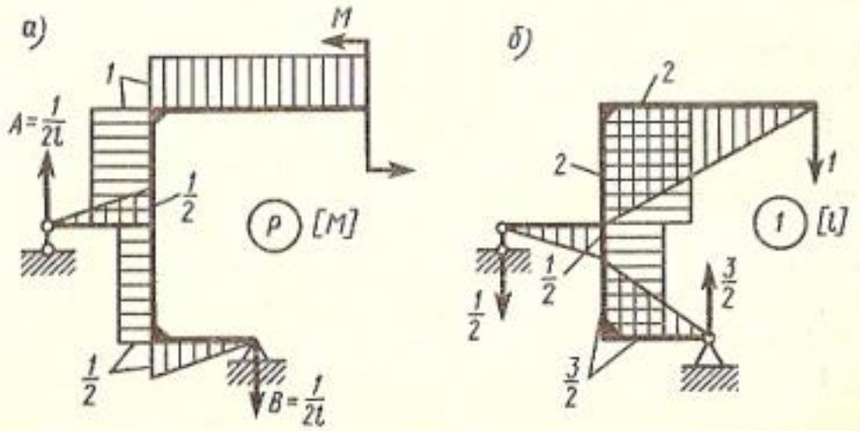


Рис. VII.39

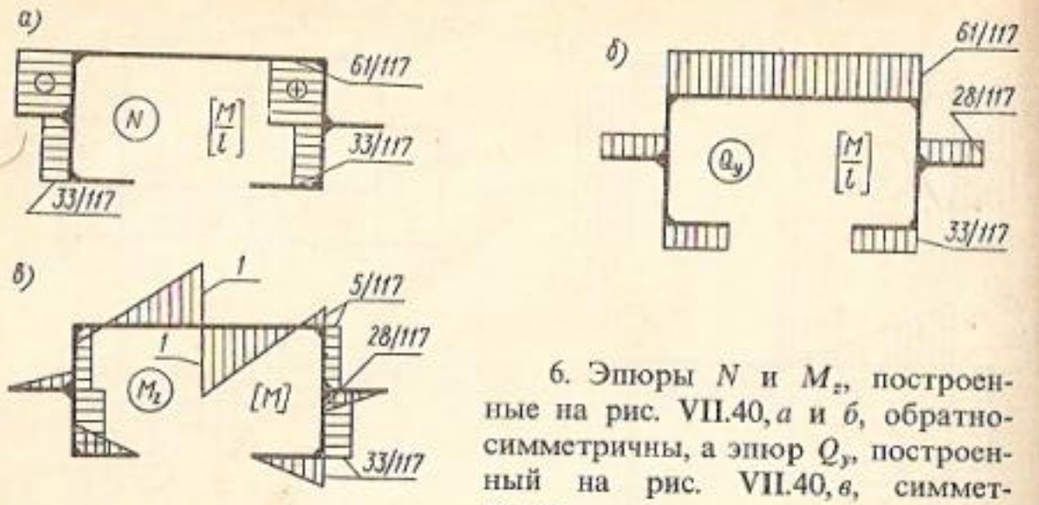


Рис. VII.40

6. Эпюры N и M_z, построенные на рис. VII.40, *а* и *б*, обратносимметричны, а эпюр Q_y, построенный на рис. VII.40, *в*, симметричен.

Пример VII.14. На симметричной относительно вертикальной оси и обратносимметричной относительно горизонтальной оси раме (рис. VII.41, *а*) построить эпюр M_z.

Рама обратносимметрична относительно горизонтальной оси, потому что распределенную нагрузку на прямолинейном участке можно представить, как показано на рис. VII.41, *б*.

1. Определяем $m = 3 \cdot 2 = 6$.

2. Сделав два разреза в сечениях криволинейных участков, лежащих на оси симметрии, мы отбросим шесть связей и сохраним геометрическую симметрию рамы относительно двух осей.

В разрезанных сечениях эквивалентной системы (рис. VII.41, *в*) внутренние силовые факторы по обратной симметрии относительно горизонтальной оси соответственно равны и обратносимметричны.

3. Заданная система дважды статически неопределима и системой канонических уравнений для нее будет (VII.14).

4. Единичные силы и пары при построении P, *1* и *2* вместо равных лишних неизвестных должны прикладываться в одни и те же схемы нагружения (рис. VII.42, *а, б, в*). При построении этих

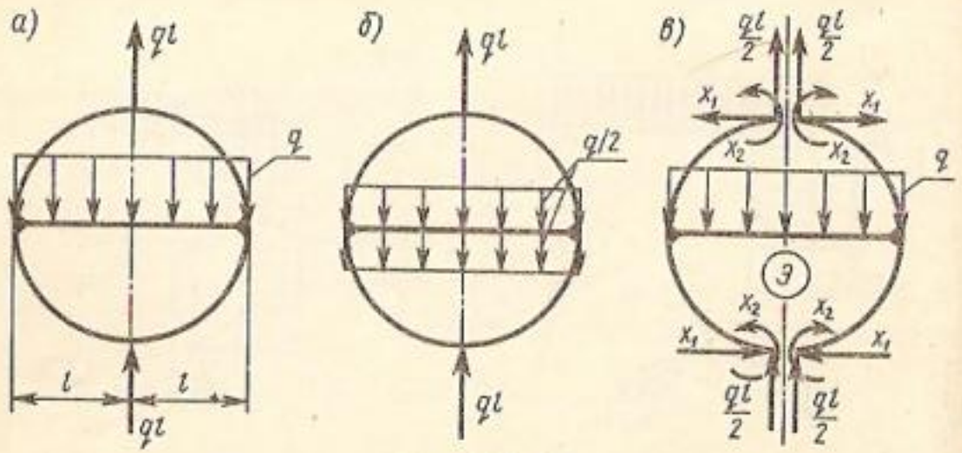


Рис. VII.41

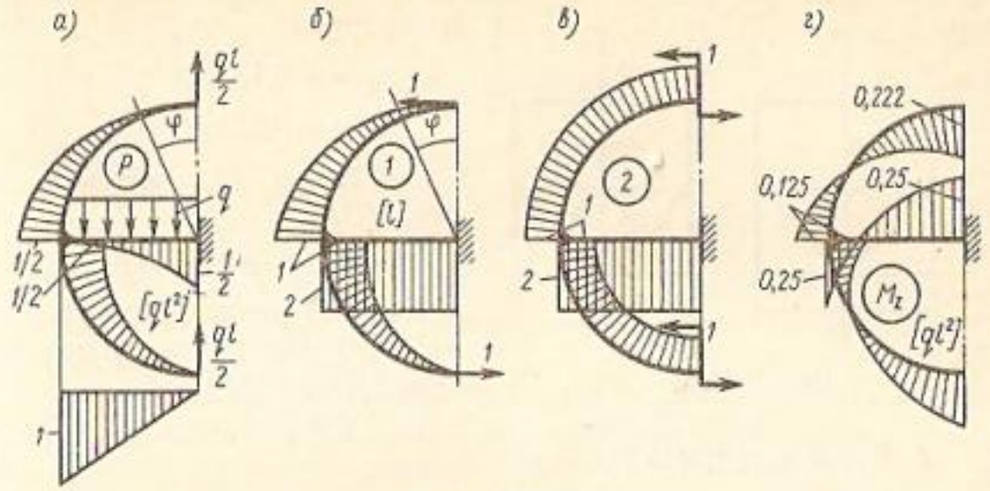


Рис. VII.42

эпюр на одной из половин основной системы надо обращать особое внимание на то, чтобы она находилась в равновесии. Поэтому среднее сечение прямолинейного участка основной системы мыслим заделанным.

Составляем уравнения M_{zp}, M_{z1} и M_{z2} на одном из криволинейных участков

$$M_{zp} = -\frac{ql^2}{2}\sin\varphi, \quad M_{z1} = -l(1-\cos\varphi), \quad M_{z2} = -1.$$

Эпюр M_{zp} на горизонтальном участке расслаиваем.

Находим:

$$\delta_{1p} = \frac{ql^4}{EI_z}\left[2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(1-\cos\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2\right] = \frac{11ql^4}{6EI_z},$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI_z}\left[2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi + 2\cdot 2\right] = 4{,}71\frac{l^3}{EI_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{EI_z}\left[2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)\,d\varphi + 2\cdot 2\right] = 5{,}14\frac{l^2}{EI_z},$$

$$\delta_{2p} = \frac{ql^3}{EI_z}\left[2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2\right] = \frac{7}{3}ql^2,$$

$$\delta_{22} = \frac{l}{EI_z}\left[2\int_0^{\pi/2}d\varphi + 2\cdot 2\right] = 7{,}14\frac{l}{EI_z}.$$

5. Составляем систему

$$\begin{cases} 4{,}71x_1 + 5{,}14x_2 = -\dfrac{11}{6}ql^2, \\ 5{,}14x_1 + 7{,}14x_2 = -\dfrac{7}{3}ql^2, \end{cases}$$

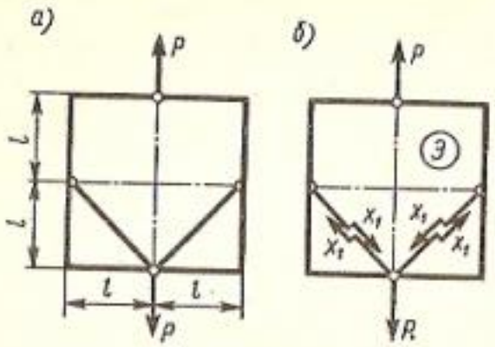


Рис. VII.43

из которой

$$x_1 = -0{,}153ql,$$

$$x_2 = -0{,}222ql^2.$$

6. Эпюр M_z построен на рис. VII.42, *г*.

Пример VII.15. На смешанной симметричной системе (рис. VII.43, *а*) построить эпюр M_z, если $I_z/F = l^2/\sqrt{2}$.

1. В системе (рис. VII.43, *а*)

$n = 3, \quad p_2 = 3, \; p_4 = 1.$

По (VII.1) $m = 9 - 3 - 3 = 3$.

2. Эквивалентную систему выбираем, разрезая тяги, усилия в которых по симметрии системы относительно вертикальной оси равны (рис. VII.43, *б*). Хотя эквивалентная система содержит одну лишнюю связь, в силу симметрии она статически определима.

3. Так как $k = 1$, выписываем одно каноническое уравнение

$$\delta_{1p} + \delta_{11}x_1 = 0.$$

4. По симметрии P относительно двух осей в шарнирах могут существовать только равные и симметричные нормальные усилия A_0 (рис. VII.44, *а*). Эти усилия равны нулю как единственные силы, дающие проекцию на горизонтальную ось.

В *1* (рис. VII.44, *б*) $\Sigma m_B = A_1 \cdot 2l = 0, \; A_1 = B_1 = 0$.

Определяем:

$$\delta_{1p} = \frac{Pl^3}{EI_z}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}\,Pl^3}{24EI_z},$$

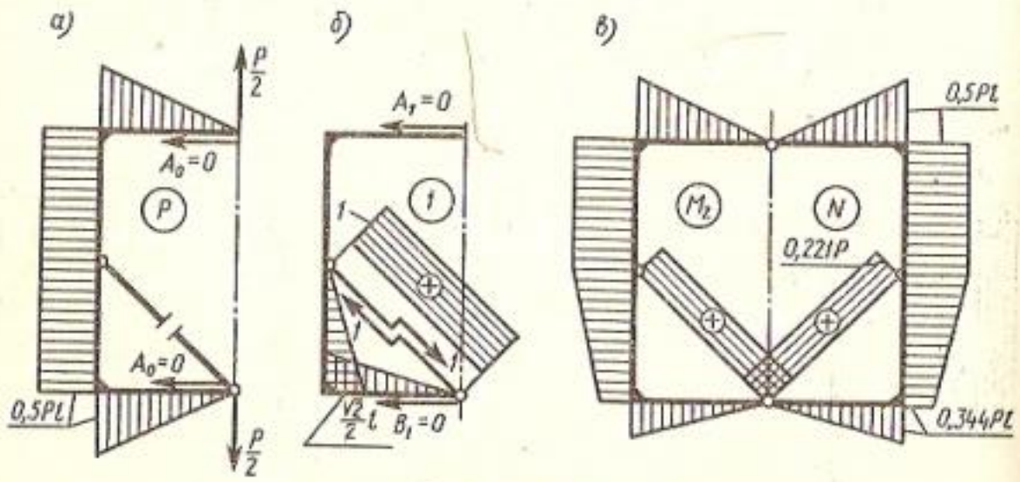


Рис. VII.44

$$\delta_{11} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l^3}{EI_z} + \frac{\sqrt{2}l}{EF} = \frac{l^3}{EI_z}\left(\frac{1}{3}+1\right) =$$

$$= \frac{4l^3}{3EI_z}.$$

5. Находим $x_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{32}P = 0{,}221P$.

6. Эпюры M_z на рамных элементах и N на тягах построены на рис. VII.44, *в*.

Пример VII.16. Построить эпюры M_z на рамных элементах и N на тягах системы (рис. VII.45, *а*), если $I_z/F = l^2/4$.

1. Определение числа лишних связей системы (рис. VII.45, *а*) затруднительно, так как тяги скрещиваются и затруднителен подсчет числа контуров. Разрежем одну из тяг (рис. VII.45, *б*) и подсчитаем число лишних связей полученной системы

$$m_э = 3\cdot 2 - 2 - 2\cdot 2 = 0.$$

Так как число лишних связей системы (рис. VII.45, *б*) равно нулю, то ее можно принять за эквивалентную.

2. Выписываем каноническое уравнение

$$\delta_{1p} + \delta_{11}x_1 = 0.$$

3. Разрезав один из шарниров в схеме нагружения P (рис. VII.45, *в*), находим A_0

$$\sum^{\text{лев}} m_B = A_0R = 0, \quad A_0 = 0.$$

Следовательно, по симметрии системы $M_{zp} = 0$ на всех криволинейных участках.

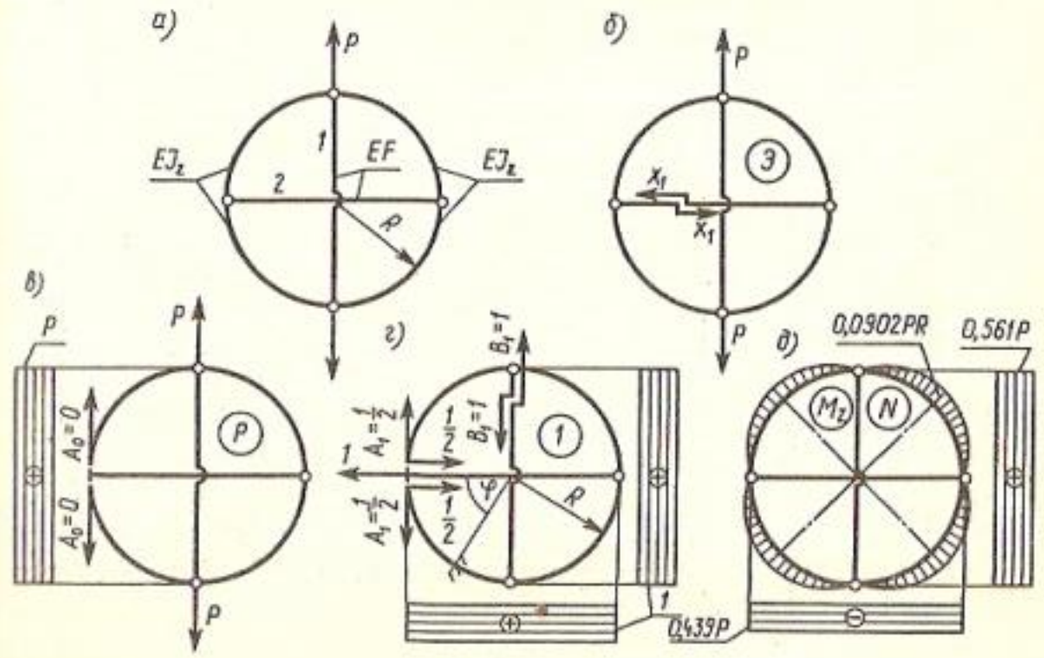


Рис. VII.45

Находим A_1 и B_1 в схеме нагружения *1* (рис. VII.45, *г*). Силу, приложенную в сечении при его разрезе, можно делить по сторонам сечения на любые две части, в сумме равные этой силе. Для сохранения симметрии делим единичную силу по сторонам сечения разрезанного шарнира поровну. Из уравнений статики

$$\sum^{\text{лев}} m_B = \frac{1}{2}R - A_1 R = 0,\ A_1 = \frac{1}{2};$$

$$\sum^{\text{лев}} m_C = \frac{1}{2}2R - B_1 = 0,\ B_1 = 1.$$

Система имеет две оси симметрии, поэтому уравнения M_{z1} на всех криволинейных участках одинаковы

$$M_{z1} = \frac{R}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi - 1).$$

По (VII.11)

$$\delta_{1P} = \frac{2PR}{EF}.$$

По (VII.12)

$$\delta_{11} = 4\frac{R^3}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)^2 + 2\ \frac{1\cdot 2R}{EF} =$$

$$= 0{,}14\frac{R^3}{EI_z} + 4\frac{R}{EF} = 4{,}56\frac{R}{EF}.$$

5. Находим

$$x_1 = -\frac{2}{4{,}56}P = -0{,}439P.$$

6. На криволинейных участках

$$M_z = M_{z1}x_1 = -0{,}22PR(\sin\varphi + \cos\varphi - 1);$$

$$M_z^{\max} = [M_z]_{\varphi=\pi/4} = -0{,}0902PR.$$

На тягах

$$N_1 = N_{1P} - N_{11}x_1 = P - 0{,}439P = 0{,}561P,\ N_2 = -0{,}439P.$$

Эпюры M_z и N построены на рис. VII.45, *д*.

§ VII.7. Расчет плоскопространственных статически неопределимых систем

Пример VII.17. Раскрыв статическую неопределимость смешанной плоскопространственной системы (рис. VII.46, *а*), построить эпюры M_z и $M_к$. Материал системы – сталь, $G = 0{,}4E$; $8D_{ср}^3 iEa^4/(Gd^4l^3) = 20$, где $D_{ср}$, i, d – параметры пружины.

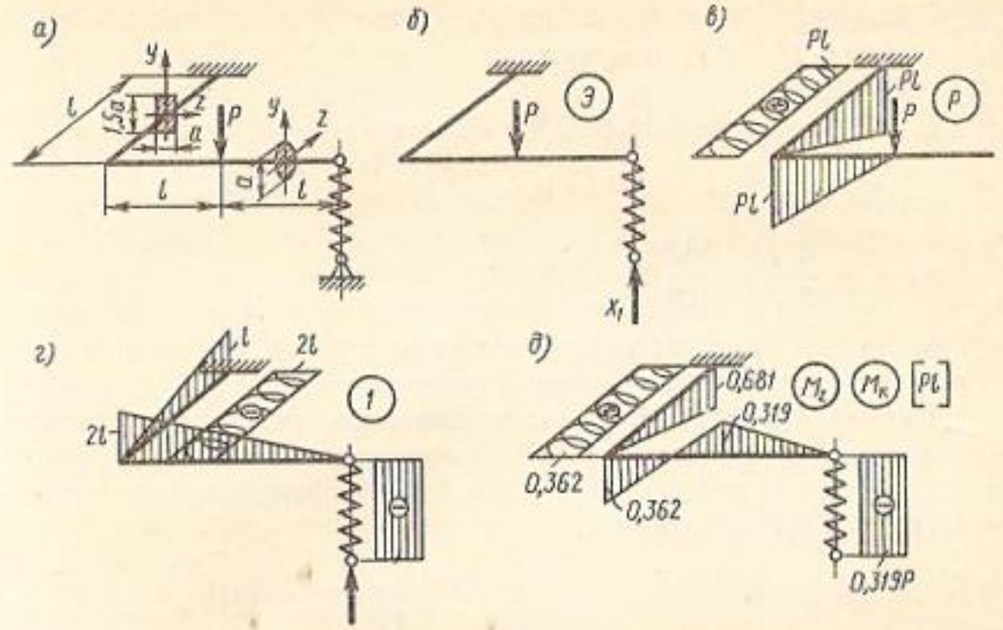


Рис. VII.46

1. Для взаимной неподвижности пространственной системы и опорного элемента между ними должно быть, как минимум, шесть связей. Пространственная заделка накладывает на систему шесть связей и пружина, которая эквивалентна, с точки зрения действия на раму, тяге – одну связь. Следовательно,

$$m = 7 - 6 = 1.$$

2. Эквивалентная система изображена на рис. VII.46, *б*.

3. Так как $k = 1$, $\delta_{1P} + \delta_{11}x_1 = 0$.

4. Эпюры M_{zp} и $M_{кр}$ построены на рис. VII.46, *в*. Эпюры M_{z1} и $M_{к1}$ построены на рис. VII.46, *г*.

Из (VI.51)

$$\delta_{1P} = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{M_{zp}M_{z1}}{EI_z} + \frac{M_{кр}M_{к1}}{GI_k}\right)dS,$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\left(\frac{M_{z1}^2}{EI_z} + \frac{M_{к1}^2}{GI_k}\right)dS + \lambda_1, \qquad \text{(VII.18)}$$

где λ_1 – осадка пружины от безразмерной единичной силы.

Из примера VI.11

$$\delta_{1P} = -34{,}8\frac{Pl^3}{Ea^4}.$$

Находим δ_{11}, умножая *1* сам на себя, взяв значения $I_z^{(1-2)}$, $I_z^{(2-3)}$ и $I_k^{(2-3)}$ из примера VI.11:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{Ea^4}\left(\frac{1}{0{,}05}\cdot 2\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{0{,}281}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{0{,}118}2\cdot 2\right) + \frac{8D_{ср}^3 i}{Gd^4}.$$

Учитывая условие примера, после подстановки в λ_1 $8D_{ср}^3 i/(Gd^4) = 20l^3/Ea^4$, получим

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{Ea^4}(53{,}4 + 1{,}18 + 33{,}9 + 20) = 109\,\frac{l^3}{Ea^4}.$$

5. Находим

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{34{,}8}{109}P = 0{,}319P.$$

6. Эпюры M_z и $M_к$ построены на рис. VII.46, *д* и являются результатами суммирования P и *1*, умноженного на x_1.

Пример VII.18. Раскрыв статическую неопределимость плоско-пространственной рамы (рис. VII.47, *а*), построить на ней эпюры M_z и $M_к$. Материал рамы – сталь, $G = 0{,}4E$; поперечное сечение всех участков – круг диаметра d.

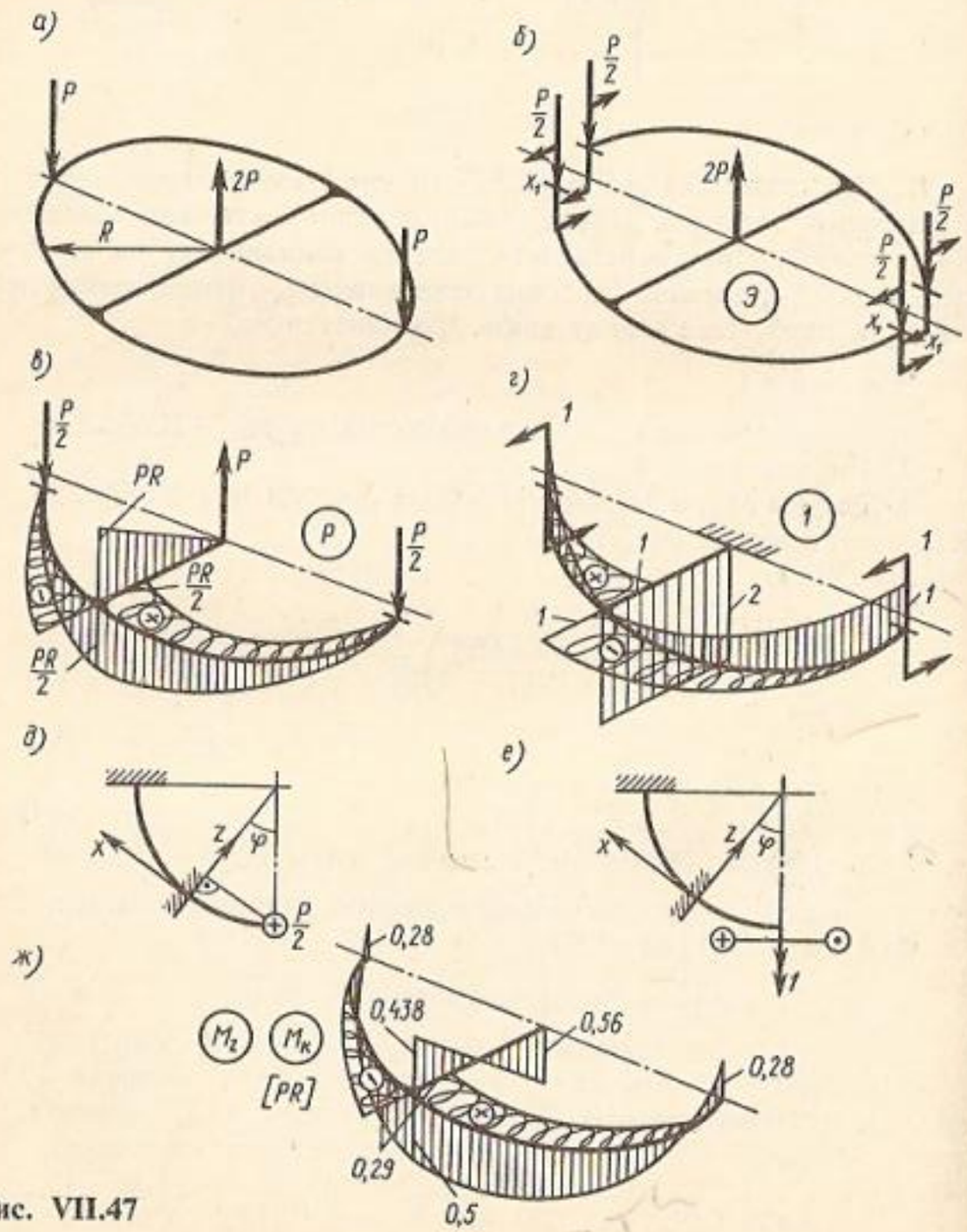


Рис. VII.47

1. Рама состоит из двух пространственных контуров, каждый из которых содержит шесть лишних связей.

2. Выбирая эквивалентную систему, делаем два разреза (отбрасываем 12 связей) таким образом, чтобы она сохранила двойную симметрию (рис. VII.47, *б*).

3. Так как $k = 1$, $\delta_{1p} + \delta_{11}x_1 = 0$.

4. Эпюры M_{zp} и $M_{кр}$ построены на рис. VII.47, *в*. Эпюры M_{z1} и $M_{к1}$ построены на рис. VII.47, *г*.

Составляем уравнения внутренних силовых факторов на криволинейном участке в схеме нагружения P (рис. VII.47, *д*) и схеме нагружения *1* (рис. VII.47, *е*), считая M_z положительным, если он сжимает верхние волокна участка:

$$M_{zp} = -\frac{PR}{2}\sin\varphi,\ M_{z1} = 1\cdot\cos\varphi;$$

$$M_{кр} = \frac{PR}{2}(1-\cos\varphi),\ M_{к1} = -1\cdot\sin\varphi.$$

Находим:

$EI_z = 0{,}05Ed^4$, $GI_к = 0{,}4E\cdot 0{,}1d^4 = 0{,}04Ed^4$.

По (VII.19) определяем

$$\delta_{1p} = -\frac{PR^2}{0{,}05Ed^4}\left(2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\cdot 2\right) -$$

$$-\frac{2PR^2}{0{,}04Ed^4}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = -42{,}5\frac{PR^2}{Ed^4},$$

$$\delta_{11} = \frac{R}{0{,}05Ed^4}\left(2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi + 2\cdot 2\right) + \frac{2R}{0{,}04Ed^4}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 151\,\frac{R}{Ed^4}.$$

5. Определяем

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{42{,}5}{151}PR = 0{,}282PR.$$

6. Эпюры M_z и $M_к$ построены на рис. VII.47, *ж*.

Глава VIII. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

§ VIII.1. Выражение нормального и касательного напряжений в точке данного сечения тела через компоненты напряженного состояния в этой точке

Требуется найти нормальное и касательное напряжения в точке M проведенного в нагруженном теле сечения (рис. VIII.1). Помещаем в точке M начало системы координат и проводим сечение, параллельное данному, отсекающее на координатных осях бесконечно малые отрезки dx, dy, dz. Вырезаем образованный тетраэдр и рассматриваем его равновесие. Напряжения по граням тетраэдра для большей ясности изображены на двух рисунках. Считаем компоненты напряженного состояния (рис. VIII.2, *а*) и направляющие косинусы l_i, m_i, n_i внешней нормали i к наклонной грани тетраэдра заданными. Напряжение p по этой грани разлагаем двояко: на σ_i и τ_i и на p_x, p_y, p_z (рис. VIII.2, *б*). Если площадь наклонной грани тетраэдра равна dF, то площади его граней, нормальных к осям x, y, z, соответственно равны:

$$dF_x = dFl_i,\ dF_y = dFm_i,\ dF_z = dFn_i.$$

Составляя уравнения равновесия, рис. VIII.2, *а* и *б* рассматриваем совместно. Для тетраэдра:

$$\Sigma X = p_x dF - \sigma_x dFl_i - \tau_{yx} dFm_i - \tau_{zx} dFn_i = 0,$$

$$\Sigma Y = p_y dF - \tau_{xy} dFl_i - \sigma_y dFm_i - \tau_{zy} dFn_i = 0,$$

$$\Sigma Z = p_z dF - \tau_{xz} dFl_i - \tau_{yz} dFm_i - \sigma_z dFn_i = 0.$$

Сокращая эти уравнения на dF, получим

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_i + \tau_{yx} m_i + \tau_{zx} n_i, \\ p_y &= \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i, \\ p_z &= \tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i. \end{aligned} \qquad \text{(VIII.1)}$$

Проекция вектора на любое направление равна сумме проекций его составляющих на это направление, поэтому

$$\sigma_i = p_x l_i + p_y m_i + p_z n_i, \text{ или } \sigma_i = \sigma_x l_i^2 + \sigma_y m_i^2 + \sigma_z n_i^2 + 2\tau_{xy} l_i m_i + 2\tau_{yz} m_i n_i + 2\tau_{zx} n_i l_i; \qquad \text{(VIII.2)}$$

$$\tau_i = \sqrt{p^2 - \sigma_i^2}, \qquad \text{(VIII.3)}$$

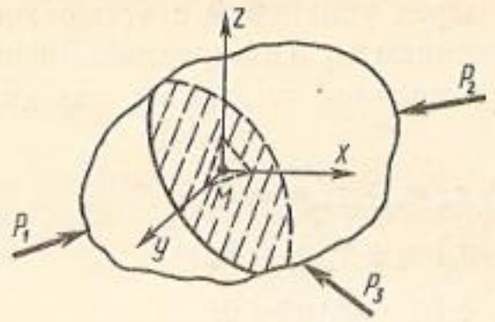


Рис. VIII.1

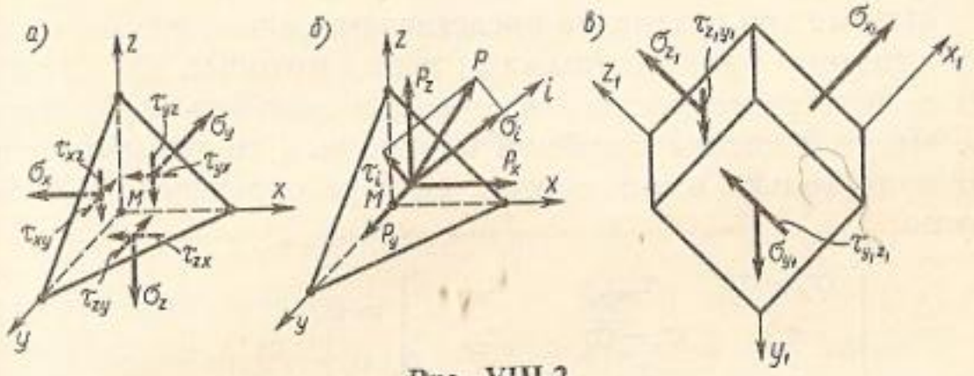


Рис. VIII.2

или

$$\tau_i = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_i^2}. \qquad \text{(VIII.4)}$$

Подстановку выражений p_x, p_y, p_z и σ_i через компоненты напряженного состояния и направляющие косинусы нормали i в (VIII.4) не делаем вследствие чрезвычайной громоздкости результата.

В силу бесконечной малости dx, dy, dz напряжения σ_i и τ_i по наклонной грани тетраэдра равны нормальному и касательному напряжениям в точке M данного сечения.

§ VIII.2. Определение значений главных напряжений

Как уже говорилось в § III.1, главными в данной точке тела называются площадки, в которых касательные напряжения равны нулю.

Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются **главными.**

Если главная площадка существует, то в ней $p = \sigma_i$ и, следовательно, для этой площадки

$$p_x = \sigma_i l_i,\ p_y = \sigma_i m_i,\ p_z = \sigma_i n_i. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Подставляя (VIII.5) в (VIII.1) и используя равенство суммы квадратов направляющих косинусов единице, полу-

чим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: главным напряжением σ_i и направляющими косинусами l_i, m_i, n_i нормали к главной площадке, так как ее положение неизвестно:

$$\begin{cases} (\sigma_x-\sigma_i)\,l_i+\tau_{yx}m_i+\tau_{zx}n_i=0,\\ \tau_{xy}l_i+(\sigma_y-\sigma_i)\,m_i+\tau_{zy}n_i=0,\\ \tau_{xz}l_i+\tau_{yz}m_i+(\sigma_z-\sigma_i)\,n_i=0,\\ l_i^2+m_i^2+n_i^2=1. \end{cases} \qquad \text{(VIII.6)}$$

Первые три уравнения представляют линейную однородную систему с неизвестными l_i, m_i, n_i, которые, как следует из ее четвертого уравнения, одновременно нулю равняться не могут. Решение линейной однородной системы отлично от нуля только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_i & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_i \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение с неизвестным главным напряжением σ_i:

$$\sigma_i^3-I_1\sigma_i^2+I_2\sigma_i-I_3=0. \qquad \text{(VIII.8)}$$

В этом уравнении:

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z;$$

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2; \qquad \text{(VIII.9)}$$

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Как известно из алгебры, три корня кубического уравнения с действительными коэффициентами (VIII.8) могут быть либо действительными числами, либо один из корней будет действительным числом, а два другие – комплексными сопряженными числами. Значит, одно главное напряжение, а следовательно, и одна главная площадка существуют. Докажем, что в каждой точке деформированного тела существуют три главные напряжения, а следовательно, и три главные площадки, т. е. что все корни уравнения (VIII.8), которое называется вековым,– действительны. Пусть направление координатных осей в данной точке тела M выбрано так, что одна из координатных осей, например ось x_1, нормальна к главной площадке. Тогда в напряженном состоянии $\tau_{x_1y_1}=\tau_{x_1z_1}=0$. Определитель (VIII.7) для напряженного

состояния (рис. VIII.2, *в*) запишется в виде

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sigma_{x_1}-\sigma_i & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{y_1}-\sigma_i & \tau_{z_1y_1}\\ 0 & \tau_{y_1z_1} & \sigma_{z_1}-\sigma_i \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв его, получим кубическое уравнение, правая часть которого является произведением двух сомножителей

$$(\sigma_{x_1}-\sigma_i)((\sigma_{y_1}-\sigma_i)(\sigma_{z_1}-\sigma_i)+\sigma_{y_1}\sigma_{z_1}-\tau_{y_1z_1}^2)=0,$$

или

$$(\sigma_{x_1}-\sigma_i)(\sigma_i^2-(\sigma_{y_1}+\sigma_{z_1})\sigma_i+\sigma_{y_1}\sigma_{z_1}-\tau_{y_1z_1}^2)=0. \qquad \text{(VIII.10)}$$

Один корень уравнения (VIII.10), как и следовало ожидать, равен σ_{x_1}, а два другие являются корнями квадратного уравнения

$$\sigma_i^2-(\sigma_{y_1}+\sigma_{z_1})\sigma_i+\sigma_{y_1}\sigma_{z_1}-\tau_{y_1z_1}^2=0,$$

дискриминант которого

$$D=(\sigma_{y_1}+\sigma_{z_1})^2-4(\sigma_{y_1}\sigma_{z_1}-\tau_{y_1z_1}^2)=(\sigma_{y_1}-\sigma_{z_1})^2+4\tau_{y_1z_1}^2\geqslant 0.$$

Значит, все три корня уравнения (VIII.10) – действительны.

При повороте координатных осей компоненты напряженного состояния в точке тела изменяются, а главные напряжения, или корни уравнений (VIII.8) и (VIII.10), остаются неизменными. Отсюда следует, что эти уравнения одинаковы или их коэффициенты и свободные члены соответственно равны.

Коэффициенты I_1, I_2 и свободный член I_3 уравнения (VIII.8) называются инвариантами (независящими от выбора системы координатных осей) напряженного состояния в данной точке тела. Из выражения для I_1, в частности, следует, что сумма трех нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку, постоянна.

Главные напряжения или корни уравнения (VIII.8) обозначаются

$$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3.$$

§ VIII.3. Определение положений главных площадок и их взаимная ориентация

Подставляя поочередно найденные значения σ_1, σ_2, σ_3 в систему (VIII.6), находим направляющие косинусы нормалей к главным площадкам (направляющие косинусы

главных нормалей). Для определения направляющих косинусов первой главной нормали получим систему:

$$\left\{\begin{array}{l|l} (\sigma_x-\sigma_1)l_1+\tau_{yx}m_1+\tau_{zx}n_1=0, & l_2 \\ \tau_{xy}l_1+(\sigma_y-\sigma_1)m_1+\tau_{zy}n_1=0, & m_2 \\ \tau_{xz}l_1+\tau_{yz}m_1+(\sigma_z-\sigma_1)n_1=0, & n_2 \\ l_1^2+m_1^2+n_1^2=1. & \end{array}\right. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Определитель системы первых трех уравнений (VIII.11) равен нулю, и, следовательно, они линейно зависимы. Отбросив одно из них, безразлично какое, будем иметь систему трех уравнений с тремя неизвестными l_1, m_1, n_1, решив которую найдем положение нормали к первой главной площадке.

Поступая так же с целью определения положения нормали i_2 получим:

$$\left\{\begin{array}{l|l} (\sigma_x-\sigma_2)l_2+\tau_{yx}m_2+\tau_{zx}n_2=0, & l_1 \\ \tau_{xy}l_2+(\sigma_y-\sigma_2)m_2+\tau_{zy}n_2=0, & m_1 \\ \tau_{xz}l_2+\tau_{yz}m_2+(\sigma_z-\sigma_2)n_2=0, & n_1 \\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=1. & \end{array}\right. \qquad \text{(VIII.12)}$$

Для выяснения взаимной ориентации первой и второй главных площадок умножим первые три уравнения системы (VIII.11) последовательно на l_2, m_2, n_2 и, сложив произведения, найдем сумму

$$S_1=(\sigma_x-\sigma_1)l_1l_2+(\sigma_y-\sigma_1)m_1m_2+(\sigma_z-\sigma_1)n_1n_2+$$
$$+\tau_{xy}(m_1l_2+l_1m_2)+\tau_{yz}(n_1m_2+m_1n_2)+\tau_{zx}(l_1n_2+n_1l_2)=0.$$

Умножив последовательно первые три уравнения системы (VIII.12) на l_1, m_1, n_1 и сложив произведения, найдем сумму

$$S_2=(\sigma_x-\sigma_2)l_1l_2+(\sigma_y-\sigma_2)m_1m_2+(\sigma_z-\sigma_2)n_1n_2+$$
$$+\tau_{xy}(m_1l_2+l_1m_2)+\tau_{yz}(n_1m_2+m_1n_2)+\tau_{zx}(l_1n_2+n_1l_2)=0.$$

Взяв разность $S_2-S_1=0$, получим

$$(\sigma_1-\sigma_2)(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=0.$$

В общем случае $\sigma_1\neq\sigma_2$, поэтому

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Равенство (VIII.13) есть условие перпендикулярности главных нормалей i_1 и i_2. Аналогично доказывается перпендикулярность главных нормалей i_2 и i_3. Следовательно, главные площадки в данной точке тела взаимно перпендикулярны.

§ VIII.4. Круговая диаграмма напряженного состояния

У произвольной точки M тела вырежем элемент, по бесконечно малым граням которого действуют главные напряжения (рис. VIII.3, *а*). С целью упрощения изображения компоненты напряженного состояния здесь и в дальнейшем показываем только на передних гранях вырезанного элемента (условность). Для этого элемента:

$$\sigma_x=\sigma_1,\ \sigma_y=\sigma_2,\ \sigma_z=\sigma_3,\ \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0.$$

Найдем σ_i и τ_i в произвольной площадке, проходящей через ось z (ось 3). Для этой площадки (рис. VIII.3, *б*):

$$l_i=\cos\alpha,\ m_i=\sin\alpha,\ n_i=0.$$

Из выражения (VIII.2)

$$\sigma_i=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\sin^2\alpha, \text{ или}$$

$$\sigma_i=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha. \qquad \text{(VIII.14)}$$

По (VIII.1) в этой площадке

$$p=\sigma_1\cos\alpha,\ p_y=\sigma_2\sin\alpha,\ p_z=0.$$

Из (VIII.4) $\tau_i=\sqrt{\sigma_1^2\cos^2\alpha+\sigma_2^2\sin^2\alpha-\sigma_1^2\cos^4\alpha-\sigma_2^2\sin^4\alpha-2\sigma_1\sigma_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$,

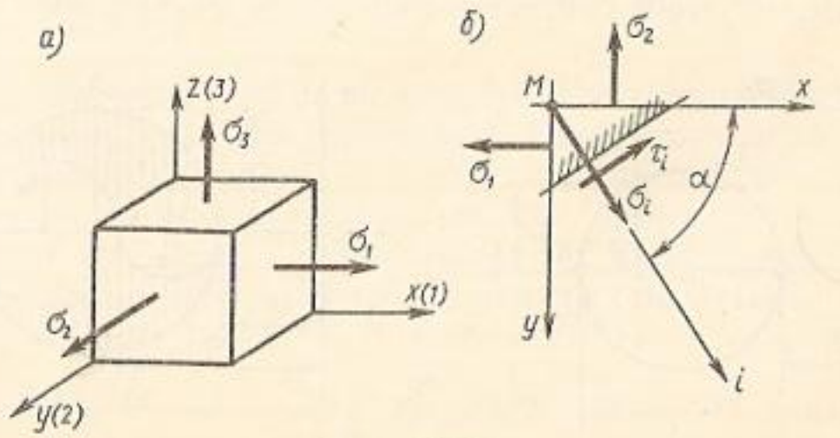


Рис. VIII.3

или

$$\tau_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \qquad \text{(VIII.15)}$$

Взяв систему осей σ, τ (рис. VIII.4) и отложив по оси σ в выбранном масштабе σ_1 и σ_2, построим на разности $\sigma_1 - \sigma_2$, как на диаметре, окружность. Проведем из центра окружности луч, составляющий с осью σ угол 2α. Докажем, что отрезки OD и DC в масштабе диаграммы соответственно равны σ_i и τ_i. Действительно,

$$OD = OA + AO_1 + O_1D = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

или

$$OD = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \qquad \text{(VIII.16)}$$

$$DC = O_1C \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \qquad \text{(VIII.17)}$$

Выражения (VIII.16) и (VIII.14), (VIII.17) и (VIII.15) совпадают, что доказывает наше утверждение.

Значит, абсциссы точек построенной окружности в выбранном масштабе равны нормальным, а ординаты – касательным напряжениям, действующим по площадкам, проходящим через ось *3* (третью главную ось). Следовательно, абсциссы и ординаты точек окружностей, построенных на разностях $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметрах (рис. VIII.5), равны нормальным и касательным напряжениям по площадкам, проходящим соответственно через оси *1* и *2* (первую и вторую главные оси). Можно доказать (см., например: Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов), что абсциссы и ординаты точек заштрихованной области в выбранном масштабе соответственно равны нормальным и касательным напряжениям по произвольно ориентированным площадкам, проходящим через точку *M*. Построенная на рис. VIII.5 диаграмма носит название круговой диаграммы напряженного состояния (напряжений) в данной точке тела. Окружность, построенная на разности $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметре, называется определяющей.

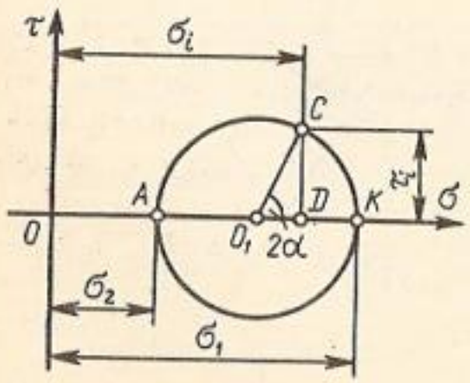


Рис. VIII.4

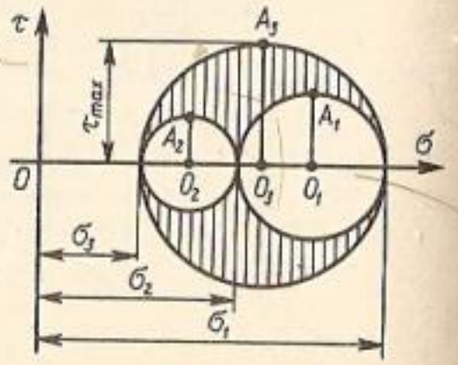


Рис. VIII.5

Выводы.

1. Главные напряжения достигают экстремальных значений, т. е. σ_1 – наибольшее нормальное напряжение из всех нормальных напряжений, действующих по площадкам, проходящим через данную точку, а σ_3 – наименьшее.

2. Наибольшие ординаты окружностей *III*, *I* и *II* – O_3A_3, O_1A_1 и O_2A_2 – равны их радиусам и составляют с осью σ угол $2\alpha = 90°$. Значит, наибольшие касательные напряжения в площадках, проходящих через оси *3*, *1* и *2*, соответственно равны

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а площадки, в которых они действуют, делят углы между первой и второй, второй и третьей, третьей и первой главными площадками пополам.

Максимальное касательное напряжение, действующее по площадкам, проходящим через данную точку, равно наибольшей ординате заштрихованной области – радиусу O_3A_3.

Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad \text{(VIII.18)}$$

§ VIII.5. Классификация напряженных состояний. Определение главных напряжений и положений главных площадок в плоском напряженном состоянии и точке бруса

Напряженное состояние в точке называется: трехосным (объемным), если все три главные напряжения отличны от нуля (рис. VIII.6, *а*); двухосным (плоским), если одно главное напряжение равно нулю (рис. VIII.6, *б*); одноосным, если два главных напряжения равны нулю (рис. VIII.6, *в*).

В плоском напряженном состоянии (рис. VIII.7, *б*) $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Тогда из (VIII.9) и (VIII.8)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \quad I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2, \quad I_3 = 0;$$

$$\sigma_i[\sigma_i^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_i + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2] = 0.$$

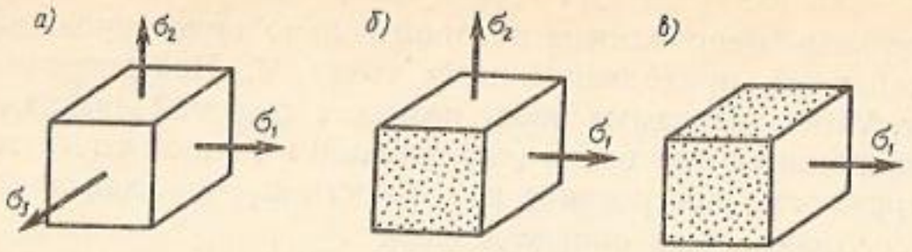


Рис. VIII.6

Одно из главных напряжений, как и следовало ожидать, равно нулю, а два другие будут корнями квадратного уравнения, стоящего в квадратных скобках:

$$\sigma_{i,j}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_x+\sigma_y)^2}{4}-\sigma_x\sigma_y+\tau_{xy}^2},$$

или

$$\sigma_{i,j}=\frac{1}{2}[\sigma_x+\sigma_y\pm\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}]. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Главная площадка, в которой нормальное напряжение равно нулю, нормальна к оси z (рис. VIII.7, *а*), следовательно, две другие главные площадки пройдут через ось z и нормали к ним лежат в плоскости xy. Положение одной из этих нормалей i (рис. VIII.7, *б*) найдем, взяв первое из уравнений (VIII.6)

$$(\sigma_x-\sigma_i)\cos\alpha_i+\tau_{yx}\sin\alpha_i=0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_i=\frac{\sigma_i-\sigma_x}{\tau_{yx}}. \qquad \text{(VIII.20)}$$

След главной площадки, по которой действует напряжение σ_i, нормален к i, а след главной площадки, по которой действует σ_j, совпадает с i.

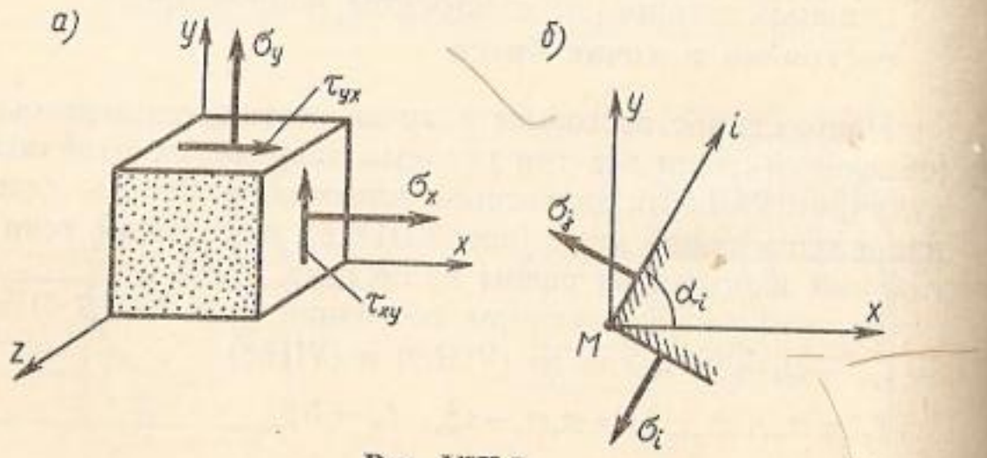


Рис. VIII.7

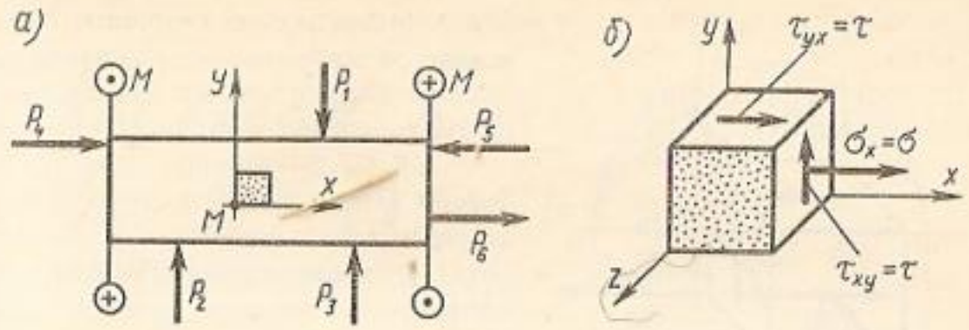


Рис. VIII.8

У точки M, лежащей на поверхности произвольно нагруженного бруса (рис. VIII.8, *а*), вырежем элемент, грани которого, нормальные к оси x, лежат в поперечных, а нормальные к оси y – в продольных сечениях бруса (рис. VIII.8, *б*). По граням элемента, нормальным к оси x, за счет существования в поперечном сечении нормального усилия и изгибающего момента действует напряжение σ_x, а за счет существования в поперечном сечении перерезывающей силы и крутящего момента действует напряжение τ_{xy}. Грани, нормальные к оси y, свободны от нормальных напряжений ($\sigma_y=0$), так как по одной из принимаемых нами для бруса гипотез его волокна друг на друга не давят. Площадка, нормальная к оси z, совпадающая с поверхностью бруса, свободна от напряжений ($\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$), и напряженное состояние в брусе будет плоским. По сравнению с общим случаем плоского напряженного состояния в брусе только два компонента напряженного состояния отличны от нуля и поэтому их обозначают

$$\sigma_x=\sigma,\ \tau_{xy}=\tau.$$

Главные напряжения и положения главных площадок в брусе из (VIII.20) и (VIII.19) определяются по формулам

$$\sigma_{1,3}=\frac{1}{2}(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}),\ \sigma_2=0; \qquad \text{(VIII.21)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau}. \qquad \text{(VIII.22)}$$

В (VIII.21) корень по абсолютной величине больше первого члена, поэтому в брусе всегда $\sigma_1>0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3<0$.

Пример VIII.1. В точке тела M определить значения главных напряжений, положения главных площадок и построить круговую диаграмму напряженного состояния. Элемент, вырезанный у точки, и напряжения, действующие по его граням, показаны на рис. VIII.9.

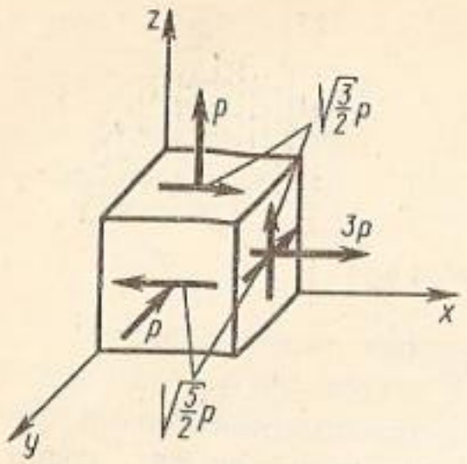


Рис. VIII.9

1. Выписываем значения компонентов напряженного состояния:

$$\sigma_x = 3p,\ \sigma_y = -p,\ \sigma_z = p,$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{5}{2}}p,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = \sqrt{\frac{3}{2}}p.$$

По выражениям (VIII.9) находим

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3p,$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -3p^2 - p^2 + 3p^2 - \frac{5}{2}p^2 - \frac{3}{2}p^2 = -5p^2,$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 =$$

$$= -3p^3 + \frac{3}{2}p^3 - \frac{5}{2}p^3 = -4p^3.$$

Подставив I_1, I_2, I_3 в (VIII.8), получим уравнение

$$\sigma_i^3 - 3p\sigma_i^2 - 5p^2\sigma_i + 4p^3 = 0.$$

Разлагаем его левую часть на множители

$$(\sigma_i - 4p)(\sigma_i^2 + p\sigma_i - p^2) = 0.$$

Решая уравнение, найдем

$$\sigma_1 = 4p,\ \sigma_2 = 0{,}62p,\ \sigma_3 = -1{,}62p.$$

2. Определяем направляющие косинусы нормали к первой главной площадке. Для этого, отбросив третье уравнение системы (VIII.6), подставляем в нее значения компонентов напряженного состояния и найденное значение σ_1. Получим

$$\begin{cases} -l_1 - \sqrt{\frac{5}{2}}m_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}n_1 = 0, \\ -\sqrt{\frac{5}{2}}l_1 - 5m_1 + 0 = 0, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(VIII.23)}$$

Система (VIII.23) имеет для направляющих косинусов первой главной нормали два решения, которые обозначим одним и двумя штрихами:

$$l_1' = 0{,}889,\quad m_1' = -0{,}281,\quad n_1' = 0{,}362;$$

$$l_1'' = -0{,}889,\quad m_1'' = -0{,}281,\quad n_1'' = -0{,}362.$$

Это говорит о том, что в точке тела существует главная площадка с двумя противоположно направленными внешними нормалями i_1' и i_1'', по которой действуют противоположно направленные напряжения, равные σ_1.

Положения второй и третьей главных площадок определяются аналогично, после последовательной подстановки в систему (VIII.6) найденных значений σ_2 и σ_3.

3. Круговая диаграмма напряженного состояния симметрична относительно оси σ, поэтому принято строить только ее верхнюю половину (рис. VIII.10).

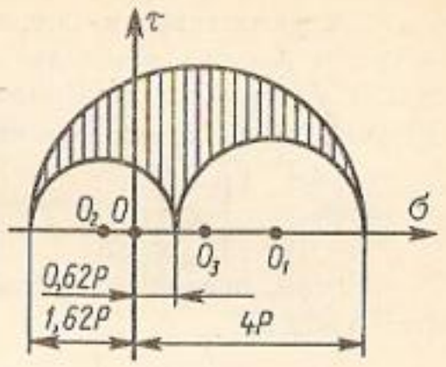


Рис. VIII.10

Пример VIII.2. В точке тела M определить значения главных напряжений; найти положения главных площадок; найти значение τ_{max} и указать площадку, в которой оно действует; построить круговую диаграмму напряженного состояния. Элемент, вырезанный у точки, и напряжения, действующие по его граням, показаны на рис. VIII.11, *а*.

1. Выписываем значения компонентов напряженного состояния:

$$\sigma_x = 50\ \text{МПа},\ \sigma_y = -30\ \text{МПа},\ \sigma_z = -20\ \text{МПа},$$

$$\tau_{xy} = -30\ \text{МПа},\ \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Значение одного главного напряжения известно и равно σ_z. Следовательно, два других главных напряжения будут действовать по площадкам, проходящим через ось z. Из (VIII.2) следует, что напряжения, действующие по площадкам, проходящим через ось z, не зависят от σ_z, τ_{zx} и τ_{zy}, поэтому два других главных напряжения можно найти из выражения (VIII.19) после подстановки в него σ_x, σ_y, τ_{xy}. Получим

$$\sigma_{1,\,3} = 5(5 - 3 \pm \sqrt{64 + 4\cdot 9}) = 10 \pm 50.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = 60\ \text{МПа},\ \sigma_2 = -20\ \text{МПа},\ \sigma_3 = -40\ \text{МПа}.$$

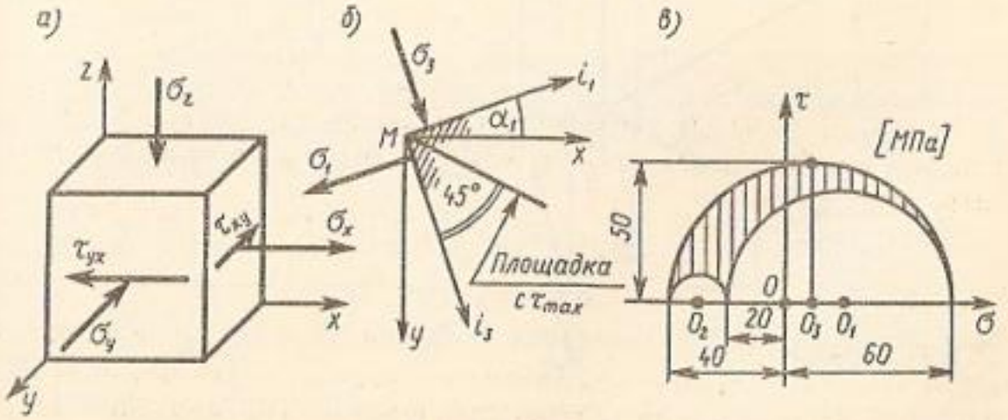


Рис. VIII.11

2. Вторая главная площадка нормальна к оси z. Значит, первая и третья главные площадки пройдут через ось z и нормали к ним лежат в плоскости xy. Положение первой главной нормали найдем из (VIII.20) после подстановки в него значений σ_1, σ_x и τ_{xy}

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{60-50}{-30} = -\frac{1}{3}.$$

Следы первой и третьей главных площадок построены на рис. VIII.11, *б*.

3. По (VIII.17)

$$\tau_{max} = \frac{60+40}{2} = 50 \text{ МПа}.$$

Площадка, в которой действует τ_{max}, делит угол между первой и третьей главными площадками пополам. След этой площадки показан на рис. VIII.11, *б*.

4. Круговая диаграмма напряженного состояния построена на рис. VIII.11, *в*.

Пример VIII.3. В точке A бруса (рис. VIII.12, *а*) найти значения главных напряжений; определить положение главных площадок; найти значение τ_{max} и указать площадку, в которой оно действует; построить круговую диаграмму напряженного состояния.

1. Определяем значение внутренних силовых факторов в том сечении, в котором находится точка A:

$$M_y = 10Pa,\ M_k = 5Pa,\ Q_z = P,\ N = Q_y = M_z = 0.$$

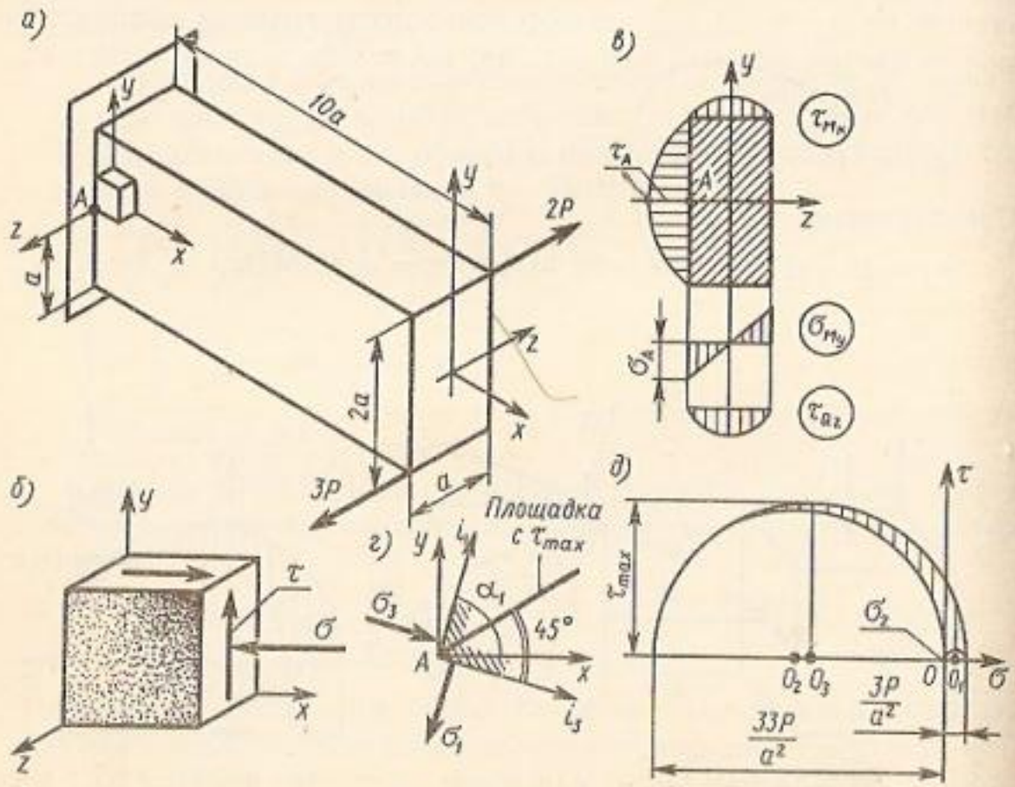


Рис. VIII.12

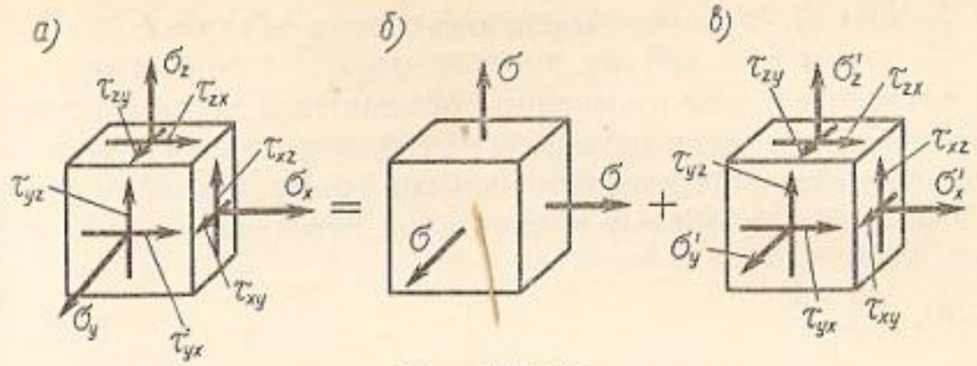


Рис. VIII.13

Строим эпюры распределения напряжений по сечению от каждого внутреннего силового фактора (рис. VIII.12, *в*).

Вырезаем у точки A элемент, грани которого, нормальные к оси x, лежат в поперечных сечениях бруса, а нормальные к осям y и z – в продольных (рис. VIII.13, *б*). Находим значения компонентов напряженного состояния, действующих по граням этого элемента:

$$W_y = \frac{2aa^2}{6} = \frac{a^3}{3},\ W_к = \alpha b^2 h = 0{,}246a^2 2a \approx 0{,}5a^3;$$

$$\sigma = \sigma^A_{M_y} = -\frac{M_y}{W_y} = -30\frac{P}{a^2},\ \tau = \tau^A_{M_к} = \frac{M_к}{W_к} = 10\frac{P}{a^2}.$$

По (VIII.21) получаем значения σ_1 и σ_3:

$$\sigma_{1,3} = \frac{P}{2a^2}(-30 \pm \sqrt{900 + 4\cdot 100}) = \frac{P}{a^2}(-15 \pm 18);$$

$$\sigma_1 = 3\frac{P}{a^2},\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -33\frac{P}{a^2}.$$

2. Положение первой главной нормали находим по формуле (VIII.22):

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3+30}{10} = 3{,}3.$$

Следы первой и третьей главных площадок на плоскости (поверхности бруса) построены на рис. VIII.12, *г*.

3. Из (VIII.18) и (VIII.21)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 18\frac{P}{a^2}.$$

След площадки, по которой действует τ_{max}, показан на рис. VIII.12, *г*.

4. Круговая диаграмма напряженного состояния построена на рис. VIII.12, *д*.

§ VIII.6. Относительное изменение объема

Относительным изменением объема тела в данной точке при его деформации называется отношение изменения объема элемента с бесконечно малыми гранями, вырезанного у этой точки, к объему элемента до деформации

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V}, \qquad \text{(VIII.24)}$$

где θ – относительное изменение объема; V – объем элемента до деформации; V_1 – объем элемента после деформации.

Из рис. VIII.13,*а* $V = dxdydz$,

$$V_1 = (1+\varepsilon_1)dx(1+\varepsilon_2)dy(1+\varepsilon_3)dz.$$

Подставив выражения V и V_1 в (VIII.24), будем иметь

$$\theta = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1 =$$

$$= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1.$$

Пренебрегая в выражении для θ величинами второго и третьего порядка малости по сравнению с величинами первого порядка малости, получим

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad \text{(VIII.25)}$$

Если тело испытывает только силовую деформацию, то, подставив в (VIII.25) выражения ε_1, ε_2 и ε_3 из (II.14) через напряжения, найдем

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Учитывая, что суммы трех нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку равны, получим

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \qquad \text{(VIII.26)}$$

Из (VIII.26) следует, что θ пропорционально сумме нормальных напряжений, действующих по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку.

§ VIII.7. Удельная потенциальная энергия деформации W и ее деление на $W_{об}$ и $W_ф$

Удельной потенциальной энергией деформации в данной точке тела называется отношение потенциальной энергии деформации элемента с бесконечно малыми гранями, вырезанного у этой точки, к объему элемента до деформации

$$W = \frac{u}{V},$$

где W – удельная потенциальная энергия деформации в данной точке тела; u – потенциальная энергия деформации элемента, вырезанного у этой точки; V – объем элемента.

Так как силы, действующие на грани элемента (рис. VIII.13, *а*), взаимно перпендикулярны и прикладываются статически, то

$$u = \frac{1}{2}[\sigma_x dydz\Delta(dx) + \sigma_y dzdx\Delta(dy) + \sigma_z dxdy\Delta(dz) +$$

$$+ \tau_{xy}dydz\delta_x + \tau_{yz}dxdz\delta_y + \tau_{zx}dxdy\delta_z],$$

где δ_x, δ_y, δ_z – перемещения граней, в которых действуют соответственно τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} за счет чистого сдвига.

Учитывая, что $\Delta(dx) = \varepsilon_x dx$, $\Delta(dy) = \varepsilon_y dy$, $\Delta(dz) = \varepsilon_z dz$, $\delta_x = \gamma_{xy}dx$, $\delta_y = \gamma_{yz}dy$, $\delta_z = \gamma_{zx}dz$, будем иметь

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \qquad \text{(VIII.27)}$$

Подставив в (VIII.27) выражения деформаций из (II.14) через напряжения, получим

$$W = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] +$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \qquad \text{(VIII.28)}$$

Удельную потенциальную энергию деформации можно представить как

$$W = W_{об} + W_ф. \qquad \text{(VIII.29)}$$

В (VIII.29) $W_{об}$ – удельная потенциальная энергия изменения объема, или часть W, идущая на изменение объема элемента в напряженном состоянии (рис. VIII.13, *а*); $W_ф$ – удельная потенциальная энергия изменения формы (формо-

изменения), или часть W, идущая на изменение формы элемента в том же напряженном состоянии.

Для определения $W_{об}$ и $W_ф$ рассмотрим совместно напряженные состояния (рис. VIII.13, *а, б, в*), считая, что

$$\sigma_x = \sigma + \sigma'_x,$$
$$\sigma_y = \sigma + \sigma'_y,$$
$$\sigma_z = \sigma + \sigma'_z. \qquad \text{(VIII.30)}$$

В напряженном состоянии (рис. VIII.13, *б*) изменяется только объем элемента, а его форма (отношение размеров) остается постоянной. Поэтому потенциальную энергию деформации элемента в этом напряженном состоянии обозначим $W_{об}$.

Потенциальную энергию деформации элемента в напряженном состоянии (рис. VIII.13, *в*) обозначим $W_ф$, определив σ из того условия, чтобы в этом напряженном состоянии изменялась только форма элемента. Для этого из (VIII.25) необходимо, чтобы

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0. \qquad \text{(VIII.31)}$$

Складывая выражения (VIII.30) и учитывая (VIII.31), получим

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \qquad \text{(VIII.32)}$$

По (VIII.28) находим

$$W_{об} = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma^2.$$

Используя (VIII.32), будем иметь

$$W_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \qquad \text{(VIII.33)}$$

Из равенства (VIII.29)

$$W_ф = W - W_{об}.$$

Вычитая из выражения (VIII.28) выражение (VIII.33), получим

$$W_ф = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \qquad \text{(VIII.34)}$$

Глава IX. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

§ IX.1. Запас прочности данного напряженного состояния и назначение теорий прочности

Напряженные состояния подобны (однотипны), **если их главные напряжения пропорциональны.** Значит, напряженные состояния (рис. IX.1, *а, б*) однотипны, если

$$r = \frac{\sigma'_1}{\sigma''_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma''_2} = \frac{\sigma'_3}{\sigma''_3}.$$

Напряженное состояние, при котором наступает недопустимый процесс (для хрупких материалов – разрушение, а для пластичных – появление недопустимых остаточных деформаций), **полученное из данного путем пропорционального и одновременного увеличения его главных напряжений, называется предельным** (опасным). Обозначим $\sigma_1^{пр}$, $\sigma_2^{пр}$, $\sigma_3^{пр}$ – главные напряжения предельного напряженного состояния (рис. IX.1, *в*).

Запасом прочности n данного напряженного состояния при линейной зависимости между внешними факторами и напряжениями называется число, показывающее, во сколько раз одновременно и пропорционально надо увеличить его главные напряжения, чтобы оно стало предельным:

$$n = \frac{\sigma_1^{пр}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^{пр}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^{пр}}{\sigma_3}. \qquad \text{(IX.1)}$$

Напряженные состояния элементов из одного и того же материала равнопрочны, если у них равны запасы прочности.

Для определения запаса прочности любого напряженного состояния по (IX.1) надо знать значения главных напряжений предельного напряженного состояния, ему подобного, которые могут быть найдены только экспериментально.

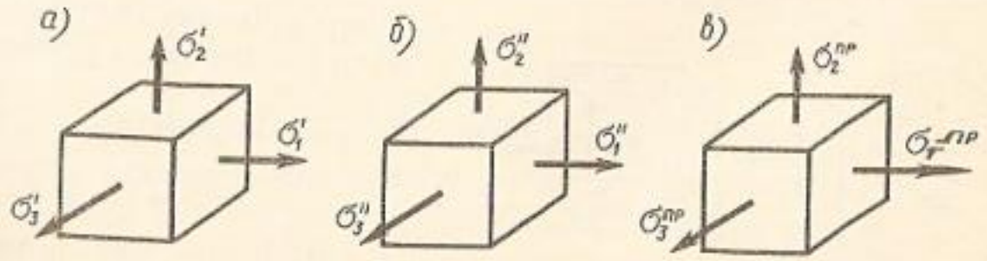


Рис. IX.1

Практически этого сделать нельзя по двум основным причинам:

во-первых, в настоящее время отсутствуют машины, позволяющие создавать произвольные напряженные состояния;

во-вторых, если бы такие машины и были, то невозможно провести неограниченно большое число опытов по определению значений главных напряжений предельных напряженных состояний при их произвольных отношениях

$$\frac{\sigma_1^{пр}}{\sigma_2^{пр}} \text{ и } \frac{\sigma_3^{пр}}{\sigma_2^{пр}}.$$

Поэтому о прочности данного напряженного состояния судят по прочности напряженного состояния, ему не подобного, путем высказывания предположения об их равнопрочности.

Предположение о равнопрочности разнотипных напряженных состояний называется теорией или гипотезой прочности.

Обычно данное напряженное состояние сравнивают с одноосным растяжением (рис. IX.2, *а, б*), для которого значения предельных механических характеристик материала $\sigma_в$ и $\sigma_т$ определяются просто.

Одноосное напряженное состояние, равнопрочное данному, называется эквивалентным. Обозначим: $\sigma_{экв}$ – главное напряжение эквивалентного напряженного состояния.

На основании сформулированного предположения (критерия) равнопрочности устанавливается зависимость между $\sigma_{экв}$ и σ_1, σ_2, σ_3:

$$\sigma_{экв} = \sigma_{экв}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \qquad (IX.2)$$

Опасной называется точка элемента системы, в которой $\sigma_{экв}$ по одной из теорий прочности достигает наибольшего значения.

После определения $\sigma_{экв}$ в опасной точке расчет на прочность проводится, как расчет на одноосное растяжение.

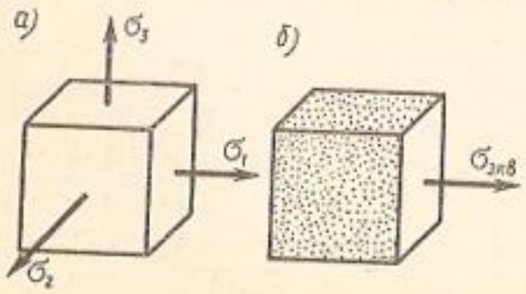


Рис. IX.2

При поверочном расчете:

$n = \sigma_{вр}/\sigma_{экв}$ – для хрупких материалов,

$n = \sigma_{тр}/\sigma_{экв}$ – для пластичных материалов. (IX.3)

При проектировочном расчете:

$$\sigma_{экв} \leqslant \frac{\sigma_{вр}}{[n]_в} = [\sigma]_в \text{ – для хрупких материалов,}$$

$$\sigma_{экв} \leqslant \frac{\sigma_{тр}}{[n]_т} = [\sigma]_т \text{ – для пластичных материалов;} \qquad (IX.4)$$

где $[\sigma]_в$ и $[\sigma]_т$ – допускаемые напряжения по хрупкому разрушению и текучести соответственно.

Сформулировать универсальный критерий равнопрочности, учитывающий всю совокупность причин, практически влияющих на прочность (тип напряженного состояния, состояние материала, характер действия на тело внешних факторов), до сих пор не удалось. Поэтому в настоящее время при расчете на прочность используется несколько теорий прочности, взаимно дополняющие друг друга. Теории прочности, объясняющие возникновение опасного состояния разрушением, называются теориями хрупкого разрушения, а объясняющие его возникновение появлением недопустимых пластических деформаций – теориями пластичности. Любая теория прочности проверяется, а иногда и выдвигается опытом. Для этого и нужны испытательные машины, образцы и установки, позволяющие создавать произвольные напряженные состояния.

§ IX.2. Теории хрупкого разрушения

Хрупким разрушением называется разделение тела на части без какой-либо поддающейся измерению предварительной пластической деформации.

1. **Первая теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений (теория Галилея).**

Критерий равнопрочности по этой теории формулируется так: **напряженные состояния равнопрочны по хрупкому разрушению, если у них равны наибольшие растягивающие напряжения.**

Следовательно, по первой теории зависимость (IX.2) будет такой:

$$\sigma^I_{экв} = \sigma_1. \qquad (IX.5)$$

Основанием для принятия критерия может служить то, что растянутый образец из хрупкого материала разрушается по сечениям, в которых действуют наибольшие растягивающие напряжения. Теория утверждает, что существование σ_2 и σ_3 не влияет на прочность при хрупком разрушении и что

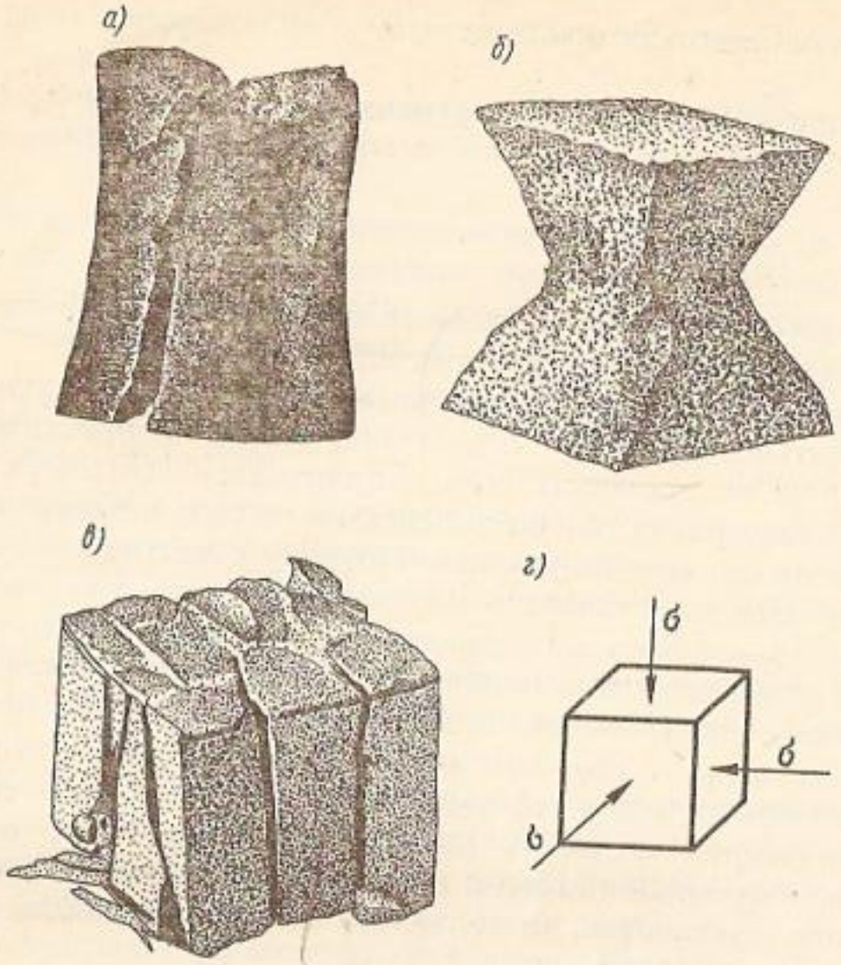


Рис. IX.3

при отсутствии растягивающего главного напряжения разрушение не наступит. Поэтому она не в состоянии объяснить разрушения при всестороннем трехосном (в частности, при одноосном) сжатии (рис. IX.3, *г*).

2. **Вторая теория прочности – теория наибольших растягивающих деформаций (теория Мариотта).**

Критерий равнопрочности по этой теории формулируется так: **напряженные состояния равнопрочны по хрупкому разрушению, если у них равны наибольшие растягивающие деформации,** т. е. если

$$\varepsilon_{экв}^{II} = \varepsilon_1, \tag{IX.6}$$

где $\varepsilon_{экв}^{II}$ – максимальная деформация в эквивалентном напряженном состоянии.

Подставив в равенство (IX.6) выражение ε_1 из (II.14) через напряжения и $\varepsilon_{экв}^{II} = \sigma_{экв}^{II}/E$, получим зависимость (IX.2) по второй теории прочности

$$\sigma_{экв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \tag{IX.7}$$

Основанием для принятия критерия равнопрочности по второй теории может служить то, что:

1. Образцы из хрупких материалов при одноосном сжатии разрушаются по поверхностям, примерно совпадающим с плоскостями, параллельными линиям действия сжимающих сил.

Характер разрушения чугунного образца Лихарева, полученный авторами (рис. IX.3, *а*), показывает, что поверхность разрушения близка к осевой плоскости. Найденные в этом опыте значения $\sigma_{вр} = 135$ МПа, $\sigma_{вс} = 600$ МПа, $\mu = 0{,}23$ хорошо подтверждают вторую теорию, по которой теоретическое значение предела прочности при сжатии

$$\sigma_{вс}^{т} = \sigma_{вр}/\mu = 135/0{,}23 = 580 \text{ МПа},$$

так как отклонение $\sigma_{вс}^{т}$ от $\sigma_{вс}$

$$\Delta = \frac{\sigma_{вс} - \sigma_{вс}^{т}}{\sigma_{вс}^{т}} \cdot 100\,\% = \frac{20}{580} \cdot 100\,\% = 3{,}5\,\%.$$

Разрушение чугунного цилиндрического сплошного образца (рис. II.13, *б*) по поверхности, наклоненной к его оси, примерно, под углом $\alpha = 45°$, объясняется тем, что напряженное состояние в образце за счет существования сил трения на опорных плоскостях не является одноосным.

На рис. IX.3, *б* показано разрушение цементного кубика при сжатии без предварительной смазки опорных плоскостей (силы трения на опорных плоскостях есть), а на рис. IX.3, *в* – его разрушение после смазки опорных плоскостей парафином (силы трения на опорных плоскостях отсутствуют). Из последнего рисунка видно, что при одноосном сжатии разрушение кубика также происходит по поверхностям, примерно, нормальным к направлениям ε_{max}.

2. Разрушение чугунного образца при кручении (рис. IX.3, *б*) происходит по винтовой поверхности с углом подъема $\alpha = 45°$ – по поверхности, нормальной к направлениям ε_1.

3. Кубик, поверхности которого не имеют пор (рис. IX.3, *г*), под действием гидростатического сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$), как показывает опыт, не разрушается при сколь угодно большом значении σ. Это подтверждает вторую теорию, так как растягивающая деформация в этом напряженном состоянии отсутствует ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -(1 - 2\mu)\sigma < 0$).

При наличии в элементе, изготовленном из хрупкого однородного материала, источника концентрации напряжений компоненты напряженного состояния, через которые выражаются главные на-

пряжения, входящие в формулы (IX.15) и (IX.16), должны определяться по формулам

$$\sigma = \sigma_н \cdot \alpha_\sigma \text{ и } \tau = \tau_н \cdot \alpha_\tau, \qquad \text{(IX.8)}$$

где $\sigma_н$ и $\tau_н$ – номинальные значения нормального и касательного компонентов в опасной точке элемента; α_σ и α_τ – теоретические коэффициенты концентрации, найденные в предположении, что в опасной точке действуют только нормальные или только касательные напряжения соответственно.

3. Как уже говорилось, чтобы оценить применимость любой теории прочности, надо сравнить условие равнопрочности напряженных состояний по этой теории с данными опыта. Проведем это сравнение для условий равнопрочности по первой и второй теории.

Предельной, по данной теории, в двухосном напряженном состоянии назовем линию, уравнение которой

$$\sigma^i_{экв} = \sigma^i_{экв}[\sigma_1, \sigma_2(\sigma_3)],$$

где обозначение $\sigma_2(\sigma_3)$ следует читать как второе или третье главные напряжения.

Уравнение предельной линии по первой теории будет таким:

$$\sigma_1 = \sigma_{вр}.$$

На рис. IX.4 – это линия AB.

Уравнение предельной линии по второй теории запишется так:

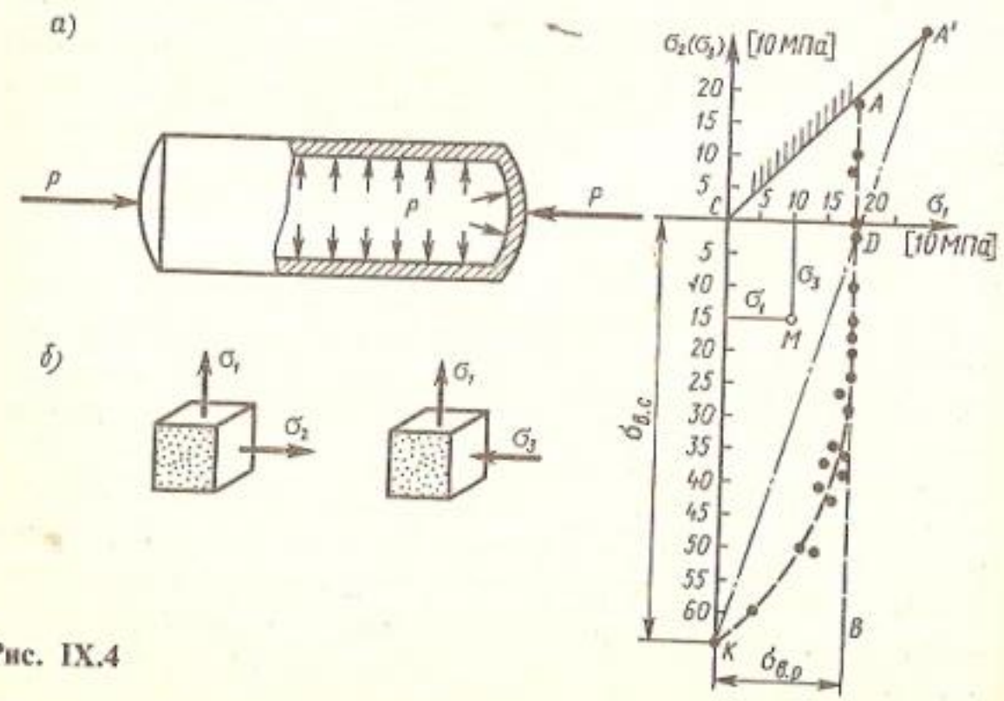


Рис. IX.4

при $\sigma_3 = 0$ $\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_{в.р}$;

при $\sigma_2 = 0$ $\sigma_1 - \mu\sigma_3 = \sigma_{в.р}$.

На рис. IX.4, *г* – это линия $A'K$.

На плоскости σ_1, $\sigma_2(\sigma_3)$ каждому двухосному напряженному состоянию соответствует точка M, координаты которой в выбранном масштабе равны его главным напряжениям.

Если точка, соответствующая данному плоскому напряженному состоянию, лежит внутри области CAB или на AC, то напряженное состояние по первой теории прочно, так как в этом напряженном состоянии

$$\sigma_1 < \sigma_{в.р}.$$

Если эта точка лежит внутри области $CA'K$ или на $A'C$, то оно прочно по второй теории, так как для этого напряженного состояния

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2(\sigma_3) < \sigma_{вр}.$$

В опытах, поставленных на тонкостенных чугунных трубках, подвергавшихся внутреннему давлению и осевому растяжению – сжатию (рис. IX.4, *а*), создавались напряженные состояния отдельных видов, показанных на рис. IX.4, *б*; трубки доводились до разрушения, и точки, соответствующие значениям $\sigma_1^{пр}$, $\sigma_2^{пр}(\sigma_3^{пр})$ (соответствующие совокупностям главных напряжений, при которых происходило разрушение), нанесены на рис. IX.4.

Из рис. IX.4 видно: при $\sigma_1/\sigma_3 > -{}^{19}/_{23}$ наблюдается хорошее совпадение условия равнопрочности по первой теории с опытом, а при $\sigma_1/\sigma_3 < -{}^{19}/_{23}$ расчеты по этой теории дадут значение запаса прочности, большее действительного, что совершенно недопустимо; при $\sigma_3 = 0$ запас прочности, найденный по второй теории, будет больше действительного (недопустимо), а при $\sigma_2 = 0$ меньше действительного (допустимо).

Качественно такие же результаты при плоских напряженных состояниях получены для некоторых других хрупких материалов (стекло, гипс). К сожалению, систематизированных опытных данных по разрушению при трехосных напряженных состояниях нет.

На основании проведенного сравнения можно рекомендовать для расчетов по хрупкому разрушению при напряженных состояниях, в которых $\sigma_3 \geqslant 0$, первую теорию прочности, а при напряженных состояниях, в которых $\sigma_3 > 0$, – вторую.

§ IX.3. Теории пластичности

1. **Третья теория прочности – теория наибольших касательных напряжений (теория Кулона).**

Критерий равнопрочности по этой теории формулируется так: **напряженные состояния равнопрочны по появлению недопустимых пластических деформаций, если у них равны наибольшие касательные напряжения, т. е. если**

$$\tau_{экв}^{III} = \tau_{max}, \tag{IX.9}$$

где $\tau_{экв}^{III}$ – наибольшее касательное напряжение в эквивалентном напряженном состоянии.

Подставив в равенство (IX.9) выражения $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ и $\tau_{экв}^{III} = \sigma_{экв}^{III}/2$ из (VIII.18), получим зависимость (IX.10) по третьей теории прочности

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{IX.10}$$

Основанием для принятия критерия равнопрочности по третьей теории может служить то, что:

1) пластическая деформация поликристаллического растянутого образца начинается в сечениях, наклоненных к его оси под углом $\alpha \cong 45°$ (линии Чернова – Людерса), в которых действуют τ_{max};

2) при гидростатическом сжатии (рис. IX.3, *г*) $\sigma_{экв}^{III} = 0$ и, следовательно, из условия (IX.3) $n \neq \infty$. Как показывает опыт, в этом напряженном состоянии пластическая деформация не наступает при сколь угодно больших значениях σ. Значит, теория совпадает с опытом.

Недостатком третьей теории является то, что она не учитывает влияния на возникновение и развитие пластической деформации нормального напряжения, действующего по площадкам, в которых существует τ_{max}.

2. **Четвертая теория прочности – теория удельной потенциальной энергии формоизменения (теория Мизеса – Генки).**

Критерий равнопрочности по этой теории формулируется так: **напряженные состояния равнопрочны по появлению недопустимых пластических деформаций, если у них равны удельные потенциальные энергии изменения формы,** т. е. если

$$W_{экв}^{IV} = W_ф, \tag{IX.11}$$

где $W_{экв}^{IV}$ – удельная потенциальная энергия изменения формы в эквивалентном напряженном состоянии.

Подставив в (IX.11) выражение (VIII.34) для $W_ф$ и $W_{экв}^{IV} = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_{экв}^{IV})^2$ и учитывая, что $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, получим зависимость (IX.12) по четвертой теории прочности

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \dots + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \tag{IX.12}$$

Основанием для принятия критерия равнопрочности по этой теории может служить то, что при гидростатическом сжатии (рис. IX.3, *г*) $\sigma_{экв}^{IV} = 0$ и по условию (IX.4) $n = \infty$, а это совпадает с данными опыта.

Общим недостатком третьей и четвертой теорий является их пригодность к расчетам только таких тел, материалы которых одинаково работают на растяжение и сжатие ($\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$).

3. Для сравнения теорий пластичности с данными опытов при плоских напряженных состояниях построим на плоскости $\sigma_1(\sigma_2)$, $\sigma_2(\sigma_3)$ (рис. IX.5) предельные линии, уравнения которых

$$\sigma_{экв}^{(i)} = \sigma_{экв}^{(i)}[\sigma_1(\sigma_2), \sigma_2(\sigma_3)] = \sigma_т.$$

По третьей теории, учитывая (IX.10), уравнениями предельных линий являются:

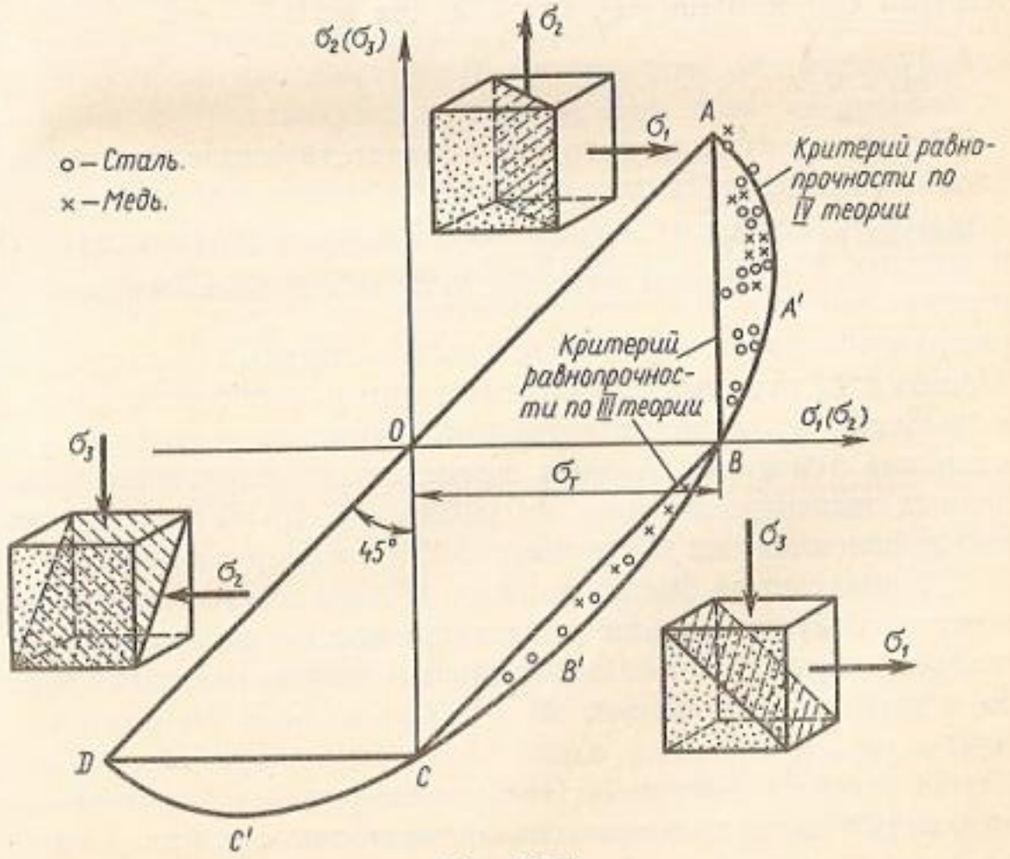


Рис. IX.5

при $\sigma_3 = 0$ $\sigma_1 = \sigma_т$ (прямая AB);

при $\sigma_2 = 0$ $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т$ (прямая BC);

при $\sigma_1 = 0$ $-\sigma_3 = \sigma_т$ (прямая CD).

Напряженное состояние по третьей теории прочно, если соответствующая ему точка M лежит внутри области $ABCD$ или на AD, так как для него

$$\sigma_{экв}^{III} < \sigma_т.$$

На рис. IX.5 изображены двухосные напряженные состояния, которым соответствует точка M при ее расположении в I, II и III четвертях плоскости $\sigma_1(\sigma_2)$, $\sigma_2(\sigma_3)$. На рис. IX.5 площадки, в которых действует τ_{max}, заштрихованы.

По четвертой теории, учитывая выражение (IX.12), уравнениями предельных линий являются:

при $\sigma_3 = 0$ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_т^2$ (дуга эллипса $AA'B$);

при $\sigma_2 = 0$ $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_т^2$ (дуга эллипса $BB'C$);

при $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 = \sigma_т^2$ (дуга эллипса $CC'D$).

Напряженное состояние по четвертой теории прочно, если соответствующая ему точка M лежит внутри области $AA'BB'CC'D$ или на AD, так как для него

$$\sigma_{экв}^{IV} < \sigma_т.$$

Экспериментальные точки, соответствующие значениям главных предельных напряжений при возникновении недопустимых пластических деформаций, полученные на стальных и медных образцах (рис. IX.4, *а*), нанесены на рис. IX.5. Из рисунка видно, что экспериментальные точки, во-первых, располагаются между предельными линиями по третьей и четвертой теории, во-вторых, они расположены ближе к предельной линии по четвертой теории и, в-третьих, отклонение значений главных предельных напряжений, найденных экспериментально, от найденных по четвертой теории в основном не превышает 5%.

Следовательно, запас прочности данного напряженного состояния будет больше запаса прочности, найденного по третьей теории n_{III}, и меньше запаса прочности, найденного по четвертой теории n_{IV}:

$$n_{III} < n < n_{IV}$$

или, как образно выражаются, запас прочности при расчете по третьей и четвертой теориям берется в «вилку».



Рис. IX.6

Еще одну проверку теорий пластичности можно сделать, если, воспользовавшись выражениями (IX.10) и (IX.12), найти зависимость между пределами текучести при чистом сдвиге (рис. IX.6, *б*), в котором $\sigma_1 = \tau_т$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_т$, и при одноосном растяжении по третьей (предел текучести $\tau_т^{III}$) и четвертой (предел текучести $\tau_т^{IV}$) теориям прочности.

Из выражения (IX.10) $\tau_т^{III} = \frac{1}{2}\sigma_т$; из выражения (IX.12)

$$\tau_т^{IV} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_т = 0{,}577\sigma_т \approx 0{,}6\sigma_т.$$

Опыты по определению $\sigma_т$ и $\tau_т$ осуществляются сравнительно просто (см. гл. II и III) и экспериментальные значения $\tau_т$ больше $\tau_т^{III}$ и хорошо совпадают с $\tau_т^{IV}$.

На основании проведенных сравнений третью и четвертую теории прочности можно рекомендовать для расчета на прочность тел из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие при всех напряженных состояниях.

§ IX.4. Пятая теория прочности – теория предельных напряженных состояний (теория Мора)

Допустим, что нам известны главные напряжения нескольких разнотипных предельных напряженных состояний по хрупкому разрушению или по появлению недопустимых пластических деформаций (рис. IX.7, *а*). Построим для каждого из них на одном рисунке определяющую окружность диаграммы напряженного состояния. Проведем к построенным окружностям огибающую, которую назовем предельной. Рисунок будет симметричен относительно оси σ, и поэтому строим только его верхнюю половину (рис. IX.7, *б*).

Критерий равнопрочности по пятой теории формулируется так: **напряженные состояния равнопрочны, если при одновременном пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз их определяющие окружности коснутся предельной огибающей.**

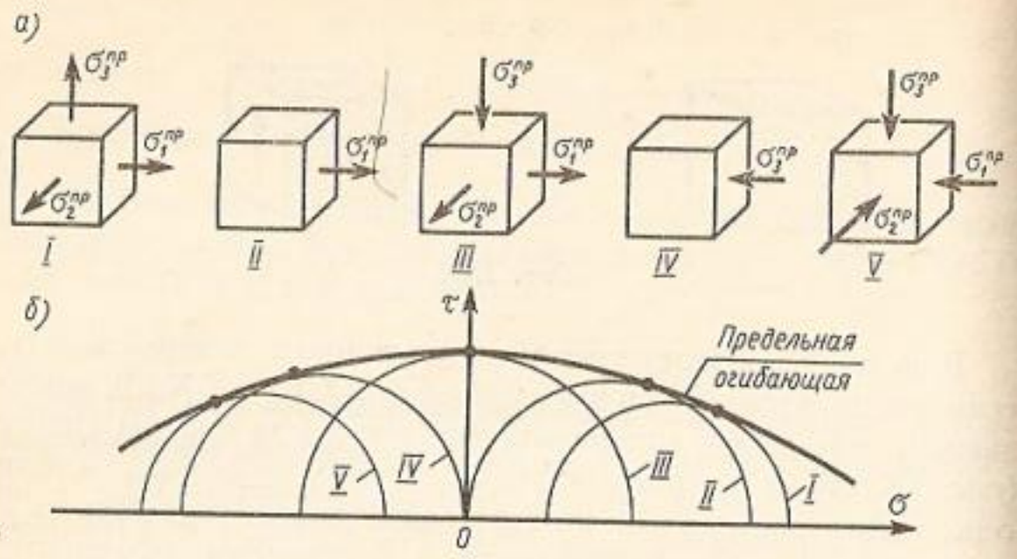


Рис. IX.7

Напряженное состояние (см. рис. IX.1, *а*) будет предельным, если его определяющая окружность коснется предельной огибающей (рис. IX.8) (запас прочности этого напряженного состояния равен единице). Уменьшая пропорционально главные напряжения всех предельных напряженных состояний в одинаковое число раз и повторяя построение, получим семейство огибающих, каждая из которых соответствует определенному запасу прочности (рис. IX.8). Чтобы найти запас прочности данного напряженного состояния, надо наложить его определяющую окружность на это семейство. Например, запас прочности напряженного состояния (см. рис. IX.1, *б*) будет равен 1,5, если определяющая окружность для него касается огибающей, которой соответствует запас прочности 1,5 (рис. IX.8).

Приведенное рассуждение является чисто теоретическим, так как систематизированных опытных данных по разнотипным предельным напряженным состояниям нет. Для построения предельной огибающей мы обычно знаем три предельных характеристики материала: при одноосном растяжении – $\sigma_p^{пр}$, при одноосном сжатии – $\sigma_c^{пр}$ и при чистом сдвиге – $\tau_{пр}$. У хрупких материалов они будут временными сопротивлениями, а у пластичных – пределами текучести.

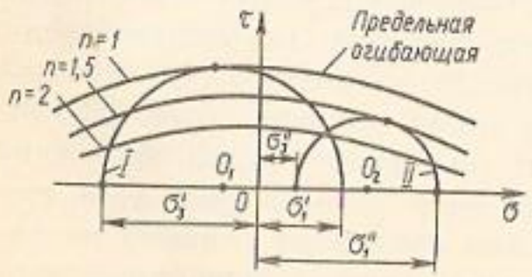


Рис. IX.8

Форма предельной огибающей, построенной по этим характеристикам, показана на рис. IX.9 штриховой линией.

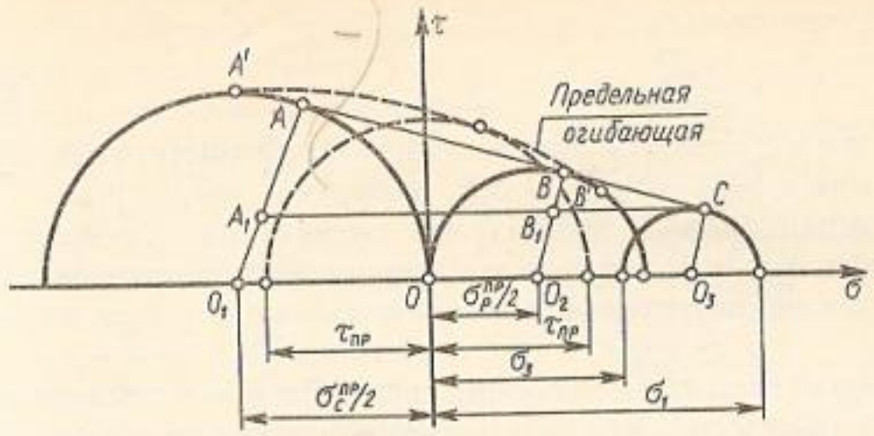


Рис. IX.9

Получить достаточно простую аналитическую зависимость между главными напряжениями данного напряженного состояния и $\sigma_p^{пр}$, $\sigma_c^{пр}$ можно, заменив предельную огибающую касательной AB; такая замена на участке $A'B'$, учитывая, что предельная огибающая всегда обращена выпуклостью вверх, идет в запас прочности (запас прочности, найденный при такой замене, будет меньше действительного). После замены считаем, что напряженное состояние с главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 – предельно, если определяющая окружность для него касается касательной AB (рис. IX.9). Проведя на рис. IX.9 прямую A_1C параллельно оси σ_1 и радиусы O_1A, O_2B, O_3C, найдем

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{A_1C}{B_1C}; \qquad \text{(IX.13)}$$

$$AA_1=\frac{\sigma_c^{пр}}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\quad BB_1=\frac{\sigma_p^{пр}}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},$$

$$A_1C=\frac{\sigma_c^{пр}}{2}+\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},\quad B_1C=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\frac{\sigma_p^{пр}}{2}. \qquad \text{(IX.14)}$$

Подставляя выражения (IX.14) в (IX.13), получим

$$\frac{\sigma_c^{пр}-\sigma_1+\sigma_3}{\sigma_p^{пр}-\sigma_1+\sigma_3}=\frac{\sigma_c^{пр}+\sigma_1+\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3-\sigma_p^{пр}},$$

или после преобразования

$$\sigma_c^{пр}\sigma_1-\sigma_p^{пр}\sigma_3=\sigma_p^{пр}\sigma_c^{пр}.$$

Обозначив через $\nu=\sigma_p^{пр}/\sigma_c^{пр}$, будем иметь

$$\sigma_p^{пр}=\sigma_1-\nu\sigma_3.$$

Для одноосного растяжения опасное состояние наступит при $\sigma_{экв}^{V}=\sigma_p^{пр}$, и поэтому зависимость (IX.2) по пятой тео-

рии запишется так:

$$\sigma^{V}_{экв} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 . \qquad (IX.15)$$

Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие (при $\nu = 1$), то $\sigma^{V}_{экв} = \sigma^{III}_{экв}$.

Пятая теория пригодна для расчета на прочность как хрупких, так и пластичных материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, что является ее достоинством.

Недостатки пятой теории: теория не учитывает влияния на прочность σ_2 – второго главного напряжения; выражение (IX.15) можно использовать при расчете на прочность только напряженных состояний, имеющих отношение $\sigma_1/\sigma_3 < 0$, потому что в результате замены предельной огибающей касательной AB для напряженных состояний, у которых $\sigma_1/\sigma_3 > 0$, запас прочности, найденный по (IX.15), будет больше действительного (рис. IX.9), что недопустимо.

§ IX.5. Расчеты стержневых систем, основанные на теориях прочности

Расчет на прочность элементов систем, в поперечных сечениях которых силы упругости в общем случае приводятся к шести внутренним силовым факторам, проводится по выбранной, согласно сделанным рекомендациям, теории прочности в следующем порядке:

1. На системе строятся эпюры всех внутренних силовых факторов и по ним находятся возможно опасные сечения. При прямолинейных очертаниях эпюр на участке и сечении, имеющем ось симметрии, за возможно опасные принимаются сечения, в которых один из внутренних силовых факторов достигает наибольшего значения. Расчет должен проводиться по всем возможно опасным сечениям. Если очертания эпюр на участке криволинейны, то опасным будет сечение, в точках которого $\sigma_{экв}$ имеет наибольшее значение.

2. В возможно опасном сечении строятся эпюры распределения нормальных и касательных напряжений от каждого действующего в нем внутреннего силового фактора.

3. На основании совместного рассмотрения этих эпюр устанавливаются возможно опасные точки. Из расчета по каждой возможно опасной точке определяется либо размер поперечного сечения (проектировочный расчет), либо запас прочности (поверочный расчет).

4. При проектировочном расчете в качестве безопасного принимается наибольший из всех найденных размеров поперечного сечения, а при поверочном расчете в качестве запаса прочности системы принимается наименьший из всех найденных запасов прочности.

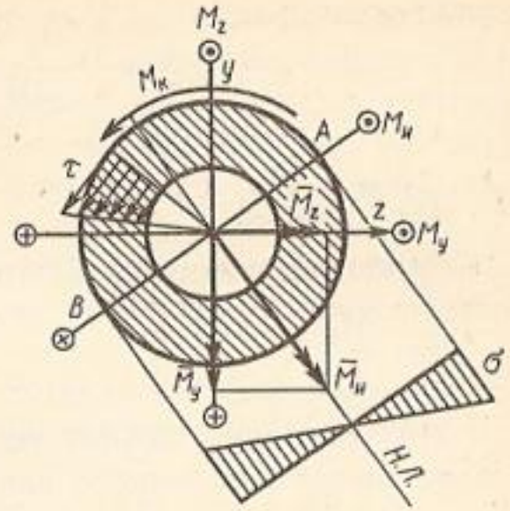


Рис. IX.10

Получим для бруса выражения $\sigma_{экв}$ по классическим теориям прочности через компоненты напряженного состояния в его поперечном сечении. Подставив σ_1, σ_2, σ_3 из (VIII.20) в выражения (IX.7), (IX.10), (IX.15) и положив в (IX.12) $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, найдем:

$$\sigma^{II}_{экв} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \qquad (IX.16)$$

$$\sigma^{III}_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \qquad (IX.17)$$

$$\sigma^{IV}_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \qquad (IX.18)$$

$$\sigma^{V}_{экв} = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (IX.19)$$

В расчете на прочность нетонкостенных участков рам, если все они длинные, а величины приложенных к рамам сил одного порядка, напряжения от Q_y, Q_z и N не учитываются, как малые по сравнению с напряжениями от M_z, M_y и M_k. Этот расчет можно назвать расчетом бруса на совместное действие изгиба и кручения.

Рассмотрим расчет бруса кольцевого сечения на совместное действие изгиба и кручения (расчет по эквивалентному моменту). Такой брус не испытывает косого изгиба, поэтому (см. § V.7) уравнение нормальных напряжений в его поперечном сечении запишется в виде

$$\sigma = \frac{M_и}{I_z} u, \qquad (IX.20)$$

где $M_и = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ – изгибающий момент в сечении; u – расстояние от нейтральной линии, перпендикулярной силовой линии, до точки сечения, в которой определяется σ. По уравнению (IX.20) на рис. IX.10 построен эпюр σ. Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \sigma_A = |\sigma_B| = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z}, \qquad \text{(IX.21)}$$

где

$$W_z \cong 0{,}1d^3(1-c^4).$$

Запишем уравнение касательного напряжения в сечении

$$\tau = \frac{M_k}{I_p}\rho. \qquad \text{(IX.22)}$$

По уравнению (IX.22) на рис. IX.10 построен эпюр τ. Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{max} = \tau_A = \tau_B = \frac{M_k}{W_k},$$

где

$$W_k \cong 0{,}2d^3(1-c^4).$$

Из сопоставления σ и τ вытекает, что σ и τ достигают наибольших по абсолютной величине значений в точках A и B, лежащих на наружном контуре сечения. Из формул (IX.16) и (IX.19) следует, что опасной будет точка A, а из формул (IX.17) и (IX.18) – что опасными и равноопасными будут точки A и B. Подставляя в эти формулы выражения σ_A и τ_A из (IX.21) и (IX.22) и учитывая, что $W_к = 2W_z$, на основании (IX.14) получим условие прочности проектировочного расчета

$$\sigma_{экв}^{(i)} = \frac{M_{экв}^{(i)}}{0{,}1d^3(1-c^4)} \leqslant [\sigma], \quad \text{из которого}$$

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{10M_{экв}^{(i)}}{(1-c^4)[\sigma]}}, \qquad \text{(IX.23)}$$

где d_i – наружный диаметр сечения, найденный по i-й теории прочности; $M_{экв}^{(i)}$ – эквивалентный момент по i-й теории прочности, причем:

$$M_{экв}^{II} = \frac{1-\mu}{2}\sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \qquad \text{(IX.24)}$$

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \qquad \text{(IX.25)}$$

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0{,}75M_k^2}, \qquad \text{(IX.26)}$$

$$M_{экв}^{V} = \frac{1-\nu}{2}\sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}. \qquad \text{(IX.27)}$$

Из формулы (IX.23) следует, что опасным является сечение бруса с наибольшим $M_{экв}^{(i)}$. В свою очередь, можно доказать, что $M_{экв}^{(i)}$ будет наибольшим в одном из тех сечений, в котором будет наибольшим или M_z, или M_y, или $M_к$.

Расчет по эквивалентному моменту ведется в следующем порядке:

1) выписываются значения M_z, M_y и $M_к$ в тех сечениях бруса, в которых один из них наибольший (в возможно опасных сечениях);

2) в каждом возможно опасном сечении определяется $M_{экв}^{i}$ и в качестве расчетного принимается большее из полученных значений;

3) по формуле (IX.23) находится d_i.

По эквивалентному моменту можно рассчитывать только брус кольцевого сечения, так как в таком сечении напряжения в опасной точке всегда определяются по формулам (IX.20) и (IX.22) и $W_к = 2W_z$.

Пример IX.1. Определить размеры поперечных сечений пространственной рамы (рис. IX.11, *а*), считая их на участке *3–4* кольцом с $c = d_1/d = 0{,}7$, а на участке *4–5* – прямоугольником с $h/b = 2$; материал рамы пластичен: $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$.

1. Строим эпюры внутренних силовых факторов.

На горизонтальных участках рамы ось z располагаем в горизонтальной плоскости, а на ее вертикальных участках расположение осей z и y произвольно. При определении значений внутренних силовых факторов руководствуемся правилами § I.10. Обычно эпюры Q_y, Q_z и N строятся на одном рисунке, а M_z, M_y и $M_к$ – на другом.

Находим значения Q_y, Q_z и N на участках:

$$Q_y^{1-2} = 2P,\ Q_y^{2-3} = 0,\ Q_y^{3-4} = 2P,\ Q_y^{4-5} = 2P;$$

$$Q_z^{1-2} = P,\ Q_z^{2-3} = P,\ Q_z^{3-4} = 0,\ Q_z^{4-5} = P;$$

с учетом принятого ранее правила знаков для N

$$N_{1-2} = 0,\ N_{2-3} = 2P,\ N_{3-4} = P,\ N_{4-5} = 0.$$

Ординаты Q_y и Q_z откладываются по осям y и z участка в направлении внешних сил, от которых Q_y и Q_z возникают, если построение идет в направлении оси x, и наоборот. Ординаты N откладываются в произвольной плоскости, проходящей через ось участка с указанием на эпюре знака N. Эпюры Q_y, Q_z и N построены на рис. IX.11, *б*.

Находим значения M_z и M_y в граничных сечениях участков, помня, что момент силы относительно оси равен нулю, если ее линия действия параллельна этой оси или с ней пересекается. Имеем: $M_z^{(1)} = 0$, $M_z^{(2)} = Pl$, $M_z^{2-3} = 2Pl$ (линия действия силы $2P$ параллельна оси участка *2–3*), $M_z^{(3)} = Pl$, $M_z^{(4)} = 2Pl - Pl = Pl$ (в сечении *4* M_z от силы $2P$ дает сжатое волокно внизу, а от силы P вверху);

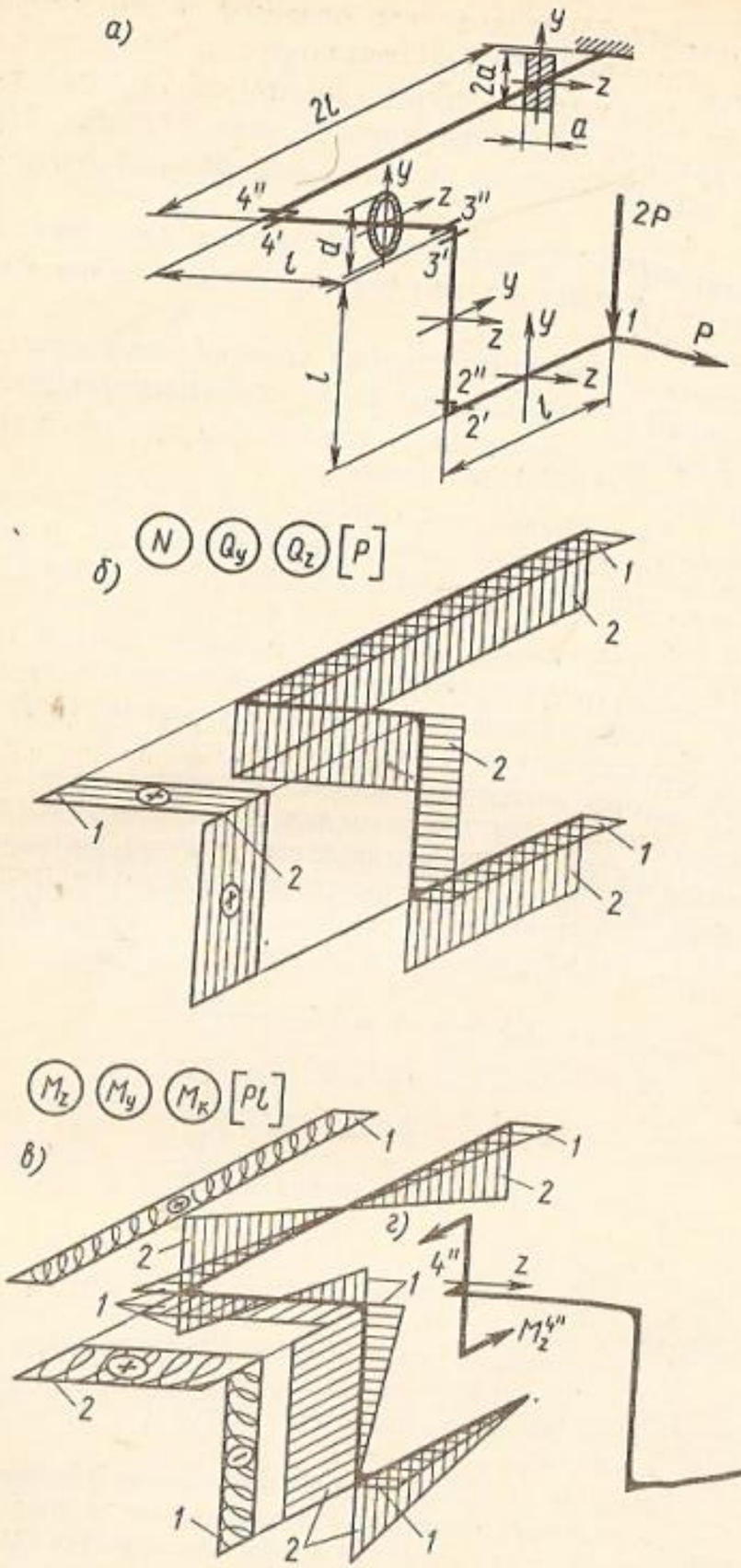


Рис. IX.11

из условия равновесия отсеченной части рамы (рис. IX.11, *г*) видно, что $M_z^{(4'')} = 2Pl$ дает сжатое волокно вверху; $M_z^{(5)} = 2Pl$;

$$M_y^{(1)} = 0,\ M_y^{(2')} = Pl,\ M_y^{(2'')} = 0,\ M_y^{3-4} = Pl,\ M_y^{(4'')} = M_y^{(5)} = Pl.$$

Ординаты M_z и M_y откладываются по осям y и z участка на его сжатых волокнах. Так как распределенных нагрузок на участках рамы нет, очертания M_z и M_y на них прямолинейны. Эпюры M_z и M_y построены на рис. IX.11, *в*.

Определяем значения $M_к$ на участках, учитывая ранее принятое для него правило знаков:

$$M_к^{1-2} = 0,\ M_к^{2-3} = -Pl,\ M_к^{3-4} = 2Pl,\ M_к^{4-5} = Pl.$$

Ординаты $M_к$ откладываются в произвольной плоскости, проходящей через ось участка с указанием на эпюре знака $M_к$. Эпюр $M_к$ построен на рис. IX.11, *в*.

2. Из расчета по эквивалентному моменту определяем размер сечения d на участке $3-4$. На этом участке (см. рис. IX.11, *в*) M_z, M_y и $M_к$ достигают наибольших значений, соответственно равных по абсолютной величине, в сечениях $3''$ и $4'$, и поэтому они будут опасными и равноопасными. В сечениях $3''$ и $4'$

$$M_z = M_y = Pl,\ M_к = 2Pl.$$

Так как материал участка пластичен и одинаково работает на растяжение-сжатие, расчет следует вести по третьей или четвертой теории прочности. По формуле (IX.25)

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{1 + 1 + 4}\,Pl = \sqrt{6}\,Pl,$$

по формуле (IX.26)

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{1 + 1 + 3}\,Pl = \sqrt{5}\,Pl,$$

по формуле (IX.23)

$$d_{III} \geqslant \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{6}\,Pl}{(1 - 0{,}24)[\sigma]}} = 3{,}18\sqrt[3]{\frac{Pl}{[\sigma]}},$$

$$d_{IV} \geqslant \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{5}\,Pl}{(1 - 0{,}24)[\sigma]}} = 3{,}09\sqrt[3]{\frac{Pl}{[\sigma]}}.$$

Отношение $d_{III}/d_{IV} = 1{,}03$, т. е. d_{III} больше d_{IV} на 3%, что практически несущественно.

3. Находим размер a прямоугольного сечения на участке $4-5$. Опасными и равноопасными на этом участке будут сечения $4''$ и $5''$, в которых

$$M_z = 2Pl,\ M_y = Pl,\ M_к = Pl.$$

Изображаем опасное сечение (рис. IX.12), направления M_z, M_y и $M_к$, в котором, если материал участка одинаково работает на растяжение-сжатие, при расчете на совместное действие изгиба и кручения, не имеют значения. Выписываем (см. § V.17) в общем виде уравнение нормальных напряжений при косом изгибе:

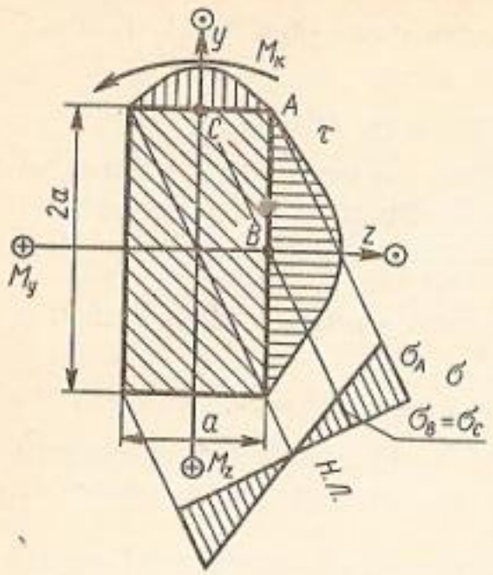


Рис. IX.12

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \qquad \text{(IX.28)}$$

Для прямоугольного сечения:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3} a^4,$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{1}{6} a^4.$$

Следовательно, уравнение нормальных напряжений в опасном сечении будет таким:

$$\sigma = \frac{3Pl}{a^4}(y + 2z). \qquad \text{(IX.29)}$$

Запишем уравнение нейтральной линии в этом сечении

$$y = -2z. \qquad \text{(IX.30)}$$

По уравнениям (IX.28) и (IX.29) на рис. IX.12 построен эпюр σ. На рис. IX.12 построен также (см. § III.10) эпюр τ от кручения.

Из совместного рассмотрения σ и τ заключаем, что расчет прямоугольного сечения следует проводить по трем возможно опасным точкам: точке A (на том основании, что $\sigma_A = \sigma_{max}$); точке B (на том основании, что $\tau_B = \tau_{max}$); точке C (на том основании, что $\tau_C = \gamma\tau_{max}$ достигает наибольшего значения посредине короткой стороны).

Расчет участка $4-5$ проводим по третьей теории прочности. Определяем размер a из расчета по точке A:

$y_A = a$, $z_A = \frac{a}{2}$, из уравнения (IX.29) $\sigma_A = \frac{6Pl}{a^3}$, $\tau_A = 0$.

Подставив σ_A и τ_A в выражение (IX.17) на основании условия (IX.4), получим

$$\sigma^A_{экв} = \frac{6Pl}{a^3} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$a \geqslant \sqrt[3]{\frac{6Pl}{[\sigma]}}.$$

Определяем размер a из расчета по точке B:

$y_B = 0$, $z_B = a/2$, из уравнения (IX.29) $\sigma_B = \frac{3Pl}{a^3}$;

по (III.13) $\tau_B = \tau_{max} = M_k / W_k$, по (III.45) $W_k = \alpha b^2 h$, из табл. 3 $\alpha = 0{,}246 \approx 0{,}25$;

$\tau_B = Pl/(0{,}5a^3) = 2Pl/a^3$;

подставив σ_B и τ_B в выражении (IX.17) на основании условия (IX.4), получим

$$\sigma^B_{экв} = \frac{Pl}{a^3}\sqrt{9 + 4 \cdot 4} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$a \geqslant \sqrt[3]{\frac{5Pl}{[\sigma]}}.$$

В нашем случае расчет по точке C проводить не надо, так как $\sigma_C = \sigma_B$, а $\tau_C < \tau_B$. Но если бы нейтральная линия прошла положе, такой расчет был бы необходим.

Принимаем в качестве безопасного

$$a = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{[\sigma]}}.$$

Пример IX.2. Определить запас прочности стержня (рис. IX.13, *а*) тонкостенного замкнутого сечения (рис. IX.13) с учетом и без учета напряжений от Q_y, Q_z и N. Материал бруса пластичен:

$\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$.

1. Находим значения внутренних силовых факторов в опасном сечении бруса:

$N = 4P$, $Q_y = 2P$, $Q_z = P$, $M_z = 20Pa$, $M_y = 10Pa$, $M_к = 10Pa$.

2. Строим эпюры напряжений от всех внутренних силовых факторов, действующих в опасном сечении бруса. При построении

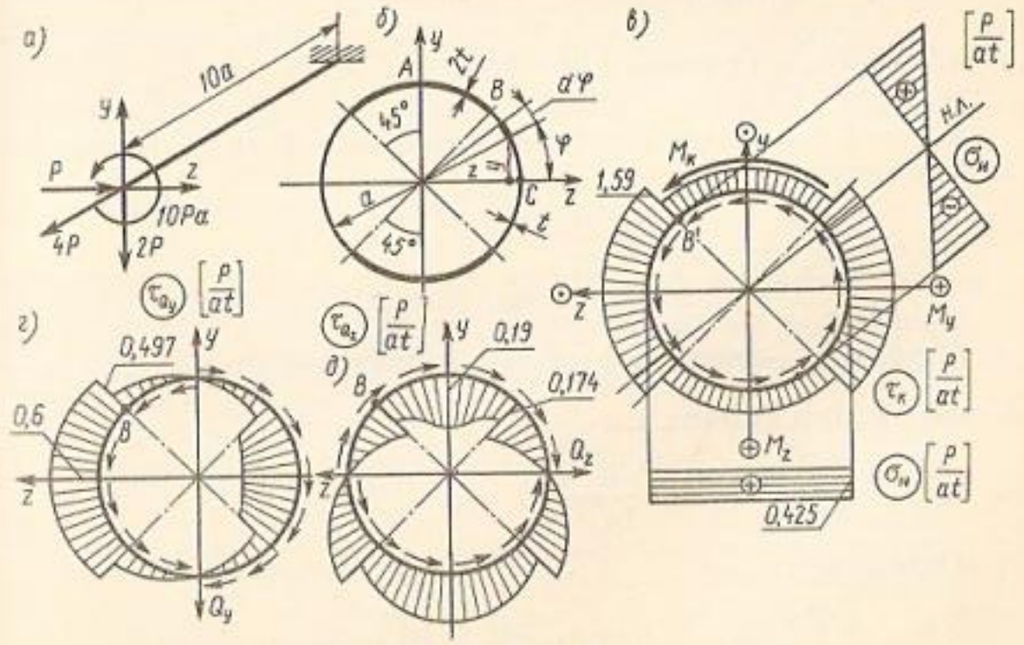


Рис. IX.13

эпюр напряжений необходимо учитывать направления сил упругости в поперечном сечении, равнодействующими которых являются внутренние силовые факторы. Направление каждого внутреннего силового фактора можно считать совпадающим с направлениями внешней силы или момента, от которых он возникает.

Строим $\sigma_и$ – эпюр нормальных напряжений от изгиба. Составляем уравнение нормальных напряжений при косом изгибе, направив оси z и y таким образом, чтобы в первой четверти напряжения от M_z и M_y были положительными. Моменты инерции I_z и I_y определяем, пользуясь рис. IX.24, *б*:

$$I_z^{BC} = a^3 t \int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi d\varphi = a^3 t \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right|_0^{\pi/4} = 0{,}143 a^3 t,$$

$$I_y^{BC} = a^3 t \int_0^{\pi/4} \cos^2\varphi d\varphi = a^3 t \left| \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right|_0^{\pi/4} = 0{,}645 a^3 t,$$

$$I_z = 4(2I_y^{BC} + I_z^{BC}) = 4a^3 t(2\cdot 0{,}645 + 0{,}143) = 5{,}72 a^3 t,$$

$$I_y = 4(I_y{}^{BC} + 2I_z^{BC}) = 4a^3 t(0{,}645 + 2\cdot 0{,}143) = 3{,}72 a^3 t.$$

Подставив выражения M_z, M_y, I_z, I_y в уравнение (IX.28), получим уравнение нормальных напряжений от изгиба в опасном сечении:

$$\sigma_и = \frac{P}{at}\left(3{,}5\frac{y}{a} + 2{,}7\frac{z}{a}\right). \qquad \text{(IX.31)}$$

Находим уравнение нейтральной линии:

$$y = -0{,}77z. \qquad \text{(IX.32)}$$

По уравнениям (IX.31) и (IX.32) на рис. IX.13, *в* построен $\sigma_и$.

Строим $\tau_к$ – эпюр касательных напряжений от кручения. Находим, пользуясь (III.34):

$$\tau_к^{BC} = \frac{10Pa}{2\pi a^2 t} = 1{,}59\frac{P}{at},\quad \tau_к^{AB} = 0{,}795\frac{P}{at}.$$

Строим σ_N – эпюр нормальных напряжений от N. Пользуясь (II.5), находим

$$\sigma_N = \frac{4P}{\pi a(2t+t)} = 0{,}425\frac{P}{at}.$$

Эпюры $\tau_к$ и σ_N построены на рис. IX.13, *б*.

Строим τ_{Q_y} – эпюр касательных напряжений от Q_y. По уравнениям (V.33) и (V.34):

$$\tau_{Q_y}^B = \frac{Q_y S_z^{AB}}{I_z t},\quad \tau_{Q_y}^C = \frac{Q_y S_z^{AC}}{I_z t}.$$

Определяем:

$$S_z{}^{BC} = a^2 t \int_0^{\pi/4} \sin\varphi d\varphi = 0{,}29 a^2 t,\quad S_y^{BC} = a^2 t \int_0^{\pi/4} \cos\varphi d\varphi = 0{,}71 a^2 t,$$

$$S_z^{AB} = 2S_y^{BC} = 1{,}42 a^2 t,\quad S_z^{AC} = S_z^{AB} + S_z^{BC} = 1{,}71 a^2 t,$$

$$\tau_{Q_y}^B = \frac{2P\cdot 1{,}42 a^2 t}{5{,}72 a^3\cdot t\cdot t} = 0{,}497\frac{P}{at},$$

$$\tau_{Q_y}^C = \frac{2P\cdot 1{,}71 a^2 t}{5{,}72 a^3\cdot t\cdot t} = 0{,}6\frac{P}{at}.$$

Эпюр τ_{Q_y} построен на рис. IX.13, *д*.

Строим τ_{Q_z} – эпюр касательных напряжений от Q_z. По уравнению (V.32):

$$\tau_{Q_z}^B = \frac{Q_z S_y^{BC}}{I_y t},\quad \tau_{Q_z}^A = \frac{Q_z S_y^{AC}}{I_y 2t}.$$

Определяем:

$$S_y^{AC} = S_y^{BC} + 2S_z^{BC} = 1{,}29 a^2 t;$$

$$\tau_{Q_z}^B = \frac{P\cdot 0{,}71 a^2 t}{3{,}72\cdot a^3 t\cdot t} = 0{,}19\frac{P}{at};$$

$$\tau_{Q_z}^A = \frac{P\cdot 1{,}29 a^2 t}{3{,}72 a^3 t\cdot 2t} = 0{,}174\frac{P}{at}.$$

Эпюр τ_{Q_z} построен на рис. IX.13, *д*.

3. Находим запас прочности стержня с учетом напряжений от Q_y, Q_z и N. Запас прочности должен определяться по всем точкам сечения, в которых одно из напряжений достигает наибольшего значения (возможно опасным). Находим запас прочности из расчета по точке B, воспользовавшись 4-й теорией. Определяем:

$$\sigma_B = \sigma_и^B + \sigma_N^B;\ y_B = z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

из уравнения (IX.31)

$$\sigma_и^B = \frac{\sqrt{2}P}{2at}(3{,}5 + 2{,}7) = 4{,}37\frac{P}{at},$$

$$\sigma_B = (4{,}37 + 0{,}425)\frac{P}{at} = 4{,}8\frac{P}{at},$$

$$\tau_B = \tau_к^B + \tau_{Q_y}^B - \tau_{Q_z}^B = (1{,}59 + 0{,}497 - 0{,}19)\frac{P}{at} = 1{,}9\frac{P}{at}.$$

Подставив найденные значения σ_A и τ_A в выражение (IX.18), получим

$$\sigma_{экв}^B = \sqrt{(4{,}37)^2 + 3(1{,}9)^2}\,\frac{P}{at} = 5{,}82\frac{P}{at}.$$

На основании условия (IX.3)

$$n_B = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв}^B} = \frac{\sigma_т at}{5{,}82P} = 0{,}172\frac{\sigma_т at}{P}.$$

По такой же схеме находятся запасы прочности в остальных возможно опасных точках.

4. Определяем запас прочности стержня по точке B без учета напряжений от Q_y, Q_z и N.

Находим:

$$\sigma_{и}^{B} = 4{,}37\frac{P}{at},\quad \tau_{к}^{B} = 1{,}59\frac{P}{at},$$

$$\sigma_{экв}^{B} = \sqrt{(4{,}37)^2 + 3(1{,}59)^2}\,\frac{P}{at} = 5{,}17\,\frac{P}{at},$$

$$n'_B = \frac{\sigma_т at}{5{,}17P} = 0{,}193\,\frac{\sigma_т at}{P}.$$

Отклонение

$$\Delta = \frac{n'_B - n_B}{n_B}\cdot 100\% = 12{,}2\%.$$

Следовательно, расчет бруса тонкостенного сечения следует проводить с учетом напряжений от Q_y, Q_z и N.

Пример IX.3. В схеме нагружения сечения стержня (рис. IX.14) определить допускаемое значение силы $[P]$. Материал стержня неодинаково работает на растяжение-сжатие: $\nu = \sigma_{вр}/\sigma_{вс} = 1/3$.

1. Строим эпюры распределения напряжений по сечению. Для этого по (V.59) находим

$$\sigma = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_p}{i_z^2}\,y\right);$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4}(1-c^2) = \frac{\pi d^2}{4}(1-0{,}49) = 0{,}4d^2;$$

$$y_p = d/2;$$

$$I_z \cong 0{,}05d^4(1-c^4) = 0{,}05d^4(1-0{,}24) = 0{,}038d^4;$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{F} = 0{,}095d^2;$$

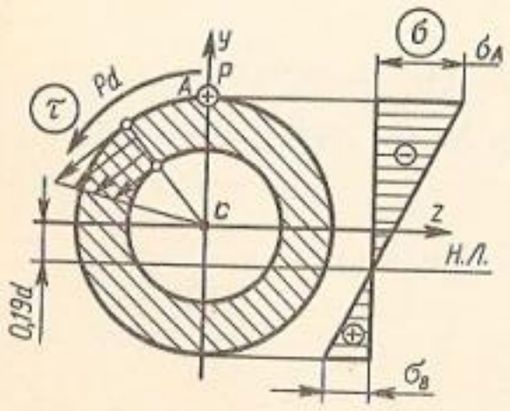


Рис. IX.14

$$\sigma = -2{,}5\,\frac{P}{d^2}\left(1 + 5{,}26\,\frac{y}{d}\right);$$

$$\sigma_A = [\sigma]_{y=d/2} = -9{,}1\,\frac{P}{d^2},$$

$$\sigma_B = [\sigma]_{y=-d/2} = 4{,}1\,\frac{P}{d^2}.$$

Найдя уравнение нейтральной линии

$$y = -0{,}19d,$$

строим эпюр σ.

Построив эпюр τ, определяем касательные напряжения в точках A и B:

$$\tau_A = \tau_B = \tau_{max} = \frac{M_к}{W_к} = \frac{Pd}{0{,}2d^3(1-0{,}24)} = 6{,}58\,\frac{P}{d^2}.$$

2. Так как материал бруса неодинаково работает на растяжение и сжатие, для расчета воспользуемся пятой теорией прочности. Опасной может оказаться как точка A, так и точка B. Подставив σ_A и τ_A в выражение (IX.19), получим

$$\sigma_{экв}^{A} = \frac{P}{d^2}\left(-\frac{1-{}^1/_3}{2}\,9{,}1 + \frac{1+{}^1/_3}{2}\,\sqrt{9{,}1^2 + 4\cdot 6{,}58^2}\right) = 7{,}67\,\frac{P}{d^2}.$$

Подставив σ_B и τ_B в (IX.19), получим

$$\sigma_{экв}^{B} = \frac{P}{d^2}\left(\frac{1-{}^1/_3}{2}\,4{,}1 + \frac{1+{}^1/_3}{2}\,\sqrt{4{,}1^2 + 4\cdot 6{,}58^2}\right) = 10{,}6\,\frac{P}{d^2}.$$

Хотя $|\sigma_A| > \sigma_B$, а $\tau_A = \tau_B$, за счет того, что материал неодинаково работает на растяжение и сжатие, опасной оказалась точка B.

Составляем уравнение прочности:

$$\sigma_{экв}^{B} = 10{,}6\,\frac{[P]}{d^2} = [\sigma]_p,\ \text{из которого}$$

$$[P] = 0{,}094[\sigma]_p d^2.$$

Глава X. РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

§ X.1. Геометрия тонкостенной оболочки и предположения, принимаемые при ее расчете

Будем говорить, что тело симметрично относительно оси, если любая плоскость, проходящая через эту ось (осевая плоскость), является плоскостью его силовой и геометрической симметрии.

Обычно оболочка задается своей срединной поверхностью. Оболочка, срединная поверхность которой является поверхностью вращения, называется оболочкой вращения. Рассмотрим такую оболочку (рис. X.1, *а*). Назовем: осью оболочки – ось поверхности вращения; меридиональным сечением – сечение оболочки осевой плоскостью; окружным (коническим) сечением – сечение оболочки конической поверхностью, нормальной к ее срединной поверхности, вершина которой лежит на оси; меридианом – линию пересечения срединной поверхности с осевой плоскостью; параллелью – линию пересечения срединной поверхности с названной выше конической поверхностью.

Обозначим: ρ_m – радиус кривизны меридиана (рис. X.1, *б*); ρ_t – отрезок нормали к срединной поверхности, заключенной между срединной поверхностью и осью оболочки; O_1 – центр кривизны меридиана; O_2 – центр кривизны окружного сечения, лежащий на оси оболочки; t – толщину

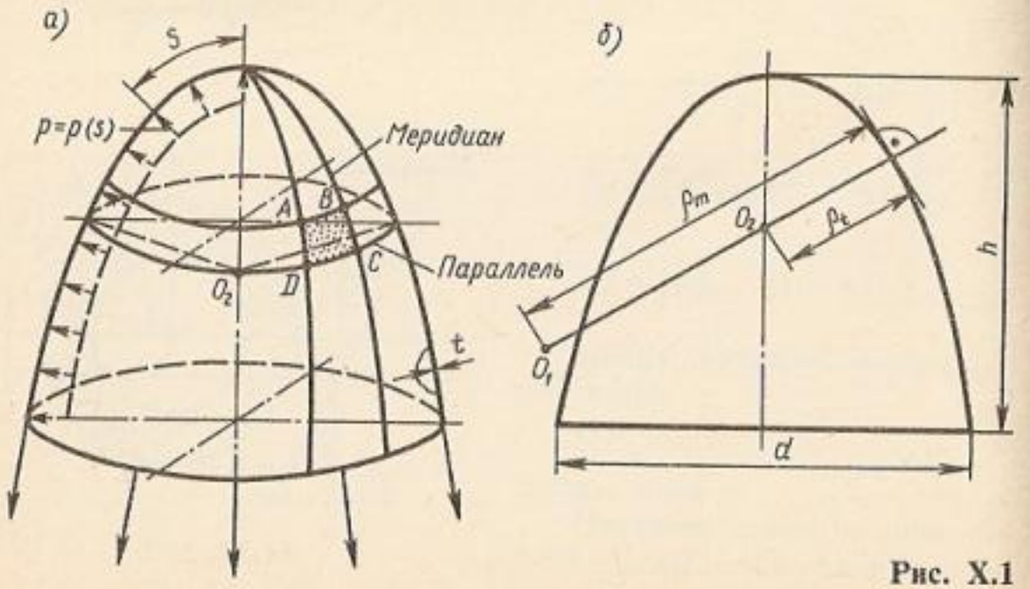


Рис. X.1

оболочки; $p = p(S)$ – давление, которое должно изменяться только в направлении меридиана, чтобы оболочка была осесимметричной; S – координата, отсчитываемая в направлении меридиана. Радиус ρ_m и отрезок ρ_t являются главными радиусами кривизны срединной поверхности в данной точке.

Предполагаем, что:

1) оболочка тонкостенная, т. е. $\rho_{min}/t \geqslant 20$, где ρ_{min} – наименьший из главных радиусов кривизны;

2) давление изменяется в направлении меридиана достаточно плавно, в частности к оболочке не прикладываются сосредоточенные силы;

3) меридиан не имеет резких изменений кривизны, в частности, изломов;

4) опорные устройства оболочки таковы, что реактивные силы направлены по касательной к меридиану;

5) оболочка непологая, т. е. (рис. X.1, *б*) $\frac{h}{d} \geqslant 0{,}15$.

§ X.2. Вывод формулы Лапласа

Двумя бесконечно близкими меридиональными и двумя бесконечно близкими окружными сечениями вырезаем из оболочки элемент $ABCD$ и рассматриваем его равновесие (рис. X.2). Если принятые предположения выполняются, то нормальные напряжения, действующие по граням элемента, можно считать распределенными по толщине равномерно. Состояние оболочки, при котором напряжения распределяются по ее толщине равномерно, называется безмоментным, а теория расчета такой оболочки – безмоментной. Обозначим: σ_m – меридиональное напряжение; σ_t – окружное напряжение.

В силу осевой симметрии касательные напряжения по граням элемента, совпадающим с меридиональными сечениями, равны нулю, следовательно, по свойству парности

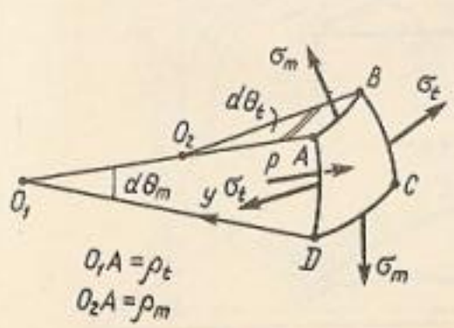


Рис. X.2

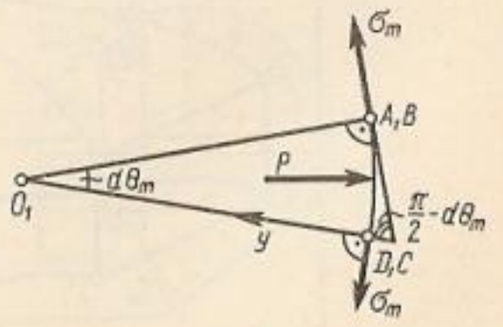


Рис. X.3

касательных напряжений они равны нулю и по граням, совпадающим с окружными сечениями.

Для малых углов

$$\sin d\theta_m = d\theta_m,\ \sin d\theta_t = d\theta_t,$$

Найдем проекцию сил, действующих на элемент, на ось y. Проделаем эту операцию поочередно. Из рис. X.3 проекция сил, действующих по граням AB и CD, равна

$$-\sigma_m t \rho_t d\theta_t \cos\left(\frac{\pi}{2} - d\theta_m\right) = \sigma_m \rho_t t d\theta_t d\theta_m. \qquad (X.1)$$

По аналогии, проекция сил, действующих по граням AB и CD, равна

$$-\sigma_t \rho_m t d\theta_m d\theta_t. \qquad (X.2)$$

Проекция сил давления, распределенных по поверхности элемента, равна

$$p\rho_t \rho_t d\theta_t d\theta_m. \qquad (X.3)$$

Складывая (X.1), (X.2), (X.3) и приравнивая нулю, получим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \qquad (X.4)$$

Формулу (X.4) называют уравнением Лапласа.

В практическом расчете σ_m определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, а σ_t из уравнения Лапласа после подстановки в него найденного значения σ_m.

Докажем теорему о проекции сил давления, равномерно распределенных по поверхности, на ось (рис. X.4). Обозначим: S – данная поверхность; dS – элемент поверхности S; y – ось, на которую надо найти проекцию сил давления;

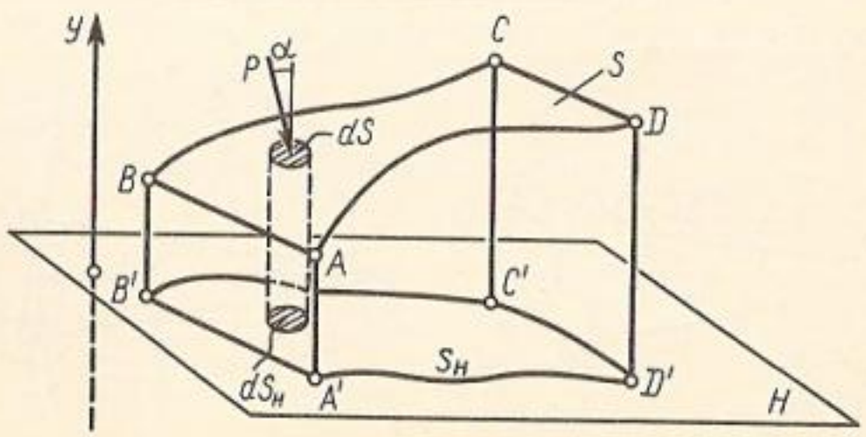


Рис. X.4

H – плоскость, перпендикулярная оси y; S_H – проекция S на H, где $dS_H = dS\cos\alpha$ – проекция dS на H; P_y – проекция сил давления на ось y.

Проекция сил давления

$$P_y = \iint_S p\cos\alpha dS = p\iint_{S_H} dS_H,$$

или

$$P_y = pS_H. \qquad (X.5)$$

Проекция сил давления, равномерно распределенных по поверхности, на ось равна давлению, умноженному на проекцию этой поверхности на плоскость, перпендикулярную оси.

Пример X.1. Дана сферическая оболочка, нагруженная внутренним давлением (рис. X.5, *а*), найти σ_m и σ_t.

Разрезав диаметральным сечением оболочку на две части, рассматриваем равновесие одной из них (рис. X.5, *б*).

По (X.5) $\Sigma Y = \sigma_m 2\pi R t - p\pi R^2 = 0$,

откуда

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t}.$$

Для сферической оболочки $\rho_m = \rho_t = R$.

Подставив σ_m в (X.4), получим

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{p}{2t} = \frac{p}{t},$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{pR}{2t}.$$

Пример X.2. Найти σ_m и σ_t в точках цилиндрической оболочки (рис. X.6, *а*), достаточно удаленных от днищ.

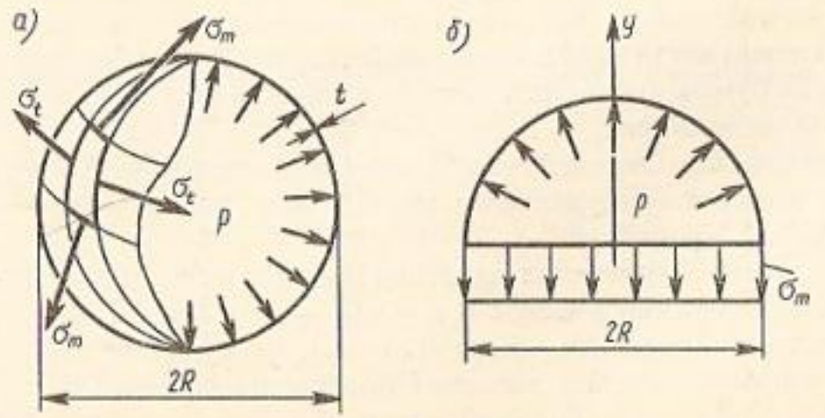


Рис. X.5

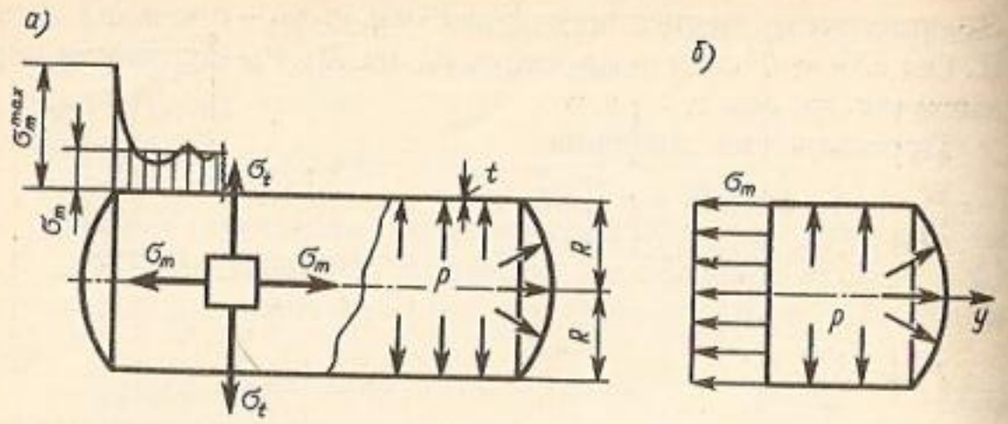


Рис. X.6

Рассматриваем равновесие отсеченной части (рис. X.6, *б*)

$$\Sigma Y = \sigma_m 2\pi R t - p\pi R^2 = 0,$$

откуда

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t}.$$

В цилиндрической оболочке $\rho_t = R$, $\rho_m = \infty$, так как меридиан – прямая линия. Поэтому из (X.4)

$$\frac{\sigma_t}{R} = \frac{p}{t},$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{pR}{t}.$$

В цилиндрической оболочке окружное напряжение в 2 раза больше меридионального.

В области оболочки, близкой к месту соединения с днищами, вследствие излома меридиана напряженное состояние будет моментным и определять σ_m и σ_t по полученным формулам нельзя. Характер их изменения в пределах этой области показан на рис. X.6, *а*. Обычно в месте соединения частей оболочки ставится укрепляющее кольцо (шпангоут), при наличии которого расчет оболочки можно вести по безмоментной теории. В дальнейшем во всех примерах будем предполагать существование шпангоутов в местах изломов меридианов.

Пример X.3. Определить толщину оболочки (рис. X.7, *а*), наполненной жидкостью с удельным весом $\gamma = g\rho$, воспользовавшись пятой теорией прочности.

Составляем уравнения давления жидкости на стенки оболочки:

цилиндрический участок – $p_I = \gamma(a - y_1)$, $0 \leqslant y_1 \leqslant a$;

конический участок – $p_{II} = \gamma(2a - y_2)$, $0 \leqslant y_2 \leqslant a$.

Графики изменения давления построены на рис. X.7, *а*.

Рассматриваем равновесие части оболочки, отсеченной окружным сечением в пределах цилиндрического участка (рис. X.7, *б*). Со-

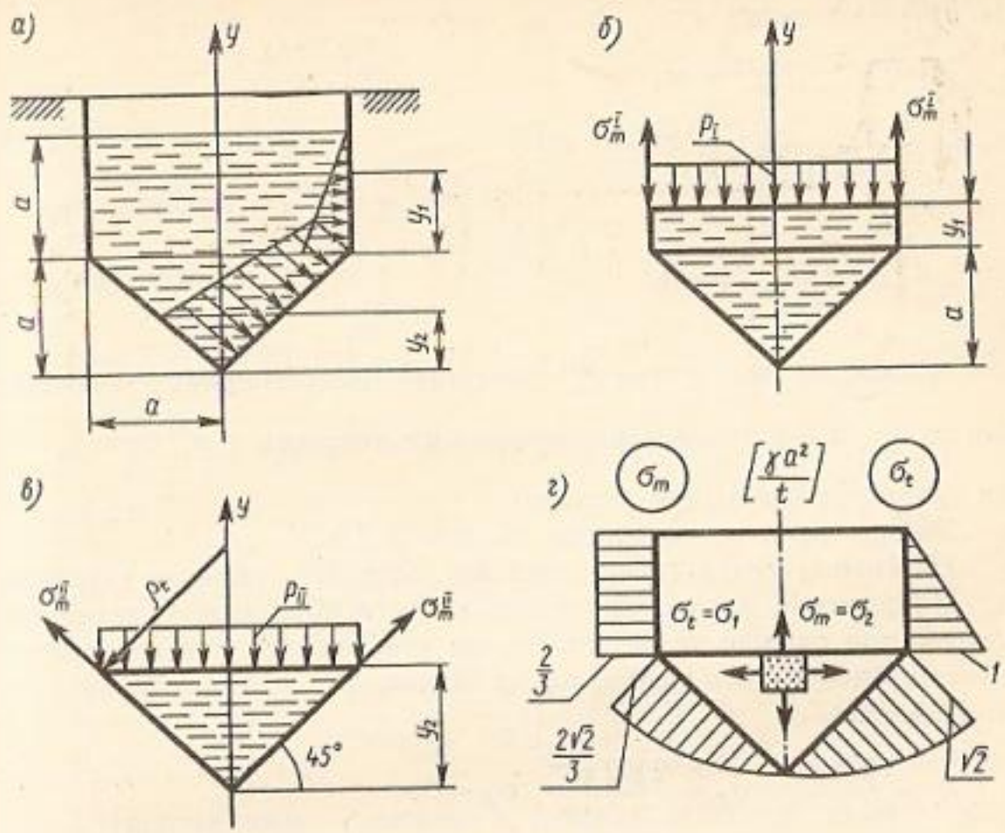


Рис. X.7

ставляем уравнение

$$\Sigma Y = \sigma_m^I 2\pi a t - \pi a^2 \gamma (a - y_1) - \frac{1}{3}\pi a^3 \gamma = 0, \qquad \text{откуда}$$

$$\sigma_m^I = \frac{2\gamma a^2}{3t}.$$

На первом участке $\rho_t^I = a$, $\rho_m^I = \infty$.

Из (X.4) $\dfrac{\sigma_t^I}{a} = \dfrac{\gamma(a - y_1)}{t}$, откуда

$$\sigma_t^I = \frac{\gamma a(a - y_1)}{t}.$$

Рассматриваем равновесие части оболочки, отсеченной окружным сечением в пределах конического участка (рис. X.7, *в*). Составляем уравнение

$$\sum Y = \sigma_m^{II} 2\pi y_2 t \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi y_2^2 \gamma (2a - y_2) - \frac{1}{3}\pi y_2^3 \gamma = 0,$$

откуда

$$\sigma_m^{II} = \frac{\sqrt{2}\gamma y_2 \left(2a - \dfrac{2y_2}{3}\right)}{2t}.$$

На втором участке

$$\rho_t^{II} = \sqrt{2}\,y_2,\ \rho_m^{II} = \infty.$$

Из (X.4) $\dfrac{\sigma_t^{II}}{\sqrt{2}\,y_2} = \dfrac{\gamma(2a - y_2)}{t}$,

откуда

$$\sigma_t^{II} = \frac{\sqrt{2}\,\gamma y_2 (2a - y_2)}{t}.$$

Можно показать, что σ_m^{II} достигает экстремального значения при $y_2 = \dfrac{3}{2}a$ (за пределами конического участка), а σ_t^{II} при $y_2 = a$ (на границе конического участка).

Эпюры σ_m и σ_t построены на рис. X.7, *г*.

Опасными будут точки, лежащие снизу от границы участков.

Напряжение, нормальное к поверхности оболочки и равное давлению при расчете на прочность, не учитывается, так как оказывается пренебрежимо малым по сравнению с σ_m и σ_t в опасной точке. Находим

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}\,\gamma a^2}{t},\ \sigma_2 = \frac{2\sqrt{2}\,\gamma a^2}{3t},\ \sigma_3 = 0;$$

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \frac{\gamma a^2}{t}\sqrt{2 + \frac{8}{9} - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{14}\,\gamma a^2}{3t},$$

$$\frac{\sqrt{14}\,\gamma a^2}{3t} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$t \geqslant \frac{\sqrt{14}\,\gamma a^2}{3[\sigma]}.$$

Пример X.4. Провести анализ напряженного состояния оболочки (рис. X.8, *а*) в возможно опасных точках A и B и определить ее запас прочности, воспользовавшись третьей теорией прочности.

1. Строим эпюр нормальных напряжений σ_P при внецентренном сжатии оболочки силой P. Составляем уравнение

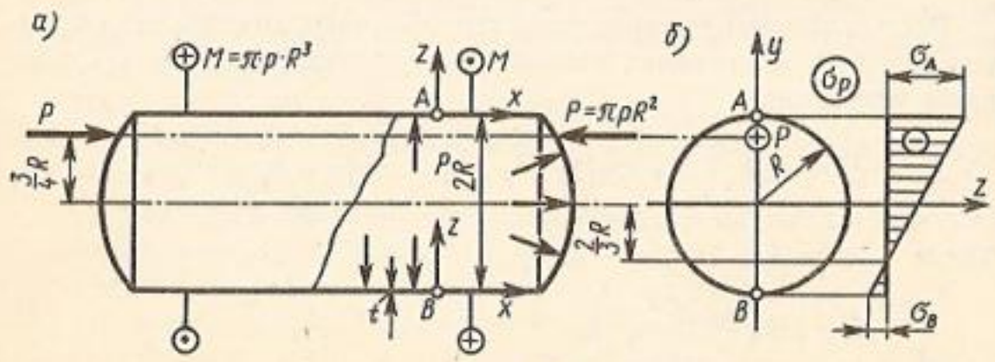


Рис. X.8

$$\sigma_P = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P}{i_z^2}y\right),$$

в котором

$$F = 2\pi Rt,\ I_z = \pi R^3 t,\ i_z^2 = \frac{R^2}{2},$$

следовательно,

$$\sigma_P = -\frac{P}{2\pi Rt}\left(1 + \frac{3y}{2R}\right);$$

$y = -\dfrac{2}{3}R$ – уравнение нейтральной линии.

Находим:

$$y_A = R,\ \sigma_P^A = -\frac{\pi pR^2}{2\pi Rt}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{5pR}{4t};$$

$$y_B = -R,\ \sigma_P^B = -\frac{\pi pR^2}{2\pi Rt}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{pR}{4t}.$$

2. Напряженное состояние в точке A показано на рис. X.9, *а* и будет плоским. Используя пример X.2, определяем:

$$\sigma_x = \sigma_p^A + \sigma_m = -\frac{5pR}{4t} + \frac{pR}{2t} = -\frac{3pR}{4t};$$

$$\sigma_y = \sigma_t = \frac{pR}{t};\ \tau_{xy} = \frac{M_к}{2F_{ср}t} = \frac{\pi pR^3}{2\pi R^2 t} = \frac{pR}{2t};$$

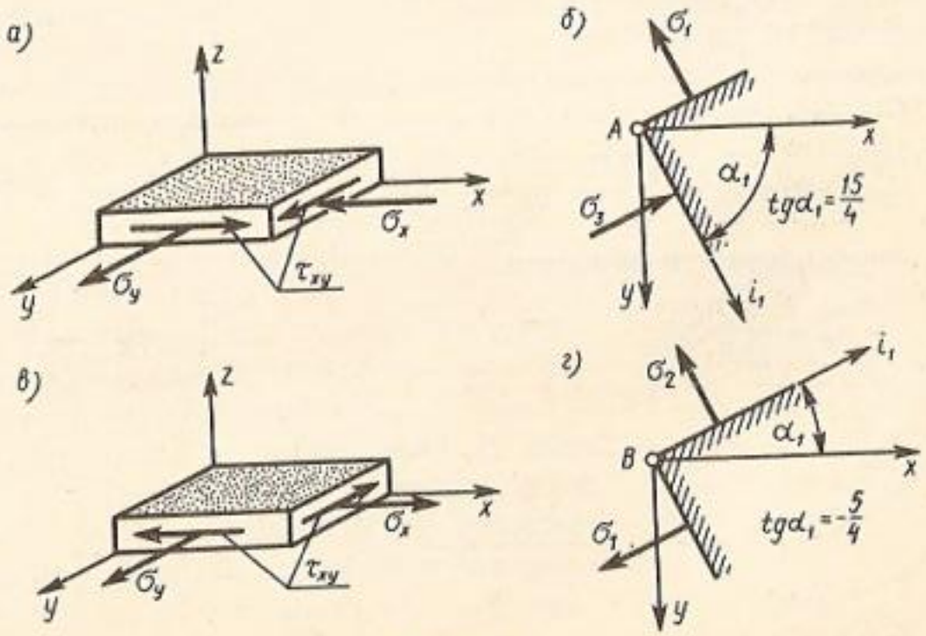


Рис. X.9

по (VIII.18) $\sigma_{i,j}=\frac{pR}{t}\left(\frac{1}{8}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{16}+1}\right)\cong\frac{pR}{t}\left(\frac{1}{8}\pm 1\right)$,

откуда

$$\sigma_1^A=\frac{9pR}{8t},\ \sigma_2^A=0,\ \sigma_3^A=-\frac{7pR}{8t};$$

по (VIII.19)

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{{}^9/_8+{}^3/_4}{{}^1/_2}=\frac{15}{4}.$$

Следы главных площадок на поверхности оболочки построены на рис. X.9, *б*. Находим:

$$\sigma_{\text{экв}}^A=\sigma_1^A-\sigma_3^A=\frac{2pR}{t},\ n_A=\frac{\sigma_T t}{2pR}.$$

3. Напряженное состояние в точке B показано на рис. X.9, *в*. Определяем:

$$\sigma_x=\sigma_p^B+\sigma_m=\frac{pR}{t}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3pR}{4t};$$

$$\sigma_y=\sigma_t=\frac{pR}{t},\ \tau_{xy}=-\frac{pR}{2t};$$

$$\sigma_{i,j}=\frac{pR}{t}\left(\frac{7}{8}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16}+1}\right)\cong\frac{pR}{t}\left(\frac{7}{8}\pm\frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\sigma_1^B=\frac{11pR}{8t},\ \sigma_2^B=\frac{3pR}{8t},\ \sigma_3=0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{{}^{11}/_8-{}^3/_4}{-{}^1/_2}=-\frac{5}{4}.$$

Следы главных площадок построены на рис. X.9, *г*. Находим:

$$\sigma_{\text{экв}}^B=\sigma_1^B-\sigma_3^B=\frac{11pR}{8t},\ n_B=\frac{8\sigma_T t}{11pR}.$$

Запас прочности оболочки

$$n=n_A=\frac{\sigma_T t}{2pR}.$$

Глава XI. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

§ XI.1. Понятие об усталости

Усталостью называется явление понижения прочности детали или образца под действием переменных напряжений.

Это явление состоит в том, что деталь, рассчитанная по предельным статическим механическим характеристикам материала σ_T или σ_B, проработав при переменных напряжениях некоторый промежуток времени, величина которого зависит от ряда причин, рассмотренных ниже, внезапно разрушается. Сечение, по которому произошло разрушение детали из квазихрупкого или пластичного металла, имеет вид, схематически показанный на рис. XI.1, состоящий из двух зон: как бы отполированной или притертой A и крупозернистой B, соответствующей по виду хрупкому разрушению. Такой характер разрушения, в начале изучения явления, породил неверное представление о том, что материал детали под действием переменных напряжений перерождается, теряя пластические свойства и приобретая хрупкие (устает), откуда и возникло название явления.

В действительности усталость является следствием роста за счет переменной деформации трещин, возникающих в неблагоприятно ориентированных кристаллических зернах и существующих в материале тела до нагружения. Увеличиваясь, существующие и возникающие трещины сливаются в одну магистральную трещину (макротрещину); образование зоны сечения A является результатом докритического роста этой трещины. Вследствие дальнейшего увеличения размеры магистральной трещины достигают критических, что приводит к ее спонтанному росту и разрушению детали отрывом (усталостному разрушению) по зоне сечения B.

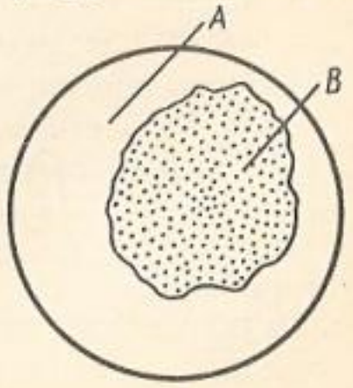


Рис. XI.1

Сопротивление усталости – способность детали противостоять усталостному разрушению.

Процессы возникновения и развития усталостных трещин пока полностью неясны. Для их объяснения различными авторами предложено несколько гипотез, часто взаимно дополняющих друг друга.

Развитие теории сопротивления усталости в настоящее время идет в основном по пути накопления и систематизации экспериментальных данных, на основании которых и проводится расчет на прочность при переменных напряжениях. Усталостные испытания связаны с использованием сложных машин и образцов, а получение одной экспериментальной зависимости часто требует месяцы, а иногда и годы. Хотя в течение многих десятилетий ведется все время прогрессивно развивающаяся экспериментальная и теоретическая работа по исследованию усталости, в настоящее время, на основании имеющихся опытных данных, мы может рассчитывать на сопротивление усталости сравнительно узкий круг, правда, часто встречающихся, деталей систем (валы, вращающиеся оси, зубчатые колеса, некоторые паяные и резьбовые соединения и ряд других). Для вновь создаваемых узлов и систем с целью выяснения их сопротивления усталости приходится прибегать к натурным усталостным испытаниям.

§ XI.2. Цикл напряжений и предел выносливости

В подавляющем большинстве случаев напряжение в элементах механических систем изменяется периодически. Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения T называется **циклом напряжений** или просто **циклом**. На рис. XI.2 дан общий вид графика периодической зависимости нормального напряжения при одноосном напряженном состоянии от времени и заштрихована область, соответствующая циклу. На этом графике:

σ_{max} и σ_{min} – максимальное и минимальное напряжения цикла (наибольшее и наименьшее в алгебраическом смысле напряжение цикла);

$\sigma_m = \dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ – постоянная составляющая цикла напряжений;

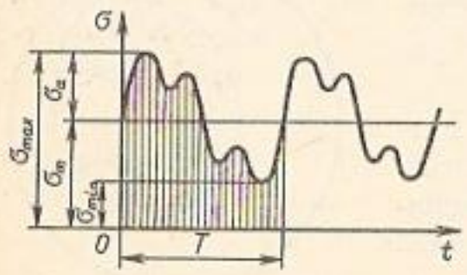


Рис. XI.2

$\sigma_a = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$ – амплитуда цикла напряжений.

Коэффициентом асимметрии цикла напряжений называется отношение

$R = \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

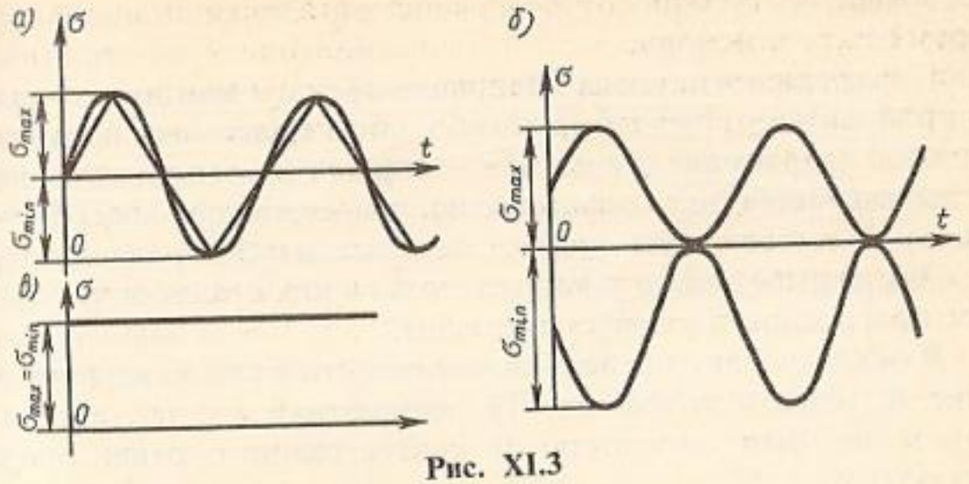


Рис. XI.3

Величины σ_{max}, σ_{min}, σ_m, σ_a и R называются параметрами цикла.

Наиболее распространенным является симметричный цикл (рис. XI.3, *а*), в котором $\sigma_a = \sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$, $R = -1$. Он осуществляется, например, в таких деталях машин, как валы или вращающиеся оси.

Любой цикл можно представить как сумму постоянного напряжения σ_m и напряжения, изменяющегося по симметричному циклу с амплитудой σ_a. Представление

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \sigma_m \pm \sigma_a \qquad \text{(XI.1)}$$

связано с тем, что влияние σ_m и σ_a на сопротивление усталости детали различно.

Другим распространенным циклом является отнулевой (рис. XI.3, *б*); в нем $\sigma_{min} = 0$ или $\sigma_{max} = 0$ соответственно: $\sigma_a = \sigma_m = \dfrac{\sigma_{max}}{2}$ или $\sigma_a = -\sigma_m = -\dfrac{\sigma_{min}}{2}$, $R = 0$ или $R = \pm\infty$; этот цикл испытывают, например, зубья зубчатых колес или звенья цепных передач.

Статическое нагружение иногда называют постоянным циклом (рис. XI.3, *в*); в нем $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_m$, $\sigma_a = 0$, $R = +1$.

Все, что говорилось о цикле напряжений при одноосном напряженном состоянии, можно повторить для чистого сдвига и кручения, заменив символ σ символом τ и считая, что при чистом сдвиге и кручении $\tau_m \geqslant 0$.

Предел выносливости материала образца или детали при одноосном напряженном состоянии – наибольшее максимальное, если $\sigma_m \geqslant 0$, или наибольшее по абсолютной величине минимальное, если $\sigma_m < 0$, напряжение цикла, при котором образец или деталь, испытывающие это напряженное

состояние, выдерживают неограниченно большое число циклов без разрушения.

Предел выносливости материала образца или детали при чистом сдвиге (кручении) – наибольшее максимальное касательное напряжение цикла, при котором образец или деталь, испытывающие эту деформацию, выдерживают неограниченно большое число циклов напряжения без разрушения.

Экспериментально установлено, что для сталей и чугунов пределы выносливости существуют.

В обозначениях пределу выносливости присваивается индекс R, равный коэффициенту асимметрии цикла, при котором он был определен. В соответствии с этим обозначают:

$\sigma_R = \sigma_{Rm} + \sigma_{Ra}$ – предел выносливости при одноосном напряженном состоянии (при растяжении – сжатии или поперечном изгибе);

$\tau_R = \tau_{Rm} + \tau_{Ra}$ – предел выносливости при чистом сдвиге или кручении;

σ_{Rm} или τ_{Rm} – постоянные составляющие σ_R или τ_R;

σ_{Ra} или τ_{Ra} – амплитуды переменных составляющих σ_R или τ_R;

σ_{-1} и σ_{-1p} – пределы выносливости симметричных циклов при поперечном изгибе и растяжении – сжатии;

σ_0 и $\sigma_{\pm\infty}$ – пределы выносливости отнулевых циклов одноосного напряженного состояния при $\sigma_{min} = 0$ и $\sigma_{max} = 0$ соответственно;

τ_{-1} и τ_{-1c} – пределы выносливости симметричных циклов при кручении и чистом сдвиге.

Величина предела выносливости стальной или чугунной детали, имеющей форму стержня, в интервале температур $-30 \div 400\,^{\circ}C$ и отсутствии коррозионной среды зависит от марки материала, коэффициента асимметрии цикла, испытываемой деформации (растяжения – сжатия, чистый сдвиг, кручение, поперечный изгиб), концентрации напряжений, размеров детали и состояния ее поверхности; он практически не зависит от частоты и характера изменения напряжений (например, синусоида или пилообразная линия на рис. XI.3, *а*).

Характер экспериментальной зависимости предела выносливости от R, полученной на одинаковых стальных образцах, показан на рис. XI.4. Из этого рисунка видно, что при прочих одинаковых условиях предел выносливости симметричного цикла имеет наименьшее значение, т. е. при прочих одинаковых условиях симметричный цикл напряжений является самым опасным.

Для расчета на сопротивление усталости детали, имеющей форму стержня и испытывающей одну из перечисленных деформаций, надо знать предел выносливости материала образца, испытывающего ту же деформацию, при одном из циклов. Обычно этот предел выносливости определяется для образца, испытывающего симметричный цикл напряжений.

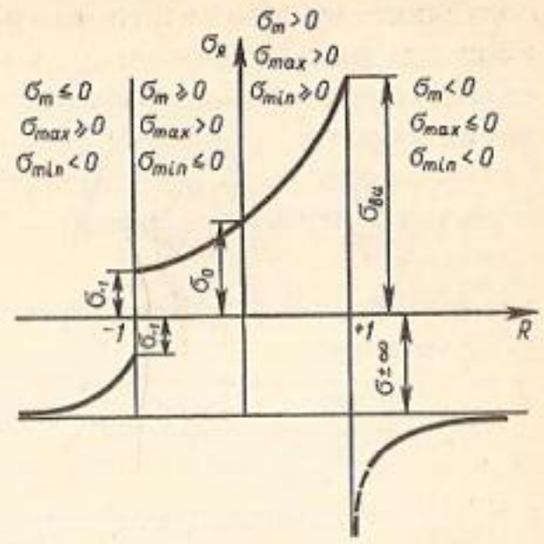


Рис. XI.4

Рассмотрим процесс испытаний по определению σ_{-1} и их результаты. Образцом (рис. XI.5, *а*) назовем стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 10$ мм, полированный, в котором влияние концентрации напряжений на результаты испытаний исключается с помощью галтели большого радиуса ρ в опасном сечении так, что практически можно считать образец не имеющим источников концентрации. Элемент системы, не удовлетворяющий хотя бы одному из перечисленных для образца условий, будем называть деталью. В справочных таблицах даются значения пределов выносливости для образцов.

Образец зажимается в патрон $П$ испытательной машины и вращается вместе с ним. На свободный конец образца надет подшипник, внутреннее кольцо которого закреплено гайкой; на верхнее кольцо подшипника надета обойма, к которой прикладывается сила P. Ясно, что при вращении образца плоскость действия силы P остается вертикальной.

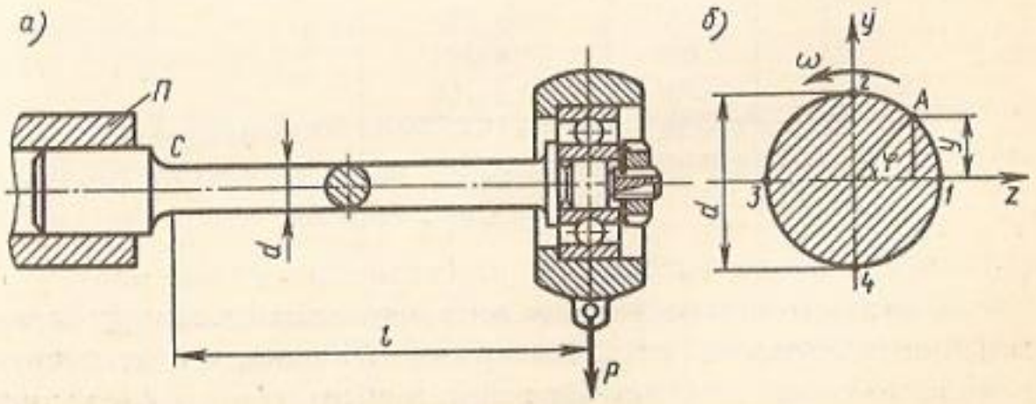


Рис. XI.5

Покажем, что в точке контура поперечного сечения образца (рис. XI.5, *б*) нормальное напряжение изменяется по симметричному циклу. Из рис. XI.5, *б* в точке A текущего сечения образца

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{32Px}{\pi d^3} \sin \varphi,$$

где $\varphi = \omega t$; ω – угловая скорость образца, t – время. В опасном сечении

$$\sigma_{max} = \frac{Pl}{W_z} = \frac{32Pl}{\pi d^3},$$

где σ_{max} – максимальное напряжение, созданное в образце, поэтому

$$\sigma_A = \sigma_{max} \sin \varphi.$$

График зависимости $\sigma_A = \sigma_A(\varphi)$ (синусоида) показан на рис. XI.6.

Для испытаний берется серия образцов, в опасных сечениях которых изменением силы P создаются различные максимальные напряжения. В протоколе испытаний: № – номера образцов в порядке уменьшения в них $|\sigma|_{max}$; N – число циклов, выдержанное образцом до разрушения (циклическая долговечность). Ниже приведен протокол испытаний по определению σ_{-1} углеродистой стали с 0,35% C и $\sigma_в = 550$ МПа.

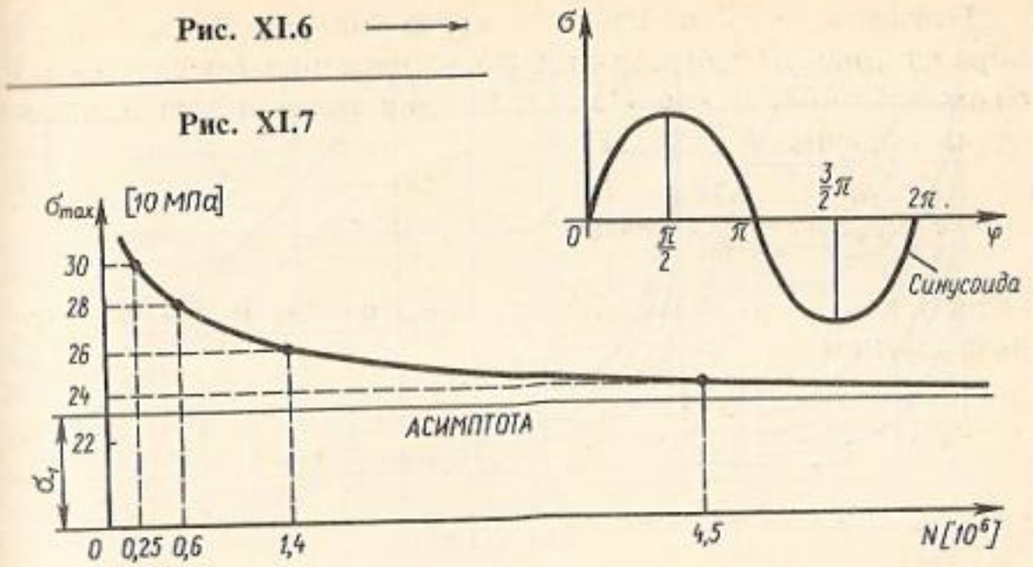
Протокол испытаний

№ п/п	σ_{max} [МПа]	N – число циклов, выдержанное образцом	Примечание
1	300	$2{,}5 \cdot 10^5$	Разрушился
2	280	$6 \cdot 10^5$	»
3	260	$1{,}4 \cdot 10^6$	»
4	240	$4{,}5 \cdot 10^6$	»
5	220	10^7	Не разрушился

Экспериментально установлено, что если стальной образец при некотором $|\sigma|_{max}$ выдержал 10^7 циклов и не разрушился, то он не разрушится и при любом другом числе циклов. Это означает, что $|\sigma|_{max}$, при котором он работал,

Рис. XI.6

Рис. XI.7



ниже предела усталости данной стали. Число циклов $N = 10^7$ называется базой испытаний.

По результатам испытаний строится график зависимости $|\sigma|_{max} = |\sigma|_{max}(N)$ – кривая усталости (рис. XI.7). Проведенная к кривой усталости горизонтальная асимптота отсекает на оси $|\sigma|_{max}$ отрезок, равный σ_R. В разобранном опыте $\sigma_{-1} = 230$ МПа.

Приведенный пример проведения усталостных испытаний и их обработки носит принципиальный характер: их полная детализация предусмотрена ГОСТ 2860 – 25.

У цветных металлов базы испытаний, выдержав которую образец не разрушился бы в дальнейшем, не существует. Поэтому для них за предел выносливости при одноосном напряженном состоянии принимается наибольшее максимальное при $\sigma_m \geqslant 0$, или наибольшее по абсолютной величине минимальное при $\sigma_m < 0$ напряжение цикла, при котором образец выдержал определенное число циклов N без разрушения (часто принимают $N = 10^8$), и говорят, что предел выносливости определен на базе испытаний N, называя его ограниченным и обозначая σ_{RN} (τ_{RN} – при чистом сдвиге или кручении).

§ XI.3. Влияние концентрации напряжений, размера и степени чистоты обработки поверхности детали на ее сопротивление усталости

Концентрация напряжений, увеличение абсолютного размера детали и понижение степени чистоты обработки ее поверхности отрицательно сказываются на сопротивлении усталости: предел выносливости детали по сравнению с пределом выносливости образца уменьшается.

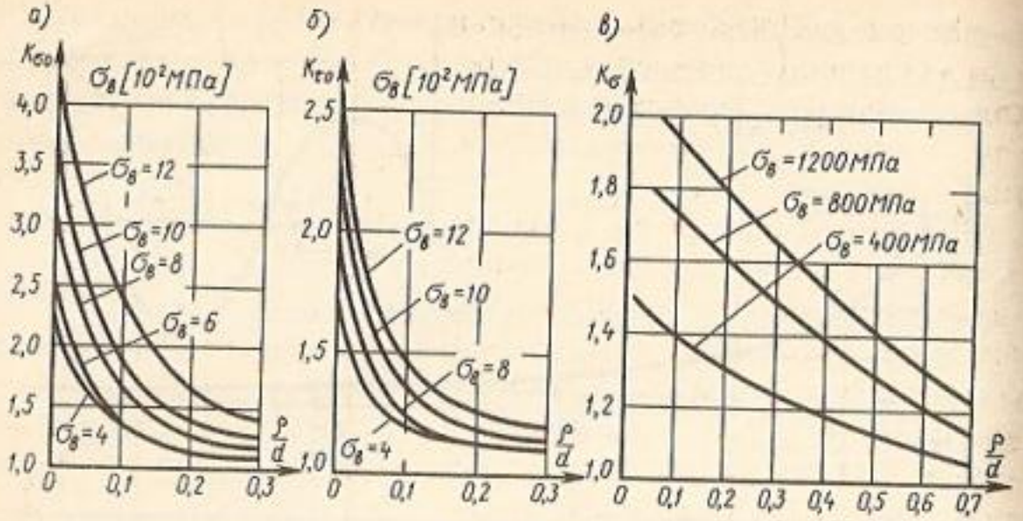


Рис. XI.8

Влияние концентрации напряжений на сопротивление усталости оценивается эффективными коэффициентами концентрации; K_σ и K_τ – эффективные коэффициенты концентрации, определенные при действии в поперечном сечении детали соответственно только нормальных и только касательных напряжений, причем

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}} \geqslant 1, \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau'_{-1}} \geqslant 1,$$

где σ_{-1} и τ_{-1} – пределы выносливости, определенные на образце; σ'_{-1} и τ'_{-1} – пределы выносливости, определенные на детали с источником концентрации при прочих одинаковых условиях, от которых зависит предел выносливости с образцом.

Эффективные коэффициенты для различных источников концентрации определяются экспериментально, и результаты эксперимента даются в форме графиков или таблиц.

На рис. XI.8, *а, б* приведены графики зависимости $K_{\sigma 0}$ и $K_{\tau 0}$ при изгибе и кручении от отношения ρ/d и $\sigma_в$ стали, для очень распространенного в деталях машин источников концентрации – перехода одного диаметра вала на другой с галтелью. Первый получен на деталях с отношением $D/d = 2$, а второй – на деталях с отношением $D/d = 1{,}4$. Значения эффективных коэффициентов концентрации для данного отношения D/d находятся по формулам:

$$K_\sigma = 1 + \psi_\sigma (K_{\sigma 0} - 1), \quad K_\tau = 1 + \psi_\tau (K_{\tau 0} - 1), \qquad \text{(XI.2)}$$

где ψ_σ и ψ_τ определяются из графика (рис. XI.9) по данному отношению D/d.

На рис. XI.8, *в* даны графики K_σ для стальных деталей при переходе с одного диаметра на другой в случае растяжения и сжатия, если $D/d = 2$.

Другим очень распространенным источником концентрации является шпоночная канавка. График зависимости K_σ от $\sigma_в$ стали при изгибе для вала со стандартной шпоночной канавкой приведен на рис. XI.10, *а*. При использовании этого графика момент сопротивления сечения изгибу должен находиться по формуле

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}. \qquad \text{(XI.3)}$$

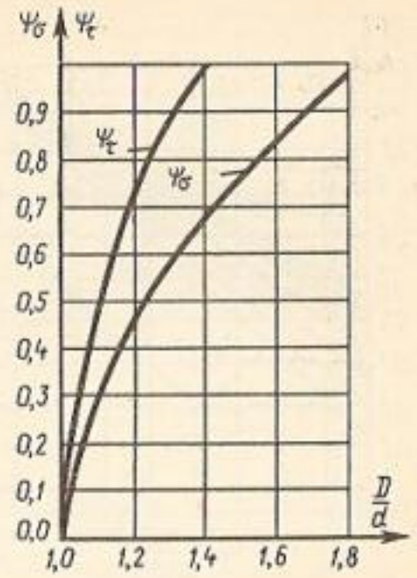


Рис. XI.9

Если значений эффективного коэффициента для данного источника концентрации нет, то его можно найти по эмпирической формуле

$$K_{\sigma,\tau} = 1 + q(\alpha_{\sigma,\tau} - 1), \qquad \text{(XI.4)}$$

в которой α – теоретический коэффициент концентрации для этого источника; q – коэффициент чувствительности материала к концентрации, зависящий от $\sigma_в$ и α, определяемый по графику (рис. XI.11).

График зависимости α_τ от ρ/d для вала со шпоночной канавкой при кручении дан на рис. III.22, *б*. При использова-

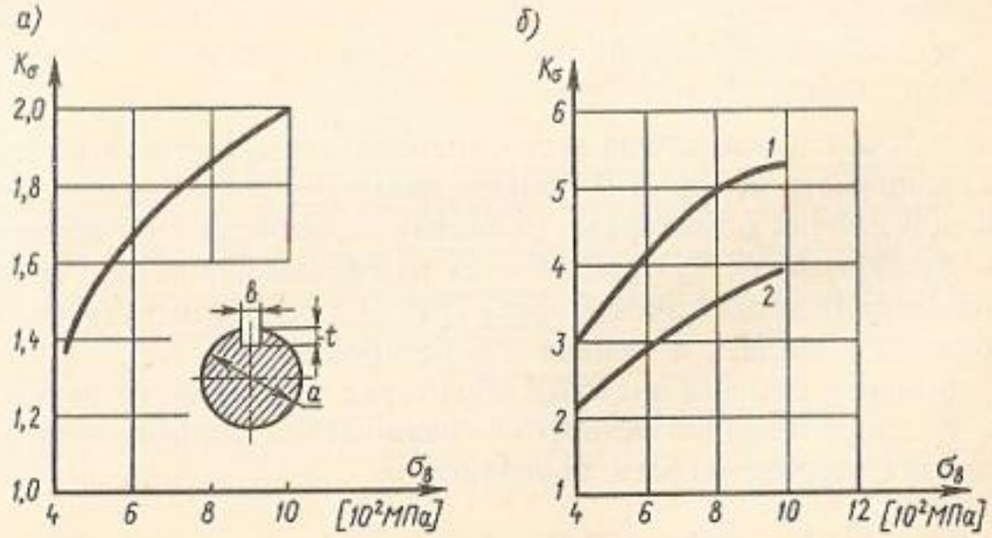


Рис. IX.10

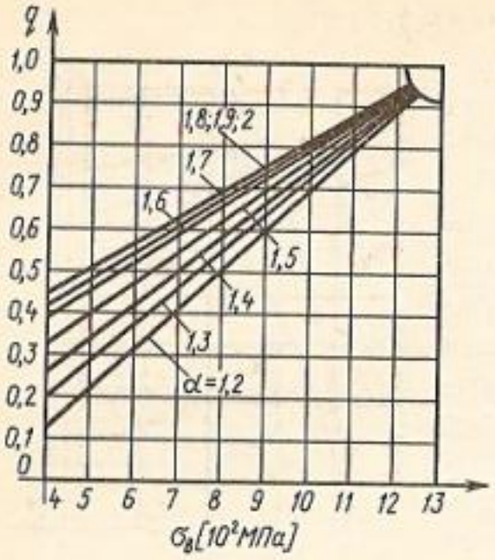


Рис. XI.11

нии этого графика момент сопротивления сечения кручению должен находиться по формуле

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}. \qquad \text{(XI.5)}$$

График для определения эффективных коэффициентов концентрации болтов с резьбой, если $d = 12$ мм при растяжении – сжатии дан на рис. XI.10, *б*. На этом графике соответствуют: кривая *1* – метрической резьбе, кривая *2* – дюймовой.

Уменьшение вредного влияния концентрации напряжений на сопротивление усталости является вопросом первостепенной важности для конструктора. Особенно это важно при проектировании деталей из высококачественных сталей, так как из формулы (рис. XI.4) и графика (рис. XI.11) видно, что с увеличением $\sigma_в$ значения K_σ и K_τ для одного и того же источника концентрации увеличиваются. Повышение усталостной прочности деталей достигается прежде всего созданием плавности изменения их формы (увеличением радиусов переходов, устранением острых входящих углов и т. п.).

Влияние размера детали на ее сопротивление усталости оценивается коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения

$$K_d = \frac{\sigma''_{-1}}{\sigma_{-1}} = \frac{\tau''_{-1}}{\tau_{-1}} \leqslant 1,$$

где σ''_{-1} и τ''_{-1} – пределы выносливости, определенные на детали, диаметр которой D больше диаметра $d = 10$ мм образца при прочих одинаковых условиях ее работы с образцом.

Коэффициент K_d определяется из графика (рис. XI.12) по диаметру D детали, на котором кривая *1* соответствует углеродистым сталям, а кривая *2* – легированным.

Влияние степени чистоты обработки поверхности детали на ее сопротивление усталости оценивается коэффициентом влияния шероховатости поверхности

$$K_F = \frac{\sigma'''_{-1}}{\sigma_{-1}} = \frac{\tau'''_{-1}}{\tau_{-1}} \leqslant 1,$$

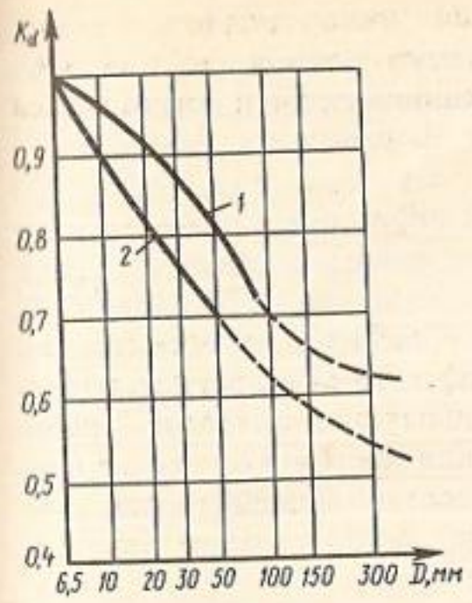


Рис. XI.12

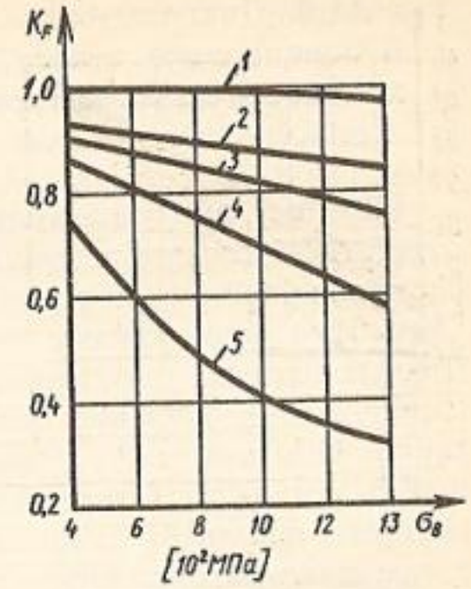


Рис. XI.13

где σ'''_{-1} и τ'''_{-1} – пределы выносливости, определенные на детали с пониженной степенью чистоты обработки поверхности при прочих одинаковых условиях ее работы с образцом.

Коэффициент K_F определяется из графика (рис. XI.13) по $\sigma_в$ материала. На этом графике кривые соответствуют поверхностям деталей: *1* – полированным, *2* – шлифованным, *3* – тонко обработанным резцом, *4* – грубо обработанным резцом, *5* – покрытым окалиной.

Значение предела выносливости может быть повышено упрочнением поверхностных слоев материала деталей. Это упрочнение может быть достигнуто двумя способами: за счет пластической деформации поверхностных слоев (обкатка роликами, дробеструйная обработка) и за счет их термической и термохимической обработки (поверхностная закалка токами высокой частоты, азотирование). В этих случаях $K_F > 1$.

При наличии концентрации напряжений, увеличенного по сравнению с образцом размера детали и пониженной по сравнению с полировкой степени чистоты обработки ее поверхности пределы выносливости детали при симметричных циклах найдутся по формулам

$$\bar{\sigma}_{-1} = \frac{\sigma_{-1} K_d K_F}{K_\sigma}, \quad \bar{\tau}_{-1} = \frac{\tau_{-1} K_d K_F}{K_\tau}. \qquad \text{(XI.6)}$$

§ XI.4. Диаграмма предельных амплитуд и определение запаса прочности детали из пластичного материала при чистом сдвиге

Каждому циклу на координатной плоскости (τ_m, τ_a) соответствует точка с координатами, равными его постоянной составляющей и амплитуде переменной составляющей. Опасными состояниями детали, работающей при переменных напряжениях, могут быть либо усталостное разрушение, либо появление недопустимых пластических деформаций. Обозначим $\tau_m^{пр}$, $\tau_a^{пр}$ – значения постоянной составляющей и амплитуды переменной составляющей цикла, при которых наступает одно из этих недопустимых явлений, а сам цикл назовем предельным.

На рис. XI.14 построен график зависимости $\tau_a^{пр} = \tau_m^{пр}$ ($\tau_m^{пр}$ – диаграмма предельных амплитуд детали при чистом сдвиге). На этой диаграмме точки прямой AB с уравнением

$$\tau_{Ra} = \tau_{-1}$$

соответствуют, как было подтверждено опытами *Л. И. Савельева*, наименьшим значениям τ_a, при которых произойдут усталостные разрушения детали. Учитывая, что пределы текучести $\tau_т$ и $\sigma_т$ материала детали не зависят от K_τ, K_d и K_F точки прямой BC с уравнением

$$\tau_a = \tau_т - \tau_m$$

соответствуют циклам с наименьшими τ_{max}, при которых появятся недопустимые пластические деформации, потому что для любой из точек этой прямой

$$\tau_{max} = \tau_a + \tau_m = \tau_т.$$

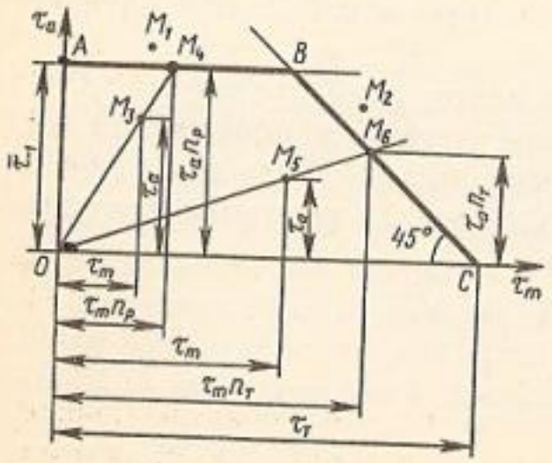


Рис. XI.14

Для цикла, которому соответствует точка M_1, опасным состоянием будет усталостное разрушение, так как для него $\tau_{max} < \tau_т$, а $\tau_a > \bar{\tau}_{-1}$; для цикла, которому соответствует точка M_2, опасным состоянием будет появление недопустимых пластических деформаций, так как для него $\tau_{max} > \tau_т$, а $\tau_{max} < \bar{\tau}_{-1}$. Точки, находящиеся внутри области $OABC$, соответствуют безопасным циклам, так как для них $\tau_a < \bar{\tau}_{-1}$ и $\tau_{max} < \tau_т$.

Запасами прочности по усталостному разрушению $n_р$ и по появлению недопустимых пластических деформаций (по текучести) $n_т$ назовем числа, показывающие, во сколько раз одновременно и пропорционально надо увеличить τ_m и τ_a данного цикла, чтобы одно из этих состояний наступило.

Для цикла, которому соответствует точка M_3, опасным состоянием является усталостное разрушение, а предельным – цикл, изображенный точкой M_4 и $n_р = \bar{\tau}_{-1}/\tau_a$. Учитывая (XI.6),

$$n_р = \frac{\tau_{-1} K_d K_F}{\tau_a K_\tau}. \qquad (XI.7)$$

Для цикла, которому соответствует точка M_5, опасным состоянием является появление недопустимых пластических деформаций, а предельным – цикл, изображенный точкой M_6 и

$$n_т = \frac{\tau_т}{\tau_{max}}. \qquad (XI.8)$$

В практических расчетах определяются $n_р$ и $n_т$ и в качестве запаса прочности детали принимается меньшее из полученных значений.

§ XI.5. Диаграмма предельных амплитуд и определение запаса прочности детали из пластичного материала при одноосном напряженном состоянии

Л. И. Савельев на основании опытов доказал, что при одноосном напряженном состоянии и общей упругой деформации образца зависимость $\sigma_{Ra} = \sigma_{Ra}(\sigma_{Rm})$ – линейка. Если предположить, что при этом напряженном состоянии она сохраняется и для детали, то на координатной плоскости (σ_m, σ_a) этой зависимости будет соответствовать прямая AB – *прямая Савельева* (рис. XI.15) с уравнением

$$\sigma_{Ra} = \bar{\sigma}_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_{Rm}}{\sigma_{вн}}\right), \qquad (XI.9)$$

полученным экспериментально.

Путем статистической обработки экспериментальных данных Л. И. Савельев установил, что для сталей можно считать $\sigma_{вн} = 1{,}8\sigma_в$.

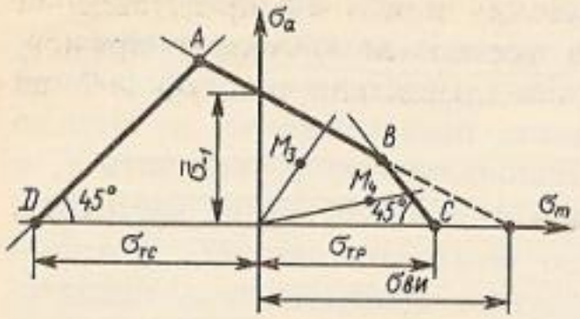


Рис. XI.15

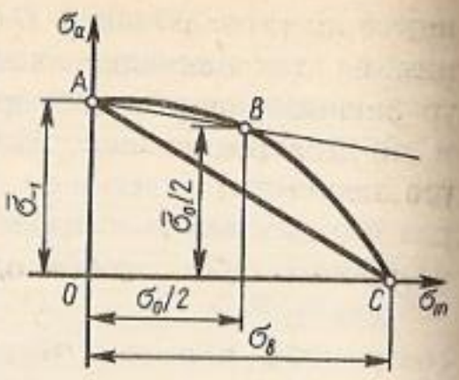


Рис. XI.16

График зависимости $\sigma_a^{пр} = \sigma_a^{пр}(\sigma_m^{пр})$ – диаграмма предельных амплитуд при одноосном напряженном состоянии, где $\sigma_a^{пр}$ и $\sigma_m^{пр}$ – предельные составляющие цикла, изображена на рис. XI.20 ломаной *ABCD* (см. § XI.4). Областью безопасных циклов является внутренность области *ABCD*. Запасы прочности $n_р$ и $n_т$ находятся по аналогии с их определением в § XI.4. Запас прочности по усталостному разрушению найдется из уравнения (XI.9) подстановкой в него $\sigma_{Ra} = \sigma_a n_р$ и $\sigma_{Rm} = \sigma_m n_р$

$$\frac{\sigma_a n_p}{\bar{\sigma}_{-1}} + \frac{\sigma_m n_p}{\sigma_{ви}} = 1,$$

откуда, учитывая (XI.6),

$$n_p = \frac{1}{\dfrac{\sigma_a K_\sigma}{\sigma_{-1} K_d K_F} + \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{ви}}}. \qquad \text{(XI.10)}$$

Запас прочности детали по текучести найдется по одной из формул

$$n_т = \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_{max}} \text{ при } \sigma_m > 0;$$

$$n_т = \frac{\sigma_{mc}}{|\sigma_{min}|} \text{ при } \sigma_m < 0. \qquad \text{(XI.11)}$$

В практических расчетах, определив n_p и $n_т$, следует принять в качестве запаса прочности детали меньшее из полученных значений.

В учебной и технической литературе широко распространено представление о зависимости $\sigma_{Ra} = \sigma_{Ra}(\sigma_{Rm})$, как о криволинейной, схематически изображенной на рис. XI.16 линией *ABC*. Такое представление не соответствует действительности, хотя бы потому, что $\sigma_в$ – есть условное напряжение, при котором ни усталостного, ни статического разрушений не происходит; поскольку при этом представлении уравнение кривой *ABC* неизвестно, ее заменяют прямой.

В качестве замены *Гудман* предложил прямую *AC*, из уравнения которой

$$n_p = \frac{1}{\dfrac{\sigma_a K_\sigma}{\sigma_{-1} K_d K_F} + \dfrac{|\sigma_m|}{\sigma_в}}. \qquad \text{(XI.12)}$$

Формула (XI.12) дает для n_p при $\sigma_m \neq 0$ значения, уменьшенные по сравнению с действительными.

Серенсен и *Кинасошвили* предложили в качестве замены прямую *AB*, из уравнения которой

$$n_p = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{\sigma_a K_\sigma}{K_d K_F} + \dfrac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\sigma_m}. \qquad \text{(XI.13)}$$

Значения n_p, найденные по формулам (XI.13) и (XI.10), практически совпадают, однако формула (XI.13) обладает тем недостатком, что для пользования ею надо знать два предела выносливости материала σ_{-1} и σ_0.

§ XI.6. Диаграмма предельных амплитуд и определение запасов прочности деталей из квазихрупких материалов при чистом сдвиге и одноосном напряженном состоянии

У квазихрупких материалов (например, чугуна) отсутствует явление текучести и понятия $\sigma_т$ для них не существует. Диаграммы предельных циклов при чистом сдвиге и одноосном напряженном состоянии таких материалов даны на рис. XI.17, *а, б*.

Формулы запасов прочности деталей получаются по аналогии с изложенным в § XI.4 и XI.5. Запас прочности по

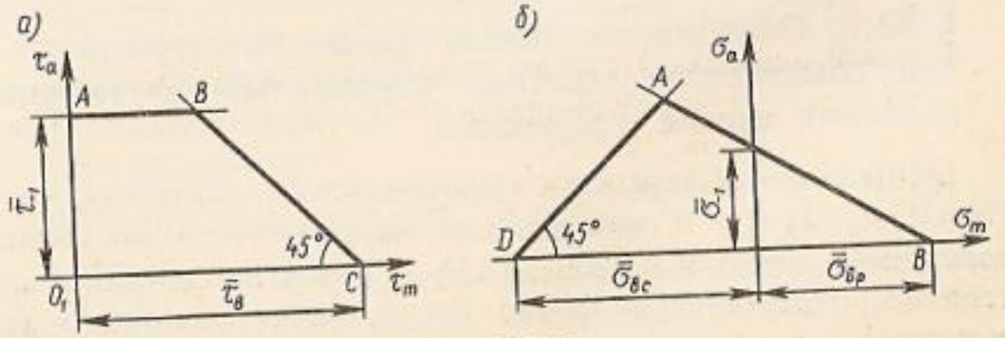


Рис. XI.17

усталостному разрушению при чистом сдвиге

$$n_p = \frac{\tau_{-1} K_d K_F}{\tau_a K_\tau}; \qquad \text{(XI.14)}$$

запас прочности по статическому разрушению для однородных и неоднородных материалов соответственно равен

$$n_в = \frac{\tau_в K_d K_F}{\tau_{max} K_\tau}, \qquad \text{(XI.15)}$$

$$n_в = \frac{\tau_в K_d}{\tau_{max}}. \qquad \text{(XI.16)}$$

Запас прочности по усталостному разрушению при одноосном напряженном состоянии для однородных и неоднородных материалов соответственно равен

$$n_p = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{K_d K_F}\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{вр}}\right)}, \qquad \text{(XI.17)}$$

$$n_p = \frac{1}{\frac{\sigma_a K_\sigma}{\sigma_{-1} K_d K_F} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{вр} K_d}}, \qquad \text{(XI.18)}$$

запас прочности по статическому разрушению для однородных и неоднородных материалов соответственно равен

$$n_в = \frac{\sigma_{вс} K_d K_F}{|\sigma_{min}| K_\sigma}, \qquad \text{(XI.19)}$$

$$n_в = \frac{\sigma_{вс} K_d}{|\sigma_{min}|}. \qquad \text{(XI.20)}$$

Из найденных n_p и $n_в$ в качестве запаса прочности детали принимается меньшее значение. Как следует из рис. XI.17, *б*, при одноосном напряженном состоянии $n_в$ следует определять, если $\sigma_m < 0$.

§ XI.7. Определение запаса прочности стержня при совместном действии переменных растяжения (сжатия), изгиба и кручения

Общий случай двухосного напряженного состояния, в котором $\sigma_1/\sigma_3 < 0$ и компоненты напряженного состояния переменны, показан на рис. XI.18, *а*. Такое напряженное состояние существует в точке бруса, испытывающего совместные растяжение-сжатие, изгиб и кручение (см. § VIII.5).

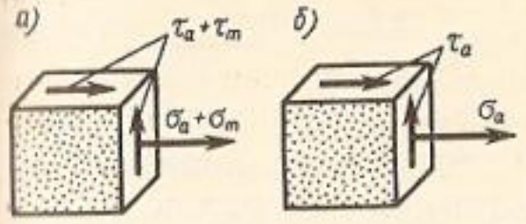


Рис. XI.18

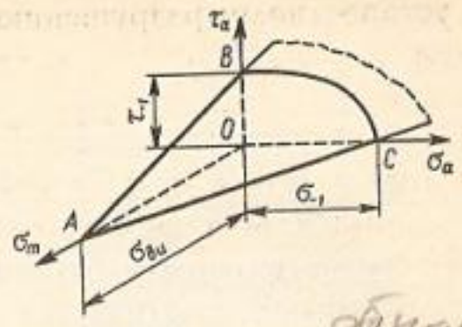


Рис. XI.19

Г. В. Ужиком и другими исследователями экспериментально установлено, что зависимость между предельными амплитудами симметричных циклов нормальных и касательных напряжений в напряженном состоянии (рис. XI.18, *б*) (зависимость $\tau_{Ra} = \tau_{Ra}(\sigma_{Ra})$) при их синфазном изменении можно считать эллиптической. На основании этого утверждения и результатов опытов *Л. И. Савельева*, условие усталостного разрушения в опасной точке детали из пластичного материала запишется в виде

$$\sqrt{\frac{\sigma_{Ra}^2}{\bar{\sigma}_{-1}^2} + \frac{\tau_{Ra}^2}{\bar{\tau}_{-1}^2}} + \frac{\sigma_{Rm}}{\sigma_{вн}} = 1. \qquad \text{(XI.21)}$$

На рис. XI.19 в координатах σ_a, τ_a, τ_m по уравнению (XI.21) построена поверхность *ABC* (предельная), являющаяся частью поверхности эллиптического конуса, ось которого совпадает с осью σ_m. Если компоненты напряженного состояния в опасной точке детали являются координатами точки этой поверхности, то деталь разрушится от усталости. Поэтому поверхность *ABC* можно назвать предельной.

При $\sigma_m = 0$ из уравнения следует эллиптическая зависимость *Г. В. Ужика*

$$\frac{\sigma_{Ra}^2}{\bar{\sigma}_{-1}^2} + \frac{\tau_{Ra}^2}{\bar{\tau}_{-1}^2} = 1;$$

при $\tau_{Ra} = 0$ линейная зависимость (XI.9), полученная *Л. И. Савельевым*; при $\sigma_{Ra} = \sigma_{Rm} = 0$ – зависимость $\tau_{Ra} = \bar{\tau}_{-1}$, экспериментально полученная *Л. И. Савельевым* и теоретически доказанная *М. Н. Михайловым*.

Если положить

$$\sigma_{Ra} = \sigma_a n_p, \ \tau_{Ra} = \tau_a n_p, \ \sigma_{Rm} = \sigma_m n_p, \qquad \text{(XI.22)}$$

где σ_a, τ_a, σ_m – значения компонентов напряженного состояния в опасной точке детали, и подставить (XI.22) в (XI.21), получим формулу для определения запаса прочности по

усталостному разрушению детали из пластичного материала

$$n_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{\sigma}_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2}{\bar{\tau}_{-1}^2}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{вн}}}. \qquad \text{(XI.23)}$$

Запас прочности детали по текучести (по появлению недопустимых пластических деформаций) найдется по формуле

$$n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}^V}, \qquad \text{(XI.24)}$$

в которой по (IX.19)

$$\sigma_{экв}^V = \frac{1-\nu}{2}\sigma_{\substack{max\\min}} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma_{\substack{max\\min}}^2 + 4\tau_{max}^2}, \qquad \text{(XI.25)}$$

где σ_{max} берется при $\sigma_m > 0$, а σ_{min} – при $\sigma_m < 0$.

Запас прочности детали из квазихрупкого материала по усталостному разрушению определяется по формуле

$$n_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{\sigma}_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2}{\bar{\tau}_{-1}^2}} + \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}_{вр}}}, \qquad \text{(XI.26)}$$

а ее запас прочности по статическому разрушению – по формуле

$$n_в = \frac{\bar{\sigma}_{вр}}{\sigma_{экв}^V}. \qquad \text{(XI.27)}$$

Запас прочности $n_в$ определяется при $\sigma_m < 0$.

В формулах (XI.25) и (XI.20) $\bar{\sigma}_{вр} = \dfrac{\sigma_{вр}K_dK_F}{K_\sigma}$ – для однородных материалов и $\bar{\sigma}_{вр} = \sigma_{вр}K_d$ – для материалов неоднородных.

Пример XI.1. Найти запас прочности узла (рис. XI.20), считая детали A и B абсолютно твердыми. Исходные данные:

$P_{max} = 10^4$ Н, $P_{min} = -1{,}2 \cdot 10^4$ Н; $d = 2$ см, $d_1 = 1{,}7$ см, $D = 5$ см, $d_2 = 2{,}25$ см, $l_1 = 2$ см, $l_2 = 1$ см;

радиус галтели при переходе от стержня болта к головке $\rho = 0{,}3$ см; материал болта сталь 45: $\sigma_в = 610$ МПа, $\sigma_т = 340$ МПа, $\sigma_{-1р} = 200$ МПа; материал прокладки – текстолит: $\sigma_{вр} = 127$ МПа, $\sigma_{вс} = 168$ МПа, $\sigma_{-1р} = 22{,}3$ МПа, $E = 10^4$ МПа; резьба болта метрическая не шлифованная; наибольшее напряжение предварительной затяжки в болте $\sigma_б = 30$ МПа.

1. Определяем σ_m и σ_a в болте и прокладке, присваивая величинам, связанным с болтом, индекс *б*, а с прокладкой – индекс *п*.

Находим:

$$F'_б = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}89}{4} = 2{,}27 \text{ см}^2 -$$

площадь поперечного сечения нарезанной части болта,

$$F''_б = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 4}{4} = 3{,}14 \text{ см}^2 -$$

площадь поперечного сечения ненарезанной части болта,

$$F_п = \frac{\pi D^2}{4}(1 - c^2) = \frac{3{,}14 \cdot 25}{4} \times$$

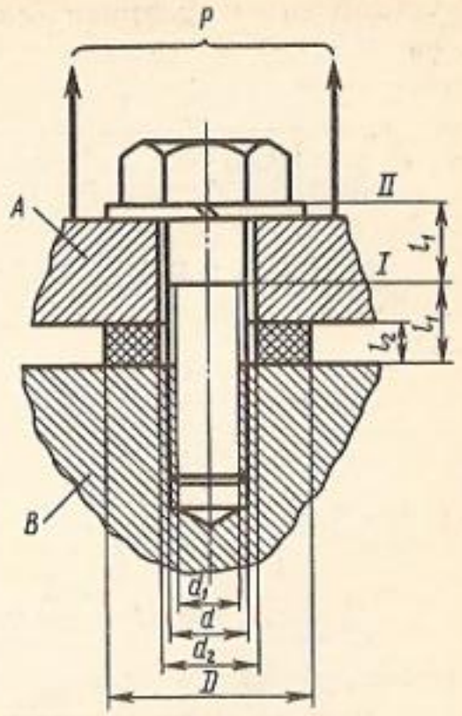


Рис. XI.20

$\times (1 - 0{,}25) = 14{,}7$ см^2 – площадь поперечного сечения прокладки,

$$\sigma_п = -\frac{\sigma_б F'_б}{F_п} = -\frac{30 \cdot 2{,}27}{14{,}7} = -4{,}63 \text{ МПа} -$$ напряжение в прокладке от предварительной затяжки болта.

Определяем усилия в болте и прокладке при действии на деталь A только силы P. Так как узел статически неопределим, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} N_б + N_п = P, \\ \dfrac{N_б l_1}{E_б}\left(\dfrac{1}{F'_б} + \dfrac{1}{F''_б}\right) = \dfrac{N_п l_2}{E_п F_п}, \end{cases} \qquad \text{(XI.28)}$$

где $N_б$ и $N_п$ – нормальные усилия в болте и прокладке при действии на деталь только силы P. Решая систему уравнений (XI.28), получим

$$N_б = \frac{P}{\dfrac{E_п F_п l_1}{E_б l_2}\left(\dfrac{1}{F'_б} + \dfrac{1}{F''_б}\right) + 1} =$$

$$= \frac{P}{\dfrac{10^4 \cdot 14{,}7 \cdot 2}{2 \cdot 10^5}\left(\dfrac{1}{2{,}27} + \dfrac{1}{3{,}14}\right) + 1} = 0{,}472P,$$

$N_п = 0{,}528P$.

Определяем:

$$\sigma_{max}^б = \sigma_б + \frac{0{,}472P_{max}}{F'_б} = 30 + \frac{0{,}472 \cdot 10^8}{2{,}27 \cdot 10^6} = 50{,}8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min}^{б} = \sigma_{б} + \frac{0{,}472P_{\min}}{F_{б}'} = 30 - \frac{0{,}472 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{8}}{2{,}27 \cdot 10^{6}} = 5{,}05 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{m}^{б} = \frac{\sigma_{\max}^{б} + \sigma_{\min}^{б}}{2} = \frac{50{,}8 + 5{,}05}{2} = 27{,}9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{a}^{б} = \frac{\sigma_{\max}^{б} - \sigma_{\min}^{б}}{2} = \frac{50{,}8 - 5{,}05}{2} = 22{,}9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{п} = \sigma_{п} + \frac{0{,}528P_{\max}}{F_{п}} = -4{,}63 + \frac{0{,}528 \cdot 10^{8}}{14{,}7 \cdot 10^{6}} = -1{,}04 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min}^{п} = \sigma_{п} + \frac{0{,}528P_{\min}}{F_{п}} = -4{,}63 - \frac{0{,}528 \cdot 10^{8}}{14{,}7 \cdot 10^{6}} = -8{,}94 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{m}^{п} = \frac{\sigma_{\max}^{п'} + \sigma_{\min}^{п}}{2} = \frac{-1{,}04 - 8{,}94}{2} = -4{,}99 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{a}^{п} = \frac{\sigma_{\max}^{п} - \sigma_{\min}^{п}}{2} = \frac{-1{,}04 + 8{,}94}{2} = 3{,}95 \text{ МПа}.$$

2. Определяем запас прочности болта.

Возможно опасным в болте будут сечения:

I – на том основании, что в этом сечении источником концентрации является резьба;

II – на том основании, что в этом сечении источником концентрации является галтель.

Находим запас прочности болта по сечению *I*.

По кривой *1* графика (рис. XI.10) $K_{\sigma} = 4{,}15$; по кривой *1* графика (см. рис. XI.12) $k_{d} = 0{,}95$; по кривой *3* графика (см. рис. XI.13) $k_{F} = 0{,}88$.

По формуле (XI.10)

$$n_{р}^{б} = \frac{1}{\frac{2{,}29 \cdot 4{,}15}{200 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}95} + \frac{27{,}9}{1{,}8 \cdot 610}} = 1{,}68;$$

по формуле (XI.11)

$$n_{т}^{б} = \frac{340}{50{,}8} = 6{,}69.$$

Следовательно, запас прочности болта по сечению *I*

$$n_{б}^{I} = 1{,}68.$$

В сечении *II* $\rho/d = 0{,}15$; по графику (рис. XI.8, *в*) для $\rho/d = 0{,}15$ и $\sigma_{в} = 610$ МПа $k_{\sigma} = 1{,}5$. Так как $\sigma_{a}^{II} < \sigma_{a}^{I}$, $\sigma_{m}^{II} < \sigma_{m}^{I}$, $k_{\sigma}^{II} < k_{\sigma}^{I}$, $k_{d}^{II} = k_{d}^{I}$, $k_{F}^{II} = k_{F}^{I}$, из формул (XI.10) и (XI.11) следует, что $n_{б}^{II} > n_{б}^{I}$. Поэтому окончательно

$$n_{б} = 1{,}68.$$

3. Определяем запас прочности прокладки.

Для текстолита из табл. 1 $\delta = 1{,}50\,‰$, поэтому текстолит можно считать квазихрупким материалом. Так как прокладка источников концентрации не имеет, для нее $k_{\sigma} = 1$. Считая, что σ_{-1} для текстолита найден в состоянии поставки, получим $k_{F} = 1$. Коэффициент k_{d} можно определить по кривой *2* графика (см. рис. XI.12), из которого $k_{d} = 0{,}75$. По формуле (XI.18)

$$n_{р}^{п} = \frac{1}{\frac{3{,}95 \cdot 1}{22{,}3 \cdot 0{,}75} - \frac{4{,}99}{127 \cdot 0{,}75}} = 5{,}43.$$

По формуле (XI.20)

$$n_{в}^{п} = \frac{168}{8{,}94} = 18{,}8.$$

Следовательно,

$$n_{п} = 5{,}43.$$

4. Принимаем в качестве запаса прочности узла меньшее из найденных значений $n_{б}$ и $n_{п}$, или

$$n = 1{,}68.$$

Глава XII. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

§ XII.1. Понятия о критической силе и устойчивости сжатого стержня

Продольный изгиб – деформация достаточно длинного (достаточно гибкого) стержня, с малыми начальными несовершенствами, нагруженного продольными сжимающими силами, равнодействующие которых в каждом сечении совпадают с осью.

Длину стержня в дальнейшем обозначаем l.

Рассмотрим стержень, заделанный одним концом (консольный), с начальными несовершенствами δ_0 и e (рис. XII.1, *а*), где δ_0 – наибольший начальный прогиб стержня; e – эксцентриситет приложения силы. При нагружении стержня сжимающей силой P в его текущем сечении возникает изгибающий момент

$$|M_z| = P|\delta + e - y|$$

и упругая линия стержня займет положение, показанное на рис. XII.1, *б*, где δ – наибольший прогиб стержня; y – прогиб в текущем сечении.

Обозначим:

$$\beta = \frac{P}{P_к},\ \gamma = \frac{\delta}{l},\ \psi = \frac{\delta_0 + e}{l},$$

где $P_к$ – значение сжимающей силы, называемое **критическим**, определение которому дадим позже.

На рис. XII.2 приведены графики зависимостей $\beta = \beta(\gamma)$ для трех значений ψ, построенные на основании решения задачи о продольном изгибе достаточно длинного упругого консольного стержня. Это решение получено путем интегрирования точного дифференциального уравнения упругой линии стержня (V.47)

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}. \qquad \text{(XII.1)}$$

Сформулируем общие свойства зависимостей $\beta = \beta(\gamma)$ для консольных стержней, вытекающие из графиков (рис. XII.2).

1. При $\psi < 0{,}01$ и $P < 0{,}8P_к$ зависимости $\beta = \beta(\gamma)$ можно считать практически прямо пропорциональными.

2. Точки перегиба (точки изменения кривизны) графиков зависимостей $\beta = \beta(\gamma)$ лежат на прямой $\beta = 1$, что для сжа-

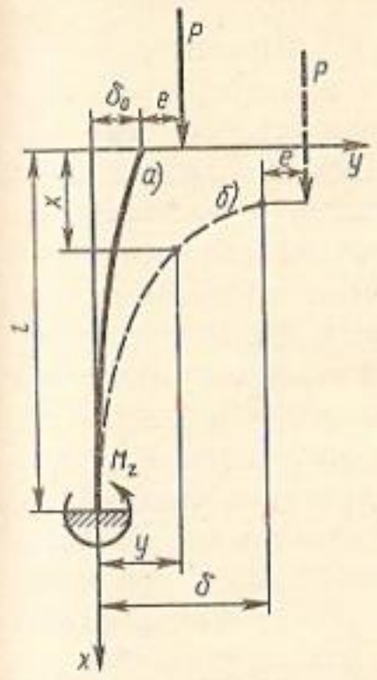


Рис. XII.1

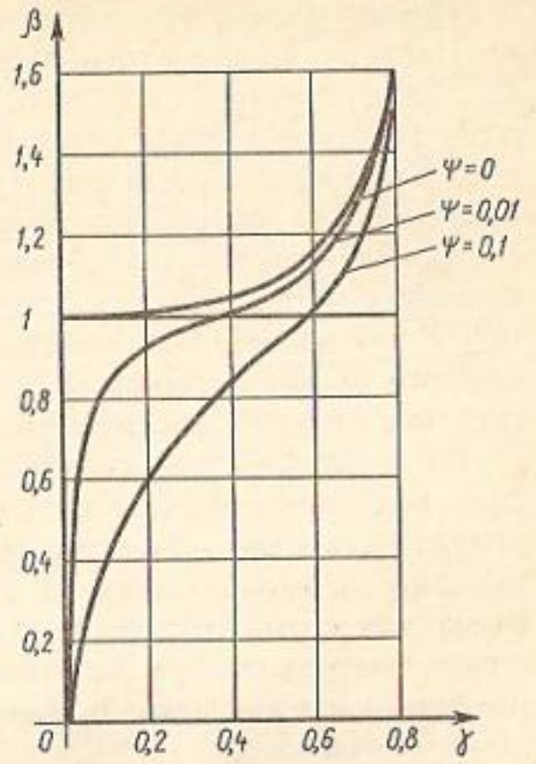


Рис. XII.2

того стержня соответствует $P = P_к$. Ось идеального стержня при $P < P_к$ – прямолинейна, а при $P > P_к$ – криволинейна, и точка изменения кривизны зависимости $\beta = \beta(\gamma)$ для него будет точкой излома. Следовательно, при $P = P_к$ идеальный стержень может иметь две формы упругого деформированного равновесия своей оси – прямолинейную и криволинейную с бесконечно малым наибольшим прогибом (при $P = P_к$ идеальный стержень находится в состоянии безразличного упругого деформированного равновесия). В дальнейшем, для краткости, упругое деформированное равновесие элемента будем называть просто равновесием.

3. При $\psi < 0{,}01$, $\gamma < 0{,}6$ и $P > P_к$ относительно малым увеличениям P соответствуют относительно большие (резкие) увеличения δ. Например, при $\psi = 0$ (идеальный стержень), если $P_1 = 1{,}001P_к$, то $\delta_1 = 0{,}057l$, а если $P_2 = 1{,}01P_к$, то $\delta_2 = 0{,}18l$, т. е. увеличению P всего на 0,9 % соответствует увеличение δ в 3,16 раза. Качественно результат будет таким же, если, например, к стержню, нагруженному силой $P > P_к$, приложить малую поперечную силу Q.

Относительно малые увеличения сжимающих сил или приложение к стержню, нагруженному сжимающими силами, относительно малой поперечной нагрузки назовем малыми возмущениями.

Предполагаем, что перечисленные свойства справедливы для произвольно сжатого стержня (стержня с произвольными: нагружением, опорными устройствами, отношениями длин участков и жесткостей их сечений), имеющего малые начальные несовершенства. Принятие этого предположения позволяет на основании сформулированных свойств дать следующее определение: **критической силой для сжатого стержня с малыми начальными несовершенствами, обозначаемой $P_к$, называется наименьшее значение сжимающей силы, при превышении которого малые возмущения вызывают относительно большие увеличения наибольшего прогиба стержня.**

Из второго и третьего свойств следует, что критическая сила для произвольного стержня может быть найдена как критическая сила для его идеального состояния. Поэтому понятию $P_к$ можно дать второе определение: **критической силой для сжатого стержня с малыми начальными несовершенствами называется значение сжимающей силы, при котором идеальное состояние стержня является состоянием безразличного равновесия.**

Состояние элемента системы, при котором малые возмущения вызывают относительно малые увеличения наибольшего перемещения точки его оси или срединной поверхности, называется устойчивым равновесием; в противном случае равновесие элемента неустойчиво. Значит, равновесие сжатого стержня при $P < P_к$ – устойчиво, а при $P > P_к$ – неустойчиво. Потеря устойчивости – переход элемента системы из устойчивого равновесия в неустойчивое (для идеального стержня в безразличное).

Резкое увеличение наибольшего прогиба сжатого стержня в результате потери устойчивости (при $P > P_к$) резко увеличивает зависящий от него наибольший изгибающий момент $|M_z|_{max}$ в опасном сечении стержня. Например, консольный стержень (рис. XII.1) имеет

$$|M_z|_{max} = P|\delta + e|,$$

существующий в заделанном сечении. Для стержней большой жесткости, которые в подавляющем большинстве используются в механических системах, резкое увеличение $|M_z|_{max}$ (малое превышение силой P значения $P_к$) приводит либо к внезапному (катастрофическому) разрушению, либо к появлению недопустимых пластических деформаций, что делает стержни непригодными к работе. Поэтому у стержней большой жесткости упругое закритическое состояние при $P > P_к$ практически невозможно.

Для достаточно гибких стержней предельное значение

сжимающей силы из расчета на сжатие всегда больше ее критического значения

$$P_{пр} = \sigma^c_{пр} F > P_к.$$

Следовательно, расчет достаточно гибких стержней на сжатие недопустим и должен заменяться расчетом на устойчивость по условиям:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant \frac{\sigma_к}{[n]_y} = [\sigma]_y \qquad \text{(XII.2)}$$

– проектировочный расчет,

$$n_y = \frac{\sigma_к}{\sigma} > 1 \qquad \text{(XII.3)}$$

– поверочный расчет, где $\sigma_к = P_к/F$ – критическое напряжение для данного сжатого стержня; $[n]_y$ – нормативный запас устойчивости; n_y – запас устойчивости.

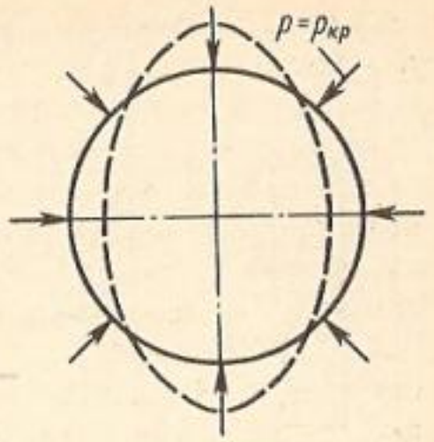


Рис. XII.3

Кроме задач устойчивости сжатых стержней исключительный интерес представляют задачи устойчивости тонких пластин и оболочек. Для этих элементов, при определенных нагружениях, опасным состоянием является не потеря прочности, а потеря устойчивости с переходом от одной формы равновесия срединной поверхности к другой.

На рис. XII.3 сплошной линией изображено поперечное сечение срединной поверхности круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением p. При $p \geqslant p_к$, где $p_к$ – критическое давление, круговая форма средней линии сечения становится неустойчивой, и она принимает овальную форму, показанную на рис. XII.3 штриховой линией. Хотя после потери устойчивости оболочка сохраняет прочность, выполнять свое рабочее назначение, как правило, она уже не может. Вопросы устойчивости пластин и оболочек давно выделились в самостоятельную область механики деформируемого тела и в сопротивлении материалов не рассматриваются.

§ XII.2. Формула Эйлера для шарнирно опертого стержня

Рассмотрим идеальный стержень постоянного сечения (рис. XII.4, *а*), один конец которого имеет шарнирную опору, а другой – шарнирно-подвижную (каток), нагруженный сжи-

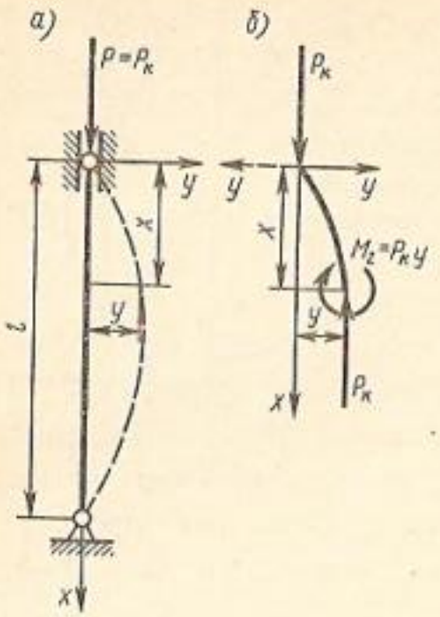


Рис. XII.4

мающей силой P. Считаем, что $P = P_к$. При этом условии идеальный стержень (см. свойство 2 § XII.1) может иметь две формы равновесия оси – прямолинейную и некоторую, пока нам неизвестную, криволинейную с бесконечно малым наибольшим прогибом, показанную штриховой линией на рис. XII.4, *а*. Поместим начало координат в верхнем сечении стержня. По (V.48)

$$EI_z y'' = M_z. \qquad \text{(XII.4)}$$

Опыт показывает, что при продольном изгибе нейтральной линией будет главная центральная ось поперечного сечения с наименьшим моментом инерции, поэтому для потерявшего устойчивость стержня $I_z = I_{min}$; абсолютная величина изгибающего момента в его текущем сечении (рис. XII.4, *а*) $|M_z| = P_к |y|$.

Покажем, что подстановка в (XII.4) y'', y и M_z с их знаками всегда дает дифференциальное уравнение упругой линии в виде

$$EI_{min} y'' = -P_к y. \qquad \text{(XII.5)}$$

На рис. XII.4, *б* показана находящаяся в равновесии отсеченная часть стержня (см. рис. XII.1, *а*). Согласно (XII.4) знак M_z определяется знаком y'' (знаком создаваемой M_z кривизны упругой линии стержня). При выбранном направлении оси y кривизна, создаваемая M_z, – отрицательна, а прогиб y – положителен, поэтому, чтобы при положительном прогибе получить отрицательное выражение кривизны, выражение M_z следует взять в виде

$$M_z = -P_к y. \qquad \text{(XII.6)}$$

Если же ось y направлена в противоположную сторону (на рис. XII.4, *б* – штриховая линия), то кривизна, создаваемая M_z, – положительна, а прогиб – отрицателен и выражение M_z опять следует брать в виде (XII.6). Таким образом, изгибающий момент от сжимающей продольной силы в (XII.4) всегда входит со знаком минус, так как при таком нагружении стержня знаки y и y'' всегда противоположны.

Приводим (XII.5) к нормальному виду

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \qquad \text{(XII.7)}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P_к}{EI_{min}}. \qquad \text{(XII.8)}$$

Общий интеграл (XII.7) запишется так:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \qquad \text{(XII.9)}$$

В (XII.9) входят три неизвестные величины: произвольные постоянные C_1, C_2 и α, так как $P_к$ – неизвестна. Из рассмотрения опорных устройств стержня для определения неизвестных, входящих в (XII.9), можно выписать только два граничных условия:

$$[y]_{x=0} = 0, \; [y]_{x=l} = 0. \qquad \text{(XII.10)}$$

При решении задачи об устойчивости идеального стержня, основанном на приближенном дифференциальном уравнении (XII.4) (при решении задачи от устойчивости стержня методом Эйлера), число неизвестных, входящих в его общий интеграл, всегда оказывается на единицу больше числа граничных условий, которое можно выписать для их определения из рассмотрения опорных устройств и геометрии стержня.

Подставив (XII.10) в (XII.9), получим

$$C_2 = 0, \qquad \text{(XII.11)}$$

$$C_1 \sin \alpha l = 0. \qquad \text{(XII.12)}$$

Одним решением уравнения (XII.12) может быть

$$C_1 = 0,$$

из которого по (XII.9), учитывая (XII.11), следует, что $y \equiv 0$, и ось стержня может иметь прямолинейную форму при любом значении силы P. Другим решением (XII.12) при $C_1 \neq 0$ может быть

$$\sin \alpha l = 0. \qquad \text{(XII.13)}$$

Корнями уравнения (XII.13) являются значения

$$\alpha l = n\pi, \qquad \text{или}$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}, \qquad \text{(XII.14)}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Подставив выражения α из (XII.14) в (XII.8) и (XII.9), а также, учитывая (XII.11), найдем:

$$P_{\text{к}}^{(n)} = \frac{n^2\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \qquad \text{(XII.15)}$$

$$y = C_1 \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad \text{(XII.16)}$$

Из (XII.13) следует, что критическая сила имеет бесконечно большое число значений, каждому из которых соответствует своя форма равновесия упругой линии, даваемая уравнением (XII.16). При

$n = 0,\ P_{\text{к}}^{(0)} = 0,$ $\qquad y = 0;$

$n = 1,\ P_{\text{к}}^{(1)} = \dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2},$ $\qquad y = C_1 \sin\dfrac{\pi x}{l};$

$n = 2,\ P_{\text{к}}^{(2)} = \dfrac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2},$ $\qquad y = C_1 \sin\dfrac{2\pi x}{l},$

$n = 3,\ P_{\text{к}}^{(3)} = \dfrac{9\pi^2 EI_{\min}}{l^2},$ $\qquad y = C_1 \sin\dfrac{3\pi x}{l};$

. . . . . .

. . . . .

Таким образом, из подстановки значений n в (XII.15) и (XII.16) вытекает, что $P_{\text{к}}^{(0)}$ соответствует прямолинейная форма оси, а $P_{\text{к}}^{(1)}$, $P_{\text{к}}^{(2)}$, $P_{\text{к}}^{(3)}$, ... соответствуют формы равновесия упругой линии стержня в виде синусоид с одной, двумя, тремя и т. д. полуволнами. Как уже отмечалось (см. § XII.1), потеряв устойчивость, стержень большой жесткости либо разрушится, либо станет непригодным к работе. Поэтому практический интерес представляет только $P_{\text{к}}^{(1)}$ – наименьшее, отличное от нуля, значение $P_{\text{к}}^{(n)}$, определяемое по формуле, называемой **формулой Эйлера:**

$$P_{\text{к}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \qquad \text{(XII.17)}$$

Теоретическое решение задачи об устойчивости стержня методом Эйлера всегда содержит два недостатка:

1. В силу того, что число неизвестных, входящих в общий интеграл уравнения (XII.4), на единицу больше числа граничных условий, которое можно выписать для их определения, остается неизвестным $y = y(x)$ – уравнение упругой линии стержня после потери им устойчивости. Например, для шарнирно опертого стержня осталось неизвестным произвольное постоянное C_1, являющееся на основании (XII.15) наибольшим прогибом. Правда, для стержня большой жесткости уравнение $y = y(x)$ практически не нужно, так как, потеряв устойчивость, он разрушится, либо станет непригодным к работе.

2. Если $P_{\text{к}}^{(n)} < P < P_{\text{к}}^{(n+1)}$, то ось стержня, теряющего устойчивость при $P = P_{\text{к}}^{(n)}$ и $P = P_{\text{к}}^{(n+1)}$, может быть только прямолинейной, что не соответствует ни здравому смыслу, ни опыту. Например, для шарнирно опертого стержня при

$$n\pi < \alpha l < (n+1)\pi$$

$$\sin\alpha l \neq 0,$$

и для выполнения граничных условий (XII.10) необходимо, чтобы $C_1 = C_2 = 0$, откуда по (XII.9) $y \equiv 0$.

Недостатки метода Эйлера объясняются тем, что он основывается на приближенном дифференциальном уравнении упругой линии (XII.4), справедливом для малых прогибов. После потери устойчивости незначительному увеличению P по сравнению с $P_{\text{к}}$ соответствует настолько значительное увеличение наибольшего прогиба стержня, что уравнение (XII.4) оказывается непригодным для получения на основании его интегрирования $y = y(x)$.

Возможность получить $y = y(x)$ дает решение, основанное на уравнении (XII.1), интегрирование которого даже для простейших случаев опорных устройств, нагружения и геометрии стержня является сложным, а общий интеграл (XII.1) выражается через специальные функции. Из этого решения следует, что значениям $P_{\text{к}}^{(n)} \leqslant P < P_{\text{к}}^{(n+1)}$ соответствуют $n+1$ возможные формы равновесия упругой линии стержня. Дополнительное исследование этих форм говорит, что устойчивой является только одна из них – криволинейная, имеющая наименьшее число точек перегиба, возможное при опорных устройствах данного стержня.

На рис. XII.5 показаны возможные формы равновесия оси шарнирно опертого стержня для четырех интервалов значений P. Устойчивые формы равновесия оси, изображенные на этом рисунке сплошными линиями, для всех значений P являются линиями, не имеющими точек перегиба.

Самым важным является то, что $P_{\text{к}}^{(n)}$, найденные из решений, основанных как на (XII.4), так и на (XII.1), будут соответственно равными. Это объясняется тем, что для бесконечно малых прогибов дифференциальное уравнение

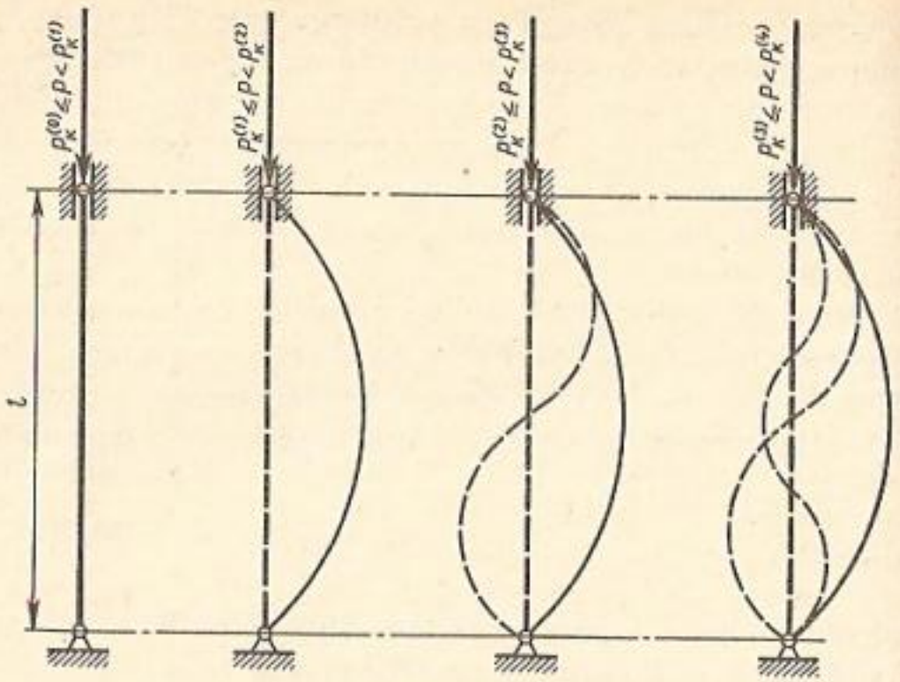


Рис. XII.5

(XII.1) эквивалентно дифференциальному уравнению (XII.4). Поэтому для определения $P_к$ пользуются несравненно более простым методом Эйлера.

§ XII.3. Понятие о коэффициенте приведенной длины стержня

Результат определения критической силы для произвольного стержня (рис. XII.6, *а*) всегда можно получить в виде

$$P_к = \eta \frac{EI_i}{l^2}, \qquad \text{(XII.18)}$$

где η – безразмерный коэффициент; I_i – наименьший момент инерции сечения одного из участков стержня.

Выражение $P_к$ из (XII.18) обычно приводят к форме Эйлера

$$P_к = \frac{\pi^2 EI_i}{(\mu l)^2}, \qquad \text{(XII.19)}$$

где μ – коэффициент приведенной длины стержня.

Из (XII.18) и (XII.19) следует, что

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{\eta}}. \qquad \text{(XII.20)}$$

Коэффициенты η и μ зависят от наложенных на стержень связей, от изменения жесткости сечения вдоль его оси и от способа нагружения стержня.

Согласно (XII.17) и (XII.19) шарнирно опертый стержень длиной

$$L = \mu l,$$

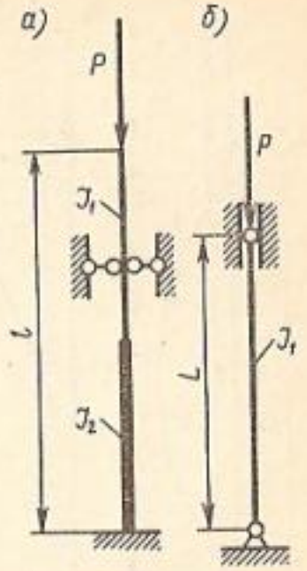


Рис. XII.6

которая называется приведенной, постоянного сечения с наименьшим моментом инерции I_i (рис. XII.6, *б*) имеет такую же критическую силу, как и произвольный стержень длиной l, если их материалы одинаковы. Поэтому расчетную схему (рис. XII.6, *б*) называют основной (основным случаем). Преимущество записи выражения $P_к$ в форме (XII.19) состоит в том, что она позволяет заменять произвольный стержень основным случаем (приводить произвольный стержень к основному случаю) при расчетах и испытаниях на устойчивость. Последнее особенно важно, потому что осуществить испытания на всех возможных вариантах произвольного стержня практически нельзя, и они обычно приводятся для основного случая; результаты этих испытаний могут быть перенесены на произвольный стержень из такого же материала, если для него известен μ.

Для стержней постоянной жесткости, нагруженных в концевых сечениях (рис. XII.7), значения μ можно найти, пользуясь, как обычно, методом Эйлера. Однако в этих простейших расчетных схемах μ так же можно найти, используя решение для основного случая, если изобразить устойчивые формы равновесия осей при $P \geqslant P_к$. Основываясь на опорных устройствах стержней и соображениях симметрии, изображаем эти формы на рис. XII.7 штриховыми линиями. Каждая полуволна устойчивой формы равновесия имеет те же граничные условия, что и стержень в основном случае, так как в сечениях, соответствующих точкам перегиба, $M_z = 0$, и они эквивалентны шарнирам; половина полуволны имеет те же граничные условия, что и половина стержня в основном случае, потому что в среднем сечении у них $y' = 0$.

Из рис. XII.7 видно, что длина полуволны

$$L_1 = l/i, \qquad \text{(XII.21)}$$

где i – число полуволн устойчивой формы равновесия оси.

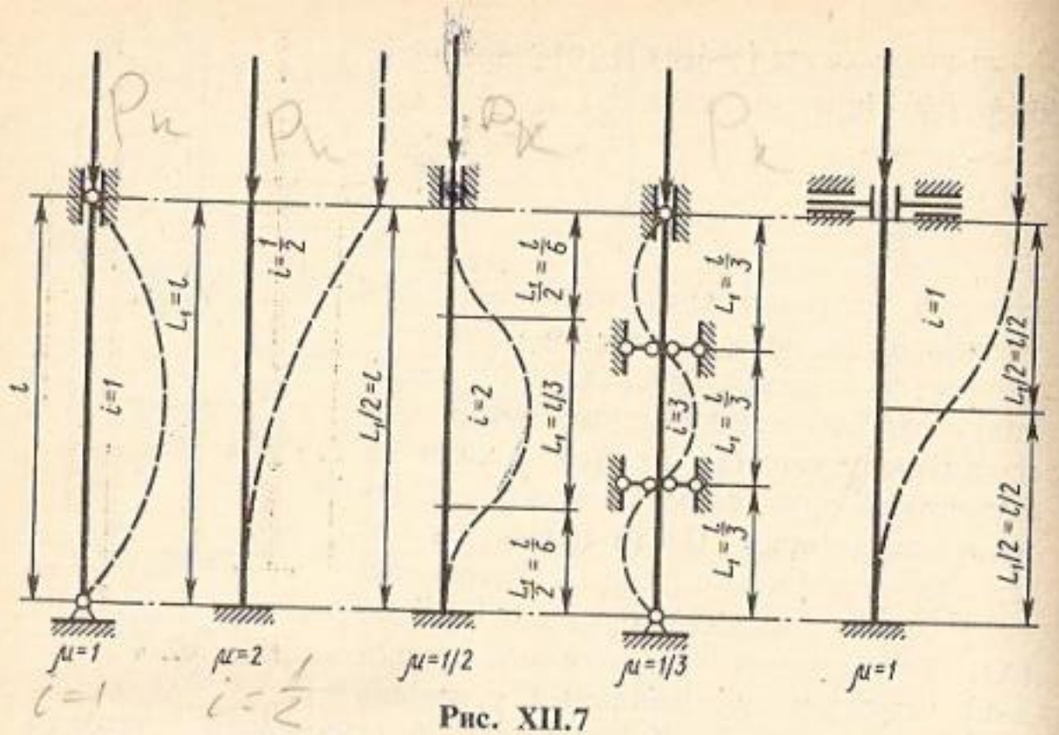


Рис. XII.7

Потеря устойчивости стержнем на длине L_1 или $L_1/2$ равносильна его общей потере устойчивости. Значит, для любого стержня $P_к$ можно найти, подставив в (XII.17) вместо l длину полуволны L_1, выраженную по (XII.21) через l, или

$$P_к = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_1^2} = \frac{\pi^2 i^2 EI_{min}}{l^2}. \qquad \text{(XII.22)}$$

Приравнивая выражения $P_к$ из (XII.18) и (XII.21), получим

$$\mu = \frac{1}{i}. \qquad \text{(XII.23)}$$

Значения μ, вычисленные по формуле (XII.23), приведены на рис. XII.7 под каждой расчетной схемой.

К сожалению, формула (XII.23) применима только к стержням постоянной жесткости, нагруженным сжимающими силами в концевых сечениях, причем воспользоваться ей можно при условии, что известно L_1 (при условии, что известно выражение L_1 через l); в противном случае μ приходится определять методом Эйлера.

Пример XII.1. Для консольного стержня переменной жесткости (рис. XII.8) найти значение μ, если $I_2 = 4I_1$.

Считаем, что $P = P_к$ и, поместив начало системы координат на свободном конце стержня после потери им устойчивости (при таком выборе начала координат задача решается проще всего), составляем дифференциальное уравнение (XII.4) на его участках:

$$EI_1 y_1'' = -P_к y_1,\ EI_2 y_2'' = -P_к y_2. \qquad \text{(XII.24)}$$

После приведения (XII.35) к нормальному виду, получим

$$y_1'' + \alpha_1^2 y_1 = 0,\ y_2'' + \alpha_2^2 y_2 = 0, \qquad \text{(XII.25)}$$

где

$$\alpha_1^2 = \frac{P_к}{EI_1},\ \alpha_2^2 = \frac{P_к}{EI_2}. \qquad \text{(XII.26)}$$

Из условия примера и (XII.26)

$$\alpha_1 = 2\alpha_2.$$

Учитывая (XII.27), запишем общие интегралы уравнений (XII.25)

$$y_1 = C_1 \sin \alpha_1 x + C_2 \cos \alpha_1 x,\ y_2 =$$

$$= C_3 \sin \frac{\alpha_1 x}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha_1 x}{2}. \qquad \text{(XII.28)}$$

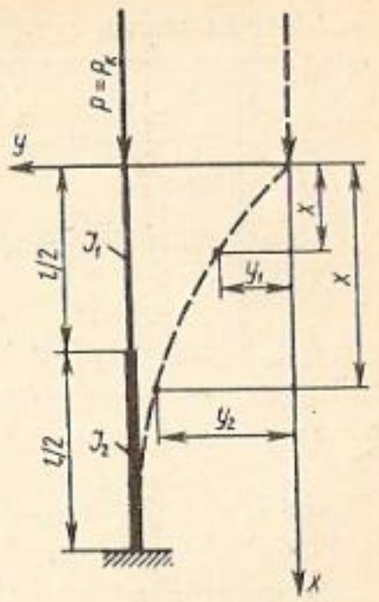


Рис. XII.8

В (XII.27) входят пять неизвестных: C_1, C_2, C_3, C_4 и α_1, для определения которых можно выписать только четыре граничных условия. Эти условия:

$$[y_1]_{x=0} = 0;$$

так как стержень на границе участков не разрывается, то

$$[y_1]_{x=l/2} = [y_2]_{x=l/2};$$

так как стержень на границе участков не ломается, то

$$[y_1']_{x=l/2} = [y_2']_{x=l/2};$$

$$[y']_{x=l} = 0.$$

Подставляя их в (XII.28), найдем:

$$C_2 = 0;$$

$$\begin{cases} C_1 \sin \dfrac{\alpha_1 l}{2} = C_3 \sin \dfrac{\alpha_1 l}{4} + C_4 \cos \dfrac{\alpha_1 l}{4}; \\ C_1 \alpha_1 \cos \dfrac{\alpha_1 l}{2} = C_3 \dfrac{\alpha_1}{2} \cos \dfrac{\alpha_1 l}{4} - C_4 \sin \dfrac{\alpha_1 l}{4}; \\ C_3 \dfrac{\alpha_1}{2} \cos \dfrac{\alpha_1 l}{2} - C_4 \dfrac{\alpha_1}{2} \sin \dfrac{\alpha_1 l}{2} = 0. \end{cases} \qquad \text{(XII.29)}$$

Запишем систему (XII.29) в нормальном виде:

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\alpha_1 l}{2} C_1 - \sin \dfrac{\alpha_1 l}{4} C_3 - \cos \dfrac{\alpha_1 l}{4} C_4 = 0, \\ 2 \cos \dfrac{\alpha_1 l}{2} C_1 - \cos \dfrac{\alpha_1 l}{4} C_3 + \sin \dfrac{\alpha_1 l}{4} C_4 = 0, \\ \cos \dfrac{\alpha_1 l}{2} C_3 - \sin \dfrac{\alpha_1 l}{2} C_4 = 0. \end{cases} \qquad \text{(XII.30)}$$

Чтобы могла существовать криволинейная форма равновесия оси, определитель системы (XII.30) должен равняться нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha_1 l}{2} - \sin\frac{\alpha_1 l}{4} - \cos\frac{\alpha_1 l}{4} \\ 2\cos\frac{\alpha_1 l}{2} - \cos\frac{\alpha_1 l}{4} - \sin\frac{\alpha_1 l}{4} \\ 0 \quad \cos\frac{\alpha_1 l}{2} - \sin\frac{\alpha_1 l}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв этот определитель, получим тригонометрическое уравнение для определения α_1

$$\sin\frac{\alpha_1 l}{2}\left(\sin\frac{\alpha_1 l}{2}\cos\frac{\alpha_1 l}{4} - \cos\frac{\alpha_1 l}{2}\sin\frac{\alpha_1 l}{4}\right) -$$

$$-2\cos\frac{\alpha_1 l}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1 l}{2}\cos\frac{\alpha_1 l}{4} + \sin\frac{\alpha_1 l}{2}\sin\frac{\alpha_1 l}{4}\right) = 0,$$

преобразовав которое будем иметь

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1 l}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \text{(XII.31)}$$

Находим наименьший, отличный от нуля корень уравнения (XII.31)

$$\frac{\alpha_1 l}{4} = 0{,}618,$$

или

$$\alpha_1^2 = \left(\frac{2{,}47}{l}\right)^2 = \frac{P_к}{EI_1},$$

откуда

$$P_к = (2{,}47)^2 \frac{EI_1}{l^2}.$$

По формуле (XII.20)

$$\mu = \frac{\pi}{2{,}47} = 1{,}27.$$

§ XII.4. Энергетический метод приближенного определения критической силы

Определение критической силы для сжатого стержня, основанное на решении уравнения (XII.4) (определение точного значения P_k) с увеличением числа его участков и числа опорных устройств, приводит к громоздким вычислениям, связанным с решением сложного трансцендентного уравнения; при непрерывном изменении сечения на участках, кроме того, приходится решать линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Поэтому в таких случаях предпочитают находить приближенное значение P_k, определение которого не связано со столь громоздкими вычислениями, имеющее достаточную для практических целей точность. Одним из методов приближенного определения P_k является энергетический.

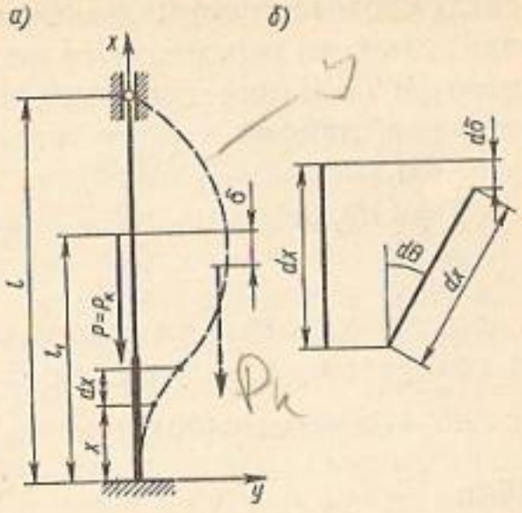


Рис. XII.9

Пусть для идеального стержня (рис. XII.9, *а*) $P = P_k$, и, потеряв устойчивость, он изогнется. Так как длина оси стержня при изгибе не изменяется, сечение, в котором приложена сила P, переместится вниз на δ. Тогда (см. § VI.1)

$$u = A, \qquad \text{(XII.32)}$$

где u – увеличение потенциальной энергии деформации стержня за счет изгиба в результате потери устойчивости,

$$A = P_k\delta, \qquad \text{(XII.33)}$$

A – работа силы P_k на перемещении δ. Двойки в знаменателе выражения A нет потому, что когда происходит потеря устойчивости, сила P_k приложена в полную величину.

По (VI.31)

$$u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_z^2}{EI_{\min}}dx. \qquad \text{(XII.34)}$$

Подставив в (XII.34) выражение M_z из (XII.3) через y'', получим

$$u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_{\min}(y'')^2\,dx. \qquad \text{(XII.35)}$$

Элемент оси стержня, имевший до потери устойчивости бесконечно малую длину dx, сохранит ее и после потери устойчивости (длина оси при изгибе не изменяется), повернувшись на бесконечно малый угол $d\theta$ (рис. XII.9, *б*) (в силу бесконечной малости dx после потери устойчивости элемент

следует считать прямолинейным). За счет этого верхнее сечение элемента переместится по вертикали относительно нижнего на $d\delta$. Поместив начало координат в нижнем сечении стержня, найдем

$$\delta = \int_0^{l_1} d\delta, \qquad \text{(XII.36)}$$

где l_1 – расстояние от нижнего сечения стержня до сечения, в котором приложена сила P. Из рис. XII.9

$$d\delta = dx - dx\cos(d\theta),$$

или

$$d\delta = 2\sin^2\frac{d\theta}{2}dx. \qquad \text{(XII.37)}$$

Для малых углов

$$\sin\frac{d\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} = \frac{y'}{2}. \qquad \text{(XII.38)}$$

Подставив в (XII.37) из (XII.38)

$$\sin\frac{d\theta}{2} = \frac{y'}{2},$$

будем иметь

$$d\delta = \frac{1}{2}(y')^2\,dx. \qquad \text{(XII.39)}$$

Подстановка выражения $d\delta$ из (XII.50) в (XII.47) даст

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}(y')^2\,dx. \qquad \text{(XII.40)}$$

Подставив в (XII.33) выражение δ из (XII.40), а (XII.33) и (XII.35) в (XII.32), получим энергетическую формулу для определения P_k:

$$P_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_{\min}(y'')^2\,dx}{\int_0^{l_1}(y')^2\,dx}. \qquad \text{(XII.41)}$$

Если бы нам было известно $y = y(x)$ – уравнение упругой линии стержня после потери им устойчивости с точностью до постоянного множителя, то подстановка найденных из него величин y' и y'' в (XII.41) дала бы точное значение P_k.

Получение $y = y(x)$ связано с интегрированием уравнения (XII.4) для стержня – действием, которого мы хотим избежать. Поэтому для определения P_k по формуле (XII.41) уравнением $y = y(x)$ приходится задаваться, в результате чего найденное значение P_k будет приближенным. Задаваясь $y = y(x)$, следует опираться на следующие рекомендации:

1) график $y = y(x)$ по форме должен совпадать с устойчивой формой равновесия оси стержня при $P \geqslant P_k$ (должен иметь одинаковое число точек перегиба с этой формой);

2) должны удовлетворяться граничные условия для y, y' и y'' (граничные условия для изгибающего момента).

При выборе $y = y(x)$, основанном на этих рекомендациях, приближенное значение μ, найденное по (XII.41), как показывают сравнения с найденными точными значениями, не отличается от них больше чем на 2%. Важно отметить, что значение μ, найденное по (XII.41), будет всегда заниженным, а значение P_k – завышенным.

Пример XII.2. Пользуясь формулой (XII.41), найти μ для стержня постоянного сечения (рис. XII.10).

Считаем, что $P = P_k$, и изображаем на рис. XII.10 штриховой линией устойчивую форму равновесия оси стержня.

Выписываем граничные условия для y, y' и y'':

$[y]_{x=0} = 0$, так как нижнее сечение не перемещается;

$[y']_{x=0} = 0$, так как нижнее сечение не поворачивается;

$[y]_{x=l/2} = 0$, так как среднее сечение не перемещается;

$[y'']_{x=l} = 0$, так как $[M_z]_{x=l} = EI_{\min}[y'']_{x=l} = 0$.

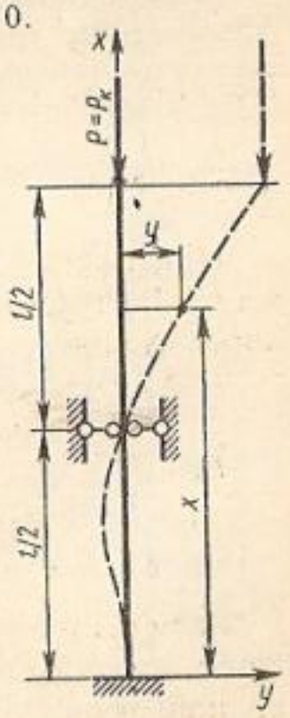


Рис. XII.10

Задаемся $y = y(x)$ в форме полинома с числом членов на единицу большим числа граничных условий, которому необходимо удовлетворить

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4. \qquad \text{(XII.42)}$$

Находим:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3, \qquad \text{(XII.43)}$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2. \qquad \text{(XII.44)}$$

Приняв $y = y(x)$ в виде (XII.42), мы, во-первых, сможем удовлетворить четырем граничным условиям, и, во-вторых, график этого уравнения после определения a_i по форме будет совпадать с упругой линией стержня после потери им устойчивости.

Определяем a_i, подставляя граничные условия в (XII.42)–(XII.44):

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,$$

$$\begin{cases} a_2\dfrac{l^2}{4}+a_3\dfrac{l^3}{8}+a_4\dfrac{l^4}{16}=0, \\ 2a_2+6a_3l+12a_4l^2=0. \end{cases} \qquad \text{(XII.45)}$$

Считая a_2 известным, выражением a_3 и a_4 через a_2, записав для этого систему (XII.45) в нормальном виде

$$\begin{cases} 2la_3+l^2a_4=-4a_2 \\ 3la_3+6l^2a_4=-a_2. \end{cases} \qquad \text{(XII.46)}$$

Решая (XII.46), найдем

$$a_3=\frac{-24l^2+l^2}{12l^3-3l^3}=-\frac{23}{9l}a_2, \quad a_4=\frac{12l-2l}{9l^3}a_2=\frac{10}{9l^2}a_2.$$

Подставляя найденные выражения a_i в (XII.42), получим приближенное уравнение $y=y(x)$, удовлетворяющее выписанным граничным условиям

$$y=a_2\left(x^2-\frac{23}{9}\cdot\frac{x^3}{l}+\frac{10}{9}\cdot\frac{x^4}{l^2}\right). \qquad \text{(XII.47)}$$

Последовательно дифференцируем (XII.47)

$$y'=a_2\left(2x-\frac{23}{3}\cdot\frac{x^2}{l}+\frac{40}{9}\cdot\frac{x^3}{l^2}\right),$$

$$y''=2a_2\left(1-\frac{23}{3}\cdot\frac{x}{l}+\frac{20}{3}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Приравняв y'' нулю и решив полученное квадратное уравнение, убедимся, что уравнение (XII.47) имеет на интервале $0<x<l$, так же как и устойчивая форма равновесия оси стержня при $P\geqslant P_k$ (рис. XII.10), одну точку перегиба, расположенную на интервале $0<x<\frac{l}{2}$. Действительно,

$$20\left(\frac{x}{l}\right)^2-23\frac{x}{l}+3=0,$$

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{1,2}=\frac{23\pm\sqrt{529-240}}{40}=\frac{23-17}{40},$$

откуда

$$x_1=0{,}15l, \quad x_2=l.$$

Вычисляем интегралы, входящие в (XII.41), учитывая, что $EI_{\min}=\text{const}$:

$$\int_0^l (y'')^2\,dx=4a_2^2\int_0^l\left(1-\frac{23}{3}\cdot\frac{x}{l}+\frac{20}{3}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right)^2dx=$$

$$=4a_2^2\int_0^l\left(1+\frac{529}{9}\cdot\frac{x^2}{l^2}+\frac{400}{9}\cdot\frac{x^4}{l^4}-\frac{46}{3}\cdot\frac{x}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{40}{3}\cdot\frac{x^2}{l^2}-\frac{460}{9}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right)dx=\frac{380}{135}a_2^2,$$

$$\int_0^l (y')^2\,dx=a_2^2\int_0^l\left(2x-\frac{23}{3}\cdot\frac{x^2}{l}+\frac{40}{9}\cdot\frac{x^3}{l^2}\right)^2dx=$$

$$=a_2^2\int_0^l\left(4x^2+\frac{529}{9}\cdot\frac{x^4}{l^2}+\frac{1600}{81}\cdot\frac{x^6}{l^4}-\frac{92}{3}\cdot\frac{x^3}{l}+\frac{160}{9}\cdot\frac{x^4}{l^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1840}{27}\cdot\frac{x^5}{l^3}\right)dx=\frac{5008}{11\,340}l^2a_2^2.$$

Подставив эти интегралы в (XII.41), получим

$$P_k=\frac{11\,340}{5008}\cdot\frac{380}{135}\cdot\frac{EI_{\min}}{l^2}=6{,}37\frac{EI_{\min}}{l^2}.$$

Так как $\eta=6{,}37$, по формуле (XII.20)

$$\mu=\frac{\pi}{\sqrt{6{,}37}}=\frac{3{,}14}{2{,}53}=1{,}24.$$

Для расчетной схемы (рис. XII.9) точное значение $\mu=1{,}26$, следовательно, отклонение приближенного значения от точного

$$\Delta=\frac{1{,}26-1{,}24}{1{,}24}\cdot 100\,\%=1{,}61\,\%.$$

Пример XII.3. Для стержня постоянного сечения, нагруженного силами P (рис. XII.11), найти значение μ, воспользовавшись формулой (XII.41).

Считаем, что $P=P_k$ и изображаем на рис. XII.11 устойчивую форму равновесия оси стержня штриховой линией.

Выписываем граничные условия для y, y', y'':

$$[y]_{x=0}=[y]_{x=l}=[y'']_{x=0}=[y'']_{x=l}=0. \qquad \text{(XII.48)}$$

Учитывая, что устойчивая форма равновесия оси стержня по форме совпадает с полуволной синусоиды, принимаем $y=y(x)$ в виде

$$y=a\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad \text{(XII.49)}$$

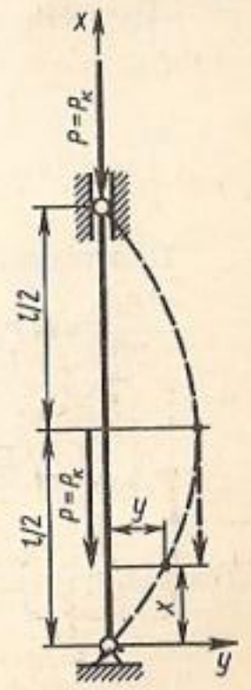


Рис. XII.11

Находим:

$$y' = a\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}, \tag{XII.50}$$

$$y'' = -a\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{XII.51}$$

Уравнения (XII.49) и (XII.51) удовлетворяют граничным условиям (XII.48), что можно проверить подстановкой.

При нескольких сжимающих силах, действующих на стержень, их работа при потере им устойчивости запишется так:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} P_j \int_0^{l_j} (y')^2\, dx, \tag{XII.52}$$

где l_j – расстояние от нижнего конца стержня до сечения, в котором приложена сила P_j; m – общее число сжимающих сил, действующих на стержень. Подставив (XII.32) и (XII.34) в (XII.52), получим формулу для определения критической совокупности сжимающих сил, действующих на стержень:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} EI_{\min}(y'')^2\, dx = \sum_{j=1}^{m} P_j \int_0^{l_j} (y')^2\, dx. \tag{XII.53}$$

Вычисляем интегралы:

$$\int_0^l (y'')^2\, dx = a^2\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\, dx = a^2\frac{\pi^4}{2l^3},$$

$$\int_0^l (y')^2\, dx = a^2\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{l}\, dx = a^2\frac{\pi^2}{2l^2},$$

$$\int_0^{l/2} (y')^2\, dx = a^2\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^{l/2} \cos^2\frac{\pi x}{l}\, dx = a^2\frac{\pi^2}{4l^2}.$$

Подставляя их в (XII.53), будем иметь

$$\frac{\pi^4 EI_{\min}}{2l^3} = P_k\frac{\pi^2}{l}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right),$$

или

$$2P_k = \frac{4}{3}\pi^2\frac{EI_{\min}}{l^2}.$$

Так как $\eta = \frac{4}{3}\pi^2$, по формуле (XII.19)

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}33}} = 0{,}862.$$

Для расчетной схемы (рис. XII.12) точное значение $\mu = 0{,}87$.

Отклонение

$$\Delta = \frac{0{,}87 - 0{,}862}{0{,}862}\cdot 100\,\% = 0{,}928\,\%.$$

Пример XII.5. Для конического консольного стержня (рис. XII.12) найти, пользуясь (XII.41), значение μ.

Считаем, что $P = P_k$, и изображаем на рис. XII.12 устойчивую форму равновесия оси стержня штриховой линией.

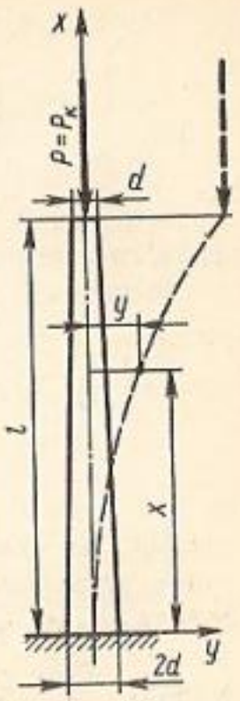


Рис. XII.12

Выписываем граничные условия для y, y' и y'':

$$[y]_{x=0} = [y']_{x=0} = [y'']_{x=l} = 0.$$

Принимаем $y = y(x)$ в виде

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \tag{XII.54}$$

Находим:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x.$$

Подставляя граничные условия в выражения y, y' и y'', определяем

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,$$
$$2a_2 + 6a_3 l = 0, \tag{XII.55}$$

или

$$a_2 = -3a_3 l. \tag{XII.56}$$

Подставив (XII.56) и (XII.55) в (XII.54), получим

$$y = a_3(x^3 - 3lx^2),$$

или

$$y = a_3 l^3\left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2}\right). \tag{XII.57}$$

Находим:

$$y' = 3a_3 l^2\left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x}{l}\right),$$

$$y'' = 6a_3 l\left(\frac{x}{l} - 1\right).$$

Составляем уравнение $I_{\min} = I_{\min}(x)$.

Из рис. XII.12

$$d(x) = d\left(2 - \frac{x}{l}\right).$$

Момент инерции текущего сечения

$$I_{\min}(x) = I_0\left(2-\frac{x}{l}\right)^4,$$

где $I_0 = \dfrac{\pi d^4}{64}$ – момент инерции относительно центральной оси верхнего сечения стержня.

Вычисляем интегралы, входящие в (XII.41):

$$\int_0^l I_{\min}(y'')^2\,dx = 36a_3^2 I_0 l^2 \int_0^l \left(2-\frac{x}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l}-1\right)^2 dx = \frac{4212}{35}a_3^2 I_0 l^2,$$

$$\int_0^l (y')^2\,dx = 9a_3^2 l^4 \int_0^l \left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{24}{5}a_3^2 l^4.$$

Подставив значения интегралов в (XII.41), найдем

$$P_к = \frac{4212\cdot 5}{35\cdot 24}\cdot\frac{EI_0}{l^2} = 25{,}1\frac{EI_0}{l^2}.$$

Так как $\eta = 25{,}1$, по формуле (XII.20)

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{25{,}1}} = 0{,}627.$$

§ XII.5. График критических напряжений и расчет на устойчивость

Критическое напряжение в стержне

$$\sigma_к = \frac{P_к}{F},$$

согласно (XII.19), определяется по формуле

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 F},$$

которую приводят к виду

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \text{(XII.58)}$$

и называют формулой Эйлера для определения критических напряжений.

В (XII.58)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} - \qquad \text{(XII.59)}$$

гибкость стержня,

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} \qquad \text{(XII.60)}$$

наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня.

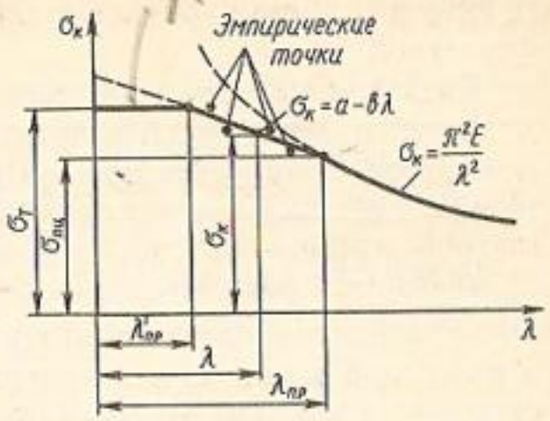


Рис. XII.13

График зависимости $\sigma_к = \sigma_к(\lambda)$ называют графиком критических напряжений. В системе координат (λ, σ) графиком уравнения (XII.58) будет гипербола Эйлера (рис. XII.13).

Формулой (XII.58) можно пользоваться при условии, что

$$\sigma_к \leqslant \sigma_{пц},$$

так как в основу ее вывода был положен закон Гука, который нарушается, если $\sigma_к > \sigma_{пц}$. В соответствии с этим рабочая часть гиперболы Эйлера, показанная на рис. XII.13 сплошной линией, ограничивается слева прямой с уравнением

$$\lambda = \lambda_{пр},$$

где $\lambda_{пр}$ – предельная гибкость, которую можно найти, приравняв $\sigma_к$ из (XII.58) $\sigma_{пц}$:

$$\sigma_{пц} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пр}^2},$$

откуда

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \qquad \text{(XII.61)}$$

Следовательно, формула (XII.58) применима только к стержням с

$$\lambda \geqslant \lambda_{пр}.$$

Для стержней с $\lambda < \lambda_{пр}$ критические напряжения можно определять по эмпирическим формулам. Эмпирические формулы получают на основании испытаний серии шарнирно опертых стержней, имеющих различные $\lambda < \lambda_{пр}$, которые доводят до потери устойчивости. В результате для каждого из них находят критическое напряжение $\sigma_{кi}$, соответствующее его гибкости λ_i. Опытные точки с координатами (λ_i, $\sigma_{кi}$) наносят на плоскость (λ, $\sigma_к$) и строят по ним аппроксими-

рующую линию, уравнение которой будет эмпирической формулой.

Если $\lambda < \lambda_{пр}$, то зависимость $\sigma_к = \sigma_к(\lambda)$ с достаточной для практических целей точностью для пластичных материалов аппроксимируется прямой линией (рис. XII.13) с уравнением

$$\sigma_к = a - b\lambda. \tag{XII.62}$$

Это уравнение называют эмпирической **формулой Ясинского**, а входящие в нее величины a и b – коэффициентами Ясинского. Для хрупких материалов эмпирическими формулами будут

$$\sigma_к = \sigma_в - \frac{\sigma_в - \sigma_{пц}}{\lambda_{пр}}\lambda, \tag{XII.63}$$

или

$$\sigma_к = \sigma_в - c\lambda - d\lambda^2. \tag{XII.64}$$

Величины a, b, c и d, входящие в формулы (XII.62) и (XII.64), имеют размерности напряжений.

Проведя на рис. XII.13 прямую с уравнением

$$\sigma_к = \sigma_т,$$

получим график критических напряжений для пластичного материала, изображенный на этом рисунке сплошной линией. Абсциссу точки пересечения прямых $\sigma_к = \sigma_т$ и $\sigma_к = a - b\lambda$ обозначим на графике $\lambda'_{пр}$.

Получим общие выражения для коэффициентов Ясинского a и b, составив с этой целью уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(\lambda'_{пр}, \sigma_т)$ и $(\lambda_{пр}, \sigma_{пц})$:

$$\frac{\lambda - \lambda'_{пр}}{\lambda_{пр} - \lambda'_{пр}} = \frac{\sigma_к - \sigma_т}{\sigma_{пц} - \sigma_т},$$

из которого

$$a = \frac{\sigma_т\lambda_{пр} - \sigma_{пц}\lambda'_{пр}}{\lambda_{пр} - \lambda'_{пр}}, \tag{XII.65}$$

$$b = \frac{\sigma_т - \sigma_{пц}}{\lambda_{пр} - \lambda'_{пр}}. \tag{XII.66}$$

На основании анализа многочисленных опытных данных установлено, что можно принять: для сталей

$$\lambda'_{пр} = 0{,}4\lambda_{пр}, \tag{XII.67}$$

для цветных металлов

$$\lambda'_{пр} = 0{,}25\lambda_{пр}. \tag{XII.68}$$

Коэффициенты c и d определяются на основании условий равенства $\sigma_к$ из (XII.64) $\sigma_{пц}$ и первых производных от (XII.58) и (XII.64) при $\lambda = \lambda_{пр}$.

Из графика критических напряжений (рис. XII.13), который является основой расчета на устойчивость, следует:

1) для стержней с $\lambda \geqslant \lambda_{пр}$ (длинные стержни) опасным состоянием будет потеря устойчивости (при $\lambda \geqslant \lambda_{пр}$, $\sigma_к < \sigma_т$) и $\sigma_к$ для них определяется по формуле (XII.58);

2) для стержней с $\lambda'_{пр} < \lambda < \lambda_{пр}$ (средние стержни) опасным состоянием будет потеря устойчивости (при $\lambda'_{пр} < \lambda < \lambda_{пр}$, $\sigma_к < \sigma_т$) и $\sigma_к$ для них определяется по эмпирической формуле;

3) для стержней с $\lambda \leqslant \lambda'_{пр}$ (короткие стержни) опасным состоянием будет потеря устойчивости (при $\lambda \leqslant \lambda'_{пр}$, $\sigma_к \geqslant \sigma_т$) и для них $\sigma_к = \sigma_т$.

Сформулируем порядок поверочного расчета на устойчивость стержня из пластичного материала:

1. Методом Эйлера или энергетическим методом находим μ.

2. По формуле (XII.59) определяем λ.

3. По формуле (XII.61) определяем $\lambda_{пр}$ и по (XII.67) или (XII.68) $\lambda'_{пр}$.

4. Находим критическое напряжение:

если $\lambda \geqslant \lambda_{пр}$, то $\sigma_к = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; если $\lambda'_{пр} < \lambda < \lambda_{пр}$, то после определения по формулам (XII.65) и (XII.66) a и b

$$\sigma_к = a - b\lambda,$$

если $\lambda \leqslant \lambda'_{пр}$, то $\sigma_к = \sigma_т$.

5. Согласно требованиям задачи находим или запас устойчивости по формуле (XII.3), или допускаемое значение сжимающей силы по формуле

$$[P] = \frac{\sigma_к F}{[n]_у}. \tag{XII.69}$$

При поверочном расчете стержня из хрупкого материала в п. 3 выпадает определение $\lambda'_{пр}$, а в п. 4 при $\lambda < \lambda_{пр}$ $\sigma_к$ определяется или по (XII.63), или по (XII.64).

Из (XII.2) условие устойчивости проектировочного расчета запишется так:

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma]_у}. \tag{XII.70}$$

В (XII.70) входят две неизвестные величины: F и $[\sigma]_y = \frac{\sigma_к}{[n]_y}$, так как $\sigma_к$ зависит от размера сечения, который неизвестен. Поэтому проектировочный расчет на устойчивость приходится вести подбором, пользуясь методом последовательных приближений.

С увеличением гибкости вероятность увеличения такого начального несовершенства, как начальная кривизна оси стержня, возрастает. В связи с этим зависимость $[n]_y = [n]_y(\lambda)$ принимают (рис. XII.14):
при $0 < \lambda < \lambda_{пр}$ возрастающей по параболическому закону

$$[n]_y = A + B\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пр}}\right)^2, \qquad \text{(XII.71)}$$

а при $\lambda > \lambda_{пр}$

$$[n]_y = A + B. \qquad \text{(XII.72)}$$

Безразмерные величины A и B зависят от материала и их принимают: для пластичных металлов $A = 1{,}8$, $B = 1{,}2$; для чугуна $A = 5$, $B = 0{,}5$, для дерева $A = 2{,}8$, $B = 0{,}4$.

Пример XII.5. Определить допускаемое значение силы P для стержня (рис. XII.15, *а*), имеющего сечения (рис. XII.15, *б*). Исходные данные: $l = 150$ см; $a = 3$ см; материал – Ст3, $\sigma_т = 240$ МПа, $\sigma_{пц} = 200$ МПа.

1. Из примера XII.2 точное значение $\mu = 1{,}26$.

2. По формуле (XII.59) определяем гибкость стержня. Находим:

$$I_{min} = I_y = \frac{3a \cdot 27a^3}{12} - 2\left(\frac{a^4}{12} + 2a^4\right) = (6{,}75 - 4{,}17)a^4 = 2{,}58a^4,$$

$$F = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2,$$

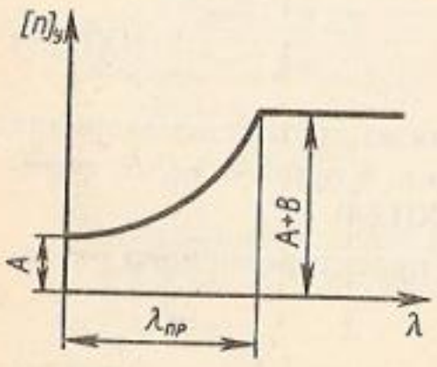


Рис. XII.14

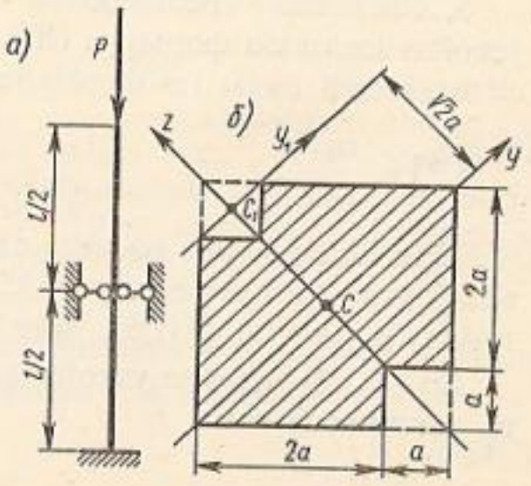


Рис. XII.15

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = a\sqrt{\frac{2{,}58}{7}} = 3 \cdot 0{,}607 = 1{,}82 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1{,}26 \cdot 150}{1{,}82} = 104.$$

3. По формуле (XII.61) определяем

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}} = 100.$$

4. Находим значение $\sigma_к$. Так как $\lambda > \lambda_{пр}$, следует $\sigma_к$ определять по формуле Эйлера

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^5}{1{,}08 \cdot 10^4} = 185 \text{ МПа}.$$

5. По формуле (XII.69)

$$[P] = \frac{\sigma_к F}{[n]_y}. \qquad \text{(XII.73)}$$

По (XII.72) для стали $[n]_y = 3$. Следовательно,

$$[P] = \frac{185 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} = 3{,}89 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Пример XII.6. Воспользовавшись сортаментом, провести проектировочный расчет стержня (рис. XII.16, *а*), подобрав номер швеллера его сечения (рис. XII.16, *б*). Исходные данные: $P = 4 \cdot 10^5$ Н; $l = 4$ м; материал – Ст3; для стержня с опорными устройствами (рис. XII.16, *а*) $\mu = 1{,}35$.

Задача подбора номера профиля решается методом последовательных приближений, который состоит в том, что неравенство (XII.70) решается с помощью последовательности приближений, сходящейся к его решению. Последовательность приближений строится рекуррентно, т. е. каждое новое приближение вычисляется исходя из предыдущего; первое приближение выбирается в известной степени произвольно. Величинам, вычисляемым в данном приближении, присваиваем его номер.

1. Первое приближение.

Примем в качестве первого приближения для потребной площади швеллера ее значение, найденное из расчета на сжатие, считая $[n] = 2$,

$$(F^I_{потр})_1 = \frac{P}{2[\sigma]_1} = \frac{P[n]}{2\sigma_т} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^8} = 16{,}7 \text{ см}^2.$$

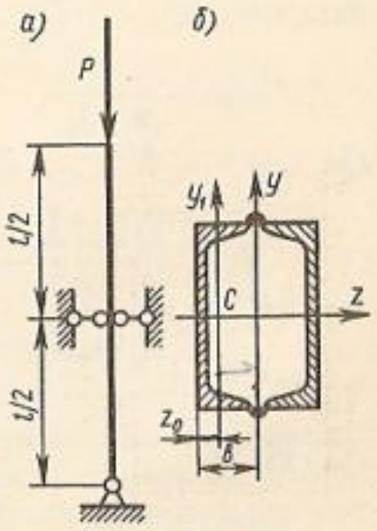


Рис. XII.16

По ГОСТу выбираем швеллер № 14а,

у которого: $F^{[} = 17$ см^2; $b = 6{,}2$ см; $I_z^{[} = 545$ см^4; $I_{y1}^{[} = 57{,}5$ см^4; $z_0 = 1{,}87$ см.

Проводим поверочный расчет стержня, считая, что его сечение состоит из двух швеллеров № 14а. Находим:

$$I_z = 2I_z^{[} = 1090 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2\left[I_{y1}^{[} + F^{[}(b - z_0)^2\right] = 2(57{,}5 + 17{,}7 \cdot 18{,}8) = 781 \text{ см}^4.$$

$I_z > I_y$, поэтому $I_{min} = I_y = 781$ см^4.

Определяем

$$(i_{min})_1 = \sqrt{\frac{I_y}{2F^{[}}} = \sqrt{\frac{781}{2 \cdot 17}} = 4{,}79 \text{ см},$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{(i_{min})_1} = \frac{1{,}35 \cdot 400}{4{,}79} = 113.$$

Из примера XII.5 для Ст3 $\lambda_{пр} = 100$. Так как $\lambda_1 > \lambda_{пр}$,

$$(\sigma_к)_1 = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_1)^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^5}{1{,}28 \cdot 10^4} = 156 \text{ МПа}.$$

По (XII.72) $[n]_{y_1} = 3$, следовательно,

$$[\sigma]_{y_1} = \frac{156}{3} = 52 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение в стержне

$$(\sigma)_1 = \frac{P}{2F^{[}} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 17} = 118 \text{ МПа}.$$

Так как $(\sigma)_1$ превышает $[\sigma]_{y_1}$ больше чем на 5%, неравенство (XII.81) для стержня, сечение которого состоит из швеллеров № 12а, не удовлетворяется.

2. Второе приближение.

Потребную площадь швеллера в n-м приближении при $n > 1$ находим как

$$(F_{потр}^{[})_n = \frac{P}{2[\sigma]_{y_n}}, \qquad \text{(XII.74)}$$

где

$$[\sigma]_{y_n} = \frac{(\sigma)_{n-1} + [\sigma]_{y(n-1)}}{2}. \qquad \text{(XII.75)}$$

По (XII.75)

$$[\sigma]_{y_2} = \frac{118 + 52}{2} = 85 \text{ МПа}.$$

По (XII.74)

$$(F_{потр}^{[})_2 = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 85 \cdot 10^6} = 2{,}35 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 23{,}5 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбираем швеллер № 20а, у которого: $F^{[} = 25{,}2$ см^2; $b = 8$ см; $I_z = 1670$ см^4; $I_y = 139$ см^4; $z_0 = 2{,}23$ см.

Проводим поверочный расчет стержня, считая, что его сечение состоит из швеллеров № 20а. Находим:

$$I_z = 2I_z^{[} = 3340 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2(I_{y1}^{[} + F^{[}(b - z_0)^2) = 2(139 + 25{,}2 \cdot 39{,}7) = 1930 \text{ см}^4;$$

$I_z > I_y$, поэтому $I_{min} = I_y = 1930$ см^4.

Определяем:

$$(i_{min})_2 = \sqrt{\frac{I_y}{2F^{[}}} = \sqrt{\frac{1930}{50{,}4}} = 6{,}21 \text{ см},$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{(i_{min})_2} = \frac{1{,}35 \cdot 400}{6{,}21} = 87.$$

Из примера XII.5 $\lambda_{пр} = 100$; по (XII.78) $\lambda'_{пр} = 40$. Так как $\lambda'_{пр} < \lambda_2 < \lambda_{пр}$, критическое напряжение следует определять по формуле (XII.62). Находим коэффициенты Ясинского, взяв из примера XII.5 для Ст3 $\sigma_т = 240$ МПа, $\sigma_{пц} = 200$ МПа. По формулам (XII.65), (XII.66) и (XII.62):

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sigma_т \lambda_{пр} - \sigma_{пц} \lambda'_{пр}}{\lambda_{пр} - \lambda'_{пр}} = \dfrac{2{,}4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 \cdot 40}{100 - 40} = 267 \text{ МПа}, \\ b = \dfrac{\sigma_т - \sigma_{пц}}{\lambda_{пр} - \lambda'_{пр}} = \dfrac{2{,}4 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^2}{100 - 40} = 0{,}667 \text{ МПа}, \end{cases}$$

$$(\sigma_к)_2 = a - b\lambda = 267 - 0{,}667 \cdot 87 = 209 \text{ МПа}.$$

По (XII.70)

$$[n]_{y_2} = 1{,}8 + 1{,}2\left(\frac{87}{100}\right)^2 = 2{,}71,$$

следовательно,

$$[\sigma]_{y2} = \frac{209}{2{,}71} = 77{,}1 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение в стержне

$$(\sigma)_2 = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 10^4}{50{,}4 \cdot 10^6} = 79{,}4 \text{ МПа}.$$

Находим отклонение

$$\Delta = \frac{[\sigma]_{y_2} - (\sigma)_2}{[\sigma]_{y_2}} \cdot 100\% = \frac{77{,}1 - 79{,}4}{77{,}1} \cdot 100\% = -2{,}98\%.$$

Отклонение $(\sigma)_2$ от $[\sigma]_{y_2}$ в неблагоприятную сторону не превышает 5%, поэтому неравенство (XII.70) следует считать удовлетворяющимся и принять в качестве составляющего элемента сечения стержня швеллер № 20а.

Глава XIII. ПРЯМОЙ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

§ XIII.1. Дифференциальные уравнения упругой линии и изгибающего момента

Совместные прямой поперечный изгиб и растяжение или сжатие стержня, гибкость которого $\lambda \geqslant \lambda'_{пр}$, называются прямым продольно-поперечным изгибом.

Стержень, испытывающий продольно-поперечный изгиб, будем называть балкой.

В дальнейшем ограничимся изучением продольно-поперечного изгиба балки, нагруженной кроме поперечных сил сжимающими силами S (рис. XIII.1).

В текущем сечении i-го участка балки обозначим: M_{zi} – изгибающий момент; $M^{п}_{zi}$ – изгибающий момент от поперечных сил; y_i – прогиб, q_i – погонную интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Изгибающий момент в текущем сечении i-го участка балки (рис. XIII.1) равен сумме изгибающих моментов от поперечных и продольных сил в этом сечении

$$M_{zi} = M^{п}_{zi} - Sy_i. \qquad \text{(XIII.1)}$$

Знак минус перед изгибающим моментом от продольной силы в (XIII.1) стоит по тем же соображениям, что и в (XII.5), перед изгибающим моментом от силы P.

Подставив в (XIII.1) выражение

$$M_{zi} = EI_z y''_i,$$

получим дифференциальное уравнение упругой линии второго порядка на i-м участке балки при прямом продольно-поперечном изгибе

$$y''_i + \alpha^2 y_i = m_{zi}, \qquad \text{(XIII.2)}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{S}{EI_z}, \qquad m_{zi} = \frac{M^{п}_{zi}}{EI_z}.$$

Общее решение (XIII.2) запишется в виде

$$y_i = C_{1i} \sin \alpha x + C_{2i} \cos \alpha x + y^*_i, \qquad \text{(XIII.3)}$$

где y^*_i – частное решение (XIII.2).

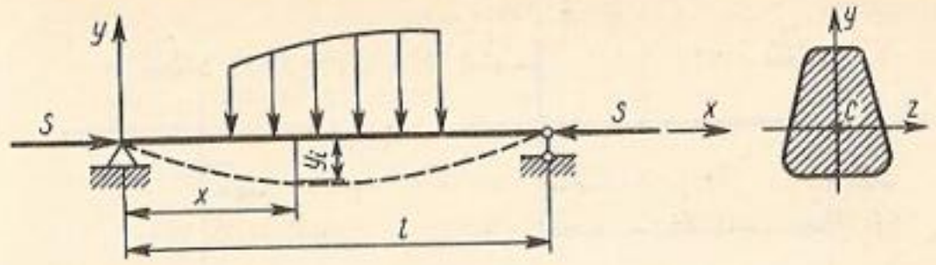


Рис. XIII.1

Дважды дифференцируя (XIII.2) по x, получим дифференциальное уравнение упругой линии четвертого порядка на i-м участке балки при прямом продольно-поперечном изгибе

$$y^{IV}_i + \alpha^2 y''_i = \bar{q}_i, \qquad \text{(XIII.4)}$$

где

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{EI_z}.$$

Общее решение (XIII.4) запишется в виде

$$y_i = C_{1i} \sin \alpha x + C_{2i} \cos \alpha x + C_{3i} x + C_4 + y^*_i, \qquad \text{(XIII.5)}$$

где y^*_i – частное решение (XIII.4).

Подставив в (XIII.4)

$$y^{IV}_i = \frac{M''_{zi}}{EI_z} \text{ и } y'' = \frac{M_{zi}}{EI_z},$$

получим дифференциальное уравнение изгибающего момента на i-м участке балки при прямом продольно-поперечном изгибе

$$M''_{zi} + \alpha^2 M_{zi} = q_i, \qquad \text{(XIII.6)}$$

общее решение которого запишется в виде

$$M_{zi} = C_{1i} \sin \alpha x + C_{2i} \cos \alpha x + M^*_{zi}, \qquad \text{(XIII.7)}$$

где M^*_{zi} – частное решение (XIII.6).

Если на балку наложены лишние связи, то решение задачи о ее продольно-поперечном изгибе следует проводить на основании (XIII.4), используя (XIII.5); если же балка не имеет лишних связей, то решение следует проводить на основании (XIII.6), используя (XIII.7). Получим граничные условия для определения произвольных постоянных, входящих в общие решения (XIII.7), для участков балки без лишних связей.

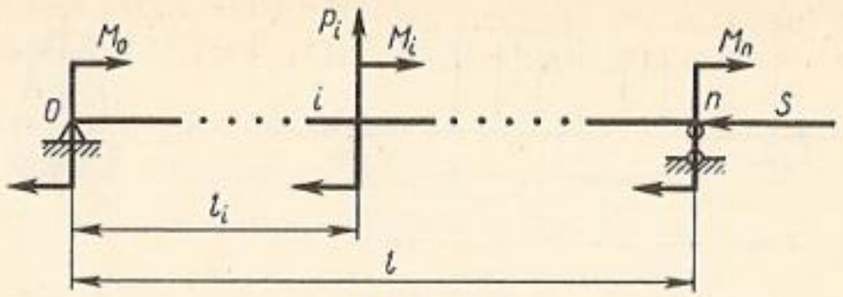


Рис. XIII.2

Пусть двухопорная балка постоянного сечения, без лишних связей (рис. XIII.2) имеет n участков и, следовательно, $n-1$ границу между ними. Чтобы найти уравнения изгибающих моментов на всех участках балки, надо определить $2n$ произвольных постоянных, входящих в общие решения (XIII.7) на ее участках. Для определения произвольных постоянных можно выписать два граничных условия на концах балки и по два граничных условия на каждой границе участков, на том основании, что скачки в изгибающем моменте и перерезывающей силе соответственно равны моменту сосредоточенной пары M_i и сосредоточенной силе P_i, приложенным на этой границе. Или:

$$1)\ [M_{z1}]_{x=0} = M_0;\ \dots;\ 2i)\ [M_{z,\,i+1} - M_{zi}]_{x=l_i} = M_i;$$
$$2i+1)\ [M'_{z,\,i+1} - M'_{zi}]_{x=l_i} = P_i;\ \dots;\ 2n)\ [M_{zn}]_{x=l} = -M_n. \qquad \text{(XIII.8)}$$

Таким образом, число граничных условий равно $2+2(n-1) = 2n$ – числу произвольных постоянных, и задача по их определению из системы $2n$ линейных уравнений всегда однозначно разрешима.

После определения уравнений M_{zi} уравнения упругих линий на всех участках балки могут быть найдены из (XIII.1) по формуле

$$y_i = \frac{1}{S}(M^{\text{п}}_{zi} - M_{zi}). \qquad \text{(XIII.9)}$$

Пример XIII.1. Для балки (рис. XIII.3) составить уравнения изгибающих моментов и упругих линий на участках.

1. Пользуясь (XIII.7) и учитывая, что $q_{\text{I}} = q_{\text{II}} = 0$, выписываем общие решения для $M_{z\text{I}}$ и $M_{z\text{II}}$:

$$M_{z\text{I}} = C_{11}\sin\alpha x + C_{21}\cos\alpha x,$$
$$M_{z\text{II}} = C_{12}\sin\alpha x + C_{22}\cos\alpha x. \qquad \text{(XIII.10)}$$

2. Выписываем граничные условия для определения произвольных постоянных, входящих в (XIII.10):

$$[M_{z\text{I}}]_{x=0} = 0,$$
$$[M_{z\text{II}} - M_{z\text{I}}]_{x=l_1} = 0,$$
$$[M'_{z\text{II}} - M'_{z\text{I}}]_{x=l_1} = -P,\ [M_{z\text{II}}]_{x=l} = 0. \qquad \text{(XII.11)}$$

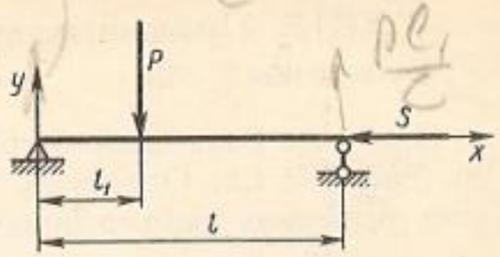


Рис. XIII.3

3. Подставляем общие решения из (XIII.10) в граничные условия (XIII.11) и, решая полученную систему линейных уравнений, находим произвольные постоянные:

$$C_{21} = 0,$$
$$\begin{cases} C_{11}\sin\alpha l_1 - C_{12}\sin\alpha l_1 - C_{22}\cos\alpha l_1 = 0, \\ C_{11}\cos\alpha l_1 - C_{12}\cos\alpha l_1 + C_{22}\sin\alpha l_1 = P/\alpha, \\ C_{12}\sin\alpha l + C_{22}\cos\alpha l = 0; \end{cases}$$
$$C_{11} = \frac{P\sin\alpha(l-l_1)}{\alpha\sin\alpha l},\ C_{12} = \frac{P\cos\alpha l\cdot\sin\alpha l_1}{\alpha\sin\alpha l},\ C_{22} = \frac{P\sin\alpha l_1}{\alpha}.$$

4. Составляем уравнения M_{zi} и y_i на участках балки. Из (XIII.10)

$$M_{z\text{I}} = \frac{P\sin\alpha(l-l_1)}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha x,\ M_{z\text{II}} = \frac{P\sin\alpha l_1}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x). \qquad \text{(XIII.12)}$$

Из рис. XIII.3

$$M^{\text{п}}_{z\text{I}} = \frac{P(l-l_1)}{l}x,\ M^{\text{п}}_{z\text{II}} = \frac{Pl_1}{l}(l-x).$$

По (XIII.9)

$$y_{\text{I}} = \frac{P}{S}\left(\frac{l-l_1}{l}x - \frac{\sin\alpha(l-l_1)}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha x\right),$$
$$y_{\text{II}} = \frac{P}{S}\left(\frac{(l-x)l_1}{l} - \frac{\sin\alpha l_1}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x)\right). \qquad \text{(XIII.13)}$$

5. При $l = 2l_1$ балка становится симметричной и поэтому

$$M_z^{\max} = [M_{z\text{I}}]_{x=l/2} = \frac{P}{2\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}. \qquad \text{(XIII.14)}$$

Из выражений (XIII.12) и (XIII.13) следует, что изгибающие моменты и прогибы линейно зависят от поперечных сил и нелинейно – от сил продольных. Такой вывод можно сделать в любом случае продольно-поперечного изгиба балки. Особенность нелинейной зависимости состоит в том, что при увеличении S в определенное число раз изгибающие моменты и прогибы могут увеличиваться в большее число раз.

§ XIII.2. Принцип независимости действия поперечных сил

Пусть на балку действуют $n-1$ заданная поперечная сила (рис. XIII.4, *а*). Определив произвольные постоянные в общих решениях дифференциального уравнения

$$M''_{zi} + \alpha^2 M_{zi} = 0 \qquad \text{(XIII.15)}$$

для участков, из граничных условий (XIII.8) для балки (рис. XIII.4, *а*), получим n частных решений этого уравнения:

$$M_{z1} = C_{11}\sin\alpha x + C_{21}\cos\alpha x,$$

. . .

$$M_{zi} = C_{1i}\sin\alpha x + C_{2i}\cos\alpha x, \qquad \text{(XIII.16)}$$

. . .

$$M_{zn} = C_{1n}\sin\alpha x + C_{2n}\cos\alpha x.$$

Каждое из частных решений (XIII.16) является уравнением изгибающего момента на участке балки (рис. XIII.4, *а*), которому оно соответствует.

Рассмотрим $n-1$ схему нагружения балки продольными силами S и одной из поперечных сил (рис. XIII.4, *б*). Определив произвольные постоянные в общих решениях дифференциального уравнения (XIII.15), из граничных условий для каждой схемы нагружения, получим $n-1$ частное решение уравнения (XIII.15)

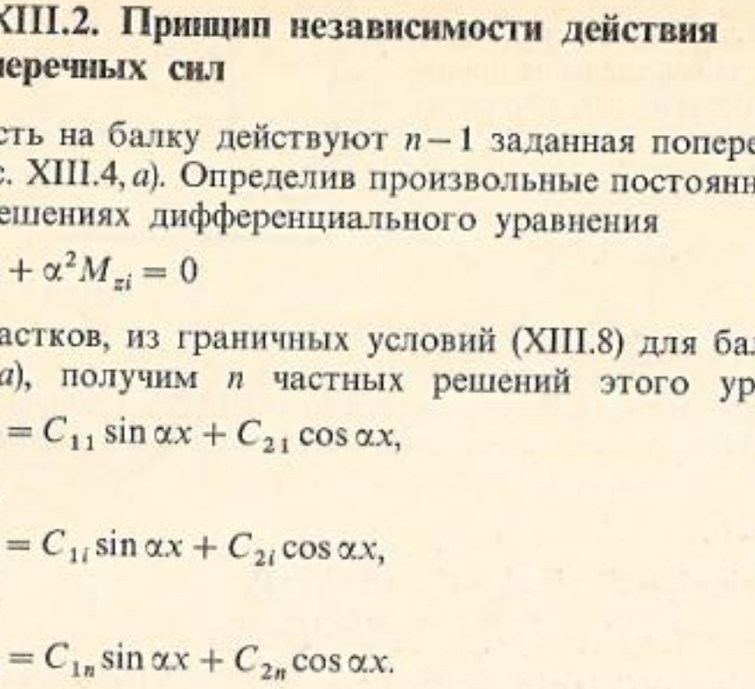


Рис. XIII.4

$$M_{zi}^{P_1} = C_{1i}^{P_1}\sin\alpha x + C_{2i}^{P_1}\cos\alpha x,$$

. . . .

$$M_{zi}^{P_к} = C_{1i}^{P_к}\sin\alpha x + C_{2i}^{P_к}\cos\alpha x, \qquad \text{(XIII.17)}$$

. . . .

$$M_{zi}^{P_{n-1}} = C_{1i}^{P_{n-1}}\sin\alpha x + C_{2i}^{P_{n-1}}\cos\alpha x,$$

где $M_{zi}^{P_к}$ – уравнение изгибающего момента на i-м участке балки, нагруженной продольными силами S и поперечной силой $P_к$.

Сумма частных решений (XIII.17) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (XIII.15) и граничным условиям для i-го участка балки (рис. XIII.4, *а*). Поэтому на основании известной из теории дифференциальных уравнений теоремы о единственности частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным граничным условиям, M_{zi} из (XIII.16) будет равняться сумме частных решений (XIII.17)

$$M_{zi} = M_{zi}^{P_1} + M_{zi}^{P_2} + \ \ldots\ + M_{zi}^{P_к} + \ldots + M_{zi}^{P_{n-1}}. \qquad \text{(XIII.18)}$$

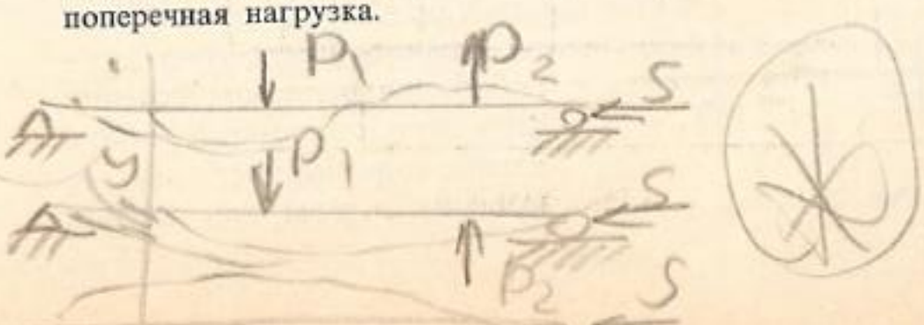
На основании (XIII.9), (XIII.16) и (XIII.17)

$$y_i = y_i^{P_1} + y_i^{P_2} + \ \ldots\ + y_i^{P_к} + \ldots + y_i^{P_{n-1}}, \qquad \text{(XIII.19)}$$

где $y_i^{P_к}$ – прогиб в текущем сечении i-го участка при нагружении балки продольными силами S и поперечной силой $P_к$.

Равенства (XIII.18) и (XIII.19) выражают принцип независимости действия поперечных сил при продольно-поперечном изгибе: изгибающий момент и прогиб в текущем сечении балки от данной совокупности поперечных сил равны алгебраической сумме изгибающих моментов и прогибов в этом сечении, найденных при действии на балку продольных сил и каждой поперечной силы.

В целях упрощения вывода равенств (XIII.18) и (XIII.19) мы рассмотрели балку (рис. XIII.4, *а*), находящуюся под действием только сосредоточенных поперечных сил. Аналогичные результаты можно получить, если на балку помимо сосредоточенных сил будут действовать сосредоточенные пары и произвольно распределенная поперечная нагрузка.



§ XIII.3. Приближенные формулы для определения прогибов и изгибающих моментов

На рис. XIII.5 изображены две схемы нагружения одной и той же балки: на рис. XIII.5, *а* – нагружение балки поперечными и продольной силой, на рис. XIII.5, *б* – только поперечными силами.

Обозначим:

y – прогиб в текущем сечении балки,

$y_п$ – прогиб в том же сечении балки при нагружении ее только поперечными силами,

δ – перемещение правого конца балки при продольно-поперечном изгибе.

Считаем, что вначале к балке прикладывается продольная сила S, а затем поперечные силы.

Из (VI.1)

$$u = A_p + A_s, \tag{XIII.20}$$

где $u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_z (y'')^2\,dx$ – увеличение потенциальной энергии деформации балки при изгибе (рис. XIII.5, *а*);

$A_p = \frac{1}{2}\sum_{к=1}^{m} P_к y_к$ – работа поперечных сил, приложенных к балке (рис. XIII.5, *а*); $A_s = S\delta$ – работа продольной силы.

Так как S на перемещении δ совершает работу будучи приложена в полную величину, произведение $S\delta$ в выражении A_s на два не делится.

По (XII.40)

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2\,dx.$$

Подставив в (XIII.20) выражения u, A_p и δ через y, y' и y'', будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_z (y'')^2\,dx = \sum_{к=1}^{m} P_к y_к + S\int_0^l (y')^2\,dx. \tag{XIII.21}$$

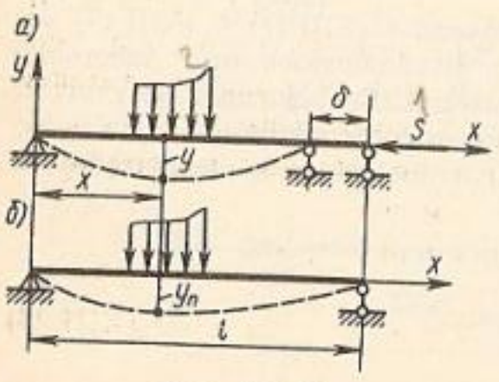


Рис. XIII.5

Предполагаем, что прогиб балки в любом сечении при продольно-поперечном изгибе пропорционален ее прогибу в том же сечении при нагружении только поперечными силами. Основанием для этого является чисто интуитивное представление о том, что в обоих случаях нагружения формы упругой линии будут одинаковы (упругие линии будут иметь одинаковое число точек перегиба). Принятие предположения о пропорциональности прогибов является одной из причин приближенности, полученной в дальнейшем формулы для y. Итак,

$$y = a y_п. \tag{XIII.22}$$

В (XIII.22) a – коэффициент пропорциональности, подлежащий определению. Подставляем (XIII.22) в (XIII.21)

$$a^2\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_z (y_п'')^2\,dx = a\sum_{к=1}^{m} P_к y_{кп} + Sa^2\int_0^l (y_п')^2\,dx. \tag{XIII.23}$$

Делим (XIII.23) на сумму, стоящую в левой части этого равенства, учитывая, что

$$\sum_{к=1}^{m} P_к y_{кп} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_z (y_п'')^2 = 1,$$

так как числитель и знаменатель есть соответственно удвоенные работы поперечных сил и потенциальная энергия деформации балки, нагруженной только поперечными силами (рис. XIII.5, *б*). Обозначим:

$$\frac{\int_0^l (y_п')^2\,dx}{\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i} EI_z (y_п'')^2\,dx} = \frac{1}{S_э},$$

где $S_э$ – эйлерова сила.

Если упругая линия балки при продольно-поперечном изгибе имеет форму упругой линии стержня с опорными устройствами балки, после потери устойчивости, то на основании (XII.52) можно приближенно определять $S_э$, как критическую силу для стержня с опорными устройствами балки с той разницей, что в выражение $S_э$ должен входить не I_{min}, а I_z – момент инерции относительно главной центральной оси сечения, перпендикулярной оси y.

Следовательно, после деления найдем, что

$$a = \frac{1}{1 - \frac{S}{S_э}}. \tag{XIII.24}$$

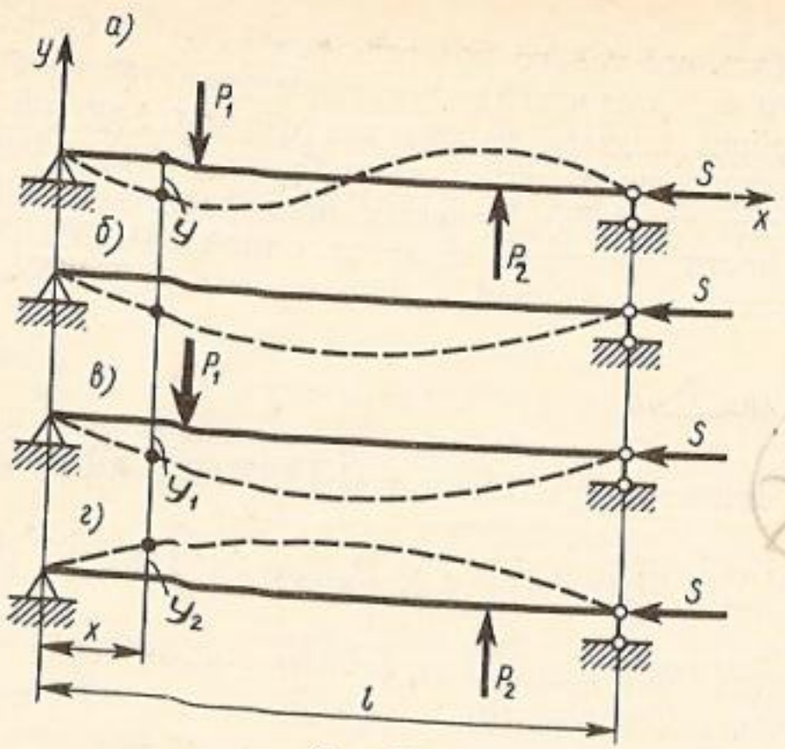


Рис. XIII.6

Подставив (XIII.24) в (XIII.22), получим приближенную формулу для определения прогибов при продольно-поперечном изгибе

$$y = \frac{y_n}{1 - \frac{S}{S_э}}. \qquad \text{(XIII.25)}$$

На основании (XIII.1) и (XIII.25) приближенной формулой для изгибающего момента будет

$$M_z = M_z^n + \frac{S|y_n|}{1 - \frac{S}{S_э}}. \qquad \text{(XIII.26)}$$

Пример XIII.3. Указать путь определения прогиба в любом сечении балки (рис. XIII.6, *а*) по формуле (XIII.25).

Изобразив форму упругой линии балки (рис. XIII.6, *а*), заключаем, что формула (XIII.25) для определения y к этой схеме нагружения неприменима: упругая линия балки имеет точку перегиба, а упругая линия стойки с опорными устройствами балки (рис. XIII.6, *б*) после потери устойчивости точки перегиба не имеет. Возьмем схемы нагружения (рис. XIII.6, *в*, *г*). Для определения y_1 и y_2 в этих схемах нагружения формула (XIII.25) применима и по принципу независимости действия поперечных сил при продольно-поперечном изгибе

$$y = y_2 - y_1.$$

§ XIII.4. Расчет на прочность

При продольно-поперечном изгибе, как правило, возможен только поверочный расчет на прочность. Расчетные нормальные напряжения в опасном сечении балки (рис. XIII.7) найдутся по формуле

$$\sigma_{\substack{\min \\ \max}} = \sigma_{A,B} = -\frac{S}{F} \mp \frac{M_z^{\max}}{I_z} |y_{A,B}|. \qquad \text{(XIII.27)}$$

При поверочном расчете балки на прочность могут представиться два основных случая:

1. В процессе работы балки могут изменяться только поперечные силы. Примером такой балки является колонна (рис. XIII.8, *а*), заделанная одним концом, несущая на свободном конце груз S и испытывающая действие ветровой нагрузки.

Так как M_z линейно зависит от поперечных сил (см. § XIII.1), то запас прочности балки n в этом случае равен наименьшему из запасов прочности, найденных по растяжению и сжатию из формул

$$n_p = \frac{\sigma_p^{пр}}{\sigma_B}, \quad n_c = \frac{\sigma_c^{пр}}{|\sigma_A|}. \qquad \text{(XIII.28)}$$

Если материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие, а сечение симметрично относительно оси y, то

$$n = \frac{\sigma_т}{|\sigma_A|}. \qquad \text{(XIII.29)}$$

2. В процессе работы балки могут одновременно и пропорционально изменяться продольные и поперечные силы. Пример системы, в которой балка AB работает в таких условиях, показан на рис. XIII.8, *б*. Определять n_p и n_c по фор-

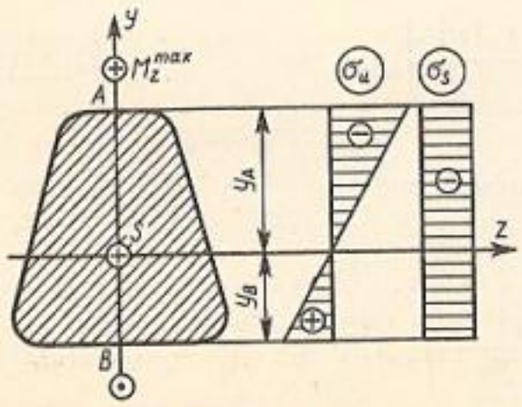


Рис. XIII.7

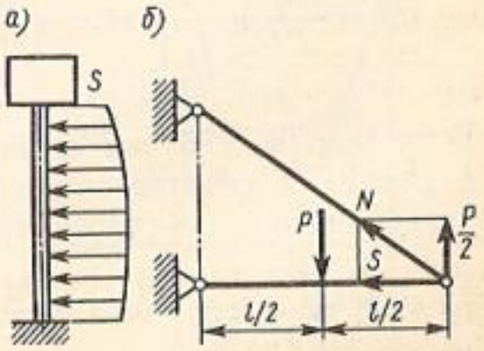


Рис. XIII.8

мулам (XIII.28) в этом случае нельзя, потому что M_z^{max} нелинейно зависит от S. Вспомнив, что запас прочности есть число, показывающее, во сколько раз надо увеличить действующие на систему силы, чтобы наступило опасное состояние, приравниваем в (XIII.27) σ_B и $|\sigma_A|$ соответственно $\sigma_p^{пр}$ и $\sigma_c^{пр}$, умножив предварительно продольные и поперечные силы, входящие в (XIII.27) соответственно на n_c и n_p, получим уравнения для их определения.

Для балки AB (рис. XIII.8, *б*), учитывая (XIII.14):

$$\sigma_p^{пр} = -\frac{Sn_p}{F} + \frac{Pn_p}{2\sqrt{Sn_p/EI_z}}\operatorname{tg}\left(\frac{l}{2}\sqrt{Sn_p/(EI_z)}\right)\frac{|y_B|}{I_z},$$

$$\sigma_c^{пр} = \frac{Sn_c}{F} + \frac{Pn_c}{2\sqrt{Sn_c/(EI_z)}}\operatorname{tg}\left(\frac{l}{2}\sqrt{Sn_c/(EI_z)}\right)\frac{y_A}{I_z}. \qquad \text{(XIII.30)}$$

Запас прочности n балки равен меньшему из значений n_p или n_c, найденных из уравнений (XIII.30).

Корни трансцендентных уравнений (XIII.30), составленных с использованием точного значения M_z^{max}, могут быть определены только путем подбора – процесса, связанного с большими вычислительными трудностями. Для сокращения вычислительной работы можно воспользоваться приближенной формулой (XIII.26), из которой

$$M_z^{max} = \left[M_z^{п} + \frac{S|y_п|}{1-\dfrac{S}{S_э}}\right]_{max}.$$

Тогда уравнения для приближенного определения n_p и n_c запишутся в виде

$$\sigma_p^{пр} = -\frac{Sn_p}{F} + \frac{|y_B|}{I_z}\left[M_z^{п}n_p + \frac{S|y_п|n_p^2}{1-\dfrac{Sn_p}{S_э}}\right]_{max},$$

$$\sigma_c^{пр} = \frac{Sn_c}{F} + \frac{y_A}{I_z}\left[M_z^{п}n_c + \frac{S|y_п|n_c^2}{1-\dfrac{Sn_c}{S_э}}\right]_{max}. \qquad \text{(XIII.31)}$$

Если материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие, а сечение симметрично относительно оси z, то уравнение для определения n будет таким

$$\sigma_т = \frac{Sn}{F} + \frac{1}{W_z}\left[M_z^{п}n + \frac{S|y_п|n^2}{1-\dfrac{Sn}{S_э}}\right]_{max}. \qquad \text{(XIII.32)}$$

Глава XIV. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

§ XIV.1. Истинная диаграмма напряжений (характеристика) материала при растяжении

Истинной характеристикой материала при растяжении называется график зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (на рис. XIV.1, *а* – сплошная линия), в которой $\sigma = P/F$, а F и ε – площадь поперечного сечения и продольная деформация образца, определенные при данном значении силы P. Найденные таким образом σ и ε называются истинными.

Как отмечалось в § II.7, пока $\varepsilon \leqslant \varepsilon_B$, F изменяется крайне незначительно и практически можно считать $F = F_0$, а на участке OB истинную характеристику и характеристику (условную), показанную на рис. XIV.1, *а* штриховой линией, совпадающими. При $\varepsilon > \varepsilon_B$ уменьшение F по сравнению с F_0 настолько велико, что его можно иногда заметить невооруженным глазом и истинная характеристика (участок BD_1) расположится выше условной. Пока $\varepsilon < \varepsilon_C$, образец деформируется по всей расчетной длине равномерно, напряженное состояние в нем однородно и $\varepsilon = \Delta l/l$. Если $\varepsilon = \varepsilon_C$, то на образце появляется шейка (см. рис. II.8); при дальнейшем увеличении ε по сравнению с ε_C деформация увеличится только на длине $l_ш$ – длине шейки (пластическая деформация остальной части образца не изменяется). Поэтому, когда

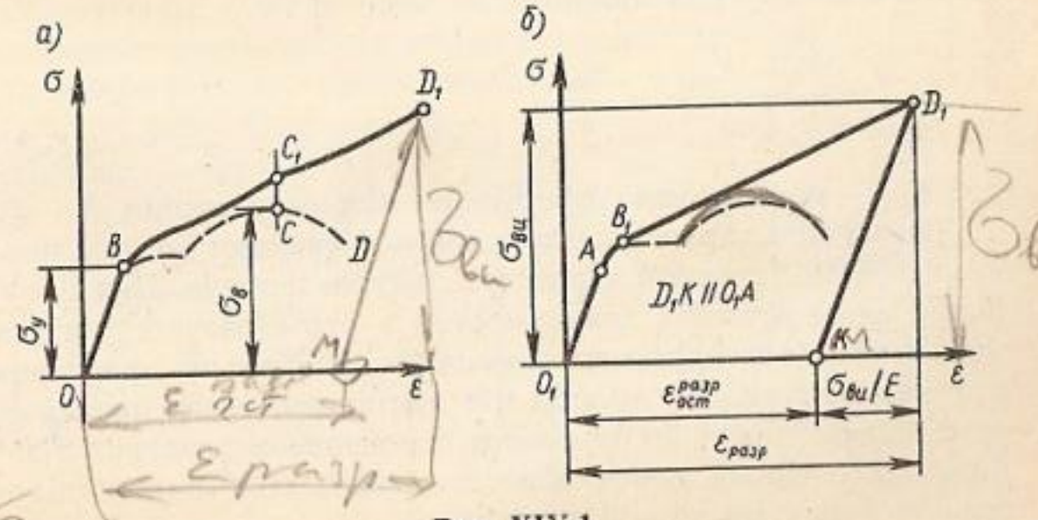


Рис. XIV.1

$\varepsilon > \varepsilon_C$ определять ε как $\Delta l/l$ нельзя (истинная деформация будет значительно больше найденной, как это отношение), и точка D_1 расположится значительно правее точки D. Несмотря на то что на участке растягивающая сила уменьшается (см. рис. II.7), отношение P/F (после образования шейки, F – наименьшая площадь ее поперечного сечения) за счет уменьшения F увеличивается и истинное напряжение растет.

Построение истинной характеристики на участке BD_1 по результатам опыта затруднительно. Поэтому иногда, определив координаты точки D_1, проводят через нее касательную к условной характеристике (рис. XIV.1, *б*) и принимают линию OB_1D за истинную характеристику материала. Координаты точки ($\sigma_{вн}$, $\varepsilon_{разр}$) находятся следующим образом:

$$\sigma_{вн} = \frac{P_{разр}}{F_{min}},$$

где $\sigma_{вн}$ – истинный предел прочности материала; $P_{разр}$ – нагрузка при разрушении образца; F_{min} – наименьшая площадь поперечного сечения шейки после разрушения. Так как при пластической деформации объем тела не изменяется, объемы единицы длины образца до и после разрушения равны, или

$$F_0 \cdot 1 = (1 + \varepsilon_{ост}^{разр}) F_{min},$$

откуда

$$\varepsilon_{ост}^{разр} = \frac{F_0 - F_{min}}{F_{min}},$$

где $\varepsilon_{ост}^{разр}$ – остаточная продольная деформация при разрушении; по закону разгрузки

$$\varepsilon_{разр} = \frac{F_0 - F_{min}}{F_{min}} + \frac{\sigma_{вн}}{E},$$

где $\varepsilon_{разр}$ – продольная деформация при разрушении.

Расчет при упругопластической деформации должен проводиться по истинной характеристике материала. Для получения аналитических зависимостей в этом расчете участки истинной характеристики заменяются линиями, уравнения которых достаточно просты и с достаточной для практических целей точностью отражают поведение ее участков. График, построенный таким образом, называется схематизированной характеристикой материала.

Наиболее распространенным способом схематизации является замена участков прямыми линиями. Материал, обладающий схематизированной характеристикой (рис. XIV.2), называется упругопластичным с упрочнением. Считается, что схематизированная характеристика симметрична для растяжения и сжатия относительно начала координат и что в ней $\sigma_{пц} = \sigma_y = \sigma_т$. Уравнения участков характеристики (рис. XIV.2):

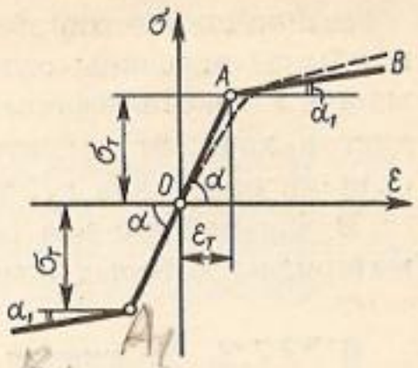


Рис. XIV.2

при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_т$ $\sigma = E\varepsilon$;

при $\varepsilon > \varepsilon_т$ $\sigma = \sigma_т + E_1(\varepsilon - \varepsilon_т)$;

при $\varepsilon < -\varepsilon_т$ $\sigma = -\sigma_т + E_1(\varepsilon + \varepsilon_т)$.

На рис. XIV.2 E_1 – модуль упрочнения, который является угловым коэффициентом прямой AB.

Материалы, обладающие характеристикой (рис. XIV.3, *а*), в которой $E_1 = 0$, называются идеально-пластичными. В этой характеристике: при $|\varepsilon| < \varepsilon_т$ $\sigma = E\varepsilon$; при $\varepsilon > \varepsilon_т$ $\sigma = \sigma_т$; при $\varepsilon < -\varepsilon_т$ $\sigma = -\sigma_т$.

В тех случаях, когда упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с пластическими, схематизированную характеристику можно представить изображенной на рис. XIV.3, *б*. Материалы, ей обладающие, называются жесткопластичными с упрочнением и для них: при $\sigma > 0$ $\sigma = \sigma_т + E_1\varepsilon$; при $\sigma < 0$ $\sigma = -\sigma_т + E_1\varepsilon$; при $|\sigma| \leqslant \sigma_т$ $\varepsilon = 0$.

Материалы, обладающие характеристикой (рис. XIV.3, *в*), называются жесткопластичными и для них: при $|\sigma| < \sigma_т$ $\varepsilon = 0$; при $|\sigma| = \sigma_т$ ε – произвольна.

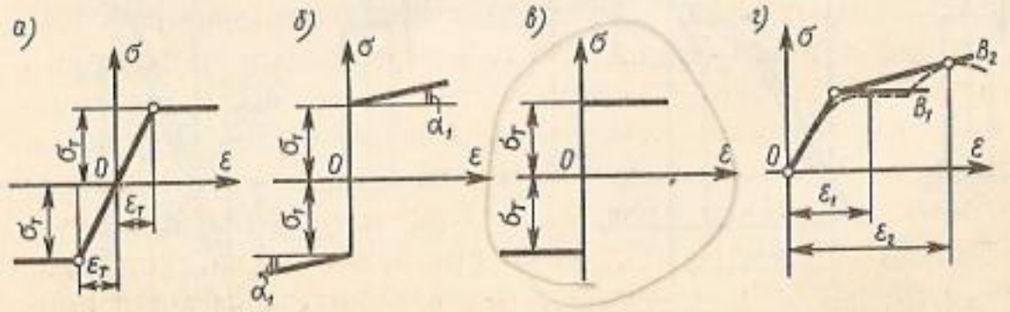


Рис. XIV.3

Выбор схематизированной характеристики зависит от наибольшей величины ожидаемой упругопластической деформации. Если эта деформация равна ε_1 (рис. XIV.3, *г*), то следует в качестве характеристики принять ломаную OAB_1; если же она равна ε_2, то ломаную OAB_2.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем, материалы которых идеально-пластичны.

§ XIV.2. Замечания о принципах большой жесткости и независимости действия сил

Для малоуглеродистой стали с $\sigma_{пц} = 200$ МПа допускаемое значение деформации (значение деформации, до которой справедлив закон Гука)

$$[\varepsilon] = \frac{\sigma_{пц}}{E} \cdot 100\,\% = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \cdot 100\,\% = 0{,}1\,\%.$$

В дальнейшем будем считать, что допустимая упругопластическая деформация $[\varepsilon]_{уп} \leqslant 2\,\%$, т. е. хотя $[\varepsilon]_{уп}$ во много раз больше $[\varepsilon]$, но все-таки значительно меньше единицы (квадрат $[\varepsilon]_{уп}$ пренебрежимо мал по сравнению с единицей). Принятие этого предположения позволяет рассматривать все рассчитываемые нами системы как системы большой жесткости и совершенно исключает из нашего рассмотрения, например, такие технологические процессы, как ковка, штамповка, глубокая вытяжка, связанные с большими пластическими деформациями.

Рассмотрим брус (рис. XIV.4, *а*), вначале нагруженный силой P_1, а затем противоположно направленной силой P_2. Из диаграммы растяжения (рис. XIV.4, *б*) с учетом закона разгрузки

$$\Delta l' = \Delta l'_{P_1} - \Delta l'_{P_2}.$$

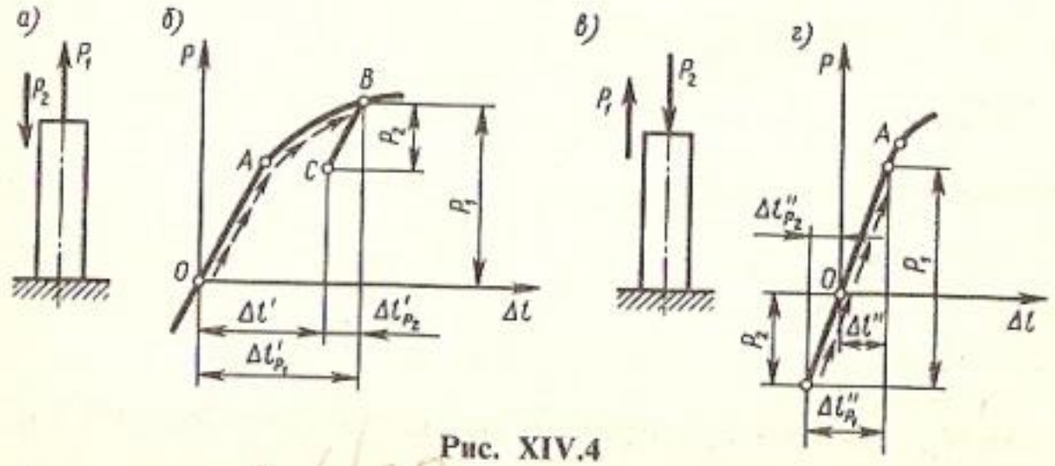


Рис. XIV.4

Изменим порядок нагружения (рис. XIV.4, *в*). Из рис. XIV.4, *г*

$$\Delta l'' = \Delta l''_{P_1} - \Delta l''_{P_2}.$$

Сопоставляя рис. XIV.4, *б* и XIV.4, *г*, видим, что $\Delta l' > \Delta l''$. Следовательно, при упругопластической деформации величина деформации зависит от порядка приложения сил и принцип независимости действия сил несправедлив.

§ XIV.3. Расчет ферменных систем

Деформация фермы будет упругопластической, если хотя бы в одном из ее стержней $\varepsilon > \varepsilon_т$. Пусть P – одна из действующих на ферму (заданных) сил, а $P_т$ – значение P, при котором хотя бы в одном из ее стержней $\varepsilon = \varepsilon_т$, тогда деформация фермы будет упругопластической, если $P > P_т$. Обозначим через $P_{пр}$ – значение P (предельное), увеличение которого делает невозможным равновесие между действующими на ферму силами и усилиями в ее стержнях (ферма становится геометрически изменяемой). Задачи расчета фермы состоят в определении: усилий во всех стержнях, усилий в стержнях после разгрузки (остаточных), перемещений узлов под действием заданных сил и остаточных, если $P_т < P < P_{пр}$. Решение этих задач рассмотрим на примере.

Пример XIV.1. В ферме (рис. XIV.5, *а*) определить: усилия в стержнях при $0 \leqslant P < P_т$ и $P_т$; усилия в стержнях при $P_т < P < P_{пр}$ и $P_{пр}$; δ_{A_x} – горизонтальное перемещение узла A при $P = 1$, $3\sigma_т F$; остаточные усилия в стержнях при $P = 1$, $3\sigma_т F$; $\delta^{\circ}_{A_x}$ – остаточное горизонтальное перемещение узла A.

1. Определяем N_i – усилия в стержнях фермы при $0 \leqslant P < P_т$:.

Так как стержни *2* и *3* скрещиваются и подсчет числа контуров фермы (рис. XIV.5, *а*) затруднителен, разрезав стержень *2*, найдем число лишних связей фермы (рис. XIV.5, *б*), для которой: $n = 3$, $P_2 = 1$, $P_3 = 3$, $P_к = 1$. По формуле (VII.1)

$$m = 3 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 0$$

и систему (рис. XIV.5, *б*) можно принять за эквивалентную.

Выписываем каноническое уравнение

$$\delta_{1P} + \delta_{11} x_1 = 0.$$

По формуле (VI.50)

$$\delta_{1P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{Pi} N_{1i} l_i}{(EF)_i}, \quad \delta_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{1i}^2 l_i}{(EF)_i},$$

где N_{Pi} – усилие в i-м стержне схемы нагружения P (рис. XIV.5, *в*);

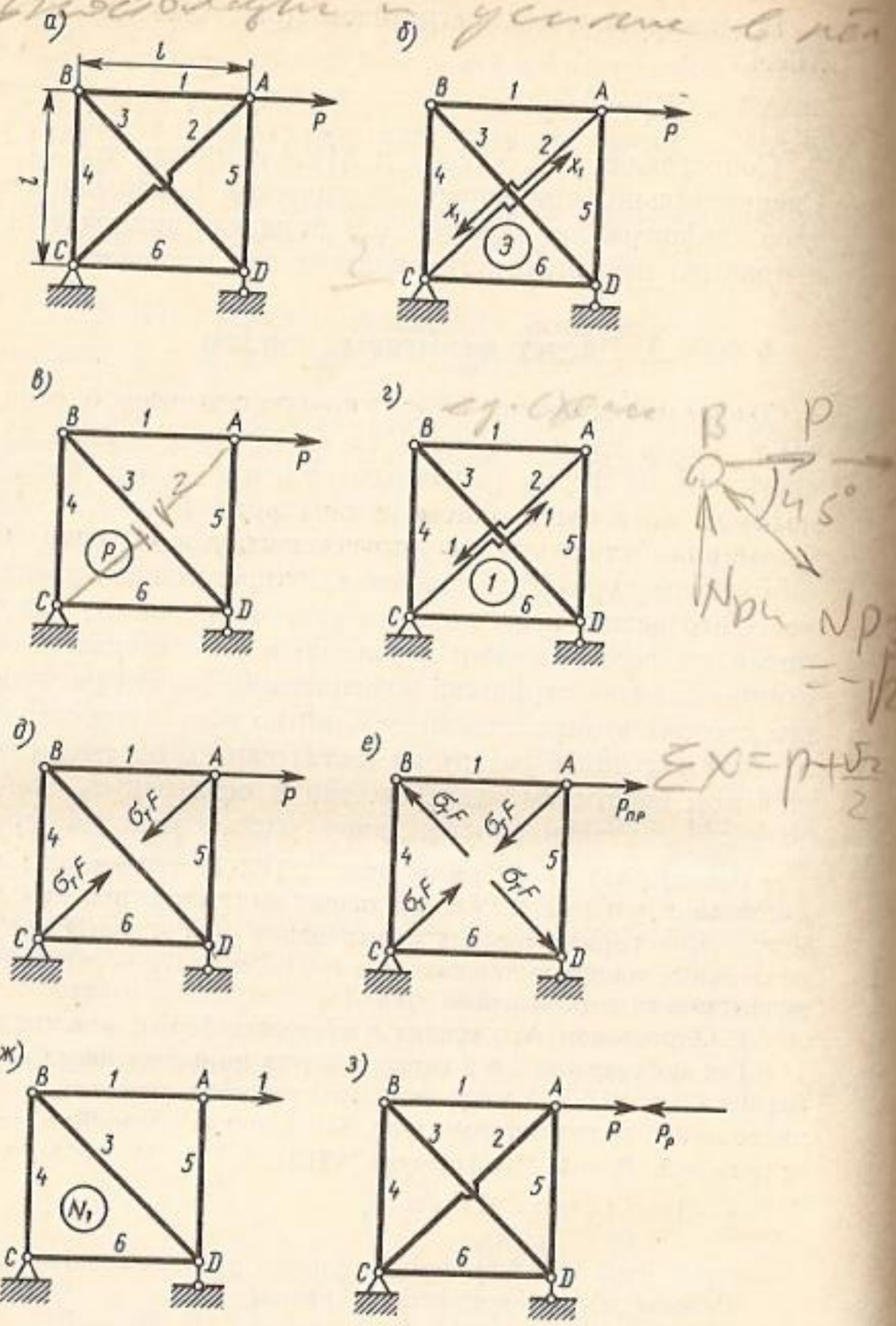


Рис. XIV.5

N_{1i} – усилие в i-м стержне схемы нагружения *1* (рис. XIV.5, *г*), жесткости поперечных сечений $(EF)_i$ и длины стержней l_i (табл. 12).

Пользуясь методом вырезания узлов, определяем усилия N_{pi} и N_{1i} (процесс определения опущен) и найденные значения заносим в графы 4 и 5 табл. 12.

Суммируя строки шестого и седьмого столбцов табл. 12, находим:

$$\delta_{1p} = -\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)\frac{Pl}{EF} = -4{,}12\,\frac{Pl}{EF},\quad \delta_{11} = 2(1+\sqrt{2})\,\frac{l}{EF} =$$

$$= 4{,}83\,\frac{l}{EF}.$$

Лишнее неизвестное

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{4{,}12}{4{,}83}P = 0{,}853P.$$

Усилия в стержнях N_i определяем по формуле

$$N_i = N_{pi} + x_1 N_{1i}$$

и заносим их значения в графу 8 табл. 12.

Находим значение $P_т$, приравняв $|\sigma|_{max}$ в стержнях фермы

$$|\sigma|_{max} = \frac{0{,}853P_т}{F} = \sigma_т,$$

откуда

$$P_т = \frac{\sigma_т F}{0{,}853} = 1{,}17\sigma_т F.$$

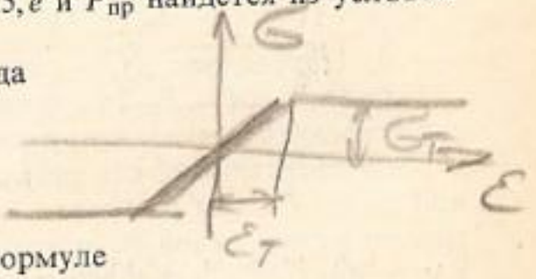
2. Определяем N'_i – усилия в стержнях фермы при $P_т < P < P_{пр}$.

При $P_т < P < P_{пр}$ напряжение в стержне *2* фермы остается постоянным и равным $\sigma_т F$ (материал стержней идеально-пластичен), а остальные упругодеформированные стержни исключают возможность свободного развития пластической деформации. Поэтому статически определимую ферму (рис. XIV.5, *д*), соответствующую состоянию фермы (рис. XIV.5, *а*) при $P_т < P < P_{пр}$, можно считать системой большой жесткости. Усилия N'_i в стержнях статически определимой фермы (рис. XIV.5, *д*), найденные методом вырезания узлов, занесены в графу 9 табл. 12.

Ферма станет геометрически изменяемой после того, как наибольшее по абсолютной величине усилие N'_3 достигнет значения, равного $\sigma_т F$ (напряжение в стержне *3* станет равным $\sigma_т$). Это состояние фермы показано на рис. XIV.5, *е* и $P_{пр}$ найдется из условия

$$|N'_3| = \sqrt{2}P_{пр} - \sigma_т F = \sigma_т F,\ \text{откуда}$$

$$P_{пр} = \sqrt{2}\sigma_т F = 1{,}41\sigma_т F.$$



3. Определяем δ_{A_x}.

Перемещение δ_{A_x} найдется по формуле

$$\delta_{A_x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N'_i \bar{N}_{1i} l_i}{(EF)_i},$$

Таблица 12

№ п/п	$(EF)_i$	l_i	N_{Pi}	N_{1i}	$\frac{N_{Pi}N_{1i}l_i}{(EF)_i}$
1	2	3	4	5	6
1	EF	l	P	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}Pl}{2EF}$
2	»	$\sqrt{2}l$	0	1	0
3	»	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}P$	1	$-\frac{2Pl}{EF}$
4	»	l	P	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}Pl}{2EF}$
5	»	l	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
6	»	l	P	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}Pl}{2EF}$

где N_i' – значения усилий в стержнях фермы (рис. XIV.5, *д*) при $P = 1{,}3\sigma_T F$; $\bar{N}_{1i}$ – усилия в стержнях фермы (рис. XIV.5, *ж*), причем $\bar{N}_{1i} = N_{pi}/P$. Определяем

$$\delta_{A_x} = \left(3\left(1{,}3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1{,}3\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2}\right)\frac{\sigma_T l}{E} = 2{,}94\,\frac{\sigma_T l}{E}.$$

4. Определяем N_i^0 – остаточные усилия в стержнях фермы.

Если $P_T < P < P_{пр}$, то после разгрузки в стержнях фермы будут существовать усилия, которые называются остаточными. Разгрузку можно представить, как результат приложения к ферме нагруженной силой P силы разгрузки $P_р = -P$ (рис. XIV.5, *з*). По закону разгрузки между силой $P_р$ и возникающими от ее действия усилиями в стержнях $N_i^р$ – усилиями разгрузки существуют такие же зависимости, как и при нагружении фермы силой и $N_i^р = -N_i$. Остаточное усилие в i-м стержне найдется по формуле

$$N_i^0 = [N_i' + N_i^р]_{P=1{,}3\sigma_T F}.$$

Продолжение

$\frac{N_{1i}^2 l_i}{(EF)_i}$	$N_i[P]$	N_i'	$N_i^P[\sigma_T F]$	$N_i^0[\sigma_T F]$
7	8	9	10	11
$\frac{l}{2EF}$	0,397	$P - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_T F$	−0,514	0,076
$\frac{\sqrt{2}l}{EF}$	0,853	$\sigma_T F$	−1,11	−0,11
$\frac{\sqrt{2}l}{EF}$	−0,561	$-\sqrt{2}P + \sigma_T F$	0,729	−0,11
$\frac{l}{2EF}$	0,397	$P - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_T F$	−0,514	0,076
$\frac{l}{2EF}$	−0,603	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_T F$	0,784	0,076
$\frac{l}{2EF}$	0,397	$P - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_T F$	−0,514	0,076

Значения усилий разгрузки и остаточных усилий в стержнях при $P = 1{,}3\sigma_T F$ занесены в графы 10 и 11 табл. 12. Усилия разгрузки для каждого вырезанного узла фермы (рис. XIV.5, *з*) образуют самоуравновешенную систему.

5. Определяем $\delta_{A_x}^0$.

Остаточное перемещение можно определить либо по формуле

$$\delta_{A_x}^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^0 \bar{N}_{1i} l_i}{(EF)_i},$$

либо по формуле

$$\delta_{A_x}^0 = [\delta_{A_x} - \delta_{A_x}^р]_{P=1{,}3\sigma_T F}, \text{ где}$$

$$\delta_{A_x}^р = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \bar{N}_{1i} l_i}{(EF)_i}$$

– горизонтальное перемещение узла A в схеме нагружения (рис. XIV.5, *а*). Воспользуемся первой формулой, как более простой, найдем

$$\delta^0_{A_x} = (3 \cdot 0{,}076 + 0{,}11\sqrt{2})\,\frac{\sigma_т l}{E} = 0{,}384\,\frac{\sigma_т l}{E}.$$

§ XIV.4. Прямой чистый упругопластический изгиб балки

При прямом чистом упругопластическом изгибе балки справедливы гипотезы Бернулли и ненадавливаемости волокон. Поэтому для участка балки (рис. V.21, *а*) остается справедливой зависимость (V.16)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \qquad \text{(XIV.1)}$$

полученная при ее упругом изгибе. В (XIV.1): ε – продольная деформация текущего волокна; y – расстояние от нейтрального слоя до текущего волокна; ρ – радиус кривизны упругой линии балки.

Ограничимся рассмотрением балок, сечение которых (рис. XIV.6, *а*) имеет две оси симметрии. В силу симметрии нейтральной линией в таком сечении будет ось z.

На рис. XIV.6, *б* по зависимости (XIV.1) построен эпюр ε, в котором

$$\varepsilon_{max} = \frac{a}{\rho}. \qquad \text{(XIV.2)}$$

Обозначим

$$y_т = \varepsilon_т \rho, \qquad \text{(XIV.3)}$$

где $\varepsilon_т = \sigma_т / E$, следовательно,

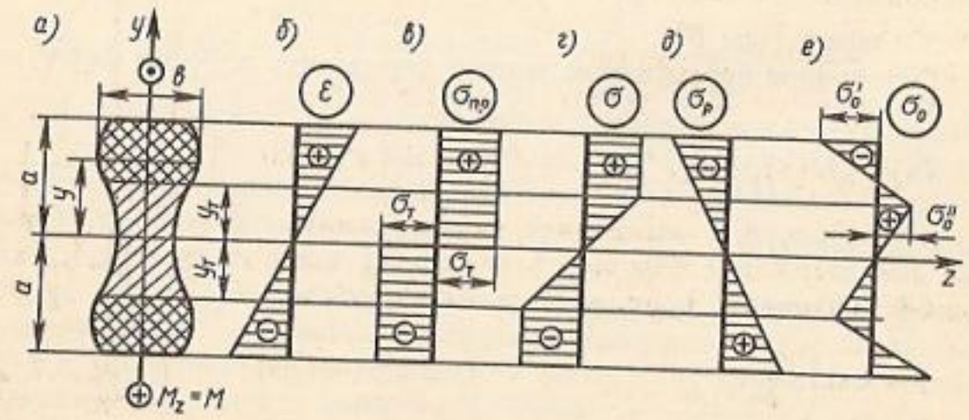


Рис. XIV.6

$$y_т = \frac{\sigma_т}{E}\rho. \qquad \text{(XIV.4)}$$

Изгиб балки будет упругопластическим, если $\varepsilon_{max} > \varepsilon_т$, или, учитывая (XIV.2) и (XIV.3), если $y_т < a$.

Так как материал балки считается идеально-пластичным (характеристика такого материала дана на рис. XIV.3, *а*), то при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_т$ $(y \leqslant y_т)$, учитывая (XIV.1),

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}; \qquad \text{(XIV.5)}$$

при $\varepsilon > \varepsilon_т$ $(y_т < y \leqslant a)$

$$\sigma = \sigma_т. \qquad \text{(XIV.6)}$$

Введем обозначения: $M_т = \sigma_т W_z$ – наименьшее значение M_z, при котором в сечении $\sigma_{max} = \sigma_т$ и деформация балки будет упругопластической, если $M_z > M_т$; $M_{пр}$ – значение M_z, при котором во всех точках сечения $|\sigma| = \sigma_т$; $b = b(y)$ – текущая ширина сечения; F_y – площадь части сечения с высотой $y_т$; $F_п$ – площадь части сечения с высотой $a - y_т$ (на рис. XIV.6, *а* она заштрихована дважды).

Увеличение M_z по сравнению с $M_{пр}$ делает невозможным равновесие между моментами внешних пар и моментом сил упругости. Эпюр $\sigma_{пр}$, соответствующий $M_z = M_{пр}$, построен на рис. XIV.6, *в*. Из эпюра (рис. XIV.6, *в*)

$$M_{пр} = 2\int\!\!\int_F y\sigma_т dF = \sigma_т 2S_z^{max},$$

или

$$M_{пр} = \sigma_т W_т, \qquad \text{(XIV.7)}$$

где $W_т = 2S_z^{max}$ – пластический момент сопротивления сечения изгибу; S_z^{max} – статический момент части площади сечения по одну сторону от оси z.

Замечание. Состояние балки, в котором $M_z = M_{пр}$, осуществить нельзя, так как при этом $y_т = 0$ и из (XIV.3) $\rho = 0$, что физически невозможно. Поэтому значение $M_{пр}$ следует рассматривать как предельное для M_z при $\rho \to 0$.

На рис. XIV.6, *г* на основании (XIV.5) и (XIV.6) построен эпюр σ, соответствующий $M_т < M_z < M_{пр}$; при этом условии балку можно считать имеющей большую жесткость, так как волокна ее упругодеформированной части с площадью поперечного сечения $2F_y$ не позволят свободно развиваться пластической деформации в ее частях с площадями поперечных сечений $F_п$. Из эпюра σ

$$M_z = 2\left(\frac{E}{\rho}\int_0^{y_т} by^2 dy + \sigma_т \int_{y_т}^{a} by dy\right),$$

или

$$M_z = 2\left(\frac{E}{\rho} I_z^{F_y} + \sigma_т S_z^{F_п}\right), \qquad \text{(XIV.8)}$$

где $I_z^{F_y}$ – момент инерции площади F_y; $S_z^{F_п}$ – статический момент площади $F_п$.

При заданном M_z уравнения (XIV.8) и (XIV.4) образуют систему с неизвестными ρ и $y_т$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M_z - 2\sigma_т S_z^{F_п}}{2EI_z^{F_y}}, \\ y_т = \dfrac{\sigma_т \rho}{E}. \end{cases} \qquad \text{(XIV.9)}$$

После определения $y_т$ и ρ из системы (XIV.9) строится эпюр σ, определяются σ_0 – остаточные напряжения в поперечном сечении и ρ_0 – остаточный радиус кривизны упругой линии балки после разгрузки.

Остаточные напряжения при $M_т < M_z < M_{пр}$ можно найти, приложив к балке, нагруженной M_z, M_z^p – момент разгрузки, равный и противоположно направленный M_z (рис. XIV.7). Так как при разгрузке между напряжениями разгрузки σ_p и M_z существует такая же зависимость, как и при нагружении $M_z \leqslant M_т$, напряжения разгрузки находятся по формуле

$$\sigma_p = -\frac{M_z}{I_z} y. \qquad \text{(XIV.10)}$$

Эпюр σ_p построен на рис. XIV.6, *д*.

Эпюр остаточных напряжений σ_0, полученный алгебраическим суммированием σ и σ_p, построен на рис. XIV.6, *д*. В нем

$$\sigma_0' = \sigma_т - \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_0'' = \sigma_т - \frac{M_z}{I_z} y_т. \qquad \text{(XIV.11)}$$

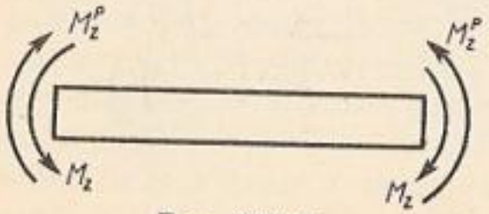


Рис. XIV.7

Остаточный радиус кривизны находится по формуле

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} - \frac{M_z}{EI_z}. \qquad \text{(XIV.12)}$$

Пример XIV.2. Для балки прямоугольного поперечного сечения (рис. XIV.8, *а*) построить эпюры σ, σ_p и σ_0; построить график зависимости кривизны упругой линии $k = k(M_z)$ и определить k_0, если

$$M_z = \frac{8}{9} \cdot \sigma_т a^2 b.$$

2. Находим:

$$M_т = \sigma_т W_z = \frac{2\sigma_т a^2 b}{3},$$

из (XIV.3)

$$M_{пр} = \sigma_т 2 \frac{a^2}{2} b = \sigma_т a^2 b.$$

Так как $M_т < M_z < M_{пр}$, изгиб балки будет упругопластическим. Определяем:

$$I_z^{F_y} = b\int_0^{y_т} y^2 dy = \frac{by_т^3}{3},$$

$$S_z^{F_п} = b\int_{y_т}^{a} y dy = \frac{b(a^2 - y_т^2)}{2}.$$

Подставляя $I_z^{F_y}$ и $S_z^{F_п}$ в первое уравнение системы (XIV.9), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{2}{3} E y_т^3 b = M_z - \sigma_т b(a^2 - y_т^2), \\ y_т = \dfrac{\sigma_т \rho}{E}. \end{cases} \qquad \text{(XIV.13)}$$

Исключив из первого уравнения системы (XIV.13) ρ, будем иметь уравнение для определения $y_т$

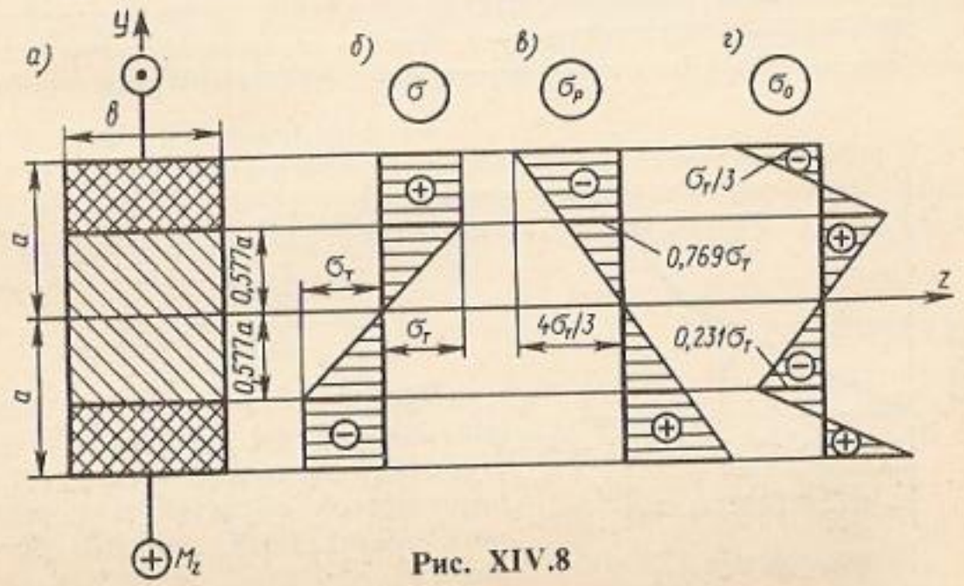


Рис. XIV.8

$$\frac{1}{3}\sigma_т b y_т^2 = \sigma_т a^2 b - M_z,$$

из которого

$$y_т = \sqrt{\frac{3(\sigma_т a^2 b - M_z)}{\sigma_т b}}. \qquad \text{(XIV.14)}$$

Подставив в (XIV.20) $M_z = \frac{8}{9}\sigma_т a^2 b$, найдем

$$y_т = a\sqrt{3(1 - 8/9)} = 0{,}577a.$$

Определив $y_т$, строим эпюр σ (рис. XIV.8, *б*).

2. Строим эпюр $\sigma_р$ (рис. XIV.8, *в*). В этом эпюре

$$\sigma_{max} = \frac{8\cdot 3}{9\cdot 2}\sigma_т = \frac{4}{3}\sigma_т,\ [\sigma_р]_{y=y_т} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\sigma_т = 0{,}77\sigma_т.$$

3. Строим эпюр σ_0 (рис. XIV.8, *г*). По (XIV.11)

$$\sigma_0' = \sigma_т - \frac{4}{3}\sigma_т = -\frac{1}{3}\sigma_т,\ \sigma_0'' = \sigma_т - 0{,}77\sigma_т = 0{,}23\sigma_т.$$

4. Строим график $k = k(M_z)$

При $0 \leqslant M_z \leqslant M_т$ $k = 1/\rho = M_z/EI_z$. В примере $I_z = \frac{2a^3 b}{3}$, поэтому

$$k = \frac{3M_z}{2Ea^3 b}. \qquad \text{(XIV.15)}$$

Подставив $y_т$ из (XIV.14) во второе уравнение системы (XIV.13), найдем $k = k(M_z)$ при $M_т < M_z < M_{пр}$

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_т}{E}\sqrt{\frac{\sigma_т b}{3(\sigma_т a^2 b - M_z)}}. \qquad \text{(XIV.16)}$$

Из уравнения (XIV.16) следует, что $k \to \infty$, если $M_z \to \sigma_т a^2 b$. По уравнениям (XIV.15) и (XIV.16) на рис. XIV.9 построен график $k = k(M_z)$.

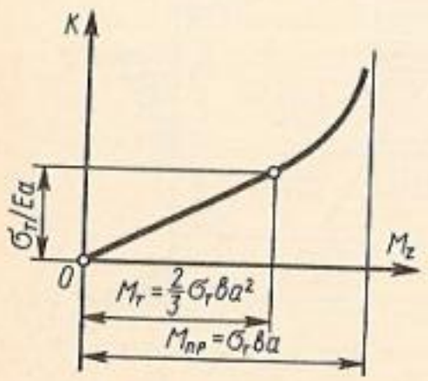


Рис. XIV.9

5. Определяем k_0.

По (XIV.12) $k_0 = 1/\rho_0 = \frac{\sigma_т}{Ea} \times$

$$\times\left(\sqrt{3} - \frac{8\cdot 3}{9\cdot 2}\right) = 0{,}399\,\frac{\sigma_т}{Ea}.$$

Пример XIV.3. Для балки (рис. XIV.10) при $P = 8\sigma_т a^2 b/9l$ построить границу упругой и упругопластической областей и определить остаточный прогиб сечения C.

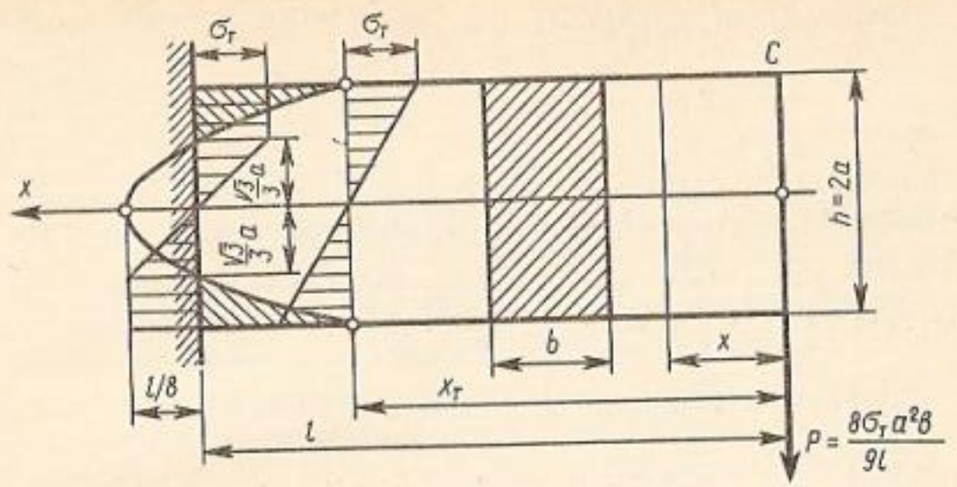


Рис. XIV.10

1. Чтобы определить границу упругой и упругопластической областей по длине балки $x_т$, подставив значение изгибающего момента на границе $M_z = Px_т$ в (XIV.14), приравниваем его a

$$\sqrt{3\left(1 - \frac{8x_т}{9l}\right)} = 1,$$

откуда

$$x_т = \frac{3}{4}l.$$

Уравнение границы по высоте балки получим, подставив в (XIV.14) уравнение изгибающего момента $M_z = \frac{8\sigma_т a^2 b}{9l}x$

$$y_т = a\sqrt{3\left(1 - \frac{8x}{9l}\right)}. \qquad \text{(XIV.17)}$$

Граница будет параболой (XIV.17), абсцисса вершины которой $x_т = \frac{9}{8}l$. Парабола построена на рис. XIV.10, упругопластическая область заштрихована.

2. В длинных балках нетонкостенного сечения влиянием Q_y на прогиб при поперечном упругопластическом изгибе можно пренебречь. Тогда формула (VI.46) для упругопластического изгиба перепишется так:

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i} k_i M_{z1}\,dS, \qquad \text{(XIV.18)}$$

где k_i – кривизна упругой линии на i-м участке.

В балке: при $0 \leqslant x \leqslant x_т$

$$k_1 = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{4\sigma_т}{3Ea}\cdot\frac{x}{l};$$

при $x_т < x \leqslant l$ из (XIV.16)

$$k_2 = \frac{\sqrt{3}\sigma_т}{Ea\sqrt{9-8\dfrac{x}{l}}};\ M_{z1} = x.$$

Подставляя k_1, k_2 и M_{z1} в (XIV.18), получим

$$y_c = \frac{\sigma_т}{Ea}\left(\frac{4}{3l}\int_0^{3/4l} x^2 dx + \int_{3/4l}^{l} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-8x/l}}\right) = 0{,}47\,\frac{\sigma_т l^2}{Ea}.$$

3. Остаточный прогиб в сечении C

$$y_c^0 = y_c - y_c^p.$$

Из (V.49)

$$y_c^p = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{4\sigma_т l^2}{9Ea} = 0{,}444\,\frac{\sigma_т l^2}{Ea}.$$

Следовательно,

$$y_c^0 = (0{,}47 - 0{,}444)\,\frac{\sigma_т l^2}{Ea} = 0{,}026\,\frac{\sigma_т l^2}{Ea}.$$

§ XIV.5. Расчет по несущей способности

При построении любой методики расчета на прочность прежде всего решается вопрос о состоянии системы, принимаемом за опасное. В расчете по допускаемым напряжениям, проводимом до сих пор, за опасное принималось состояние системы, при котором эквивалентное напряжение, хотя бы в одной из ее точек (опасной), становилось равным предельному.

Обозначим через $P_т$ – предельное значение внешней силы, соответствующее опасному состоянию системы, в расчете по допускаемым напряжениям.

В расчете по несущей способности за опасное принимается то состояние системы, при котором дальнейшее увеличение внешних сил делает невозможным равновесие между ними и силами упругости, возникающими в ее элементах, – система становится геометрически изменяемой. Выражение «система сохраняет несущую способность» означает, что она остается геометрически неизменяемой под действием данной системы внешних сил.

Обозначим через $P_{пр}$ – предельное значение внешней силы, соответствующее опасному состоянию системы, в расчете по несущей способности.

Допускаемые значения сил из расчета по допускаемым напряжениям и несущей способности определяются соответ-

ственно по формулам:

$$[P]_т = \frac{P_т}{[n]},\ [P]_{пр} = \frac{P_{пр}}{[n]}.$$

В примере XIV.1 были найдены значения $P_т = 1{,}17\sigma_т F$ и $P_{пр} = 1{,}41\sigma_т F$. С точки зрения расчета по несущей способности, состояние системы при $P_т < P < P_{пр}$ не является опасным, ибо, как отмечалось, упругодеформированные стержни не дают возможности свободно развиваться пластической деформации в стержне 3 и система сохраняет как геометрическую неизменяемость, так и большую жесткость. Отношение $P_{пр}/P_т = 1{,}21$, т. е. $P_{пр}$ на 21% больше $P_т$. То же самое можно сказать о балке примера XIV.2, в которой значения предельного момента из расчета по допускаемым напряжениям $M_т = \dfrac{2\sigma_т a^2 b}{3}$, а предельного момента из расчета по несущей способности $M_{пр} = \sigma_т a^2 b$. Отношение $M_{пр}/M_т = 1{,}5$ или $M_{пр}$ больше $M_т$ на 50%.

Следовательно, когда это возможно, а это возможно, если материал системы пластичен и внешние силы прикладываются к ней статически, расчет на прочность следует вести не по допускаемым напряжениям, а по несущей способности. Изложим основные положения и порядок этого расчета:

1. Материалы элементов системы считаются жесткопластичными (схематизированная характеристика дана на рис. XIV.3, *в*). Следовательно, предполагается, что при $\sigma < \sigma_т$ элемент не деформируется, а при $\sigma = \sigma_т$ приобретает способность к неограниченной деформации. Принятие этого предположения основано на том, что в предельном состоянии упругодеформированные элементы образуют геометрически изменяемую систему и их малые упругие деформации не играют никакой роли.

2. Рассматриваются все геометрически (кинематически) возможные предельные состояния системы.

3. Все геометрически возможные предельные состояния согласуются со статическими состояниями и образуются предельные состояния системы. Например, если ферменный элемент удлинялся, то и усилие в нем должно быть растягивающим.

4. Можно доказать, что предельным состоянием системы будет то из возможных предельных состояний, которому соответствует наименьшее значение внешней силы. Поэтому в каждом возможном предельном состоянии из уравнений

статики определяется $P^i_{пр}$ и в качестве $P_{пр}$ для системы принимается меньшее из найденных значений.

Пример XIV.4. Определить $P_{пр}$ ферменной системы (рис. XIV.11).

Для перехода ферменной системы в геометрически изменяемое состояние необходимо, чтобы число ее пластически деформированных стержней стало на единицу больше числа лишних связей, наложенных на систему.

1. Система (рис. XIV.11), на которую наложены две лишние связи, станет геометрически изменяемой, если напряжения в трех любых стержнях достигнут значений, равных $\sigma_т$.

2. Намечаем положения бруса AD, показанные на рис. XIV.11 штрихпунктирными линиями, соответствующие всем геометрически возможным предельным состояниям.

3. Изображаем все возможные предельные состояния системы (рис. XIV.12, *а, б, в*).

(Состояние $IV-IV$ предельным быть не может, так как приложение силы в шарнире C обязательно вызовет перемещение этого шарнира.)

4. Определяем $P^i_{пр}$:

для рис. XIV.12, *а*

$$\Sigma m_A = P^{I}_{пр} 2l - \sigma_т F l - \sigma_т F \cdot 2l - \sigma_т F 3l = 0,$$

$$P^{I}_{пр} = 3\sigma_т F;$$

для рис. XIV.12, *б*

$$\Sigma m_B = P^{II}_{пр} l - \sigma_т F l - \sigma_т F \cdot 2l - \sigma_т F l = 0,$$

$$P^{II}_{пр} = 4\sigma_т F;$$

для рис. XIV.12, *в*

$$\Sigma m_D = P^{III}_{пр} l - \sigma_т F l - \sigma_т F 2l - \sigma_т F 3l = 0,$$

$$P^{III}_{пр} = 6\sigma_т F.$$

Следовательно, $P_{пр} = P^{I}_{пр} = 3\sigma_т F$.

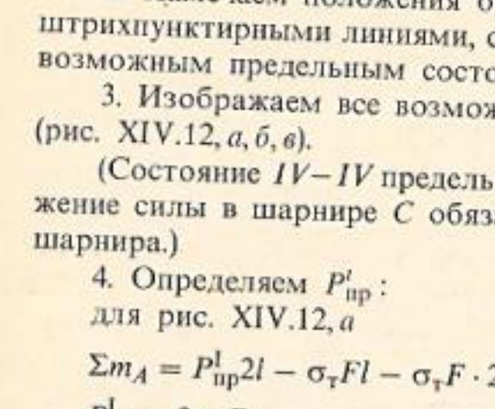


Рис. XIV.11

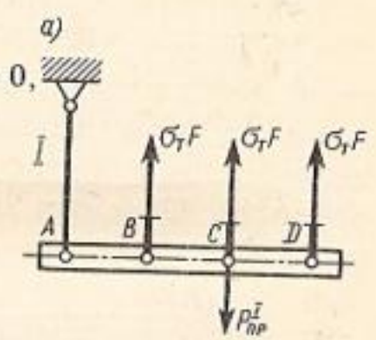


Рис. XIV.12

Пример XIV.5. Для фермы (рис. XIV.13) найти $P_{пр}$.

1. Так как на ферму наложена одна лишняя связь, она станет геометрически изменяемой, если напряжения в двух любых стержнях станут равными $\sigma_т$.

2. Положения шарнира C, соответствующие геометрически возможным предельным состояниям, полученным из условий абсолютной твердости одного из стержней, показаны на рис. XIV.13.

3. Возможные предельные состояния фермы показаны на рис. XIV.14, *а, б, в*. В каждом из них составляем уравнение проекций всех сил, действующих на узел C на ось x, перпендикулярную абсолютно твердому стержню, потому что тогда усилие по этому стержню в уравнение не войдет и вычисления по определению $P^i_{пр}$ будут короче.

4. Определяем $P^i_{пр}$:

для рис. XIV.14, *а*

$$\Sigma X = \sigma_т F \cos 30^\circ + \sigma_т F \cos 15^\circ - P^{I}_{пр} \cos 30^\circ = 0,$$

$$P^{I}_{пр} = 2{,}11\sigma_т F;$$

предельное состояние (рис. XIV.14, *б*) невозможно, так как проекция силы $P^{II}_{пр}$ на ось x равна нулю, а сумма проекций сил $\sigma_т F$ на эту ось нулю не равна и равновесие узла невозможно;

для рис. XIV.14, *в*

$$\sum X = \sigma_т F \cos 45^\circ + \sigma_т F \cos 15^\circ - P^{III}_{пп} \cos 45^\circ = 0, \; P^{III}_{пр} = 2{,}36\sigma_т F.$$

Следовательно, $P_{пр} = P^{I}_{пр} = 2{,}11\sigma_т F$.

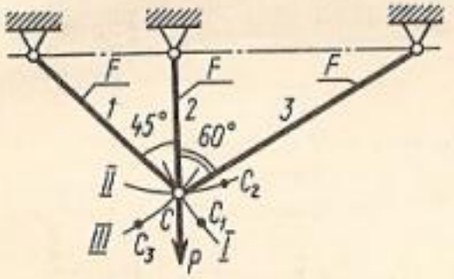


Рис. XIV.13

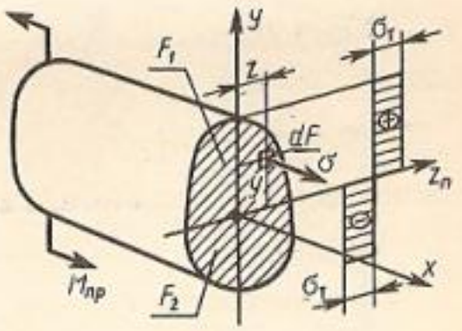


Рис. XIV.15

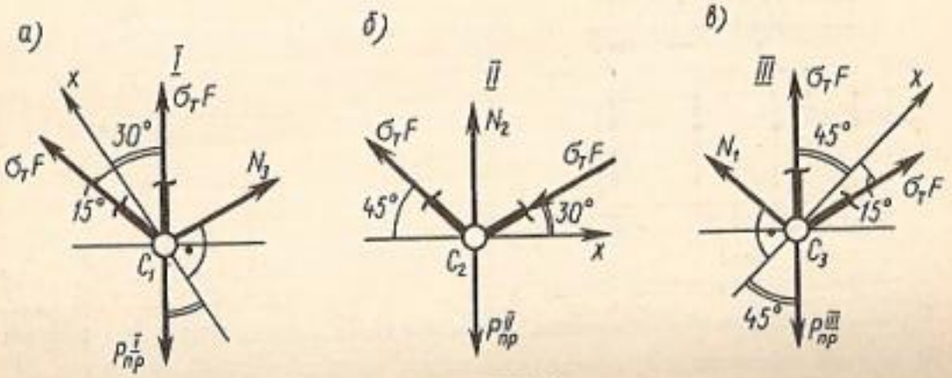


Рис. XIV.14

Предельные состояния, соответствующие перемещениям узла C по дугам в противоположных направлениях, невозможны (узел C под действием силы P переместится вниз), так как проекции всех сил, действующих на узел, на ось x будут одного знака.

Пластическим шарниром называется поперечное сечение рамного элемента, во всех точках которого $|\sigma| = \sigma_т$.

Для определения $M_{пр}$ в пластическом шарнире рассмотрим равновесие отсеченной части рамного элемента (рис. XIV.15), считая его материал жесткопластичным. На рис. XIV.15: $z_п$ – нейтральная линия в пластическом шарнире; F_1 – часть площади поперечного сечения, в точках которой действуют растягивающие напряжения; F_2 – часть площади поперечного сечения, в точках которой действуют сжимающие напряжения.

Составляем уравнение:

$$\Sigma X = \int\int_{F_1} \sigma_т dF - \iint_{F_2} \sigma_т dF,$$

откуда

$$F_1 = F_2.$$

Следовательно, нейтральная линия в пластическом шарнире делит площадь сечения на две равновеликие части.

Составляем уравнение:

$$M_{пр} = \int\int_{F_1} y\sigma_т dF - \iint_{F_2} y\sigma_т dF,$$

откуда

$$M_{пр} = \sigma_т W_т, \qquad \text{(XIV.19)}$$

где

$$W_т = S^{F_1}_{z_п} + |S^{F_2}_{z_п}|, \qquad \text{(XIV.20)}$$

если сечение имеет 2 оси симметрии, то

$$W_т = 2S^{max}_{z_п}. \qquad \text{(XIV.21)}$$

Пример XIV.6. Для балки (рис. XIV.16, *а*) определить отношение $P_{пр}/P_т$. Сечение балки дано на рис. XIV.16, *в*.

Находим: $|M_z|_{max} = P_т l = \sigma_т W_z$, где $W_z = I_z y_{max}$.
Из примера V.15 $I_z = 100a^4/3$, $y_{max} = 4a$, следовательно,

$$W_z = \frac{25}{3}a^3$$

и

$$P_т = \frac{25\sigma_т a^3}{3l}.$$

Чтобы балка без лишних связей стала геометрически изменяемой, в ней должен образоваться один пластический шарнир. Этот шарнир образуется в сечении с наибольшим изгибающим момен-

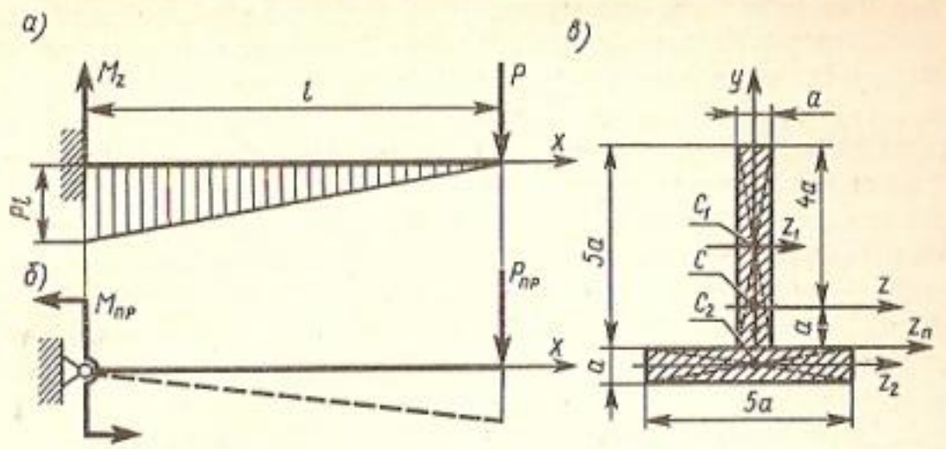


Рис. XIV.16

том. Кинематически возможное предельное состояние балки показано на рис. XIV.16 прямой штриховой линией (если $|\sigma| < \sigma_т$, то балка не деформируется). Предельное состояние балки с точки зрения расчета по несущей способности показано на этом рисунке сплошной линией, причем направление $M_{пр}$ в правом сечении пластического шарнира противоположно повороту этого сечения (кинематическое предельное состояние согласовано со статическим состоянием). Из условия равновесия балки (рис. XIV.16, *б*) и выражения (XIV.19)

$$M_{пр} = P_{пр} l = \sigma_т W_т.$$

По формуле (XIV.20)

$$W_т = \frac{5a^2 \cdot 5a}{2} + \frac{5a \cdot a^2}{2} = 15a^3.$$

Следовательно,

$$P_{пр} = \frac{15\sigma_т a^3}{l}.$$

Отношение $P_{пр}/P_т = 1{,}8$, или $P_{пр}$ больше $P_т$ на 80 %.

Пример XIV.7. Для балки (рис. XIV.17, *а*) определить $P_{пр}$.

1. На балку наложены две лишние связи, следовательно, чтобы она

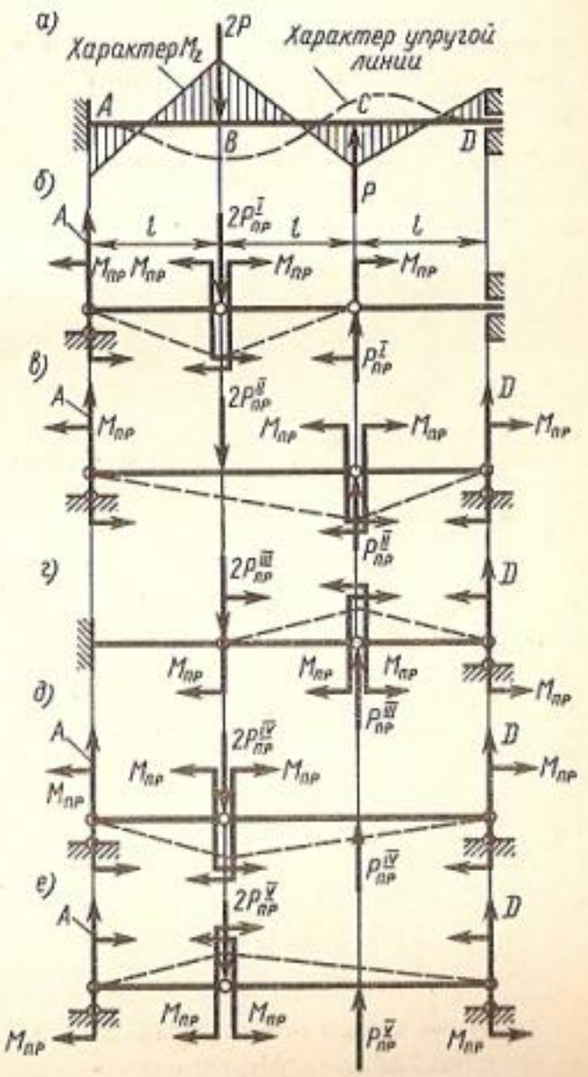


Рис. XIV.17

стала геометрически измеряемой, в ней должны образоваться три пластических шарнира. Для определения возможных положений пластических шарниров, по форме упругой линии балки, на рис. XIV.17, *а* изображен характер эпюра M_z. Согласно дифференциальной зависимости (V.48) знак изгибающего момента в сечении является знаком кривизны упругой линии в этом сечении. В точках перегиба упругой линии $M_z = 0$. Пластические шарниры при действии на балку сосредоточенных сил могут возникнуть в тех сечениях, в которых изгибающие моменты достигают экстремальных значений.

2. На рис. XIV.17, *б, в, г, д, е* изображены сплошными линиями все возможные предельные состояния.

3. Определяем $P^i_{\text{пр}}$ – предельное значение силы P в i-м предельном состоянии. Находим:

для рис. XIV.17, *б*

$$\sum^{\text{лев}} m_B = M_{\text{пр}} + M_{\text{пр}} - Al = 0,\ A = \frac{2M_{\text{пр}}}{l},$$

$$\sum^{\text{лев}} m_C = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l}\cdot 2l + M_{\text{пр}} - M_{\text{пр}} + P^{\text{I}}_{\text{пр}} 2l = 0,$$

$$P^{\text{I}}_{\text{пр}} = \frac{2M_{\text{пр}}}{l} = \frac{2\sigma_{\text{т}} W_{\text{т}}}{l};$$

для рис. XIV.17, *в*

$$\sum^{\text{прав}} m_C = Dl - 2M_{\text{пр}} = 0,\ D = \frac{2M_{\text{пр}}}{l};$$

$$\sum^{\text{прав}} m_A = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l} 3l + 2P^{\text{II}}_{\text{пр}} l - P^{\text{II}}_{\text{пр}}\cdot 2l = 0,$$

состояние невозможно;

для рис. XIV.17, *г*

$$\sum^{\text{прав}} m_C = Dl + 2M_{\text{пр}} = 0,\ D = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l},$$

$$\sum^{\text{прав}} m_B = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l}\cdot 2l + P^{\text{III}}_{\text{пр}} l = 0,$$

$$P^{\text{III}}_{\text{пр}} = \frac{4M_{\text{пр}}}{l} = 4\sigma_{\text{т}} W_{\text{т}}/l;$$

для рис. XIV.17, *д*

$$\sum^{\text{лев}} m_B = -Al + 2M_{\text{пр}} = 0,\ A = \frac{2M_{\text{пр}}}{l},$$

$$\sum^{\text{лев}} m_D = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l}\cdot 3l + 4P^{\text{IV}}_{\text{пр}} l - P^{\text{IV}}_{\text{пр}} l = 0,$$

$$P^{\text{IV}}_{\text{пр}} = \frac{2M_{\text{пр}}}{l} = \frac{2\sigma_{\text{т}} W_{\text{т}}}{l};$$

для рис. XIV.17, *е*

$$\sum^{\text{лев}} m_B = -Al - 2M_{\text{пр}} = 0,\ A = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l},$$

$$\sum^{\text{лев}} m_D = \frac{2M_{\text{пр}}}{l} 3l + 2P^{\text{V}}_{\text{пр}} 2l - P^{\text{V}}_{\text{пр}} l = 0,$$

$$P^{\text{V}}_{\text{пр}} = -\frac{2M_{\text{пр}}}{l},$$

предельное состояние невозможно.

Следовательно,

$$P_{\text{пр}} = P^{\text{I}}_{\text{пр}} = P^{\text{IV}}_{\text{пр}} = \frac{2\sigma_{\text{т}} W_{\text{т}}}{l}.$$

Пример XIV.7. Для балки (рис. XIV.18, *а*) найти значение $q_{\text{пр}}$.

Чтобы балка, на которую наложена одна лишняя связь, стала геометрически изменяемой, в ней должны образоваться два пластических шарнира. По характеру эпюра M_z, изображенного на рис. XIV.18, *а*, один пластический шарнир образуется в заделанном сечении. Положение другого шарнира следует найти из того условия, что изгибающий момент в нем достигает экстремального значения.

На рис. XIV.18, *б* изображено предельное состояние балки, в котором следует определить x и $q_{\text{пр}}$. Из этого рисунка

$$\Sigma m_B = A\cdot l - q_{\text{пр}} \frac{l^2}{2} + M_{\text{пр}} = 0,$$

откуда

$$A = q_{\text{пр}} \frac{l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{l}.$$

Составляем уравнение изгибающего момента

$$M_z = \left(\frac{q_{\text{пр}} l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{l}\right) x - \frac{q_{\text{пр}}}{2} x^2,$$

из которого получим уравнение для определения x

$$\frac{dM_z}{dx} = \frac{q_{\text{пр}} l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{l} - q_{\text{пр}} x = 0,$$

следовательно,

$$x = \frac{l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{q_{\text{пр}} l}.$$

Из условия равновесия балки

$$\sum^{\text{прав}} m_C = \left(\frac{q_{\text{пр}} l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{l}\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{q_{\text{пр}} l}\right) - \left(\frac{l}{2} - \frac{M_{\text{пр}}}{q_{\text{пр}} l}\right)^2 \frac{q_{\text{пр}}}{2} - M_{\text{пр}} = 0,$$

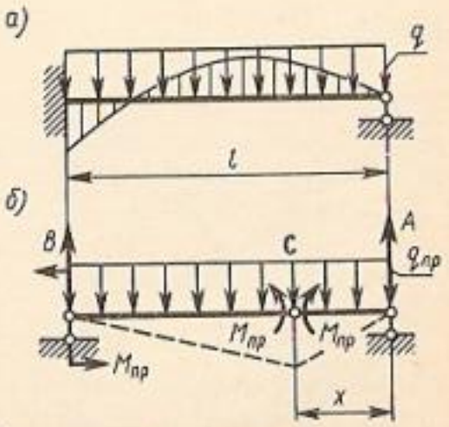


Рис. XIV.18

или после преобразования

$$q_{\text{пр}}^2 - 12\frac{M_{\text{пр}}}{l^2}q_{\text{пр}} + 4\frac{M_{\text{пр}}^2}{q_{\text{пр}}^4} = 0,$$

решив это уравнение, найдем

$$(q_{\text{пр}})_{1,2} = \frac{M_{\text{пр}}}{l^2}(6 \pm \sqrt{32}).$$

Следует принять

$$q_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{l^2}(6 + \sqrt{32}),$$

так как при

$$q_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{l^2}(6 - \sqrt{32})$$

x – отрицателен.

Глава XV. УДАР ПО СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ XV.1. Действие на систему импульсивной силы

Если система состоит из тела, которое можно считать абсолютно твердым, и упругих элементов, массы которых в сумме малы по сравнению с массой этого тела, то массу абсолютно твердого тела называют **сосредоточенной** или **присоединенной**, а совокупность упругих элементов – **поддерживающей системой**. Говорят, что система имеет одну степень свободы, если положение сосредоточенной массы в любой момент времени t определяется одним обобщенным перемещением.

Найдем уравнение движения сечения *1* системы с одной степенью свободы (рис. XV.1, *а*), в котором расположена сосредоточенная масса m под действием приложенной к ней силы $P = P(t)$, изменяющейся по произвольному закону (рис. XV.1, *б*). Пусть δ – перемещение массы m в текущий момент времени от положения статического равновесия. По принципу Даламбера, если сила сопротивления не учитывается, масса m может считаться находящейся в равновесии под действием силы P и силы инерции $Q = -m\ddot{\delta}$. Тогда по закону Гука в силах и перемещениях (I.14)

$$\delta = \delta_{11}(P - m\ddot{\delta}), \tag{XV.1}$$

где δ_{11} – перемещение сечения *1* от статического приложения к системе единичной силы по направлению δ. Дифференциальное уравнение движения массы m из (XV.1) в нормальном виде запишется так:

$$\ddot{\delta} + k^2\delta = p(t) \tag{XV.2}$$

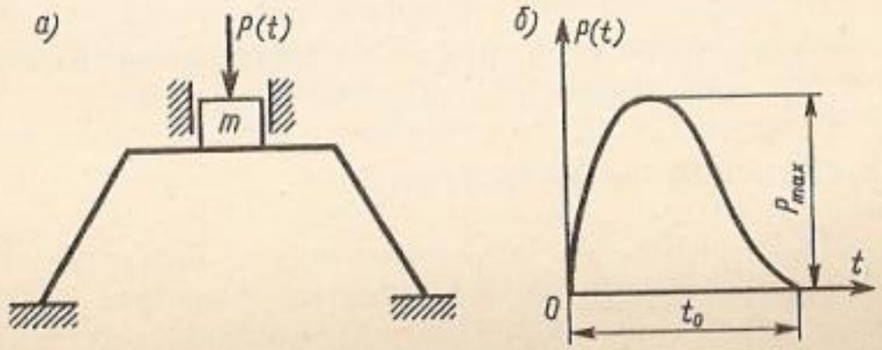


Рис. XV.1

и будет дифференциальным уравнением вынужденных колебаний без учета сил сопротивления. В (XV.2): $k^2 = 1/(m\delta_{11})$ – круговая частота собственных колебаний массы m, $p(t) = P(t)/m$, $P(t)$ – возмущающая сила.

Считая, что в начальный момент времени система находилась в положении статического равновесия и скорость массы m равнялась нулю, выпишем начальные условия:

$$[\delta]_{t=0} = 0,\ [\dot{\delta}]_{t=0} = 0.$$

Частное решение δ_* дифференциального уравнения (XV.2), удовлетворяющее начальным условиям, что можно проверить подстановкой, будет интегралом Дюамеля:

$$\delta_* = \frac{1}{k}\int_0^t p(u)\sin k(t-u)\,du.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (XV.2) запишется в виде

$$\delta = C_1\sin kt + C_2\cos kt + \frac{1}{k}\int_0^t p(u)\sin k(t-u)\,du.$$

После подстановки его в начальные условия найдем

$$C_1 = C_2 = 0$$

и уравнение движения массы m будет таким

$$\delta = \frac{1}{k}\int_0^t p(u)\sin k(t-u)\,du.$$

Если t_0 – время действия силы $P(t)$, то для $t \geqslant t_0$

$$\delta = \frac{1}{k}\int_0^{t_0} p(u)\sin k(t-u)\,du,$$

или

$$\delta = \frac{1}{k}(\sin kt\int_0^{t_0} p(u)\cos kudu - \cos kt\int_0^{t_0} p(u)\sin kudu). \qquad (XV.3)$$

Так как при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $p(u) > 0$ к интегралам, входящим в (XV.3), можно применить теорему о среднем

$$\int_0^{t_0} p(u)\cos kudu = \cos\theta_1 kt_0\int_0^{t_0} p(u)\,du,$$

$$\int_0^{t_0} p(u)\sin kudu = \sin\theta_2 kt_0\int_0^{t_0} p(u)\,du.$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

Тогда выражение δ из (XV.3) запишется в виде

$$\delta = \frac{1}{k}(\sin kt\cos\theta_1 kt_0 - \cos kt\sin\theta_2 kt_0)\int_0^{t_0} p(t)\,dt. \qquad (XV.4)$$

Если продолжительность действия силы $P(t)$ мала по сравнению с периодом собственных колебаний системы T, то произведение $kt_0 = 2\pi t_0/T$ будет величиной малой и можно считать $\cos\theta_1 kt_0 = 1$, а $\sin\theta_2 kt_0 = 0$. Тогда из (XV.4) получим

$$\delta = \frac{\sin kt}{k}\int_0^{t_0} p(t)\,dt, \qquad (XV.5)$$

где $\int_0^{t_0} p(t)\,dt = \frac{I}{m}$, $I = \int_0^{t_0} P(t)\,dt$ – импульс силы $P(t)$. Следовательно, уравнение движения массы m (сечения *1*) при $t_0 \ll T$ будет таким

$$\delta = \frac{I}{km}\sin kt. \qquad (XV.6)$$

Очевидно, что выражение (XV.6) есть решение дифференциального уравнения собственных колебаний массы m

$$\ddot{\delta} + k^2\delta = 0,$$

при начальных условиях

$$[\delta]_{t=0} = 0,\ [\dot{\delta}]_{t=0} = I/m. \qquad (XV.7)$$

Выводы.

1. Если время действия возмущающей силы мало по сравнению с периодом собственных колебаний системы, то по уравнению (XV.6) перемещения сечений системы зависят от ее импульса и не зависят от ее максимального значения и закона изменения на промежутке $[0; t_0]$. Поэтому такая сила называется импульсивной (ударной). Возмущающую силу можно считать импульсивной при $T/t_0 \geqslant 40$.

2. Введя понятие импульсивной силы, мы можем условно говорить о ее мгновенном конечном импульсе за бесконечно малый промежуток времени ($t_0 \to 0$), считая, что при этом условии величина $P(t)$ на промежутке $[0; t_0]$ достигает бесконечно большого значения (в действительности очень большого). Представление о мгновенном импульсе (толчке) влечет за собой представления о бесконечно большом ускорении сечения *1* системы (в действительности очень большом) и о конечном изменении его скорости за бесконечно малый (в действительности очень малый) промежуток

времени. Если импульс силы $P(t)$ считается мгновенным, то импульсы сил тяжести элементов системы и реактивных сил в ее опорах равны нулю (в действительности пренебрежимо малы по сравнению с I) и система может рассматриваться как замкнутая.

3. За время действия импульсивной силы (по XV.7) масса m не перемещается (в действительности ее перемещение за этот промежуток времени пренебрежимо мало), приобретая в его конце скорость $v_0 = I/m$.

4. По окончании действия импульсивной силы масса m будет совершать гармонические колебания с собственной частотой колебаний системы и амплитудой $\delta_0 = I/km$.

§ XV.2. Элементарный метод определения перемещений и напряжений в системах с одной степенью свободы при ударе

Удар – явление, при котором скорости соприкоснувшихся сечений системы (сечения удара) и ударяющего тела получают конечные изменения за промежуток времени, пренебрежимо малый по сравнению с периодом свободных колебаний системы.

В большинстве случаев силы взаимодействия между ударяющим телом и системой (ударные) в процессе удара можно рассматривать как импульсивные. Однако воспользоваться выражением (XV.6) для определения перемещений и напряжений при ударе нельзя, так как ни закон изменения ударной силы $P(t)$, ни продолжительность ее действия заранее неизвестны.

Исследование удара в связи с чрезвычайной сложностью явления и его кратковременностью наталкивается на очень большие теоретические и экспериментальные трудности. Все полученные до настоящего времени решения задачи об ударе являются в той или иной степени приближенными, потому что вынуждены для возможности построения расчетной схемы (модели) основываться на сравнительно большом числе гипотез, из которых некоторые далеки от действительности. С уточнением принимаемых гипотез повышается точность решения и резко усложняется процесс его получения.

Элементарный метод исследования удара, к изложению которого мы переходим, является в силу принимаемых гипотез самым простым, но зато и наименее точным.

Рассмотрим произвольную систему (рис. XV.2, *а*), в которой перемещение сечения удара – поступательно. Часто

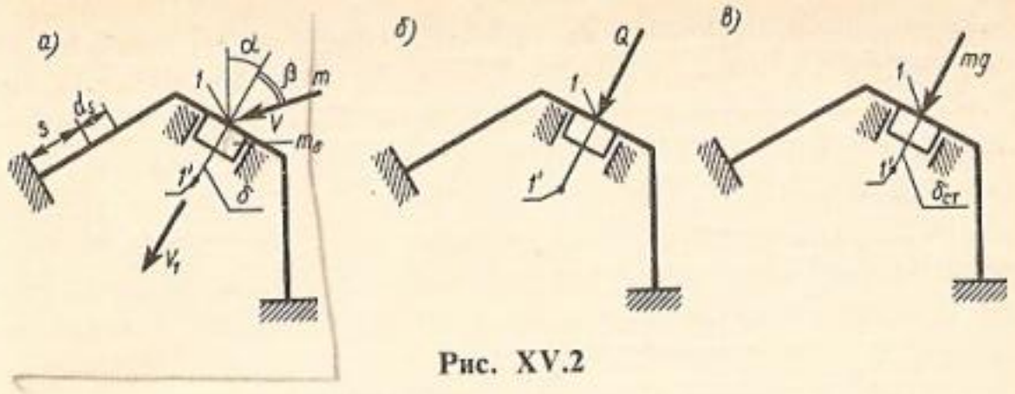


Рис. XV.2

в сечении удара помещают тело, массу которого можно считать сосредоточенной, служащее для уменьшения перемещений и напряжений при ударе (динамических перемещений и напряжений), называемое буфером.

Обозначим: *1* – сечение удара; δ – максимальное перемещение сечения *1* при ударе (динамическое перемещение); m – масса ударяющего тела (груза); m_c – масса поддерживающей системы; S – координата текущего сечения системы; dm – элементарная масса в текущем сечении системы; $m_в$ – масса буфера; v – скорость ударяющего тела перед ударом; v_S – максимальная скорость текущего сечения системы; α – угол между направлением δ и вертикалью; β – угол между направлениями v и δ; σ или τ – максимальные напряжения при ударе в произвольной точке произвольного сечения (динамические напряжения).

Для расчетной схемы принимаем предположения (гипотезы):

1. Считаем, что при ударе справедливы все выводы, сделанные при действии на систему импульсивной силы.

2. Удар предполагается совершенно неупругим, т. е. считается, что скорости ударяющего груза и сечения удара (буфера) после соприкосновения равны, по крайней мере, до тех пор, пока перемещение сечения *1* не достигнет максимального значения.

3. Предполагается, что скорости всех сечений системы достигают максимальных и нулевых значений одновременно.

4. Предполагаем, что упругая линия системы, соответствующая максимальным перемещениям всех сечений при ударе, может быть получена статическим приложением в сечении удара некоторой силы Q по направлению δ (рис. XV.2, *б*).

5. Предполагаем, что между σ или τ и δ существуют также прямо пропорциональные зависимости, как и между $\sigma_{ст}$

или $\tau_{ст}$ напряжениями в той же точке того же сечения и перемещением $\delta_{ст}$ сечения *1* при статическом нагружении системы силой mg, приложенной в сечении удара по направлению δ (рис. XV.2, *в*). Или

$$\delta = \gamma_1 \sigma, \quad \delta = \gamma_2 \tau, \tag{XV.8}$$

если соответственно

$$\delta_{ст} = \gamma_1 \sigma_{ст}, \quad \delta_{ст} = \gamma_2 \tau_{ст},$$

где γ_1 и γ_2 – коэффициенты пропорциональности.

Из зависимостей (XV.8) следует, что

$$\sigma = \sigma_{ст} \frac{\delta}{\delta_{ст}}, \quad \tau = \tau_{ст} \frac{\delta}{\delta_{ст}}. \tag{XV.9}$$

В процессе удара, основываясь на принятых гипотезах, будем рассматривать три состояния:

I состояние (перед ударом) – сечение удара и ударяющее тело соприкоснулось, но скорости всех сечений системы равны нулю;

II состояние (начало удара) – сечение удара и ударяющее тело начинают двигаться со скоростью v_1, скорости всех сечений приобретают максимальные значения, а их перемещения равны нулю;

III состояние (конец удара) – скорости всех сечений равны нулю, а их перемещения достигают максимальных значений.

Изменения энергии системы при переходе ее из II состояния в III, по теореме механики, равно работе внешних сил

$$u_{III} - E_{II} = A, \tag{XV.10}$$

где u_{III} – потенциальная энергия деформации системы в третьем состоянии; E_{II} – кинетическая энергия системы во втором состоянии; A – работа силы тяжести ударяющего тела на перемещении δ. Уравнение (XV.10) называется уравнением энергетического баланса.

На основании четвертой гипотезы (рис. XV.2, *б*)

$$u_{III} = \frac{Q\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\delta_{11}}.$$

Кинетическая энергия системы во втором состоянии

$$E_{II} = \frac{(m + m_\sigma) v_1^2}{2} + \frac{1}{2} \iiint\limits_{m_c} v_S^2 dm.$$

Обозначим

$$\eta_1 = \frac{\iiint\limits_{m_c} v_S^2 dm}{m_c v_1^2}, \tag{XV.11}$$

где η_1 – коэффициент приведения массы поддерживающей системы в сечении *1*; число, показывающее какую часть массы этой системы надо поместить в сечении *1* для того, чтобы эта часть массы, двигаясь со скоростью сечения *1*, обладала той же кинетической энергией, что и поддерживающая система в состоянии *II*.

Учитывая формулу (XV.11), запишем выражение E_{II} в виде

$$E_{II} = \frac{(m + m_\sigma + \eta_1 m_c) v_1^2}{2}.$$

Так как за время t_0 (см. § XV.1) сечение *1* не перемещается, сила mg совершает работу на перемещении δ, будучи приложена в полную величину. Поэтому

$$A = mg\delta \cos\alpha.$$

Подставив выражения u_{III}, E_{II} и A в (XV.10), получим

$$\frac{\delta^2}{2\delta_{11}} - \frac{(m + m_\sigma + \eta_1 m_c) v_1^2}{2} = mg\delta \cos\alpha. \tag{XV.12}$$

Из рис. XV.2, *в*

$$mg\delta_{11} = \delta_{ст},$$

где $\delta_{ст}$ – перемещение сечения *1* от статического приложения к системе силы тяжести ударяющего тела в направлении δ.

Тогда выражение (XV.12) запишется в виде

$$\delta^2 - 2\delta_{ст} \cos\alpha \delta - \delta_{11} (m + m_\sigma + \eta_1 m_c) v_1^2 = 0. \tag{XV.13}$$

Для определения v воспользуемся законом сохранения количества движения замкнутой системы, из которого

$$k_I = k_{II}, \tag{XV.14}$$

где k_I и k_{II} – проекции количества движения системы во II и I состояниях на направление δ, соответственно равные:

$$k_I = mv \cos\beta,$$
$$k_{II} = (m + m_\sigma + \eta_1 m_c) v_1.$$

Подставив выражения k_I и k_{II} в равенство (XV.14), найдем

$$(m + m_\sigma + \eta_1 m_c) v_1 = mv \cos\beta,$$

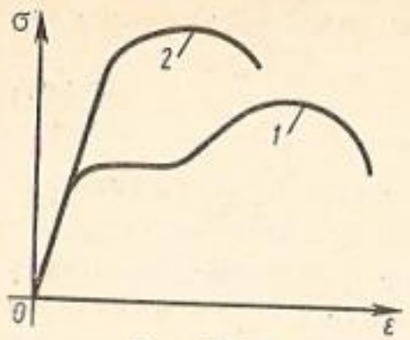


Рис. XV.3

или

$$v_1 = \frac{mv\cos\beta}{m + m_\sigma + \eta_1 m_c}.$$

Подставив выражение v в (XV.13), получим квадратное уравнение для определения δ

$$\delta^2 - 2\delta_{ст}\cos\alpha\,\delta - \frac{m^2\delta_{11}v^2\cos^2\beta}{m + m_\sigma + \eta_1 m_c} = 0,$$

из которого

$$\delta = \delta_{ст}\cos\alpha + \sqrt{\delta_{ст}^2\cos^2\alpha + \frac{m^2\delta_{11}v^2\cos^2\beta}{m + m_\sigma + \eta_1 m_c}}. \qquad \text{(XV.15)}$$

В (XV.15) перед корнем взят знак плюс, потому что перемещение δ должно быть положительным.

Поскольку $mg\delta_{11} = \delta_{ст}$, из (XV.15)

$$\delta = \delta_{ст}\cos\alpha + \sqrt{\delta_{ст}^2\cos^2\alpha + \frac{\delta_{ст}v^2\cos^2\beta}{g\left(1 + \frac{m_\sigma}{m} + \eta_1\frac{m_c}{m}\right)}}. \qquad \text{(XV.16)}$$

Перемещение δ из выражения (XV.16) можно представить

$$\delta = \delta_{ст}\psi, \qquad \text{(XV.17)}$$

где ψ – динамический коэффициент.

Из выражения (XV.16)

$$\psi = \cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + \frac{v^2\cos^2\beta}{g\delta_{ст}\left(1 + \frac{m_\sigma}{m} + \eta_1\frac{m_c}{m}\right)}}. \qquad \text{(XV.18)}$$

Особый практический интерес представляет удар падающим грузом, при котором $\cos\alpha = \cos\beta = 1$, а $v^2 = 2gh$, где h – высота падения груза.

Для этого случая из выражения (XV.18)

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}\left(1 + \frac{m_\sigma}{m} + \eta_1\frac{m_c}{m}\right)}}. \qquad \text{(XV.19)}$$

Если $h/\delta_{ст}$ велико по сравнению с единицей, то

$$\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}\left(1 + \frac{m_\sigma}{m} + \eta_1\frac{m_c}{m}\right)}}. \qquad \text{(XV.20)}$$

Из (XV.19) при $m_\sigma = 0$, а $m_c \ll m$, или неизвестном η_1

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}. \qquad \text{(XV.21)}$$

Видим, что вычисление ψ по (XV.21) вместо (XV.19) идет всегда в запас прочности.

Если сила прикладывается к системе в полную величину (динамически) без начальной скорости ($h = 0$), то из (XV.19) и (XV.17)

$$\delta = 2\delta_{ст},$$

т..е. перемещение сечения при внезапном приложении силы в 2 раза больше его перемещения при статическом приложении той же силы.

Из выражений (XV.9) и (XV.17)

$$\sigma = \sigma_{ст}\psi,\ \tau = \tau_{ст}\psi. \qquad \text{(XV.22)}$$

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что при

$$\frac{v^2}{g\delta_{ст}} \leqslant 100, \text{ или } \frac{2h}{\delta_{ст}} \leqslant 100, \qquad \text{(XV.23)}$$

ошибка в определении динамических перемещений и напряжений по формулам (XV.17) и (XV.22) не превышает 10%.

Элементарное решение задачи об ударе не учитывает: возможных отскоков ударяющего тела и возможных повторных соударений его с системой до конца удара, волнового характера распространения деформаций и напряжений, контактных упругих и упругопластических деформаций в месте соприкосновения ударяющего тела и сечения системы. В связи с этим за пределами ограничений элементарная теория позволяет только оценить порядок перемещений и напряжений при ударе. Причем эта оценка для напряжений имеет гораздо меньшую точность, чем для перемещений.

§ XV.3. Замечания о расчете на прочность и конструировании при ударе

При ударе, за счет того что скорости нагружения велики, образование и развитие пластической деформации в образце или детали затруднено. Поэтому значения $\sigma_т$ и $\sigma_в$ материала повышаются и резко уменьшается его относительное остаточное удлинение при разрушении. Схематически харак-

теристики одного и того же материала при статическом (линия *1*) и динамическом (линия *2*) нагружениях показаны на рис. XV.3.

Однако, так как формулы (XV.18) и (XV.22) приближенные, расчет на прочность при ударе следует проводить не по динамическим, а по статическим предельным характеристикам материала.

При конструировании элементов систем, испытывающих удар, следует обращать особое внимание на увеличение их статической деформации с целью уменьшения динамических напряжений. В элементах, испытывающих продольный и крутящий удары, этого можно достичь либо увеличением их длин, либо ликвидацией переменности поперечного сечения по участкам.

На рис. XV.4 показаны рациональное вверху и нерациональное внизу крепление крышек цилиндра ударного инструмента (клепальные и отбойные молотки) болтами; на рис. XV.5, *б* показана рациональная, а на рис. XV.5, *а* – нерациональная форма болта, воспринимающего ударную нагрузку: увеличение площади его ненарезанной части (рис. XV.5, *а*) не уменьшает максимального статического напряжения, но уменьшает абсолютное статическое удлинение, а следовательно, увеличивает ψ.

При изгибающем ударе, как можно показать в результате несложного исследования, увеличение длины балки при сохранении размеров поперечного сечения ведет к уменьшению динамического напряжения в ней.

Так как при элементарном методе расчета на удар ни максимальные скорости сечений системы, ни уравнения упругих линий ее участков неизвестны, то при приближенном определении η_1 принимают предположения:

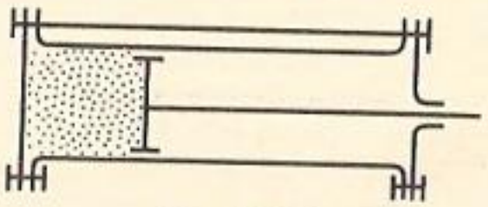


Рис. XV.4

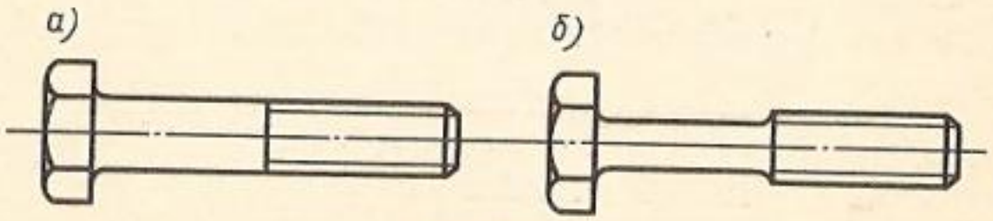


Рис. XV.5

1. Максимальные скорости сечений системы пропорциональны их максимальным перемещениям

$$v_1 = \beta\delta, \quad v_S = \beta\delta_S, \tag{XV.24}$$

где β – коэффициент пропорциональности; δ_S – максимальное перемещение текущего сечения системы.

2. Уравнения упругих линий участков могут быть получены либо как уравнения, удовлетворяющие граничным условиям для δ, δ' и M_z, графики которых по форме совпадают с упругими линиями соответствующих участков при ударе, либо как уравнения упругих линий участков, полученных при статическом нагружении системы единичными факторами, приложенными в сечении удара по направлению обобщенных перемещений.

Подставив в выражения v_1 и v_S из (XV.24) в формулу (XV.11), получим

$$\eta_1 = \frac{\int\int\int \delta_\xi^2 dm}{m_c \delta^2}. \tag{XV.25}$$

Проведенные исследования показывают, что при выполнении принятых предположений η_1, найденный по формуле (XV.25), имеет достаточную для практических целей точность.

Пример XV.1. Определить η_1 для призматических балок (рис. XV.6).

Для этих балок $m_c = \rho Fl$, $dm = \rho F dx$, поэтому для них формула (XV.25) запишется в виде

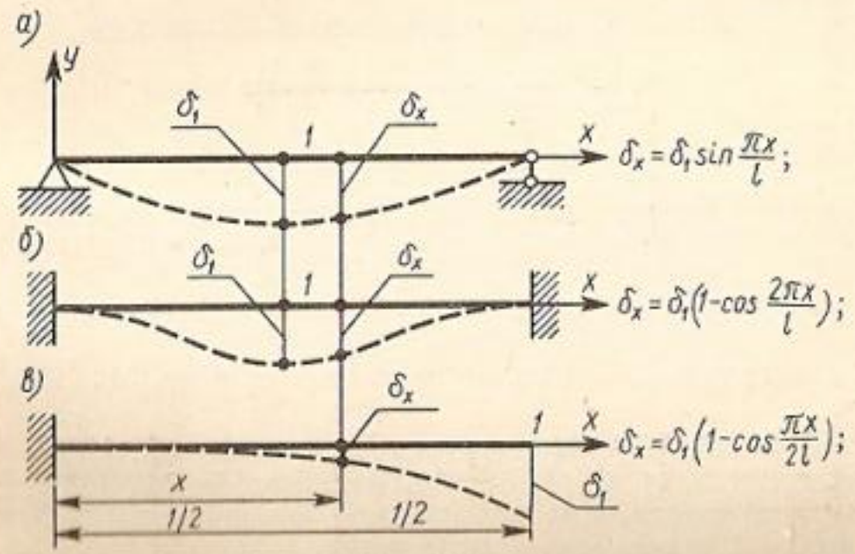


Рис. XV.6

$$\eta_t = \frac{\int_0^t \delta_x^2 dx}{l\delta^2}. \qquad \text{(XV.26)}$$

Уравнение упругой линии балки, удовлетворяющее требованиям второго предположения, выписано рядом с каждой балкой.

Балка (рис. XV.6, *а*). Для этой балки $\delta_1 = a$, поэтому по формуле (XV.26)

$$\eta_1 = \frac{1}{l}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi x}{l}\right|_0^l = \frac{1}{2}.$$

Балка (рис. XV.6, *б*). Для этой балки $\delta_1 = 2a$, поэтому по формуле (XV.26)

$$\eta_1 = \frac{1}{4l}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{4l}\left| x - \frac{l}{\pi}\sin\frac{2\pi x}{l} + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{2\pi}\left(\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi x}{l}\right)\right|_0^l = \frac{3}{8}.$$

Балка (рис. XV.6, *в*). Для этой балки $\delta_1 = a$, поэтому по формуле (XV.26)

$$\eta_1 = \frac{1}{l}\int_0^l\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = \frac{1}{l}\left| x - \frac{4l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l} + \right.$$

$$\left. + \frac{2l}{\pi}\left(\frac{\pi x}{4l} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\right|_0^l = 0{,}226.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., 1986.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1979.
3. *Писаренко Г. С. и др.* Сопротивление материалов. Киев, 1963.
4. *Тимощенко С. П.* Сопротивление материалов. М., 1960, ч. I; 1965, ч. II.
5. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М., 1976.
6. *Степин П. А.* Сопротивление материалов. М., 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Введение** 4

§ I.1. Общие определения 4
§ I.2. Предположения о материале тела 9
§ I.3. Понятие о большой и малой жесткостях тел и систем. Геометрический метод определения перемещений 10
§ I.4. Силы упругости и понятие о напряжении . . . 12
§ I.5. Компоненты напряженного состояния и свойство парности касательных напряжений 14
§ I.6. Свойство касательного напряжения в точке контура поперечного сечения 16
§ I.7. Компоненты деформации и обобщенный закон Гука 17
§ I.8. Классификация внешних сил и принцип Сен-Венана 19
§ I.9. Классификация тел по их форме 23
§ I.10. Метод сечений 24
§ I.11. Закон Гука во внешних факторах и перемещениях 27
§ I.12. Понятие о расчетной схеме механической системы 29
§ I.13. Понятие о начальных несовершенствах элемента системы 30

Глава II. **Растяжение и сжатие** 31

§ II.1. Определение нормального усилия в поперечном сечении стержня 31
§ II.2. Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) и коэффициент Пуассона 32
§ II.3. Формула для определения нормального напряжения в поперечном сечении стержня 34
§ II.4. Определение нормального и касательного напряжений в произвольном сечении стержня 36
§ II.5. Результаты механических испытаний на растяжение 37
§ II.6. Результаты механических испытаний на сжатие 40
§ II.7. Диаграмма напряжений 41
§ II.8. Выражение постоянных A и B, входящих в уравнения обобщенного закона Гука, через упругие константы материала E и μ 46

§ II.9. Дифференциальные и интегральные зависимости между q и N, ε и δ 47
§ II.10. Расчет на прочность 48
§ II.11. Концентрация напряжений и ее влияние на прочность при статическом нагружении 51
§ II.12. Расчеты плоских ферм и ферменных систем 55
§ II.13. Расчет стержня 72

Глава III. **Чистый сдвиг и свободное кручение** 84

§ III.1. Определение нормального и касательного напряжений по произвольной площадке при чистом сдвиге 84
§ III.2. Закон Гука при чистом сдвиге и зависимость между E и G 85
§ III.3. Определение $M_к$ при кручении 86
§ III.4. Дифференциальная и интегральная зависимости между m и $M_к$ 88
§ III.5. Общие замечания о кручении 89
§ III.6. Кручение стержня кольцевого поперечного сечения 90
§ III.7. Формула для определения касательного напряжения в стержне односвязного тонкостенного сечения 93
§ III.8. Определение геометрической характеристики жесткости $I_к$ односвязного тонкостенного сечения . . . 95
§ III.9. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения 98
§ III.10. Кручение стержня тонкостенного разомкнутого сечения 99
§ III.11. Результаты механических испытаний и расчеты на прочность и жесткость при кручении 101
§ III.12. Рациональная форма поперечного сечения . . . 104
§ III.13. Концентрация напряжений при кручении . . . 104
§ III.14. Примеры расчетов на кручение 105

Глава IV. **Геометрические характеристики плоских сечений** 112

§ IV.1. Понятие о моментах сечения и зависимость между I_z, I_y и I_ρ 112
§ IV.2. Понятие о центре тяжести сечения и свойство статического момента 113
§ IV.3. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей (формулы параллельного переноса) 113
§ IV.4. Зависимости между моментами инерции относительно осей, проходящих через данную точку . . . 114
§ IV.5. Понятие о главных осях и главных моментах инерции. Определение положений главных осей и значений главных моментов инерции 115
§ IV.6. Свойство моментов инерции относительно главных осей 118

§ IV.7. Свойство моментов инерции сечения относительно осей, из которых одна – его ось симметрии . . . 118
§ IV.8. Свойство моментов инерции правильных фигур относительно центральных осей 119
§ IV.9. Геометрические характеристики некоторых элементарных фигур 120
§ IV.10. Типовые примеры на определение геометрических характеристик плоских сечений 122

Глава V. **Поперечный изгиб** 128

§ V.1. Основные определения 128
§ V.2. Определение Q_y и M_z в поперечных сечениях балки 130
§ V.3. Дифференциальные и интегральные зависимости между q и Q_y, Q_y и M_z, q и M_z 131
§ V.4. Опорные устройства балок при плоском изгибе 132
§ V.5. Техника построения эпюр Q_y и M_z на балках 133
§ V.6. Техника построения эпюр N, Q_y и M_z на плоских рамах 140
§ V.7. Вывод формулы для определения нормальных напряжений при прямом чистом изгибе 149
§ V.8. Расчет на прочность при прямом чистом изгибе (расчет по нормальным напряжениям) 152
§ V.9. Вывод формулы для определения касательных напряжений при прямом поперечном изгибе в балках нетонкостенного (сплошного) сечения 154
§ V.10. Вывод формулы для определения касательных напряжений в балках тонкостенного разомкнутого сечения при прямом поперечном изгибе 158
§ V.11. Центр изгиба тонкостенного разомкнутого сечения 160
§ V.12. Две теоремы о касательных напряжениях в тонкостенных сечениях 163
§ V.13. Построение эпюр касательных напряжений на тонкостенных разомкнутых сечениях и определение положений их центров изгиба 165
§ V.14. Расчет на прочность при прямом поперечном изгибе 173
§ V.15. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе 176
§ V.16. Дифференциальное уравнение упругой линии 185
§ V.17. Косой изгиб 190
§ V.18. Внецентренное растяжение или сжатие 201

Глава VI. **Определение перемещений сечений стержневых систем** 205

§ VI.1. Потенциальная энергия деформации и общие теоремы сопротивления материалов 205
§ VI.2. Выражение потенциальной энергии деформации системы через внутренние силовые факторы 210

§ VI.3. Вывод формулы Мора для определения перемещения сечения по заданному направлению . . . 213
§ VI.4. Вывод формулы Мора для определения температурных перемещений сечений по заданному направлению 215
§ VI.5. Правило Верещагина 223
§ VI.6. Расчет винтовых цилиндрических пружин . . . 236

Глава VII. **Расчет статически неопределимых стержневых систем по методу сил** 240

§ VII.1. Определение числа лишних связей плоской системы 240
§ VII.2. Степень статической неопределимости системы 244
§ VII.3. Эквивалентная система и канонические уравнения метода сил 246
§ VII.4. Расчет ферм 261
§ VII.5. Расчет смешанных систем 264
§ VII.6. Использование симметрии при расчете статически неопределимых систем 266
§ VII.7. Расчет плоскопространственных статически неопределимых систем 276

Глава VIII. **Анализ напряженного состояния** 280

§ VIII.1. Выражение нормального и касательного напряжений в точке данного сечения тела через компоненты напряженного состояния в этой точке 280
§ VIII.2. Определение значений главных напряжений . . 281
§ VIII.3. Определение положений главных площадок и их взаимная ориентация 283
§ VIII.4. Круговая диаграмма напряженного состояния 285
§ VIII.5. Классификация напряженных состояний. Определение главных напряжений и положений главных площадок в плоском напряженном состоянии и точке бруса 287
§ VIII.6. Относительное изменение объема 294
§ VIII.7. Удельная потенциальная энергия деформации W и ее деление на $W_{об}$ и $W_ф$ 295

Глава IX. **Теории прочности** 297

§ IX.1. Запас прочности данного напряженного состояния и назначение теорий прочности 297
§ IX.2. Теории хрупкого разрушения 299
§ IX.3. Теории пластичности 304
§ IX.4. Пятая теория прочности – теория предельных напряженных состояний (теория Мора) 307
§ IX.5. Расчеты стержневых систем, основанные на теориях прочности 310

Глава X. **Расчет осесимметричных тонкостенных оболочек по безмоментной теории** 322

§ X.1. Геометрия тонкостенной оболочки и предположения, принимаемые при ее расчете 322
§ X.2. Вывод формулы Лапласа 323

Глава XI. **Расчет на прочность при переменных напряжениях** 331

§ XI.1. Понятие об усталости 331
§ XI.2. Цикл напряжений и предел выносливости . . . 332
§ XI.3. Влияние концентрации напряжений, размера и степени чистоты обработки поверхности детали на ее сопротивление усталости 337
§ XI.4. Диаграмма предельных амплитуд и определение запаса прочности детали из пластичного материала при чистом сдвиге 342
§ XI.5. Диаграмма предельных амплитуд и определение запаса прочности детали из пластичного материала при одноосном напряженном состоянии 343
§ XI.6. Диаграмма предельных амплитуд и определение запасов прочности деталей из квазихрупких материалов при чистом сдвиге и одноосном напряженном состоянии 345
§ XI.7. Определение запаса прочности стержня при совместном действии переменных растяжения (сжатия), изгиба и кручения 346

Глава XII. **Продольный изгиб** 352

§ XII.1. Понятие о критической силе и устойчивости сжатого стержня 352
§ XII.2. Формула Эйлера для шарнирно-опертого стержня 355
§ XII.3. Понятие о коэффициенте приведенной длины стержня 360
§ XII.4. Энергетический метод приближенного определения критической силы 364
§ XII.5. График критических напряжений и расчет на устойчивость 372

Глава XIII. **Прямой продольно-поперечный изгиб** 380

§ XIII.1. Дифференциальные уравнения упругой линии и изгибающего момента 380
§ XIII.2. Принцип независимости действия поперечных сил 384
§ XIII.3. Приближенные формулы для определения прогибов и изгибающих моментов 386
§ XIII.4. Расчет на прочность 389

Глава XIV. **Расчет стержневых систем при упругопластической деформации** 391

§ XIV.1. Истинная диаграмма напряжений (характеристика) материала при растяжении 391
§ XIV.2. Замечания о принципах большой жесткости и независимости действия сил 394
§ XIV.3. Расчет ферменных систем 395
§ XIV.4. Чистый упругопластический изгиб балки . . . 400
§ XIV.5. Расчет по несущей способности 406

Глава XV. **Удар по стержневой системе с одной степенью свободы** 415

§ XV.1. Действие на систему импульсивной силы . . . 415
§ XV.2. Элементарный метод определения перемещений и напряжений в системах с одной степенью свободы при ударе 418
§ XV.3. Замечания о расчете на прочность и конструировании при ударе 423

Список литературы 426

Учебное издание

Федор Васильевич Долинский,
Мстислав Николаевич Михайлов

КРАТКИЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Зав. редакцией *А. В. Дубровский*
Редактор *Л. Н. Чупеева*
Младший редактор *Н. М. Иванова*
Художественный редактор *Л. К. Громова*
Технические редакторы *Т. Н. Полунина, З. А. Муслимова*
Корректор *В. В. Кожуткина*

ИБ № 6715

Изд. № ОТ-591. Сдано в набор 05.05.87. Подп. в печать 15.10.87. Формат 84 × 108$^1/_{32}$. Бум. кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать высокая. Объем 22,68 усл. печ. л. 22,68 усл. кр.-отт. 21,23 уч.-изд. л. Тираж 70000 экз. Зак. № 970. Цена 90 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Страница	Напечатано	Следует читать
363, 7-я строка сверху	$\alpha_1 = 2\alpha_2$	$\alpha_1 = 2\alpha_2$ (XII.27)
363, 10-я строка снизу	$[y']_{x=l} = 0$	$[y'_2]_{x=l} = 0$
363, 6-я строка снизу	$C_3 \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 l}{4} - C_4 \sin \frac{\alpha_1 l}{4}$	$C_3 \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 l}{4} - C_4 \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_1 l}{4}$
366, 10-я строка снизу	(XII.50) в (XII.47)	(XII.39) в (XII.36)
368, 1-я строка снизу	$\int_0^1 \left(1 - \frac{23}{3} \cdot \frac{x}{l} + \frac{20}{3} \cdot \frac{x^2}{l^2}\right) dx$	$\int_0^1 \left(1 - \frac{23}{3} \cdot \frac{x}{l} + \frac{20}{3} \cdot \frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx$