Ю. И. Димитриенко

НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физико-математическим и машиностроительным специальностям

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 539.3
ББК 22.251
Д 46

Д и м и т р и е н к о Ю. И. **Нелинейная механика сплошной среды.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 624 с. — ISBN 978-5-9221-1110-2.

Учебное пособие посвящено систематизированному изложению основ механики сплошной среды при конечных деформациях. Рассмотрена кинематика сплошных сред, универсальные законы сохранения механики сплошной среды, теория скачков функций на поверхностях сильных разрывов. В систематизированном виде приводится теория коротационных производных, динамические уравнения совместности деформаций, принципы материальной индифферентности и материальной симметрии. Предложен новый подход к формулировке определяющих соотношений для упругих и неупругих сред с конечными деформациями, основанный на применении энергетических и квазиэнергетических пар тензоров напряжений–деформаций. С помощью этого подхода изложена теория конечных упругих и вязкоупругих деформаций, теория больших пластических деформаций, теория анизотропных сред с большими деформациями.

В учебном пособии содержится значительное число упражнений.

Учебное пособие предназначено студентам и аспирантам, обучающимся по физико-математическим и машиностроительным специальностям, а также специалистам, занимающимся различными вопросами механики сплошной среды.

Р е ц е н з е н т ы:
зав. кафедрой газовой и волновой динамики МГУ им. М. В. Ломоносова
академик РАН Е. И. Шемякин;

зав. лабораторией волновых процессов МГУ им. М. В. Ломоносова
профессор Н. Н. Смирнов

ISBN 978-5-9221-1110-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Нелинейная механика сплошной среды — это ядро общего курса «Механика сплошной среды» (МСС), в рамках которого рассматриваются кинематика сплошных сред, законы сохранения, общая нелинейная теория определяющих соотношений, соотношения на поверхностях сильных разрывов. Кроме того, в курсе нелинейной механики сплошной среды рассматривают теорию твердых сред при конечных (произвольных) деформациях. Эта «произвольность» деформаций приводит к тому, что уравнения, описывающие поведение сплошных сред, оказываются чрезвычайно сложными — нелинейными, иногда даже используют термин «сильно нелинейными», поскольку соотношения, участвующие в них, не всегда могут быть выражены явным аналитическим образом. Если отказаться от условия произвольности деформаций сред и рассмотреть только малые — обычно до 1 % деформации, то ситуация резко меняется — удается линеаризовать уравнения механики сплошных сред, и для решения прикладных задач можно привлечь широкий набор аналитических и численных методов. Однако многие практические задачи требуют анализа не малых, а именно произвольных — конечных деформаций тел: например, это задачи проектирования резинотехнических деталей машин (амортизаторов, уплотнений, шин), для которых предельные деформации могут достигать 100 % и более, это и разнообразные задачи обработки металлов давлением, в которых существенную роль играют конечные пластические деформации, это и динамические задачи пробивания преград ударниками (образование отверстий в металлической преграде при ее пробивании — пример возникновения конечных пластических деформаций), это и многочисленные задачи механики грунтов и горных пород, в которых часто возникает потребность в рассмотрении конечных деформаций, а также проблемы моделирования процессов в биологических системах, например, функционирования мышечных тканей человека и многие другие.

Условно можно считать, что теория малых деформаций твердых тел родилась в XVII веке с работ Роберта Гука, который сформулировал одно из главных допущений этой теории: напряжения пропорциональны удлинениям тел. На современном языке это означает, что соотношения между напряжениями и градиентами перемещений тел линейны. К настоящему времени теория малых деформаций очень глубоко и всесторонне разработана. По различным разделам этой теории, таким как теория упругости, теория пластичности, теория устойчивости и многим другим, написано значительное число монографий и учебников.

При переходе к конечным деформациям знаменитый закон Гука уже не выполняется — основополагающие соотношения между напряжениями и градиентами перемещений становятся «сильно нелинейными», как раз их и не всегда можно выразить даже аналитически. Основы теории конечных деформаций были заложены в XIX веке выдающимися учеными О. Коши, Дж. Лагранжем, Л. Эйлером, Г. Пиолой, Х. Сен-Венаном, Г. Кирхгофом, а затем продолжены А. Лявом, Г. Яуманном, М.А. Био, Ф.Д. Мурнаганом и другими исследователями. Формированию теории конечных деформаций как самостоятельного раздела механики мы во многом обязаны работам М. Муни и Р. Ривлина, выполненным в 40-х годах XX века. Принципиальный шаг был сделан в 50–60-х годах XX века американской школой механиков, прежде всего Б. Колеманом, У. Ноллом и К. Трусделлом, которые рассмотрели нелинейную механику с позиций формальной математики. Следуя Д. Гильберту, ими была введена аксиоматика нелинейной механики, которая упорядочила систему накопленных знаний и позволила сформулировать основные направления дальнейших исследований в этой теории. Совместно с Р. Ривлиным и А.М. Спенсером ими был разработан специальный математический аппарат для формулировки соотношений, обобщающих закон Гука на случай конечных деформаций, — теория нелинейных тензорных функций, да и сам тензорный анализ, широко применяемый в механике сплошных сред, был существенным образом адаптирован к проблемам нелинейной механики. Уравнения механики сплошных сред получили инвариантную (т.е. не зависящую от выбора системы координат) форму. Дальнейшая разработка этого направления осуществлялась А. Эрингеном, Дж. Моженом, А.Е. Грином, В. Зерной, Дж. Адкинсом и другими.

Роль советской и российской школ механиков в разработке принципов современной нелинейной механики сплошных сред также весьма значительна. В 1959 г. были изданы лекции по МСС Л.И. Седова, которые затем в 1962 г. были опубликованы в виде книги «Введение в механику сплошной среды». В 1968 г. вышло первое издание фундаментального двухтомного учебника «Механика сплошной среды» академика Л.И. Седова, которое и в настоящее время является одной из наиболее популярных книг по МСС. Существенный вклад в термодинамическую теорию построения моделей нелинейной механики сплошной среды внесли работы крупнейшего отечественного механика А.А. Ильюшина. Выдающихся результатов в теории конечных упругих деформаций удалось достичь ученым ленинградской школы механиков — А.И. Лурье, который написал фундаментальную монографию по нелинейной теории упругости, систематизировав в ней классы задач теории конечных упругих деформаций, допускающих аналитические решения, а также К.Ф. Черных, который развил теорию конечных деформаций для анизотропных сред, разработал методы решения задач нелинейной теории оболочек и нелинейной теории трещин. Следует отметить также труды ученых московской, киевской и уральской школ механиков — Б.Е. Победри, В.И. Кондаурова, Л.В. Никитина, В.Г. Карнаухова, А.А. Поздеева, П.В. Трусова, Ю.И. Няшина и многих других, внесших значительный вклад в теорию вязкоупругих, упругопластических и вязкопластических конечных деформаций.

Предлагаемое читателю учебное пособие основано на лекциях, которые автор читает много лет в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана. Книга имеет несколько принципиальных особенностей: 1) в ней выдержан «математический» стиль изложения курса, для которого характерно наличие аксиом, определений, теорем, доказательств, а уровень строгости изложения основного материала характерен для книг по механике; 2) использован тензорный аппарат, преимущественно в безындексной форме, поскольку он при определенных навыках весьма удобен в работе, не затеняет физической сути законов и позволяет легко перейти в любую подходящую систему координат; 3) использована найденная В.И. Кондауровым консервативная (дивергентная) форма динамических уравнений совместности деформаций, позволившая, наконец, записать полную систему законов сохранения нелинейной механики в едином обобщенном виде; 4) ключевой раздел нелинейной механики — теория определяющих соотношений — впервые в отечественной и зарубежной литературе изложен с использованием всех энергетических пар тензоров, которые были установлены Р. Хиллом и К.Ф. Черных и упорядочены автором, а также квазиэнергетических пар тензоров, обнаруженных автором; 5) для построения определяющих соотношений нелинейной механики применена теория нелинейных тензорных функций и тензорных операторов, разработанная в работах А.М. Спенсера, Р. Ривлина, Дж. Эриксена, В.В. Лохина, Ю.И. Сиротина, Б.Е. Победри и автора данной книги; 6) с единых позиций изложены основы теории конечных упругих, вязкоупругих и пластических деформаций; 7) использован «дружественный к читателю» стиль изложения материала, отличающийся наличием достаточно подробных необходимых математических выкладок и доказательств.

Принятый в книге аксимоматический подход несколько отличается от аналогичных подходов, предложенных К. Трусделлом, а также другими авторами (например, А.Г. Горшковым, Л.Н. Рабинским и Д.В. Тарлаковским). Система аксиом МСС в книге составлена таким образом, чтобы минимизировать общее их число, и чтобы каждая аксиома допускала ясную физическую трактовку. Именно поэтому аксиомы К. Трусделла, относящиеся к логическим отношениям между телами, не включены в общий перечень, аксиомы о массе тел включены в одну аксиому о законе сохранения массы, аналогично аксиомы о существовании сил и инерциальных систем отсчета включены в одну аксиому о законе изменения количества движения. Правда, последняя в книге разбита на две части: вначале в разд. 2.2 рассмотрен случай инерциальных систем отсчета, а затем в разд. 3.10 уже и неинерциальных. В отличие от аксиоматики К. Трусделла, в книге в систему аксиом включены и так называемые принципы построения определяющих соотношений, которые также играют основополагающую роль в формировании системы уравнений МСС.

Аксиоматический подход к изложению МСС обладает по крайней мере одним очень ценным достоинством, он позволяет четко разделить все величины на две категории: «первичные», которые вводятся аксиоматически и, следовательно, в рамках МСС не требуется обоснования их появления, и «вторичные», которые представляют собой комбинацию из первичных величин. Аксиоматический подход позволяет также ясно разделять все утверждения в МСС на определения и следствия из них (теоремы), что чрезвычайно полезно при первоначальном знакомстве с курсом.

Для знакомства со специфическим аппаратом тензорного анализа рекомендуется воспользоваться учебным пособием автора «Тензорное исчисление» [12], в котором использованы те же самые основные обозначения и определения, которые применяются в данной книге. Все ссылки по тексту на формулы тензорного анализа адресованы к этому учебному пособию.

Книга охватывает основные классические разделы нелинейной механики сплошной среды: кинематику, законы сохранения, теорию определяющих соотношений, теорию скачков, основы теории конечных упругих деформаций, конечных вязкоупругих деформаций, конечных пластических деформаций. Из-за ограничений по объему книги в нее не включены такие важные разделы как теория конечных деформаций оболочек и теория сред с фазовыми превращениями.

Обратим внимание на то, что названия основных тензоров в нелинейной механике до сих пор не устоялись, и в разных книгах, как отечественных, так и зарубежных, одни и те же объекты часто называют по-разному. Автор в основном придерживался названий, приведенных в книге А.И. Лурье «Нелинейная теория упругости».

В книге использована двойная нумерация формул в каждой главе, например (3.46), где первая цифра — это номер раздела в главе, а вторая — порядковый номер формулы. При ссылке на формулы другой главы к формуле добавляется еще одна цифра — номер главы, например (1.3.46). Нумерация определений и теорем — тоже двойная, например определение 2.1, но первая цифра — это уже номер главы, а вторая — порядковый номер.

Учебное пособие предназначено для студентов как классических, так и технических университетов, обучающихся по физико-математическим и машиностроительным специальностям. Автор надеется, что книга также будет полезна для аспирантов и специалистов, занимающихся различными вопросами нелинейной механики сплошной среды.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность рецензентам книги: заведующему кафедрой волновой и газовой динамики МГУ им. М.В. Ломоносова академику РАН Е.И. Шемякину и заведующему лабораторией волновых процессов МГУ им. М.В. Ломоносова профессору Н.Н. Смирнову.

Автор благодарен заведующему кафедрой механики композитов МГУ им. М.В. Ломоносова профессору Б.Е. Победре, многолетнее научное общение с которым в значительной степени сформировало подходы автора к различным теоретическим проблемам. Автор благодарен также профессору МГТУ им. Н.Э. Баумана В.С. Зарубину за дискуссии по различным вопросам механики и термодинамики.

Особую благодарность автор выражает ведущему научному сотруднику МГТУ им. Н.Э. Баумана кандидату физико-математических наук И.Д. Димитриенко за подготовку оригинал-макета и редактирование рукописи.

Автор

Основные обозначения

$\mathbf{A}$ — левый тензор деформации Альманзи;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ — квазиэнергетические тензоры деформации, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$;

$\mathbf{a}^{\mathrm{Ol}}$, $\mathbf{a}^{J}$, $\mathbf{a}^{\mathrm{CR}}$, $\mathbf{a}^{D}$, $\mathbf{a}^{d}$, $\mathbf{a}^{V}$, $\mathbf{a}^{U}$, $\mathbf{a}^{S}$ — коротационные производные Олдройда, Яуманна, Коттера–Ривлина, левая и правая смешанные, левая и правая в собственном базисе, спиновая;

$\mathbf{B}$ — третий энергетический тензор деформации;

$\mathbf{C}$ — правый тензор деформации Коши–Грина;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ — энергетические тензоры деформации, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ — обобщенные энергетические тензоры деформации;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ — тензоры упругой и пластической деформаций;

$\widehat{\mathbf{c}}_i$ — главный базис анизотропии (ортонормированный) твердого тела в неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$;

$\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ — вектор скорости движения поверхности разрыва в отсчетной конфигурации;

$\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации;

$\overset{\circ}{D}$ и D — нормальная скорость движения поверхности разрыва в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$;

$\mathbf{E}$ — метрический тензор;

E — полная энергия тела;

${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ — тензоры энергетической эквивалентности;

e — плотность внутренней энергии тела;

$\bar{\mathbf{e}}_i$ — базис прямоугольной декартовой системы координат;

$\mathbf{F}$ — градиент деформации;

$\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_p$ — градиенты упругой и пластической деформаций;

$\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил;

$\mathbf{G}$ — правая мера деформации Коши–Грина;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ — энергетические меры деформации, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G$ — обобщенные энергетические меры деформации;

$\mathbf{g}$ — левая мера деформации Альманзи;

$\overset{\circ}{g}_{ij}$ и g_{ij} — метрические матрицы в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$;

H — энтропия тела;

$\widetilde{\mathbf{H}}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ — левый и правый логарифмические тензоры деформации Генки;

$\mathbf{H}$ — тензор H-преобразования одной отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в другую отсчетную конфигурацию $\overset{*}{\mathcal{K}}$;

$\mathbf{I}$ — вектор количества движения (импульса) тела;

$I_1(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C})$ и $I_3(\mathbf{C})$ — главные инварианты тензора второго ранга $\mathbf{C}$;

$I_1^{(s)}(\mathbf{\Omega})$ — инварианты тензора второго ранга $\mathbf{\Omega}$ относительно ортогональной группы $\overset{\circ}{G}_s$;

$\overset{(\mathrm{n})}{i}_A$, $\overset{(\mathrm{n})}{i}_B$, $\overset{(\mathrm{n})}{i}_C$, $\overset{(\mathrm{n})}{i}_D$, $\overset{(\mathrm{n})}{i}_G$, i — различные формы энтальпии;

$\mathbf{J}$ — левый тензор деформации Коши–Грина;

$J = \rho/\overset{\circ}{\rho}$ — отношение плотностей;

K — кинетическая энергия тела;

${}^4\mathbf{K}(t)$ — тензор ядер релаксации;

$\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ — актуальная и отсчетная конфигурации;

$\mathbf{L}$ — градиент скорости;

${}^4\mathbf{M}$ — квазилинейный тензор упругости;

$\mathbf{n}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ — векторы нормали в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$;

$\mathbf{O}$ — тензор поворота, сопровождающий деформацию;

$\mathbf{P}$ — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа;

$\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{C})}$, $\alpha = 1, \ldots \bar{n}$, — ортопроекторы симметричного тензора $\mathbf{C}$;

$\mathbf{p}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$ — собственные векторы тензоров искажений $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$;

p — давление;

Q — скорость нагрева;

$\bar{Q}_m$ и $\bar{Q}_\Sigma$ — производство энтропии за счет внешних массовых и поверхностных источников;

$\bar{Q}^*$ — производство энтропии за счет внутренних источников;

Q_β — термодинамические потоки;

${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$ — тензоры квазиэнергетической эквивалентности;

$\mathbf{q}$ — вектор потока тепла;

q_m и q_Σ — притоки тепла за счет массовых и поверхностных источников;

q^* — плотность внутреннего производства энтропии;

${}^4\mathbf{R}(t)$ — тензор функций релаксации;

$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ и $\mathbf{r}_i$ — векторы локальных базисов в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$;

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ — квазиэнергетические тензоры напряжений, $n =$ I, II, III, IV, V;

$\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ — поворотный тензор напряжений;

$\mathbf{S}_G$ — обобщенный поворотный тензор напряжений;

$\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши;

$\mathbf{T}^h$ и $\mathbf{T}^H$ — общее обозначение коротационных производных тензора в ковариантном и контравариантном подвижных базисах $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}^i$;
$\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ — энергетические тензоры напряжений, $n = \mathrm{I, II, III, IV, V}$;
$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G$ — обобщенные энергетические тензоры напряжений;
$\mathbf{t}_n$ — вектор напряжений;
$\mathbf{U}$ — правый тензор искажений;
U — внутренняя энергия тела;
$\mathbf{u}$ — вектор перемещений;
$\mathbf{V}$ — левый тензор искажений;
$\mathbf{v}$ — вектор скорости;
$\mathbf{W}$ — тензор вихря;
W_m и W_Σ — мощность внешних массовых и поверхностных сил;
$W_{(i)}$ — мощность внутренних поверхностных сил;
w^* — функция рассеивания (функция диссипации);
$\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{x}$ — радиусы-векторы материальной точки в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$;
X^i и x^i — лагранжевы и эйлеровы координаты;
X_β — термодинамические силы;
$Y_\alpha(\mathbf{T})$ — спектральные инварианты симметричного тензора второго ранга;
Γ^m_{ij} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$ — символы Кристоффеля в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$;
δ_α — относительные удлинения;
ε_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформации;
$\overset{(n)}{\zeta}_A$, $\overset{(n)}{\zeta}_B$, $\overset{(n)}{\zeta}_C$, $\overset{(n)}{\zeta}_D$, $\overset{(n)}{\zeta}_G$, ζ — различные формы свободной энергии Гиббса;
η — плотность энтропии;
θ — температура;
$\boldsymbol{\Lambda}$ — правый тензор деформации Альманзи;
λ_α — собственные значения тензоров искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$;
$\boldsymbol{\lambda}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ — тензоры теплопроводности в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$;
π — термодинамический потенциал (накопление);
ρ и $\overset{\circ}{\rho}$ — плотность в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$;
$\boldsymbol{\tau}_\alpha$ — единичные ортогональные касательные векторы к поверхности S;
ψ — свободная энергия Гельмгольца;
$\boldsymbol{\Omega}$ — спин поворота, сопровождающего деформацию;
$\boldsymbol{\Omega}_U$ и $\boldsymbol{\Omega}_V$ — спины правого и левого тензоров искажений;
$\boldsymbol{\omega}$ — вектор вихря;
$\boldsymbol{\nabla}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}$ — набла-операторы в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Введение. Основополагающие аксиомы механики сплошных сред

Механика сплошной среды, составной частью которой является нелинейная механика, изучает поведение *материальных тел* или *сред*, которые представляют собой части всеобщей материи. Более близкое к математике определение *тела* таково: это множество $\mathcal{B}$, состоящее из элементов $\mathcal{M}$, называемых *материальными точками*. Само понятие материальной точки в МСС является первичным — аксиоматическим, также как понятие геометрической точки в элементарной геометрии.

Математическое описание тела $\mathcal{B}$ в МСС начинается со следующего определения.

Определение 0.1. *Сплошной средой называют материальное тело $\mathcal{B}$, для которого имеется взаимно-однозначное соответствие $\widetilde{\mathcal{W}}$, ставящее в соответствие каждой материальной точке $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ ее образ в некотором метрическом пространстве $\mathcal{X}$, т.е.*

$$\widetilde{\mathcal{W}}: \quad \mathcal{B} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{X},$$

или

$$\mathbf{a} = \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{M}), \quad \mathcal{M} \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{X}. \tag{0.1}$$

Множество всех сплошных сред $\mathcal{B}$ называют *вселенной* $\mathcal{U}$. Определение взаимно-однозначного соответствия можно найти, например, в [22]. *Метрическое пространство* $\mathcal{X}$ характеризуется наличием метрики $l(\mathcal{M},\mathcal{N})$, с помощью которой имеется возможность измерять расстояние между любыми двумя точками $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ тела $\mathcal{B}$ [22]. Взаимно-однозначное соответствие материальных точек и точек метрического пространства $\mathcal{X}$ позволяет изучать не само материальное тело, а только его образ. Далее везде не будем уже делать различия между материальной точкой и ее образом.

Определение 0.1 дополняют тремя основными аксиомами.

Аксиома 1 (сплошности). *Образ $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{B})$ сплошной среды $\mathcal{B}$ образует континуальное множество (континуум) в пространстве $\mathcal{X}$.*

Понятие *континуума* можно найти в [22]. Аксиома сплошности вводит основную модель МСС — континуальное множество, которое является идеализацией реальных тел, состоящих из дискретных атомов и молекул. С физической точки зрения существует предельное расстояние $l_{\min}$, при уменьшении которого $l \leqslant l_{\min}$ в окрестности материальной точки $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ может не оказаться ни одной другой материальной точки. В сплошной же среде (и в ее образе), согласно свойствам континуального множества [22], в любой как угодно малой ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ любой точки $A \in \mathcal{W}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{X}$ содержится бесконечное число других точек этой среды. В этом смысле сплошная среда является моделью реальных тел, и к интерпретации результатов расчетов в МСС по отношению к реальным телам для расстояний между точками $l \leqslant l_{\min}$ следует относиться осторожно. Однако в целом использование аксиомы сплошности весьма эффективно — оно позволяет применять мощный аппарат тензорного анализа в метрических пространствах.

Аксиома 2 (евклидовости пространства). *В качестве метрического пространства $\mathcal{X}$, в котором рассматривают сплошные среды, можно выбрать метризованное точечно-евклидово трехмерное пространство $\mathcal{E}_3^a$, т.е $\mathcal{X} = \mathcal{E}_3^a$.*

Точечно-евклидово пространство $\mathcal{E}_3^a$ (называемое также аффинным евклидовым [2]) представляет собой множество точек $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$, для которого задано отображение, сопоставляющее каждой упорядоченной паре точек $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ единственный элемент (вектор) $\mathbf{y}$ из присоединенного к $\mathcal{E}_3^a$ евклидова векторного пространства $\mathcal{E}_3$, который также обозначается как $\overrightarrow{\mathcal{MN}} = \mathbf{y}$. В *евклидовом* же *пространстве* $\mathcal{E}_3$ заданы операции сложения элементов (векторов) $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, умножения на число $\lambda\mathbf{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и операция *скалярного умножения* векторов [22], которая может быть задана с помощью *фундаментальной матрицы* g_{ij} в некотором *базисе* $\mathbf{e}_i$ из $\mathcal{E}_3$: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij}x^i y^j$, где x^i и y^j — *координаты векторов* в том же базисе: $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^i\mathbf{e}_i$. Кроме того, в $\mathcal{E}_3$ может быть введено векторное произведение векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g}\ \epsilon_{ijk}a^i b^j \mathbf{e}^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \epsilon^{ijk}a_i b_j \mathbf{e}_k, \tag{0.2}$$

где ϵ_{ijk} и ϵ^{ijk} — *символы Леви–Чивиты* [12] (они принимают значение 0, если хотя бы два из индексов i, j, k совпадают, значение 1, если индексы i, j, k образуют четную подстановку, (-1) — если нечетную), а $g = \det(g_{ij})$ — детерминант фундаментальной матрицы.

Таким образом, аксиома 2 позволяет применять для описания материальных точек сплошной среды инструментарий точечно-евклидовых пространств: в пространстве $\mathcal{E}_3^a$ может быть введена единая для всех сплошных сред *прямоугольная декартова система координат* $O\bar{\mathbf{e}}_i$, представляющая собой совокупность некоторой точки O и ортонормированного базиса $\bar{\mathbf{e}}_i$. В этой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ каждой материальной точке $\mathcal{M}$ взаимно-однозначным образом ставится в соответствие ее *радиус-вектор* $\mathbf{x} = \overrightarrow{O\mathcal{M}}$. Расстояние $l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ между точками $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ измеряется с помощью *длины вектора* $l(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = |\overrightarrow{\mathcal{MN}}| = (\overrightarrow{\mathcal{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{MN}})^{1/2} = |\mathbf{y}| = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{1/2}$. Длина $l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ задает метрику в пространстве $\mathcal{E}_3^a$, поэтому его называют *метризованным*. В метризованном пространстве определено понятие области V, а в точечно-евклидовом — понятия плоскости и прямой. Кроме того, в метризованном пространстве имеются понятия сходимости последовательности точек, непрерывности и дифференцируемости функций и др. — возможность использования для сплошных сред всех этих понятий из математического анализа дает аксиома 2.

В силу изоморфизма (взаимно-однозначного соответствия) точечно-евклидовых пространств одной размерности, в качестве пространства $\mathcal{E}_3^a$

всегда можно рассматривать *пространство элементарной геометрии* E_3^a, точками в котором являются обычные «геометрические» точки, а векторами — «направленные отрезки» в пространстве. Пространство E_3^a позволяет давать наглядное геометрическое изображение различных объектов механики сплошных сред.

Пример 0.1. На рис. 0.1 схематически показано «реальное» материальное тело $\mathcal{B}$ и его образ $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{B})$ в пространстве E_3^a. $\square$

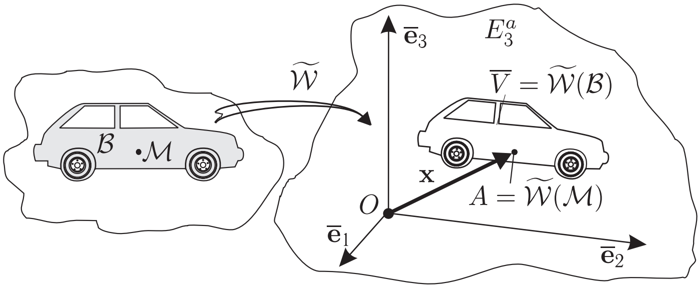

Рис. 0.1. «Реальное» тело $\mathcal{B}$ и его образ $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{B})$ в E_3^a

Рассмотрим пару $(\mathcal{M}, t)$, где $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$, а $t \in \mathbb{R}_{+0}$ — некоторое неотрицательное вещественное число. Эта пара является элементом декартова произведения множеств $\mathcal{B} \times \mathbb{R}_{+0}$.

Аксиома 3 (о существовании абсолютного времени). *Для всякой сплошной среды $\mathcal{B}$ существует отображение*

$$\mathcal{W}: \quad \mathcal{B} \times \mathbb{R}_{+0} \longrightarrow \bar{V} \subset \mathcal{E}_3^a,$$

или в виде функции

$$A = \mathcal{W}(\mathcal{M}, t), \quad \mathcal{M} \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}_{+0}, \quad A \in \bar{V} \subset \mathcal{E}_3^a. \tag{0.3}$$

Параметр t называют *абсолютным временем* (или просто *временем*).

Заметим, что обе аксиомы 1 и 3 устанавливают соответствия между точками $\mathcal{M}$ и A, для исключения неоднозначности полагают выполненным *условие согласования*: предполагают, что отображение (0.1) совпадает с (0.2) для некоторого значения $t = t_1$:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{M}) = \mathcal{W}(\mathcal{M}, t_1) \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B}. \tag{0.4}$$

Аксиома 3 позволяет изучать *движение тела* $\mathcal{B}$, которое определим как изменение радиусов-векторов $\mathbf{x} = \overrightarrow{O\mathcal{M}}$ материальных точек тела $\mathcal{M}$ в единой для всех $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ при изменении значений времени t.

Для одной и той же материальной точки $\mathcal{M}$ при разных значениях времени t_1 и t_2 получаем, вообще говоря, различные радиусы-векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$.

Пример 0.2. На рис. 0.2 схематически показано движение «реального» тела $\mathcal{B}$ и соответствующее изменение его образов $\mathcal{W}(\mathcal{B}, t_1)$ и $\mathcal{W}(\mathcal{B}, t_2)$ в пространстве E_3^a. $\square$

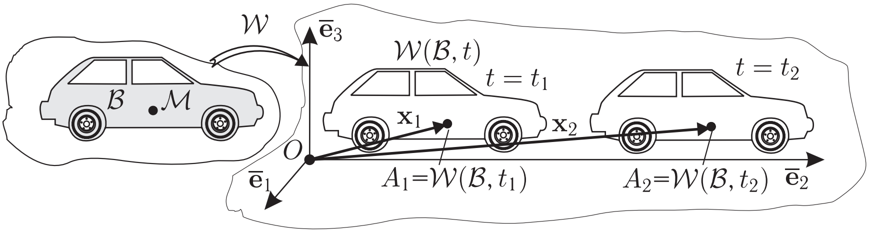

Рис. 0.2. Движение «реального» тела $\mathcal{B}$

Абсолютизм времени проявляется в том, что само t не зависит от радиуса-вектора $\mathbf{x}$ точки $\mathcal{M}$ в системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$, т.е., говоря физическим языком, «время течет одинаково» для всех материальных точек $\mathcal{M}$. Физически эта аксиома справедлива только для движения тел со скоростями много меньшими скорости света, в противном случае становятся существенными релятивистские эффекты и аксиома 3 перестает адекватно описывать реальные процессы. Релятивистские эффекты в данной книге не рассматриваются.

Глава 1

КИНЕМАТИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

1.1. Материальное и пространственное описания движения сплошной среды

1.1.1. Лагранжевы и эйлеровы координаты. Закон движения. Рассмотрим сплошную среду $\mathcal{B}$. Согласно аксиоме 2, в момент времени $t = 0$ каждой ее материальной точке $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ взаимно-однозначно ставится в соответствие ее радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overrightarrow{O\mathcal{M}}$ в прямоугольной декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$. Обозначим декартовы координаты этого радиуса-вектора как $\overset{\circ}{x}{}^i$ ($\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{x}{}^i\bar{\mathbf{e}}_i$). Введем криволинейные координаты X^i той же самой материальной точки $\mathcal{M}$ в виде некоторых гладких взаимно-однозначных функций:

$$\overset{\circ}{x}{}^i = \overset{\circ}{x}{}^i(X^k). \tag{1.1}$$

Так как $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{x}{}^i\bar{\mathbf{e}}_i$, то соотношению (1.1) можно придать следующий вид:

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^k). \tag{1.2}$$

Зафиксируем криволинейные координаты точки $\mathcal{M}$ и будем далее считать, что материальные точки тела $\mathcal{B}$ нумеруются именно этими координатами X^i. При любых движениях тела $\mathcal{B}$ координаты X^i материальных точек полагают не меняющимися — говорят, что они «вморожены» в тело и движутся вместе с ним. Введенные таким образом координаты X^i материальной точки $\mathcal{M}$ называют *лагранжевыми* (или *материальными*).

Согласно аксиоме 3, каждой точке $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ с лагранжевыми координатами X^i для каждого момента времени t взаимно-однозначно ставится в соответствие радиус-вектор $\mathbf{x} = \overrightarrow{O\mathcal{M}}$ с декартовыми координатами x^i, причем $\mathbf{x}$ и x^i зависят от t. Это означает, что существует зависимость между лагранжевыми X^i, декартовыми x^i координатами точки $\mathcal{M}$ и временем, т.е. существуют функции вида (0.3)

$$x^i = x^i(X^k, t) \quad \forall X^k \in V_X, \tag{1.3}$$

определяющие движение материальной точки $\mathcal{M}$ в декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ пространства $\mathcal{E}_3^a$. Соотношения (1.3) называют *законом движения сплошной среды* $\mathcal{B}$.

Координаты x^i в (1.3) называют *эйлеровыми* (или *пространственными*) координатами материальной точки $\mathcal{M}$.

Так как $\mathbf{x} = x^i\bar{\mathbf{e}}_i$, а система координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ одинакова для всех t, то из (1.2) следует эквивалентная форма закона движения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^k, t). \tag{1.4}$$

Поскольку должны выполняться условия согласования (0.3), то из (1.2) и (1.4) следует, что должны иметь место соотношения

$$\mathbf{x}(X^k, 0) = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^k), \qquad x^i(X^k, 0) = \overset{\circ}{x}{}^i(X^k). \tag{1.5}$$

Здесь в качестве момента согласования t_1 принят начальный момент времени $t = 0$, так как именно при $t = 0$ введены лагранжевы координаты X^i точки $\mathcal{M}$.

Функции (1.3), если это не оговорено особо, полагают регулярными в области $V_X \subset \mathbb{R}^3$ для всех t, так что существуют и обратные функции

$$X^k = X^k(x^i, t) \quad \forall x^i \in V_x \subset \mathbb{R}^3. \tag{1.6}$$

Замкнутую область $\overset{\circ}{V} = \mathcal{W}(\mathcal{B}, 0)$ в фиксированной системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$, которая соответствует сплошной среде $\mathcal{B}$ в начальный момент времени $t = 0$, называют *отсчетной конфигурацией* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, а область $V = \mathcal{W}(\mathcal{B}, t)$, которая соответствует той же среде $\mathcal{B}$ в момент времени $t > 0$, называют *актуальной конфигурацией* $\mathcal{K}$.

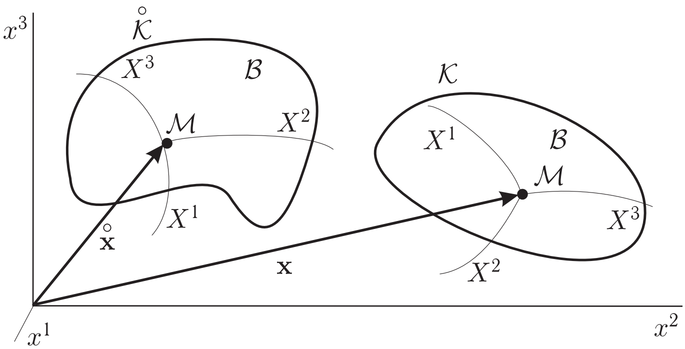

Рис. 1.1. Движение сплошной среды: положение тела $\mathcal{B}$ и материальной точки $\mathcal{M}$ в отсчетной и актуальной конфигурациях

На рис. 1.1 показано геометрическое изображение движения сплошной среды из отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в актуальную $\mathcal{K}$ в пространстве E_3^a.

Заметим, что если известен закон движения (1.3) или (1.4) сплошной среды, то одна из важнейших задач МСС — определение координат всех материальных точек тела в любой момент времени — будет решена. Однако в реальных задачах МСС, как правило, этот закон неизвестен и как раз должен быть установлен в результате решения некоторых математических задач, формулировка которых и является одной из наших целей.

Пример 1.1. Рассмотрим сплошную среду $\mathcal{B}$, которая в момент времени $t = 0$ в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ представляет собой прямоугольный параллелепипед (брус) с длинами ребер $\overset{\circ}{h}_1$, $\overset{\circ}{h}_2$ и $\overset{\circ}{h}_3$, а в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ при $t > 0$ — тоже прямоугольный параллелепипед, но уже с другими длинами ребер: h_1, h_2 и h_3.

Полагаем, что соответствующие грани обоих параллелепипедов принадлежат параллельным плоскостям, а для одной из граней, например, лежащей в плоскости (x^2, x^3), точки пересечения диагоналей в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ совпадают (рис. 1.2). Тогда закон движения (1.3) для такой сплошной среды имеет вид

$$x^\alpha = k_\alpha(t) X^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{1.6}$$

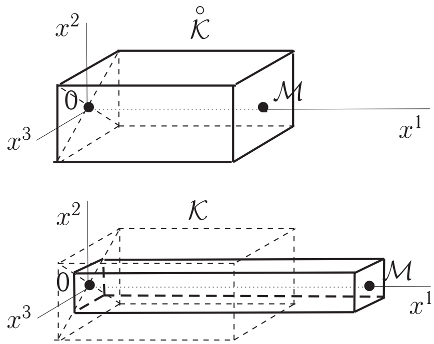

Рис. 1.2. Растяжение бруса

т.е. координаты $x^i, \overset{\circ}{x}{}^i = X^i$ всякой материальной точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ пропорциональны, и $k_\alpha(t) = h_\alpha(t)/\overset{\circ}{h}_\alpha$ — функции пропорциональности. Закон движения (1.6) называют *законом растяжения бруса*.

Пример 1.2. Пусть в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ сплошная среда $\mathcal{B}$ представляет собой прямоугольный параллелепипед, ориентированный так, как показано на рис. 1.3, а закон ее движения (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = X^1 + a(t) X^2, \\ x^2 = X^2, \\ x^3 = X^3, \end{cases} \tag{1.7}$$

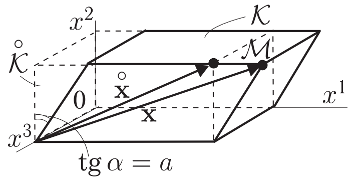

Рис. 1.3. Простой сдвиг бруса

где $\overset{\circ}{x}{}^i = X^i$, $a(t)$ — заданная функция. Тогда в $\mathcal{K}$ такая среда $\mathcal{B}$ является параллелепипедом, все сечения которого плоскостями, ортогональными к оси Ox^3, одинаковы и представляют собой параллелограмм.

Такой закон движения называют *простым сдвигом*, причем тангенс угла сдвига α равен a.

Пример 1.3. Рассмотрим снова сплошную среду $\mathcal{B}$, которая в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ представляет собой прямоугольный параллелепипед (брус), изображенный на рис. 1.4, который при переходе в $\mathcal{K}$ изменяет свои линейные размеры без изменения углов (как в примере 1.1) и поворачивается на угол $\varphi(t)$ в плоскости Ox^1x^2 вокруг точки O (рис. 1.4), тогда закон движения такого тела называют *вращением бруса с растяжением*. Соотношения (1.1) для него имеют вид

$$x^i = F_0{}^i{}_j \overset{\circ}{x}{}^j, \quad \overset{\circ}{x}{}^j = X^j, \tag{1.8}$$

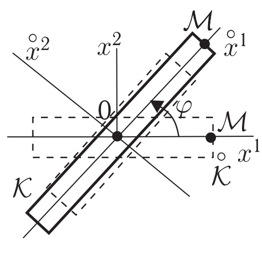

Рис. 1.4. Вращение бруса с растяжением

где матрица $F_0{}^i{}_j$ представляет собой произведение двух матриц: O_0 — матрицы вращения и U_0 — матрицы растяжения:

$$F_0{}^i{}_j = O_0{}^i{}_k U_0{}^k{}_j,$$

$$O_0{}^i{}_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_0{}^i{}_j = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \qquad F_0{}^i{}_j = \begin{pmatrix} k_1\cos\varphi & -k_2\sin\varphi & 0 \\ k_1\sin\varphi & k_2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

а $k_\alpha(t) = h_\alpha(t)/h_\alpha^0$ — функции пропорциональности, характеризующие отношение длин ребер бруса в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (как в примере 1.1).

1.1.2. Материальное и пространственное описания. В МСС физические процессы, происходящие в телах, характеризуются определенным набором *переменных скалярных полей* $\phi = \phi(\mathcal{M}, t)$, *векторных полей* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathcal{M}, t)$, а также *тензорных полей* n-го ранга ${}^n\boldsymbol{\Omega}(\mathcal{M}, t)$ (подробнее о тензорах и тензорных полях см. далее п. 1.1.3 или книгу [12]).

Поскольку материальной точке $\mathcal{M}$ можно поставить в соответствие как лагранжевы координаты X^i, так и эйлеровы x^i в декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$, то переменные скалярное и векторное поля можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \phi(X^i, t) = \phi(X^i(x^j, t), t) = \widetilde{\phi}(x^j, t) = \widetilde{\phi}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{a}(X^i, t) = \widetilde{\mathbf{a}}(x^j, t) = \widetilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t). \end{gathered} \tag{1.9}$$

С помощью закона движения (1.3) или (1.4) в формулах (1.9) можно переходить от функций в лагранжевых координатах к функциям в эйлеровых координатах. Знак $\widetilde{\ }$ при этом в МСС обычно опускают, что мы и будем делать в дальнейшем.

Если мы зафиксируем в (1.9) момент времени t, то получим просто скалярное и векторное поля. Если в (1.9) зафиксировать материальную точку $\mathcal{M}$, а t изменять в отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$, то получим обычную скалярную функцию $\phi = \phi(\mathcal{M}, t)$ и векторную функцию $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathcal{M}, t)$ от времени.

В соответствии с соотношениями (1.9) выделяют два способа описания различных физических процессов в сплошных средах.

При *материальном* (или *лагранжевом*) описании сплошной среды все тензорные поля, описывающие физические процессы, рассматривают как функции аргументов X^i и t.

В *эйлеровом описании* все тензорные поля, описывающие физические процессы, являются функциями аргументов x^i и t.

Оба эти описания эквивалентны. Забегая вперед, отметим, что для твердых тел чаще используют лагранжево описание, в котором удобно фиксировать координаты X^i материальной точки $\mathcal{M}$ и «следить» за ее движением в различные моменты времени t. Для газообразных и жидких тел чаще используют эйлерово описание, в котором фиксируют геометричекую точку с координатами x^i и «следят» за тем, какие материальные точки $\mathcal{M}$ «проходят» через эту точку x^i в различные моменты времени t.

1.1.3. Локальные базисы в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Используя закон движения (1.4) и соотношение (1.1), в каждой материальной точке $\mathcal{M}$ с координатами X^i в актуальной и отсчетной конфигурациях можно ввести свои *векторы локальных базисов*:

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^k} = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}\bar{\mathbf{e}}_i = Q^i{}_k \bar{\mathbf{e}}_i, \qquad \mathring{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathring{\mathbf{x}}}{\partial X^k} = \frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial X^k}\bar{\mathbf{e}}_i = \mathring{Q}^i{}_k \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{1.10}$$

где

$$Q^i{}_k = \partial x^i/\partial X^k, \quad \mathring{Q}^i{}_k = \partial \mathring{x}^i/\partial X^k, \quad P^i{}_k = \partial X^i/\partial x^k, \quad \mathring{P}^i{}_k = \partial X^i/\partial \mathring{x}^k \tag{1.11}$$

— *якобиевы матрицы* и *обратные якобиевы матрицы*. Здесь и далее все величины, относящиеся к конфигурации $\mathring{\mathcal{K}}$, будем помечать знаком $^\circ$. Из определения (1.11) следует, что локальные векторы базисов $\mathbf{r}_k$ и $\mathring{\mathbf{r}}_k$ направлены по касательной к соответствующей координатной линии X^k (рис. 1.5).

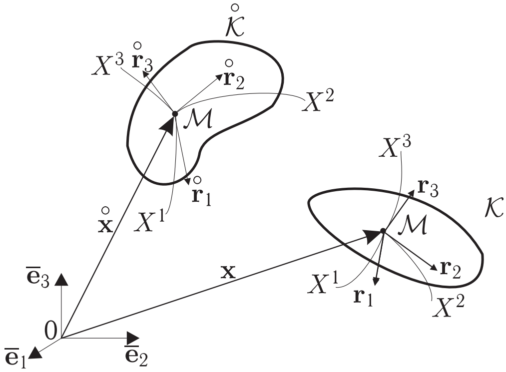

Рис. 1.5. Локальные векторы базисов в отсчетной и актуальной конфигурациях

Введем также в $\mathcal{K}$ и $\mathring{\mathcal{K}}$ *метрические матрицы* g_{kl}, $\mathring{g}_{kl}$ и *обратные метрические матрицы* g^{kl}, $\mathring{g}^{kl}$:

$$\begin{gathered} g_{kl} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_l = Q^i{}_k Q^j{}_l \delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}\frac{\partial x^j}{\partial X^l}\delta_{ij}, \\ \mathring{g}_{kl} = \mathring{\mathbf{r}}_k \cdot \mathring{\mathbf{r}}_l = \frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial X^k}\frac{\partial \mathring{x}^j}{\partial X^l}\delta_{ij}, \\ g^{kl} g_{lm} = \delta^k_m, \qquad \mathring{g}^{kl}\mathring{g}_{lm} = \delta^k_m, \end{gathered} \tag{1.12}$$

а также *локальные векторы взаимных локальных базисов*

$$\mathbf{r}^i = g^{im}\mathbf{r}_m, \qquad \mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{g}^{im}\mathring{\mathbf{r}}_m, \tag{1.13}$$

которые удовлетворяют соотношениям взаимности

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i{}^j, \qquad \mathring{\mathbf{r}}_i \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j = \delta_i{}^j, \tag{1.14а}$$

а также следующим соотношениям:

$$\mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_m = \sqrt{g}\ \epsilon_{nmk}\mathbf{r}^k, \qquad \mathring{\mathbf{r}}_n \times \mathring{\mathbf{r}}_m = \sqrt{\mathring{g}}\ \epsilon_{nmk}\mathring{\mathbf{r}}^k. \tag{1.14б}$$

С помощью смешанного произведения, т.е. последовательного применения скалярного и векторного произведений к трем различным векторам локальных базисов можно вычислить объемы $|V|$ и $|\overset{\circ}{V}|$, построенные на этих векторах:

$$\begin{gathered} |\overset{\circ}{V}| = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \cdot (\overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_3) = \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \sqrt{\det\ (\overset{\circ}{g}_{ij})} = \left|\partial \overset{\circ}{x}{}^k / \partial X^i\right|, \\ |V| = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \sqrt{g} = |\partial x^k / \partial X^i|. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Заметим, что хотя локальные базисы $\mathbf{r}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ вводились в разных конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, однако они соответствуют одним и тем же координатам X^i (если, конечно, рассматривается одна и та же точка $\mathcal{M}$), поэтому эти базисы можно переносить как жесткое целое в одну точку в $\mathcal{K}$ или в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. На этом основании мы можем раскладывать всякое векторное поле $\mathbf{a}(\mathcal{M})$ по любому из базисов $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}^i$ или $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i = \overset{\circ}{a}{}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \bar{a}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i. \tag{1.16}$$

Если криволинейные координаты X^i являются ортогональными, то векторы $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ — ортогональны: $(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \delta_{ij})$, а матрицы $\overset{\circ}{g}_{ij}$ и $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ — диагональные, тогда можно ввести *параметры Ламе*: $\overset{\circ}{H}_\alpha = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}}$, $\alpha = 1, 2, 3$, и *физический ортонормированный базис*:

$$\hat{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha / \overset{\circ}{H}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^\alpha \overset{\circ}{H}_\alpha. \tag{1.17}$$

Компоненты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе называют физическими:

$$\mathbf{a} = \hat{\overset{\circ}{a}}{}^i\ \hat{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}_i. \tag{1.18}$$

Актуальный базис $\mathbf{r}_i$ в общем случае не является ортогональным, даже если $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ — ортогональный, поэтому нельзя ввести соответствующий ему физический базис в $\mathcal{K}$. Заметим однако, что в $\mathcal{K}$ все-таки вводят физический базис, но не с помощью $\mathbf{r}_i$, а с помощью другого специального базиса (об этом см. далее в п. 1.1.7).

1.1.4. Тензоры и тензорные поля в МСС. Имея в каждой точке $\mathcal{M}$ различные локальные базисы $\mathbf{r}_i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{r}^i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$ или $\bar{\mathbf{e}}_i$ с помощью формализма, изложенного в книге [12], можно ввести различные *диадные (тензорные) базисы*: $\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^j$, $\mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \mathbf{r}_j$ и т.д., представляющие собой классы эквивалентности векторных наборов из $2 \cdot 3 = 6$ векторов (например, $\mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_j = [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_j \mathbf{r}_2 \mathbf{0} \mathbf{r}_3 \mathbf{0}]$, здесь [ ] — обозначение класса эквивалентности), а $\otimes$ — знак *тензорного умножения (произведения)*. Поле *тензора второго ранга* $\mathbf{T}(\mathcal{M})$ можно представить как линейную комбинацию элементов любого диадного базиса:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = \overset{\circ}{T}{}^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \bar{T}^{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \overset{\circ}{T}_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j. \tag{1.19}$$

Компоненты тензора T^{ij} при переходе от одного базиса к другому преобразуются по *тензорному закону*:

$$\bar{T}^{ij} = P^i{}_k P^j{}_l \, T^{kl} = \overset{\circ}{P}{}^i{}_k \overset{\circ}{P}{}^j{}_l \overset{\circ}{T}{}^{kl}. \tag{1.20}$$

Метрические матрицы g^{im}, g_{im}, $\overset{\circ}{g}{}^{im}$ и $\overset{\circ}{g}_{im}$ представляют собой компоненты *единичного (метрического) тензора* $\mathbf{E}$ в различных базисах:

$$\mathbf{E} = g_{im}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^m = \overset{\circ}{g}_{im}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^m = g^{im}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_m = \overset{\circ}{g}{}^{im}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_m. \tag{1.21}$$

Для тензоров второго ранга в МСС часто используют операции транспонирования тензора [12]: $\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = T^{ij}\mathbf{r}_j \otimes \mathbf{r}_i$ и обращения тензора $\mathbf{T}^{-1}$, где $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}$. Обратный тензор существует только для невырожденного тензора, для которого $\det \mathbf{T} = 0$, а детерминант тензора определяют как детерминант матрицы его смешанных компонент $\det \mathbf{T} = \det T^i_j$.

В МСС кроме тензоров второго ранга иногда применяют и тензоры высших рангов [12]. Для этого методом математической индукции вводят *полиадные базисы*: $\mathbf{r}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}_{i_n}$, представляющие классы эквивалентности векторных наборов, составленных из $n \cdot 3 = 3n$ векторов. Поле тензора n-го ранга ${}^n\mathbf{\Omega}(\mathcal{M})$ можно представить как линейную комбинацию элементов полиадного базиса:

$${}^n\mathbf{\Omega} = \Omega^{i_1 \ldots i_n}\mathbf{r}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}_{i_n} = \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n},$$

где $\Omega^{i_1 \ldots i_n}$ и $\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n}$ — компоненты тензора n-го ранга в соответствующем полиадном базисе.

Аналогами тензора $\mathbf{E}$ для тензоров четвертого ранга являются *первый, второй* и *третий единичные тензоры*, определяемые следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbf{\Delta}_{\mathrm{I}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^k = \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}, \\ \mathbf{\Delta}_{\mathrm{II}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^k, \quad \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^i, \end{gathered} \tag{1.22}$$

а также симметричный *единичный тензор четвертого ранга*:

$$\begin{gathered} \mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta}_{\mathrm{II}} + \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}), \\ \mathbf{\Delta} = \Delta^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \qquad \Delta^{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}). \end{gathered} \tag{1.22a}$$

Для тензоров четвертого ранга в МСС применяют операцию транспонирования

$${}^4\mathbf{\Omega}^{(m_1 m_2 m_3 m_4)} = \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}\mathbf{r}_{i_{m_1}} \otimes \mathbf{r}_{i_{m_2}} \otimes \mathbf{r}_{i_{m_3}} \otimes \mathbf{r}_{i_{m_4}},$$

где $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ — некоторая подстановка, например, ${}^4\mathbf{\Omega}^{(4321)} = \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}\mathbf{r}_{i_4} \otimes \mathbf{r}_{i_3} \otimes \mathbf{r}_{i_2} \otimes \mathbf{r}_{i_1}$.

1.1.5. Ковариантные производные в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. В конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ введем *набла-операторы*:

$$\mathbf{\nabla} = \mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial}{\partial X^k}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{\nabla}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \frac{\partial}{\partial X^k}. \tag{1.23}$$

Применяя набла-операторы к векторному полю, получаем *градиенты вектора* в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \nabla_k a_i \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{r}^i, \\
\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{a} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{\nabla}{}^k \overset{\circ}{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{\nabla}{}^k \overset{\circ}{a}{}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i,
\end{gathered} \tag{1.24}
$$

где обозначены следующие *ковариантные производные* в различных *тензорных базисах* в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$:

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{a}_i &= \frac{\partial \overset{\circ}{a}_i}{\partial X^k} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ik} \overset{\circ}{a}_m, \qquad & \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{a}{}^i &= \frac{\partial \overset{\circ}{a}{}^i}{\partial X^k} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{km} \overset{\circ}{a}{}^m, \\
\nabla_k a_i &= \frac{\partial a_i}{\partial X^k} - \Gamma^m_{ik} a_m, \qquad & \nabla_k a^i &= \frac{\partial a^i}{\partial X^k} + \Gamma^i_{km} a^m.
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

Здесь Γ^m_{ij} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$ — *символы Кристоффеля* в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, для них имеют место следующие соотношения [12]:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^m_{ij} &= \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right), \\
\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij} &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial \overset{\circ}{g}_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{ki}}{\partial X^j} - \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{ij}}{\partial X^k} \right).
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

Контравариантные производные в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ вводят следующим образом:

$$
\overset{\circ}{\nabla}{}^k \overset{\circ}{a}_i = \overset{\circ}{g}{}^{km} \overset{\circ}{\nabla}_m \overset{\circ}{a}_i, \qquad \nabla^k a^i = g^{km} \nabla_m a^i. \tag{1.27}
$$

Ковариантные производные (1.25) являются компонентами тензоров второго ранга $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a}$, поэтому при переходе от локального базиса $\mathbf{r}_i$ к какому-либо другому они преобразуются по тензорному закону (1.20).

Набла-операторы $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}$ и $\boldsymbol{\nabla}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ можно применять к полю тензора любого n-го ранга ${}^n\boldsymbol{\Omega}(X^i)$:

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega} &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial X^k} = \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n} \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n}, \\
\boldsymbol{\nabla} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial X^k} = \nabla_k \Omega^{i_1 \ldots i_n} \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{r}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}_{i_n},
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

где $\nabla_k \Omega^{i_1 \ldots i_n}$ и $\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n}$ — ковариантные производные в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$
\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial}{\partial X^k} \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_n} + \sum_{s=1}^{n} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i_s}_{mk} \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1 \ldots i_s = m \ldots i_n}. \tag{1.29}
$$

Аналогично определяют операции и скалярного умножения набла-оператора в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (*дивергенцию тензора*):

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot {}^n\boldsymbol{\Omega} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial X^k} = \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\Omega}{}^{k i_2 \ldots i_n} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n}, \tag{1.30}$$

и векторного умножения набла-оператора в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (*ротор тензора*):

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \times {}^n\boldsymbol{\Omega} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \times \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial X^k} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \epsilon^{ijk} \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\Omega}_{j i_2 \ldots i_n} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i_n}. \tag{1.31}$$

1.1.6. Градиент деформации. Рассмотрим, как преобразуется локальная окрестность точки $\mathcal{M}$ при переходе из конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$. Выберем произвольный элементарный радиус-вектор $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$, связывающий в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ две бесконечно близкие точки $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ (рис. 1.6). При переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ эти же материальные точки $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ связаны элементарным радиусом-вектором $d\mathbf{x}$.

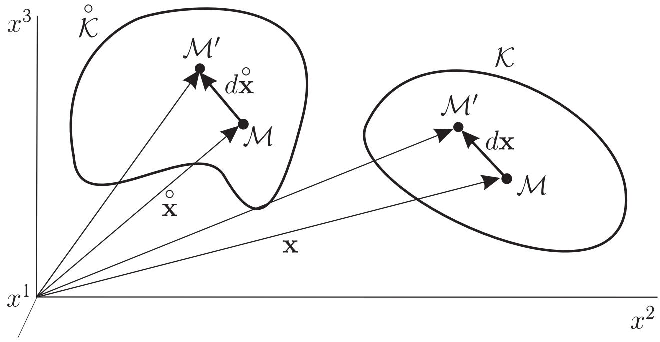

Рис. 1.6. Преобразование элементарного радиуса-вектора при переходе из отсчетной конфигурации в актуальную

Векторы $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $d\mathbf{x}$ всегда можно разложить по локальным базисам:

$$d\mathbf{x}(X^k) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^k} dX^k = \mathbf{r}_k dX^k, \quad d\overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^k) = \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^k} dX^k = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k dX^k. \tag{1.32}$$

Умножая первое уравнение скалярно на $\mathbf{r}^m$, а второе — на $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^m$, получим

$$\mathbf{r}^m \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}_k dX^k = dX^m, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^m \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^m \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k dX^k = dX^m. \tag{1.33}$$

Подставляя dX^m из второго уравнения (1.33) в первое уравнение (1.32), находим, что $d\mathbf{x} = \mathbf{r}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$. Меняя теперь порядок выполнения операций тензорного и скалярного умножения (это допускают правила тензорного анализа), получаем соотношение между $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}. \tag{1.34}$$

Здесь обозначен тензор линейного преобразования:

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k, \tag{1.35}$$

называемый *градиентом деформации.* Из (1.34) следует, что градиент деформации связывает элементарные радиусы-векторы $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $d\mathbf{x}$ одной и той же материальной точки $\mathcal{M}$ в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

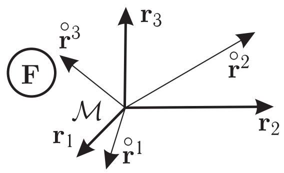

Рис. 1.7. Геометрическое изображение градиента деформации

Определение (1.19) позволяет дать наглядное геометрическое изображение градиента деформации: если выбрать $\mathbf{r}_i$ в качестве левых векторов, а $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$ рассматривать как правые векторы, то, используя формализм из п. 1.1.4 (см. также [12]), можно перейти к представлению тензора $\mathbf{F}$ в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = [\mathbf{r}_1\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^1\mathbf{r}_2\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^2\mathbf{r}_3\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^3].$$

Согласно геометрическому определению тензора (см. п. 1.1.4), тензор $\mathbf{F}$ можно изобразить как класс эквивалентности упорядоченной совокупности шести векторов $\mathbf{r}_i, \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$ (рис. 1.7).

В МСС кроме $\mathbf{F}$ широко применяют: транспонированный тензор $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, обратный тензор $\mathbf{F}^{-1}$ и обратный к транспонированному $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$:

$$\begin{gathered} \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \mathbf{r}_k = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^k} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{x}, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \otimes \mathbf{r}^k, \\ \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = (\overset{\circ}{\mathbf{r}}_k \otimes \mathbf{r}^k)^{\mathrm{T}} = \mathbf{r}^k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_k = \mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^k} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{x}}. \end{gathered} \tag{1.35a}$$

Из (1.35) следует, что

$$\mathbf{F} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_k \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_k \delta^k_i = \mathbf{r}_i. \tag{1.36}$$

т.е. градиент деформации преобразует локальные векторы базисов одной и той же материальной точки $\mathcal{M}$ из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$.

Теорема 1.1. *Транспонированный градиент деформации* $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ *связывает градиенты произвольного вектора* $\mathbf{a}$ *в* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{K}$*:*

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{a}. \tag{1.37}$$

▼ В справедливости формул (1.37) легко убедиться, используя определения (1.24) и (1.35):

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{r}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^i} = \mathbf{r}^j \delta^i_j \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^i} = \mathbf{r}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^i} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{a}. \ \blacktriangle \tag{1.38}$$

1.1.7. Криволинейные пространственные координаты. Заметим, что выбор декартова базиса $O\bar{\mathbf{e}}_i$ в качестве фиксированной (неподвижной) системы отсчета при пространственном (эйлеровом) описании движения сплошной среды не является обязательным условием. В некоторых задачах МСС удобно рассматривать подвижную систему отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ с началом в движущейся точке O' ($\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OO'}$) и подвижным ортонормированным базисом $\bar{\mathbf{e}}'_i$ (рис. 1.8), который связан с $\bar{\mathbf{e}}_i$ ортогональным тензором $\mathbf{Q}$:

$$\bar{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i. \tag{1.39}$$

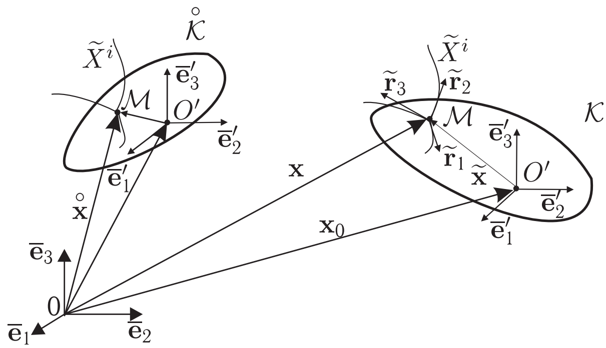

Рис. 1.8. Подвижные базисы $\bar{\mathbf{e}}'_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и криволинейные пространственные координаты $\widetilde{X}^i$ в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$

В этом случае вместо декартовых координат x^i точки $\mathcal{M}$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ рассматривают ее декартовы координаты $\widetilde{x}^i$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$:

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}'_i. \tag{1.40}$$

Если ввести $Q^i{}_j$ — компоненты тензора $\mathbf{Q}$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{Q} = Q^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j, \tag{1.41}$$

то соотношение (1.39) можно представить в виде

$$\bar{\mathbf{e}}'_i = Q^j{}_i \bar{\mathbf{e}}_j, \tag{1.42}$$

а между координатами $\widetilde{x}^i$ и x^i можно установить следующую связь:

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (x^i - x^i_0)\bar{\mathbf{e}}_i = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}'_i = \widetilde{x}^i Q^j{}_i \bar{\mathbf{e}}_j, \\ x^i - x^i_0 = Q^i{}_j \widetilde{x}^j, \\ \partial x^i / \partial \widetilde{x}^j = Q^i{}_j, \qquad \partial \widetilde{x}^j / \partial x^i = P^j{}_i\,. \end{gathered} \tag{1.43}$$

Вместо декартовых координат $\widetilde{x}^i$ можно рассмотреть специальные криволинейные координаты $\widetilde{X}^k$ с началом в точке O':

$$\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(\widetilde{X}^k), \tag{1.44}$$

которые на основании (1.27) связаны с x^i соотношениями

$$x^i = x^i_0(t) + Q^i{}_j(t)\widetilde{x}^j(\widetilde{X}^k) \equiv x^i(\widetilde{X}^k, t) \quad \text{или} \quad \widetilde{X}^j = \widetilde{X}^j(x^i, t). \tag{1.45}$$

Зависимость от t в этих соотношениях определяется функциями $x^i_0(t)$ и $Q^i{}_j(t)$ (т.е. только движением подвижной системы отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$), которые в МСС чаще всего полагают заданными.

Координаты $\widetilde{X}^i$ уже не являются лагранжевыми (материальными): в разные моменты времени они соответствуют различным материальным точкам. Часто однако удобно координаты $\widetilde{X}^i$ выбрать совпадающими с X^i в начальной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. В этом случае имеют место соотношения

$$\overset{\circ}{x}{}^i(X^i) = x^i(X^j, 0) = x^i(\widetilde{X}^j, 0). \tag{1.46}$$

С помощью преобразования (1.29) пространственное описание можно осуществлять и в координатах $\widetilde{X}^i$, рассматривая функции вида

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x^i, t) = \widetilde{\mathbf{a}}(\widetilde{X}^i, t), \tag{1.47}$$

поэтому координаты $\widetilde{X}^i$ называют *криволинейными пространственными координатами*.

Введем локальные векторы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$:

$$\widetilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \widetilde{X}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{X}^i}\bar{\mathbf{e}}_j. \tag{1.48}$$

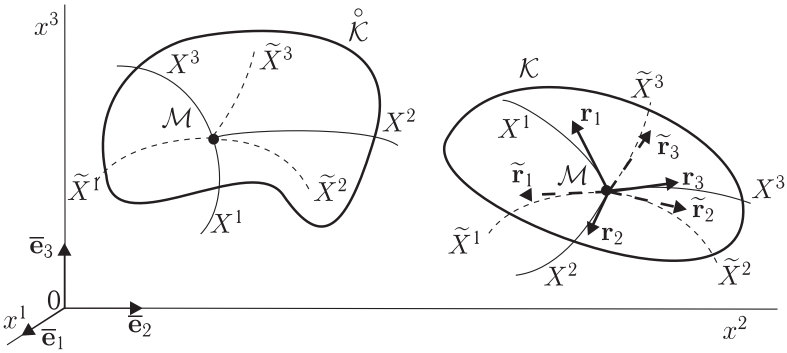

Рис. 1.9. Криволинейные пространственные координаты $\widetilde{X}^i$ и лагранжевы координаты X^i в случае неподвижного базиса $\bar{\mathbf{e}}'_i = \bar{\mathbf{e}}_i$

В частном случае базис $\bar{\mathbf{e}}'_i$ может быть и неподвижным (рис. 1.9), тогда $\bar{\mathbf{e}}'_i = \bar{\mathbf{e}}_i$, $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, а $\widetilde{X}^j = \widetilde{X}^j(x^i)$ — криволинейные пространственные координаты не зависят от t, при этом $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ тоже не будут зависеть от t, и из (1.46) и (1.48) следует, что он совпадает с $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$:

$$\widetilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{X}^i}\bar{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^j}{\partial X^i}\bar{\mathbf{e}}_j = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i. \tag{1.49}$$

В случае подвижного базиса $\bar{\mathbf{e}}'_i$ базисы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ уже не совпадают.

Векторы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ направлены по касательным к координатным линиям $\widetilde{X}^i$ и определены одновременно с $\mathbf{r}_i$ в каждой точке $\mathcal{M}$ в любой момент времени $t \geqslant 0$.

Изменение векторов $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ во времени определяется только изменением подвижного базиса $\bar{\mathbf{e}}'_i$, поскольку из (1.42), (1.43) и (1.48) следует, что

$$\bar{\mathbf{e}}'_i = Q^j{}_i \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial x^j} \widetilde{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial x^j} \widetilde{\mathbf{r}}_k = \Big(\frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial \widetilde{x}^i}\Big) \widetilde{\mathbf{r}}_k, \tag{1.50}$$

а матрица $\widetilde{P}^k{}_i \equiv \partial \widetilde{X}^k / \partial \widetilde{x}^i$, согласно (1.44), не зависит от t.

Связь векторов базисов $\mathbf{r}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \widetilde{X}^k} \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial X^i} = \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial X^i} \widetilde{\mathbf{r}}_k. \tag{1.51}$$

Подобно тому, как это было проделано в п. 1.1.2, определим метрическую матрицу $\widetilde{g}_{ij}$ и обратную метрическую матрицу $\widetilde{g}^{ij}$:

$$\widetilde{g}_{ij} = \widetilde{\mathbf{r}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{r}}_j, \qquad \widetilde{g}^{ij} \widetilde{g}_{jk} = \delta^i_k, \tag{1.52}$$

а также векторы взаимного базиса

$$\widetilde{\mathbf{r}}^i = \widetilde{g}^{ik} \widetilde{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^j} \bar{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial \widetilde{x}^k} \bar{\mathbf{e}}'^k. \tag{1.53}$$

С учетом формул (1.51) и (1.52), находим связь матриц g_{ij} и $\widetilde{g}_{kl}$:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial X^i} \frac{\partial \widetilde{X}^l}{\partial X^j} \widetilde{\mathbf{r}}_k \cdot \widetilde{\mathbf{r}}_l = \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial X^i} \frac{\partial \widetilde{X}^l}{\partial X^j} \widetilde{g}_{kl}. \tag{1.54}$$

Обратную матрицу g^{ij} находим из (1.54), используя правило обращения произведения матриц (см. упр. 1.1.13):

$$g^{ij} = \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{X}^k} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{X}^l} \widetilde{g}^{kl}. \tag{1.55}$$

Из (1.51), (1.53) и (1.55) находим связь векторов взаимных базисов $\mathbf{r}^i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}^i$:

$$\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j = \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{X}^k} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{X}^l} \widetilde{g}^{kl} \frac{\partial \widetilde{X}^m}{\partial X^j} \widetilde{\mathbf{r}}_m = \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{X}^k} \widetilde{\mathbf{r}}^k. \tag{1.56}$$

Пусть имеется тензор ${}^n\boldsymbol{\Omega}$, тогда его можно представить в базисе $\mathbf{r}_i$ и в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$:

$${}^n\boldsymbol{\Omega} = \Omega^{i_1 \ldots i_n} \mathbf{r}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}_{i_n} = \widetilde{\Omega}^{i_1 \ldots i_n} \widetilde{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_{i_n}. \tag{1.57}$$

Подставляя в (1.57) формулы (1.51), получаем формулы преобразования компонент тензора при переходе от координат X^i к $\widetilde{X}^i$:

$$\widetilde{\Omega}^{i_1 \ldots i_n} = \Omega^{j_1 \ldots j_n} \frac{\partial \widetilde{X}^{i_1}}{\partial X^{j_1}} \cdots \frac{\partial \widetilde{X}^{i_n}}{\partial X^{j_n}}. \tag{1.58}$$

Введем набла-оператор $\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}$ ковариантного дифференцирования в координатах $\widetilde{X}^i$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} = \widetilde{\mathbf{r}}^i \frac{\partial}{\partial \widetilde{X}^i} \tag{1.59}$$

и контравариантные производные компонент $\widetilde{a}_i$ вектора $\mathbf{a} = \widetilde{a}_i \widetilde{\mathbf{r}}^i$ в координатах $\widetilde{X}^i$:

$$\widetilde{\nabla}_k \widetilde{a}_i = \frac{\partial \widetilde{a}_i}{\partial \widetilde{X}^k} - \widetilde{\Gamma}^m_{ik} \widetilde{a}_m, \qquad \widetilde{\nabla}_k \widetilde{a}^i = \frac{\partial \widetilde{a}^i}{\partial \widetilde{X}^k} + \widetilde{\Gamma}^i_{km} \widetilde{a}^m. \tag{1.60}$$

Символы Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}^m_{ij}$ в координатах $\widetilde{X}^i$ связаны с $\widetilde{g}_{ij}$ соотношениями, аналогичными (1.26).

Теорема 1.2. *Результаты ковариантного дифференцирования в координатах $\widetilde{X}^i$ и X^i (в конфигурации $\mathcal{K}$) совпадают:*

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^n\boldsymbol{\Omega} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot {}^n\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times {}^n\boldsymbol{\Omega} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \times {}^n\boldsymbol{\Omega}. \tag{1.61}$$

▼ Докажем первую формулу в (1.61). С помощью формул (1.23) получим

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{r}^i \otimes \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial X^i} = \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{X}^k} \widetilde{\mathbf{r}}^k \otimes \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial \widetilde{X}^l} \frac{\partial \widetilde{X}^l}{\partial X^i} = \delta^l_k \mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial \widetilde{X}^l} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes {}^n\boldsymbol{\Omega}. \tag{1.62}$$

Аналогично доказываем справедливость остальных двух равенств в (1.61) (см. упр. 1.1.8). ▲

Переходя к компонентам тензора ${}^n\boldsymbol{\Omega}$ в базисах $\mathbf{r}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_i$, из (1.58) получим соотношение между ковариантными производными:

$$\nabla_i \Omega^{j_1 \ldots j_n} = \widetilde{\nabla}_i \widetilde{\Omega}^{j_1 \ldots j_n}. \tag{1.63}$$

Определим тензор $\mathbf{H}$, осуществляющий преобразование из координат $\widetilde{X}^i$ в X^j:

$$\mathbf{H} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j \otimes \widetilde{\mathbf{r}}^j = \widetilde{H}^i{}_j \widetilde{\mathbf{r}}_i \otimes \widetilde{\mathbf{r}}^j = \bar{H}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j. \tag{1.64}$$

Тогда имеют место соотношения (см. упр. 1.1.10 и 1.1.11)

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H} \cdot \widetilde{\mathbf{r}}_i = \widetilde{H}^j{}_i\, \widetilde{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{r}}^i = (\widetilde{H}^i{}_j)^{-1} \widetilde{\mathbf{r}}^j. \tag{1.65}$$

Координаты $\widetilde{X}^i$ часто выбирают ортогональными, тогда базисы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}^i$ — ортогональны, а матрицы $\widetilde{g}_{ij}$ и $\widetilde{g}^{ij}$ — диагональны, и можно ввести физический (ортонормированный) базис:

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha = \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha / \widetilde{H}_\alpha, \tag{1.66}$$

где $\widetilde{H}_\alpha = \sqrt{\widetilde{g}_{\alpha\alpha}}$ — параметры Ламе, вообще говоря, отличающиеся от параметров $\overset{\circ}{H}_\alpha = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}}$. Компоненты тензоров в базисе $\widehat{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha$, как обычно, называют физическими:

$$\mathbf{T} = \widehat{\widetilde{T}}{}^{ij} \widehat{\widetilde{\mathbf{r}}}_i \otimes \widehat{\widetilde{\mathbf{r}}}_j. \tag{1.67}$$

Соотношение между физическими и ковариантными компонентами тензора определяется стандартными формулами (см. [12]).

Упражнения к 1.1

Упражнение 1.1.1. Используя формулы (1.10), (1.12), (1.13) и (1.17), показать, что если закон движения сплошной среды описывает растяжение бруса (1.6) (см. пример 1.1), то локальные векторы базиса $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ и метрические матрицы имеют следующий вид:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{e}_i, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{r}_\alpha = k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha = (1/k_\alpha)\bar{\mathbf{e}}^\alpha, \quad \alpha = 1,2,3; \qquad \overset{\circ}{g}_{ij} = \delta_{ij}, \quad \overset{\circ}{g}{}^{ij} = \delta^{ij},$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} k_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-2} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$g_{\alpha\beta} = k_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = k_\alpha^{-2}\delta_{\alpha\beta}, \quad H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = k_\alpha, \quad \widehat{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha.$$

Упражнение 1.1.2. Показать, что если закон движения сплошной среды описывает простой сдвиг (см. пример 1.2), то локальные векторы базиса и метрические матрицы имеют вид

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{e}_i, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{e}^i, \qquad \overset{\circ}{g}_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \overset{\circ}{g}{}^{ij} = \delta^{ij},$$

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{r}_2 = a\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \qquad \mathbf{r}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{r}^1 = \bar{\mathbf{e}}^1 - a\bar{\mathbf{e}}^2, \qquad \mathbf{r}^2 = \bar{\mathbf{e}}^2, \qquad \mathbf{r}^3 = \bar{\mathbf{e}}^3,$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.1.3. Показать, что если закон движения описывает вращение бруса с растяжением (см. пример 1.3), то, вводя тензоры поворота $\mathbf{O}_0$ и растяжения $\mathbf{U}_0$:

$$\mathbf{O}_0 = O_0{}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j, \qquad \mathbf{U}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

закон движения бруса можно записать в тензорной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{F}_0 = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0.$$

Показать, что локальные векторы базиса и метрические матрицы в данной задаче имеют вид

$$\mathbf{r}_i = F_0{}^k_i\, \bar{\mathbf{e}}_k, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i,$$

$$g_{ij} = F_0{}^k_i\, F_0{}^l_j \delta_{kl} = \begin{pmatrix} k_1^2\cos^2\varphi + k_2^2\sin^2\varphi & (k_1^2 - k_2^2)\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ (k_1^2 - k_2^2)\cos\varphi\sin\varphi & k_1^2\sin^2\varphi + k_2^2\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix},$$

$$g = k_1 k_2 k_3,$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} k_2^{-2}\sin^2\varphi + k_1^{-2}\cos^2\varphi & (k_1^{-2} - k_2^{-2})\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ (k_1^{-2} - k_2^{-2})\cos\varphi\sin\varphi & k_2^{-2}\cos^2\varphi + k_1^{-2}\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-2} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.1.4. Используя свойство (1.14) взаимных векторов базиса, показать, что имеют место следующие представления:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \frac{\partial X^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}\bar{\mathbf{e}}^k, \qquad \mathbf{r}^i = P^i{}_k \bar{\mathbf{e}}^k = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\bar{\mathbf{e}}^k.$$

Упражнение 1.1.5. Показать, что $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{F}^{-1}$ и $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$ в декартовой системе координат можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^m}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\bar{\mathbf{e}}_m \otimes \bar{\mathbf{e}}^i, \qquad \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial X^k}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \frac{\partial x^m}{\partial X^k}\bar{\mathbf{e}}_m = \frac{\partial x^m}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \bar{\mathbf{e}}_m,$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^m}{\partial X^k}\bar{\mathbf{e}}_m \otimes \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\bar{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^m}{\partial x^i}\bar{\mathbf{e}}_m \otimes \mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^m}{\partial X^k}\bar{\mathbf{e}}_m = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^m}{\partial x^i}\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \mathbf{e}_m.$$

Упражнение 1.1.6. Доказать справедливость формулы (1.55), непосредственно подставляя (1.54), (1.52) и (1.55) в (1.12).

Упражнение 1.1.7. Доказать, что

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i.$$

Упражнение 1.1.8. Доказать справедливость третьей формулы в (1.61).

Упражнение 1.1.9. Доказать, что для всякой скалярной функции $\varphi(X^i)$ ее градиенты в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\varphi.$$

Упражнение 1.1.10. Показать, что из (1.64) действительно следуют соотношения (1.65).

Упражнение 1.1.11. Используя (1.47), показать, что в формулах (1.64) тензор $\mathbf{H}$ в базисах $\bar{\mathbf{e}}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ имеет следующие компоненты:

$$\bar{H}^i{}_j = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial X^k}\frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial x^j}, \quad (\bar{H}^i{}_j)^{-1} = \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{X}^k}\frac{\partial X^k}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j}, \quad \widetilde{H}^i{}_j = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}{\partial X^j}\frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^k}, \quad (\widetilde{H}^i{}_j)^{-1} = \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{X}^j}\frac{\partial X^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}.$$

Упражнение 1.1.12. Обозначая $\overset{\circ}{F}{}^{ij}$ — компоненты градиента деформации $\mathbf{F}$ в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$: $\mathbf{F} = \overset{\circ}{F}{}^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \overset{\circ}{F}{}^i{}_j\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j$, показать, что из (1.36) следует соотношение

$$\mathbf{r}_j = \overset{\circ}{F}{}^i{}_j\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i.$$

Упражнение 1.1.13. Показать, что имеют место следующие соотношения для символов Леви–Чивиты:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^l_k\delta^m_j, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta^l_i.$$

$$\sqrt{g}\;\epsilon_{ijk} = (1/\sqrt{g}\,)\;\epsilon^{mnl}g_{mi}g_{nj}g_{lk}, \quad \epsilon_{ijk}T^{jk} = 0,$$

где T^{jk} — компоненты произвольного симметричного тензора: $T^{jk} = T^{kj}$.

Упражнение 1.1.14. Используя соотношения (1.14а), показать, что имеют место следующие соотношения между векторами локальных базисов:

$$\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta = \sqrt{g}\;\mathbf{r}^\gamma, \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta = \sqrt{\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^\gamma, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Упражнение 1.1.15. Показать, что единичные тензоры четвертого ранга $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{II}}$ и $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$, определенные формулами (1.22), обладают следующими свойствами:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}} \cdot\cdot\, \mathbf{T} = I_1(\mathbf{T})\mathbf{E}, \quad I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot\, \mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}} \cdot\cdot\, \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\Delta} \cdot\cdot\, \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}}),$$

и

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}} \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{\Omega}, \qquad \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{(2134)},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}} \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{\Omega} = {}^6\boldsymbol{\Omega}, \qquad \boldsymbol{\Delta} \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^{(2134)} + \boldsymbol{\Omega}),$$

для произвольных тензоров $\mathbf{T}$ второго и ${}^4\boldsymbol{\Omega}$ четвертого ранга. Из этих формул следует, что «истинным» единичным тензором четвертого ранга является тензор $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$.

Упражнение 1.1.16. Показать, что компоненты симметричного единичного тензора четвертого ранга $\boldsymbol{\Delta}$ в тетрадном базисе имеют вид

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}^i) = \Delta^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l,$$

$$\Delta^{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}).$$

Упражнение 1.1.17. Показать, что для всякого тензора второго ранга $\mathbf{T}$ и вектора $\mathbf{a}$ имеет место следующая формула ковариантного дифференцирования:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{T} \cdot\cdot\, (\nabla \otimes \mathbf{a})^{\mathrm{T}} + \mathbf{a} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

1.2. Тензоры и меры деформации

1.2.1. Тензоры деформации. Важнейшими характеристиками движения сплошной среды, кроме $\mathbf{F}$, являются *тензоры деформации*, которые вводят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij})\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j = \varepsilon_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j,\\
\mathbf{A} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij})\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j = \varepsilon_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j,\\
\boldsymbol{\Lambda} &= \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij})\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \varepsilon^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j,\\
\mathbf{J} &= \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij})\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = \varepsilon^{ij}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

и называют: $\mathbf{C}$ — *правым тензором деформации Коши–Грина* (иногда его также называют *тензором Грина–Лагранжа*), $\mathbf{A}$ — *левым тензором деформации Альманзи*, $\boldsymbol{\Lambda}$ — *правым тензором деформации Альманзи* и $\mathbf{J}$ — *левым тензором деформации Коши–Грина*.

Как следует из определения этих тензоров, ковариантные компоненты $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ совпадают, но они определены в различных тензорных базисах. Компоненты ε_{ij} называют *ковариантными компонентами тензора деформации*.

Контравариантные компоненты тензоров $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{J}$ также совпадают и называются *контравариантными компонентами тензора деформации* ε^{ij}, однако они соответствуют различным тензорным базисам тензоров $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{J}$.

Заметим, что компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}), \qquad \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij}) \tag{2.2}$$

определены независимо друг от друга, поэтому формальное «жонглирование» индексами недопустимо с этими компонентами, т.е.

$$\breve{\varepsilon}^{kl} = \varepsilon_{ij} g^{ik} g^{jl} \neq \varepsilon^{kl}, \qquad \breve{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} \neq \varepsilon_{kl}. \tag{2.3}$$

Следовательно, когда возникает необходимость из ε_{ij} получить контравариантные компоненты, а из ε^{ij} — ковариантные, необходимо использовать обозначения $\breve{\varepsilon}^{kl}$, $\breve{\varepsilon}_{kl}$. Используют также следующие обозначения:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon^{ij} \overset{\circ}{g}_{ik} \overset{\circ}{g}_{jl}, \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{kl} = \varepsilon_{ij} \overset{\circ}{g}{}^{ik} \overset{\circ}{g}{}^{jl}. \tag{2.4}$$

Теорема 1.3. *Тензоры деформации* $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Lambda}$ *и* $\mathbf{J}$ *связаны с градиентом деформации* $\mathbf{F}$ *следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}), \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{\Lambda} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}), \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

▼ Рассмотрим связь $\mathbf{C}$ с $\mathbf{F}$. Используя определения g_{ij}, $\overset{\circ}{g}_{ij}$ и $\mathbf{F}$, получим

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\left((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j - \mathbf{E}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \mathbf{r}_i \cdot\ \mathbf{r}_j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j - \mathbf{E}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}). \tag{2.6}$$

Аналогично доказываем и остальные соотношения (2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{r}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j \otimes \mathbf{r}^j) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{\Lambda} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}), \\ \mathbf{J} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j \otimes \mathbf{r}_j - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}). \ ▲ \end{aligned} \tag{2.6a}$$

1.2.2. Меры деформации. Кроме тензоров деформации определим *меры деформации* — *правую меру деформации Коши–Грина* $\mathbf{G}$ и *левую меру деформации Альманзи* $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= g_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E} + 2\mathbf{C}, \\ \mathbf{g} &= \overset{\circ}{g}_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - 2\mathbf{A}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

а также *левую меру деформации Коши–Грина* $\mathbf{g}^{-1}$ и *правую меру деформации Альманзи* $\mathbf{G}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{-1} &= \overset{\circ}{g}{}^{ij}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} + 2\mathbf{J}, \\ \mathbf{G}^{-1} &= g^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{E} - 2\mathbf{\Lambda}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

1.2.3. Вектор перемещений. Введем теперь *вектор перемещений* $\mathbf{u}$ точки $\mathcal{M}$ из отсчетной конфигурации в актуальную (рис. 1.10):

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{x}}. \tag{2.9}$$

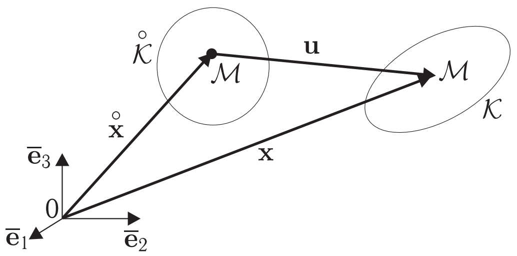

Рис. 1.10. Вектор перемещений точки $\mathcal{M}$ из отсчетной конфигурации в актуальную

Теорема 1.4. *Тензоры деформации и градиент деформации связаны с вектором перемещений* $\mathbf{u}$ *следующими соотношениями:*

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\mathbf{E}+(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{F}^{-1}=\mathbf{E}-(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u},\qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}=\mathbf{E}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u},\end{gathered}\tag{2.10}$$

а также

$$\begin{gathered}\mathbf{C}=\frac{1}{2}\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right),\\ \mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right),\\ \boldsymbol{\Lambda}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}\right),\\ \mathbf{J}=\frac{1}{2}\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}\right).\end{gathered}\tag{2.11}$$

▼ Из определения (2.9) вектора перемещений и свойства (1.35) градиента деформации имеем

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{x}=\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes(\mathring{\mathbf{x}}+\mathbf{u})=\mathring{\mathbf{r}}^{i}\otimes\frac{\partial\mathring{\mathbf{x}}}{\partial X^{i}}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}=$$
$$=\mathring{\mathbf{r}}^{i}\otimes\mathring{\mathbf{r}}_{i}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}=\mathbf{E}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}.\tag{2.12}$$

Тогда тензор $\mathbf{C}$ принимает вид

$$\mathbf{C}=\frac{1}{2}\left((\mathbf{E}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u})\cdot(\mathbf{E}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}})-\mathbf{E}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}+\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right).\tag{2.13}$$

Аналогично доказываем остальные формулы теоремы. ▲

1.2.4. Соотношения между компонентами тензора деформации и перемещениями. Вектор перемещений $\mathbf{u}$ можно разложить как по базису $\mathring{\mathbf{r}}_i$, так и по $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{u}=\mathring{u}^{i}\mathring{\mathbf{r}}_{i}=u^{i}\mathbf{r}_{i}.\tag{2.14}$$

Производную по X^i также можно вычислить в обоих базисах:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} = \mathring{\nabla}_i \mathring{u}^k \mathring{\mathbf{r}}_k = \nabla_i u^k \mathbf{r}_k. \tag{2.15}$$

Тогда градиенты вектора перемещения примут вид:

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u} = \mathring{\mathbf{r}}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} = \mathring{\nabla}_i \mathring{u}^k \mathring{\mathbf{r}}^i \otimes \mathring{\mathbf{r}}_k = \mathring{\nabla}^i \mathring{u}^k \mathring{\mathbf{r}}_i \otimes \mathring{\mathbf{r}}_k, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{r}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} = \nabla_i u^k \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_k = \nabla^i u^k \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_k. \tag{2.17}$$

Подставляя эти выражения в (2.10), получим

$$\mathbf{F} = (\delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{u}^k) \mathring{\mathbf{r}}_k \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{F}^k{}_i \, \mathring{\mathbf{r}}_k \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i. \tag{2.18}$$

Здесь введены компоненты градиента деформации в отсчетной конфигурации:

$$\mathring{F}^k{}_i = \delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{u}^k. \tag{2.19}$$

Транспонированный градиент $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathring{F}^k{}_i \, \mathring{\mathbf{r}}^i \otimes \mathring{\mathbf{r}}_k = \mathring{F}_i{}^k \mathring{\mathbf{r}}_k \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i, \tag{2.20}$$

$$\mathring{F}_i{}^k = \delta_i^k + \mathring{\nabla}^k \mathring{u}_i, \tag{2.21}$$

причем $(\mathring{F}_i{}^k)^{\mathrm{T}} = \mathring{F}^k{}_i$.

Аналогично находим выражение для обратного градиента:

$$\mathbf{F}^{-1} = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}^i = (F^{-1})^k{}_i \, \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}^i \tag{2.22}$$

и обратно-транспонированного градиента:

$$\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = (F^{-1})^k{}_i \, \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_k = (F^{-1})_i{}^k \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}^i, \tag{2.23}$$

где обозначены их компоненты в актуальной конфигурации:

$$(F^{-1})_i{}^k = \delta_i^k - \nabla^k u_i, \tag{2.24}$$

$$(F^{-1})^k{}_i = \delta_i^k - \nabla_i u^k. \tag{2.25}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.5. *Компоненты градиентов деформации* $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ *и* $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$ *в локальных базисах конфигураций* $\mathring{\mathcal{K}}$ *и, соответственно,* $\mathcal{K}$ *связаны с компонентами вектора перемещений* $\mathbf{u}$ *с помощью формул (2.19), (2.20), (2.24) и (2.25).*

Подставляя теперь выражение (2.16) и (2.17) в (2.11) для $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ и сравнивая с (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathring{\nabla}_i \mathring{u}_j + \mathring{\nabla}_j \mathring{u}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{u}^k \mathring{\nabla}_j \mathring{u}_k), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \end{aligned} \tag{2.26}$$

— выражения для ковариантных компонент тензора деформации через компоненты вектора перемещений в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$.

Аналогично, подставляя (2.16) и (2.17) в выражение (2.11) для $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{J}$, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}{}^i \overset{\circ}{u}{}^j + \overset{\circ}{\nabla}{}^j \overset{\circ}{u}{}^i + \overset{\circ}{\nabla}{}^k \overset{\circ}{u}{}^i \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{u}_j), \\ \varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \nabla^k u^i \nabla_k u^j) \end{aligned} \tag{2.27}$$

— соотношения между контравариантными компонентами тензора деформации и компонентами перемещений в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$.

Если теперь воспользоваться соотношениями (2.2), (2.26) и (2.27), то можно установить связь метрических матриц с компонентами перемещений:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}{}^k \nabla_j \overset{\circ}{u}_k = \overset{\circ}{g}_{ij} + \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u^k \nabla_j u_k, \tag{2.28}$$

$$g^{ij} = \overset{\circ}{g}{}^{ij} + \overset{\circ}{\nabla}{}^i \overset{\circ}{u}{}^j + \overset{\circ}{\nabla}{}^j \overset{\circ}{u}{}^i + \overset{\circ}{\nabla}{}^k \overset{\circ}{u}{}^i \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{u}{}^j = \overset{\circ}{g}{}^{ij} + \nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \nabla^k u^i \nabla_k u^j. \tag{2.29}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.6. *Компоненты тензора деформации ε_{ij}, ε^{ij} и метрические матрицы g_{ij}, g^{ij} связаны с компонентами вектора перемещений $\mathbf{u}$ по формулам (2.26)–(2.29).*

1.2.5. Физический смысл компонент тензора деформации. Выясним теперь физический смысл компонент тензора деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j). \tag{2.30}$$

По определению скалярного произведения (см. [12]):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{r}_\alpha||\mathbf{r}_\beta|\cos\psi_{\alpha\beta} - |\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha||\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta|\cos\overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta}\right), \tag{2.31}$$

где $\psi_{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta}$ — углы между векторами базиса $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}_\beta$ и $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta$ в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Рассмотрим теперь элементарные радиусы-векторы $d\mathbf{x}$ и $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и введем их длины, соответственно, ds и $d\overset{\circ}{s}$:

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \qquad d\overset{\circ}{s}{}^2 = d\overset{\circ}{\mathbf{x}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}. \tag{2.32}$$

В силу произвольности $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$, выберем его вдоль одного из векторов базиса $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha$, тогда $d\mathbf{x}$ тоже будет направлен вдоль соответствующего вектора $\mathbf{r}_\alpha$, так как при деформации $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha$ переходит в $\mathbf{r}_\alpha$ для одной и той же материальной точки $\mathcal{M}$ с лагранжевыми координатами X^k. В этом случае:

$$\begin{aligned} |d\overset{\circ}{\mathbf{x}}| &= d\overset{\circ}{s}_\alpha = \left|\frac{\partial\overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^\alpha} dX^\alpha\right| = |\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha| dX^\alpha, \\ |d\mathbf{x}| &= ds_\alpha = \left|\frac{\partial x}{\partial X^\alpha} dX^\alpha\right| = |\mathbf{r}_\alpha| dX^\alpha. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Отсюда находим

$$ds_\alpha/d\overset{\circ}{s}_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha|/|\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha| = \delta_\alpha + 1, \tag{2.34}$$

где δ_α называют *относительным удлинением*. Из (2.34) получаем

$$|\mathbf{r}_\alpha| = |\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha|(1+\delta_\alpha). \tag{2.35}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.31), приходим к следующему выражению:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}|\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha||\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta| \left((1+\delta_\alpha)(1+\delta_\beta)\cos\psi_{\alpha\beta} - \cos\overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta}\right). \tag{2.36}$$

Рассмотрим случай $\alpha = \beta$, тогда $\psi_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta} = 0$ и

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}|\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha|^2\left((1+\delta_\alpha)^2 - 1\right) = \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}}{2}\left((1+\delta_\alpha)^2 - 1\right). \tag{2.37}$$

Пусть координаты X^i совпадают с декартовыми координатами x^i, тогда $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, и при малых значениях относительных удлинений, когда $\delta_\alpha \ll 1$, получаем

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} \approx \delta_\alpha, \tag{2.38}$$

т.е. $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ — это просто относительное удлинение.

В общем случае $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ — это нелинейная функция соответствующих удлинений.

Рассмотрим $\alpha \neq \beta$, для простоты полагаем, что $X^i = x^i$, тогда $\overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta} = \pi/2$, и из (2.36) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}|\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha||\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta|(1+\delta_\alpha)(1+\delta_\beta)\cos\psi_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}}\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\beta\beta}}\,(1+\delta_\alpha)(1+\delta_\beta)\sin\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(1+\delta_\alpha)(1+\delta_\beta)\sin\chi_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{2.39}$$

где $\chi_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta} = (\pi/2) - \psi_{\alpha\beta}$ — изменение угла между базисными векторами $\mathbf{r}_\alpha$ и $\mathbf{r}_\beta$. При малых относительных удлинениях, когда $\delta_\alpha \ll 1$, и малых углах $\chi_{\alpha\beta} \ll 1$ из (2.39) получаем:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \approx \chi_{\alpha\beta}/2, \tag{2.40}$$

т.е. $\varepsilon_{\alpha\beta}$ представляет собой половину угла скашивания базисных векторов.

1.2.6. Преобразование ориентированной площадки. Рассмотрим в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ некоторую гладкую поверхность Σ, которой принадлежат какие-либо две из координатных линий X^α и X^β.

Тогда можно ввести вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{g}}}\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta, \tag{2.41}$$

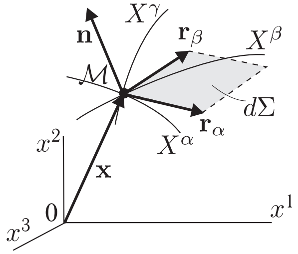

Рис. 1.11. К введению ориентированной площадки $\mathbf{n}d\Sigma$

здесь $\widetilde{g} = \det\,(\widetilde{g}_{\alpha\beta})$, а $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ — двумерная метрическая матрица поверхности, $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \tag{2.42}$$

(не путать с метрической матрицей $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$).

Рассмотрим элементарную площадку $d\Sigma$ в $\mathcal{K}$, построенную на элементарных радиусах-векторах $d\mathbf{x}_\alpha$, направленных по векторам локального базиса, т.е. $d\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha dX^\alpha$ (рис. 1.11). Назовем величину

$$d\Sigma = \sqrt{\widetilde{g}}\ dX^\alpha\ dX^\beta \tag{2.43}$$

площадью элементарной площадки $d\Sigma$, построенной на векторах $d\mathbf{x}_\alpha$, $d\mathbf{x}_\beta$. Тогда формулу (2.41) можно записать в виде

$$\mathbf{n}d\Sigma = \mathbf{r}_\alpha dX^\alpha \times \mathbf{r}_\beta dX^\beta = d\mathbf{x}_\alpha \times d\mathbf{x}_\beta. \tag{2.44}$$

Величину $\mathbf{n}d\Sigma$ называют *ориентированной площадкой.*

Покажем, что определенная по формуле (2.41) нормаль $\mathbf{n}$ является единичной. Для этого воспользуемся свойством (1.14б) векторного произведения векторов базиса, а также результатами упр. 1.1.13, и запишем формулу (2.44) в виде

$$\mathbf{n}d\Sigma = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta dX^\alpha dX^\beta = \sqrt{g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{r}^\gamma dX^\alpha dX^\beta = \\ = (1/\sqrt{g}\,)\epsilon^{ijk} g_{\alpha i} g_{\beta j} \mathbf{r}_k dX^\alpha dX^\beta \tag{2.45}$$

(напомним, что по α и β нет суммирования). Вычислим теперь

$$\mathbf{n}d\Sigma \cdot \mathbf{n}d\Sigma = \sqrt{g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{r}^\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}\ \epsilon^{ijk} g_{\alpha i} g_{\beta j}\mathbf{r}_k)(dX^\alpha dX^\beta)^2 = \\ = (\epsilon_{\alpha\beta k}\epsilon^{ijk} g_{\alpha i} g_{\beta j})(dX^\alpha dX^\beta)^2 = (\delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha) g_{\alpha i} g_{\beta j}(dX^\alpha dX^\beta)^2 = \\ = (g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g^2_{\alpha\beta})(dX^\alpha dX^\beta)^2 = \widetilde{g}(dX^\alpha dX^\beta)^2 = d\Sigma^2. \tag{2.46}$$

Откуда получаем, что: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$.

Площадке $d\Sigma$ в $\mathcal{K}$ соответствует площадка $d\overset{\circ}{\Sigma}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, построенная на элементарных радиусах-векторах $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha$, $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\beta$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha dX^\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta dX^\beta = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta dX^\alpha dX^\beta. \tag{2.47}$$

Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ — вектор единичной нормали к $d\overset{\circ}{\Sigma}$.

Так как $\mathbf{r}^\gamma = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^\gamma$, то

$$\mathbf{n}d\Sigma = \sqrt{g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^\gamma dX^\alpha dX^\beta = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\beta dX^\alpha dX^\beta = \\ = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.48}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.7. *Ориентированные площадки* $\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}$ *и* $\mathbf{n}d\Sigma$ *в* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{K}$ *связаны следующим образом:*

$$\mathbf{n}d\Sigma = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}^{-1}d\overset{\circ}{\Sigma} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.49}$$

С помощью мер деформации можно найти формулы, связывающие векторы нормали $\mathbf{n}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ к элементарной площадке, построенной на одних и тех же материальных частицах в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Умножая уравнение (2.49) скалярно само на себя и учитывая, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$, находим

$$d\Sigma^2 = \frac{g}{\overset{\circ}{g}}(\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}})d\overset{\circ}{\Sigma}{}^2 = \frac{g}{\overset{\circ}{g}}(\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}})d\overset{\circ}{\Sigma}{}^2, \tag{2.50}$$

откуда получаем

$$d\Sigma/d\overset{\circ}{\Sigma} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\,(\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}})^{1/2}. \tag{2.51}$$

С другой стороны, если из (2.49) сначала выразить $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, а затем получившееся соотношение умножить скалярно само на себя, то получим

$$d\overset{\circ}{\Sigma}{}^2 = \frac{\overset{\circ}{g}}{g}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{n})d\Sigma^2 = \frac{\overset{\circ}{g}}{g}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{n})d\Sigma^2. \tag{2.52}$$

Отсюда получаем

$$d\overset{\circ}{\Sigma}/d\Sigma = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\;(\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{n})^{1/2}. \tag{2.53}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{k} &= (\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}})^{1/2} = (\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}})^{1/2},\\ k &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{n})^{1/2} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{n})^{1/2},\end{aligned} \tag{2.54}$$

то формулы (2.52) можно записать в виде

$$d\overset{\circ}{\Sigma}/d\Sigma = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\;k = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\;(1/\overset{\circ}{k}). \tag{2.55}$$

Откуда следует, что

$$k = 1/\overset{\circ}{k}. \tag{2.56}$$

Подставляя теперь (2.52) и (2.53) в (2.49), получаем искомые выражения:

$$\overset{\circ}{k}\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}, \qquad k\overset{\circ}{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{n}. \tag{2.57}$$

1.2.7. Выражение обратной метрической матрицы через компоненты тензора деформации. Компоненты метрической матрицы g_{ij} связаны с компонентами тензора деформации ε_{ij} соотношением (2.2). Часто в МСС возникает необходимость найти выражение обратной метрической матрицы g^{ij} через ε_{ij} (а не ε^{ij}). Для этой цели следует воспользоваться формулой связи компонент обратной и прямой матриц (не обязательно метрических [12]):

$$g^{ij} = \frac{1}{2g}\epsilon^{imn}\epsilon^{jkl}g_{mk}g_{nl}. \tag{2.58}$$

Для $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ имеет место аналогичная формула:

$$\overset{\circ}{g}{}^{ij} = \frac{1}{2\overset{\circ}{g}} \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} \overset{\circ}{g}_{mk} \overset{\circ}{g}_{nl}. \tag{2.59}$$

Подставляя сюда соотношение (2.2) между g_{mn}, $\overset{\circ}{g}_{mn}$ и ε_{mn}, получим

$$g^{ij} = \frac{1}{2g} \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} (\overset{\circ}{g}_{mk} + 2\varepsilon_{mk})(\overset{\circ}{g}_{nl} + 2\varepsilon_{nl}) =$$

$$= \frac{1}{2g} \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} (\overset{\circ}{g}_{mk} \overset{\circ}{g}_{nl} + 2\overset{\circ}{g}_{mk} \varepsilon_{nl} + 1\overset{\circ}{g}_{nl} \varepsilon_{mk} + 4\varepsilon_{mk} \varepsilon_{nl}). \tag{2.60}$$

Раскрывая скобки, преобразуем четыре слагаемых в (2.60) следующим образом. Первое слагаемое с учетом формулы (2.59) приводит к матрице $\overset{\circ}{g}{}^{ij}(\overset{\circ}{g}/g)$. Для преобразования второго и третьего слагаемых примем во внимание следующие формулы:

$$(1/\sqrt{\overset{\circ}{g}}) \epsilon^{jkl} = \sqrt{\overset{\circ}{g}}\ \ \epsilon_{tsp} \overset{\circ}{g}{}^{jt} \overset{\circ}{g}{}^{ks} \overset{\circ}{g}{}^{lp}. \tag{2.61}$$

$$(1/\overset{\circ}{g}) \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} \overset{\circ}{g}_{mk} = \epsilon^{imn} \epsilon_{tsp} \overset{\circ}{g}{}^{jt} \overset{\circ}{g}{}^{ks} \overset{\circ}{g}{}^{lp} \overset{\circ}{g}_{mk} = \epsilon^{imn} \epsilon_{tmp} \overset{\circ}{g}{}^{jt} \overset{\circ}{g}{}^{lp} =$$

$$= (\delta^i_t \delta^n_p - \delta^i_p \delta^n_t) \overset{\circ}{g}{}^{jt} \overset{\circ}{g}{}^{lp} = \overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{jn} \overset{\circ}{g}{}^{il}. \tag{2.62}$$

$$(1/\overset{\circ}{g}) \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} \overset{\circ}{g}_{mk} \varepsilon_{nl} = (\overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{jn} \overset{\circ}{g}{}^{il}) \varepsilon_{nl}. \tag{2.63}$$

Формула (2.61) следует из (1.2.20), а (2.62) получена с учетом (2.61) и свойств символов Леви–Чивиты (см. упр. 1.1.13).

Подставляя теперь формулу (2.63) в (2.60), получаем

$$g^{ij} = \frac{\overset{\circ}{g}}{g} \Big(\overset{\circ}{g}{}^{ij} + 2(\overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - 2\overset{\circ}{g}{}^{il} \overset{\circ}{g}{}^{jn}) \varepsilon_{nl} + \frac{2}{\overset{\circ}{g}} \epsilon^{imn} \epsilon^{jkl} \varepsilon_{mk} \varepsilon_{nl} \Big). \tag{2.64}$$

Нам осталось выразить детерминант $g = \det\,(g_{ij})$ через ε_{ij}. Для этой цели умножим соотношение (2.64) на g_{ij} и учтем снова формулу (2.2):

$$3g = \overset{\circ}{g} \Big(\overset{\circ}{g}{}^{ij} + 2(\overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{il} \overset{\circ}{g}{}^{jn}) \varepsilon_{nl} + \frac{2}{\overset{\circ}{g}} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpl} \varepsilon_{mp} \varepsilon_{nl} \Big)(\overset{\circ}{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij}). \tag{2.65}$$

Преобразуя правую часть, находим

$$3g = \overset{\circ}{g}(3 + 4\overset{\circ}{g}{}^{nl} \varepsilon_{nl} + (2/\overset{\circ}{g}) \epsilon^{imn} \epsilon^{jpl} \overset{\circ}{g}_{ij} \varepsilon_{mp} \varepsilon_{nl} +$$

$$+ 2\overset{\circ}{g}{}^{ij} \varepsilon_{ij} + 4(\overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{il} \overset{\circ}{g}{}^{jn}) \varepsilon_{nl} \varepsilon_{ij} + (4/\overset{\circ}{g}) \epsilon^{imn} \epsilon^{jpl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mp} \varepsilon_{nl} \Big). \tag{2.66}$$

Преобразуя третье слагаемое в правой части по формуле (2.63) и вводя следующие обозначения:

$$I_{1\varepsilon} = \overset{\circ}{g}{}^{nl} \varepsilon_{nl}, \quad I_{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{il} \overset{\circ}{g}{}^{jn}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nl}, \quad I_{3\varepsilon} = \det\,(\varepsilon_{ij} \overset{\circ}{g}{}^{ik}), \tag{2.67}$$

из (2.66) получаем следующую важную формулу:

$$g = \overset{\circ}{g}(1 + 2I_{1\varepsilon} + 4I_{2\varepsilon} + 8I_{3\varepsilon}). \tag{2.68}$$

Здесь мы учли формулу (2.58) для детерминанта матрицы, а также то, что $I_{3\varepsilon} = (1/\overset{\circ}{g})\det\,(\varepsilon_{ij})$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.8. *Обратная метрическая матрица g^{ij} выражается через компоненты тензора деформации ε_{ij} и $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ по формулам (2.64) и (2.68).*

Формулы (2.64) и (2.68) позволяют найти выражение контравариантных компонент тензора деформации ε^{ij} через ε_{ij}. Из (2.2) действительно получаем

$$\varepsilon^{ij} = (1/2)(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij}) = \overset{\circ}{g}{}^{ij}\frac{g - \overset{\circ}{g}}{2g} - \frac{\overset{\circ}{g}}{g}(\overset{\circ}{g}{}^{ij}\overset{\circ}{g}{}^{nl} - \overset{\circ}{g}{}^{il}\overset{\circ}{g}{}^{jn})\varepsilon_{nl} - \frac{1}{g}\epsilon^{imn}\epsilon^{jkl}\varepsilon_{mk}\varepsilon_{nl}. \tag{2.69}$$

Если подставить в (2.64) и (2.69) формулы (2.26) или (2.27), то получим выражение компонент ε^{ij} через компоненты вектора перемещений $\overset{\circ}{u}_i$ или u_i.

Упражнения к 1.2

Упражнение 1.2.1. Используя результаты упр. 1.1.1, показать, что градиент деформации $\mathbf{F}$ и обратный градиент $\mathbf{F}^{-1}$ в задаче о растяжении бруса (см. пример 1.1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{k_\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha.$$

Тензоры деформации в этой задаче вычисляют по формулам

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(k_\alpha^2 - 1)\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(1 - k_\alpha^{-2})\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

меры деформации

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^2 \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{G}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{-2} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

и компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(k_\alpha^2 - 1)\delta_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(1 - k_\alpha^{-2})\delta_{\alpha\beta}.$$

Упражнение 1.2.2. Используя результаты упр. 1.1.2, показать, что в задаче о простом сдвиге имеют место следующие формулы для градиента деформации:

$$\mathbf{F} = \overset{\circ}{F}{}^{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \mathbf{E} + a\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2, \qquad \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} + a\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1,$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - a\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2, \qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{E} - a\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1,$$

т.е.

$$\overset{\circ}{F}{}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{F} = 1,$$

для тензоров деформации:

$$\mathbf{C} = (a/2)\mathbf{O}_3 + (a^2/2)\bar{\mathbf{e}}_2^2, \qquad \mathbf{A} = (a/2)\mathbf{O}_3 - (a^2/2)\bar{\mathbf{e}}_2^2,$$

$$\mathbf{\Lambda} = (a/2)\mathbf{O}_3 - (a^2/2)\bar{\mathbf{e}}_1^2, \qquad \mathbf{J} = (a/2)\mathbf{O}_3 + (a^2/2)\bar{\mathbf{e}}_1^2,$$

и компонент тензора деформации:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\varepsilon^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где обозначены тензоры

$$\mathbf{O}_3 \equiv \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1, \qquad \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \equiv \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Упражнение 1.2.3. Используя данные из примера 1.3 (см. п. 1.1.1), показать, что в задаче о вращении бруса с растяжением градиент деформации имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = {F_0}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \cos\varphi \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha + k_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + \sin\varphi k_2 (\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2).$$

Упражнение 1.2.4. Используя формулы (1.22), (2.18)–(2.25) и результаты упр. 1.1.7, показать, что локальные векторы базиса связаны с перемещениями следующими соотношениями:

$$\mathbf{r}_i = \mathring{\mathbf{r}}_k (\delta_i^k + \mathring{\nabla}^k \mathring{u}_i), \qquad \mathring{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_k (\delta_i^k - \nabla_i u^k).$$

Упражнение 1.2.5. Используя формулы (2.37) и (2.39), показать, что физические компоненты тензора деформации $\widehat{\mathring{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}/\sqrt{\mathring{g}_{\alpha\alpha}\mathring{g}_{\beta\beta}}$ связаны с относительными удлинениями δ_α и углами $\chi_{\alpha\beta}$ следующими формулами:

$$\widehat{\mathring{\varepsilon}}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}((1+\delta_\alpha)^2 - 1), \qquad \widehat{\mathring{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(1+\delta_\alpha)(1+\delta_\beta)\sin\chi_{\alpha\beta}.$$

Упражнение 1.2.6. Показать, что в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ криволинейной системы координат $\widetilde{X}^i$ выражение тензора $\mathbf{F}^{-1}$ через $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}$ можно представить в виде, аналогичном (2.22)–(2.25):

$$\mathbf{u} = \widetilde{u}^k \widetilde{\mathbf{r}}_k, \qquad \mathbf{F}^{-1} = (\widetilde{F}^{-1})^k{}_i \widetilde{\mathbf{r}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{r}}^i, \quad (\widetilde{F}_{-1})^k{}_i = \delta_i^k - \widetilde{\nabla}_i \widetilde{u}^k.$$

Упражнение 1.2.7. Используя формулу (1.34), показать, что имеют место следующие соотношения

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathring{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathring{\mathbf{x}}, \qquad |d\mathring{\mathbf{x}}|^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}.$$

1.3. Полярное разложение

1.3.1. Теорема о полярном разложении. Тензор $\mathbf{F}$, согласно (1.36), можно рассматривать как тензор линейного преобразования базиса $\mathring{\mathbf{r}}_i$ в базис $\mathbf{r}_i$. В силу линейной независимости векторов $\mathring{\mathbf{r}}_i$ и $\mathbf{r}_i$, этот тензор $\mathbf{F}$ будет невырожденным. Тогда для него справедлива следующая теорема.

Теорема 1.12 (о полярном разложении). *Всякий невырожденный тензор второго ранга* $\mathbf{F}$ *можно представить в виде скалярного произведения двух тензоров второго ранга:*

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \quad \textit{или} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}. \tag{3.1}$$

где $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{V}$ *— симметричные, положительно определенные тензоры, а* $\mathbf{O}$ *— ортогональный тензор, причем каждое из представлений (3.1) — единственное.*

▼ Доказательство существования разложения (3.1) проведем конструктивно, т.е. построив тензоры $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{O}$. Для этого рассмотрим свертки тензора $\mathbf{F}$ со своим транспонированным: $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$ и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$. Оба эти тензора являются симметричными, так как

$$(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F})^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \;\; \text{и} \;\; (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{3.2}$$

а также положительно определенными:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2 > 0 \tag{3.3}$$

для любого ненулевого вектора $\mathbf{a}$, где $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$. Но у всякого симметричного положительно определенного тензора все три собственные значения вещественны и положительны [12], тогда собственные значения тензоров $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$ и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ можно обозначить как $\overset{\circ}{\lambda}{}_{\alpha}^{2}$ и λ_{α}^{2}. Эти тензоры являются диагональными в собственных базисах, т.е. имеют следующие представления:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}{}_{\alpha}^{2} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \qquad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{\alpha}^{2} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\alpha}. \tag{3.4}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}$ — собственные векторы тензора $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$, а $\mathbf{p}_{\alpha}$ — тензора $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, являющиеся вещественнозначными и ортонормированными:

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{p}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.5}$$

Правые части в (3.4) представляют собой квадраты некоторых тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, определенных как

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha} > 0; \qquad \mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha} > 0. \tag{3.6}$$

где знаки у λ_{α} выбираем всегда положительными.

При этом имеют место соотношения:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \qquad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^2. \tag{3.7}$$

Построенные тензоры $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ являются симметричными, что следует из формулы (3.6), а также положительно определенными, так как для любого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ выполнено:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha} \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha} (\mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha})^2 > 0, \tag{3.8}$$

ввиду того, что $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha > 0$. Аналогично доказываем положительную определенность тензора $\mathbf{V}$.

Оба тензора $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ невырождены, так как по условию теоремы $\mathbf{F}$ — невырожден, и из (3.7) следует

$$(\det\,\mathbf{U})^2 = \det\,\mathbf{U}^2 = \det\,(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}) = (\det\,\mathbf{F})^2 \neq 0. \tag{3.9}$$

Тогда существуют обратные тензоры $\mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{V}^{-1}$, с помощью которых можно построить еще два новых тензора

$$\overset{\circ}{\mathbf{O}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{F}, \tag{3.10}$$

являющихся ортогональными. В самом деле,

$$\overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{O}} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}^2\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}, \tag{3.11}$$

что по определению [12] означает ортогональность тензора $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$, аналогично показываем ортогональность тензора $\mathbf{O}$.

Таким образом, мы действительно построили тензоры $\mathbf{U}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$, а также $\mathbf{V}$ и $\mathbf{O}$, произведение которых, согласно (3.10), образует исходный тензор $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \overset{\circ}{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{O}, \tag{3.12}$$

причем $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — симметричные, положительно определенные, а $\mathbf{O}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$ — ортогональные.

Покажем единственность каждого из разложений (3.12). Пусть противное, т.е. существует еще одно разложение, например,

$$\mathbf{F} = \overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{O}}}\cdot\widetilde{\mathbf{U}}. \tag{3.13}$$

Но тогда

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^2, \tag{3.14}$$

откуда следует, что $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$, так как разложение тензора $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}$ по собственному базису единственно, а знаки у $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\widetilde{\lambda}}_\alpha$ по условию выбираем положительными. Совпадение $\mathbf{U}$ и $\widetilde{\mathbf{U}}$ влечет за собой совпадение $\overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{O}}}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$, так как

$$\overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{O}}} = \mathbf{F}\cdot\widetilde{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbf{O}}. \tag{3.15}$$

что и доказывает единственность разложения (3.12). Единственность разложения $\mathbf{F} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{O}$ доказывается аналогично.

Нам осталось только показать, что ортогональные тензоры $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$ и $\mathbf{O}$ совпадают, т.е. что из (3.12) следует (3.1). Для этого образуем тензор

$$\mathbf{F}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{U}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}. \tag{3.16}$$

В силу (3.12), для этого тензора выполнено соотношение:

$$\overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}. \tag{3.17}$$

Тензор $\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}$ является ортогональным, так как

$$(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}) = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}. \tag{3.18}$$

Тогда на соотношение (3.17) можно смотреть как на полярное разложение тензора $\overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}$. Но этот тензор симметричен, так как

$$(\overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \cdot (\overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U})^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}. \tag{3.19}$$

Тогда формальное равенство

$$\overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \tag{3.20}$$

— еще одно его полярное разложение. Однако выше мы показали единственность полярного разложения, значит должны иметь место соотношения:

$$\mathbf{V} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}, \tag{3.21}$$

откуда и вытекает совпадение ортогональных тензоров $\mathbf{O} = \overset{\circ}{\mathbf{O}}$. ▲

Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ называют *правым и левым тензорами искажений* соответственно, а $\mathbf{O}$ — *тензором поворота, сопровождающего деформацию*.

Тензор $\mathbf{F}$ имеет девять независимых компонент, тензор $\mathbf{O}$ — три независимые компоненты, а каждый из тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — по шесть независимых компонент.

Замечание 1. Из единственности тензора поворота $\mathbf{O}$ в полярном разложении и формулы (3.21) следует, что тензоры искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ связаны друг с другом с помощью тензора $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}. \tag{3.21a}$$

Теорема 1.13. *Тензоры деформации Коши–Грина и Альманзи могут быть выражены через тензоры искажений* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{V}$ *следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}), \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-2}), \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}), \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{E}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

▼ Действительно, подставляя полярное разложение (3.1) в (2.5), приходим к соотношениям (3.22). ▲

Эта теорема проясняет смысл разделения и названия тензоров деформации на левые и правые: тензоры $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ — правые, поскольку выражаются через правый тензор искажений $\mathbf{U}$, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ — левые, поскольку выражаются через левый тензор искажений $\mathbf{V}$.

1.3.2. Собственные значения и собственные базисы.

Теорема 1.14. *Собственные значения тензоров* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{V}$*, определенных по (3.6), совпадают:*

$$\lambda_\alpha = \overset{\circ}{\lambda}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{3.23}$$

а собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ *и* $\mathbf{p}_\alpha$ *связаны тензором поворота, сопровождающим деформацию:*

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha. \tag{3.23a}$$

▼ Для доказательства воспользуемся определением (3.6) и первой формулой в (3.21а):

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_\alpha \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes (\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_\alpha \mathbf{p}'_\alpha \otimes \mathbf{p}'_\alpha,$$

где $\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$. Согласно этому соотношению, мы получили два различных собственных базиса тензора $\mathbf{V}$ и два набора собственных значений, что невозможно, следовательно, $\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha$ и $\lambda_\alpha = \overset{\circ}{\lambda}_\alpha$, что и требовалось доказать. ▲

В силу (3.5), оба собственных базиса ортогональны, поэтому взаимные векторы собственных базисов не отличаются от $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$:

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}^\alpha, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^\alpha. \tag{3.24}$$

Важным для приложений является вопрос о вычислении λ_α, $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ по заданному градиенту деформации $\mathbf{F}$, для этого применяют следующую процедуру.

1) Образуем тензор $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$ (или $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$) и найдем его компоненты в каком-либо подходящем для рассматриваемой задачи базисе, например, в декартовом $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{U}^2 = (\bar{U}^2)^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j \quad \text{и} \quad \mathbf{V}^2 = (\bar{V}^2)^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j.$$

2) Найдем собственные значения матрицы $(\bar{U}^2)^i{}_j$, решая характеристическое уравнение

$$\det\,(\mathbf{U}^2 - \lambda_\alpha^2 \mathbf{E}) = 0, \tag{3.25}$$

которое в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ имеет вид

$$\det\,((U^2)^i{}_j - \lambda_\alpha^2 \delta^i_j) = 0. \tag{3.25а}$$

3) Найдем собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ тензора $\mathbf{U}$ и векторы $\mathbf{p}_\alpha$ тензора $\mathbf{V}$ из следующих уравнений:

$$\mathbf{U}^2 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{p}_\alpha = \lambda_\alpha^2 \mathbf{p}_\alpha, \tag{3.26}$$

записанных, например, в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$((\bar{U}^2)^i{}_j - \lambda_\alpha^2 \delta^i_j) \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha = 0, \qquad ((\bar{V}^2)^i{}_j - \lambda_\alpha^2 \delta^i_j) \widehat{Q}^j{}_\alpha = 0, \tag{3.26а}$$

где $\widehat{Q}^j{}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha$ — якобиевы матрицы собственных векторов:

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_j, \qquad \mathbf{p}_\alpha = \widehat{Q}^j{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_j. \tag{3.27}$$

При вычислении матриц $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha$ и $\widehat{Q}^j{}_\alpha$ рассматривают только независимые уравнения систем (3.26а), а в качестве дополнительных уравнений присоединяют условия нормировки (3.5):

$$|\mathbf{p}_\alpha| = 1, \qquad |\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha| = 1, \tag{3.28}$$

которые эквивалентны следующим квадратным уравнениям:

$$\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha \delta_{ij} = 1, \quad \widehat{Q}^i{}_\alpha \widehat{Q}^j{}_\alpha \delta_{ij} = 1. \tag{3.28a}$$

4) Составляем диадные произведения (3.6) и находим представления тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ в собственных базисах, записанных, например, для декартова базиса $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^j{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \quad \mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \widehat{Q}^i{}_\alpha \widehat{Q}^j{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j.$$

Примеры вычисления тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ приведены в упр. 1.3.2–1.3.4.

Замечание 2. Заметим, что решение квадратных уравнений (3.28а) допускает неединственность решения в смысле выбора знаков у компонент матриц $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha$ и $\widehat{Q}^i{}_\alpha$, которая устраняется после привлечения еще одного дополнительного условия — совпадения векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\alpha$ в предельном переходе при $t \to 0_+$:

$$t \to 0_+ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_\alpha(t) = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha(t), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Для матрицы $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha$ произвол в выборе знака сохраняется, однако если имеется поле собственных векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha(\mathbf{x}, t)$, то этот произвол можно оставить только для одной точки $\mathbf{x}_0$ в один момент времени, например, $t = 0$, а для остальных $\mathbf{x}$ и t знак у $\widehat{Q}^i{}_\alpha$ выбирать из условия непрерывности векторного поля $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ (при непрерывных движениях сплошной среды). Если же собственному пространству векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha(\mathbf{x}_0, 0)$ принадлежат векторы $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$, то оставшийся произвол устраняют за счет принятия условия: $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha(\mathbf{x}_0, 0) = \bar{\mathbf{e}}_\alpha$.

Неединственность решения системы (3.26а), (3.28а) может также возникнуть, если для некоторого момента времени t_1 в точке $\mathbf{x}$ собственные значения $\lambda_\alpha(t_1)$ окажутся трехкратными. В этом случае значения матриц $\widehat{Q}^i{}_\alpha(t_1)$ и $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha(t_1)$ также, как правило, выбирают предельным переходом:

$$\widehat{Q}^i{}_\alpha(t_1) = \lim_{t \to t_1} \widehat{Q}^i{}_\alpha(t), \quad \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha(t_1) = \lim_{t \to t_1} \overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Для случая двукратных λ_α эти формулы применяют только для соответствующих им компонент матриц $\widehat{Q}^i{}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\widehat{Q}}{}^i{}_\alpha$.

1.3.3. Представление тензоров деформации в собственных базисах.

Теорема 1.15. *В тензорных базисах $\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta$, тензоры Коши–Грина $\mathbf{C}$ и $\mathbf{J}$, Альманзи $\mathbf{A}$ и $\mathbf{\Lambda}$, меры деформации $\mathbf{G}$, $\mathbf{g}^{-1}$ и $\mathbf{G}^{-1}$, $\mathbf{g}$ имеют диагональный вид:*

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \mathbf{\Lambda} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - \lambda_\alpha^{-2})\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$
$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - \lambda_\alpha^{-2})\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{J} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha; \tag{3.29а}$$

и

$$\mathbf{G} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \mathbf{G}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{-2}\, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$
$$\mathbf{g}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{g} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{-2}\, \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha. \tag{3.29б}$$

▼ Подставляя формулы (3.6) в (3.22), получаем (3.29а). Формулы (3.29б) следуют из (3.29а) и (2.7), (2.8). ▲

Аналогично формулам (3.29), можно ввести новые тензоры деформации, определив их компоненты в базисах $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta$ или $\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta$ следующим образом:

$$\overset{\circ}{\mathbf{M}} = \sum_{\alpha=1}^{3} f(\lambda_\alpha)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta, \qquad \mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^{3} f(\lambda_\alpha)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \tag{3.30}$$

где $f(\lambda_\alpha)$ является функцией от λ_α. Если $f(1) = 0$, то получим тензоры деформации, а если $f(1) = 1$, то получим меры деформации.

Среди тензоров (3.30), наиболее известными являются *логарифмические тензоры и меры деформации*

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta, \qquad \widetilde{\mathbf{H}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta,$$
$$\overset{\circ}{\mathbf{H}}_1 = \overset{\circ}{\mathbf{H}} + \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H}_1 = \widetilde{\mathbf{H}} + \mathbf{E}, \tag{3.31}$$

называемые *правым* и *левым тензорами Генки*, а также *правой* и *левой мерами Генки* соответственно.

С помощью собственных векторов $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ можно построить смешанные диады:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{O} = (\sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}^\alpha) \cdot \mathbf{O} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{O}. \tag{3.32}$$

Здесь мы использовали свойства (3.23а) и (3.24), а также представление единичного тензора $\mathbf{E}$ в произвольном смешанном диадном базисе.

Таким образом, тензор поворота $\mathbf{O}$, сопровождающий деформацию, можно выразить в этом собственном базисе следующим образом:

$$\mathbf{O} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{p}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i. \tag{3.33}$$

Подставим (3.33) и (3.6) в (3.1) и преобразуем его с учетом (3.5). В результате получим представление градиента деформации в собственном тензорном базисе:

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_\beta \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha. \tag{3.34}$$

Для транспонированного $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ и обратного $\mathbf{F}^{-1}$ градиентов на основании (3.34) имеем

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha. \tag{3.35}$$

1.3.4. Геометрический смысл собственных значений. Векторы собственных базисов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\alpha$ связаны преобразованием (3.23а). Выберем в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ элементарные радиусы-векторы $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha$, ориентированные по векторам собственного базиса $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, тогда в $\mathcal{K}$ им соответствуют радиусы-векторы $d\mathbf{x}_\alpha$:

$$d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha |d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha|, \qquad d\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha. \tag{3.36}$$

Подставляя в (3.36) выражение (3.34), получим:

$$d\mathbf{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_\beta \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha |d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha| = \lambda_\alpha |d\mathbf{x}_\alpha| \mathbf{p}_\alpha, \tag{3.37}$$

т.е. элементарные радиусы-векторы $d\mathbf{x}_\alpha$ в $\mathcal{K}$ будут тоже ориентированы по соответствующим векторам собственного базиса $\mathbf{p}_\alpha$.

Обозначим ds и $d\overset{\circ}{s}_\alpha$ длины векторов $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha$ и $d\mathbf{x}_\alpha$ и найдем соотношения между ними:

$$\begin{aligned} ds_\alpha^2 = d\mathbf{x}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha = d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha = |d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha|^2 \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \\ = d\overset{\circ}{s}{}^2_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{G} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = d\overset{\circ}{s}{}^2_\alpha \lambda_\alpha^2. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Здесь использованы соотношения (3.29б) и (3.36).

Из (3.38) получаем следующую теорему.

Теорема 1.16. *Собственные значения λ_α представляют собой кратность удлинения материальных волокон, ориентированных по главным (собственным) направлениям:*

$$\lambda_\alpha = ds_\alpha / d\overset{\circ}{s}_\alpha. \tag{3.39}$$

1.3.5. Геометрическая картина преобразования малой окрестности точки сплошной среды. Если в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ выделить малую окрестность материальной точки $\mathcal{M}$ сплошной среды, то всякая точка $\mathcal{M}'$, связанная с $\mathcal{M}$ элементарным радиусом-вектором $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ (рис. 1.12), при переходе в $\mathcal{K}$ будет связана с той же точкой $\mathcal{M}$ с помощью радиуса-вектора $d\mathbf{x}$. Между этими радиусами-векторами имеем соотношение:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \tag{3.40}$$

на которое можно смотреть как на преобразование произвольного радиуса-вектора $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ в $d\mathbf{x}$.

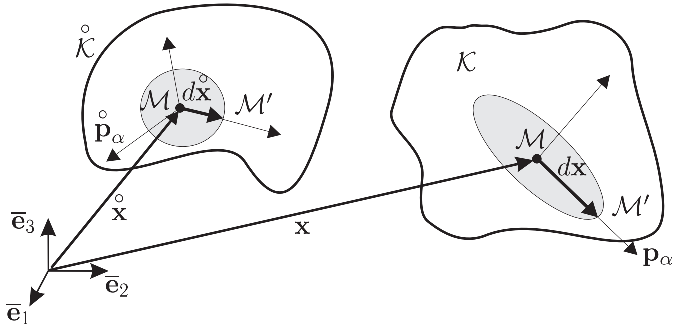

Рис. 1.12. Преобразование малой окрестности точки сплошной среды

Запишем соотношение (3.40) в декартовых координатах

$$dx^i = \bar{F}^i_m d\overset{\circ}{x}{}^m, \tag{3.41}$$

где $\bar{F}^i_m$ — компоненты градиента деформации в декартовом базисе (см. упр. 1.1.5):

$$\bar{F}^i_m = (\partial x^i / \partial \overset{\circ}{x}{}^m), \tag{3.42}$$

которые зависят только от координат $\overset{\circ}{x}{}^m$ точки $\mathcal{M}$, но не зависят от координат $d\overset{\circ}{x}{}^m$ ее ближайших соседних точек $\mathcal{M}'$. Поэтому преобразование (3.41) фактически является линейным преобразованием координат $d\overset{\circ}{x}{}^m$ в dx^i, т.е. аффинным преобразованием.

Из общих свойств аффинных преобразований следует, что прямые и плоскости, проведенные в малой окрестности в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, остаются прямыми и плоскостями в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$. Параллельные прямые и плоскости преобразуются в параллельные прямые и плоскости. Поэтому если малую окрестность в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ выбрать в виде параллелограмма, то в $\mathcal{K}$ эта окрестность останется параллелограммом (хотя углы между ребрами, длины ребер и ориентация плоскостей в пространстве естественно могут меняться).

Поскольку поверхность второго порядка в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (и вообще поверхность, заданная алгебраическим выражением произвольного n-го порядка) переходит в поверхность тоже второго порядка в $\mathcal{K}$ (или соответствующего n-го порядка), то малая окрестность в виде сферы в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ преобразуется в эллипсоид в актуальной конфигурации (рис. 1.12). Таким образом, преобразований типа «смятия» малой окрестности произойти не может.

Из формулы (2.34) следует, что отношение длин $ds_\alpha/d\overset{\circ}{s}_\alpha$ произвольного отрезка (элементарного радиуса-вектора $d\mathbf{x}$ в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$) не зависит от начальной длины $d\overset{\circ}{s}_\alpha$ этого отрезка (так как относительное удлинение δ_α не зависит от $d\overset{\circ}{s}_\alpha$).

Согласно полярному разложению (3.1), преобразование (3.40) из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ всегда можно представить суперпозицией двух преобразований:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{O}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}', \qquad d\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}' = \mathbf{U}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \tag{3.43}$$

осуществляемых с помощью тензора искажений $\mathbf{U}$ и тензора поворота $\mathbf{O}$, или

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V}\cdot d\mathbf{x}', \qquad d\mathbf{x}' = \mathbf{O}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}. \tag{3.44}$$

Тензор искажений $\mathbf{U}$, обладающий тремя собственными направлениями $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, изменяет малую окрестность точки $\mathcal{M}$, сжимая или растягивая ее вдоль этих трех направлений $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$. Тензор поворота $\mathbf{O}$ поворачивает деформированную вдоль $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ окрестность «жестким образом», переводя направление $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ в $\mathbf{p}_\alpha$. Если используем левый тензор искажений $\mathbf{V}$, то вначале осуществляется поворот осей $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ до их совпадения с $\mathbf{p}_\alpha$ (с точностью до параллельного переноса), а затем сжатие/растяжение малой окрестности вдоль направления $\mathbf{p}_\alpha$. Результат, очевидно, будет одинаковым.

Если точка $\mathcal{M}_\alpha$ связана с $\mathcal{M}$ радиусом-вектором $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha$, ориентированным по собственному направлению $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ (заметим, заранее до деформации неизвестному), то в $\mathcal{K}$ эта точка $\mathcal{M}_\alpha$ будет связана с $\mathcal{M}$ радиусом-вектором $d\mathbf{x}_\alpha$, ориентированным вдоль соответствующего собственного направления $\mathbf{p}_\alpha$.

Если малую окрестность точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ взять в виде сферы (см. рис. 1.12), то в $\mathcal{K}$ эта сфера перейдет в эллипсоид, главные оси которого направлены по собственным направлениям $\mathbf{p}_\alpha$.

Таким образом, преобразование малой окрестности каждой точки $\mathcal{M}$ сплошной среды при деформации всегда можно представить в виде растяжения/сжатия вдоль собственных направлений и поворота как жесткого целого, а также перемещения как жесткого целого.

Упражнения к 1.3

Упражнение 1.3.1. Используя формулу (3.21a), показать что имеют место следующие соотношения между $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{V}^m = \mathbf{O}\cdot\mathbf{U}^m\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{U}^m = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^m\cdot\mathbf{O}$$

для всех целых m (положительных и отрицательных).

Упражнение 1.3.2. Используя результаты упр. 1.1.1 и 1.2.1, показать что в задаче о растяжении бруса собственные значения λ_α имеют следующий вид:

$$\lambda_\alpha = k_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Тензоры искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ совпадают и имеют вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha,$$

а собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\alpha$ совпадают с $\mathbf{e}_\alpha$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Тензор поворота $\mathbf{O}$ для данной задачи является единичным: $\mathbf{O} = \mathbf{E}$.

Упражнение 1.3.3. Используя результаты упр. 1.1.2, 1.2.2 и замечание 2, показать что в задаче о простом сдвиге (см. пример 1.2 из п. 1.1.1) тензоры $\mathbf{U}^2$ и $\mathbf{V}^2$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{E} + a\mathbf{O}_3 + a^2\mathbf{e}_i^2 = (\bar{U}^2)^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j,$$

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{E} + a\mathbf{O}_3 + a^2\mathbf{e}_i^2 = (\bar{V}^2)^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j,$$

$$(\bar{U}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\bar{V}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а собственные значения λ_α таковы:

$$\lambda_\alpha^2 = 1 + b_\alpha |a|, \quad \alpha = 1, 2; \quad \lambda_3 = 1,$$

$$b_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{1 + a^2/4}\,, \qquad b_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{1 + a^2/4}\,,$$

собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\alpha$ имеют следующий вид ($a > 0$):

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + b_\alpha^2}}(\bar{\mathbf{e}}_1 + b_\alpha \bar{\mathbf{e}}_2), \quad \overset{\circ}{\mathbf{p}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2}}\,(b_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2), \quad \mathbf{p}_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + b_2^2}}\,(b_2\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2), \quad \mathbf{p}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

тензоры искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ имеют вид

$$\mathbf{U} = \bar{U}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = U_0 \bar{\mathbf{e}}_1^2 + U_1 \mathbf{O}_3 + U_2 \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$\mathbf{V} = \bar{V}^i_{\ j}\,\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = U_2\bar{\mathbf{e}}_1^2 + U_1\mathbf{O}_3 + U_0\bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$\bar{U}^i_{\ j} = \begin{pmatrix} U_0 & U_1 & 0 \\ U_1 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{V}^i_{\ j} = \begin{pmatrix} U_2 & U_1 & 0 \\ U_1 & U_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_\beta = \frac{b_1^\beta\sqrt{1+b_1a}}{1+b_1^2} + \frac{b_2^\beta\sqrt{1+b_2a}}{1+b_2^2}, \qquad \beta = 0,1,2,$$

а тензор поворота $\mathbf{O}$ таков:

$$\mathbf{O} = \bar{O}^i_{\ j}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \cos\varphi(\bar{\mathbf{e}}_1^2 + \bar{\mathbf{e}}_2^2) + \sin\varphi(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1),$$

$$\bar{O}^i_{\ j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\cos\varphi = \frac{b_1}{1+b_1^2} - \frac{b_2}{1+b_2^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{b_1^2}{1+b_1^2} - \frac{b_2^2}{1+b_2^2}.$$

Показать, что функции $b_1(a)$ и $b_2(a)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$b_1 + b_2 = a, \qquad b_1 b_2 = -1, \qquad b_1^2 + b_2^2 = 2 + a^2.$$

Показать, что при $a = 0$ в данной задаче лействительно выполняются соотношения

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = -1, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

$$\mathring{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2), \qquad \mathring{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_2).$$

Упражнение 1.3.4. Используя результаты упр. 1.2.3, показать что в задаче о вращении бруса с растяжением (см. пример 1.3 из п. 1.1.1) собственные значения λ_α имеют вид

$$\lambda_\alpha = k_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3,$$

а собственные векторы таковы:

$$\mathring{\mathbf{p}}_\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{O}_0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3.$$

Используя формулы из упр. 1.1.3 и данные из примера 1.3, показать, что тензоры $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{O}$, а также $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{J}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{O}_0 = O_0{}^i_{\ j}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}} = V_0\bar{\mathbf{e}}_1^2 + V_1\mathbf{O}_3 + V_2\bar{\mathbf{e}}_2^2 + k_3\bar{\mathbf{e}}_3^2 = V_0{}^i_{\ j}\,\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j,$$

$$V_0{}^i_{\ j} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & 0 \\ V_1 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi, \qquad V_1 = (k_1 - k_2)\cos\varphi\ \sin\varphi,$$

$$V_2 = k_1\sin^2\varphi + k_2\cos^2\varphi,$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_0^2 - \mathbf{E}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(k_\alpha^2 - 1)\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}_0^{-2}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - k_\alpha^{-2})\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-2}) = \frac{1}{2}(\delta^{ij} - g^{ij})\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j,$$

где метрические матрицы g_{ij} и g^{ij} определяют по формулам из упр. 1.1.3.

Обратим внимание на то, что тензоры $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ «не чувствуют» вращения бруса — они совпадают с соответствующими тензорами для задачи о чистом растяжении бруса. Покажите, что если поменять последовательность преобразований: сначала осуществить вращение, а затем растяжение бруса, то, наоборот, тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ не будут «чувствовать» вращения.

1.4. Скоростные характеристики движения сплошной среды

1.4.1. Вектор скорости. Вектор *скорости движения* материальной частицы $\mathcal{M}$ с лагранжевыми координатами X^i определяют как частную производную от радиуса-вектора $\mathbf{x}(X^i, t)$ по времени при фиксированных значениях X^i:

$$\mathbf{v}(X^i, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(X^i, t)\Big|_{X^i}. \tag{4.1}$$

Компоненты $\bar{v}^i$ вектора скорости в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ имеют вид

$$\mathbf{v} = \bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial x^i}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_i, \qquad \bar{v}^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}(X^j, t). \tag{4.2}$$

1.4.2. Полная производная тензора по времени. Всякое изменяющееся во времени векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ (а также скалярное или тензорное поля), описывающее какой-либо физический процесс в сплошной среде, с помощью закона движения (1.3) можно представить и в эйлеровом, и в лагранжевом описаниях:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(X^j, t), t). \tag{4.3}$$

Вычислим производную по времени от такой функции при фиксированных X^i (т.е. для фиксированной точки $\mathcal{M}$):

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\Big|_{X^i} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\Big|_{x^i} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Big|_{X^i}. \tag{4.4}$$

Определение 1.1. *Полной производной по времени от переменного векторного поля* $\mathbf{a}$ *(4.3) называют частную производную по* t *при фиксированных значениях координат* X^i*:*

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\Big|_{X^i}. \tag{4.5}$$

Используя формулы (4.2), (1.1.11) и (1.1.23), преобразуем второе слагаемое в правой части (4.4):

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t} = \bar{v}^j P^k_j \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}^j P^k_j \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}. \quad (4.6)$$

Тогда соотношение (4.4) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}, \quad (4.7)$$

где введено обозначение частной производной по времени, широко используемое в дальнейшем:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x^i, t)\Big|_{x^i}. \quad (4.8)$$

В формуле (4.7) вектор $\mathbf{a}$ рассматривается как функция $\mathbf{a}(x^j, t)$. Очевидно, что если $\mathbf{a}$ рассматривается как функция (X^j, t), то из определения (4.5) следует

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}(x^i, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{a}(X^j, t)\Big|_{X^i}. \quad (4.9)$$

Полную производную $d\mathbf{a}/dt$ называют также *материальной (субстанциональной или индивидуальной) производной* по времени, производную $\partial\mathbf{a}/\partial t$ в (4.7) — *частной (локальной) производной* по времени, а $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}$ — *конвективной производной*.

Материальная производная $d\mathbf{a}/dt$ характеризует изменение векторного поля $\mathbf{a}$ в фиксированной материальной точке $\mathcal{M}$, локальная производная — изменение значений $\mathbf{a}$ во времени в фиксированной точке $\mathbf{x}$ пространства, а из формулы (4.6) следует, что конвективная производная характеризует изменение поля за счет перемещения материальной частицы $\mathcal{M}$ из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{x} + \mathbf{v}dt$ пространства.

Если в качестве вектора $\mathbf{a}$ выбрать $\mathbf{v}$, то соотношение между вектором перемещений $\mathbf{u}$ и вектором скорости $\mathbf{v}$ будет иметь вид:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}. \quad (4.10)$$

Аналогично формуле (4.5), определяем *полную производную* по времени *от тензора* ${}^n\boldsymbol{\Omega}$ n-го ранга:

$${}^n\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{d}{dt}{}^n\boldsymbol{\Omega}(x^i, t) = \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}(X^i, t)\Big|_{X^i}. \quad (4.11)$$

Теорема 1.17. *Полную производную (4.11) от переменного тензорного поля* ${}^n\boldsymbol{\Omega}(x^i, t)$ *можно представить в виде суммы локальной и конвективной производных:*

$$\frac{d}{dt}\,{}^n\boldsymbol{\Omega} = \frac{\partial\, {}^n\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^n\boldsymbol{\Omega}. \quad (4.12)$$

▼ Доказательство теоремы осуществляется по аналогии с доказательством соотношения (4.7). Подробности оставим в качестве упр. 1.4.6. ▲

Рассмотрим теперь вопрос о компонентах тензора полной производной.

Теорема 1.18. *Компоненты тензора полной производной* ${}^n\dot{\mathbf{\Omega}}$ *связаны с соответствующими компонентами тензора* ${}^n\mathbf{\Omega}$ *в неподвижных базисах* $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, $\bar{\mathbf{e}}_i$ *и* $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ *и подвижном базисе* $\mathbf{r}_i$ *следующим образом:*

$$\frac{d}{dt}\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n} = \frac{\partial}{\partial t}\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(X^i,t)\Big|_{X^i}, \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n} = \frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(x^i,t) + \bar{v}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(x^i,t), \tag{4.14}$$

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n} = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(\widetilde{X}^i,t) + \widetilde{v}^k\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(\widetilde{X}^i,t), \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}\Omega^{i_1\ldots i_n} = \frac{\partial}{\partial t}\Omega^{i_1\ldots i_n}(X^i,t) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\Omega^{i_1\ldots k\ldots i_n}\nabla_k v^{i_\alpha})(X^i,t), \tag{4.16}$$

где

$$\begin{aligned}{}^n\dot{\mathbf{\Omega}} &= \frac{d}{dt}\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(x^i,t)\bar{\mathbf{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{\mathbf{e}}_{i_n} = \frac{d}{dt}\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(X^i,t)\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n} = \\ &= \frac{d}{dt}\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(\widetilde{X}^i,t)\widetilde{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_{i_n} = \frac{d}{dt}\Omega^{i_1\ldots i_n}(X^i,t)\mathbf{r}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{r}_{i_n}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

В формуле (4.16) компонента $\Omega^{i_1\ldots k\ldots i_n}$ на α-м месте вместо i_α содержит индекс k.

▼ Для доказательства теоремы представим тензор ${}^n\mathbf{\Omega}$ в различных базисах:

$$\begin{aligned}{}^n\mathbf{\Omega} &= \bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(x^i,t)\bar{\mathbf{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{\mathbf{e}}_{i_n} = \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(X^i,t)\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n} = \\ &= \widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}(\widetilde{X}^i,t)\widetilde{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_{i_n} = \Omega^{i_1\ldots i_n}(X^i,t)\mathbf{r}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{r}_{i_n},\end{aligned} \tag{4.18}$$

причем аргументы у компонент тензора ${}^n\mathbf{\Omega}$ выберем так, как указано в формуле (4.18).

Тогда, подставляя разложение (4.18) в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ в определение производной (4.11), очевидно, получаем выражение (4.13) в силу того, что $d\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i/dt = 0$.

Подставляя разложение (4.18) в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ в соотношение (4.12), получаем

$${}^n\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{\partial\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{\mathbf{e}}_{i_n} + \bar{v}^k\bar{\mathbf{e}}_k\cdot\frac{\partial}{\partial x^m}\bar{\Omega}^{i_1\ldots i_n}\bar{\mathbf{e}}^m\otimes\bar{\mathbf{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{\mathbf{e}}_{i_n}. \tag{4.18a}$$

Из этого соотношения, очевидно, следует формула (4.14).

Аналогично, подставляя разложение (4.18) в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ в соотношение (4.12) и используя свойство (1.61) набла-операторов $\mathbf{\nabla}$ и $\widetilde{\mathbf{\nabla}}$, а также то, что $\partial\widetilde{\mathbf{r}}_i/\partial t = 0$ (в случае неподвижного базиса $\widetilde{\mathbf{r}}_i$, см. п. 1.1.7), получаем

$${}^n\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{\partial\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}}{\partial t}\widetilde{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_{i_n} + \widetilde{v}^k\widetilde{\mathbf{r}}_k\cdot\widetilde{\nabla}_m\widetilde{\Omega}^{i_1\ldots i_n}\widetilde{\mathbf{r}}^m\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_{i_n}, \tag{4.19}$$

откуда действительно следует формула (4.15).

Наконец, подставляя разложение (4.18) в подвижном базисе $\mathbf{r}_i$ в определение полной производной (4.12), получаем

$$ {}^n\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{\partial \Omega^{i_1\ldots i_n}}{\partial t}\Big|_{X^i}\mathbf{r}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{r}_{i_n} + \sum_{\alpha=1}^{n}\Omega^{i_1\ldots i_\alpha\ldots i_n}\mathbf{r}_{i_1}\otimes\ldots\frac{\partial \mathbf{r}_{i_\alpha}}{\partial t}\Big|_{X^i}\ldots\otimes\mathbf{r}_{i_n}. \tag{4.20}$$

В силу определения (1.10) векторов локальных базисов и определения (4.1) вектора скорости, имеем

$$ \frac{\partial \mathbf{r}_{i_\alpha}}{\partial t}(X^j,t)\Big|_{X^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t\partial X^{i_\alpha}}\Big|_{X^j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^{i_\alpha}}\Big|_{X^j} = \nabla_{i_\alpha}v^k\mathbf{r}_k. \tag{4.21}$$

Подставляя (4.21) в (4.20) и собирая компоненты при одинаковых элементах полиадного базиса, получаем формулу (4.16). ▲

Заметим, что аргументы у разложений (4.18) и производных от компонент тензора (4.13)–(4.16) выбраны вполне определенным образом.

1.4.3. Дифференциал тензора.

Определение 1.2. *Дифференциалом переменного тензорного поля (дифференциалом тензора)* ${}^n\mathbf{\Omega}(x^i,t)$ *называют следующий объект:*

$$ d\,{}^n\mathbf{\Omega} = \frac{d\,{}^n\mathbf{\Omega}}{dt}dt. \tag{4.22}$$

Используя формулу (4.12) для полной производной тензора по времени, получаем, что дифференциал тензора можно представить в виде

$$ d\,{}^n\mathbf{\Omega}(x^i,t) = \left(\frac{\partial\,{}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^n\mathbf{\Omega}\right)dt. \tag{4.23}$$

Перепишем выражение (4.23) с учетом (4.10):

$$ d\,{}^n\mathbf{\Omega} = \frac{\partial\,{}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t}dt + d\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^n\mathbf{\Omega} \tag{4.24}$$

В случае *стационарных тензорных полей*, т.е. когда $\partial\,{}^n\mathbf{\Omega}/\partial t = 0$, дифференциал тензорного поля имеет следующий вид:

$$ \widehat{d}\,{}^n\mathbf{\Omega} = d\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^n\mathbf{\Omega}. \tag{4.25}$$

Для стационарных тензорных полей $\widehat{d}\,{}^n\mathbf{\Omega} = d\,{}^n\mathbf{\Omega}$, а в общем случае эти дифференциалы не совпадают.

Используя теорему 1.18, компоненты тензора $d\,{}^n\mathbf{\Omega}$ в неподвижном базисе $\mathring{\mathbf{r}}_i$ можно записать следующим образом:

$$ d\,{}^n\mathbf{\Omega} = d\mathring{\Omega}^{j_1\ldots j_n}\mathring{\mathbf{r}}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathring{\mathbf{r}}_{j_n}, \qquad d\mathring{\Omega}^{j_1\ldots j_n} = \frac{d\,\mathring{\Omega}^{j_1\ldots j_n}}{dt}dt. \tag{4.26}$$

Для *дифференциала вектора* $\mathbf{a}$ из (4.22) и (4.7) имеем следующее выражение:

$$ d\mathbf{a}(X^i,t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}dt = \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}\right)dt, \tag{4.27}$$

а из (4.25):

$$ d\widehat{\mathbf{a}} = (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})dt = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\cdot d\mathbf{x}. \tag{4.28}$$

В частности, если $\mathbf{a} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}$, то на основании формул (4.28) и (1.35a), имеем

$$d\widehat{\overset{\circ}{\mathbf{x}}} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}, \tag{4.29}$$

или

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\widehat{\overset{\circ}{\mathbf{x}}}. \tag{4.30}$$

Сравнивая формулы (4.30) и (1.34), находим, что элементарный радиус-вектор $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$, введенный в разд. 1.1 и связывающий две близкие материальные точки $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, в обозначениях (4.25) совпадает с вектором $d\widehat{\overset{\circ}{\mathbf{x}}}$.

1.4.4. Свойства производных по времени. Установим теперь важные свойства частных и полных производных по времени от векторных полей.

Теорема 1.19. *Для частной производной по времени от векторного произведения векторов базиса имеет место следующая формула:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta) = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \times \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}_\alpha \times \frac{\partial \mathbf{r}_\beta}{\partial t}. \tag{4.31}$$

▼ В самом деле, вычислим производную по времени от векторного произведения двух векторов локального базиса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta) = \frac{\partial}{\partial t}(Q^i{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_i \times Q^j{}_\beta \bar{\mathbf{e}}_j) = \frac{\partial}{\partial t}(Q^i{}_\alpha Q^j{}_\beta)\bar{\mathbf{e}}_i \times \bar{\mathbf{e}}_j =$$
$$= \frac{\partial Q^i{}_\alpha}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_i \times Q^j{}_\beta \bar{\mathbf{e}}_j + Q^i{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_i \times \frac{\partial Q^j{}_\beta}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_j.$$

Используя соотношение (1.10), действительно получаем (4.31). ▲

Теорема 1.19a. *Для произвольных непрерывно-дифференцируемых векторных полей* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \bar{a}^i(x^k, t)\bar{\mathbf{e}}_i$ *и* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \bar{b}^i(x^k, t)\bar{\mathbf{e}}_i$ *имеют место следующие формулы для частной производной по времени:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \tag{4.34}$$

▼ Доказательство аналогично проделанному выше для теоремы 5.19. ▲

Теорема 1.20. *Для полной производной по времени от векторного и скалярного произведений двух произвольных векторных полей* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ *и* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ *имеют место следующие формулы:*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \tag{4.35}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}. \tag{4.36}$$

▼ Для доказательства соотношения (4.35) воспользуемся свойством полной производной (4.7):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Первое слагаемое преобразуем по формуле (4.32), а для второго применим формулу $\boldsymbol{\nabla}\otimes(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})\times\mathbf{b} - (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ [12], тогда получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}\times\mathbf{b} - \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\times\mathbf{a} + \mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})\times\mathbf{b} - \mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{b})\times\mathbf{a}.$$

Комбинируя первое слагаемое с третьим, а второе с четвертым, и используя свойство (4.7) полной производной вектора, получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Формулу (4.36) доказываем аналогично. ▲

Теорема 1.21. *Полная производная по времени от $\sqrt{g}$ связана с дивергенцией вектора скорости $\mathbf{v}$ следующим образом:*

$$\frac{d}{dt}\sqrt{g} = \sqrt{g}\;\nabla_i v^i = \sqrt{g}\;\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}. \tag{4.37}$$

▼ Продифференцируем второе соотношение из (1.15) с учетом формулы (4.31):

$$\frac{d}{dt}\sqrt{g} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial X^1}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) + \\ + \mathbf{r}_1\cdot\Big(\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial X^2}\times\mathbf{r}_3\Big) + \mathbf{r}_1\cdot\Big(\mathbf{r}_2\times\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial X^3}\Big). \tag{4.38}$$

Так как $\dfrac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial X^i} = \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial X^i} = \nabla_i\mathbf{v} = \nabla_i v^j\mathbf{r}_j$, то

$$\frac{d}{dt}\sqrt{g} = \nabla_1\mathbf{v}\sqrt{g}\;\cdot\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}_1\cdot(\nabla_2\mathbf{v}\times\mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\nabla_3\mathbf{v}). \tag{4.39}$$

Здесь использованы соотношения из упр. 1.1.14.

Воспользуемся определением векторного произведения (0.2):

$$\mathbf{r}_1\cdot\nabla_2\mathbf{v}\times\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1\cdot\sqrt{g}\;\epsilon_{ijk}\nabla_2 v^i\delta_3^j\mathbf{r}^k = \sqrt{g}\;\epsilon_{i31}\nabla_2 v^i = \sqrt{g}\;\nabla_2 v^2. \tag{4.40}$$

Подставляя (4.40) в (4.39), действительно получаем формулу (4.37). ▲

1.4.5. Градиент скорости, тензор скоростей деформации и тензор вихря. Рассмотрим элементарные радиусы-векторы $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $d\mathbf{x}$, связывающие точку $\mathcal{M}$ с бесконечно близкой к ней точкой $\mathcal{M}'$ в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Вычислим вектор скорости точки $\mathcal{M}'$ относительно системы отсчета, связанной с $\mathcal{M}$. Для этого рассмотрим дифференциал вектора скорости $\widehat{d}\mathbf{v}$:

$$\widehat{d}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}d\mathbf{x} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial X^i\partial t}dX^i = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial X^i\partial t}\otimes\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \Big(\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial X^i}\Big)^{\mathrm{T}}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \Big(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}\Big)^{\mathrm{T}}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}. \tag{4.41}$$

Здесь мы использовали второе уравнение из (1.33), определение градиента вектора (1.24) и (4.1). Аналогично, используя первое уравнение из (1.33), $dX^i = \mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{x}$, получим еще одно представление для вектора $\widehat{d}\mathbf{v}$:

$$\widehat{d}\mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{x}. \tag{4.42}$$

Тензор второго ранга $(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}$ называют *градиентом скорости*, он связывает относительную скорость $\widehat{d}\mathbf{v}$ элементарного радиуса-вектора $d\mathbf{x}$ с самим этим вектором $d\mathbf{x}$:

$$\widehat{d}\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{L} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}. \tag{4.43}$$

Тензор $\mathbf{L}$, как и всякий тензор второго ранга, можно представить в виде суммы симметричного тензора $\mathbf{D}$ и кососимметричного $\mathbf{W}$(см. [12]):

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \tag{4.44}$$

Симметричный *тензор скоростей деформации* $\mathbf{D}$ определяют следующим образом:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}). \tag{4.45}$$

Этот тензор имеет 6 независимых компонент.

Кососимметричный *тензор вихря* $\mathbf{W}$ определяют так:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}). \tag{4.46}$$

Поскольку $\mathbf{W}$ — кососимметричен и имеет 3 независимые компоненты, то ему можно поставить в соответствие связанный с ним *вектор вихря* $\boldsymbol{\omega}$ [12]:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{W} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\epsilon}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}, \tag{4.47}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ — *тензор Леви–Чивиты*, являющийся тензором третьего ранга [12]. Этот тензор определяют следующим образом:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j \otimes \mathbf{r}_k. \tag{4.48}$$

Подставляя (4.44)–(4.47) в (4.42), приходим к следующей теореме.

Теорема 1.22 (Коши–Гельмгольца). *Скорость $\mathbf{v}(\mathcal{M}')$ движения прозвольной точки $\mathcal{M}'$ в малой окрестности материальной точки $\mathcal{M}$ состоит из скорости $\mathbf{v}(\mathcal{M})$ поступательного (переносного) движения точки $\mathcal{M}$, вращательного движения $\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}$ как жесткого целого и деформационной скорости $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}$, т.е.*

$$\widehat{d}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}, \tag{4.49}$$

или

$$\mathbf{v}(\mathcal{M}') = \mathbf{v}(\mathcal{M}) + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} + o\,(|d\mathbf{x}|). \tag{4.49a}$$

Пример 1.4. Вычислим тензор $\mathbf{L}$ в задаче о растяжении бруса (см. пример 1.1), подставляя (4.2) в (4.43):

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial X^i} \otimes \mathbf{v} = \bar{\mathbf{e}}^i \otimes \frac{\partial}{\partial X^i} \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{k}_\alpha X^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{k}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha = \mathbf{L}.$$

Поскольку градиент скорости $\mathbf{L}$ в данном случае оказывается симметричным тензором, то из (4.45) и (4.46) следует, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}, \qquad \mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

Очевидно, что в данном случае $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

Пример 1.5. Вычислим тензор $\mathbf{L}$ в задаче о простом сдвиге (см. пример 1.2), подставляя в (4.43) выражения (4.2):

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{e}}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^i} = \frac{\partial \bar{v}^j}{\partial X^i} \bar{\mathbf{e}}^i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial X^2} \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 = \dot{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1.$$

Используя формулы (4.45) и (4.46), находим

$$\mathbf{D} = (\dot{a}/2)(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1),$$
$$\mathbf{W} = (\dot{a}/2)(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1) = (\dot{a}/2)(\delta^i_1 \delta^j_2 - \delta^i_2 \delta^j_1) \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j.$$

Используя формулу (4.47), вычисляем вектор вихря:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\dot{a}}{4} (\delta^i_1 \delta^j_2 - \delta^i_2 \delta^j_1) \epsilon_{jik} \bar{\mathbf{e}}^k = \frac{\dot{a}}{4} (\epsilon_{21k} - \epsilon_{12k}) \bar{\mathbf{e}}^k = -\frac{\dot{a}}{2} \bar{\mathbf{e}}^3,$$

который ортогонален плоскости сдвига.

1.4.6. Собственные значения тензора скоростей деформации. Тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$, как всякий симметричный тензор, имеет три собственных вещественнозначных ортонормированных вектора и три действительных положительных собственных значения [12], обозначим их как $\mathbf{q}_\alpha$ (эти векторы, вообще говоря, не совпадают с $\mathbf{p}_\alpha$) и D_α. Тогда $\mathbf{D}$ можно представить в собственном диадном базисе в виде

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^{3} D_\alpha \mathbf{q}_\alpha \otimes \mathbf{q}_\alpha, \qquad \mathbf{q}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{4.50}$$

Выберем в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ элементарный радиус-вектор $d\mathbf{x}_\alpha$, соединяющий точки $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, таким образом, чтобы он был ориентирован по собственному направлению $\mathbf{q}_\alpha$ тензора $\mathbf{D}$, тогда, подобно (3.36), можно записать:

$$d\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha |d\mathbf{x}_\alpha|, \qquad |d\mathbf{x}_\alpha| = (d\mathbf{x}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha)^{1/2}. \tag{4.51}$$

Применим для этого элементарного радиуса-вектора теорему Коши–Гельмгольца (4.49):

$$\widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}_\alpha. \tag{4.52}$$

Умножим левую и правую части скалярно на $d\mathbf{x}_\alpha$ и учтем свойство смешанной производной $d\mathbf{x}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}_\alpha) = 0$, тогда получим

$$d\mathbf{x}_\alpha \cdot \widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = d\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}_\alpha. \tag{4.53}$$

Подставляя вместо $\mathbf{D}$ его представление (4.50), а вместо $d\mathbf{x}_\alpha$ — выражение (4.51), находим

$$d\mathbf{x}_\alpha \cdot \widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = |d\mathbf{x}_\alpha|^2 \sum_{\beta=1}^{3} D_\beta \mathbf{q}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\beta \otimes \mathbf{q}_\beta \cdot \mathbf{q}_\alpha = D_\alpha |\mathbf{q}_\alpha|^2. \tag{4.54}$$

Здесь мы использовали свойство (4.50) ортонормированности векторов $\mathbf{q}_\alpha$.

Преобразуем скалярное произведение слева следующим образом:

$$d\mathbf{x}_\alpha \cdot \widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = d\mathbf{x}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{x}_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{x}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha) = |d\mathbf{x}_\alpha| \frac{\partial}{\partial t}|d\mathbf{x}_\alpha|. \tag{4.55}$$

Сравнивая (4.54) и (4.55), приходим к следующей теореме.

Теорема 1.23. *Собственные значения D_α тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ — это скорости относительных удлинений элементарных материальных волокон, ориентированных вдоль собственных направлений $\mathbf{q}_\alpha$:*

$$D_\alpha = \frac{1}{|d\mathbf{x}_\alpha|}\frac{\partial}{\partial t}|d\mathbf{x}_\alpha|. \tag{4.56}$$

1.4.7. Представление тензора вихря в собственном базисе тензора скоростей деформации. Преобразуем правую часть (4.52) следующим образом:

$$\widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}_\alpha = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_\alpha + D_\alpha \mathbf{q}_\alpha)|d\mathbf{x}_\alpha|, \tag{4.57}$$

а левую часть (4.52) преобразуем с учетом (4.56):

$$\widehat{d}\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t}(|d\mathbf{x}_\alpha|\mathbf{q}_\alpha) = \frac{\partial |d\mathbf{x}_\alpha|}{\partial t}\mathbf{q}_\alpha + |d\mathbf{x}_\alpha| \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial t} = |d\mathbf{x}_\alpha| \left(D_\alpha \mathbf{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial t} \right). \tag{4.58}$$

Сравнивая (4.57) и (4.58), получаем следующую теорему.

Теорема 1.24. *Тензор вихря $\mathbf{W}$ (или вектор $\boldsymbol{\omega}$) связывает скорость изменения собственных направлений $\mathbf{q}_\alpha$ и сами векторы $\mathbf{q}_\alpha$:*

$$\dot{\mathbf{q}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{W} \cdot \mathbf{q}_\alpha. \tag{4.59}$$

На основании (4.59) можно представить тензор $\mathbf{W}$ в собственном базисе $\mathbf{q}_\alpha$ тензора скоростей деформации следующим образом:

$$\mathbf{W} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\mathbf{q}}_\alpha \otimes \mathbf{q}_\alpha = \dot{\mathbf{q}}_i \otimes \mathbf{q}^i. \tag{4.60}$$

1.4.8. Геометрическая картина преобразований малой окрестности точки сплошной среды при бесконечно малых преобразованиях. Если в конфигурации $\mathcal{K}$ в момент времени t выбрать элементарный радиус-вектор $d\mathbf{x}$, соединяющий две близкие материальные точки $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, то за бесконечно малое время dt он преобразуется в радиус-вектор $d\mathbf{x}'$ в конфигурации $\mathcal{K}(t + dt)$ (рис. 1.13):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t), \qquad d\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t + dt) - \mathbf{x}(t + dt), \tag{4.61}$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}'(t)$ — радиусы-векторы точек $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ в конфигурации $\mathcal{K}(t)$, а $\mathbf{x}(t + dt)$ и $\mathbf{x}'(t + dt)$ — в конфигурации $\mathcal{K}(t + dt)$. Перемещение точек $\mathcal{M}$

и $\mathcal{M}'$ за бесконечно малое время определяется вектором скорости $\mathbf{v}(\mathcal{M})$ и $\mathbf{v}(\mathcal{M}')$:

$$\mathbf{x}(t+dt)-\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}(\mathcal{M})dt, \qquad \mathbf{x}'(t+dt)-\mathbf{x}'(t)=\mathbf{v}(\mathcal{M}')dt. \tag{4.62}$$

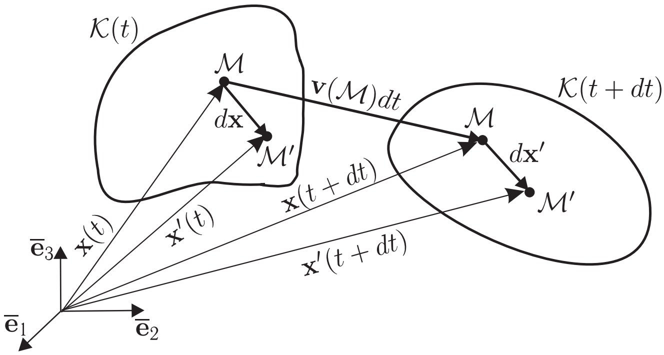

Рис. 1.13. Преобразование элементарного радиуса-вектора при бесконечно малых преобразованиях

На основании простых геометрических соотношений (см. рис. 1.13) из (4.61) и (4.62) получим:

$$\mathbf{v}(\mathcal{M}')dt-\mathbf{v}(\mathcal{M})dt=d\mathbf{x}'-d\mathbf{x}. \tag{4.63}$$

Подставляя (4.63) в соотношение (4.49а) теоремы Коши–Гельмгольца, получим связь элементарных радиусов-векторов $d\mathbf{x}'$ и $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x}'=d\mathbf{x}+dt\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{x}+dt\mathbf{D}\cdot d\mathbf{x}+dt\;o(|d\mathbf{x}|). \tag{4.64}$$

На соотношение (4.64) можно смотреть как на преобразование координат $dx^i \longrightarrow dx'^i$ в малой окрестности точки сплошной среды. Так как $dt\boldsymbol{\omega}$ и $dt\mathbf{D}$ не зависят от $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}'$, то это преобразование будет линейным, т.е. аффинным. Представим (4.64) с точностью до членов $o(|d\mathbf{x}|)$ в виде суперпозиции двух преобразований:

$$d\mathbf{x}''=\mathbf{A}_D\cdot d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}_D=\mathbf{E}+dt\mathbf{D}, \tag{4.65}$$

$$d\mathbf{x}'=\mathbf{Q}_\omega\cdot d\mathbf{x}'', \qquad \mathbf{Q}_\omega=\mathbf{E}+dt\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}, \tag{4.66}$$

здесь вместо $\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{x}$ записано $\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{x}''$ на том основании, что поправка, вносимая в $d\mathbf{x}'$, при такой замене имеет более высокий порядок малости $\sim (dt)^2$, и ею можно пренебречь.

Тензор $\mathbf{A}_D$ является очевидно симметричным и имеет три собственных направления, совпадающих с собственными направлениями $\mathbf{q}_\alpha$ тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$.

Поэтому так же, как и тензор $\mathbf{U}$, тензор $\mathbf{A}_D$ преобразует малую окрестность точки $\mathcal{M}$, растягивая или сжимая ее вдоль главных направлений $\mathbf{q}_\alpha$. Материальные отрезки $|d\mathbf{x}''_\alpha|$, лежащие на собственных направлениях $\mathbf{q}_\alpha$, не меняют своих направлений при преобразованиях (4.65), а изменяется только их длина:

$$d\mathbf{x}_\alpha = |d\mathbf{x}_\alpha|\mathbf{q}_\alpha, \qquad d\mathbf{x}''_\alpha = (1 + D_\alpha dt|d\mathbf{x}_\alpha|)\mathbf{q}_\alpha = (1 + D_\alpha dt)d\mathbf{x}_\alpha.$$

Тензор $\mathbf{Q}_\omega$ (4.66) является ортогональным с точностью до малых величин второго порядка малости $\sim (dt)^2$, так как

$$\mathbf{Q}_\omega \cdot \mathbf{Q}_\omega^{\mathrm{T}} = (\mathbf{E} + dt\mathbf{W}) \cdot (\mathbf{E} + dt\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{E} - (dt)^2\mathbf{W}^2, \tag{4.67}$$

здесь учтена кососимметрия тензора вихря $\mathbf{W}$.

Следовательно, преобразование (4.66), определяемое тензором $\mathbf{Q}_\omega$, за бесконечно малое время dt является преобразованием поворота окрестности точки $\mathcal{M}$ как жесткого целого.

Вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$, образующий тензор $\mathbf{Q}_\omega$, можно рассматривать как мгновенную угловую скорость вращения малой окрестности как жесткого целого, или, что тоже самое, мгновенную угловую скорость вращения собственного триэдра $\mathbf{q}_\alpha$ тензора скоростей дефомаций относительно неподвижного базиса $\bar{\mathbf{e}}_i$. Подробнее этот факт покажем далее в п. 1.5.7.

Объединяя свойства преобразований (4.65) и (4.66), можно сделать следующий вывод.

Теорема 1.25. *Преобразование малой окрестности точки сплошной среды при бесконечно малых преобразованиях сводится к растяжению-сжатию окрестности вдоль собственных направлений* $\mathbf{q}_\alpha$ *и к повороту осей* $\mathbf{q}_\alpha$ *как жесткого целого вокруг оси с направляющим вектором* $\boldsymbol{\omega}$.

Таким образом, имеем определенную аналогию между собственными направлениями $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ тензора $\mathbf{U}$ и направлениями $\mathbf{q}_\alpha$ тензора $\mathbf{D}$: элементарные материальные волокна, ориентированные по $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и по $\mathbf{q}_\alpha$ не изменяют взаимной ортогональности и испытывают только растяжение-сжатие. Однако оси $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ не меняют взаимной ортогональности при любых конечных преобразованиях из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$, а $\mathbf{q}_\alpha$ — только в случае бесконечно малых преобразований из $\mathcal{K}(t)$ в $\mathcal{K}(t + dt)$.

1.4.9. Кинематическое истолкование вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$. Ортогональный тензор $\mathbf{Q}_\omega$ бесконечно малого поворота из $\mathcal{K}(t)$ в $\mathcal{K}(t + dt)$ можно, как всякий ортогональнй тензор, представить в следующем виде [12]:

$$\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{E}\cos(d\varphi) + (1 - \cos(d\varphi))\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{e} \times \mathbf{E}\sin(d\varphi), \tag{4.68}$$

где $d\varphi$ — малый угол поворота триэдра $\mathbf{q}_\alpha$ вокруг оси поворота с направляющим вектором $\mathbf{e}$. В силу малости $d\varphi$, имеем

$$\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{E} - \mathbf{e} \times \mathbf{E}d\varphi. \tag{4.69}$$

Сравнивая (4.69) и (4.66), получаем, что

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}, \qquad |\boldsymbol{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{4.70}$$

т.е. вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ действительно направлен по мгновенной оси поворота $\mathbf{e}$, а длина $|\boldsymbol{\omega}|$ численно равна мгновенной скорости изменения угла поворота (т.е. мгновенной угловой скорости вращения) триэдра $\mathbf{q}_\alpha$ тензора скоростей деформации.

Рассмотрим теперь вопрос: относительно какой системы описывает скорость вращения вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$.

Для этого введем еще один ортогональный тензор поворота:

$$\mathbf{O}_W = \mathbf{q}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{4.71}$$

который преобразует «жестким» образом декартов триэдр $\bar{\mathbf{e}}_i$ в ортонормированный триэдр $\mathbf{q}_i$:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{O}_W \cdot \bar{\mathbf{e}}_i. \tag{4.72}$$

Тензор $\mathbf{O}_W$ является функцией времени t, так как $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i(t)$.

Тогда тензор вихря $\mathbf{W}$ на основании (4.60) и (4.72) можно представить в виде

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}}_i \otimes \mathbf{q}_i = \dot{\mathbf{O}}_W \cdot \mathbf{O}_W^{\mathrm{T}}. \tag{4.73}$$

С помощью (4.73) ортогональный тензор $\mathbf{Q}_\omega$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{E} + dt\mathbf{W} = \mathbf{E} + dt\dot{\mathbf{O}}_W \cdot \mathbf{O}_W^{\mathrm{T}}. \tag{4.74}$$

Таким образом, два ортогональных тензора $\mathbf{O}_W$ и $\mathbf{Q}_\omega$ связывают в каждый момент времени t локальные окрестности точки $\mathcal{M}$ в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и в актуальной конфигурации $\mathcal{K}(t+dt)$. Если взять в $\mathcal{K}$ элементарный радиус-вектор $d\mathbf{x}''$, то в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ ему соответствовал бы радиус-вектор $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}''$, полученный с помощью тензора поворота $\mathbf{O}_W$, а в $\mathcal{K}(t+dt)$ — радиус-вектор $d\mathbf{x}'$:

$$d\mathbf{x}'' = \mathbf{O}_W \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}'', \qquad d\mathbf{x}' = \mathbf{Q}_\omega \cdot d\mathbf{x}''.$$

Оба эти преобразования: конечный поворот за время t, описываемый тензором $\mathbf{O}_W$, и мгновенное вращение локальной окрестности за время dt, описываемое тензором бесконечно малого поворота $\mathbf{Q}_\omega$, — видит неподвижный наблюдатель, связанный с декартовым триэдром $\bar{\mathbf{e}}_i$.

Таким образом, вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ — это вектор мгновенной угловой скорости вращения триэдра $\mathbf{q}_\alpha$ относительно триэдра $\bar{\mathbf{e}}_i$.

Сравнивая (4.66) и (4.74) (или (4.73) и (4.47)), получаем, что

$$\dot{\mathbf{O}}_W \cdot \mathbf{O}_W^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \tag{4.75}$$

1.4.10. Тензоры угловой скорости вращения (спины). В предыдущем разделе был введен тензор $\dot{\mathbf{O}}_W \cdot \mathbf{O}_W^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{O}_W$ — ортогональный тензор поворота. Такой тензор $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ может быть образован для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$, зависящего от времени t.

Тензор $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ очевидно является кососимметричным, так как

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{\bullet} = (\mathbf{E})^{\bullet} = 0, \tag{4.76}$$

т.е.

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = -\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\Omega}. \tag{4.77}$$

Этот тензор характеризует угловую скорость вращения некоторого ортонормированного триэдра $\mathbf{h}_i$, образуемого с помощью $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{e}}_i, \tag{4.78}$$

относительно декартова триэдра $\bar{\mathbf{e}}_i$.

В самом деле, на основе тензора $\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ можно образовать тензор (4.74):

$$\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{E} + dt\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{4.79}$$

являющийся на основании (4.67) ортогональным тензором бесконечно малого поворота, и его можно представить в виде (4.68) или (4.69):

$$\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{E} - d\varphi\mathbf{e}\times\mathbf{E}, \tag{4.80}$$

где $d\varphi$ — бесконечно малый угол поворота триэдра $\mathbf{h}_i$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$. Сравнивая (4.79) и (4.80), получаем выражение

$$\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = -\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}\times\mathbf{E}, \tag{4.81}$$

из которого становится ясным смысл слов «тензор $\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ характеризует мгновенную угловую скорость $d\varphi/dt$ вращения триэдра $\mathbf{h}_i$ вокруг оси $\mathbf{e}$».

Тензор $\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ называется *тензором угловой скорости вращения* или *спином*.

Выражая тензор $\mathbf{Q}$ из (4.78) через базисы $\mathbf{h}_i$ и $\bar{\mathbf{e}}_i$ (в силу ортонормированности $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{h}^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{h}^i\otimes\bar{\mathbf{e}}_i, \tag{4.82}$$

получим еще одно представление для спина:

$$\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{h}}_i\otimes\mathbf{h}^i. \tag{4.83}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.26. *Спин связывает векторы скорости $\dot{\mathbf{h}}_i$ и векторы $\mathbf{h}_i$, определяемые формулой (4.78):*

$$\dot{\mathbf{h}}_i = (\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{h}_i. \tag{4.84}$$

Поскольку тензор спина $\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ — кососимметричен, то можно ввести сопутствующий ему вектор вихря $\boldsymbol{\omega}_h$:

$$\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega}_h\times\mathbf{E}; \tag{4.85}$$

из формул (4.81) и (4.85) получаем, что $\boldsymbol{\omega}_h = -(d\varphi/dt)\mathbf{e}$, тогда формула (4.84) принимает вид

$$\dot{\mathbf{h}}_i = \boldsymbol{\omega}_h\times\mathbf{h}_i. \tag{4.86}$$

Раскладывая вектор $\boldsymbol{\omega}_h$ по ортонормированному базису $\mathbf{h}_i$: $\boldsymbol{\omega}_h = {\omega^j}_h\mathbf{h}_j$, получаем еще одно представление формулы (4.84):

$$\dot{\mathbf{h}}_i = {\omega^j}_h\mathbf{h}_j\times\mathbf{h}_i = \epsilon_{jik}{\omega^j}_h\mathbf{h}^k. \tag{4.87}$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$\dot{\mathbf{h}}_\alpha = \omega_h^\beta \mathbf{h}_\gamma, \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \tag{4.88}$$

Выбирая в качестве $\mathbf{Q}$ (или $\mathbf{h}_i$) различные ортогональные тензоры (или ортонормированные базисы), получаем различные спины.

1) Если в качестве $\mathbf{h}_i$ взять собственные векторы тензора искажений $\mathbf{U}$, т.е. $\mathbf{h}_i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, то на основании (4.83) соответствующий спин $\boldsymbol{\Omega}_U$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\Omega}_U = \dot{\mathbf{O}}_U \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_i^{\bullet} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i, \qquad \mathbf{O}_U = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{4.89}$$

а формулы (4.84) записываются следующим образом:

$$\dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}_i = \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i. \tag{4.90}$$

2) Если $\mathbf{h}_i = \mathbf{p}_i$, то соответствующий спин $\boldsymbol{\Omega}_V$ и тензор поворота $\mathbf{O}_V$ имеют вид:

$$\boldsymbol{\Omega}_V = \dot{\mathbf{O}}_V \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{p}}_i \otimes \mathbf{p}^i, \qquad \mathbf{O}_V = \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{4.91}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{p}_i. \tag{4.92}$$

3) Если $\mathbf{h}_i = \mathbf{q}_i$, то соответствующий спин $\boldsymbol{\Omega}_W$ совпадает с тензором вихря $\mathbf{W}$ (см. (4.73)):

$$\boldsymbol{\Omega}_W = \dot{\mathbf{O}}_W \cdot \mathbf{O}_W^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{q}}_i \otimes \mathbf{q}_i = \mathbf{W}, \tag{4.93}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\Omega}_W \cdot \mathbf{q}_i. \tag{4.94}$$

4) Если в качестве $\mathbf{Q}$ выбрать тензор поворота $\mathbf{O}$, сопровождающий деформацию, то, как было показано в (3.23а), этот тензор связывает два подвижных базиса $\mathbf{p}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i. \tag{4.95}$$

Тензор $\mathbf{O}$ можно выразить через $\mathbf{O}_V$ и $\mathbf{O}_U$:

$$\mathbf{O} = \mathbf{p}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j = \mathbf{O}_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}}. \tag{4.96}$$

Соответствующий спин $\boldsymbol{\Omega}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} &= (\dot{\mathbf{O}}_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}} + \mathbf{O}_V \cdot \dot{\mathbf{O}}_U^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{O}_U \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} = \\ &= \dot{\mathbf{O}}_V \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} + \mathbf{O}_V \cdot \dot{\mathbf{O}}_U^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_U \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}_V - \mathbf{O}_V \cdot \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{4.97}$$

В отличие от случаев 1)–3), тензор спина $\boldsymbol{\Omega}$ характеризует угловую скорость вращения триэдра $\mathbf{p}_i$ относительно подвижного триэдра $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, а не относительно триэдра $\bar{\mathbf{e}}_i$, являющегося неподвижным.

Поэтому для случаев 1)–3) спины характеризуют абсолютную угловую скорость, а для 4) — относительную.

1.4.11. Соотношения между скоростями тензоров деформации и градиентами скорости. В МСС важную роль играют соотношения между скоростями тензоров (а также мер) деформации и градиентами скорости $\mathbf{L} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}$ и

$$\overset{\circ}{\mathbf{L}} = (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}. \tag{4.98}$$

Установим эти соотношения.

Теорема 1.27. *Скорости изменения градиента* $\dot{\mathbf{F}}$ *и обратного градиента* $(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet}$ *связаны с* $\mathbf{L}$ *и* $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$ *следующим образом:*

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{F}, \qquad \dot{\mathbf{F}} = \overset{\circ}{\mathbf{L}},$$
$$(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} = -\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{L}, \qquad (\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} = -\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}. \tag{4.99}$$

▼ Дифференцируя соотношения (1.35а) по t и учитывая определение (4.1) вектора скорости, действительно получаем

$$\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}, \qquad \dot{\mathbf{F}} = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}. \tag{4.99а}$$

Учитывая определения (4.43) и (4.98) тензоров $\mathbf{L}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$, из (4.99а) действительно получаем (4.99).

Дифференцируя тождество $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} = \dot{\mathbf{E}} = 0$, находим, что $\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}\cdot(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet}$, откуда получаем:

$$(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} = -\mathbf{F}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}. \tag{4.100}$$

Подставляя первые два выражения (4.99) в (4.100), получаем

$$(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} = -\mathbf{F}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}}, \qquad (\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{\bullet} = -(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}, \tag{4.101}$$

т.е. третье и четвертое соотношения (4.99) тоже имеют место. ▲

Используя формулы (4.45), (4.99а) и (4.101), легко находим, что скорость градиента деформации связана с тензором скоростей деформации $\mathbf{D}$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}), \qquad \mathbf{D} = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{F}}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}). \tag{4.102}$$

Здесь и далее будем использовать обозначение $\dot{\mathbf{F}}^{-1} \equiv (\mathbf{F}^{-1})^{\bullet}$.

Теорема 1.28. *Скорости тензоров деформации* $\dot{\mathbf{C}}$, $\dot{\mathbf{A}}$, $\dot{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\dot{\mathbf{J}}$ *и мер деформации* $\dot{\mathbf{G}}$, $\dot{\mathbf{g}}$, $(\mathbf{G}^{-1})^{\bullet}$ *и* $(\mathbf{g}^{-1})^{\bullet}$ *связаны с градиентами скоростей* $\mathbf{L}$ *и* $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$ *с помощью соотношений*

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}, & \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{L},\\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}, & \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{D} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{J}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}},\end{cases} \tag{4.103}$$

и

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}, & \dot{\mathbf{g}} = -\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{L},\\ (\mathbf{G}^{-1})^{\bullet} = -2\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}, & (\mathbf{g}^{-1})^{\bullet} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}},\end{cases} \tag{4.104}$$

а также

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{C}} = (1/2)(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}} + \overset{\circ}{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}), \qquad \dot{\mathbf{J}} = (1/2)(\overset{\circ}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}),\\ \dot{\mathbf{A}} = (1/2)((\mathbf{E}-2\mathbf{A})\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathbf{E}-2\mathbf{A})),\\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} = (1/2)(\mathbf{F}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}\cdot(\mathbf{E}-2\boldsymbol{\Lambda}) + (\mathbf{E}-2\boldsymbol{\Lambda})\cdot\overset{\circ}{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}),\end{cases} \tag{4.105}$$

и

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}} + \overset{\circ}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}, \qquad \dot{\mathbf{g}} = -(\mathbf{g} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{g}), \\ (\mathbf{G}^{-1})^{\bullet} = -(\mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}), \\ (\mathbf{g}^{-1})^{\bullet} = \overset{\circ}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{L}}. \end{cases} \tag{4.106}$$

▼ Для доказательства формул (4.103) продифференцируем по t соотношения (2.5) и применим формулы (4.99):

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = \\ = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \tag{4.107}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L}) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{E} - 2\mathbf{A}) + (\mathbf{E} - 2\mathbf{A}) \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{D} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}, \tag{4.108}$$

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} + \\ + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}, \tag{4.109}$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot (\mathbf{E} + 2\mathbf{J}) + (\mathbf{E} + 2\mathbf{J}) \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}. \tag{4.110}$$

Формулы (4.104) очевидно следуют из (4.103), если воспользоваться соотношениями (2.7) и (2.8) между тензорами и мерами деформации.

Соотношения (4.105) легко следуют из (4.107)–(4.110), если от $\mathbf{L}$ перейти к $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \overset{\circ}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{4.111}$$

Используя соотношения (2.7), (2.8) между тензорами и мерами деформации, из (4.105) действительно получаем формулы (4.106). ▲

Несколько более сложными являются соотношения между тензорами $\dot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{V}}$ и градиентами скоростей $\mathbf{L}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$, для их вывода необходимо воспользоваться представлениями $\mathbf{L}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$ через векторы собственных базисов.

Теорема 1.29. *Имеют место следующие представления градиентов скоростей:*

$$\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_{\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\alpha} + \mathbf{\Omega}_U \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega}_V, \tag{4.112}$$

$$\mathbf{L} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{\dot{\lambda}_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}} \overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\alpha} \right) \mathbf{p}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta} + \mathbf{\Omega}_V, \tag{4.113}$$

где $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta}$ — *компоненты тензора* $\mathbf{\Omega}_U$ *в собственном базисе* $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$:

$$\mathbf{\Omega}_U = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_i^{\bullet} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta, \quad \overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_\alpha^{\bullet} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta. \tag{4.114}$$

▼ Для доказательства (4.112) следует рассмотреть первую формулу в (4.99а) и подставить в нее представление (3.35) для $\mathbf{F}$ в собственном базисе:

$$\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} (\dot{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \lambda_\alpha (\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_\alpha^{\bullet} \otimes \mathbf{p}_\alpha + \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{p}}_\alpha)). \tag{4.115}$$

Используя теперь формулы (4.90) и (4.92), из (4.115) действительно получаем (4.112).

Для доказательства (4.113) воспользуемся уже доказанным соотношением (4.112) и формулой (4.111), предварительно представив $\mathbf{F}^{-1}$ в виде (3.35):

$$\mathbf{L} = \overset{\circ}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = (\sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \lambda_\alpha (\mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_\alpha^{\bullet} + \dot{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha)) \cdot \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_\beta^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\beta} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} (\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_\alpha^{\bullet} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta) \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \right) + \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha. \tag{4.116}$$

Здесь мы учли свойство ортонормированности векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$. Используя теперь формулы (4.90) и (4.92), из (4.116) действительно получаем (4.113). ▲

Из формулы (4.113) следует, что для тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ и тензора вихря имеют место следующие разложения по собственному базису $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} \right) \overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\alpha} \right) \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \tag{4.117}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} + \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} \right) \overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta + \mathbf{\Omega}_V. \tag{4.118}$$

Здесь мы учли кососимметрию тензоров $\mathbf{\Omega}_U$ и $\mathbf{\Omega}_V$.

Если обозначить $D_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора $\mathbf{D}$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \quad D_{\alpha\beta} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_\beta, \tag{4.119}$$

то из (4.117) и (4.119) следует, что диагональные компоненты тензора скоростей деформации $D_{\alpha\alpha}$ в собственном базисе $\mathbf{p}_\alpha$ определяют относительную скорость удлинения материальных волокон, ориентированных вдоль собственных векторов $\mathbf{p}_\alpha$ (сравните с формулой (4.56)):

$$D_{\alpha\alpha} = \dot{\lambda}_\alpha / \lambda_\alpha = d\dot{s}_\alpha / ds_\alpha, \qquad \alpha = 1, 3, \tag{4.120}$$

а внедиагональные компоненты $D_{\alpha\beta}$ связаны с $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta}$ следующими соотношениями:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\Big)\overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta. \tag{4.121}$$

Из (4.119) и (4.121) можно выразить компоненты $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta}$ через тензор скоростей деформации:

$$\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} = \frac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}D_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta; \quad \overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\alpha} = 0. \tag{4.122}$$

Диагональные компоненты $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\alpha}$ равны нулю в силу кососимметрии тензора $\mathbf{\Omega}_U$.

Подставляя соотношения (4.122) в (4.118), найдем выражение для компонент $\overset{\circ}{\Omega}_{V\alpha\beta}$ тензора $\mathbf{\Omega}_V$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$ через тензоры $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$ (а значит через градиент скорости $\mathbf{L}$):

$$\overset{\circ}{\Omega}_{V\alpha\beta} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{\Omega}_V \cdot \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}_\beta - \frac{\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}D_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \tag{4.123}$$

где

$$\mathbf{\Omega}_V = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_{V\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta. \tag{4.124}$$

Замечание. Выражения (4.122) и (4.123) имеют место только в случае некратных собственных значений $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Если на отрезке времени $[t_1, t_2]$ совпадают все три собственных значения $\lambda_\alpha = \lambda$, $\alpha = 1, 2, 3$, то тензоры искажений являются шаровыми: $\mathbf{U} = \lambda\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i = \lambda\mathbf{E}$, $\mathbf{V} = \lambda\mathbf{E}$, а собственные базисы определены неоднозначно — в качестве $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ и $\mathbf{p}_i$ можно выбрать любые ортонормированные тройки векторов. В частности, один из этих базисов может быть выбран фиксированным для всех $t \in [t_1, t_2]$, например $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ можно выбрать совпадающим с $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i(t_1)$, а второй базис $\mathbf{p}_i$ может уже зависеть от t. В этом случае $\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_i^{\bullet} \equiv 0$ $\forall t \in [t_1, t_2]$, и из (4.114) и (4.118) следует, что на этом отрезке времени

$$\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} = 0, \quad \mathbf{\Omega}_U = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega}_V = \mathbf{W}, \quad \Omega_{V\alpha\beta} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}_\beta, \;\; \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{4.125}$$

Эти соотношения заменяют формулы (4.122), (4.123).

Если же на $[t_1, t_2]$ совпадающими являются только два из трех собственных значений, например, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, то соответствующие им собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta$ также однозначно неопределены — задана только их ортогональность вектору $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\gamma$, соответствующему третьему собственному значению λ_γ. Тогда $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta$ можно доопределить так, что $\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}_\alpha^{\bullet} \cdot \mathbf{p}_\beta = 0$ $\forall t \in [t_1, t_2]$. В этом случае из (4.114) следует, что только одна компонента $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta}$ обращается в нуль, а $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\gamma} \neq 0$ и $\overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\gamma} \neq 0$.

Из (4.118) следует, что компонента $\Omega_{V\alpha\beta}$ вычисляется по формуле

$$\Omega_{V\alpha\beta} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}_\beta, \quad \overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} = 0. \tag{4.126}$$

Остальные компоненты $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\gamma}$, $\overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\gamma}$ и $\Omega_{V\alpha\gamma}$, $\Omega_{V\beta\gamma}$ вычисляют по формулам (4.122) и (4.123).

Если ситуация с кратными корнями возникает только в некоторый момент времени t, то значения $\overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta}(t)$ и $\Omega_{V\alpha\beta}(t)$ можно вычислить предельным переходом. □

Подставим теперь формулы (4.114) и (4.118) в выражение (4.97), а также принимаем во внимание выражения (4.89) и (4.91) для $\mathbf{O}_U$ и $\mathbf{O}_V$, в результате получаем представление спина $\boldsymbol{\Omega}$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2}{\lambda_\alpha\lambda_\beta} \overset{\circ}{\Omega}_{U\beta\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta - \\ - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\circ}{\Omega}_{U\alpha\beta} (\mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{e}}^j \otimes \mathbf{p}_j). \tag{4.127}$$

Вводя обозначения для направляющих косинусов

$$\overset{\circ}{l}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta, \quad l_{\alpha\beta} = \mathbf{p}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta, \tag{4.128}$$

и, подставляя в (4.127) выражение (4.122), после приведения подобных получаем следующее выражение спина $\boldsymbol{\Omega}$ через $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$ (т.е. через $\mathbf{L}$):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{\gamma,\rho=1}^{3} \widetilde{\Omega}_{\gamma\rho} \mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\rho, \quad \widetilde{\Omega}_{\gamma\rho} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \widetilde{\Omega}_{\alpha\beta}, \\ \widetilde{\Omega}_{\gamma\rho} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}((\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} - 2\lambda_\alpha\lambda_\beta l_{\alpha\gamma} l_{\beta\rho}) D_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{4.129}$$

Теорема 1.30. *Скорости мер деформации* $\dot{\mathbf{U}}$, $(\mathbf{U}^{-1})^\bullet$ *и* $\dot{\mathbf{V}}$, $(\mathbf{V}^{-1})^\bullet$ *связаны с градиентом скорости* $\mathbf{L}$ *с помощью следующих соотношений:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{D} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}) \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{D} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}), \\ (\mathbf{U}^{-1})^\bullet &= -\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{D} - \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}) \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{D} - \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}), \\ \dot{\mathbf{V}} &= \frac{1}{2}((\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})), \\ (\mathbf{V}^{-1})^\bullet &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} - \mathbf{L})). \end{aligned} \tag{4.130}$$

▼ Выразим из полярных разложений (3.1) тензоры $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{4.131}$$

Так как $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — симметричные, то эти выражения можно записать в симметризованном виде

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}). \tag{4.132}$$

Продифференцируем эти соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}} + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}), \\ \dot{\mathbf{V}} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}). \end{aligned} \tag{4.133}$$

Подставляя формулу (4.99) и выражение (4.97) для спина $\boldsymbol{\Omega}$ в (4.133), получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}), \end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) = \\ = \frac{1}{2}((\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})). \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (4.129) и (4.44), находим, что

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{W} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{D} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}. \tag{4.135}$$

Подставляя (4.135) в (4.134), действительно получаем первую и третью формулы из (4.130).

Остальные две формулы в (4.130) доказываем аналогично. ▲

В МСС применяют *тензоры деформации* $\mathbf{B}$ и $\mathbf{Y}$, которые не имеют явного выражения, а задаются с помощью своих производных и начальных значений:

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}), \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{0}, \tag{4.136}$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}. \tag{4.137}$$

Подставляя выражение (4.131) в формулу (4.136), преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}((\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}})) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{O}) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{O}), \end{aligned} \tag{4.138}$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}((\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}})) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} +$$
$$+ \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}). \quad (4.139)$$

Откуда окончательно получаем следующие выражения для $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{Y}}$:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}, \quad (4.140)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{D} + \frac{1}{2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}). \quad (4.141)$$

1.4.12. Траектория материальной точки, линия тока и вихревая линия. В заключении этого раздела рассмотрим еще некоторые важные понятия, связанные со скоростью движения материальной точки.

Если в законе движения (1.1.3) зафиксировать координаты X^i материальной точки $\mathcal{M}$, то получим параметрическое уравнение некоторой кривой, где время t играет роль параметра:

$$x^i = x^i(X^k, t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t'. \quad (4.142)$$

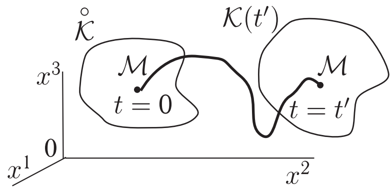

Рис. 1.14. Траектория материальной точки $\mathcal{M}$

Началом этой кривой при $t = 0$ является точка с декартовыми координатами $\overset{\circ}{x}{}^i(X^k)$ материальной точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, а концом кривой при $t = t'$ — точка с декартовыми координатами $x^i(X^k, t')$ точки $\mathcal{M}$ в $\mathcal{K}(t')$ (рис. 1.14). Кривую (4.142) называют *траекторией точки* $\mathcal{M}$ в декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$.

Если используют пространственное описание, то траектория (4.142) при фиксированных X^k представляет собой решение кинематического уравнения (4.10):

$$dx^i/dt = \bar{v}^i(x^j, t), \qquad 0 < t \leqslant t', \quad (4.143)$$

с начальным условием

$$t = 0: \quad x^i = \overset{\circ}{x}{}^i.$$

Здесь $\bar{v}^i(x^j, t)$ — компоненты вектора скорости в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$, которые предполагаются известными.

Пусть задано некоторое поле скоростей $\mathbf{v}(x^j, t) = \bar{v}^i\bar{\mathbf{e}}_i$. Зафиксируем момент времени t, и выберем некоторую точку $\mathcal{M}_1$ с эйлеровыми координатами x_1^i и лагранжевыми координатами X_1^k. Тогда *линией тока*, проходящей через точку $\mathcal{M}_1$, называют такую кривую

$$x^i = x^i(X^k, \tau), \quad \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2, \quad (4.144)$$

которая в каждой своей точке x^i имеет касательную, параллельную вектору скорости $\mathbf{v}(x^i, t)$ в данной точке в данный момент времени. Уравнение линии тока имеет следующий вид:

$$dx^i/d\tau = \bar{v}^i(x^j, t), \quad \tau_1 < \tau \leqslant \tau_2; \qquad \tau = \tau_1: \quad x^i = x_1^i. \quad (4.145)$$

Очевидно, что траектории материальной точки и линии тока имеют хотя и похожие, но, вообще говоря, совершенно различные уравнения и не совпадают между собой.

Однако если движение сплошной среды является *стационарным* (его еще называют *установившимся*), то при эйлеровом описании частные производные по времени от скорости равны нулю: $\partial\mathbf{v}(x^i,t)/\partial t=0$, и уравнения траектории (4.143) и линии тока (4.145), проходящих через одну и ту же точку $\mathcal{M}_1$, совпадают:

$$\begin{aligned} dx^i/d\tau &= \bar{v}^i(x^j), \qquad 0=\tau_1<\tau\leqslant\tau_2=t', \\ \tau=\tau_1: &\qquad x^i=x^i_1=x^i(X^k_1,t_1). \end{aligned} \tag{4.146}$$

Иначе говоря, при установившемся движении материальная точка $\mathcal{M}$ движется по линии тока: в момент времени $t=0$ ее координаты совпадают с координатами точки $\mathcal{M}_1$ при значениях параметра $\tau=\tau_1$, а в момент времени $t=t'$ — с координатами точки $\mathcal{M}_2$ со значением параметра $\tau=\tau_2$ (рис. 1.15).

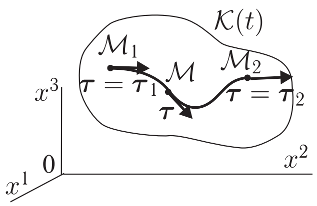

Рис. 1.15. Линия тока

Домножая уравнение (4.145) на векторы базиса $\bar{\mathbf{e}}_i$, уравнение линии тока можно записать в векторном виде:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)d\tau, &\quad \tau_1<\tau\leqslant\tau_2, \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_1, &\quad \tau=\tau_1. \end{aligned} \tag{4.147}$$

По аналогии с линией тока, определим *вихревую линию*, проходящую через точку $\mathcal{M}_1$, как кривую, которая в каждой своей точке x^i имеет касательную, параллельную вектору вихря $\boldsymbol{\omega}(x^j,t)$ в данной точке в фиксированный момент времени t. Уравнение вихревой линии имеет вид:

$$d\mathbf{x}=\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)d\tau, \quad \tau_1<\tau\leqslant\tau_2; \qquad \mathbf{x}=\mathbf{x}_1, \quad \tau=\tau_1. \tag{4.148}$$

1.4.13. Трубки тока и вихревые трубки. Рассмотрим некоторую кривую L в координатах x^i и проведем через каждую точку этой кривой линию тока. Если L — сама не является линией тока, то в результате получим поверхность Σ_v, в каждой точке которой скорость $\mathbf{v}$ жидкости лежит в касательной плоскости. Эту поверхность называют *поверхностью тока*.

Пусть

$$f_v(x^i)=0 \tag{4.149}$$

— уравнение поверхности тока. Так как вектор $\boldsymbol{\nabla} f$ направлен по нормали к поверхности Σ_v [12], то он ортогонален к вектору скорости $\mathbf{v}$, т.е. имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f_v=0, \tag{4.150}$$

которое представляет собой уравнение в частных производных для определения функции $f(x^i)$ по известному полю вектора скорости $\mathbf{v}(x^i,t)$ при фиксированном t.

Если кривая L — замкнутая (замкнутый контур), то совокупность проведенных через ее точки линий тока называют *трубкой тока*.

Если же через каждую точку кривой L, которая сама не является вихревой линией, провести вихревую линию, то образуется *вихревая поверхность* Σ_ω, уравнение которой — $f_\omega(x^i) = 0$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_\omega = 0. \tag{4.151}$$

Если L — замкнутая кривая, то поверхность Σ_ω называют *вихревой трубкой*.

Упражнения к 1.4

Упражнение 1.4.1. Показать, что тензоры $\mathbf{O}_U$ и $\mathbf{O}_V$ являются ортогональными.

Упражнение 1.4.2. Используя формулы (4.104) и (2.57), показать, что для коэффициента $\overset{\circ}{k}$, определяемого формулой (2.54), имеет место следующее соотношение:

$$\overset{\circ}{k}{}^{\bullet} = \overset{\circ}{k}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}).$$

Упражнение 1.4.3. Используя формулы (2.57), (4.99) и результат упр. 1.4.2, показать, что скорость изменения вектора нормали $\mathbf{n}$ определяется следующим соотношением:

$$\dot{\mathbf{n}} = \gamma\mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}, \qquad \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}.$$

Упражнение 1.4.4. Используя результаты упр. 1.4.2, показать, что для коэффициента k, определяемого формулой (2.54), имеет место следующее соотношение:

$$\dot{k} = -k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}).$$

Упражнение 1.4.5. Показать, что преобразование (4.65) бесконечно малого растяжения-сжатия и (4.66) бесконечно малого поворота являются коммутативными с точностью до членов порядка $(dt)^2$:

$$\mathbf{Q}_\omega \cdot \mathbf{A}_D \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{A}_\omega \cdot \mathbf{Q}_D \cdot d\mathbf{x},$$

в то время как преобразования малой окрестности, определяемые тензорами $\mathbf{O}$ и $\mathbf{U}$ или $\mathbf{O}$ и $\mathbf{V}$, коммутативными, вообще говоря, не являются.

Упражнение 1.4.6. Доказать теорему 1.17.

Упражнение 1.4.7. Используя представление (3.6) для тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ и формулы (4.90), (4.92), показать, что имеют место следующие выражения для скоростей тензоров искажений:

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U, \quad \dot{\mathbf{V}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}_V.$$

Упражнение 1.4.8. Показать, что выражения для скоростей тензоров Генки (3.31) имеют следующий вид:

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{H}} - \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U, \quad \widetilde{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \widetilde{\mathbf{H}} - \widetilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_V.$$

Упражнение 1.4.9. Используя представления (4.114) и (4.124) для тензоров $\boldsymbol{\Omega}_U$ и $\boldsymbol{\Omega}_V$, а также соотношение (4.120) и результат упр. 1.4.8, показать, что скорости тензоров Генки можно представить в виде

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{3} \Big(\frac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2-\lambda_\alpha^2}\ln\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} - 1\Big) D_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta,$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = \mathbf{D} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{3} \Big(\frac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2-\lambda_\alpha^2}\ln\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} - 1\Big)(\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{p}_\beta)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta.$$

Упражнение 1.4.10. Показать, что выражения для $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\bullet}$ и $\widetilde{\mathbf{H}}{}^{\bullet}$, полученные в упр. 1.4.9, можно представить в следующем виде:

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = {}^4\overset{\circ}{\mathbf{X}}_H \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \qquad \widetilde{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = {}^4\mathbf{X}_H \cdot\cdot\mathbf{D},$$

где введены следующие обозначения тензоров четвертого ранга:

$${}^4\overset{\circ}{\mathbf{X}}_H = X_{H\ ijkl}\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^j \otimes \mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}^l, \quad {}^4\mathbf{X}_H = X_{H\ ijkl}\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}^l,$$

$$X_{H\ ijkl} = \begin{cases} \Big(\dfrac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2-\lambda_\alpha^2}\ln\dfrac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\Big)\Delta_{\alpha\beta kl}, & \alpha\neq\beta,\\ \Delta_{\alpha\beta kl}, & \alpha=\beta, \end{cases} \qquad \Delta_{\alpha\beta kl} = (1/2)(\delta_{\alpha k}\delta_{\beta l} + \delta_{\alpha l}\delta_{\beta k}).$$

Упражнение 1.4.11. Показать, что соотношения (4.114), (4.122) для $\boldsymbol{\Omega}_U$, соотношения (4.123), (4.124) для $\boldsymbol{\Omega}_V$ и соотношение (4.129) для $\boldsymbol{\Omega}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega}_U = {}^4\boldsymbol{\Omega}_U \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \qquad \boldsymbol{\Omega}_V = {}^4\boldsymbol{\Omega}_V \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \mathbf{W}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = {}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \mathbf{W},$$

где

$${}^4\boldsymbol{\Omega}_U = \Omega_{Uijkl}\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^j \otimes \mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}^l, \qquad {}^4\boldsymbol{\Omega}_V = \Omega_{Vijkl}\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}^l,$$

$${}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \widetilde{\Omega}_{ijkl}\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}^j \otimes \mathbf{p}^k \otimes \mathbf{p}^l,$$

$$\Omega_{U\alpha\beta kl} = \begin{cases} \dfrac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\beta^2-\lambda_\alpha^2}\Delta_{\alpha\beta kl}, & \alpha\neq\beta,\\ 0, & \alpha=\beta, \end{cases} \qquad \Omega_{V\alpha\beta kl} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\alpha^2+\lambda_\beta^2}{\lambda_\beta^2-\lambda_\alpha^2}\Delta_{\alpha\beta kl}, & \alpha\neq\beta,\\ 0, & \alpha=\beta, \end{cases}$$

$$\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta\gamma\rho} = \Omega_{V\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{\lambda_\gamma\lambda_\rho}{\lambda_\rho^2-\lambda_\gamma^2}(l_{\gamma\alpha}l_{\rho\beta} - l_{\rho\alpha}l_{\gamma\beta}), \quad \alpha\neq\beta, \quad \gamma\neq\rho,$$

а если $\alpha=\beta$ (или $\gamma=\rho$), то первое (или второе) слагаемое обращается в нуль.

Упражнение 1.4.12. Используя определения (4.45) и (4.46) тензоров $\mathbf{D}$ и $\mathbf{W}$, а также свойства единичных тензоров, показать, что имеют место следующие соотношения между $\mathbf{D}$, $\mathbf{W}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\Delta} \cdot\cdot\, \mathbf{L}, \quad \mathbf{W} = \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \cdot\cdot\, \mathbf{L}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = (1/2)(\Delta_{\mathrm{III}} - \Delta_{\mathrm{II}}).$$

1.5. Коротационные производные

1.5.1. Определение коротационных производных. Кроме введенных в п. 1.4.1 полной $d\mathbf{a}/dt$ и частной $\partial\mathbf{a}/\partial t$ производных по времени от векторов и тензоров, важную роль в механике сплошной среды играют так называемые *коротационные производные*, которые определяют скорости изменения тензоров по отношению к некоторому подвижному базису $\mathbf{h}_i$, т.е. относительные скорости.

Пусть в актуальной конфигурации $\mathcal{K}(t)$ имеются некоторые подвижные базисы $\mathbf{h}_i$ или $\mathbf{h}^i$ и произвольные переменные скалярное $\psi(X^i,t)$ и векторное $\mathbf{a}(X^i,t)$ поля, а также переменное поле тензора второго ранга $\mathbf{T}(X^i,t)$ с компонентами в этих базисах

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{h}_i = a_i\mathbf{h}^i, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{h}_i\otimes\mathbf{h}_j = T_{ij}\mathbf{h}^i\otimes\mathbf{h}^j = T^i{}_j\mathbf{h}_i\otimes\mathbf{h}^j = T_i{}^j\mathbf{h}^i\otimes\mathbf{h}_j. \tag{5.2}$$

Поскольку любая скалярная функция $\psi(X^i,t)$ не связана ни с каким базисом (подвижным или неподвижным), то очевидно, что коротационная производная от нее должна совпадать с полной производной по времени:

$$\psi^h = \dot{\psi}. \tag{5.3}$$

Для вектора $\mathbf{a}$ и тензора $\mathbf{T}$ введем *коротационные производные* $\mathbf{a}^h$ и $\mathbf{T}^h$ как векторы или тензоры, компоненты которых в том же базисе $\mathbf{h}_i$ совпадают со скоростями изменения компонент вектора $\mathbf{a}$ и тензора $\mathbf{T}$ соответственно:

$$\mathbf{a}^h = \frac{da^i}{dt}\mathbf{h}_i, \qquad \mathbf{T}^h = \frac{d}{dt}T^{ij}\mathbf{h}_i\otimes\mathbf{h}_j. \tag{5.4}$$

Если используется базис $\mathbf{h}^i$, то на его основе определяются, вообще говоря, другие коротационные производные:

$$\mathbf{a}^H = \frac{da_i}{dt}\mathbf{h}^i, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{T}^H = \frac{d}{dt}T_{ij}\mathbf{h}^i\otimes\mathbf{h}^j. \tag{5.6}$$

Таким образом, коротационная производная $\mathbf{a}^h$ (или $\mathbf{T}^h$) определяет скорость изменения вектора $\mathbf{a}$ (или тензора $\mathbf{T}$) для наблюдателя, движущегося вместе с базисом $\mathbf{h}_i$. Для этого наблюдателя базис $\mathbf{h}_i$ неподвижен и поэтому в (5.4) он не дифференцируется по времени. Аналогично производные $\mathbf{a}^H$ и $\mathbf{T}^H$ определяют скорости изменения $\mathbf{a}$ и $\mathbf{T}$ для наблюдателя, движущегося вместе с базисом $\mathbf{h}^i$.

Для тензора второго ранга $\mathbf{T}$ можно определить коротационные производные в смешанных подвижных диадных базисах $\mathbf{h}_i\otimes\mathbf{h}^j$ и $\mathbf{h}^i\otimes\mathbf{h}_j$ соответственно:

$$\mathbf{T}^d = \frac{d}{dt}T^i{}_j\mathbf{h}_i\otimes\mathbf{h}^j, \qquad \mathbf{T}^D = \frac{d}{dt}T_i{}^j\mathbf{h}^i\otimes\mathbf{h}_j. \tag{5.7}$$

Поскольку компоненты вектора a^i и a_i всегда можно представить в виде

$$a^i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}^i, \qquad a_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}_i, \tag{5.8}$$

а компоненты тензора T_{ij}, T^{ij}, $T^i{}_j$ и $T_i{}^j$, домножая (5.2) скалярно на $\mathbf{h}^i$ или $\mathbf{h}_j$, можно представить в виде

$$T^{ij} = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^j, \qquad T_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_j, \qquad T^i{}_j = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_j, \qquad T_i{}^j = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^j, \tag{5.9}$$

то скорости изменения компонент вектора и тензора в (5.4), (5.5) и (5.7) можно записать явным образом:

$$\frac{da^i}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{h}^i + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{h}^i}{dt}, \qquad \frac{da_i}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{h}_i + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{h}_i}{dt}, \tag{5.10}$$

а также

$$\begin{aligned}
\frac{dT^{ij}}{dt} &= \mathbf{h}^i \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{h}^j + \frac{d\mathbf{h}^i}{dt} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{h}^j}{dt}, \\
\frac{dT_{ij}}{dt} &= \mathbf{h}_i \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{h}_j + \frac{d\mathbf{h}_i}{dt} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{h}_j}{dt}, \\
\frac{d}{dt} T^i{}_j &= \mathbf{h}^i \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_j + \frac{d\mathbf{h}^i}{dt} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_j + \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{h}_j}{dt}, \\
\frac{d}{dt} T_i{}^j &= \mathbf{h}_i \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^j + \frac{d\mathbf{h}_i}{dt} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^j + \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{h}^j.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь полные производные $d\mathbf{a}/dt$ и $d\mathbf{T}/dt$ определяются по правилам (4.7) и (4.12) соответственно. Скорости изменения векторов базисов $d\mathbf{h}^i/dt$ и $d\mathbf{h}_i/dt$ расшифровываются частным образом в зависимости от вида базиса $\mathbf{h}_i$ или $\mathbf{h}^j$.

Выбирая в качестве $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}^j$ различные базисы, получим различные коротационные производные. Рассмотрим наиболее распространенные базисы.

1.5.2. Производная Олдройда ($\mathbf{h}_i = \mathbf{r}_i$). Если в качестве $\mathbf{h}_i$ выбрать основной локальный векторный базис $\mathbf{r}_i$, то производная $\mathbf{a}^h = \mathbf{a}^{\mathrm{Ol}}$ (или $\mathbf{T}^h = \mathbf{T}^{\mathrm{Ol}}$) определяет скорость изменения $\mathbf{a}$ (или $\mathbf{T}$) по отношению к лагранжевой системе координат X^i, движущейся вместе со сплошной средой. Эта производная называется *производной Олдройда*.

Производная по времени $d\mathbf{r}_i/dt$ вычисляется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial X^i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^i} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^j} = \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_i. \tag{5.12}$$

В качестве базиса $\mathbf{h}^i$ в данном случае выступает взаимный локальный базис $\mathbf{r}^i$, производная по времени от которого $d\mathbf{r}^i/dt$ вычисляется с помощью соотношения

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt}\mathbf{E} = 0, \tag{5.13}$$

или

$$\frac{d\mathbf{r}^i}{dt} \otimes \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}^i \otimes \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\mathbf{r}^i \otimes (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_i. \tag{5.14}$$

Умножая скалярно на $\mathbf{r}^j$ справа, получим

$$\frac{d\mathbf{h}^j}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^j}{dt} = -\mathbf{r}^j \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = -(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}^j. \tag{5.15}$$

Подставляя выражения (5.15) для производных $d\mathbf{h}^i/dt$ и $d\mathbf{h}_j/dt$ в (5.10), получаем формулу для производной Олдройда в базисе $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{Ol}} = \frac{da^i}{dt}\mathbf{r}_i = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}, \qquad (5.16)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{\mathrm{Ol}} = \frac{d\mathbf{T}^{ij}}{dt}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i \otimes \frac{dT^{ij}}{dt}\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^i \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}^j \otimes \mathbf{r}_j - \\ - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}^j \otimes \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}^j \otimes \mathbf{r}_j = \\ = \frac{d}{dt}\mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} - (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}. \quad (5.17)\end{aligned}$$

Здесь везде учтено, что $\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_i = \mathbf{E}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.31. *Производная Олдройда связана с полной производной по времени следующими соотношениями (для вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора* $\mathbf{T}$ *соответственно):*

$$\mathbf{a}^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}, \qquad \mathbf{T}^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} - (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}. \qquad (5.18)$$

1.5.3. Производная Коттера–Ривлина ($\mathbf{h}^i = \mathbf{r}^i$). Если же в качестве подвижного базиса $\mathbf{h}^i$ выбрать взаимный локальный базис $\mathbf{r}^i$, то производная $\mathbf{a}^H$ (или $\mathbf{T}^H$) характеризует относительную скорость изменения $\mathbf{a}$ (или $\mathbf{T}$) по отношению к этому базису $\mathbf{r}^i$, движущемуся вместе с лагранжевой системой координат X^i. Эта производная называется *производной Коттера–Ривлина*.

На основании формул (5.10) и (5.15), получаем следующую теорему.

Теорема 1.32. *Производная Коттера–Ривлина для вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора* $\mathbf{T}$ *связана с полной производной следующими соотношениями:*

$$\mathbf{a}^H \equiv \mathbf{a}^{\mathrm{CR}} = \frac{da_i}{dt}\mathbf{r}^i = \dot{\mathbf{a}} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}, \qquad (5.19)$$

$$\mathbf{T}^H \equiv \mathbf{T}^{\mathrm{CR}} = \frac{dT_{ij}}{dt}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j = \dot{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}. \qquad (5.20)$$

1.5.4. Смешанные коротационные производные. Поскольку всякий вектор $\mathbf{a}$ определяется компонентами в векторном базисе, например, в подвижном базисе $\mathbf{h}_i$ или $\mathbf{h}^j$, то для него, на основе этих подвижных базисов, можно определить только две коротационные производные: Олдройда и Коттера–Ривлина.

Всякий тензор второго ранга $\mathbf{T}$ определяется компонентами уже в диадном базисе. Поэтому кроме производных по Олдройду и Коттеру–Ривлину, которые определяют скорость изменения тензора $\mathbf{T}$ в подвижных диадных базисах $\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j$ и $\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j$, по формулам (5.7) можно определить еще две производные в смешанных подвижных диадных базисах:

$$\mathbf{T}^d = \frac{dT^i{}_j}{dt}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^j, \qquad \mathbf{T}^D = \frac{d}{dt}T_i{}^j\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_j. \qquad (5.21)$$

Подставляя выражения (5.12) и (5.15) в (5.11), получаем выражения для скоростей изменения смешанных компонент тензора $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T^i{}_j &= \mathbf{r}^i \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_j, \\ \frac{d}{dt}T_i{}^j &= \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}^j + \mathbf{r}_i \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}^j - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}^j. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Подставляя далее (5.22) в (5.21), приходим к следующей теореме.

Теорема 1.33. *Смешанные производные (5.21) связаны с полной производной следующими соотношениями:*

$$\mathbf{T}^d = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}, \qquad \mathbf{T}^D = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}. \tag{5.23}$$

Производные (5.21) называют *левой и правой смешанными коротационными производными*, где $\mathbf{L} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}$ — градиент скорости (см. (4.43)).

Заметим, что смешанные производные $\mathbf{T}^d$ и $\mathbf{T}^D$, в отличие от других, рассмотренных в этом разделе коротационных производных, не образуют симметричного тензора, когда применяются к симметричному тензору $\mathbf{T}$. Этим обстоятельством объясняется более редкое использование смешанных производных в МСС.

1.5.5. Производная в собственном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ правого тензора искажений. Если в качестве подвижного базиса $\mathbf{h}_i$ выбрать собственный базис $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ правого тензора искажений $\mathbf{U}$, то, в силу ортонормированности $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, получаем, что $\mathbf{h}^i$ и $\mathbf{h}_j$ совпадают: $\mathbf{h}^\alpha = \mathbf{h}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, и $|\mathbf{h}^i| = 1$. Подвижная система координат, определяемая триэдром $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ в каждый момент времени совершает мгновенный поворот, характеризуемый спином $\boldsymbol{\Omega}_U$ (4.89), при этом с учетом (4.90) получаем

$$\frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = \dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}_i = \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_U^{\mathrm{T}} = -\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_U. \tag{5.24}$$

Подставляя (5.24) в (5.11), находим

$$\mathbf{a}^h \equiv \mathbf{a}^U = \frac{da^i}{dt}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{a}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U, \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^h \equiv \mathbf{T}^U = \frac{T^{ij}}{dt}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \otimes \frac{dT^{ij}}{dt}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_j = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j - \\ - \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j + \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Коротационная производная от вектора $\mathbf{a}$ (или тензора $\mathbf{T}$), определяемая по (5.26), называется *правой производной в собственном базисе.*

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.34. *Правая производная в собственном базисе связана с полной производной следующим соотношением (для вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора* $\mathbf{T}$ *соответственно):*

$$\mathbf{a}^U = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U, \qquad \mathbf{T}^U = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U. \tag{5.27}$$

1.5.6. Производная в собственном базисе ($\mathbf{h}_i = \mathbf{p}_i$) левого тензора искажений. Выбирая в качестве подвижного базиса $\mathbf{h}_i$ собственный базис $\mathbf{p}_i$ левого тензора искажений, определяем следующие коротационные производные:

$$\mathbf{a}^H \equiv \mathbf{a}^V = \frac{da^i}{dt}\mathbf{p}_i, \qquad \mathbf{T}^H \equiv \mathbf{T}^V = \frac{dT^{ij}}{dt}\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j, \tag{5.28}$$

называемые *левыми производными в собственном базисе.*

Теорема 1.35. *Левые производные (5.28) в собственном базисе связаны с полной производной по времени следующими соотношениями (для вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора* $\mathbf{T}$ *соответственно):*

$$\mathbf{a}^V = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{a}, \qquad \mathbf{T}^V = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}_V. \tag{5.29}$$

▼ Доказательство очевидно следует из (5.5), (5.10) и (5.11), так как, в силу (4.92), имеем

$$\frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = \dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{p}_i. \tag{5.30}$$

Поскольку базисы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ и $\mathbf{p}_i$ — ортонормированы, то очевидно, что все коротационные производные в смешанных диадных базисах $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i$, $\mathbf{p}^i \otimes \mathbf{p}_i$ совпадают с $\mathbf{T}^U$ или $\mathbf{T}^V$ соответственно. ▲

1.5.7. Производная Яуманна ($\mathbf{h}_i = \mathbf{q}_i$). Если в качестве подвижного базиса выбрать собственный базис тензора скоростей деформации $\mathbf{h}_i = \mathbf{q}_i$ (напомним, что $\mathbf{q}_i$ также ортонормирован и совпадает с $\mathbf{q}^i$), то из (5.4) получим *коротационные производные Яуманна*:

$$\mathbf{a}^h \equiv \mathbf{a}^J = \frac{da^i}{dt}\mathbf{q}_i, \qquad \mathbf{T}^h \equiv \mathbf{T}^J = \frac{dT^{ij}}{dt}\mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_j. \tag{5.31}$$

Теорема 1.36. *Производные Яуманна (5.31) связаны с полной производной по времени следующими соотношениями: (для вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора* $\mathbf{T}$ *соответственно):*

$$\mathbf{a}^J = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}, \tag{5.32}$$

$$\mathbf{T}^J = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}. \tag{5.33}$$

▼ Используя соотношение (4.94), получим $d\mathbf{h}_i/dt = \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{q}_i$, поэтому на основании формул (5.5) и (5.10) находим

$$\mathbf{a}^J = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}^i + \mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}^i = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}.$$

Аналогично доказываем соотношение (5.33). ▲

1.5.8. Коротационные производные в подвижном ортонормированном базисе. Пусть $\mathbf{h}_i$ — ортонормированный подвижный базис. В этом случае обозначим коротационные производные следующим образом: $\mathbf{a}^h \equiv \mathbf{a}^Q$ и $\mathbf{T}^h \equiv \mathbf{T}^Q$. В силу ортонормированности базиса $\mathbf{h}_i$, полные производные от $\mathbf{a}$ и $\mathbf{T}$ с учетом (5.1), (5.2) и (5.4) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da^i}{dt}\mathbf{h}_i + a^i\frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = \mathbf{a}^Q + a^i\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{h}_i, \tag{5.34}$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{dT^{ij}}{dt}\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j + T^{ij}\Big(\frac{d\mathbf{h}_i}{dt} \otimes \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \otimes \frac{d\mathbf{h}_j}{dt}\Big) =$$
$$= \mathbf{T}^Q + T^{ij}\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j - \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \times \boldsymbol{\omega}_h.$$

Здесь мы использовали формулу (4.86) для производной $\dot{\mathbf{h}}_i$ от подвижного базиса, где $\boldsymbol{\omega}_h$ — вектор вихря, задающий вращение базиса $\mathbf{h}_i$ относительно неподвижного базиса $\bar{\mathbf{e}}_i$ (см. (4.78) и (4.85)). С учетом (5.1) и (5.2) формулы (5.34) можно записать в виде

$$\mathbf{a}^Q = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{a}, \qquad \mathbf{T}^Q = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{T} + \mathbf{T} \times \boldsymbol{\omega}_h. \tag{5.35}$$

Заметим, что если $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_h$, то

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_h = \boldsymbol{\omega}_h^h, \tag{5.35a}$$

так как $\boldsymbol{\omega}_h \times \boldsymbol{\omega}_h = \mathbf{0}$ в силу свойств векторного произведения.

1.5.9. Спиновая производная. Выберем теперь в точке $\mathcal{M}$ сплошной среды в конфигурации $\mathcal{K}$ произвольный ортонормированный базис $\bar{\mathbf{h}}_i$, который обладает только одним свойством: в каждый момент времени t этот базис $\bar{\mathbf{h}}_i$ вращается с мгновенной угловой скоростью, совпадающей со скоростью вращения триэдра $\mathbf{p}_i$ относительно $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$. Как было показано в п. 1.4.10, мгновенное вращение такого триэдра характеризуется тензором спина $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, определяемого по формуле (4.97).

Тогда можно определить коротационную производную в этом базисе, называемую *спиновой производной* (вектора $\mathbf{a}$ и тензора $\mathbf{T}$ соответственно):

$$\mathbf{a}^h \equiv \mathbf{a}^S = \frac{da^i}{dt}\bar{\mathbf{h}}_i, \tag{5.36}$$

$$\mathbf{T}^h \equiv \mathbf{T}^S = \frac{dT^{ij}}{dt}\bar{\mathbf{h}}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}_j. \tag{5.37}$$

Теорема 1.37. *Спиновая производная связана с полной производной по времени следующими соотношениями (для вектора* $\mathbf{a}$ *и для тензора* $\mathbf{T}$ *соответственно):*

$$\mathbf{a}^S = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{5.38}$$

$$\mathbf{T}^S = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{5.39}$$

▼ Доказательство теоремы 1.37 следует из (5.10), (5.11) и соотношения

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}}^i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \bar{\mathbf{h}}^i, \tag{5.40}$$

являющегося следствием (4.84). Соотношение (5.39) следует из (5.11). ▲

1.5.10. Универсальная форма для коротационных производных. Сопоставляя формулы (5.18), (5.19), (5.20), (5.27), (5.29), (5.33), (5.38) и (5.39), несложно усмотреть, что все представления этих коротационных производных, а также полная производная по времени могут быть записаны в единой универсальной форме:

$$\begin{gathered}\mathbf{a}^h = \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{Z}_h \cdot \mathbf{T}, \qquad \mathbf{T}^h = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{Z}_h \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}},\\ h = \{\ \cdot,\ \mathrm{Ol},\ \mathrm{CR},\ U,\ V,\ J,\ S\ \},\end{gathered} \tag{5.41}$$

где тензоры $\mathbf{Z}_h$ имеют следующий вид для различных h:

$$\begin{gathered}\mathbf{Z}_h = \{\ \mathbf{0},\ \mathbf{L},\ -\mathbf{L}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Omega}_U,\ \boldsymbol{\Omega}_V,\ \mathbf{W},\ \boldsymbol{\Omega}\ \},\\ h = \{\ \cdot,\ \mathrm{Ol},\ \mathrm{CR},\ U,\ V,\ J,\ S\ \}.\end{gathered} \tag{5.42}$$

Поскольку тензоры $\boldsymbol{\Omega}_U$, $\boldsymbol{\Omega}_V$ и $\boldsymbol{\Omega}$ линейно выражаются через $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$ (см. упр. 1.4.11), то тензоры $\mathbf{Z}_h$ можно представить в виде линейных функций от $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{Z}_h = {}^4\mathbf{Z}_{Dh}\cdot\cdot\,\mathbf{D} + {}^4\mathbf{Z}_{Wh}\cdot\cdot\,\mathbf{W}. \tag{5.43}$$

Выражения для тензоров четвертого ранга ${}^4\mathbf{Z}_{Dh}$ и ${}^4\mathbf{Z}_{Wh}$ приведены в табл. 1.1, где тензоры ${}^4\boldsymbol{\Omega}_U$, ${}^4\boldsymbol{\Omega}_V$ и ${}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ определены в упр. 1.4.11.

Таблица 1.1. Выражения для тензоров ${}^4\mathbf{Z}_{Dh}$, ${}^4\mathbf{Z}_{Wh}$ и ${}^4\mathbf{E}_h$ в случае различных коротационных производных

h	$\cdot$	Ol	CR	U	V	J	S
${}^4\mathbf{Z}_{Dh}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$	$\boldsymbol{\Delta}_{-\mathrm{III}}$	${}^4\boldsymbol{\Omega}_U$	${}^4\boldsymbol{\Omega}_V$	$\mathbf{0}$	${}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$
${}^4\mathbf{Z}_{Wh}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$	$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}}$
${}^4\mathbf{E}_h$	$\mathbf{0}$	$-2\boldsymbol{\Delta}$	$2\boldsymbol{\Delta}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

1.5.11. Соотношения между коротационными производными тензоров скоростей деформации и градиентом скорости. В п. 1.4.11 были установлены соотношения между скоростями тензоров деформации и градиентом скорости $\mathbf{L}$, подобные зависимости существуют и между коротационными производными от этих тензоров и $\mathbf{L}$. Установим их.

Подставляя представления (4.103), (4.104) и (4.130) для скоростей $\dot{\mathbf{A}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{g}}$, $(\mathbf{g}^{-1})^{\bullet}$, $\dot{\mathbf{V}}$ и $(\mathbf{V}^{-1})^{\bullet}$ в формулу (5.41), получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^h = \mathbf{D} - (\mathbf{Z}_h + \mathbf{L}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}),\\ \mathbf{J}^h = \mathbf{D} - (\mathbf{Z}_h - \mathbf{L})\cdot\mathbf{J} - \mathbf{J}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}),\\ \mathbf{g}^h = -(\mathbf{Z}_h + \mathbf{L}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}),\\ (\mathbf{g}^{-1})^h = -(\mathbf{Z}_h - \mathbf{L})\cdot\mathbf{g}^{-1} - \mathbf{g}^{-1}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}),\\ \mathbf{V}^h = -(\mathbf{Z}_h - \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}))\cdot\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})),\\ (\mathbf{V}^{-1})^h = -(\mathbf{Z}_h - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}))\cdot\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} - \mathbf{L})),\\ h = \{\ \cdot,\ \mathrm{Ol},\ \mathrm{CR},\ U,\ V,\ J,\ S\ \}.\end{gathered} \tag{5.44}$$

Из этих соотношений следуют также выражения

$$\begin{aligned}(\mathbf{V} - \mathbf{E})^h = \mathbf{D} - {}^4\mathbf{E}_h\cdot\cdot\,\mathbf{D} - (\mathbf{Z}_h + \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}}) -\\ - (\mathbf{Z}_h - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L}))\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{E}) - (\mathbf{V} - \mathbf{E})\cdot(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}})),\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$(\mathbf{E}-\mathbf{V}^{-1})^h = \mathbf{D} + {}^4\mathbf{E}_h \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \mathbf{Z}_h + \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} -$$
$$- \left(\mathbf{Z}_h - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}})\right) \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{V}^{-1}) - (\mathbf{E}-\mathbf{V}^{-1}) \cdot \left(\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} - \mathbf{L})\right).$$

Здесь обозначена коротационная производная метрического тензора

$$\mathbf{E}^h = {}^4\mathbf{E}_h \cdot\cdot\, \mathbf{D}. \tag{5.46}$$

Тензор ${}^4\mathbf{E}_h$ отличен от нулевого только для $h = \{\mathrm{CR}, \mathrm{Ol}\}$ (см. упр. 1.5.3), его выражения приведены в табл. 1.1 (см. п. 1.5.10).

Поскольку тензоры $\mathbf{Z}_h$ и $\boldsymbol{\Omega}$ выражаются через $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$ линейным образом (см. формулы (5.43), (4.129), (4.122)–(4.124)), то в правой части соотношений (5.44) также стоят линейные функции от $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$, их явные выражения приведены далее в п. 3.2.22.

Упражнения к 1.5

Упражнение 1.5.1. Показать, что смешанные коротационные производные, левая и правая коротационные производные в собственном базисе, а также Яуманна и спиновая производные удовлетворяют правилу дифференцирования скалярного произведения:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^h = \mathbf{A}^h\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^h, \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{A})^h = \mathbf{a}^h\cdot\mathbf{A} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^h,$$

$$(\psi\mathbf{A})^h = \psi^h\mathbf{A} + \psi\mathbf{A}^h, \qquad h = \{\cdot, d, D, U, V, J, S\},$$

а производные Олдройда и Коттера–Ривлина не удовлетворяют этому правилу.

Упражнение 1.5.2. Показать, что для следующих коротационных производных выполняется правило дифференцирования скалярных произведений векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^h = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^\bullet = \mathbf{a}^h\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^h, \qquad h = \{U, V, J, S\};$$

$$(\mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{B})^h = (\mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{B})^\bullet = \mathbf{T}^h\cdot\cdot\,\mathbf{B} + \mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{B}^h, \qquad h = \{d, D, U, V, J, S\}.$$

Упражнение 1.5.3. Показать, что следующие коротационные производные от единичного тензора $\mathbf{E}$ дают нулевой тензор:

$$\mathbf{E}^h = 0, \qquad h = \{\cdot, d, D, U, V, J, S\},$$

а производные Олдройда и Коттера–Ривлина от $\mathbf{E}$ отличны от нуля:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{CR}} = 2\mathbf{D}, \qquad \mathbf{E}^{\mathrm{Ol}} = -2\mathbf{D}.$$

Упражнение 1.5.4. Используя формулы (4.103) и (5.20), показать, что производные Коттера–Ривлина от левого тензора деформации Альманзи $\mathbf{A}$ и от левой меры Альманзи $\mathbf{g}$ имеют вид

$$\mathbf{A}^{\mathrm{CR}} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{g}^{\mathrm{CR}} = 0.$$

Упражнение 1.5.5. Используя формулы (4.103) и (5.18), показать, что производные Олдройда от правого тензора Коши–Грина $\mathbf{J}$ и правой меры $\mathbf{g}^{-1}$ имеют вид

$$\mathbf{J}^{\mathrm{Ol}} = \mathbf{D}, \qquad (\mathbf{g}^{-1})^{\mathrm{Ol}} = 0.$$

Упражнение 1.5.6. Используя представления тензоров $\mathbf{U}$ (3.6), $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Lambda}$ (3.29), а также $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^{-1}$ (3.29), показать, что имеют место следующие представления для правой производной в собственном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$:

$$\mathbf{U}^U = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \mathbf{C}^U = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

$$\mathbf{\Lambda}^U = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha^3} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad (\mathbf{U}^{-1})^U = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha^2} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

$$\mathbf{G}^U = 2\mathbf{C}^U, \qquad (\mathbf{G}^{-1})^U = -2\mathbf{\Lambda}^U.$$

Упражнение 1.5.7. Используя представления для тензоров $\mathbf{V}$ (3.6), для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ (3.29), а также для $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}^{-1}$ (3.29), показать, что имеют место следующие представления для левой производной в собственном базисе $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\mathbf{V}^V = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{A}^V = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha^3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha,$$

$$\mathbf{J}^V = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{g}^V = -2\mathbf{A}^V, \qquad (\mathbf{g}^{-1})^V = 2\mathbf{J}^V.$$

Упражнение 1.5.8. Показать, что производные Олдройда и Яуманна произвольного тензора второго ранга $\mathbf{T}$ связаны соотношением

$$\mathbf{T}^{\mathrm{Ol}} = \mathbf{T}^J - \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{T}.$$

Упражнение 1.5.9. Показать, что если для произвольного симметричного тензора $\mathbf{T}$ его коротационная производная равна нулю:

$$\mathbf{T}^h = 0, \qquad h = \{d, D, U, V, J, S\},$$

то первый инвариант тензора: $I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{E}$ имеет стационарное значение, т.е.

$$\dot{I}_1(\mathbf{T}) = 0.$$

Показать, что для коротационных производных Олдройда и Коттера–Ривлина это утверждение не имеет места.

Упражнение 1.5.10. Используя результат упр. 1.4.3, показать, что коротационные производные от вектора нормали $\mathbf{n}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathbf{n}^{\mathrm{CR}} = \gamma\mathbf{n}, \qquad \gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}^{\mathrm{Ol}} = \gamma\mathbf{n} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{L} - \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}^{\mathrm{J}} = \gamma\mathbf{n} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}.$$

Упражнение 1.5.11. Показать, что следующие коротационные производные от симметричного тензора сами образуют симметричный тензор:

$$\text{если} \ \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \ \text{то} \ \ (\mathbf{A}^h)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^h, \quad h = \{U, V, J, S, \mathrm{Ol}, \ \mathrm{CR}\},$$

а также кососимметричный тензор, если применяются к кососимметричному тензору:

$$\text{если} \ \ \mathbf{B} = -\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \ \text{то} \ \ (\mathbf{B}^h)^{\mathrm{T}} = -\mathbf{B}^h, \quad h = \{U, V, J, S, \mathrm{Ol}, \ \mathrm{CR}\}.$$

Смешанные коротационные производные $h = d, D$ этими свойствами не обладают.

Глава 2

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

2.1. Закон сохранения массы

2.1.1. Интегральная и дифференциальная формулировки. Перейдем к изложению так называемых *законов сохранения МСС* и дополним систему аксиом 1–3 новыми аксиомами.

Аксиома 4 (закон сохранения массы). *Для всякой сплошной среды $\mathcal{B}$ (тела) существует скалярная функция $M(\mathcal{B},t)$ (т.е. отображение $M : \mathcal{U} \times \mathbb{R}_{+0} \to \mathbb{R}_+$), называемая* м а с с о й *тела и обладающая следующими свойствами:*

- *положительностью: $M > 0$,*
- *аддитивностью: $M(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2, t) = M(\mathcal{B}_1, t) + M(\mathcal{B}_2, t)$, $\forall \mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, $\forall t \geqslant 0$,*
- *инвариантностью по отношению к любым преобразованиям координат (1.1.1) и к любым движениям (1.1.3).*

Из последнего свойства следует, что масса в любой актуальной конфигурации не меняется:

$$M(\mathcal{B},t) = \text{const}. \tag{1.1}$$

Замечание 1. Закон сохранения массы имеет место только для сплошных сред, которые содержат одни и те же материальные точки на всем рассматриваемом промежутке времени $[0,t]$. Если же среда $\mathcal{B}$ во время движения «теряет» материальные точки или, наоборот, их «приобретает» (в этом случае говорят, что происходят фазовые превращения сред — см. разд. 4.1), то закон сохранения массы в форме (1.1) не выполняется. Также закон сохранения массы не будет выполняется, если отказаться от аксиомы 3 и рассматривать движения со скоростями, близкими к скорости света, однако в классической МСС релятивистские явления не рассматриваются.

Закон (1.1) можно записать иначе:

$$dM/dt = 0. \tag{1.2}$$

Из аддитивности массы следует, что M можно представить следующим образом:

$$M = \int\limits_V dm, \tag{1.3}$$

где dm — масса элементарного объема dV, содержащего материальную точку $\mathcal{M}$ из рассматриваемой области V сплошной среды.

Определение 2.1. *Отношение*

$$\rho = dm/dV \tag{1.4}$$

называется плотностью вещества в точке $\mathcal{M}$.

В силу положительности массы M и объема dV, масса dm и плотность ρ всегда положительны:

$$\rho > 0, \qquad dm > 0. \tag{1.4a}$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2), запишем закон сохранения массы (1.2) в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0, \tag{1.5}$$

или, применяя это соотношение к элементарному объему, получим

$$\rho dV = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{V} = \text{const}, \tag{1.6}$$

где ρ и $\overset{\circ}{\rho}$ — плотности вещества в конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ соответственно, а $d\overset{\circ}{V}$ — элементарный объем в отсчетной конфигурации.

Соотношение (1.5) называется *законом сохранения массы* в интегральной форме, а (1.6) — в дифференциальной.

2.1.2. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Рассмотрим в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ элементарный объем $d\overset{\circ}{V}$, построенный на элементарных радиусах-векторах, ориентированных по локальным векторам базиса $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha dX^\alpha$ (см. п. 1.2.6). В актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ ему соответствует область dV, построенная на векторах $\mathbf{r}_\alpha dX^\alpha$. Объемы областей $d\overset{\circ}{V}$ и dV в этом случае вычисляются с использованием формул (1.1.15):

$$\begin{gathered}
d\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \cdot (\overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_3) dX^1 dX^2 dX^3 = \sqrt{\overset{\circ}{g}}\ dX^1 dX^2 dX^3 = \left|\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^k}{\partial X^i}\right| dX^1 dX^2 dX^3, \\
dV = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) dX^1 dX^2 dX^3 = \sqrt{g}\ dX^1 dX^2 dX^3 = \left|\frac{\partial x^k}{\partial X^i}\right| dX^1 dX^2 dX^3.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6), приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. *Изменение плотности при переходе из конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ определяется одним из следующих уравнений:*

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} = \frac{|\partial x^k / \partial X^i|}{|\partial \overset{\circ}{x}{}^j / \partial X^n|} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\right| = \det \mathbf{F}. \tag{1.8}$$

Эти уравнения в отличие от (1.6) называют *уравнениями неразрывности в переменных Лагранжа.*

Часто используют соотношение элементарных объемов в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, вытекающее из (1.7):

$$dV/d\overset{\circ}{V} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\,. \tag{1.9}$$

2.1.3. Дифференцирование интеграла по подвижному объему. Рассмотрим некоторое переменное векторное поле $\mathbf{a}(x^i, t)$, являющееся непрерывно-дифференцируемой функцией x^i и t в области $V(t)$, $\forall t \geqslant 0$, где область $V(t)$ содержит одни и те же материальные точки (такую область обычно называют *подвижным объемом*). Проинтегрируем поле $\mathbf{a}(x^i,t)$ по области $V(t)$ и вычислим производную от интеграла: $\dfrac{d}{dt}\int_{V(t)}\mathbf{a}dV$.

Для этого сделаем замену переменных в интеграле: $x^i\to\overset{\circ}{x}{}^i$, где $x^i\in V$, $\overset{\circ}{x}{}^i\in\overset{\circ}{V}$, причем якобиан преобразований, согласно формуле (1.8), равен $|\partial x^k/\partial\overset{\circ}{x}{}^i|=\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\mathbf{a}dV=\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}}\,\mathbf{a}d\overset{\circ}{V}. \tag{1.10}$$

Поскольку при такой замене переменных мы одновременно перешли из конфигурации $\mathcal{K}$ в конфигурацию $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, в которой область $\overset{\circ}{V}$ не зависит от t, то производную по t можно внести под знак интеграла:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\mathbf{a}dV=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}\;\mathbf{a}\right)d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}\left(\mathbf{a}\frac{d}{dt}\sqrt{g}+\sqrt{g}\,\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)d\overset{\circ}{V}. \tag{1.10a}$$

Подставляя (1.4.7) и (1.4.37) в (1.10а), получим окончательно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\mathbf{a}dV=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\left(\mathbf{a}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}\right)d\overset{\circ}{V}=$$
$$=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}}\;\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{a})\right)d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{a})\right)dV. \tag{1.11}$$

Последнюю строку мы получили, совершив обратное преобразование координат $\overset{\circ}{x}{}^i\to x^i$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2 (правило дифференцирования интеграла по подвижному объему). *Для произвольного переменного векторного поля* $\mathbf{a}(x^i,t)$*, заданного в* $V(t)$ $\forall t\geqslant 0$ *и являющегося непрерывно-дифференцируемой функцией* x^i *и* t*, имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\mathbf{a}(x^i,t)dV=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{a}\right)dV. \tag{1.12}$$

Выбирая в формуле (1.12) в качестве векторного поля $\mathbf{a}(x^i,t)=\varphi(x^i,t)\bar{\mathbf{e}}_\alpha$, где $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$ — какой-либо из векторов декартова базиса, а $\varphi(x^i,t)$ — переменное скалярное поле, и вынося $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$ из-под знака интеграла в левой и правой частях, получаем формулу дифференцирования интеграла от скалярного поля:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \varphi(x^i,t)dV = \int\limits_{V} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\mathbf{v})\right) dV. \tag{1.13}$$

2.1.4. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера. Если в формуле (1.13) положить $\varphi = \rho$, и воспользоваться законом сохранения массы (1.5), то получим

$$\int\limits_{V} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\right) dV = 0 \tag{1.14}$$

— *закон сохранения массы в эйлеровом описании*. В отличие от закона (1.5), который формулируется для объема V сплошной среды, содержащего для различных $t \geqslant 0$ одни и те же материальные точки, закон (1.14) имеет место для произвольной геометрической области V пространства $\mathcal{E}_3^a$, которая в разные моменты времени t может содержать различные материальные точки.

Поскольку (1.14) верно для произвольной области $V \subset \mathcal{E}_3^a$, то оно выполняется тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение обращается в нуль.Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2.3. *Если функция ρ, удовлетворяющая закону сохранения массы (1.5), и скорость $\mathbf{v}$ являются непрерывно-дифференцируемыми в $V(t)$ для всех рассматриваемых $t \geqslant 0$, то в каждой точке $\mathbf{x}$ области $V \subset \mathcal{E}_3^a$ всякой сплошной среды для $\forall t \geqslant 0$ имеет место уравнение*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v} = 0. \tag{1.15}$$

Соотношение (1.15) называют *уравнением неразрывности в переменных Эйлера*.

Используя определение (1.4.7) полной производной по времени, уравнение (1.15) можно записать иначе:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1.16}$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}. \tag{1.17}$$

Иногда используют еще одну форму уравнения неразрывности, вытекающую из (1.17):

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}. \tag{1.18}$$

2.1.5. Вычисление полных производных по времени. С помощью уравнения неразрывности (1.15) докажем несколько вспомогательных соотношений, которые применяются в МСС.

Теорема 2.4. *Пусть имеется переменное тензорное поле n-го ранга ${}^n\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)$, непрерывно-дифференцируемое в области $V(t)$ $\forall t \geqslant 0$, тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{{}^n\boldsymbol{\Omega}}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\,{}^n\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes{}^n\boldsymbol{\Omega}), \tag{1.19}$$

$$\rho\frac{d}{dt}({}^n\mathbf{\Omega}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ {}^n\mathbf{\Omega}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\ {}^n\mathbf{\Omega}). \tag{1.20}$$

▼ В самом деле, используя определение (1.4.12) полной производной по времени, имеем

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{{}^n\mathbf{\Omega}}{\rho}\right) = \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{{}^n\mathbf{\Omega}}{\rho}\right) + \rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\left(\frac{{}^n\mathbf{\Omega}}{\rho}\right) =$$
$$= \frac{\partial\ {}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t} - \frac{\rho}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\ {}^n\mathbf{\Omega} - \frac{\rho}{\rho^2}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\otimes{}^n\mathbf{\Omega}) + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^n\mathbf{\Omega}. \tag{1.21}$$

Объединяя второе и третье слагаемые и учитывая, что из уравнения неразрывности следует: $(\partial\rho/\partial t) + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho = -\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$, получаем окончательно:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{{}^n\mathbf{\Omega}}{\rho}\right) = \frac{\partial\ {}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\ {}^n\mathbf{\Omega} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\ {}^n\mathbf{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}\ {}^n\mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\ {}^n\mathbf{\Omega}). \tag{1.22}$$

Для доказательства формулы (1.20) достаточно в первой формуле сделать замену ${}^n\mathbf{\Omega}\to\rho\ {}^n\mathbf{\Omega}$. ▲

2.1.6. Формулы Гаусса–Остроградского. В МСС для полей тензоров ${}^k\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ произвольного k-го ранга широко применяют *формулы Гаусса–Остроградского* [12] в отсчетной и актуальной конфигурациях:

$$\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes{}^k\mathbf{\Omega}d\overset{\circ}{\Sigma} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes{}^k\mathbf{\Omega}d\overset{\circ}{V}, \qquad \int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\otimes{}^k\mathbf{\Omega}d\Sigma = \int\limits_{V}\boldsymbol{\nabla}\otimes{}^k\mathbf{\Omega}\ dV. \tag{1.23}$$

$$\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot{}^k\mathbf{\Omega}d\overset{\circ}{\Sigma} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot{}^k\mathbf{\Omega}\ d\overset{\circ}{V}, \qquad \int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\cdot{}^k\mathbf{\Omega}d\Sigma = \int\limits_{V}\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^k\mathbf{\Omega}\ dV. \tag{1.24}$$

Если применить вторую формулу (1.23) к уравнению (1.12), то можно переписать его в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\mathbf{a}dV = \int\limits_{V}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}dV + \int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\otimes\mathbf{a}dV. \tag{1.25}$$

Упражнения к 2.1

Упражнение 2.1.1. Показать, что уравнение неразрывности (1.8) можно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}}{dt}.$$

Упражнение 2.1.2. Используя формулы (1.10), (1.19) и (1.20), показать, что имеют место следующие интегральные соотношения (*правило дифференцирования* *интеграла от тензорного поля по подвижному объему*):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} {}^n\mathbf{\Omega} dV = \int\limits_{V(t)} \rho\frac{d}{dt}\Big(\frac{{}^n\mathbf{\Omega}}{\rho}\Big)dV = \int\limits_{V}\Big(\frac{\partial\,{}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{v}\otimes{}^n\mathbf{\Omega})\Big)dV =$$

$$= \int\limits_{V}\frac{\partial\,{}^n\mathbf{\Omega}}{\partial t}dV + \int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}\otimes\ {}^n\mathbf{\Omega})d\Sigma,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\,{}^n\mathbf{\Omega} dV = \int\limits_{V(t)} \rho\frac{d\,{}^n\mathbf{\Omega}}{dt}dV = \int\limits_{V}\Big(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,{}^n\mathbf{\Omega}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes{}^n\mathbf{\Omega})\Big)dV =$$

$$= \int\limits_{V}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,{}^n\mathbf{\Omega})dV + \int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\ {}^n\mathbf{\Omega})d\Sigma.$$

Упражнение 2.1.3. Используя формулы (1.19), показать, что для произвольного переменного векторного поля $\mathbf{a}(X^k, t)$ имеет место следующее соотношение:

$$\rho\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mathbf{a}}{\rho}\Big) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{v}).$$

Упражнение 2.1.4. По аналогии с формулой (1.10) доказать, что для поля тензора ${}^k\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ произвольного k-го ранга имеет место формула замены переменных под интегралом:

$$\int\limits_{V} {}^k\mathbf{\Omega}\rho dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} {}^k\mathbf{\Omega}\overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{V}.$$

2.2. Закон изменения количества движения и тензор напряжений

2.2.1. Закон изменения количества движения. Перейдем к рассмотрению следующего основного закона МСС.

Определение 2.2. *Вектор*

$$\mathbf{I} = \int\limits_{V}\mathbf{v}dm = \int\limits_{V}\rho\mathbf{v}dV, \tag{2.1}$$

называют вектором к о л и ч е с т в а д в и ж е н и я *(или импульса) сплошной среды.*

Замечание 1. Как и в законе сохранения массы (1.5), область $V(t)$ содержит одни и те же материальные точки во все время движения.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что поскольку вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ материальной точки $\mathcal{M}$, согласно (1.4.1), введен в определенной системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$, в которой $\mathbf{x}(\mathcal{M})$ — радиус-вектор точки $\mathcal{M}$, то вектор количества движения $\mathbf{I}$ связан с этой системой координат. Если бы мы выбрали другую систему координат $O'\mathbf{e}'_i$, то, формально применяя формулу (2.1), мы получили бы другой вектор количества движения $\mathbf{I}' = \int_V \rho\mathbf{v}'dV$, где $\mathbf{v}' = d\mathbf{x}'/dt$, а $\mathbf{x}'(\mathcal{M})$ — радиус-вектор той же материальной точки $\mathcal{M}$, но в системе координат $O'\mathbf{e}'_i$.

Это замечание имеет очень большое значение для понимания следующей аксиомы.

Аксиома 5 (закон изменения количества движения). *Для любых двух сплошных сред $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_1$ в любой момент времени t существует векторная функция $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, t)$ (т.е. отображение $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_{+0} \to \mathcal{E}_3^a$), возможно ноль-значная (т.е. $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathbf{0}$), называемая* в е к т о р о м с и л ы *взаимодействия тел $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_1$ и обладающая следующими свойствами:*

- *аддитивностью:*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}' + \mathcal{B}'', \mathcal{B}_1, t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}'', \mathcal{B}_1, t),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1' + \mathcal{B}_1'', t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1', t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1'', t),$$

  где $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1' \cup \mathcal{B}_1''$,

- *скорость изменения вектора количества движения $\mathbf{I}$ сплошной среды $\mathcal{B}$ в любой момент времени t равна вектору $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e, t)$ —* с у м м а р н о м у в е к т о р у в н е ш н и х с и л, *действующих на тело $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}^e = \mathcal{U} \setminus \mathcal{B}$ — внешность тела $\mathcal{B}$):*

$$d\mathbf{I}/dt = \boldsymbol{\mathcal{F}}. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) называют *законом изменения количества движения* (законом изменения импульса).

Замечание 3. Поскольку вектор $\mathbf{I}$ введен в определенной системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$, то закон изменения количества движения (2.2) также введен для этой особо выделенной системы координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$. В любой другой системе координат $O'\mathbf{e}_i'$ вектор $d\mathbf{I}'/dt$ может отличаться от $d\mathbf{I}/dt$, и закон (2.2) также изменит свой вид. Формулировка закона изменения количества движения для таких систем приведена далее в п. 3.10.11. Системы координат, в которых закон изменения количества движения имеет вид (2.2), называют *инерциальными*, в том числе сама $O\bar{\mathbf{e}}_i$ является инерциальной. Существование инерциальных систем координат составляет содержание первого закона Ньютона, а уравнение (2.2) — второго закона Ньютона. В МСС оба этих закона вводятся аксиомой 5 вместе с аксиомами 1–3 о существовании особой системы координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$.

Подробнее о неинерциальных системах координат см. в разд. 3.9.

Рассмотрим в качестве тела $\mathcal{B}$ элементарный объем dV сплошной среды, содержащий точку $\mathcal{M}$. Тогда, согласно аксиоме 5, на dV тоже действует суммарный вектор внешних сил, который обозначим как $d\boldsymbol{\mathcal{F}}$. При этом возможны два случая:

1) $\mathcal{M}$ является внутренней точкой области V,
2) $\mathcal{M}$ лежит на поверхности Σ области V, в этом случае пересечение поверхности Σ с замыканием области $d\overline{V}$ обозначим как $d\Sigma$.

Определение 2.3. П л о т н о с т ь ю м а с с о в ы х с и л *называют вектор* $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \frac{d\boldsymbol{\mathcal{F}}}{dm} = \frac{d\boldsymbol{\mathcal{F}}}{\rho dV}, \tag{2.3}$$

а п л о т н о с т ь ю п о в е р х н о с т н ы х с и л *называют вектор* $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = d\boldsymbol{\mathcal{F}}/d\Sigma, \tag{2.4}$$

здесь dm — масса элементарного объема сплошной среды dV.

В силу свойства аддитивности $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, имеют место следующие соотношения для всего объема сплошной среды, занимающей объем V в $\mathcal{K}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_m + \boldsymbol{\mathcal{F}}_\Sigma, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_m = \int\limits_V \mathbf{f}dm = \int\limits_V \rho\mathbf{f}dV, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{s}d\Sigma. \tag{2.6}$$

Вектор $\boldsymbol{\mathcal{F}}_m$ называют *суммарным вектором внешних массовых сил*, действующих на рассматриваемую сплошную среду, а $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\Sigma$ — *суммарным вектором внешних поверхностных сил*.

С учетом (2.5) закон изменения количества движения (2.2) можно записать в *интегральной форме*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\mathbf{f}dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{s}d\Sigma. \tag{2.7}$$

2.2.2. Внешние и внутренние силы. Массовые $\mathbf{f}$ и поверхностные $\mathbf{s}$ силы являются *внешними* силами по отношению к объему сплошной среды V, так как они вызваны объектами, не принадлежащими к данному объему V сплошной среды (внешними объектами).

Основными видами внешних массовых сил являются: 1) сила тяжести $\mathbf{f} = g_\Sigma\bar{\mathbf{e}}$, где g_Σ — ускорение свободного падения на поверхности планеты (для Земли $g_\Sigma \approx 9,8$ кг/м $\cdot$ с^2), а $\bar{\mathbf{e}}$ — вектор нормали к поверхности планеты; 2) внешние силы инерции, вызванные движением тела по отношению к подвижной системе отсчета (см. далее в разд. 3.11); 3) электромагнитные силы.

Внешние поверхностные силы — это силы взаимодействия двух контактирующих друг с другом сплошных сред, например, одного твердого тела с другим при ударе.

Кроме внешних сил в механике сплошной среды существует также понятие *внутренних сил*. Преобразуем уравнение (2.7), воспользовавшись правилом дифференцирования интеграла по подвижному объему (1.12) и уравнением неразрывности (1.15):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \Big(\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\Big)dV =$$
$$= \int\limits_V \Big(\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{v} + \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}\Big)dV = \int\limits_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV. \tag{2.8}$$

Тогда уравнение (2.7) принимает вид:

$$\Omega = \int\limits_V \rho(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt})dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{s}d\Sigma = 0. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что ускорение $(d\mathbf{v}/dt)$ представляет собой плотность некоторых *массовых сил*, но уже *внутренних*, вызванных инерционными эффектами, поэтому их еще называют *внутренними инерционными силами*.

Рассмотрим пример *внутренних поверхностных сил*.

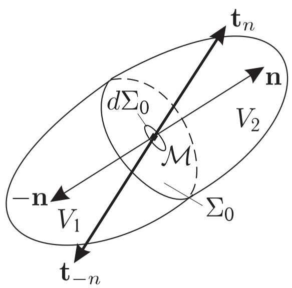

Рис. 2.1. Внутренние поверхностные силы на площадке Σ_0

Для этого рассмотрим произвольную область V сплошной среды и разделим ее поверхностью Σ_0 на две части V_1 и V_2 (рис. 2.1). Вектор нормали в точке $\mathcal{M}$, принадлежащей поверхности Σ_0, обозначим как $\mathbf{n}$, если он направлен в сторону от V_1. Тогда области V_1 и V_2 можно рассматривать как отдельные сплошные среды, на которые действуют суммарные векторы внешних сил $\boldsymbol{\mathcal{F}}_1$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}_2$. Если рассмотреть элементарную площадку $d\Sigma \in \Sigma_0$, которой принадлежит рассматриваемая точка $\mathcal{M}$, то для области V_1 на ней, согласно (2.4), действует поверхностная сила $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_1$ с плотностью $\mathbf{s}_1$, а для области V_2 на той же площадке $d\Sigma$ действует поверхностная сила $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_2$ с плотностью $\mathbf{s}_2$. Обозначим плотности этих сил следующим образом:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_1 = d\boldsymbol{\mathcal{F}}_1/d\Sigma \quad \text{и} \quad \mathbf{t}_{-n} = \mathbf{s}_2 = d\boldsymbol{\mathcal{F}}_2/d\Sigma. \tag{2.10}$$

Векторы $\mathbf{t}_n$ и $\mathbf{t}_{-n}$ называют *векторами напряжений*, они представляют собой плотности *внутренних поверхностных сил* по отношению ко всей области V сплошной среды (так как они определены для внутренних точек $\mathcal{M}$ этой области).

2.2.3. Теорема Коши о свойствах вектора напряжений. Очевидна относительность разбиения сил на внешние и внутренние: одни и те же силы могут быть внутренними или внешними по отношению к различным объемам сплошной среды.

Запишем теперь уравнения изменения количества движения (2.9) для всей области V и для отдельных его частей V_1 и V_2:

$$\int\limits_{V_1} \rho\left(\mathbf{f}_1 - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dV + \int\limits_{\Sigma_1} \mathbf{s}_1 d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_0} \mathbf{t}_n d\Sigma = 0, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{V_2} \rho\left(\mathbf{f}_2 - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dV + \int\limits_{\Sigma_2} \mathbf{s}_2 d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_0} \mathbf{t}_{-n} d\Sigma = 0, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{s}_i$ — силы, действующие в областях V_i и на их поверхностях Σ_i, т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i$ в V_i и $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i$ на Σ_i. В силу непрерывности всех функций $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{f}_i$, вычитая из (2.9) уравнения (2.11) и (2.12), получаем, что

$$\int\limits_{\Sigma_0} (\mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{-n}) d\Sigma = 0. \tag{2.13}$$

В силу произвольности поверхности Σ_0, заключаем, что $\mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{-n} = 0$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5 (первая теорема Коши — о непрерывности вектора напряжений). *Для одной и той же точки $\mathcal{M}$, являющейся внутренней точкой области V, вектор напряжений, определенный по отношению к площадкам $\mathbf{n}d\Sigma_0$ и $-(\mathbf{n}d\Sigma_0)$, различается только знаком:*

$$\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{-n}, \tag{2.14}$$

т.е. поле $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ — непрерывно в области V.

Замечание. Результат (2.14) является следствием сделанного допущения об отсутствии разрывов функций при выводе уравнения (2.9). В случае разрывов функций (например, для ударных волн в сплошных средах), уравнение (2.14) уже не имеет места.

Рассмотрим еще одно важное свойство вектора напряжений. Построим в любой точке $\mathcal{M}$ элементарный объем dV в виде тетраэдра (рис. 2.2), ребра которого ориентированы по векторам $dx_\alpha = \mathbf{r}_\alpha dX^\alpha$. Обозначим $d\Sigma_\alpha$ площади трех граней, лежащих в координатных плоскостях, а $d\Sigma_0$ — площадь наклонной грани тетраэдра. Вектор внешней нормали к $d\Sigma_0$ обозначим $\mathbf{n}$. На поверхностях $d\Sigma_\alpha$ векторы нормали определяем как $-(\mathbf{r}^\alpha/|\mathbf{r}^\alpha|)$, так как векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^\alpha$ ортогональны плоскостям $d\Sigma_\alpha$.

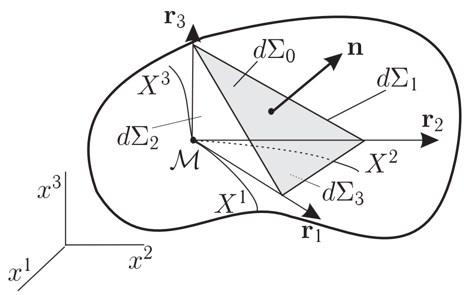

Рис. 2.2. К свойству внутренних напряжений

Площади граней $d\Sigma_0$ и $d\Sigma_\alpha$ связаны соотношением

$$\mathbf{n}d\Sigma_0 - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\mathbf{r}^\alpha}{|\mathbf{r}^\alpha|} d\Sigma_\alpha = 0. \tag{2.15}$$

Это соотношение следует, например, из уравнения

$$\int\limits_\Sigma \mathbf{n}d\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}d\Sigma = \int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}dV = 0, \tag{2.16}$$

примененного к тетраэдру, где Σ и V — полная поверхность и объем тетраэдра. Здесь мы использовали формулу Гаусса–Остроградского (1.23).

Умножая (2.15) скалярно на $\mathbf{r}_\alpha$, получаем

$$|\mathbf{r}^\alpha|\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_\alpha d\Sigma_0 = d\Sigma_\alpha. \tag{2.17}$$

Применив к тетраэдру уравнение (2.9), находим

$$\mathbf{t}_n d\Sigma_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{t}_{-\alpha} d\Sigma_\alpha + \rho(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt})dV = 0, \tag{2.18}$$

где $\mathbf{t}_\alpha$ — вектор напряжений на площадке $d\Sigma_\alpha$ с нормалью $(\mathbf{r}^\alpha/|\mathbf{r}^\alpha|)$, а $\mathbf{t}_{-\alpha}$ — с нормалью $(-\mathbf{r}^\alpha/|\mathbf{r}^\alpha|)$. Учитывая формулы (2.14) и (2.17), получаем

$$\mathbf{t}_n - \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_\alpha|\mathbf{r}^\alpha|\mathbf{t}_\alpha = -\rho(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt})\frac{|dV|}{d\Sigma_0}. \tag{2.19}$$

Так как $dV/d\Sigma_0$ — бесконечно малая величина, то получаем следующую теорему.

Теорема 2.6 (вторая теорема Коши). *Вектор напряжений $\mathbf{t}_n$ на произвольной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ выражается через векторы напряжений $\mathbf{t}_\alpha$ на трех координатных площадках следующим образом:*

$$\mathbf{t}_n = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_\alpha|\mathbf{r}^\alpha|\mathbf{t}_\alpha. \tag{2.20}$$

Теоремы 2.5 и 2.6 в иной форме были доказаны Коши.

Так как

$$|\mathbf{r}^\alpha| = (\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}^\alpha)^{1/2} = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,, \tag{2.21}$$

то соотношение (2.20) можно записать в виде

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}, \tag{2.22}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор второго ранга, называемый *тензором истинных напряжений Коши*:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{t}^\alpha = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{t}^i, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{t}^\alpha \equiv \mathbf{t}_\alpha\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,. \tag{2.24}$$

Таким образом, теорему 2.6 можно сформулировать иначе.

Теорема 2.6а (Коши). *Для непрерывного в $V\cup\Sigma$ поля вектора напряжений $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_n(\mathbf{x})$, удовлетворяющего уравнению (2.7), всегда существует поле тензора $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, удовлетворяющее соотношению (2.22) в $V\cup\Sigma$.*

2.2.4. Обобщенная теорема Коши. Теорему 2.6а можно сформулировать для произвольного векторного или даже тензорного поля $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего уравнению, аналогичному (2.7).

Теорема 2.6б. *Пусть существуют непрерывно-дифференцируемое тензорное поле ${}^m\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, $m \geqslant 0$, и непрерывное поле ${}^m\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ в области V, а также существует непрерывное в $V\cup\Sigma$ поле вектора ${}^m\mathbf{B}_n(\mathbf{x}, t)$, зависящее от выбора поля вектора нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$, которые удовлетворяют уравнению*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\widetilde{V}} \rho\, {}^m\mathbf{A}dV = \int\limits_{\widetilde{V}} \rho\, {}^m\mathbf{C}dV + \int\limits_{\widetilde{\Sigma}} {}^m\mathbf{B}_n d\Sigma \quad \forall \widetilde{V}\subset V, \tag{2.25}$$

где $\widetilde{\Sigma}$ *— граница области* $\widetilde{V}$*, тогда поле* ${}^m\mathbf{B}_n(\mathbf{x}, t)$ *может зависеть от поля* $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ *только линейно, т.е. существует такое тензорное поле* $(m + {}$ ${}+ 1)$*-го ранга —* ${}^{m+1}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$*, что в* $V \cup \Sigma$ *имеет место соотношение*

$$ {}^m\mathbf{B}_n = \mathbf{n} \cdot {}^{m+1}\mathbf{B}. \tag{2.26}$$

▼ Доказательство этой теоремы осуществляем аналогично доказательству теоремы 2.6 путем выбора в качестве области $\widetilde{V}$ тетраэдра, ориентированного по локальным векторам базиса $\mathbf{r}_i$ (см. упр. 2.2.3). ▲

Уравнение (2.25) называют *уравнением баланса*.

2.2.5. Тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа. Тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{T}$, определенный формулами (2.22)–(2.24), как и всякий тензор второго ранга можно разложить по любому тензорному базису, например:

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = T_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j. \tag{2.27}$$

Определение (2.23) позволяет дать наглядное геометрическое изображение тензора напряжений Коши.

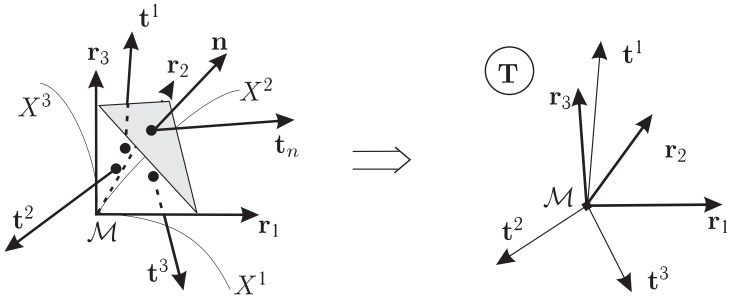

Рис. 2.3. Геометрическое изображение тензора напряжений Коши

Действительно, если выбрать векторы $\mathbf{r}_i$ в качестве левых векторов, а $\mathbf{t}^i$ рассматривать как правые векторы, то можно перейти к представлению тензора $\mathbf{T}$ в виде классов эквивалентности (см. п. 1.1.4 и [12]):

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{t}^i = [\mathbf{r}_1\mathbf{t}^1\mathbf{r}_2\mathbf{t}^2\mathbf{r}_3\mathbf{t}^3]. \tag{2.28}$$

Согласно геометрическому определению тензора (см. [12]), такой тензор $\mathbf{T}$ можно изобразить как упорядоченную совокупность шести векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{t}^i$ с общим началом в точке $\mathcal{M}$ (рис. 2.3), в которой определены векторы базиса $\mathbf{r}_i$.

Тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ определен на площадке $d\Sigma$ в актуальной конфигурации (деформируемой площадке). Можно определить тензор напряжений и на соответствующей $d\overset{\circ}{\Sigma}$ в отсчетной конфигурации (недеформированной площадке). Для этого вспомним соотношение (1.2.49), связывающее ориентированные площадки в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$\mathbf{n}d\Sigma = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\overset{\circ}{\Sigma}_0, \tag{2.29}$$

и рассмотрим вектор напряжений $\mathbf{t}_n$ на площадке $d\Sigma$:

$$\mathbf{t}_n d\Sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}d\Sigma = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.30}$$

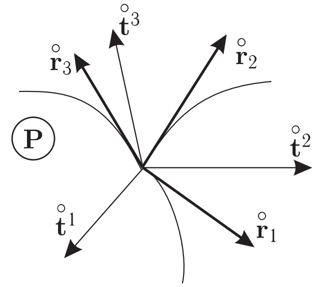

Рис. 2.4. Геометрическое изображение тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа $\mathbf{P}$

Здесь введен тензор

$$\mathbf{P} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}, \tag{2.31}$$

называемый *первым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа*, который очевидно определен на недеформированной площадке $d\overset{\circ}{\Sigma}$.

Вектор $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_n$ называют *вектором напряжений Пиолы–Кирхгофа*, он связан с тензором $\mathbf{P}$ формулой Коши (2.22):

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}}_n = \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}. \tag{2.32}$$

С помощью соотношений (1.1.35) и (2.23), выражение (2.31) можно представить в виде классов эквивалентности (п. 1.1.4)

$$\mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i\otimes\overset{\circ}{\mathbf{t}}^i = [\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1\overset{\circ}{\mathbf{t}}^1\overset{\circ}{\mathbf{r}}_2\overset{\circ}{\mathbf{t}}^2\overset{\circ}{\mathbf{r}}_3\overset{\circ}{\mathbf{t}}^3], \tag{2.33}$$

где обозначены векторы

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}}^\alpha = \mathbf{t}_\alpha\sqrt{g^{\alpha\alpha}g/\overset{\circ}{g}}\,. \tag{2.34}$$

С помощью этого представления можно также дать геометрическое изображение тензора Пиолы–Кирхгофа в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ отсчетной конфигурации (рис. 2.4).

2.2.6. Физический смысл компонент тензора напряжений Коши. Геометрическую трактовку тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ дают формулы (2.28) и (2.33). Поясним физический смысл компонент $\widehat{T}^{ij}$ тензора напряжений Коши в ортонормированном базисе.

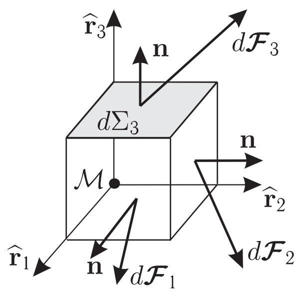

Рис. 2.5. К вопросу о физическом смысле компонент тензора напряжений Коши

Пусть в $\mathcal{K}$ имеется локальный базис $\mathbf{r}_i$, тогда, используя процесс ортогонализации (см., например, [2]), всегда можно построить ортогональный базис $\widetilde{\mathbf{r}}_i$, а затем, нормируя векторы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$, — ортонормированный базис $\widehat{\mathbf{r}}_i$, который мы называем *физическим базисом*. В этом базисе тензор напряжений Коши (2.27) имеет компоненты $\widehat{T}^{ij}$ (очевидно, совпадающие с $\widehat{T}_{ij}$):

$$\mathbf{T} = \widehat{T}^{ij}\widehat{\mathbf{r}}_i\otimes\widehat{\mathbf{r}}_j. \tag{2.35}$$

Выберем теперь произвольную материальную точку $\mathcal{M}\in V$ и рассмотрим элементарный объем $dV\in V$, содержащий эту точку и имеющий форму куба, грани которого ортогональны векторам $\widehat{\mathbf{r}}_\alpha$ (рис. 2.5).

Обозначим $d\Sigma_\alpha$ площадь грани этого куба, ортогональную к $\widehat{\mathbf{r}}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Поскольку мы рассматриваем элементарный объем dV, то тензор напряжений $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ одинаков в каждой точке $\mathbf{x}\in dV$ и $\mathbf{x}\in d\Sigma_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$.

На каждой грани $d\Sigma_\alpha$ действует поверхностная сила $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$, связанная с вектором напряжений $\mathbf{t}_n$ на этой грани соотношением (2.10):

$$\text{на } d\Sigma_\alpha: \qquad \frac{d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha}{d\Sigma_\alpha} = \mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}. \tag{2.36}$$

Представляя векторы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$ и $\mathbf{n}$ в базисе $\widehat{\mathbf{r}}_i$:

$$d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha = d\mathcal{F}^i_\alpha\widehat{\mathbf{r}}_i, \qquad \mathbf{n} = \widehat{n}^i\widehat{\mathbf{r}}_i, \tag{2.37}$$

из (2.36) получаем:

$$\text{на } d\Sigma_\alpha: \quad \frac{d\mathcal{F}^i_\alpha}{d\Sigma_\alpha} = \widehat{n}_j\widehat{T}^{ji} = \widehat{T}^{\alpha i}, \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{2.38}$$

так как на $d\Sigma_\alpha$: $\widehat{n}_\alpha = 1$, $\widehat{n}_\beta = \widehat{n}_\gamma = 0$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Формула (2.38) позволяет прояснить физический смысл компонент $\widehat{T}^{ij}$ тензора напряжений Коши:

$$\text{на } d\Sigma_\alpha: \quad \widehat{T}^{\alpha\alpha} = \frac{d\mathcal{F}^\alpha_\alpha}{d\Sigma_\alpha}, \quad \widehat{T}^{\alpha\beta} = \frac{d\mathcal{F}^\beta_\alpha}{d\Sigma_\alpha}, \quad \widehat{T}^{\alpha\gamma} = \frac{d\mathcal{F}^\gamma_\alpha}{d\Sigma_\alpha}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \tag{2.39}$$

Нормальные напряжения $\widehat{T}^{\alpha\alpha}$ — это отношение соответствующей нормальной компоненты $d\mathcal{F}^\alpha_\alpha$ поверхностной силы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$, действующей на площадке $d\Sigma_\alpha$, к величине этой площадки, а *касательные напряжения* $\widehat{T}^{\alpha\beta}$, $\widehat{T}^{\alpha\gamma}$ — это отношения касательных компонент $d\mathcal{F}^\beta_\alpha$, $d\mathcal{F}^\gamma_\alpha$ той же силы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$, действующей на площадке $d\Sigma_\alpha$, к величине этой же площадки.

Замечание 1. Поскольку тензор $\mathbf{T}$ одинаков во всем кубе dV, то, вследствие теоремы 2.5, силы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$ на противоположных гранях куба отличаются только знаком. Но и вектор нормали $\mathbf{n}$ на этих гранях отличается тоже только знаком, поэтому соотношения (2.36), а, следовательно, и (2.39) на этих гранях одни и те же.

Замечание 2. В силу сказанного, различных соотношений в формуле (2.39) — по три на каждой из трех граней $d\Sigma_\alpha$, т.е. всего девять соотношений: для трех нормальных напряжений $\widehat{T}^{\alpha\alpha}$ и шести касательных напряжений $\widehat{T}^{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$. При этом «парные» касательные напряжения $\widehat{T}^{\alpha\beta}$ и $\widehat{T}^{\beta\alpha}$, определенные на разных гранях $d\Sigma_\alpha$ и $d\Sigma_\beta$, вообще говоря, не совпадают (рис. 2.6).

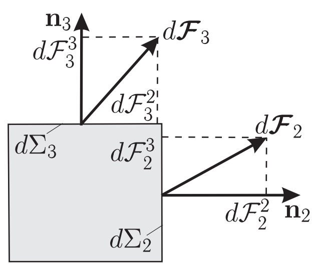

Рис. 2.6. К вопросу о различии парных касательных напряжений

Далее мы увидим, что для многих задач МСС тензор напряжений оказывается симметричным $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ (из дополнительных соображений), в этом и только в этом случае парные касательные напряжения совпадают: $\widehat{T}^{\alpha\beta} = \widehat{T}^{\beta\alpha}$.

Выясним теперь физический смысл компонент $\widehat{P}^{ij}$ тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа $\mathbf{P}$ в ортонормированном базисе $\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_i$ отсчетной конфигурации:

$$\mathbf{P} = \widehat{P}^{ij}\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_i \otimes \widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_j. \tag{2.40}$$

Выберем в $\mathring{\mathcal{K}}$ материальную точку $\mathcal{M}$ и рассмотрим элементарный объем $d\mathring{V}$ в форме куба, содержащий эту точку. Грани куба $d\mathring{\Sigma}_\alpha$, как и ранее, выберем ортогональными векторам $\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_\alpha$ (рис. 2.7).

Этому кубу $d\mathring{V}$ в конфигурации $\mathcal{K}$ соответствует искаженный объем dV. В силу геометрической картины преобразования малой окрестности материальной точки сплошной среды (см. п. 1.3.5), объем dV будет иметь форму параллелепипеда, вообще говоря, с наклонными гранями $d\Sigma_\alpha$, но остающимися плоскими.

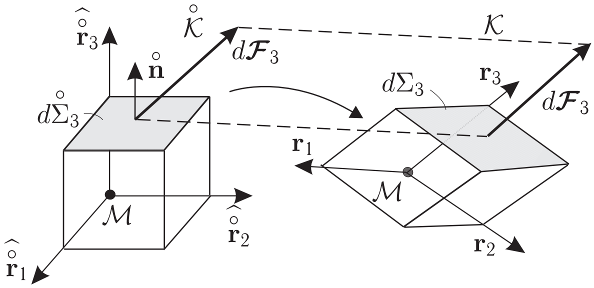

Рис. 2.7. К вопросу о физическом смысле компонент тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа

Для элементарных объемов $d\mathring{V}$ и dV тензоры напряжений $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{P}(\mathring{\mathbf{x}})$ одинаковы в каждой точке $\mathbf{x} \in d\overline{V}$ и $\mathring{\mathbf{x}} \in d\overline{\mathring{V}}$.

На деформированной (но плоской) грани $d\Sigma_\alpha$ действует поверхностная сила $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$. Перенесем ее параллельным переносом в $\mathring{\mathcal{K}}$ на соответствующую грань $d\mathring{\Sigma}_\alpha$, тогда соотношения (2.30) на грани $d\mathring{\Sigma}_\alpha$ можно записать так:

$$\text{на } d\mathring{\Sigma}_\alpha: \quad \frac{d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha}{d\Sigma_\alpha}\left(\frac{d\Sigma_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha}\right) = \mathbf{t}_n\left(\frac{d\Sigma_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha}\right) = \mathring{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}. \tag{2.41}$$

Представляя векторы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$ и $\mathring{\mathbf{n}}$ в базисе $\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_i$:

$$d\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha = d\mathring{\mathcal{F}}^i_\alpha\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_i, \qquad \mathring{\mathbf{n}} = \widehat{\mathring{n}}^i\widehat{\mathring{\mathbf{r}}}_i,$$

из (2.41) получаем

$$\text{на } d\mathring{\Sigma}_\alpha: \quad \frac{d\mathring{\mathcal{F}}^i_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha} = \widehat{\mathring{n}}_i\widehat{P}^{ij} = \widehat{P}^{\alpha i}, \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{2.42}$$

так как на $\mathring{\Sigma}_\alpha$: $\widehat{\mathring{n}}_\alpha = 1$, а $\widehat{\mathring{n}}_\beta = \widehat{\mathring{n}}_\gamma = 0$.

Из (2.42) получаем, что

$$\text{на } d\mathring{\Sigma}_\alpha: \quad \widehat{P}^{\alpha\alpha} = \frac{d\mathring{\mathcal{F}}^\alpha_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha}, \quad \widehat{P}^{\alpha\beta} = \frac{d\mathring{\mathcal{F}}^\beta_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha}, \quad \widehat{P}^{\alpha\gamma} = \frac{d\mathring{\mathcal{F}}^\gamma_\alpha}{d\mathring{\Sigma}_\alpha}, \quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha. \tag{2.43}$$

Таким образом из (2.43) следует, что *нормальное напряжение* $\widehat{P}^{\alpha\alpha}$ — это отношение нормальной компоненты $d\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{\alpha}_{\alpha}$ поверхностной силы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha}$, действующей на деформированной площадке $d\Sigma_{\alpha}$, к величине соответствующей недеформированной площадки $d\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha}$. *Касательные напряжения* $\widehat{P}^{\alpha\beta}$, $\widehat{P}^{\alpha\gamma}$ — это отношения касательных компонент $d\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{\beta}_{\alpha}$, $d\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{\gamma}_{\alpha}$ той же поверхностной силы $d\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha}$, действующей на деформированной площадке $d\Sigma_{\alpha}$, к величине недеформированной площадки $d\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha}$.

Замечания 1 и 2 для тензора $\mathbf{P}$ также справедливы за исключением того, что тензор $\mathbf{P}$ остается несимметричным, даже если $\mathbf{T}$ — симметричен.

2.2.7. Уравнение движения в пространственном и материальном описаниях. Подставляя обозначения (2.10) для внутренних поверхностных сил и формулу Коши (2.22) в (2.7), получим еще одну часто используемую формулировку закона изменения количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}d\Sigma + \int\limits_V \rho\mathbf{f}dV. \tag{2.44}$$

Подставляя теперь (2.10) и (2.22) в (2.9):

$$\int\limits_V \left(\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{f}\right)dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}d\Sigma, \tag{2.45}$$

и преобразуя поверхностный интеграл к объемному по формуле Гаусса–Остроградского (1.24), придем к следующему соотношению:

$$\int\limits_V \left(\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{f} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}\right)dV = 0. \tag{2.46}$$

Отсюда, в силу произвольности объема V, заключаем, что подынтегральное выражение должно всегда обращаться в ноль. Итак мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.7. *Если функции* $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{f}$, *удовлетворяющие закону изменения количества движения (2.44) и зависящие от* x^i, t, *являются непрерывно-дифференцируемыми в* $V(t)$ *для всех рассматриваемых* $t \geqslant 0$, *то в каждой точке* $\mathcal{M} \in V(t)$ *имеет место* у р а в н е н и е д в и ж е н и я *в* э й л е р о в о м о п и с а н и и *(т.е. в* $\mathcal{K}$*):*

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}. \tag{2.47}$$

Используя свойство (1.20) полной производной, уравнение движения можно записать в *дивергентной форме*:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}. \tag{2.48}$$

Преобразуем теперь уравнение движения (2.45) с учетом (2.30):

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f}\right) d\overset{\circ}{V} - \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} d\overset{\circ}{\Sigma} = 0. \tag{2.49}$$

С помощью теоремы Гаусса–Остроградского (1.24) преобразуем это уравнение к виду

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\rho}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f}\right) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P}\right) d\overset{\circ}{V} = 0. \tag{2.50}$$

Откуда, в силу произвольности объема $\overset{\circ}{V}$, получаем еще одну теорему.

Теорема 2.8. *Если выполнены условия теоремы 2.7, то в каждой точке $\mathcal{M} \in \overset{\circ}{V}$ для всех рассматриваемых $t \geqslant 0$ имеет место уравнение движения в лагранжевом (материальном) описании (т.е. в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$):*

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P}. \tag{2.51}$$

Так как в лагранжевом описании полная производная по времени совпадает с частной (см. (1.4.9)), то дивергентная форма уравнения движения в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ совпадает с (2.51):

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}. \tag{2.52}$$

Упражнения к 2.2

Упражнение 2.2.1. Используя формулы (1.1.35а) и (2.31), показать, что тензор Пиолы–Кирхгофа $\mathbf{P}$ имеет компоненты $((\overset{\circ}{\rho}/\rho)T^{ij})$ в смешанном диадном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}_j$:

$$\mathbf{P} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)T^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}_j.$$

Упражнение 2.2.2. Используя результаты упр. 2.2.1 и 1.1.12, показать, что компоненты $\overset{\circ}{P}{}^{ij}$ тензора $\mathbf{P}$ в базисе отсчетной конфигурации можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P} = \overset{\circ}{P}{}^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \quad \mathbf{F} = \overset{\circ}{F}{}^{j}{}_{m}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{m}, \quad \overset{\circ}{P}{}^{ij} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)T^{im}\overset{\circ}{F}{}^{j}{}_{m}.$$

Упражнение 2.2.3. Доказать теорему 2.6б тем же методом, что был использован при доказательстве теоремы 2.6.

2.3. Закон изменения момента количества движения

2.3.1. Интегральная форма. Перейдем к рассмотрению следующего фундаментального закона МСС. Перед его формулировкой, как всегда, дадим ряд определений.

Определение 2.4. *Векторы*

$$\mathbf{k}' = \int\limits_V \mathbf{x} \times \mathbf{v} dm = \int\limits_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV,$$

$$\boldsymbol{\mu}'_m = \int\limits_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dm = \int\limits_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\mu}'_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n d\Sigma, \quad \boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'_m + \boldsymbol{\mu}'_\Sigma,$$

называют соответственно: $\mathbf{k}'$ — вектором момента количества движения (момента импульса) сплошной среды, $\boldsymbol{\mu}'_m$ — вектором массовых моментов, $\boldsymbol{\mu}'_\Sigma$ — вектором поверхностных моментов сплошной среды, $\boldsymbol{\mu}'$ — вектором моментов сплошной среды.

Аксиома 6 (закон изменения момента количества движения). *Для всякой сплошной среды $\mathcal{B}$ существуют две аддитивные векторные функции: $\mathbf{k}''(\mathcal{B}, t)$ — вектор собственного момента количества движения и $\boldsymbol{\mu}''(\mathcal{B}, t)$ — вектор собственных моментов, а также — положительная константа $\gamma_s > 0$, называемая спиновой константой, такие что для $\forall t \geqslant 0$ выполняется уравнение*

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\mu}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{k}$ — вектор полного момента количества движения среды, а $\boldsymbol{\mu}$ — вектор полного момента:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \frac{1}{\gamma_s}\mathbf{k}'', \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu}''.$$

Замечание 1. Аксиома 6 постулирует существование двух новых векторных величин: $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$, подобно тому, как в аксиоме 5 был введен вектор силы $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Физическая интерпретация величин $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$ значительно более сложная, чем для силы $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, обоснования для введения которой почти не требуется (например, эффекты, вызванные силой тяжести и силой инерции, — интуитивно понятны и хорошо известны). Появление векторов $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$ может быть обусловлено электромагнитными эффектами в некоторых сплошных средах, в которых имеется магнитная упорядоченная структура (например, для ферромагнетиков). Однако векторы $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$ могут появляться и для некоторых сред, у которых отсутствуют электромагнитные эффекты (часто такие среды называют континуумом Коссера — по фамилии братьев Коссера, которые первыми начали изучение этих сред). Заметим также, что хотя спиновая константа γ_s в законе (3.2) кажется «лишней» (вместо $(1/\gamma_s)\mathbf{k}''$ можно было просто ввести вектор $\mathbf{k}''$), ее появление весьма существенно — это будет разъяснено далее в п. 2.4.6.

В силу аддитивности векторов $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$, выполняя те же построения, что и в п. 2.2.1, приходим к следующей классификации.

Определение 2.5. *Плотностью собственного момента количества движения называют вектор* $\mathbf{k}_m$, *плотностью собственных массовых моментов — вектор* $\mathbf{h}_m$, *а плотностью собственных поверхностных моментов — вектор* $\mathbf{h}_\Sigma$, *определенные в точке* $\mathcal{M}$ *сплошной среды следующим образом:*

$$\mathbf{k}_m = \frac{d\mathbf{k}''}{dm}, \qquad \mathbf{h}_m = \frac{d\boldsymbol{\mu}''}{dm}, \qquad \mathbf{h}_\Sigma = \frac{d\boldsymbol{\mu}''}{d\Sigma}. \tag{3.3}$$

В силу аддитивности векторов $\mathbf{k}''$ и $\boldsymbol{\mu}''$, для всего объема сплошной среды имеем:

$$\mathbf{k}'' = \int\limits_V \rho \mathbf{k}_m dV, \qquad \boldsymbol{\mu}'' = \boldsymbol{\mu}''_m + \boldsymbol{\mu}''_\Sigma, \tag{3.4}$$

где обозначены следующие интегралы:

$$\boldsymbol{\mu}''_m = \int\limits_V \rho \mathbf{h}_m dV, \quad \boldsymbol{\mu}''_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{h}_\Sigma d\Sigma, \tag{3.4a}$$

Подставляя (3.1) и (3.4) в (3.2), получим *интегральную формулировку закона изменения момента количества движения*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{v} + \frac{\rho}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\right) dV = \int\limits_V (\mathbf{x}\times\rho\mathbf{f} + \rho\mathbf{h}_m)\, dV + \int\limits_\Sigma (\mathbf{x}\times\mathbf{t}_n + \mathbf{h}_\Sigma)\, d\Sigma. \tag{3.5}$$

2.3.2. Тензор моментных напряжений. Уравнение (3.5) имеет вид (2.25), если в последнем обозначить

$$\mathbf{A} = \mathbf{x}\times\mathbf{v} + \mathbf{k}_m, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{x}\times\mathbf{f} + \mathbf{h}_m \qquad \text{и} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{x}\times\mathbf{t}_n + \mathbf{h}_\Sigma.$$

Тогда к этому уравнению (3.5) можно применить теорему 2.6б, которая утверждает существование такого поля тензора второго ранга $\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)$, определенного в $V\cup\Sigma$, что имеет место соотношение, являющееся аналогом (2.22):

$$\mathbf{h}_\Sigma + \mathbf{x}\times\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{M}}. \tag{3.6}$$

Вводя новое обозначение

$$\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{M}} + \mathbf{T}\times\mathbf{x}, \tag{3.7}$$

этот результат сформулируем иначе.

Теорема 2.9. *Для непрерывных в* $V\cup\Sigma$ *полей векторов* $\mathbf{t}_n$ *и* $\mathbf{h}_\Sigma$, *удовлетворяющих уравнениям (2.7) и (3.5), существует поле тензора второго ранга* $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, *такое, что в* $V\cup\Sigma$ *выполнено соотношение*

$$\mathbf{h}_\Sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{M}. \tag{3.8}$$

Тензор $\mathbf{M}$ называют *тензором моментных напряжений.*

2.3.3. Дифференциальная форма закона изменения момента количества движения. Дадим теперь выражение закона изменения момента количества движения в дифференциальной форме. Рассмотрим вначале левую часть (3.5) и перейдем от V к $\overset{\circ}{V}$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\Big(\mathbf{x}\times\mathbf{v}+\frac{1}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\Big)d\overset{\circ}{V}=\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\Big(\mathbf{x}\times\mathbf{v}+\frac{1}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\Big)d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\Big(\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\mathbf{v})+$$
$$+\frac{1}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}\Big)d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{V}\rho\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{1}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}\Big)dV=\int\limits_{V}\rho\Big(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{1}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}\Big)dV, \tag{3.9}$$

так как $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$.

Преобразуем правую часть уравнения (3.5) с помощью теоремы Гаусса–Остроградского (1.24) и формулы (2.22):

$$\int\limits_{\Sigma}\mathbf{x}\times\mathbf{t}_n d\Sigma=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{x}\times(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T})d\Sigma=-\int\limits_{\Sigma}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{T}\times\mathbf{x})d\Sigma=-\int\limits_{V}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\times\mathbf{x})dV. \tag{3.10}$$

Набла-оператор $\boldsymbol{\nabla}$ в (3.10) вычисляется следующим образом:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\times\mathbf{x})=\mathbf{r}^i\cdot\frac{\partial}{\partial X^i}(\mathbf{T}\times\mathbf{x})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\times\mathbf{x}+\mathbf{r}^i\cdot\mathbf{T}\times\mathbf{r}_i=$$
$$=-\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})+\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}. \tag{3.11}$$

Тогда, подставляя (3.11) в (3.10), получим

$$\int\limits_{\Sigma}\mathbf{x}\times\mathbf{t}_n d\Sigma=\int\limits_{V}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}dV-\int\limits_{V}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}dV. \tag{3.12}$$

Далее подставляя (3.12) и (3.9) в (3.5), находим

$$\int\limits_{V}\rho\mathbf{x}\times\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}\right)dV+\int\limits_{V}\frac{\rho}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}dV=$$
$$=\int\limits_{V}\rho\mathbf{h}_m dV+\int\limits_{V}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}dV-\int\limits_{V}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}dV. \tag{3.13}$$

Здесь мы использовали определение тензора моментных напряжений $\mathbf{M}$ (3.7).

С учетом формулы (2.47), уравнение (3.13) принимает окончательный вид:

$$\int\limits_{V}\left(\frac{\rho}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}-\rho\mathbf{h}_m-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}+\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}\right)dV=0. \tag{3.14}$$

Отсюда, в силу произвольности объема V, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.10. *Если функции* $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{f}$, *удовлетворяющие уравнению (2.44), а также* $\mathbf{k}_m$, $\mathbf{h}_m$, $\mathbf{M}$, *удовлетворяющие уравнению (3.50), являются непрерывно-дифференцируемыми в* $V(t)$ *для всех рассматриваемых*

$t \geqslant 0$, то в каждой точке $\mathcal{M} \in V(t)$ имеет место уравнение ***изменения момента количества движения:***

$$\frac{\rho}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt} = \rho\mathbf{h}_m + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M} - \boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}. \tag{3.15}$$

Таким образом, в уравнение изменения момента количества движения входит только одна «классическая» механическая характеристика — тензор напряжений $\mathbf{T}$, остальные величины: $\mathbf{k}_m$, $\mathbf{h}_m$ и $\mathbf{M}$, как отмечалось, либо имеют немеханическую природу, либо обусловлены «неклассическими» механическими свойствами.

2.3.4. Неполярные и полярные среды. Для классических сред, к которым относится подавляющее большинство тел, полагают

$$\mathbf{k}_m = 0, \qquad \mathbf{h}_m = 0, \qquad \mathbf{M} = 0. \tag{3.16}$$

Такие среды называют *неполярными*, для них из (3.16) и (3.15) следует

$$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T} = -\sqrt{g}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha}}^{3}(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha})\mathbf{r}^{\gamma} = 0, \tag{3.17}$$

откуда получаем

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}, \tag{3.18}$$

т.е. тензор напряжений Коши (для неполярных сред) является симметричным.

Заметим, что соответствующий ему тензор Пиолы–Кирхгофа не является симметричным даже для неполярных сред, что следует из его определения (2.31).

Таким образом, для неполярных сред закон изменения момента количества движения сводится к соотношению (3.18) симметрии тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$.

Среды, для которых собственные величины сплошной среды $\mathbf{k}_m$, $\mathbf{h}_m$ и $\mathbf{M}$ отличны от тождественного нуля:

$$\mathbf{k}_m \neq 0, \qquad \mathbf{h}_m \neq 0, \qquad \mathbf{M} \neq 0, \tag{3.19}$$

называют *полярными*. Для полярных сред тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ несимметричен.

2.3.5. Уравнение изменения момента количества движения в материальном описании. Интегральная формулировка уравнения изменения момента количества движения (3.5) может быть представлена и в материальном описании. Для этого следует преобразовать левую часть формулы (3.5) согласно (3.9):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\Big(\mathbf{x}\times\mathbf{v} + \frac{1}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\Big)dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\Big(\mathbf{x}\times\mathbf{v} + \frac{1}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\Big)d\overset{\circ}{V} =$$
$$= \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\Big(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\gamma_s}\frac{d\mathbf{k}_m}{dt}\Big)d\overset{\circ}{V} \tag{3.20}$$

и ввести $\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ — *лагранжев тензор моментных напряжений* в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ по аналогии с тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} d\Sigma = \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{M}} d\overset{\circ}{\Sigma}, \tag{3.21}$$

и $\overset{\circ}{\mathbf{h}}_\Sigma$ — вектор плотности собственных поверхностных моментов в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}}_\Sigma = \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{M}}. \tag{3.22}$$

Тогда поверхностный интеграл в (3.5) можно записать в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$\int\limits_\Sigma (\mathbf{x} \times \mathbf{t}_n + \mathbf{h}_\Sigma) d\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{T} \times \mathbf{x} + \mathbf{M}) d\Sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot (-\mathbf{P} \times \mathbf{x} + \overset{\circ}{\mathbf{M}}) d\overset{\circ}{\Sigma}, \tag{3.23}$$

и уравнение (3.5) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} (\mathbf{x} \times \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma_s} \mathbf{k}_m) d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} (\mathbf{x} \times \mathbf{f} + \mathbf{h}_m) d\overset{\circ}{V} + \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot (-\mathbf{P} \times \mathbf{x} + \overset{\circ}{\mathbf{M}}) d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{3.24}$$

Упражнения к 2.3

Упражнение 2.3.1. Показать, что из (3.24) вытекает следующее уравнение изменения момента количества движения в материальном описании:

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\gamma_s} \frac{d\mathbf{k}_m}{dt} = \overset{\circ}{\rho} \mathbf{h}_m + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}).$$

Упражнение 2.3.2. Показать, что для неполярных сред уравнение изменения момента количества движения в материальном описании (см. упр. 2.3.1) превращается в

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}) = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

и в точности совпадает с (3.19).

Упражнение 2.3.3. Используя соотношение (3.21) и формулу преобразования ориентированной площадки, показать, что тензоры $\mathbf{M}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ связаны следующим соотношением:

$$\overset{\circ}{\mathbf{M}} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\; \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{M}.$$

2.4. Первый закон термодинамики

2.4.1. Интегральная формулировка закона сохранения энергии. Законы сохранения массы, изменения количества движения и момента количества движения описывают движение сплошной среды. Для учета тепловых эффектов в сплошных средах необходимо привлекать *законы термодинамики*. Рассмотрим вначале неполярные среды, для которых выполняются соотношения (3.16).

Определение 2.6. *Кинетической энергией сплошной среды V называют следующую скалярную функцию:*

$$K = \int\limits_V \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}dm = \int\limits_V \rho\frac{|v|^2}{2}dV, \qquad |v|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Определение 2.7. *Мощностью внешних массовых сил W_m и мощностью внешних поверхностных сил W_Σ называют следующие скалярные функции:*

$$W_m = \int\limits_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dm = \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV, \qquad W_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v}d\Sigma. \tag{4.2}$$

Аксиома 7 (первый закон термодинамики — закон сохранения энергии). *Для всякой сплошной среды $\mathcal{B}$ существуют две скалярные аддитивные функции: $U(\mathcal{B},t)$ — внутренняя энергия сплошной среды и $Q(\mathcal{B},t)$ — скорость нагрева сплошной среды, такие что $\forall t \geqslant 0$ выполняется уравнение*

$$\frac{dE}{dt} = W + Q, \tag{4.3}$$

где E называют полной энергией сплошной среды, которая состоит из U и K:

$$E = U + K, \qquad W = W_m + W_\Sigma. \tag{4.4}$$

Замечание. Существуют различные формулировки законов термодинамики. Приведенная выше формулировка называется формулировкой К.Трусделла [41, 91, 92]. Ее удобство в том, что она по форме совпадает с формулировкой аксиом 4–6. Кроме того, данная формулировка, в отличие от иных имеющихся в литературе, является универсальной, т.е. не зависит от типа сплошной среды, как это и должно быть для общих законов сохранения.

Вследствие аддитивности функций U и Q, подобно тому, как это было сделано в п. 2.2.1, можно ввести плотности этих функций.

Определение 2.8. *Плотностью внутренней энергии называют функцию e, притоком тепла за счет массовых источников — функцию q_m, а притоком тепла за счет поверхностных источников — функцию q_Σ, определенные в каждой точке сплошной среды $\mathcal{M}$ следующим образом:*

$$e = \frac{dU}{dm}, \qquad q_m = \frac{dQ}{dm}, \qquad q_\Sigma = \frac{dQ}{d\Sigma}. \tag{4.5}$$

В силу аддитивности функций Q и U, для всего объема сплошной среды получаем

$$Q = Q_m + Q_\Sigma,$$
$$Q_m = \int\limits_V q_m dm = \int\limits_V \rho q_m dV, \qquad Q_\Sigma = \int\limits_\Sigma q_\Sigma d\Sigma, \tag{4.6}$$
$$U = \int\limits_V e dm = \int\limits_V \rho e dV.$$

Подставляя (4.1), (4.2), (4.4)–(4.6) в (4.3), получаем *закон сохранения энергии* в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(e+\frac{|v|^2}{2}\right)dV = \int\limits_V \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+q_m)dV + \int\limits_\Sigma (\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v}+q_\Sigma)d\Sigma. \tag{4.7}$$

Используя для левой части (4.7) правила дифференцирования для объемного интеграла (см. упр. 2.1.2):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(e+\frac{|v|^2}{2}\right)dV = \int\limits_V \rho\left(\frac{de}{dt}+\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dV, \tag{4.8}$$

получим следующую форму закона сохранения энергии:

$$\int\limits_V \rho\left(-\frac{d}{dt}(e+\frac{1}{2}|v|^2)+\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+q_m\right)dV + \int\limits_\Sigma (\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v}+q_\Sigma)d\Sigma = 0. \tag{4.9}$$

2.4.2. Вектор потока тепла. Уравнение (4.7) имеет вид (2.25), если в последнем положить

$$A = e+|v^2|/2, \qquad C=\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+q_m \quad \text{и} \quad B=\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v}+q_\Sigma.$$

Тогда к этому уравнению можно применить теорему 2.6б, которая утверждает существование такого вектора $(-\mathbf{q})$, что в $V\cup\Sigma$ имеет место соотношение

$$q_\Sigma = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}. \tag{4.10}$$

Вектор $\mathbf{q}$ называют *вектором потока тепла*.

Докажем теперь аналог теоремы 2.6, позволяющий установить компоненты вектора $\mathbf{q}$.

Подобно тому, как это было сделано в п. 2.2.3, построим в точке $\mathcal{M}$ элементарный объем dV в форме тетраэдра, ребра которого ориентированы по векторам $\mathbf{r}_\alpha dX^\alpha$. Тогда для него справедливы все формулы (2.15)–(2.17). Применим к тетраэдру уравнение (4.9) для случая, когда на сплошную среду не действуют массовые и поверхностные силы (т.е. $\mathbf{t}_n=0$, $\mathbf{f}=0$), тогда получим

$$q_\Sigma d\Sigma_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha d\Sigma_\alpha + \rho\left(q_m - \frac{d}{dt}(e+\frac{|v|^2}{2})\right)dV = 0. \tag{4.11}$$

Здесь q_α — плотность поверхностных источников тепла на площадках $d\Sigma_\alpha$ с нормалью $(-\mathbf{r}^\alpha/|\mathbf{r}^\alpha|)$, а q_Σ — на площадке $d\Sigma_0$.

Тогда с учетом (2.17), имеем

$$q_\Sigma + \sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_\alpha|\mathbf{r}^\alpha|q_\alpha = -\rho\left(q_m-\frac{d}{dt}(e+\frac{|v|^2}{2})\right)\frac{dV}{d\Sigma_0}. \tag{4.12}$$

Отсюда, вследствие того, что $dV/d\Sigma_0$ — бесконечно малая величина, получаем следующую теорему.

Теорема 2.11. *На всякой площадке с нормалью* $\mathbf{n}$ *плотность поверхностных источников тепла* q_Σ *выражается через плотности поверхностных источников тепла на трех координатных площадках:*

$$q_\Sigma = -\sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\alpha \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\; q_\alpha. \tag{4.13}$$

Сравнивая (4.13) с (4.10), находим компоненты вектора потока тепла:

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}_\alpha \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\; q_\alpha = \mathbf{r}_i q^i, \qquad q^\alpha = q_\alpha \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,. \tag{4.13a}$$

2.4.3. Уравнение энергии. Вернемся теперь к формуле (4.9) и преобразуем поверхностные интегралы по формуле Гаусса–Остроградского (1.24) с учетом (4.10):

$$\begin{gathered}\int_\Sigma q_\Sigma d\Sigma = -\int_\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} d\Sigma = -\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} dV,\\ \int_\Sigma \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} d\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) d\Sigma = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Подставляя выражение (4.14) в (4.7), получаем еще одну интегральную формулировку закона сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(e + \frac{|v|^2}{2}\right) dV = \int_V \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + q_m) dV + \int_\Sigma \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Sigma. \tag{4.15}$$

Если же подставить (4.14) в (4.9), то получим

$$\int_V \left(\rho\left(\frac{de}{dt} + \frac{d|v|^2/2}{dt}\right) - \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \rho q_m + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})\right) dV = 0. \tag{4.16}$$

В силу произвольности объема V, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.12. *Если функции* $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{f}$, q_m, $\mathbf{q}$ *и* e, *удовлетворяющие уравнению (4.15), являются непрерывно-дифференцируемыми в* $V(t)$ *для всех рассматриваемых* $t \geqslant 0$, *то в каждой точке* $\mathcal{M} \in V(t)$ *имеет место уравнение энергии*

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{|v|^2}{2}\right) = \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q_m - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}). \tag{4.17}$$

Используя соотношение (1.20), уравнение энергии можно записать в *дивергентной форме*:

$$\frac{\partial \rho\epsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\epsilon\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q_m, \qquad \epsilon = e + \frac{|v|^2}{2}, \tag{4.18}$$

где ϵ — *плотность полной энергии* сплошной среды.

2.4.4. Теорема живых сил и уравнение притока тепла. Воспользуемся уравнением движения (2.47) и умножим его скалярно на $\mathbf{v}$:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{v}. \tag{4.19}$$

Используя свойство ковариантного дифференцирования (см. упр. 1.1.17), это уравнение можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d|v|^2}{dt} = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}}. \tag{4.20}$$

Определение 2.9. *Мощностью внутренних поверхностных сил сплошной среды V называют следующую скалярную функцию:*

$$W_{(i)} = -\int\limits_V \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}}dV. \tag{4.21}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (4.20) по объему V, тогда с учетом определений 2.6, 2.7 и 2.9 и правила дифференцирования интеграла по подвижному объему (см. упр. 2.1.2), получим утверждение следующей теоремы.
Теорема 2.13 (живых сил). *Изменение кинетической энергии сплошной среды равно суммарной мощности внешних и внутренних сил:*

$$\frac{dK}{dt} = W + W_{(i)}. \tag{4.22}$$

«Живая сила» — это устаревшее название кинетической энергии, однако по традиции теорему 2.13 о кинетической энергии называют *теоремой живых сил*. Вычитая уравнение для кинетической энергии (4.20) из уравнения энергии (4.17), получим *дифференциальное уравнение притока тепла*:

$$\rho\frac{de}{dt} = \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \rho q_m - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}. \tag{4.23}$$

В дивергентной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho e\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \rho q_m. \tag{4.24}$$

Вычитая из (4.22) уравнение (4.3), получим *уравнение притока тепла в интегральной форме*:

$$\frac{d}{dt}U + W_{(i)} = Q. \tag{4.25}$$

2.4.5. Закон сохранения энергии в лагранжевом описании. Запишем теперь закон сохранения энергии в материальном описании. Для этого воспользуемся интегральной формой закона (4.7) и преобразуем поверхностные интегралы:

$$\int\limits_\Sigma(\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v} + q_\Sigma)d\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}_\Sigma)d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{q}_\Sigma)d\overset{\circ}{\Sigma} = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}\right)d\Sigma. \tag{4.26}$$

Здесь использовано определение (2.31) тензора Пиолы–Кирхгофа и введен *вектор потока тепла* в отсчетной конфигурации:

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}. \tag{4.27}$$

Теорема 2.14. *Векторы потока тепла* $\mathbf{q}$ *и* $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$ *удовлетворяют соотношению*

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \tag{4.28}$$

▼ Действительно, домножая (4.27) на $\overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma}$, с учетом (1.2.49) получаем

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \quad ▲$$

Тогда уравнение (4.7) в отсчетной конфигурации можно записать так:

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\rho} \frac{d}{dt} \left(e + \frac{|v|^2}{2} \right) - \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\rho} q_m - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} \right) d\overset{\circ}{V} = 0. \tag{4.29}$$

В силу произвольности объема $\overset{\circ}{V}$, подынтегральное выражение обращается в нуль. В результате, доказана следующая теорема.

Теорема 2.15. *В условиях теоремы 2.12, в каждой точке* $\mathcal{M} \in \overset{\circ}{V}$ *для всех рассматриваемых* $t \geqslant 0$ *имеет место уравнение энергии в лагранжевом описании:*

$$\overset{\circ}{\rho} \frac{d}{dt} \left(e + \frac{|v|^2}{2} \right) = \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \overset{\circ}{\rho} q_m + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}}. \tag{4.30}$$

Подобно (4.19), можно записать теорему живых сил в отсчетной конфигурации:

$$\overset{\circ}{\rho} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P}), \tag{4.31}$$

с помощью которой уравнение (4.30) преобразуем к виду:

$$\overset{\circ}{\rho} e \frac{d}{dt} = \mathbf{P} \cdot\cdot\ (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\rho} q_m - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}}. \tag{4.32}$$

Это уравнение называют *уравнением притока тепла* в материальном (лагранжевом) описании.

Так как в лагранжевом описании полная производная совпадает с частной, то в дивергентной форме уравнение притока тепла не отличается от (4.32):

$$\overset{\circ}{\rho} \frac{\partial e}{\partial t} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} + \mathbf{P} \cdot\cdot\ (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\rho} q_m. \tag{4.33}$$

Если проинтегрировать уравнение притока тепла (4.32) по области $\overset{\circ}{V}$, то, учитывая, что внутренняя энергия U тела и скорость нагрева Q, согласно

(4.6), могут быть представлены также и в лагранжевом описании:

$$
\begin{gathered}
U = \int\limits_V \rho e dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} e d\overset{\circ}{V}, \qquad Q = Q_m + Q_\Sigma, \\
Q_m = \int\limits_V \rho q_m dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} q_m d\overset{\circ}{V}, \qquad Q_\Sigma = \int\limits_\Sigma q_\Sigma d\Sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{q}_\Sigma d\overset{\circ}{\Sigma}
\end{gathered}
\tag{4.34}
$$

(здесь мы использовали (4.28)), из (4.32) получаем снова уравнение притока тепла (4.25) в интегральной форме, причем для мощности внутренних поверхностных сил получим следующее соотношение в эйлеровом и лагранжевом описаниях:

$$
W_{(i)} = -\int\limits_V \mathbf{T} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} dV = -\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \mathbf{P} \cdot\cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} d\overset{\circ}{V}. \tag{4.35}
$$

Мощность внешних сил (4.2) также можно представить в лагранжевом описании, если использовать соотношение (2.30):

$$
W_m = \int\limits_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\overset{\circ}{V}, \quad W_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} d\Sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n \cdot \mathbf{v} d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{4.36}
$$

2.4.6. Закон сохранения энергии для полярных сред. Рассмотрим теперь полярные среды, для которых выполняются соотношения (3.19), т.е. величины $\mathbf{k}_m$, $\mathbf{h}_m$ и $\mathbf{M}$ отличны от тождественного нуля. Закон сохранения энергии для них несколько отличается от соответствующего закона (4.3), (4.4) для неполярных сред.

Введем по аналогии с (4.1) *кинетическую энергию собственного движения сплошной среды*:

$$
K_s = \int\limits_V \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2\gamma_s} dm = \int\limits_V \frac{\rho}{\gamma_s} \, |\mathbf{k}_m|^2 dV, \qquad |\mathbf{k}_m|^2 = \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m. \tag{4.37}
$$

Введем также по аналогии с (4.2) *мощность массовых моментов* W_m^s и *мощность поверхностных моментов* W_Σ^s:

$$
W_m^s = \int\limits_V \rho \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{k}_m dV, \tag{4.38}
$$

$$
W_\Sigma^s = \int\limits_\Sigma \mathbf{h}_\Sigma \cdot \mathbf{k}_m d\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{k}_m d\Sigma. \tag{4.39}
$$

Закон сохранения энергии для полярной среды имеет универсальный вид (4.3), но полная энергия E и суммарная мощность W сплошной среды определяются не по (4.4), а по формулам

$$
E = U + K + K_s, \qquad W = W_m + W_m^s + W_\Sigma + W_\Sigma^s. \tag{4.40}
$$

В результате приходим к следующей формулировке *закона сохранения энергии для полярных сред*:

$$\frac{d}{dt}(U + K + K_s) = W_m + W_m^s + W_\Sigma + W_\Sigma^s + Q. \tag{4.41}$$

Переходя к *интегральной формулировке закона сохранения энергии для полярных сред*, из (4.41) с помощью (4.37)–(4.39) получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\Big(e + \frac{|v|^2}{2} + \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2\gamma_s}\Big)dV = \int\limits_V \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{h}_m\cdot\mathbf{k}_m + q_m)dV + \\ + \int\limits_\Sigma (\mathbf{t}_\Sigma\cdot\mathbf{v} + \mathbf{h}_\Sigma\cdot\mathbf{k}_m + q_\Sigma)d\Sigma. \tag{4.42}$$

Вектор потока тепла $\mathbf{q}$ для полярных сред вводится на основании тех же построений, что изложены в п. 2.4.2, по формулам (4.10) и (4.13). Поэтому в уравнении (4.42) можно преобразовать поверхностный интеграл к объемному, тогда получим *дифференциальную формулировку закона сохранения энергии для полярных сред* (уравнение энергии):

$$\rho\frac{d}{dt}\Big(e + \frac{|v|^2}{2} + \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2\gamma_s}\Big) = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \rho\mathbf{h}_m\cdot\mathbf{k}_m + \rho q_m - \\ - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{h}_m). \tag{4.43}$$

Замечание 1. Из уравнения энергии (4.42) проясняется смысл введения спиновой константы γ_s в законе изменения момента количества движения (3.2): если в (3.2) или (3.15) избавиться от константы γ_s, введя вместо $\mathbf{k}_m$ вектор $\widetilde{\mathbf{k}}_m = \mathbf{k}_m/\gamma_s$, то при таком переобозначении в уравнении энергии (4.43) все равно сохранилась бы константа γ_s. Эта константа γ_s играет роль энергетического эквивалента между кинетической энергией тела и кинетической энергией собственного движения тела, обусловленной собственным моментом количества движения для полярных сред. □

Используя соотношение (1.20), уравнение энергии (4.43) можно записать в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\varepsilon + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\varepsilon + \mathbf{q} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{k}_m) = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \rho\mathbf{h}_m\cdot\mathbf{k}_m + \rho q_m, \\ \varepsilon = e + \frac{|v|^2}{2} + \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2\gamma_s}. \tag{4.44}$$

Сформулируем теперь аналог теоремы живых сил (4.22), но для кинетической энергии собственного движения K_s. Для этого рассмотрим уравнение изменения момента количества движения (3.15) и умножим его скалярно на $\mathbf{k}_m$:

$$\frac{\rho}{\gamma_s}\mathbf{k}_m\cdot\frac{d\mathbf{k}_m}{dt} = \rho\mathbf{h}_m\cdot\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_m\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M} - \mathbf{k}_m\cdot{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}. \tag{4.45}$$

Используя свойство набла-оператора из упр. 1.1.17, это уравнение приводим к виду

$$\frac{\rho}{\gamma_s}\frac{d|\mathbf{k}_m|^2}{dt} = \rho\mathbf{h}_m\cdot\mathbf{k}_m + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{k}_m) - \mathbf{M}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{k}_m)^{\mathrm{T}} - \mathbf{k}_m\cdot{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}. \quad (4.46)$$

Если теперь проинтегрировать это уравнение по V, воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского и правилом дифференцирования (1.12) интеграла по подвижному объему, то из (4.46) получим

$$\frac{dK_s}{dt} = W_m^s + W_\Sigma^s + W_{(i)}^s + W_s, \quad (4.47)$$

где обозначены

$$W_{(i)}^s = -\int\limits_V \mathbf{M}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{k}_m)^{\mathrm{T}}dV \quad (4.48)$$

— *мощность внутренних поверхностных моментов* и

$$W_s = -\int\limits_V \mathbf{k}_m\cdot{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T}dV \quad (4.49)$$

— *мощность внутренних поверхностных сил на собственных движениях тела*.

Соотношение (4.47) называют *теоремой живых сил для собственных движений тела*, оно является аналогом теоремы живых сил (4.22).

Вычитая из закона сохранения энергии (4.41) соотношения (4.22) и (4.47), приходим к *интегральному уравнению притока тепла для полярных сред*:

$$\frac{dU}{dt} = Q - W_{(i)} - W_{(i)}^s - W_s. \quad (4.50)$$

Вычитая уравнения (4.46) и (4.20) из уравнения энергии (4.43), получаем *дифференциальное уравнение притока тепла для полярных сред*:

$$\rho\frac{de}{dt} = \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \mathbf{M}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{k}_m)^{\mathrm{T}} + \mathbf{k}_m\cdot{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{T} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \rho q_m. \quad (4.51)$$

Очевидно, что если положить $\mathbf{k}_m = 0$, $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{h}_m = 0$, то уравнение притока тепла в формах (4.50) и (4.51) совпадает с соответствующими уравнениями (4.23) и (4.25) для неполярных сред.

Используя определение (3.20) лагранжева тензора моментных напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{M}}$, *уравнение притока тепла* (4.51) можно записать *для материального описания*:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{de}{dt} = \mathbf{P}\cdot\cdot\,(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\mathbf{M}}\cdot\cdot\,(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{k}_m)^{\mathrm{T}} + \mathbf{k}_m\cdot{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{P}) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{q}} + \overset{\circ}{\rho}q_m. \quad (4.52)$$

Доказательство этого утверждения оставим в качестве упр. 2.4.1.

Упражнения к 2.4

Упражнение 2.4.1. Доказать соотношение (4.52).

2.5. Второй закон термодинамики

2.5.1. Интегральная формулировка. Для формулировки второго закона термодинамики, аксиоматически введем новую локальную характеристику сплошной среды — температуру.

Аксиома 8 (о существовании абсолютной температуры). *Для каждой материальной точки $\mathcal{M}$ всякой сплошной среды $\mathcal{B}$ для всех $t \geqslant 0$ существует скалярная положительная функция*

$$\theta(X^i, t) = \theta(x^i, t) > 0, \tag{5.1}$$

называемая абсолютной температурой.

Иногда аксиому о существовании абсолютной температуры называют *нулевым законом термодинамики.*

Обратим внимание на то, что температура введена сразу как локальная, а не интегральная характеристика сплошной среды (в отличие, например, от массы M или момента количества движения). Хотя, безусловно, интегральную температуру Θ можно всегда ввести, например, как $\Theta = \int_V \theta dm$, однако она не участвует ни в каких основных законах механики сплошных сред (в качестве курьеза уместно здесь вспомнить несуразность введения понятия «средней температуры по больнице» для описания состояния пациентов в больнице).

Однако следующие интегральные характеристики сплошной среды с участием температуры играют важную роль в формулировке второго закона термодинамики.

Определение 2.10. *Производством энтропии за счет внешних массовых источников называют скалярную функцию $\bar{Q}_m$, а производством энтропии за счет внешних поверхностных источников называют функцию $\bar{Q}_\Sigma$, определяемые для объема сплошной среды V следующим образом:*

$$\bar{Q}_m = \int\limits_V \frac{q_m}{\theta} dm = \int\limits_V \frac{\rho q_m}{\theta} dV, \qquad \bar{Q}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \frac{q_\Sigma}{\theta} d\Sigma = -\int\limits_\Sigma \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}}{\theta} d\Sigma. \tag{5.2}$$

Замечание 1. Если по аналогии с (4.5) рассмотреть величину $d\bar{Q}_m$ — производство энтропии за счет внешних массовых источников, подводимых к элементарному объему dV массой dm, то из (5.2) и (4.5) получаем

$$d\bar{Q}_m = q_m dm/\theta = dQ/\theta, \tag{5.2a}$$

т.е. $d\bar{Q}_m$ — это приток тепла за счет внешних массовых источников, отнесенный к температуре θ нагреваемого объема dV. Таким образом, $d\bar{Q}_m$ характеризует «эффективность нагрева» объема dV, аналогично $d\bar{Q}_\Sigma$ характеризует «эффективность нагрева» элементарной площадки $d\Sigma$ поверхности тела.

Аксиома 9 (второй закон термодинамики). *Для всякой сплошной среды $\mathcal{B}$, существуют две скалярные аддитивные функции: $H(\mathcal{B}, t)$ — энтропия сплошной среды и $\bar{Q}^*(\mathcal{B}, t)$ — производство энтропии за счет* *внутренних источников, такие что для всех $t \geqslant 0$ выполняется уравнение*

$$\frac{dH}{dt} = \bar{Q} + \bar{Q}^*, \tag{5.3}$$

где обозначено суммарное производство энтропии за счет внешних источников

$$\bar{Q} = \bar{Q}_m + \bar{Q}_\Sigma, \tag{5.4}$$

а величина $\bar{Q}^*$ — всегда неотрицательная (неравенство Планка):

$$\bar{Q}^* \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Вследствие аддитивности функций H и $\bar{Q}^*$, можно ввести их плотности для каждой точки $\mathcal{M} \in V$.

Определение 2.11. *Плотностью энтропии называют функцию η, а плотностью внутреннего производства энтропии — функцию q^*, которые определены для каждой точки $\mathcal{M}$ сплошной среды:*

$$\eta = \frac{dH}{dm}, \qquad q^* = \theta\frac{d\bar{Q}^*}{dm}. \tag{5.6}$$

В силу неравенства Планка (5.5), а также неравенств (5.1) и (1.4а) следует, что функция q^* всегда неотрицательна:

$$q^* \geqslant 0. \tag{5.5а}$$

Это неравенство также называют *неравенством Планка*.

В силу аддитивности функций H и $\bar{Q}^*$ для всего объема сплошной среды имеем

$$\bar{Q}^* = \int\limits_V \frac{q^*}{\theta}dm = \int\limits_V \frac{\rho q^*}{\theta}dV, \quad H = \int\limits_V \eta dm = \int\limits_V \rho\eta dV. \tag{5.7}$$

Два утверждения (5.3) и (5.5) эквивалентны *неравенству Клаузиуса*

$$dH/dt \geqslant \bar{Q}. \tag{5.8}$$

Подставляя (5.2) и (5.7) в (5.3), получаем *интегральную формулировку второго закона термодинамики*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\eta dV = \int\limits_V \frac{\rho(q_m + q^*)}{\theta}dV - \int\limits_\Sigma \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}}{\theta}d\Sigma. \tag{5.9}$$

2.5.2. Дифференциальная форма второго закона термодинамики. Преобразуем поверхностный интеграл в (5.9) по формуле Гаусса–Остроградского (1.24):

$$\int\limits_\Sigma \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}}{\theta}d\Sigma = \int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)d\Sigma = \int\limits_V \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}}{\theta} + \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)dV. \tag{5.10}$$

Тогда уравнение (5.9) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_V \left(\rho\frac{d\eta}{dt} - \frac{\rho(q_m + q^*)}{\theta} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)\right)dV = 0. \tag{5.11}$$

В силу произвольности объема V, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.16. *Если функции η, $\mathbf{q}$, q^*, q_m и θ, удовлетворяющие уравнению (5.9), являются непрерывно-дифференцируемыми в $V(t)$ для всех рассматриваемых $t \geqslant 0$, то в каждой точке $\mathcal{M} \in V$ выполняется второй закон термодинамики в дифференциальной форме (уравнение баланса энтропии):*

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \rho \frac{q_m + q^*}{\theta}. \tag{5.12}$$

Уравнение (5.12) можно записать в дивергентной форме, используя свойство (1.20):

$$\frac{\partial \rho\eta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho \mathbf{v} \eta + \frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \rho \frac{q_m + q^*}{\theta}. \tag{5.12a}$$

Если учесть, что $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta$, то уравнения (5.12) и (5.12a) можно записать еще иначе:

$$\theta\rho \frac{d\eta}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \rho q_m + w^*, \tag{5.13}$$

или

$$\frac{\partial \rho\eta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \eta = -(1/\theta) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + (1/\theta)(\rho q_m + w^*). \tag{5.13a}$$

Здесь обозначена функция

$$w^* = \rho q^* + \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{5.14}$$

называемая *функцией диссипации* (или *функцией рассеивания*).

Кроме неравенства Планка (5.5), в механике существует еще одно важное неравенство.

Аксиома 10. *Для любой точки сплошной среды $\mathcal{M}$ для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство Фурье:*

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \leqslant 0. \tag{5.15}$$

Перепишем (5.14) следующим образом:

$$\rho q^* = w^* - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{5.16}$$

Уравнение (5.16) говорит о том, что изменение внутреннего производства энтропии происходит из-за двух причин: вследствие перехода части механической энергии в тепло (эта составляющая обусловлена функцией диссипации w^*), а также вследствие неравномерного нагрева сплошной среды, при котором происходит процесс передачи тепла от более горячих частей сплошной среды к более холодным, эта составляющая обусловлена функцией

$$-\frac{1}{\theta}\, \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \equiv w_q. \tag{5.17}$$

Математическое выражение для функции диссипации w^* будет дано далее в гл. 4, однако уже здесь заметим, что если w^* не зависит от градиента температуры $\boldsymbol{\nabla}\theta$ (далее в гл. 4 мы покажем, что это допущение всегда выполняется), то, рассматривая движение сплошной среды из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ только с равномерным температурным полем $\theta = \theta(t)$ ($\nabla\theta \equiv 0$ в V), из (5.16) и неравенства Планка получим, что имеет место *неравенство диссипации*:

$$w^* \geqslant 0. \tag{5.18}$$

В силу того, что w^* не зависит от $\nabla\theta$, неравенство (5.18) будет справедливо и при неравномерном нагреве.

2.5.3. Второй закон термодинамики в материальном описании. Переходя к материальному описанию в (5.9), получаем

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\frac{d\eta}{dt}d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho}(q_m + q^*)}{\theta}d\overset{\circ}{V} - \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \frac{\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}}}{\theta}d\overset{\circ}{\Sigma}, \tag{5.19}$$

откуда с помощью стандартных преобразований получаем *второй закон термодинамики в материальном описании*:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\eta}{dt} = -\overset{\circ}{\nabla} \cdot \left(\frac{\overset{\circ}{\mathbf{q}}}{\theta}\right) + \overset{\circ}{\rho}\frac{q_m + q^*}{\theta}. \tag{5.20}$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\theta\overset{\circ}{\rho}\frac{d\eta}{dt} = -\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} + \overset{\circ}{\rho}q_m + \overset{\circ}{w}{}^*, \tag{5.21}$$

где

$$\overset{\circ}{w}{}^* = \overset{\circ}{\rho}q^* + \frac{\overset{\circ}{\mathbf{q}}}{\theta} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\theta \geqslant 0 \tag{5.22}$$

— *функция диссипации* в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Неравенство Клаузиуса (5.8) при переходе к материальному (лагранжевому) описанию сохраняет свой вид, а энтропия H и производство энтропии $\bar{Q}$ за счет внешних источников, определяемые по (5.7), при переходе к лагранжевому описанию принимают вид

$$H = \int\limits_V \rho\eta dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\eta d\overset{\circ}{V}, \qquad \bar{Q} = \bar{Q}_m + \bar{Q}_\Sigma,$$

$$\bar{Q}_m = \int\limits_V \frac{\rho q_m}{\theta}dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho}q_m}{\theta}d\overset{\circ}{V}, \qquad \bar{Q}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \frac{q_\Sigma}{\theta}d\Sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \frac{\overset{\circ}{q}_\Sigma}{\theta}d\int\limits_\Sigma \frac{q_\Sigma}{\theta}d\overset{\circ}{\Sigma}, \tag{5.23}$$

$$\bar{Q}^* = \int\limits_V \frac{\rho q^*}{\theta}dV = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho}q^*}{\theta}d\overset{\circ}{V}.$$

2.5.4. Тепловые машины и коэффициент полезного действия. На законах термодинамики основана работа всех современных *тепловых машин* — устройств, которые преобразуют тепло в механическую работу (двигателей внутреннего сгорания, реактивных и воздушно-реактивных двигателей, газотурбинных двигателей, ядерных двигателей и др.), либо, наоборот, преобразуют механическую работу в тепло (на этом принципе основаны некоторые нагревательные и холодильные устройства), либо поочередно используют оба эти превращения (например, дизельные двигатели).

Условно конструкция тепловой машины состоит из сосуда с твердыми стенками, внутренность которого заполнена рабочим телом объема V (обычно газом или жидкостью).

Тепловые машины можно разделить на три типа:

1) машины, для которых область $V(t)$ — переменная, но материальные точки рабочего тела одни и те же, т.е. $\overset{\circ}{V} = \text{const}$,
2) машины, для которых V не меняется с течением времени, но материальные точки рабочего тела, содержащиеся в V, различные,
3) машины, для которых и область V переменная, и материальные точки в ней также различны.

Схематически эти три типа машин изображены на рис. 2.8.

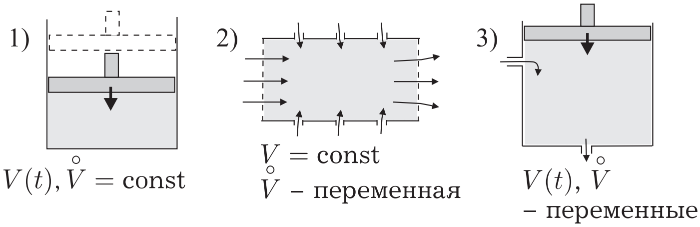

Рис. 2.8. Схематическое изображение основных трех типов тепловых машин

К первому типу относятся, как правило, холодильные и нагревательные устройства, а также машины, работающие по циклу Карно (см. далее). Ко второму типу относятся воздушно-реактивные, ракетные двигатели и некоторые другие. К третьему типу принадлежат газотурбинные, турбореактивные двигатели, двигатели внутреннего сгорания и др.

Расчеты тепловых машин первого типа очевидно удобно вести в рамках лагранжева описания, второго и третьего типов — в рамках эйлерова описания. Далее мы ограничимся рассмотрением тепловых машин только первого типа, рассмотрение машин второго и третьего типов проводится аналогично, оставим его в качестве упр. 2.5.2.

Эффективность всех тепловых машин характеризуется *коэффициентом полезного действия* (КПД). Для того чтобы ввести понятия «тепло», «механическая работа» и КПД следует вернуться к интегральным формулировкам (4.25) и (5.8) законов термодинамики.

Рассмотрим произвольный отрезок времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и проинтегрируем соотношения (4.25) и (5.8) по t от t_1 до t_2, в результате получим

$$\Delta U + A_{(i)} = C, \tag{5.24}$$

$$\Delta H \geqslant \bar{C}, \tag{5.25}$$

где обозначены следующие интегральные величины:

$$\Delta U = U(t_2) - U(t_1), \qquad \Delta H = H(t_2) - H(t_1), \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} A_{(i)} &= \int\limits_{t_1}^{t_2} W_{(i)}(t)dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \mathbf{P}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}}d\overset{\circ}{V}dt, \\ A_{(e)} &= \int\limits_{t_1}^{t_2} W(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\overset{\circ}{V}dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n\cdot\mathbf{v}d\overset{\circ}{\Sigma}dt, \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} C &= \int\limits_{t_1}^{t_2} Q(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}q_m d\overset{\circ}{V}dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{q}_{\Sigma}d\overset{\circ}{\Sigma}dt, \\ \bar{C} &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \bar{Q}(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho}q_m}{\theta}d\overset{\circ}{V}dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \frac{\overset{\circ}{q}_{\Sigma}}{\theta}d\overset{\circ}{\Sigma}dt. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Здесь мы воспользовались лагранжевым представлением интегральных величин U, H, $W_{(i)}$, Q и $\bar{Q}$ (4.34), (4.35), (5.23).

Величину ΔU называют *изменением внутренней энергии* тела $\mathcal{B}$, ΔH — *изменением энтропии* тела $\mathcal{B}$, $A_{(i)}$ — *механической работой, совершаемой телом* $\mathcal{B}$ (или просто *работой*), C — *теплом, подведенным к телу* (или просто *теплом*), $\bar{C}$ — *притоком энтропии* к телу $\mathcal{B}$, $A_{(e)}$ — *работой, совершаемой над телом* $\mathcal{B}$ (*работой внешних сил*).

Используем лагранжево описание в переменных X^i, t, где $X^i \in \overset{\circ}{V}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и разобьем четырехмерную область интегрирования объемных интегралов $\overset{\circ}{V} \times (t_1, t_2)$ на такие подобласти $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$, что 1) в каждой из этих подобластей знак скалярной функции q_m не изменяется, т.е. либо $q_m \geqslant 0$, либо $q_m < 0$, 2) $\underset{\alpha}{\cup}\overset{\circ}{V}_{t\alpha} = \overset{\circ}{V} \times (t_1, t_2)$. Аналогично разобьем область интегрирования поверхностных интегралов $\overset{\circ}{\Sigma} \times (t_1, t_2)$ на такие подобласти $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$, что 1) в каждой $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$ знак функции $\overset{\circ}{q}_{\Sigma}$ не изменяется, т.е. либо $\overset{\circ}{q}_{\Sigma} \geqslant 0$, либо $\overset{\circ}{q}_{\Sigma} < 0$, 2) $\underset{\alpha}{\cup}\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha} = \overset{\circ}{\Sigma} \times (t_1, t_2)$. Тогда тепло C, подведенное к телу, можно разделить на две неотрицательные части:

$$C = C_+ - C_-, \tag{5.29}$$

$$C_{\pm} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}q_m^{\pm}d\overset{\circ}{V}dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{q}{}_{\Sigma}^{\pm}d\overset{\circ}{\Sigma}dt \geqslant 0, \tag{5.30}$$

$$q_m^{\pm} = (|q_m| \pm q_m)/2 \geqslant 0, \qquad \overset{\circ}{q}{}_{\Sigma}^{\pm} = (|\overset{\circ}{q}_{\Sigma}| \pm \overset{\circ}{q}_{\Sigma})/2 \geqslant 0, \tag{5.31}$$

которые выражают соответственно C_+ — *тепло, поглощенное телом* (или подведенное к телу) и C_- — *тепло, выделяемое телом* (или отводимое от тела).

В силу неотрицательности температуры θ тела, аналогично можно разбить приток энтропии $\bar{C}$ к телу на две неотрицательные части:

$$\bar{C} = \bar{C}_+ - \bar{C}_-, \tag{5.32}$$

$$\bar{C}_\pm = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho} q_m^\pm}{\theta} d\overset{\circ}{V} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\overset{\circ}{\Sigma}} \frac{\overset{\circ}{q}{}_\Sigma^\pm}{\theta} d\overset{\circ}{\Sigma} dt \geqslant 0. \tag{5.33}$$

Подставляя (5.29) в (5.24), перепишем уравнение притока тепла к телу в следующем виде:

$$C_- = C_+ - A_{(i)} - \Delta U. \tag{5.34}$$

Положим, что $C_+ \neq 0$, тогда можно ввести отношение механичесской работы, совершаемой телом $\mathcal{B}$, к подведенному теплу:

$$k_{\mathcal{B}} = A_{(i)}/C_+, \tag{5.35}$$

которое назовем *коэффициентом полезного действия (КПД)* тела $\mathcal{B}$ на рассматриваемом отрезке времени $[t_1, t_2]$.

В силу аксиомы (5.1), в любом теле $\mathcal{B}$ для любого отрезка времени $[t_1, t_2]$ выполняются условия $0 < \theta(X^i, t) < +\infty$, поэтому можно ввести минимальное и максимальное значения температуры тела:

$$0 < \theta_{\min} \leqslant \theta(X^i, t) \leqslant \theta_{\max} < +\infty, \quad \forall X^i \in \overline{\overset{\circ}{V}}, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{5.36}$$

Тогда из (5.36) следует, что

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\rho} q_m^+/\theta \geqslant \overset{\circ}{\rho} q_m^+/\theta_{\max} \quad &\text{и} \quad \overset{\circ}{\rho} q_m^-/\theta \leqslant \overset{\circ}{\rho} q_m^-/\theta_{\min}, \\ \overset{\circ}{q}{}_\Sigma^+/\theta \geqslant \overset{\circ}{q}{}_\Sigma^+/\theta_{\max} \quad &\text{и} \quad \overset{\circ}{q}{}_\Sigma^-/\theta \leqslant \overset{\circ}{q}{}_\Sigma^-/\theta_{\min}, \end{aligned} \tag{5.37}$$

поскольку все q_m^+, $\overset{\circ}{q}{}_\Sigma^+$, q_m^-, $\overset{\circ}{q}{}_\Sigma^-$, $\overset{\circ}{\rho}$ и θ — неотрицательны.

Подставляя (5.37) в интегралы (5.30) и (5.33), в силу неотрицательности подынтегральных функций находим, что

$$\bar{C}_+ \geqslant C_+/\theta_{\max}, \qquad \bar{C}_- \leqslant C_-/\theta_{\min}, \tag{5.38}$$

а из (5.25), (5.29) и (5.38) следует, что

$$\Delta H \geqslant \bar{C} = \bar{C}_+ - \bar{C}_- \geqslant \frac{C_+}{\theta_{\max}} - \frac{C_-}{\theta_{\min}}. \tag{5.39}$$

Подставляя в (5.39) выражение (5.34), получаем

$$\Delta H \geqslant C_+\Big(\frac{1}{\theta_{\max}} - \frac{1}{\theta_{\min}}\Big) + \frac{1}{\theta_{\min}}(A_{(i)} + \Delta U). \tag{5.40}$$

Разделив это соотношение на C_+ и умножив на $\theta_{\min}$ (которые оба неотрицательны), имеем

$$\frac{A_{(i)}}{C_+} + \frac{\Delta U}{C_+} + \Big(\frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} - 1\Big) \leqslant \frac{\Delta H \theta_{\min}}{C_+}. \tag{5.41}$$

Отсюда с учетом определения КПД $k_{\mathcal{B}}$ (5.35) получаем окончательную *оценку Трусделла для КПД*:

$$k_{\mathcal{B}} \leqslant 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} - \frac{\Delta U - \theta_{\min}\Delta H}{C_+}. \tag{5.42}$$

Заметим, что поскольку ничего неизвестно о знаке третьего слагаемого в правой части (5.42), то нельзя утверждать, что в любом процессе для любого тела $k_{\mathcal{B}} < 1$. Это хорошо знакомое из курса физики утверждение относится к специальным частным процессам движения и нагрева тела. Рассмотрим их в следующем разделе.

2.5.5. Адиабатические и изотермические процессы. Циклы Карно. Говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *локально-адиабатический* процесс в подобласти $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$, если приток тепла за счет массовых источников в $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$ равен нулю:

$$q_m \equiv 0 \quad \forall (X^i, t) \in \overset{\circ}{V}_{t\alpha}. \tag{5.43}$$

Если в некоторой подобласти $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$ равен нулю приток тепла за счет поверхностных источников:

$$\overset{\circ}{q}_{\Sigma} \equiv 0 \quad \forall (X^i, t) \in \overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}, \tag{5.44}$$

то говорят, что локально-адиабатический процесс происходит в подобласти $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$ тела $\mathcal{B}$.

Если же в теле $\mathcal{B}$ на отрезке $[t_1, t_2]$ выполняются условия

$$q_m \equiv 0 \ \ \forall X^i \in \overset{\circ}{V}, \qquad \overset{\circ}{q}_{\Sigma} \equiv 0 \ \ \forall X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}, \tag{5.45}$$

то говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *адиабатический процесс в узком смысле*.

Наконец, если во всем теле $\mathcal{B}$ на отрезке времени $[t_1, t_2]$ выполняются условия

$$q_m \equiv 0 \ \ \forall X^i \in \overset{\circ}{V}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{q}} \equiv 0 \ \ \forall X^i \in \overline{\overset{\circ}{V}}, \tag{5.46}$$

то говорят, что происходит *адиабатический процесс* в теле $\mathcal{B}$ *в широком смысле* (или просто *адиабатический процесс*).

Поскольку из условия (5.46) следуют (5.43) и (5.44) (но не наоборот), то в теле $\mathcal{B}$, в котором происходит адиабатический процесс в широком смысле, происходит и адиабатический процесс в узком смысле (но не наоборот).

Говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *локально-изотермический* процесс в подобласти $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$, если температура в этой подобласти остается постоянной:

$$\theta(X^i, t) \equiv \text{const} \quad \forall (X^i, t) \in \overset{\circ}{V}_{t\alpha}. \tag{5.47}$$

Если же во всем теле $\mathcal{B}$ в течение отрезка времени $[t_1, t_2]$ температура остается постоянной

$$\theta(X^i, t) \equiv \text{const} \quad \forall X^i \in \overline{\overset{\circ}{V}}, \ \ \forall t \in [t_1, t_2], \tag{5.48}$$

то говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *изотермический процесс*.

Говорят, что в теле $\mathcal{B}$ реализуется *термодинамический цикл* на отрезке времени $[t_1, t_2]$, если для него одновременно выполняются следующие условия периодичности:

$$\Delta U = U(t_2) - U(t_1) = 0, \qquad \Delta H = H(t_2) - H(t_1) = 0,$$
$$C_+ \neq 0, \tag{5.49}$$
$$\theta(X^i, t_2) - \theta(X^i, t_1) \equiv 0 \quad \forall X^i \in \overset{\circ}{V}.$$

Обратим внимание на то, что не для всякой сплошной среды возможно обеспечить выполнение условий (5.49), и, следовательно, не для всякого тела можно осуществить термодинамический цикл. Однако существуют целые классы тел, для которых условия (5.49) выполнимы.

Пример 2.1. Рассмотрим сплошную среду $\mathcal{B}$, в которой плотность внутренней энергии e и плотность энтропии η однозначно зависят только от плотности и температуры θ:

$$e = e(\rho, \theta), \qquad \eta = \eta(\rho, \theta). \tag{5.50}$$

Далее, в гл. 3, мы покажем, что такая модель среды соответствует идеальной жидкости или газу.

Если имеет место соотношение (5.50), то условия (5.49) легко обеспечить, создав такие внешние тепловые и механические воздействия, при которых поля температуры $\theta(X^i, t)$ и плотности $\rho(X^i, t)$ в теле $\mathcal{B}$ одинаковы для $t = t_1$ и $t = t_2$: $\rho(X^i, t_1) = \rho(X^i, t_2)$, $\theta(X^i, t_1) = \theta(X^i, t_2)$. В самом деле, в этом случае будут выполняться условия

$$e(X^i, t_1) = e(\rho(X^i, t_1), \theta(X^i, t_1)) = e(\rho(X^i, t_2), \theta(X^i, t_2)) = e(X^i, t_2),$$

и, следовательно,

$$U(t_1) = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} e(X^i, t_1) d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} e(X^i, t_2) d\overset{\circ}{V} = U(t_2),$$

т.е. $\Delta U = 0$. Аналогично удовлетворяется и условие $\Delta H = 0$.

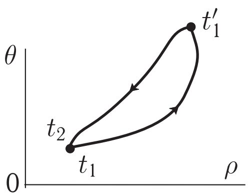

Рис. 2.9. Термодинамический цикл в материальной точке X^i идеальной жидкости

Термодинамическому циклу, происходящему в идеальной жидкости (газе), в каждой материальной точке X^i соответствует некоторая замкнутая кривая на плоскости (ρ, θ) (рис. 2.9). $\square$

Пример 2.2. Рассмотрим сплошную среду $\mathcal{B}$, в которой e и η являются однозначными функциями температуры θ и градиента деформации $\mathbf{F}$:

$$e = e(\mathbf{F}, \theta), \qquad \eta = \eta(\mathbf{F}, \theta). \tag{5.51}$$

Поскольку плотность ρ является функцией от $\mathbf{F}$ ($\rho = \overset{\circ}{\rho}/\det \mathbf{F}$ — в силу (1.8)), то соотношения (5.50) являются частным случаем (5.51). Если зависимости (5.51) не сводятся к (5.50), то они соответствуют модели идеального твердого тела (подробнее эти модели будут рассмотрены в гл. 7). Для идеального твердого тела с помощью соотношений (5.51) также легко обеспечить выполнение условий (5.49), для этого достаточно только, чтобы выполнялись условия периодичности цикла:

$$\mathbf{F}(X^i, t_1) = \mathbf{F}(X^i, t_2), \quad \theta(X^i, t_1) = \theta(X^i, t_2) \quad \forall X^i \in \overset{\circ}{V}.$$

Термодинамическому циклу, происходящему в идеальном твердом теле, в каждой материальной точке X^i также соответствует некоторая замкнутая кривая в обобщенном семимерном пространстве $(\bar{F}^i{}_j, t)$, где $\bar{F}^i{}_j$ — компоненты тензора $\mathbf{F}$ в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$.

Говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *обобщенный цикл Карно*, если одновременно выполняются следующие условия:

1) в теле $\mathcal{B}$ происходит термодинамический цикл на $[t_1, t_2]$,
2) области $\overset{\circ}{V} \times [t_1, t_2]$ и $\overset{\circ}{\Sigma} \times [t_1, t_2]$ тела $\mathcal{B}$ состоят только из подобластей $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$, в которых происходят локально-адиабатические или локально-изотермические процессы,
3) локально-изотермические процессы могут быть только двух типов: либо с минимальной температурой $\theta_{\min}$ и поглощением тепла:

$$\begin{aligned} &\text{в } \overset{\circ}{V}_{t\alpha}: \quad \theta(X^i, t) = \theta_{\min}, \quad q_m < 0, \\ &\text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}: \quad \theta(X^i, t) = \theta_{\min}, \quad \overset{\circ}{q}_{\Sigma} < 0, \end{aligned} \tag{5.52}$$

либо с максимальной температурой $\theta_{\max}$ и выделением тепла:

$$\begin{aligned} &\text{в } \overset{\circ}{V}_{t\alpha}: \quad \theta(X^i, t) = \theta_{\max}, \quad q_m > 0, \\ &\text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}: \quad \theta(X^i, t) = \theta_{\max}, \quad \overset{\circ}{q}_{\Sigma} > 0. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Очевидно, что подобласти $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$, в которых происходят локально-изотермические процессы, не имеют между собой общих точек (даже их замыкания не имеют общих точек) в силу непрерывной дифференцируемости температуры $\theta(X^i, t)$ в $\overset{\circ}{V} \times [t_1, t_2]$.

Характерная картина расположения подобластей $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$ и $\overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}$ в обобщенном цикле Карно показана на рис. 2.10.

Говорят, что в теле $\mathcal{B}$ происходит *однородный термомеханический процесс* на отрезке $[t_1, t_2]$, если поля его механических и термодинамических величин однородны, т.е. не зависят от координат X^i, но могут зависеть от времени t:

$$\begin{gathered} \Omega(X^i, t) = \Omega(t) \quad \forall X^i \in \overset{\circ}{V}, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \Omega = \{\ \rho,\ \mathbf{q},\ \mathbf{F},\ \mathbf{T},\ \mathbf{P},\ q_m,\ e,\ \eta,\ \theta,\ q^*\ \}. \end{gathered} \tag{5.54}$$

(Заметим, что векторы скорости $\mathbf{v}$ и перемещений $\mathbf{u}$ материальных точек в однородном процессе могут зависеть от координат X^i.)

Обобщенный цикл Карно, который происходит в теле в условиях однородного термомеханического процесса называют просто *циклом Карно*.

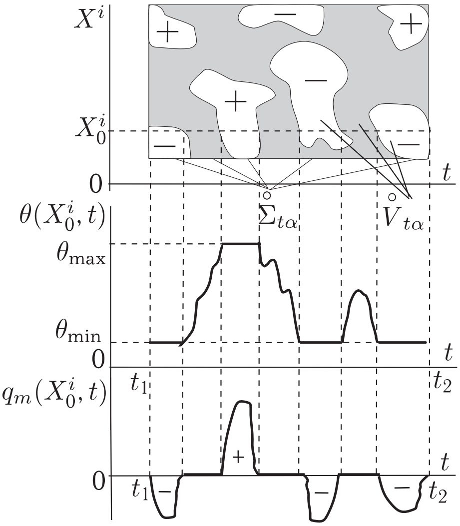

Рис. 2.10. Характерная картина расположения подобластей в обобщенном цикле Карно

Цикл Карно, согласно данным выше определениям, состоит только из изотермических и адиабатических процессов в теле $\mathcal{B}$, которые чередуются друг с другом, причем на временном подмножестве $\mathcal{T}_0 \in [t_1, t_2]$, на котором процесс адиабатический во всем теле, скорость нагрева Q, согласно (5.45) и (4.6), равна нулю; на временном подмножестве $\mathcal{T}_- \in [t_1, t_2]$, на котором температура во всем теле имеет минимальное значение $\theta_{\min}$, скорость нагрева Q — отрицательна, а на временном подмножестве $\mathcal{T}_+ \in [t_1, t_2]$, на котором температура во всем теле равна $\theta_{\max}$, скорость нагрева Q — положительна:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0: &\quad Q(t) = 0, \\ \mathcal{T}_+: &\quad \theta = \theta_{\max}, \quad Q(t) > 0, \\ \mathcal{T}_-: &\quad \theta = \theta_{\min}, \quad Q(t) < 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

График элементарного цикла Карно показан на рис. 2.11. Этот цикл состоит

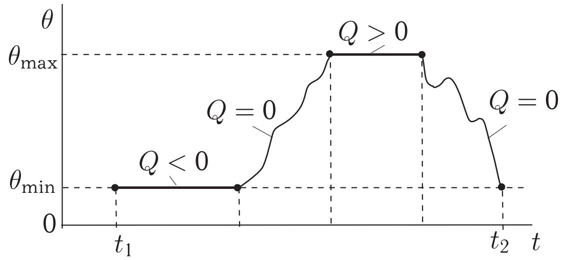

Рис. 2.11. Элементарный цикл Карно

из четырех процессов — двух изотермических и двух адиабатических участков. Другие циклы Карно для одного и того же тела $\mathcal{B}$ могут отличаться от элементарного цикла Карно только числом изотермических областей.

2.5.6. Теорема Труделла.

Теорема 2.16а (Трусделла). *1) Если тело $\mathcal{B}$ таково, что для него осуществим термодинамический цикл с условиями (5.49) и заданными значениями $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ в цикле, то максимально возможное значение КПД, равное*

$$k_{\mathcal{B}\max} = 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} < 1, \tag{5.56}$$

достигается только для обобщенных циклов Карно.

2) Среди всех тел $\mathcal{B}$, для которых возможен термодинамический цикл (5.49) в условиях однородного термомеханического процесса (5.54), макси-

мальное значение КПД (5.56) достигается для тех тел, у которых в цикле отсутствует производство энтропии за счет внутренних источников:

$$\bar{Q}^* \equiv 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{5.57}$$

▼ 1) Для доказательства первого утверждения теоремы Труделла рассмотрим произвольный термодинамический цикл, тогда для него из (5.34) и (5.35) следует, что

$$A_{(i)} = C_+ - C_-, \tag{5.58}$$

и, следовательно,

$$k_{\mathcal{B}} = 1 - \frac{C_-}{C_+}. \tag{5.59}$$

Если в термодинамическом цикле достигается максимальный КПД $k_{\mathcal{B}} = k_{\mathcal{B}\max}$, то из (5.58) и (5.56) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$C_-/C_+ = \theta_{\min}/\theta_{\max}. \tag{5.60}$$

Поскольку для всякого термодинамического цикла, согласно (5.49), $\Delta H = 0$, то соотношение (5.39) с учетом (5.60) принимает вид

$$0 \geqslant \bar{C}_+ - \bar{C}_- \geqslant \frac{C_+}{\theta_{\max}} - \frac{C_-}{\theta_{\min}} = 0, \tag{5.61}$$

что возможно, только если

$$\bar{C}_+ = \bar{C}_-. \tag{5.62}$$

С учетом этого соотношения система двух неравенств (5.38) принимает вид

$$\frac{C_+}{\theta_{\max}} \leqslant \bar{C}_+ = \bar{C}_- \leqslant \frac{C_-}{\theta_{\min}} = \frac{C_+}{\theta_{\max}}. \tag{5.63}$$

Поскольку левая и правая части в (5.63) совпадают, то знаки неравенства в нем должны заменяться на знаки равенства, т.е. должны выполняться два следующих соотношения:

$$\frac{C_+}{\theta_{\max}} = \bar{C}_+, \qquad \frac{C_-}{\theta_{\min}} = \bar{C}_-, \tag{5.64}$$

или с учетом обозначений (5.30) и (5.33)

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} q_m^+ \Big(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\max}}\Big) d\overset{\circ}{V} dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{q}{}_{\Sigma}^+ \Big(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\max}}\Big) d\overset{\circ}{\Sigma} dt = 0,\\
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} q_m^- \Big(\frac{1}{\theta_{\min}} - \frac{1}{\theta}\Big) d\overset{\circ}{V} dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{q}{}_{\Sigma}^- \Big(\frac{1}{\theta_{\min}} - \frac{1}{\theta}\Big) d\overset{\circ}{\Sigma} dt = 0.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Ввиду того, что все подынтегральные функции в этих уравнениях неотрицательны, то равенство нулю суммы интегралов возможно, только если эти подынтегральные функции обращаются в нуль, т.е. должны выполняться следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
q_m^+\Big(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_{\max}}\Big)=0, \qquad \overset{\circ}{q}{}^{+}_{\Sigma}\Big(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_{\max}}\Big)=0,\\
q_m^-\Big(\frac{1}{\theta_{\min}}-\frac{1}{\theta}\Big)=0, \qquad \overset{\circ}{q}{}^{-}_{\Sigma}\Big(\frac{1}{\theta_{\min}}-\frac{1}{\theta}\Big)=0,\\
\forall X^i\in\overline{V}, \qquad \forall t\in[t_1,t_2].
\end{gathered} \tag{5.66}
$$

Выполнение этих соотношений возможно, если обращается в нуль хотя бы один из сомножителей, т.е. если в подобластях $\overset{\circ}{V}_{t\alpha}$ выполняются следующие условия:

$$
\text{в } \overset{\circ}{V}_{t\alpha}: \quad q_m>0, \ \ \theta=\theta_{\max}, \ \ \text{или} \ \ q_m<0, \ \ \theta=\theta_{\min}, \ \ \text{или} \ \ q_m=0, \tag{5.67}
$$

$$
\text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_{t\alpha}: \quad \overset{\circ}{q}_{\Sigma}>0, \ \ \theta=\theta_{\max}, \ \ \text{или} \ \ \overset{\circ}{q}_{\Sigma}<0, \ \ \theta=\theta_{\min}, \ \ \text{или} \ \ \overset{\circ}{q}_{\Sigma}=0. \tag{5.68}
$$

Но, согласно (5.52) и (5.53), это и означает, что рассматриваемый термодинамический цикл является обобщенным циклом Карно. Таким образом, мы показали, что требование достижимости максимального КПД $k_{\mathcal{B}}=k_{\mathcal{B}\max}$ для термодинамического цикла влечет за собой требование того, чтобы он был циклом Карно, причем в обратную сторону это утверждение также верно.

2) Для доказательства второго утверждения теоремы используем установленный выше факт, что максимальный КПД достигается на обобщенных циклах Карно, следовательно, в условиях однородных термомеханических процессов достаточно доказать выполнимость (5.57) только для простых циклов Карно.

Воспользуемся тем, что для термодинамического цикла $\Delta H=0$, и представим ΔH в виде суммы трех слагаемых:

$$
0=\Delta H=H(t_2)-H(t_1)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\dot{H}\,dt=\int\limits_{\mathcal{T}_0}\dot{H}\,dt+\int\limits_{\mathcal{T}_+}\dot{H}\,dt+\int\limits_{\mathcal{T}_-}\dot{H}\,dt, \tag{5.69}
$$

где подмножества $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_+$ и $\mathcal{T}_-$ определяются условиями (5.55) в однородном термомеханическом процессе.

Поскольку на $\mathcal{T}_+$, согласно (5.55), $\theta=\theta_{\max}$ и $Q>0$, то, согласно неравенству Клаузиуса (5.8):

$$
\text{на } \ \mathcal{T}_+: \qquad \dot{H}\geqslant\bar{Q}=\theta_{\max}Q>0. \tag{5.70}
$$

Предположим, что на некотором конечном промежутке времени, являющемся подмножеством $\widetilde{\mathcal{T}}_+$ множества $\mathcal{T}_+$, выполняется строгое неравенство в (5.70): $\dot{H}>\theta_{\max}Q$, тогда при интегрировании (5.70) по всему $\mathcal{T}_+$ получим строгое неравенство

$$
\int\limits_{\mathcal{T}_+}\dot{H}\,dt>\theta_{\max}\int\limits_{\mathcal{T}_+}Q\,dt=\theta_{\max}C_+. \tag{5.71}
$$

(Случай, когда неравенство $\dot{H}>\theta_{\max}Q$ выполняется только в отдельной точке, исключен, поскольку полагаем, что все функции $H(t)$, $Q(t)$ и $\theta(t)$

являются непрерывными.) Но в силу неравенства Клаузиуса (5.8) и (5.55) имеем

$$\int_{\mathcal{T}_-} \dot{H}dt \geqslant \int_{\mathcal{T}_-} \bar{Q}dt = \theta_{\min} \int_{\mathcal{T}_-} Qdt = -\theta_{\min} C_-. \tag{5.72}$$

(Здесь использованы обозначения (5.30) и (5.31), которые для однородных процессов сводятся к $C_- = -\int_{\mathcal{T}_-} Qdt = (1/2)\int_{t_1}^{t_2}(|Q| - Q)dt$.)

Складывая два неравенства (5.71) и (5.72), получаем, что

$$\int_{\mathcal{T}_+} \dot{H}dt + \int_{\mathcal{T}_-} \dot{H}dt > \theta_{\max} C_+ - \theta_{\min} C_- = 0, \tag{5.73}$$

поскольку рассматривается цикл Карно, для которого выполняются условия (5.60). Тогда из (5.69) и (5.73) следует, что интеграл по $\mathcal{T}_0$ должен быть отрицательным:

$$\int_{\mathcal{T}_0} \dot{H}dt < 0. \tag{5.74}$$

Однако, в силу неравенства Клаузиуса (5.8), на $\mathcal{T}_0$ должно выполняться условие $\dot{H} \geqslant \bar{Q} = \theta Q = 0$ и $\int_{\mathcal{T}_0} \dot{H}dt \geqslant 0$, поэтому неравенство (5.74) невозможно. Следовательно, сделанное допущение о том, что на $\widetilde{\mathcal{T}}_+$: $\dot{H} > \theta_{\max} Q$, неверно, и из (5.70) следует, что на всем $\mathcal{T}_+$ должно выполняться равенство

$$\mathcal{T}_+ : \qquad \dot{H} = \theta_{\max} Q. \tag{5.75}$$

Совершенно аналогично доказываем, что на $\mathcal{T}_-$:

$$\mathcal{T}_- : \qquad \dot{H} = \theta_{\min} Q. \tag{5.76}$$

Но тогда, интегрируя (5.75) по $\mathcal{T}_+$, а (5.76) по $\mathcal{T}_-$ и подставляя их в соотношение (5.69), получаем

$$0 = \Delta H = \int_{\mathcal{T}_0} \dot{H}dt + \theta_{\max} C_+ - \theta_{\min} C_- = \int_{\mathcal{T}_0} \dot{H}dt. \tag{5.77}$$

Здесь мы опять учли то, что для цикла Карно выполняется (5.60).

Поскольку, как отмечалось выше, на $\mathcal{T}_0$ в силу неравенства Клаузиуса (5.8) $\dot{H} \geqslant 0$, тогда из (5.77) следует, что на $\mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{T}_0 : \qquad \dot{H} = 0 = \theta Q. \tag{5.78}$$

Собирая вместе все три соотношения (5.75), (5.76) и (5.78) и учитывая (5.55), получаем, что для цикла Карно с максимальным КПД на всем отрезке времени выполняется соотношение

$$\dot{H} = \theta Q = \bar{Q} \qquad \forall t \in [t_1, t_2], \tag{5.79}$$

которое, в силу (5.3), означает, что производство энтропии $\bar{Q}^*$ за счет внутренних источников отсутствует, т.е. действительно выполняется (5.57). ▲

Замечание. Поскольку утверждение 2) теоремы Трусделла относится к однородным термомеханическим процессам, для которых, согласно (5.54), градиент температурного поля равен нулю во всем теле $\mathcal{B}$:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta \equiv 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], \qquad \forall X^i \in \overline{\overset{\circ}{V}}, \tag{5.80}$$

то из (5.22), (5.23) и (5.57) следует, что тело $\mathcal{B}$, удовлетворяющее утверждению 2), должно быть *недиссипативным*, т.е. в нем, по крайней мере, на отрезке $[t_1, t_2]$ функция диссипации равна нулю:

$$w^* \equiv 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], \qquad \forall X^i \in \overline{\overset{\circ}{V}}. \tag{5.81}$$

Процессы, для которых во всем теле выполняются одновременно оба условия (5.80) и (5.81), т.е. плотность внутреннего производства энтропии q^* тождественно равна нулю, часто называют *обратимыми*, а те процессы, в которых нарушается хотя бы одно из этих условий — *необратимыми*.

Упражнения к 2.5

Упражнение 2.5.1. Используя формулу (4.27) и результат упр. 1.1.9, показать, что функции диссипации w^* и $\overset{\circ}{w}{}^*$, определенные по (5.14) и (5.22), связаны соотношением

$$w^* = (\rho/\overset{\circ}{\rho})\overset{\circ}{w}{}^*.$$

Упражнение 2.5.2. Для тепловых машин второго и третьего типов ввести по аналогии с (5.26)–(5.28) понятия ΔH, $A_{(i)}$, C и $\overline{C}$ и доказать справедливость оценки Трусделла (5.42).

Ввести понятия адиабатических и изотермических процессов по аналогии с определением из п. 2.5.5, а также понятие термодинамического цикла на $[t_1, t_2]$, заменив в (5.49) последнее соотношение следующими двумя:

$$V(x^i, t_1) = V(x^i, t_2), \qquad \theta(x^i, t_1) - \theta(x^i, t_2) = 0 \quad \forall x^i \in V,$$

(совпадение областей V тела в моменты t_1 и t_2 и совпадение полей температур в этих областях). Доказать теорему Трусделла для термодинамических циклов, происходящих в тепловых машинах второго и третьего типов.

2.6. Уравнения совместности деформаций

2.6.1. Условия совместности. Мы закончили изложение законов сохранения МСС. Однако условия непрерывности движения тел, которые мы везде использовали в гл. 1, также можно переформулировать в виде некоторого формального «закона сохранения». Этот формальный закон играет важную роль в замыкании системы уравнений МСС, поэтому рассмотрим его далее, в разд. 2.6–2.8.

Требование непрерывности движения сформулируем так: пусть известно, что в конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ каждой материальной точке $\mathcal{M}$ сплошной среды однозначно можно поставить в соответствие радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^k)$ в единой декартовой системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$; необходимо найти условия, при которых существует однозначная функция — вектор перемещений $\mathbf{u}(X^k, t)$, связывающий положение точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$. Если в $\mathcal{K}$ возникают несплошности (трещины, поры и т.п.) (рис. 2.12), то непрерывность движения нарушается.

Определение 2.12. *Необходимые и достаточные условия существования однозначной вектор-функции* $\mathbf{u}(X^k, t)$ *называют* ***условиями*** *(уравнениями)* ***совместности деформации*** *сплошной среды* V.

Если не существует однозначной вектор-функции $\mathbf{u}(X^k, t)$ для всех $X^k \in \overset{\circ}{V}$, то это означает, что в $\mathcal{K}$ невозможно ввести однозначным образом радиус-вектор $\mathbf{x}(X^k, t)$. Это, в свою очередь, означает, что конфигурация $\mathcal{K}$ не принадлежит евклидову пространству $\mathcal{E}_3^a$. Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. Таким образом, имеет место следующая теорема.

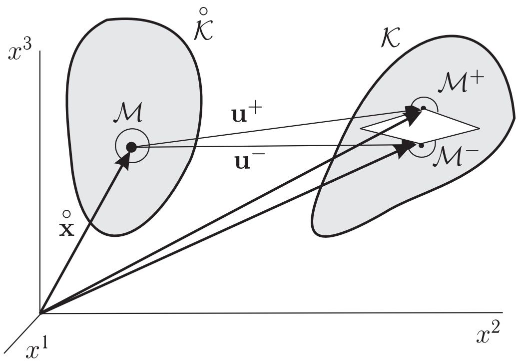

Рис. 2.12. Пример нарушения условий совместности

Теорема 2.17. *Условия совместности деформаций сплошной среды* V *эквивалентны условию, что актуальная конфигурация сплошной среды принадлежит евклидову пространству* $\mathcal{E}_3^a$.

Замечание. На первый взгляд может показаться странным, что «обычная» сплошная среда с трещинами уже не принадлежит евклидову пространству. Но это не совсем «обычная» среда — она *определена* нами в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ таким образом, что в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ ей соответствует среда уже без несплошностей. Если бы мы определили ту же рассматриваемую среду с трещинами по-другому — как принадлежащую некоторой новой отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{K}}}$, то каждая материальная точка получила бы свой индивидуальный радиус-вектор и такая среда уже принадлежала бы евклидову пространству $\mathcal{E}_3^a$.

2.6.2. Условие интегрируемости дифференциальной формы. Существует два типа уравнений совместности: *динамические* и *статические*. В данном разделе рассмотрим статические уравнения совместности. Для их вывода предварительно рассмотрим некоторую дифференциальную форму

$$\sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha dX^\alpha, \tag{6.1}$$

где $A_\alpha = A_\alpha(X^i)$ — некоторые гладкие функции переменных X^j.

Из курса математического анализа известно, что эта форма образует полный дифференциал dA тогда и только тогда, когда выполняются условия интегрируемости:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial X^\alpha}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{6.2}$$

В этом случае имеет место следующее представление:

$$dA = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha dX^\alpha. \tag{6.3}$$

На это выражение можно смотреть как на уравнение в дифференциалах. Очевидно, что оно имеет решение относительно A тогда и только тогда, когда выполняются условия (6.2).

2.6.3. Первая форма условий совместности деформаций. Выберем теперь в качестве A радиусы-векторы $\mathbf{x}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ одной и той же материальной точки $\mathcal{M}$. Для них соотношение (6.3) записывается в виде

$$d\mathbf{x} = \mathbf{r}_i dX^i, \qquad d\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i dX^i. \tag{6.4}$$

На эти соотношения можно смотреть с разных позиций. С одной стороны, если известен закон движения и в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует единая декартова система координат, то имеют место соотношения

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^j), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(X^j, t), \tag{6.5}$$

являющиеся гладкими функциями аргументов. Тогда (6.4) являются очевидным следствием этих соотношений. Этот подход и использовался везде выше.

С другой стороны, если известны векторы базиса $\mathbf{r}_i$, а радиус-вектор $\mathbf{x}$ — нет (по условию радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ всегда известен и является однозначной функцией), то первое уравнение (6.4) аналогично выражению (6.3) представляет собой уравнение в дифференциалах относительно радиуса-вектора $\mathbf{x}$.

Решение этого уравнения существует всегда, так как условия (6.2) интегрируемости выполняются. Действительно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^\beta \partial X^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}_\beta}{\partial X^\alpha}. \tag{6.6}$$

Таким образом, если существуют в каждой точке X^i в $\mathcal{K}$ локальные векторы базиса, то существуют и радиусы-векторы этих точек в $\mathcal{K}$.

Если же каждой материальной точке $\mathcal{M}$ с координатами X^i в $\mathcal{K}$ можно однозначно сопоставить радиус-вектор $\mathbf{x}$, это означает, что существуют и однозначные функции $\mathbf{u}(X^k, t) = \mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{x}}$ перемещений точек из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$.

Наоборот, если существуют однозначные перемещения $\mathbf{u}(X^k, t)$ материальных точек из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$, то в $\mathcal{K}$ всегда можно ввести радиус-вектор $\mathbf{x} = \overset{\circ}{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$ и локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{x}/\partial X^i$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.18. *Условия совместности деформаций сплошной среды выполнены тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ существуют локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$, т.е. функции, обладающие следующими свойствами:*

- *линейно-независимые в каждой точке X^i,*
- *однозначные и гладкие $\forall X^i \in V$,*
- *обладающие «векторным потенциалом» $\mathbf{x}$: $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{x}/\partial X^i$.*

2.6.4. Вторая форма условий совместности. Выберем теперь в качестве A сами локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$ и $\mathring{\mathbf{r}}_i$. Соотношение (6.3) записывается для них в виде

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial X^j} dX^j = (\Gamma_{ij}^m \mathbf{r}_m) dX^j, \qquad d\mathring{\mathbf{r}}_i = (\mathring{\Gamma}_{ij}^m \mathring{\mathbf{r}}_m) dX^j. \tag{6.7}$$

Если известен закон движения (второе соотношение в (6.5)) и выполнены условия совместности деформаций, то соотношения (6.7) являются очевидным следствием закона движения (6.5). Если же известны символы Кристоффеля Γ_{ij}^m, то (6.7) представляют собой уравнения для функций $\mathbf{r}_i$. Условия интегрируемости (6.2) этих уравнений имеют вид (индексы j и n меняются местами):

$$\frac{\partial}{\partial X^n}(\Gamma_{ij}^m \mathbf{r}_m) = \frac{\partial}{\partial X^j}(\Gamma_{in}^m \mathbf{r}_m). \tag{6.8}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial X^n}\mathbf{r}_m + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mn}^k \mathbf{r}_k = \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial X^j}\mathbf{r}_m + \Gamma_{in}^m \Gamma_{mj}^k \mathbf{r}_k, \\ \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m\right) \mathbf{r}_m = 0. \end{gathered} \tag{6.9}$$

В силу произвольности $\mathbf{r}_m$, отсюда имеем

$$R_{nji}{}^m \equiv \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m = 0, \tag{6.10}$$

где $R_{nji}{}^m$ — пока просто некоторое обозначение.

Используя условие (6.10), сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.19. *Условия совместности деформаций сплошной среды выполнены тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ существуют символы Кристоффеля Γ_{ij}^m, удовлетворяющие условиям интегрируемости (6.10).*

▼ В самом деле, если существуют Γ_{ij}^m, удовлетворяющие (6.10), то выполняются и условия интегрируемости (6.8), а, следовательно, первая форма в (6.7) имеет дифференциал и существуют локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$. Но тогда по теореме 2.18 будут выполнены условия совместности деформаций.

В обратную сторону. Если выполнены условия совместности, то по той же теореме 2.18, существуют векторные функции $\mathbf{r}_i$. Тогда, проделывая все выкладки (6.7)–(6.10), убеждаемся в справедливости условий (6.10). ▲

Заметим, что по условию в $\mathring{\mathcal{K}}$ всегда существуют векторы $\mathring{\mathbf{x}}$ и $\mathring{\mathbf{r}}_i$. Тогда можно проделать аналогичные преобразования и для второй формы в (6.7), следовательно, имеют место уравнения

$$\frac{\partial}{\partial X^n}(\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_m) = \frac{\partial}{\partial X^j}(\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{in}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_m) \tag{6.11}$$

и соотношение

$$\overset{\circ}{R}_{nji}{}^m \equiv \frac{\partial \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}}{\partial X^n} - \frac{\partial \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{in}}{\partial X^j} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{kn} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{in}\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{kj} = 0. \tag{6.12}$$

Величины $R_{nji}{}^m$ и $\overset{\circ}{R}_{nji}{}^m$ называют компонентами тензоров четвертого ранга *Римана–Кристоффеля* ${}^4\mathbf{R}$ и ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. В том, что они действительно компоненты тензоров, мы убедимся ниже в п. 2.6.6.

2.6.5. Третья форма условий совместности. Введем *символы Кристоффеля первого рода* Γ_{ijk} и $\overset{\circ}{\Gamma}_{ijk}$, которые связаны с Γ^m_{ij} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$, называемыми *символами Кристоффеля второго рода*, соотношениями (см. [12]):

$$\Gamma_{ijk} = g_{km}\Gamma^m_{ij}, \qquad \overset{\circ}{\Gamma}_{ijk} = \overset{\circ}{g}_{km}\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}. \tag{6.13}$$

Между символами Кристоффеля первого рода и метрической матрицей существуют соотношения:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}\right), \tag{6.14}$$

являющиеся следствием (1.1.26). Меняя местами индексы i и k и складывая с Γ_{ijk}, получим, что

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i}\right) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j}, \tag{6.15}$$

Чисто ковариантные компоненты тензора Римана–Кристоффеля определяются следующим образом:

$$R_{njik} = R_{nji}{}^m g_{mk} = g_{mk}\left(\frac{\partial(\Gamma_{ijl}g^{ml})}{\partial X^n} - \frac{\partial(\Gamma_{ikl}g^{ml})}{\partial X^j}\right) + g^{sl}(\Gamma_{ijl}\Gamma_{snk} - \Gamma_{inl}\Gamma_{sjk}). \tag{6.16}$$

Используя соотношение

$$g_{mk}\frac{\partial g^{ml}}{\partial X^n} = -g^{ml}\frac{\partial g_{mk}}{\partial X^n} = -g^{ml}(\Gamma_{mnk} + \Gamma_{knm}), \tag{6.17}$$

приводим R_{njik} к виду

$$\begin{aligned} R_{njik} = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial X^j} - \Gamma_{ijl}(\Gamma_{mnk} + \Gamma_{knm})g^{ml} + \\ + g^{ml}\Gamma_{inl}(\Gamma_{kjm} + \Gamma_{mjk}) + g^{sl}(\Gamma_{ijl}\Gamma_{snk} - \Gamma_{inl}\Gamma_{sjk}) = \\ = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial X^j} - g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Подставляя теперь вместо производных от Γ_{ijk} их выражения (6.14) через метрическую матрицу, находим

$$R_{njik} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial X^j \partial X^n} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial X^k \partial X^n} - \\ - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial X^n \partial X^j} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial X^k \partial X^j}\Big) + g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}),$$

или

$$R_{njik} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial X^k \partial X^n} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial X^k \partial X^j} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j}\Big) + \\ + g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) = 0. \quad (6.19)$$

Аналогично находим выражение для $\overset{\circ}{R}_{njik}$ через компоненты метрической матрицы $\overset{\circ}{g}_{ij}$:

$$\overset{\circ}{R}_{njik} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{in}}{\partial X^k \partial X^j} - \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{ij}}{\partial X^k \partial X^n}\Big) + \\ + \overset{\circ}{g}^{ml}\left(\overset{\circ}{\Gamma}_{inl}\overset{\circ}{\Gamma}_{kjm} - \overset{\circ}{\Gamma}_{ijl}\overset{\circ}{\Gamma}_{knm}\right) = 0. \quad (6.20)$$

Теорема 2.19а. *Условия совместности деформаций сплошной среды выполнены тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ существует метрическая матрица g_{ij}, удовлетворяющая уравнениям (6.19).*

▼ В самом деле, если известна g_{ij}, удовлетворяющая (6.19), то будут выполнены и эквивалентные им уравнения (6.10), которые, в свою очередь, как было показано выше, определяют евклидовость пространства, а, согласно теореме 2.19, это означает, что выполнены и условия совместности деформаций.

В обратную сторону. Если выполнены условия совместности деформаций. то имеют место соотношения (6.10), причем в евклидовом пространстве символы Γ_{ij}^m обладают «потенциалом» g_{ij}, т.е. имеют место соотношения (6.14). Но тогда удовлетворяются и эквивалентные им уравнения (6.19). ▲

2.6.6. Свойства компонент тензора Римана–Кристоффеля. Можно непосредственно проверить, что функции R_{njik} имеют симметрию по парам индексов n, j и i, k:

$$R_{njik} = R_{iknj}, \quad (6.21)$$

а также кососимметрию по индексам n, j и i, k:

$$-R_{njik} = R_{njki}, \qquad R_{njik} = -R_{jnik}. \quad (6.22)$$

Отсюда следует, что из общего числа 81 компонент тензора R_{njik} независимых — только 6, в качестве которых обычно выбирают:

$$R_{1212}, \quad R_{2323}, \quad R_{3131}, \quad R_{1223}, \quad R_{1231}, \quad R_{2331}, \quad (6.23)$$

остальные либо равны нулю, либо выражаются через них. Аналогичными свойствами обладают и функции $\overset{\circ}{R}_{njik}$.

По компонентам R_{njik} и $\overset{\circ}{R}_{njik}$ можно построить тензоры четвертого ранга

$$ {}^4\boldsymbol{\mathcal{R}} = R_{njik}\mathbf{r}^n \otimes \mathbf{r}^j \otimes \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^k, \qquad {}^4\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \overset{\circ}{R}_{njik}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^n \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k, \tag{6.24} $$

называемые *тензорами Римана–Кристоффеля* в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Проверку того, что R_{njik} и $\overset{\circ}{R}_{njik}$ являются компонентами тензора, можно осуществить, например, следующим образом.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} = a^k\mathbf{r}_k = \overset{\circ}{a}{}^k\overset{\circ}{\mathbf{r}}_k$ и вычислим его ковариантную производную

$$ \nabla_i a^k = \frac{\partial a^k}{\partial X^i} + \Gamma^k_{is}a^s \tag{6.25} $$

и вторую ковариантную производную

$$ \nabla_j\nabla_i a^k = \frac{\partial}{\partial X^j}(\nabla_i a^k) + \Gamma^k_{jm}\nabla_i a^m - \Gamma^m_{ji}\nabla_m a^k = \frac{\partial^2 a^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial X^j}a^s + $$
$$ + \Gamma^k_{is}\frac{\partial a^s}{\partial X^j} + \Gamma^k_{jm}\Big(\frac{\partial a^m}{\partial X^i} + \Gamma^m_{is}a^s\Big) - \Gamma^m_{ji}\Big(\frac{\partial a^k}{\partial X^m} + \Gamma^k_{ms}a^s\Big). \tag{6.26} $$

Поменяем теперь индексы i и j и образуем разность:

$$ \nabla_j\nabla_i a^k - \nabla_i\nabla_j a^k = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial X^i} + \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{is} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{js}\right)a^s = R_{jis}{}^k a^s. \tag{6.27} $$

Из соотношения (6.27) следует, что R^k_{jis} образуют компоненты тензора, так как a^s и левая часть (6.27) являются компонентами тензора.

2.6.7. Переставимость вторых ковариантных производных. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}^a_3$ было установлено, что

$$ \overset{\circ}{R}_{jis}{}^k = R_{jis}{}^k = 0, \tag{6.28} $$

(см. формулы (6.19) и (6.20)), тогда из (6.27) следует, что вторые ковариантные производные переставимы.

В результате имеем следующую теорему.

Теорема 2.20. *Если выполнены условия совместности деформаций (6.19), а также (6.20), то вторые ковариантные производные можно переставлять:*

$$ \nabla_j\nabla_i a^k = \nabla_i\nabla_j a^k \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{a}{}^k = \overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{a}{}^k. \tag{6.29} $$

Это правило дифференцирования справедливо и для тензоров любого ранга.

2.6.8. Уравнение совместности деформаций. Полагаем, как и в п. 2.6.5, что в $\mathcal{K}$ имеется метрическая матрица g_{ij}, удовлетворяющая уравнению (6.19), а в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ — выполнены условия сплошности, т.е. удовлетворяются условия (6.20). Тогда можно вместо g_{ij} рассмотреть компоненты тензора деформации

$$ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) \tag{6.30} $$

и сформулировать условия совместности деформаций в терминах ε_{ij}.

Вычитая (6.20) из (6.19), получаем

$$R_{njik} - \overset{\circ}{R}_{njik} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial X^k \partial X^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial X^k \partial X^n} + \\ + g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) - \overset{\circ}{g}{}^{ml}(\overset{\circ}{\Gamma}_{inl}\overset{\circ}{\Gamma}_{kjm} - \overset{\circ}{\Gamma}_{ijl}\overset{\circ}{\Gamma}_{knm}) = 0, \quad (6.31)$$

где

$$\Gamma_{ijk} = \overset{\circ}{\Gamma}_{ijk} + \varepsilon_{ijk}, \qquad \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial X^j} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X^i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X^k}. \quad (6.32)$$

Обратную метрическую матрицу g^{ml}, согласно формулам (1.2.64), также можно выразить через компоненты тензора деформации. Так как все функции $\overset{\circ}{\Gamma}_{inl}$, $\overset{\circ}{g}{}^{ml}$, относящиеся к отсчетной конфигурации, предполагаем известными, то соотношения (6.31) с учетом (6.32) и (1.2.64) представляют собой систему шести скалярных уравнений (R_{njik} и $\overset{\circ}{R}_{njik}$ имеют по шесть независимых компонент) относительно шести скалярных функций ε_{ij}. Эти уравнения называют *статическими уравнениями совместности* (или *уравнениями совместности деформаций*).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.21. *Условия совместности деформаций сплошной среды выполнены тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ компоненты тензора деформации ε_{ij} удовлетворяют уравнениям (6.31).*

В заключение этого раздела сформулируем еще одно важное утверждение.

Теорема 2.22. *Уравнения совместности деформаций (6.31) имеют следующее решение:*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}_k \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_l \overset{\circ}{g}{}^{kl}). \quad (6.33)$$

Иногда этот результат формулируют следующим образом: решение уравнений (6.31) допускает потенциал — шесть функций ε_{ij} выражаются через ковариантные производные трех функций $\overset{\circ}{u}_i$.

▼ Для доказательства теоремы можно было бы заменить ковариантные производные на частные:

$$\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}_j = \overset{\circ}{u}_{j/i} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij} \overset{\circ}{u}_m, \quad (6.34)$$

и, подставив выражения (6.34) и (6.33) в уравнение (6.31), убедиться в том, что оно удовлетворяется тождественно. Однако это чрезвычайно громоздкий способ, а существует другой — более простой.

Пусть существует решение уравнений (6.31) — функции ε_{ij}, тогда по теореме 2.21 это означает, что выполняются уравнения совместности деформаций. Значит, по определению 2.12 существует однозначная вектор-функция $\mathbf{u}(X^k, t) = \mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{x}}$ — вектор перемещения материальных точек. По компонентам этого вектора $\overset{\circ}{u}_i$, используя формулы (1.2.26), всегда можно образовать компоненты $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, которые будут совпадать с ε_{ij} (6.33). Действительно, если $\widetilde{\varepsilon}_{ij} \neq \varepsilon_{ij}$, то это означает, что существуют два различных решения уравнений совместности деформаций (6.31), но тогда им соответствуют и различные векторы перемещений, согласно определению 2.12, что невозможно в силу однозначности перемещений $\mathbf{u}(X^k,t)$ сплошной среды при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$. Таким образом, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}$, и формула (6.33) действительно имеет место. ▲

2.7. Динамические уравнения совместности

2.7.1. Динамические уравнения совместности в лагранжевом описании. Уравнения совместности деформаций можно записать еще в одном эквивалентном виде — через вектор скорости.

Рассмотрим уравнение (1.2.10), связывающее $\mathbf{F}$ с $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$, и продифференцируем его по t с учетом определения (1.4.1) вектора скорости $\mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\otimes\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial X^i\partial t}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial X^i}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt}. \tag{7.1}$$

В результате получим *динамическое уравнение совместности в лагранжевом описании*:

$$\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}. \tag{7.2}$$

Теорема 2.23. *Условия совместности деформаций выполнены тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ существует поле тензора $\mathbf{F}(X^i,t)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

- $\det\mathbf{F}\neq 0$ *в каждой точке* X^i*,*
- $\mathbf{F}(X^i,0)=\mathbf{E}$ *при* $t=0$*,*
- *поле* $\mathbf{F}$ *обладает векторным потенциалом, т.е. для него существует такое поле вектора* $\mathbf{v}$*, что выполняется уравнение (7.2)* $\forall t>0$ *и* $\forall X^i\in V$*.*

▼ Пусть выполнены условия совместности деформаций, тогда, согласно определению 2.12, существует вектор перемещений $\mathbf{u}(X^i,t)$ вместе со своим градиентом $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}$. Проделывая преобразования (7.1), убеждаемся в справедливости (7.2).

Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть существует вектор-функция $\mathbf{v}$, удовлетворяющая (7.2). Рассмотрим функцию $\widetilde{\mathbf{u}}(X^i,t)=\int_0^t\mathbf{v}(X^i,\tau)d\tau$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\widetilde{\mathbf{u}}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\int_0^t\mathbf{v}d\tau=\int_0^t\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}d\tau=\int_0^t\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{d\tau}d\tau=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}-\mathbf{E}. \tag{7.3}$$

Тогда на основе этой функции можно построить радиус-вектор $\widetilde{\mathbf{x}}=\overset{\circ}{\mathbf{x}}+\widetilde{\mathbf{u}}$, с помощью которого тензор $\mathbf{F}$ будет представлен в виде:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}+\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\widetilde{\mathbf{u}}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\otimes\frac{\partial(\overset{\circ}{\mathbf{x}}+\widetilde{\mathbf{u}})}{\partial X^i}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\otimes\widetilde{\mathbf{r}}_i,$$

где $\widetilde{\mathbf{r}}_i=\partial\widetilde{\mathbf{x}}/\partial X^i$. Но это означает, что $\widetilde{\mathbf{u}}$ и есть искомый вектор перемещений $\mathbf{u}$, а $\mathbf{F}$ — искомый градиент деформации, поскольку они удовлетворяют всем кинематическим соотношениям: (1.1.35), (1.2.10) и др. Таким образом, существует вектор перемещений $\mathbf{u}$, а, следовательно, выполнены условия совместности деформаций. ▲

2.7.2. Динамическое уравнение совместности в пространственном описании. Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Теорема 2.24. *Пусть выполнено уравнение неразрывности (1.1.15), тогда градиент деформации удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{F})=0. \tag{7.4}$$

▼ Представим градиент деформации в диадном базисе:

$$\rho\mathbf{F}=\rho F^{ij}\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_j. \tag{7.5}$$

Воспользуемся формулой для дивергенции любого тензора [12]:

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{F})=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial X^i}(\rho\sqrt{g}\;F^{ij}\mathbf{r}_j)=\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\sqrt{g}}\;\frac{\partial}{\partial X^i}(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i). \tag{7.6}$$

Здесь использовано уравнение неразрывности $\rho=\overset{\circ}{\rho}\sqrt{\overset{\circ}{g}/g}$, а также очевидные соотношения:

$$F^{ik}\mathbf{r}_k=F^{jk}\mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}_j\otimes\mathbf{r}_k=\mathbf{r}^i\cdot\mathbf{F}=(\mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}_k)\otimes\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^k=\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i. \tag{7.7}$$

Дифференцируя (7.6) по частям, получаем

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{F})=\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\sqrt{g}}\Big(\frac{\partial\sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial X^i}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i+\sqrt{\overset{\circ}{g}}\;\frac{\partial\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i}{\partial X^i}\Big)=\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\sqrt{g}}\Big(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\Gamma}{}^s_{is}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i-\sqrt{\overset{\circ}{g}}\;\overset{\circ}{\Gamma}{}^s_{is}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i\Big)=0. \tag{7.8}$$

Здесь использованы свойства символов Кристоффеля [12]. ▲

Преобразуем теперь уравнение (7.2) с учетом (1.1.37):

$$\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\otimes\mathbf{v}, \tag{7.9}$$

и воспользуемся уравнением неразрывности (1.15), которое умножим на $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}+\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0. \tag{7.10}$$

Умножим (7.9) на ρ и применим определение (1.4.7) полной производной по времени:

$$\rho\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt}=\rho\frac{\partial\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\otimes\mathbf{v}. \tag{7.11}$$

Сложим теперь уравнения (7.10) и (7.11), в результате получим:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{T}})-\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\otimes\mathbf{v}=0. \tag{7.12}$$

Умножая уравнение (7.4) тензорно на $-\mathbf{v}$ (т.е. $-\nabla\cdot(\rho\mathbf{F})\otimes\mathbf{v}=0$) и складывая полученное выражение с (7.12), приходим к *динамическому уравнению совместности в пространственном описании*:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{T}}-\rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v})=0. \tag{7.13}$$

Выполнение этого уравнения, так же как и (7.2), необходимо и достаточно для соблюдения условий совместности деформаций в $\mathcal{K}$.

Преобразуя первое и второе слагаемое в (7.13) по формуле (1.20), динамическое уравнение совместности можно записать также в виде

$$\rho\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}). \tag{7.14}$$

Упражнения к 2.7

Упражнение 2.7.1. Показать, что динамическое уравнение совместности (7.2) можно записать в дивергентной форме:

$$d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}/dt = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\mathbf{E}\otimes\mathbf{v}).$$

Упражнение 2.7.2. Используя соотношение $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}$, показать, что динамическое уравнение совместности (7.2) можно представить в следующем виде:

$$d\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}/dt = -(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}.$$

2.8. Уравнения совместности скоростей деформаций

Полученные выше уравнения (7.2) и (7.13) выражают условие существования перемещений $\mathbf{u}$ при заданном поле градиента деформации $\mathbf{F}$. Условия совместности деформаций можно сформулировать также в виде условий на поле тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$.

Теорема 2.25. *Пусть среда в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ не содержит несплошностей и в $\mathcal{K}$ задан симметричный тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ (1.4.45), тогда для того, чтобы среда не содержала несплошностей в $\mathcal{K}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия совместности скоростей деформаций:*

$$\mathrm{Ink}\,\mathbf{D} = 0. \tag{8.1}$$

Здесь введен дифференциальный оператор несовместимости [12]:

$$\mathrm{Ink}\,\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{D}^{\mathrm{T}}) = (1/g)\epsilon^{ijk}\epsilon^{mnl}\nabla_i\nabla_m D_{jn}\mathbf{r}_k\otimes\mathbf{r}_l, \tag{8.2}$$

или в компонентах:

$$(\mathrm{Ink}\,\mathbf{D})^{kl} = (1/g)\epsilon^{ijk}\epsilon^{\alpha\beta l}(\nabla_i\nabla_\alpha D_{j\beta} - \nabla_i\nabla_\beta D_{j\alpha}).\ \ \alpha\neq\beta\neq l. \tag{8.3}$$

▼ Покажем *необходимость* (8.1). Если среда в $\mathcal{K}$ не содержит несплошностей, то существуют: радиус-вектор $\mathbf{x}$, вектор перемещений $\mathbf{u}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$ — однозначные функции координат. Тогда, используя определение тензора $\mathbf{D}$ (1.4.45) и оператора Ink (8.2), находим

$$\mathrm{Ink}\,\mathbf{D} = \frac{1}{2g}\epsilon^{ijk}\epsilon^{mnl}(\nabla_i\nabla_m\nabla_j v_n + \nabla_i\nabla_m\nabla_n v_j)\mathbf{r}_k\otimes\mathbf{r}_l = 0. \tag{8.4}$$

Здесь мы использовали свойство (6.29) переставимости ковариантных производных $\nabla_i\nabla_j$ и $\nabla_m\nabla_n$, а также свойство свертки символов Леви–Чивиты с компонентами произвольного симметричного тензора (см. упр. 1.1.13).

Покажем теперь *достаточность* (8.1). Пусть известен симметричный тензор $\mathbf{D}$, удовлетворяющий (8.1). Тогда можно составить дифференциальную форму вида (6.1):

$$d\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{x} = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_i) dX^i, \tag{8.5}$$

которая образует полный дифференциал, если и только если выполняются условия интегрируемости вида (6.2):

$$\frac{\partial}{\partial X^j}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_i) = \frac{\partial}{\partial X^i}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_j). \tag{8.6}$$

Эти условия с учетом определения (1.1.31) ротора тензора $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D})$ можно представить в виде

$$\nabla_j\Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\ \epsilon^{psk}\nabla_p D_{si}\Big)\mathbf{r}_k = \nabla_i\Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\ \epsilon^{psk}\nabla_p D_{sj}\Big)\mathbf{r}_k. \tag{8.7}$$

В силу теоремы Риччи [12], метрическую матрицу g_{ij} и $\sqrt{g}$ можно выносить за знак ковариантной производной, поэтому соотношение (8.7) переписываем следующим образом:

$$\epsilon^{psk}(\nabla_p\nabla_j D_{si} - \nabla_p\nabla_i D_{sj}) = 0. \tag{8.8}$$

Сравнивая (8.8) и (8.3), получаем, что условие (8.6) эквивалентно условию

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D})^{\mathrm{T}} = 0 \tag{8.9}$$

(формула (8.1)). Таким образом, условия (8.6) всегда удовлетворяются, так как условие (8.9) полагаем выполненным, следовательно, интегральная форма (8.5) является полным дифференциалом, а $\boldsymbol{\omega}$ является однозначной функцией $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$. Тогда полный дифференциал можно представить в виде

$$d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{x}. \tag{8.10}$$

Из (8.5) и (8.10) следует, что ротор тензора $\mathbf{D}$ при условии (8.9) всегда можно представить в виде транспонированного градиента некоторого вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}. \tag{8.11}$$

С помощью этого вектора $\boldsymbol{\omega}$ по формуле (1.1.47) образуем тензор второго ранга :

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \sqrt{g}\ \epsilon_{mik}\omega^m \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^k, \tag{8.12}$$

являющийся кососимметричным, так как $\epsilon_{mik}\omega^m = -\epsilon_{mki}\omega^m$.

Составим теперь с помощью $\mathbf{D}$ и $\mathbf{W}$ еще одну дифференциальную форму:

$$d\mathbf{v} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot d\mathbf{x}. \tag{8.13}$$

Подобно тому, как были получены условия интегрируемости (8.9) для формы (8.5), условия интегрируемости формы (8.13) можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{D} + \mathbf{W})^{\mathrm{T}} = 0. \tag{8.14}$$

Но это условие всегда выполнено, так как

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{D} + \mathbf{W})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{W} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} + \\ + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{E} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = 0.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Здесь мы использовали формулу (8.12) и свойство (2.4.31) оператора $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})$, а также учли, что $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ в силу

$$\begin{aligned}\nabla_m \omega^m = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} \cdot\cdot\, \mathbf{E} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i D_{jl} \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}^l \cdot\cdot\, \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}^m = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i D_{jk} = 0.\end{aligned} \tag{8.16}$$

Таким образом, форма (8.13) является полным дифференциалом, и существует вектор $\mathbf{v}$, являющийся однозначной функцией $\mathbf{x}$, поэтому на основании (1.4.42) можно представить его дифференциал в виде:

$$d\mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{x}. \tag{8.17}$$

Сравнив (8.17) и (8.13), находим, что $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ можно представить в виде суммы симметричного $\mathbf{D}$ и кососимметричного $\mathbf{W}$ тензоров:

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \tag{8.18}$$

но это разложение единственно, поэтому в силу (1.4.45) и (1.4.46):

$$\mathbf{D} = (1/2)(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}), \tag{8.19}$$

$$\mathbf{W} = (1/2)(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}), \tag{8.20}$$

что и доказывает существование вектора $\mathbf{v}$, удовлетворяющего уравнению (8.19) и тем самым представляющего собой вектор скорости. ▲

Тензор $\mathbf{W}$, определенный по (8.12) и (8.20), как мы знаем из п. 1.4.5, называют *тензором вихря*, а $\boldsymbol{\omega}$ — *вектором вихря*.

2.9. Полная система законов сохранения

2.9.1. Полная система в эйлеровом описании. Рассмотрим неполярную сплошную среду.

Систему законов сохранения в пространственном описании (1.18), (2.47), (4.17), (5.12), (7.14) можно записать в единой универсальной форме:

$$\rho \frac{d\bar{A}_\alpha}{dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \bar{B}_\alpha + \rho C_\alpha, \qquad \alpha = 1 \ldots 6, \tag{9.1}$$

где обозначены следующие обобщенные векторы:

$$\bar{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1/\rho \\ \mathbf{v} \\ e + |v|^2/2 \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{B}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}/\theta \\ \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + q_m \\ (q_m + q^*)/\theta \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Здесь индекс $\alpha = 1$ соответствует уравнению неразрывности,
$\alpha = 2$ — уравнению движения,
$\alpha = 3$ — уравнению энергии,
$\alpha = 4$ — уравнению баланса энтропии,
$\alpha = 5$ — кинематическому уравнению,
$\alpha = 6$ — динамическому уравнению совместности.

Уравнение (9.1) при $\alpha = 5$ получено из (1.4.10) умножением его слева и справа на ρ:

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{v}. \tag{9.3}$$

Это соотношение называют *кинематическим уравнением*. Систему (9.1) называют универсальной системой законов сохранения МСС в полных дифференциалах.

Эту же систему можно записать в дивергентном виде, для этого можно собрать соответствующие дивергентные формы отдельных уравнений: (1.15), (2.48), (4.18), (5.12a), (7.13), а можно непосредственно левую часть системы (9.1) с помощью уравнения неразрывности ($\alpha = 1$) преобразовать следующим образом:

$$\rho\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\bar{A}_\alpha + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\right)\bar{A}_\alpha = \frac{\partial\rho\bar{A}_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\bar{A}_\alpha,$$
$$\alpha = 2,\ldots,6. \tag{9.4}$$

Тогда вместе с самим уравнением неразрывности имеет место следующее представление полной системы законов сохранения *в дивергентном виде* в пространственном описании:

$$\frac{\partial\rho\ A_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\ A_\alpha -\ B_\alpha) = \rho C_\alpha, \qquad \alpha = 1,\ldots 6, \tag{9.5}$$

где

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e + |v|^2/2 \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}/\theta \\ \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

В частности, кинематическое уравнение (9.3) в дивергентном виде имеет вид:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{u} = \rho\mathbf{v}. \tag{9.7}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.26. *Полную систему законов сохранения механики сплошной среды в эйлеровом описании можно представить в универсальной форме (9.1) — в полных дифференциалах и в эквивалентном дивергентном виде (9.5).*

2.9.2. Полная система в лагранжевом описании. В лагранжевом описании система законов сохранения (1.8), (2.51), (4.30), (5.20), (1.4.10), (7.2) также может быть записана в единой универсальной форме:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\overset{\circ}{A}_\alpha}{dt} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{B}_\alpha + \overset{\circ}{\rho} C_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots 6, \tag{9.8}$$

где появляются два новых обобщенных вектора:

$$\overset{\circ}{A}_\alpha = \begin{pmatrix} (\rho/\overset{\circ}{\rho}) \det \mathbf{F} \\ \mathbf{v} \\ e + |v^2|/2 \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad \overset{\circ}{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}} \\ -\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta \\ 0 \\ \overset{\circ}{\rho}\mathbf{E} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

Поскольку в лагранжевой системе координат полная производная d/dt совпадает с частной производной $\partial/\partial t$, то система законов сохранения (9.8) уже имеет дивергентный вид.

Замечание 1. Заметим, что первое уравнение в системе (9.8) при $\alpha = 1$ получено дифференцированием уравнения неразрывности (1.8) в переменных Лагранжа. В этом случае мы должны присоединить к этому дифференциальному уравнению еще и начальное условие $\det \mathbf{F} = 1$. Тогда уравнение (9.8) при $\alpha = 1$ с таким начальным условием всегда имеет решение — соотношение (1.8): $(\rho/\overset{\circ}{\rho}) \det \mathbf{F} = 1$. Следовательно, в (9.9) в качестве функции $\overset{\circ}{A}_1$ всегда можно использовать ее фактическое значение: $\overset{\circ}{A}_1 = 1$. Это означает, что обобщенные векторы $\overset{\circ}{A}_\alpha$ в (9.9) и A_α в (9.6) совпадают: $\overset{\circ}{A}_\alpha = A_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, 6$.

2.9.3. Интегральная формулировка. В едином универсальном виде можно представить и систему законов сохранения в интегральной форме (1.5), (2.44), (4.15), (5.9).

Теорема 2.27. *Формулировка системы законов сохранения механики в дифференциальной форме (9.5) в эйлеровом описании эквивалентна следующей интегральной формулировке:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho A_\alpha dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{n} \cdot B_\alpha d\Sigma + \int\limits_V \rho C_\alpha dV, \qquad \alpha = 1, \ldots 6. \tag{9.10}$$

▼ Для доказательства теоремы для $\alpha = 1, \ldots 4$ достаточно подставить обобщенные векторы A_α, B_α и C_α и записать уравнение (9.10) для каждого $\alpha = 1, \ldots 4$ в отдельности. В результате в точности получим уже доказанные ранее соотношения (1.5), (2.44), (4.15) и (5.9).

Для случаев $\alpha = 5, 6$ просто интегрируем уравнения (9.7) и (7.13) по V, а затем, как обычно, применяем правило дифференцирования интеграла по подвижному объему (см. упр. 2.1.2) и теорему Гаусса–Остроградского (1.24). ▲

Аналогично доказываем следующую теорему (см. упр. 2.9.2).

Теорема 2.28. *Формулировка системы законов сохранения механики в дифференциальной форме в материальном описании (9.8) эквивалентна следующей интегральной формулировке:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot \overset{\circ}{B}_\alpha d\overset{\circ}{\Sigma} + \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} C_\alpha d\overset{\circ}{V}, \qquad \alpha = 1,\dots 6. \tag{9.11}$$

Несмотря на указанную выше эквивалентность дифференциальной и интегральной формулировок законов сохранения, между ними имеется одно существенное отличие: в интегральной формулировке уравнение изменения момента количества движения (3.5) даже для неполярных сред не удовлетворяется тождественно, в то время как соответствующее уравнение в дифференциальной формулировке (см. разд. 2.3) свелось к симметрии тензора напряжений $\mathbf{T}$ и было исключено из системы (9.1). Таким образом, интегральная формулировка (9.10) должна быть дополнена законом (3.5); иначе говоря, для обобщенных векторов A_α, B_α и C_α в (9.10) индекс α пробегает значения от 1 до 7:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e+|v|^2/2 \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{x}\times\mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{q} \\ -\mathbf{q}/\theta \\ \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v} \\ -\mathbf{T}\times\mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+q_m \\ (q_m+q^*)/\theta \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{x}\times\mathbf{f} \end{pmatrix}. \tag{9.12}$$

Аналогично интегральная формулировка (9.11) в материальном описании должна состоять из семи уравнений, а $\overset{\circ}{A}_\alpha$ и $\overset{\circ}{B}_\alpha$ имеют вид

$$\overset{\circ}{A}_\alpha = \begin{pmatrix} (\rho/\overset{\circ}{\rho})\,\det\mathbf{F} \\ \mathbf{v} \\ e+|v^2|/2 \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{x}\times\mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad \overset{\circ}{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{P}\cdot\mathbf{v}-\overset{\circ}{\mathbf{q}} \\ -\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta \\ 0 \\ \overset{\circ}{\rho}\mathbf{E}\otimes\mathbf{v} \\ -\mathbf{P}\times\mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Упражнения к 2.9

Упражнение 2.9.1. Провести полное доказательство теоремы 2.27 из п. 2.9.3 в обе стороны.

Упражнение 2.9.2. Провести полное доказательство теоремы 2.28 из п. 2.9.3.

Глава 3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

3.1. Основные принципы построения определяющих соотношений

Рассмотрим неполярные среды.

Система уравнений (2.9.5) состоит из 18 скалярных уравнений (каждое векторное уравнение в (2.9.5) эквивалентно трем скалярным, а тензорное — девяти скалярным уравнениям) и содержит 29 скалярных неизвестных:

$$\rho, \quad \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \quad \mathbf{T}, \quad e, \quad \eta, \quad \theta, \quad \mathbf{q}, \quad \mathbf{F}, \quad q^*, \tag{1.1}$$

функции q_m, $\mathbf{f}$ при отсутствии электромагнитных эффектов обычно предполагают известными. Таким образом, система (2.9.5) — не замкнута.

Для замыкания системы уравнений (2.9.5) необходимы дополнительные соотношения. Эти дополнительные соотношения называют *определяющими соотношениями*, поскольку именно они определяют, чем одна сплошная среда отличается от другой (универсальные законы сохранения «не различают» типы сплошных сред — они одинаковы для всех тел). Если заданы каким-либо образом определяющие соотношения, то говорят, что задана модель сплошной среды.

Вывод определяющих соотношений основан на привлечении некоторых дополнительных *принципов*, т.е. физических допущений общего характера, которые, вообще говоря, не формулируются в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Основными такими принципами являются:

- принцип термодинамически согласованного детерминизма,
- принцип локальности,
- принцип равноприсутствия,
- принцип материальной индифферентности,
- принцип материальной симметрии,
- принцип Онзагера.

Кроме того, для частных моделей сред формулируют дополнительные принципы.

3.2. Энергетические и квазиэнергетические пары тензоров

3.2.1. Энергетические пары тензоров. Прежде чем сформулировать перечисленные выше принципы, дадим определение специальных тензоров напряжений и деформации, играющих важную роль в теории определяющих соотношений.

Рассмотрим мощность внутренних сил $W_{(i)}$ (2.4.21) и введем понятия *мощности напряжений* $w_{(i)}$ и *элементарной работы* $d'A$ *напряжений*:

$$w_{(i)} = \mathbf{T} \cdot \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}}, \qquad W_{(i)} = -\int\limits_V w_{(i)} dV, \qquad d'A = w_{(i)} dt. \tag{2.1}$$

Если использовать формулу (1.1.37) связи градиентов $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}$, а также динамическое уравнение совместности (2.7.2), то для $w_{(i)}$ можно получить еще одно представление:

$$w_{(i)} = \mathbf{T} \cdot \cdot\ \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T} \cdot \cdot\ (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot\ \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \tag{2.2}$$

Здесь была использована формула [12] круговой перестановки трех тензоров в скалярном произведении:

$$\mathbf{A} \cdot \cdot\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \cdot\ \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \cdot\ \mathbf{C}. \tag{2.3}$$

Для дальнейшего нам потребуются еще несколько свойств свертки двух произвольных тензоров [12]:

$$\mathbf{A} \cdot \cdot\ \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \cdot\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A} \cdot \cdot\ \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \cdot\ \mathbf{B} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \cdot\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{A} \cdot \cdot\ \mathbf{B} = \mathbf{A}^S \cdot \cdot\ \mathbf{B}^S + \mathbf{A}^K \cdot \cdot\ \mathbf{B}^K, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{A}^S$, $\mathbf{B}^S$ — симметричные, а $\mathbf{A}^K$, $\mathbf{B}^K$ — кососимметричные части тензоров:

$$\mathbf{A}^S = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2, \qquad \mathbf{A}^K = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2.$$

Если теперь воспользоваться определением (2.2.31) тензора Пиолы–Кирхгофа, то из (2.2) получим выражение для $w_{(i)}$ через тензор $\mathbf{P}$:

$$w_{(i)} = (\rho/\overset{\circ}{\rho})\ \mathbf{P} \cdot \cdot\ \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \tag{2.7}$$

Оказывается, что представление (2.7) мощности напряжений в виде свертки некоторого тензора напряжений и скорости некоторого тензора, «описывающего деформацию», — не единственное. Существуют несколько различных таких представлений. Поскольку они играют чрезвычайно важную роль в построении определяющих соотношений МСС, найдем такие представления.

Для вывода воспользуемся определением (2.1) и формулой (2.6), в которой осуществим замену $\mathbf{A} \to \mathbf{T}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{L} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$, тогда получим

$$w_{(i)} = \mathbf{T}^S \cdot \cdot\ \mathbf{D} + \mathbf{T}^K \cdot \cdot\ \mathbf{W}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации (1.4.45), $\mathbf{W}$ — тензор вихря (1.4.46), введенные разложением (1.4.44) градиента скорости $\mathbf{L}$, а $\mathbf{T}^S$ и $\mathbf{T}^K$ — симметричная и кососимметричная части тензора $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}}), \qquad \mathbf{T}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}}). \tag{2.9}$$

Для неполярных сред тензор $\mathbf{T}$ — симметричен, и формула (2.8) принимает вид:

$$w_{(i)} = \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{D}. \tag{2.10}$$

Теорема 3.1. *Существуют пять пар симметричных тензоров* $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$, *с помощью которых мощность напряжений* $w_{(i)}$ *можно представить в виде*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \mathbf{T}^K \cdot\cdot\, \mathbf{W}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.11}$$

Если же тензор $\mathbf{T}$ *— симметричен, то данное представление принимает вид*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.12}$$

Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ называют *энергетическими тензорами напряжений*, а $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ — *энергетическими тензорами деформации*.

Выражения этих тензоров приведены в табл. 3.1. Все энергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ являются симметричными. Индекс n у этих тензоров принимает значения I, II, III, IV и V, т.е. имеются тензоры: $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$, $\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}}$, $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$, $\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$.

Таблица 3.1. Энергетические пары тензоров

Номер пары n	Энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$	Энергетические тензоры деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$	Энергетические меры деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$
I	$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}$	$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2})$	$-\frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F})$	$\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-1}$	$-\mathbf{U}^{-1}$
III	$\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O}$	$\mathbf{B}$	$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})$	$\mathbf{U} - \mathbf{E}$	$\mathbf{U}$
V	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$	$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E})$	$\frac{1}{2}\mathbf{G}$

Для случая симметричного тензора $\mathbf{T}$ пары при $n = \mathrm{I}$, III, IV и V впервые установлены Хиллом [67], а пара при $n = \mathrm{II}$ — К.Ф.Черных [42, 43]. Специальное обозначение $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и способ упорядочивания этих тензоров, при котором каждый тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ образован соответствующей степенью правого тензора искажений $\mathbf{U}$, было предложено автором [12, 54].

▼ Докажем теорему для каждой энергетической пары отдельно.

3.2.2. Первая энергетическая пара $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\Lambda})$. Рассмотрим выражение $\mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \mathbf{D}$ и подставим в него вместо тензора $\mathbf{D}$ его выражение (1.4.102) через скорость градиента деформации $\dot{\mathbf{F}}$:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}). \tag{2.13}$$

Тогда

$$w_S^{(i)} = \mathbf{T}^S \cdot \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^S \cdot \cdot \, (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}). \tag{2.14}$$

Продифференцируем теперь тождества $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, в результате получим

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1}, \qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} = -\dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{2.15}$$

Подставляя эти выражения в (2.14), находим

$$-w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^S \cdot \cdot \, \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{T}^S \cdot \cdot \, \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{2.16}$$

Представим в этом выражении тензоры $\dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}$ и $\dot{\mathbf{F}}^{-1}$ как скалярное произведение самих себя на метрический тензор $\mathbf{E}$:

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}, \qquad \dot{\mathbf{F}}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}). \tag{2.17}$$

Подставляя эти выражения в (2.16), получим

$$-w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^S \cdot \cdot \, (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\mathbf{T}^S \cdot \cdot \, (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{2.18}$$

Воспользуемся правилом (2.3) перестановки трех произвольных тензоров в скалярном умножении:

$$\begin{aligned} -\,w_S^{(i)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}) \cdot \cdot \, (\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}) \cdot \cdot \, (\dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) = \\ &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F} \cdot \cdot \, \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}} + \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\right) = -(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}) \cdot \cdot \, \dot{\mathbf{\Lambda}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь мы использовали выражение (1.2.5) для правого тензора деформации Альманзи:

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}), \tag{2.20}$$

поскольку

$$-\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1\mathrm{T}}\right). \tag{2.21}$$

Тогда, вводя новый тензор

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}, \tag{2.22}$$

получим из (2.8) и (2.19):

$$w_{(i)} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \cdot \, \dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{T}^K \cdot \cdot \, \mathbf{W}. \tag{2.23}$$

Таким образом, представление (2.11) действительно существует, а в качестве первой энергетической пары тензоров выступает пара $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}},\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}) = (\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}},\ \mathbf{\Lambda})$.

3.2.3. Пятая энергетическая пара $(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}},\ \mathbf{C})$. Введем новый тензор

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \tag{2.24}$$

и преобразуем выражение (2.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}) = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}) = \\ = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}\right) = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{C}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Здесь мы использовали свойство (2.3) скалярного произведения тензоров и представили тензор $\mathbf{T}^S$ в виде

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{E} = \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{T}^S = \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^S = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S, \tag{2.26}$$

а также учли выражение для производной от правого тензора деформации Коши–Грина $\mathbf{C}$ (1.4.107):

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}\right). \tag{2.27}$$

Таким образом, существует еще одна энергетическая пара тензоров $(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}},\ \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}) = (\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}},\ \mathbf{C})$.

3.2.4. Четвертая энергетическая пара $(\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}},\ (\mathbf{U} - \mathbf{E}))$. Для вывода следующей энергетической пары преобразуем выражение (2.25), перейдя от $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ к $\mathbf{T}^S$ по формуле (2.24) и от $\mathbf{C}$ к тензору $\mathbf{U}$ по (1.3.22). Тогда получим

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) \cdot\cdot\, (\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}). \tag{2.28}$$

Раскроем скобки и воспользуемся правилами (2.3) перестановки порядка скалярного умножения трех тензоров:

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2}\mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{U}}. \tag{2.29}$$

Учитывая полярное разложение (1.3.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1}, \tag{2.30}$$

получаем окончательно

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\right) \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{U}} = \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}.$$

Здесь введен четвертый энергетический тензор напряжений $\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}}$:

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\right), \tag{2.31}$$

парным к которому является тензор $\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{C}} = \mathbf{U} - \mathbf{E}$. Мы учли, что $\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \dot{\mathbf{U}}$, так как $\dot{\mathbf{E}} = 0$.

3.2.5. Вторая энергетическая пара $(\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}},\ (\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-1}))$. Преобразуем теперь первую энергетическую пару (2.23), заменив тензор $\mathbf{\Lambda}$ согласно (1.3.22): $\mathbf{\Lambda} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2})$. Тогда из (2.23) получаем:

$$w_S^{(i)} = -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F} \cdot\cdot\ \left(\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{-1} + \dot{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{U}}^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{U}}^{-1}.$$

Используя свойства (2.30) полярного разложения, получим выражение для $w_S^{(i)}$ в виде:

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{C}}{}^{\bullet},$$

где введен *второй энергетический тензор напряжений*:

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F}\right), \tag{2.32}$$

парным к которому является тензор $(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-1}) = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{C}}$, так как $\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = (-\mathbf{U}^{-1})^{\bullet}$.

3.2.6. Третья энергетическая пара $(\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}},\ \mathbf{B})$. Еще одну энергетическую пару можно получить из уравнения (2.29), если вместо $\mathbf{F}^{-1}$ и $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$ подставить их полярное разложение (2.30):

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{U}}.$$

Меняя порядок скалярного умножения, получаем

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O} \cdot\cdot\ \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}.$$

Откуда следует существование третьей энергетической пары:

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \dot{\mathbf{B}},$$

где $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ — *третий энергетический тензор напряжений*:

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{O}, \tag{2.33}$$

а $\mathbf{B} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}$ — *третий энергетический тензор деформации*, который определен своей производной и начальным значением при $t = 0$ (см. (1.4.136)).

3.2.7. Общие представления для энергетических тензоров напряжений и деформации.

Теорема 3.2. *Каждый энергетический тензор деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ *можно выразить через соответствующую степень правого тензора искажений:*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})}(\mathbf{U}^{n-\mathrm{III}} - \mathbf{E}), \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.34}$$

Здесь и везде далее в подобных выражениях при конкретных значениях n римские цифры заменяют на соответствующие арабские, а затем производят арифметические действия. Например, формула (2.34) при $n = \mathrm{I}$ имеет вид

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} = \frac{1}{1-3}(\mathbf{U}^{1-3} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}).$$

▼ Доказательство теоремы очевидно, если расписать формулу (2.34) для $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$ и сравнить получившиеся выражения с тензорами $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ из табл. 3.1. ▲

Общая формула для энергетических тензоров напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ — несколько более сложная, однако очевидно, что $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}^S$ связаны линейной зависимостью:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^{-1} \cdot\cdot\, \mathbf{T}^S, \tag{2.35}$$

где ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^{-1}$ — *обратные тензоры энергетической эквивалентности* (тензоры четвертого ранга), выражения для которых приведены в табл. 3.2. Доказательство этих представлений оставляем в качестве упр. 3.2.11. Использованное в таблице обозначение $(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F})^{(1432)}$ для транспонированного тензора 4-го ранга введено в п. 1.1.4.

Таблица 3.2. Обратные тензоры энергетической эквивалентности

Номер пары n	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^{-1}$
I	$(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F})^{(1432)}$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F})^{(1432)}$
III	$(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{O})^{(1432)}$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1432)}$
V	$(\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1432)}$

Выражения для самих *тензоров энергетической эквивалентности* ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ находим, обращая соотношения (2.35):

$$\mathbf{T}^S = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \tag{2.36}$$

Для обращения используем представления тензоров $\mathbf{F}$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{T}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в собственных базисах тензоров искажений $\mathbf{p}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$.

Теорема 3.3. *Тензоры энергетической эквивалентности* ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$, *связывающие тензоры* $\mathbf{T}^S$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ *с помощью линейных соотношений (2.36), имеют вид*

$$
{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{2.37}
$$

где

$$
\overset{\mathrm{I}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}, \quad \overset{\mathrm{II}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \quad \overset{\mathrm{III}}{E}_{\alpha\beta} = 1, \quad \overset{\mathrm{IV}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \quad \overset{\mathrm{V}}{E}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha\lambda_\beta. \tag{2.38}
$$

▼ а) Рассмотрим случай $n = \mathrm{I}$ и представим тензоры $\mathbf{F}$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{T}^S$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в собственных базисах $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ и $\mathbf{p}_i$ (см. формулы (1.3.33)–(1.3.35)):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \quad \mathbf{O} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\
\mathbf{T}^S = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta,
\end{gathered} \tag{2.39}
$$

где $T^{(p)}_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора $\mathbf{T}^S$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$, а $\overset{(\mathrm{n})\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$.

Подставляя эти представления в соотношение (2.35) при $n = \mathrm{I}$, получаем

$$
\begin{aligned}
\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{F} = \\
= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\omega=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot T^{(p)}_{\gamma\omega}\mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\omega \cdot \lambda_\beta \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \lambda_\alpha\lambda_\beta T^{(p)}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta.
\end{aligned}
$$

Здесь мы учли ортонормированность базиса $\mathbf{p}_\alpha$ (см. (1.3.5)).

Отсюда имеем $\overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = T^{(p)}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta$. Еще раз воспользуемся представлением тензора $\mathbf{T}^S$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$ и учтем, что

$$
\overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta,
$$

тогда

$$\mathbf{T}^S = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{p}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}(\mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta)^{(1432)} \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}(\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha) \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}.$$

Таким образом, представление (2.36) с тензором ${}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}}$ (2.37), (2.38) действительно имеет место для случая $n = \mathrm{I}$.

б) Рассмотрим случай $n = \mathrm{II}$. Снова используя представления (2.39), записываем соотношение (2.35) для $n = \mathrm{II}$ в следующем виде:

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\mathrm{II}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\omega=1}^{3} (\lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot T^{(p)}_{\gamma\omega}\mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\omega \cdot \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta +$$

$$+ \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot T^{(p)}_{\gamma\omega}\mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\omega \cdot \lambda_\beta \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)T^{(p)}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta.$$

Отсюда получаем: $\overset{\mathrm{II}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)T^{(p)}_{\alpha\beta}$. Дальнейшее доказательство полностью аналогично проведенному выше для случая $n = \mathrm{I}$.

Доказательство теоремы для $n = \mathrm{III}$, IV и V проводится по такой же схеме, подробности его оставляем в качестве упр. 3.2.18. В ходе доказательства мы установили, что компоненты $\overset{(\mathrm{n})\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и компоненты $T^{(p)}_{\alpha\beta}$ тензора $\mathbf{T}$ в базисе $\mathbf{p}_\alpha$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha\lambda_\beta T^{(p)}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{\mathrm{II}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)T^{(p)}_{\alpha\beta},\\ \overset{\mathrm{III}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = T^{(p)}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{\mathrm{IV}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta}\Big)T^{(p)}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{\mathrm{V}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}T^{(p)}_{\alpha\beta}. \ \blacktriangle\end{gathered} \tag{2.40}$$

3.2.8. Энергетические меры деформации. Кроме энергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, введем также *энергетические меры деформации*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{U}^{n-\mathrm{III}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}, \tag{2.41}$$

представляющие собой соответствующие степени правого тензора искажений $\mathbf{U}$.

Между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ можно установить следующее соотношение:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - \frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{E}. \tag{2.42}$$

Поскольку производная от метрического тензора равна нулю, то тензоры производных $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ совпадают:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}. \tag{2.43}$$

Третью энергетическую меру деформации $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}$ введем следующим образом:

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}} = \mathbf{E} + \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}. \tag{2.42а}$$

В силу (1.4.136), она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\cdot\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\cdot\ \frac{d\mathbf{U}}{dt}\right), \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{E}, \tag{2.42б}$$

а также удовлетворяет общему для всех мер уравнению (2.43).

В силу (2.43), формулу (2.11) для $w_{(i)}$ можно представить в другом виде:

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} + \mathbf{T}^{K} \cdot\cdot\ \mathbf{W}, \qquad n = \mathrm{I},\ \ \mathrm{II},\ \ \mathrm{III},\ \ \mathrm{IV},\ \ \mathrm{V}. \tag{2.44}$$

Если же тензор $\mathbf{T}$ является симметричным, то эта формула принимает вид

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \ \mathrm{II},\ \ \mathrm{III},\ \ \mathrm{IV},\ \ \mathrm{V}, \tag{2.45}$$

т.е. помимо энергетических пар тензоров напряжений и деформации $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ существуют и пары энергетических тензоров напряжений и мер деформации $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ (см. табл. 3.1).

Заметим, что кроме тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ можно ввести целое семейство тензоров вида $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} + \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ — произвольный тензор-константа: $\dot{\mathbf{N}} \equiv 0$, которые будут также удовлетворять соотношению (2.43). Однако, какой-либо физический смысл имеют только тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, которые уже использовались ранее:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}, \quad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{G}} = -\mathbf{U}^{-1}, \quad \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{G}} = \mathbf{U}, \quad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}, \tag{2.46}$$

— это правые меры деформации Коши–Грина и Альманзи, а также правый и обратный к нему тензоры искажений. Все тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ являются симметричными.

Формулы (2.34) и (2.41), как и само существование энергетических мер деформации в систематическом виде, были предложены автором в работах [12, 54].

3.2.9. Соотношения между главными инвариантами энергетических мер и тензоров деформации. В механике широко используют понятие трех главных инвариантов тензора второго ранга, которые определяют следующим образом:

$$I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}, \quad I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}(I_1^2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) - I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2), \quad I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = \det(\overset{(n)}{\mathbf{C}}). \tag{2.47}$$

Подробнее само понятие инварианта будет рассмотрено далее в п. 3.8.4. Здесь же рассмотрим соотношения между главными инвариантами $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$, $\alpha = 1,2,3$, энергетических тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и главными инвариантам $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ энергетических мер деформации.

Теорема 3.4. *Главные инварианты тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{gathered}
I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) - \frac{3}{n-\mathrm{III}},\\
I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) - \frac{2}{n-\mathrm{III}}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) + \frac{3}{(n-\mathrm{III})^2},\\
I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) - \frac{I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}})}{n-\mathrm{III}} - \frac{I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}})}{(n-\mathrm{III})^2} - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3},\\
I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{3}{n-\mathrm{III}},\\
I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{2}{n-\mathrm{III}}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{3}{(n-\mathrm{III})^2},\\
I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}})}{n-\mathrm{III}} + \frac{I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}})}{(n-\mathrm{III})^2} + \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3},\\
n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.
\end{gathered} \tag{2.48}$$

▼ Для доказательства следует выразить первую, вторую и третью степени тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ через степени тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$:

$$\begin{gathered}
\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \overset{(n)}{\mathbf{G}} - \frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{E},\\
\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2 = \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^2 - \frac{2}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}} + \frac{1}{(n-\mathrm{III})^2}\mathbf{E},\\
\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^3 = \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^3 - \frac{3}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^2 + \frac{3}{(n-\mathrm{III})^2}\overset{(n)}{\mathbf{G}} - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\mathbf{E}.
\end{gathered}$$

Образуем от этих тензоров инварианты: $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$, $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^2)$ и $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^3)$, а затем, воспользовавшись формулами [12]

$$\begin{gathered} I_3(\mathbf{T}) = \det\,(\mathbf{T}) = \frac{1}{6}\left(I_1^3(\mathbf{T}) - 3I_1(\mathbf{T})I_1(\mathbf{T}^2) + 2I_1(\mathbf{T}^3)\right), \\ I_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{3}\left(I_1(\mathbf{T}^3) - I_1^3(\mathbf{T}) + 3I_1(\mathbf{T})I_2(\mathbf{T})\right), \end{gathered} \tag{2.49}$$

получим искомые выражения для первого, второго и третьего инвариантов от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$. Подробности вывода оставим в качестве упр. 3.2.10. ▲

3.2.10. Квазиэнергетические пары тензоров напряжений и деформации. С помощью левого тензора искажений $\mathbf{V}$ также можно ввести пары тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, однако при этом мощность напряжений $w_{(i)}$ будет зависеть еще и от производной тензора $\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$ — поворота, сопровождающего деформацию, поэтому такие пары $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$ назовем *квазиэнергетическими.*

Определение 3.1. *Тензоры* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, *определенные выражениями из табл. 3.3, называют* *квазиэнергетическими* *тензорами напряжений и деформации соответственно.*

Таблица 3.3. Квазиэнергетические пары тензоров

Номер пары n	Квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$	Квазиэнергетические тензоры деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$	Квазиэнергетические меры деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$
I	$\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}$	$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-2})$	$-\frac{1}{2}\mathbf{g}^{-1}$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V})$	$\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-1}$	$-\mathbf{V}^{-1}$
III	$\mathbf{T}^S$	$\mathbf{Y}$	$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1})$	$\mathbf{V} - \mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
V	$\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1}$	$\mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{E})$	$\frac{1}{2}\mathbf{g}$

Теорема 3.5. *Мощность напряжений* $w_{(i)}$ *(2.1) всегда можно представить с помощью одной из следующих пяти квазиэнергетических пар тензоров:*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d}{dt}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{T}^K\cdot\cdot\,\mathbf{W}, \quad n = \mathrm{I},\ldots,\mathrm{V}. \tag{2.50}$$

Если тензор $\mathbf{T}$ *— симметричный, то выражение для* $w_{(i)}$ *принимает вид*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d}{dt}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad n = \mathrm{I},\ldots,\mathrm{V}. \tag{2.50a}$$

Здесь $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ *— симметричные квазиэнергетические тензоры второго ранга, а* $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ *— одинаковый для всех пар тензор, называемый поворотным* *тензором напряжений:*

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V})\cdot\mathbf{O}. \tag{2.51}$$

▼ Докажем эту теорему для каждой пары отдельно.

3.2.11. Первая квазиэнергетическая пара $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}, \mathbf{A})$. Рассмотрим первую энергетическую пару (2.23) и перейдем от тензора $\mathbf{U}^{-2}$ к $\mathbf{V}^{-2}$ с помощью соотношений $\mathbf{U}^{-2} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^{-2}\cdot\mathbf{O}$ (см. упр. 1.3.1):

$$\begin{aligned} w_S^{(i)} &= \mathbf{T}^S\cdot\cdot\,\mathbf{D} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{\Lambda}}{}^{\bullet} = -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{F}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{U}}^{-2} = \\ &= -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{F}\cdot\cdot\,\Big(\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^{-2}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{V}}^{-2}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^{-2}\cdot\dot{\mathbf{O}}\Big). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Раскрывая скобки и используя полярное разложение (1.3.1) и правила (2.3) перемены порядка скалярного умножения тензоров, получим

$$\begin{aligned} w_S^{(i)} = -\frac{1}{2}\Big(&\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,\mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}}^{-2} + \\ &+ \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\Big). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Учитывая, что $\mathbf{O}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ и, следовательно,

$$\dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \tag{2.54}$$

получим окончательное выражение вида (2.50):

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{V}^{-2}\Big)^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \tag{2.55}$$

где первые квазиэнергетические тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}$, $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}$ определены следующим образом: $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1})$, а поворотный тензор $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ определен формулой (2.51). Таким образом, доказано существование первой квазиэнергетической пары $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}},\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}) = (\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}},\ \mathbf{A})$.

3.2.12. Вторая квазиэнергетическая пара $(\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}}, (\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-1}))$. Если в (2.54) от производной $\dot{\mathbf{V}}^{-2}$ перейти к $\dot{\mathbf{V}}^{-1}$, то получим

$$\begin{aligned} w_{(i)} &= \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,\big(\mathbf{V}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{V}}^{-1} + \dot{\mathbf{V}}^{-1}\cdot\mathbf{V}^{-1}\big) = \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V})\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Здесь вновь использовано правило (2.3). В результате приходим ко второй квазиэнергетической паре:

$$w_{(i)} = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-1})^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \tag{2.57}$$

где обозначен второй квазиэнергетический тензор напряжений $\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}}$:

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}), \tag{2.58}$$

а в качестве второго квазиэнергетического тензора деформации, очевидно, выступает тензор $\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{A}} = (\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-1})$.

3.2.13. Третья квазиэнергетическая пара $(\mathbf{Y},\ \mathbf{T}^S)$. Воспользуемся третьей энергетической парой (см. п. 3.2.6) и перейдем от тензора $\dot{\mathbf{U}}$ к $\dot{\mathbf{V}}$:

$$\begin{aligned} w_S^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{O}\cdot\cdot\,(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{O}\cdot\cdot\,(\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}+\\ + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\dot{\mathbf{O}})\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{O}+\\ + \frac{1}{2}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{O}\cdot\cdot\,\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{O}(\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\dot{\mathbf{O}}). \end{aligned}$$

Меняя порядок скалярного умножения тензоров в каждом из этих слагаемых, получим

$$\begin{aligned} w_S^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^S\cdot\cdot\,\mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}+\\ + \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\cdot\,\mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{T}^S\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Используя соотношение (2.54), получаем, что первое и последнее слагаемые взаимно сокращаются, и выражение (2.59) можно привести к виду:

$$w_S^{(i)} = \mathbf{T}^S\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{Y}} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}. \tag{2.60}$$

где введен новый тензор $\mathbf{Y}$, подобный тензору $\mathbf{B}$, определенный своей производной (см. (1.4.137)):

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{V}}), \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}. \tag{2.61}$$

Таким образом, доказано существование третьей квазиэнергетической пары: $(\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}},\ \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}) = (\mathbf{Y},\ \mathbf{T}^S)$.

3.2.14. Четвертая квазиэнергетическая пара $(\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}}, (\mathbf{V} - \mathbf{E}))$. Выражение (2.60) с учетом (2.61) можно легко преобразовать к виду:

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1})\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}},$$

что доказывает существование четвертой квазиэнергетической пары:

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}},$$

где четвертые квазиэнергетические тензоры определены в соответствии с табл. 3.3:

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V}^{-1}), \qquad \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{A}} = \mathbf{V} - \mathbf{E}. \tag{2.62}$$

3.2.15. Пятая квазиэнергетическая пара $(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}}, \mathbf{J})$. Преобразуем выражение (2.62) следующим образом:

$$w_S^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1}) + \\ + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot\cdot\, \frac{1}{2}(\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}) + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда следует существование пятой квазиэнергетической пары:

$$w_S^{(i)} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{J}} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}},$$

где пятые квазиэнергетические тензоры напряжений и деформации определим следующим образом:

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1}, \\ \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}} = \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}). \tag{2.63}$$

Доказательство теоремы 3.5 закончено. ▲

Квазиэнергетические пары были впервые установлены автором в работе [12].

3.2.16. Общее представление квазиэнергетических тензоров.

Теорема 3.6. *Каждый квазиэнергетический тензор деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ *можно выразить через соответствующую степень левого тензора искажений* $\mathbf{V}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{1}{(n - \mathrm{III})}(\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}} - \mathbf{E}), \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.64}$$

▼ Справедливость теоремы доказываем непосредственным сравнением формулы (2.64) с тензорами $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ из табл. 3.3. ▲

Для квазиэнергетических тензоров напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ можно установить следующее общее представление (см. упр. 3.2.17):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}{}^{-1} \cdot\cdot\, \mathbf{T}^S, \tag{2.65}$$

где ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}{}^{-1}$ — *обратные тензоры квазиэнергетической эквивалентности*, выражения для которых приведены в табл. 3.4.

Выражения для *тензоров квазиэнергетической эквивалентности* ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$ получаем путем обращения соотношений (2.65)

$$\mathbf{T}^S = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}. \tag{2.66}$$

Для обращения используем представления тензоров в собственном базисе $\mathbf{p}_i$ левого тензора искажений $\mathbf{V}$ подобно тому, как это было проделано в п. 3.2.7.

Таблица 3.4. Обратные тензоры квазиэнергетической эквивалентности

Номер пары n	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}{}^{-1}$
I	$(\mathbf{V}\otimes\mathbf{V})^{(1432)}$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}\otimes\mathbf{E}+\mathbf{E}\otimes\mathbf{V})^{(1432)}$
III	$\boldsymbol{\Delta}$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}+\mathbf{E}\otimes\mathbf{V}^{-1})^{(1432)}$
V	$(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{V}^{-1})^{(1432)}$

Теорема 3.7. *Тензоры квазиэнергетической эквивалентности* ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$, *связывающие тензоры* $\mathbf{T}^S$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *с помощью линейных соотношений (2.66), имеют вид*

$$
{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\alpha, \qquad n=\mathrm{I},\ldots,\mathrm{V}. \tag{2.67}
$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta}$ *выражаются по формулам (2.37), (2.38).*

▼ Рассмотрим только случай $n=\mathrm{I}$, для остальных случаев $n=\mathrm{II},\ldots,\mathrm{V}$ доказательство аналогично, и подробности его оставим в качестве упр. 3.2.19.

Представляя тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ в собственном базисе $\mathbf{p}_i$:

$$
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta, \tag{2.68}
$$

и используя представления (2.39) для $\mathbf{T}^S$ и (1.3.6) для $\mathbf{V}$, соотношение (2.65) для $n=\mathrm{I}$ записываем следующим образом:

$$
\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\mathrm{I}}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta = \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{V} =
$$

$$
\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\omega=1}^{3} \lambda_\alpha\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha\cdot T^{(p)}_{\gamma\omega}\mathbf{p}_\gamma\otimes\mathbf{p}_\omega\cdot\lambda_\beta\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\lambda_\alpha\lambda_\beta T^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta,
$$

т.е. $\overset{\mathrm{I}}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha\lambda_\beta T^{(p)}_{\alpha\beta}$. Тогда

$$
\mathbf{T}^S = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\overset{\mathrm{I}}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta}\otimes\mathbf{p}_\beta =
$$

$$
= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{1}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}(\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\mathbf{p}_\alpha)\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}.\ ▲
$$

Замечание. Из приведенного доказательства и формул (2.40) следует, что компоненты $\overset{\mathrm{I}}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\mathrm{I}\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ тензоров $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$ совпадают. Этот же результат имеет место для всех тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (см. упр. 3.2.18 и 3.2.19):

$$\overset{(\mathrm{n})}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta} = \overset{(\mathrm{n})\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}. \tag{2.69}$$

3.2.17. Квазиэнергетические меры деформации. Аналогично мерам $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, введем *квазиэнергетические меры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}, \tag{2.70}$$

представляющие собой соответствующие степени левого тензора искажений $\mathbf{V}$. Третью квазиэнергетическую меру деформации $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}$ введем следующим образом:

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}} = \mathbf{E} + \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}}. \tag{2.70а}$$

В силу (2.61), она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\cdot\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\cdot\ \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right), \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{E}. \tag{2.70б}$$

Между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ имеется очевидная связь:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} - \frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{E}, \tag{2.71}$$

(в случае $n=$III множитель ($n-$III) заменяется на 1), поэтому для всех пар

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{\bullet}. \tag{2.72}$$

С учетом этого соотношения мощность (2.50) можно представить в другом виде:

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{T}^{K}\cdot\cdot\,\mathbf{W}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.73}$$

Для симметричного тензора $\mathbf{T}$ это выражение примет вид

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{2.73а}$$

Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$ — это левые меры деформации Коши–Грина и Альманзи, а также левый и обратный к нему тензоры искажений:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{g}} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^{-1}, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{g}} = -\mathbf{V}^{-1}, \qquad \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{g}} = \mathbf{V}, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\mathbf{g}. \tag{2.74}$$

Все эти тензоры являются симметричными.

3.2.18. Представление поворотного тензора напряжений через квазиэнергетические пары тензоров. Сформулируем теперь теорему об одном важном представлении поворотного тензора напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$.

Теорема 3.8. *Поворотный тензор напряжений* $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ *(2.51) можно представить с помощью квазиэнергетических пар тензоров напряжений и деформации:*

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{O}. \tag{2.75}$$

▼ Определение (2.51) тензора $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{O} \tag{2.76}$$

можно представить в следующих четырех эквивалентных формах:

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}((\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}^{-2} - \mathbf{V}^{-2} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V})) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}((\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V})) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1}) - (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1}) \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1}) - (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{V}^{-1}) \cdot \mathbf{V}^2) \cdot \mathbf{O}.
\end{gathered} \tag{2.77}$$

Сравнивая эти соотношения с определением квазиэнергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ (см. табл. 3.3), получаем, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{E} - 2\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}) - (\mathbf{E} - 2\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{E} - \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{A}}) - (\mathbf{E} - \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}((\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{A}} + \mathbf{E}) \cdot \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}} - \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{E} + \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{A}})) \cdot \mathbf{O}, \\
\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}((\mathbf{E} + 2\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}}) \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}} - \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{E} + 2\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}})) \cdot \mathbf{O}.
\end{gathered} \tag{2.78}$$

Поскольку скалярное умножение метрического тензора всегда коммутативно: $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}$ и т.д., то из (2.78), очевидно, получаем искомое соотношение (2.75). ▲

Из этой теоремы следует еще одно важное утверждение, которое будем использовать далее.

Теорема 3.9. *Поворотный тензор напряжений* $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ *является нулевым тогда и только тогда, когда тензоры* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ *коммутируют друг с другом.*

3.2.19. Соотношения между плотностью и главными инвариантами энергетических и квазиэнергетических тензоров деформации. Далее часто будут использованы соотношения между плотностью ρ и главными инвариантами энергетических и квазиэнергетических тензоров и мер деформации. Установим их.

Теорема 3.10. *Для всякой сплошной среды отношение плотностей $\rho/\overset{\circ}{\rho}$ является однозначной функцией третьего главного инварианта энергетических и квазиэнергетических мер $I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ и $I_3(\overset{(n)}{\mathbf{g}})$, а также функцией главных инвариантов энергетических и квазиэнергетических тензоров деформации $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ и $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{A}})$:*

$$I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = I_3(\overset{(n)}{\mathbf{g}}) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}, \tag{2.79}$$

$$\rho/\overset{\circ}{\rho} = (1+(n-\mathrm{III})I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + (n-\mathrm{III})^2 I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + (n-\mathrm{III})^3 I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}))^{1/(\mathrm{III}-n)}, \tag{2.80}$$

$$\rho/\overset{\circ}{\rho} = (1+(n-\mathrm{III})I_1(\overset{(n)}{\mathbf{A}}) + (n-\mathrm{III})^2 I_2(\overset{(n)}{\mathbf{A}}) + (n-\mathrm{III})^3 I_3(\overset{(n)}{\mathbf{A}}))^{1/(\mathrm{III}-n)}. \tag{2.81}$$

Для доказательства формул (2.79) используем уравнение неразрывности (2.1.8) и полярное разложение (1.3.1):

$$\overset{\circ}{\rho}/\rho = \det\,\mathbf{F} = \det\,(\mathbf{O}\cdot\mathbf{U}) = \det\,\mathbf{U} = \det\,\mathbf{V}. \tag{2.82}$$

Используя определение (2.41) мер $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ и учитывая (2.82), убеждаемся в истинности формулы (2.79:)

$$I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = \det\,(\frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{U}^{n-\mathrm{III}}) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\det\mathbf{U})^{n-\mathrm{III}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}. \tag{2.83}$$

Аналогично, используя определение (2.74) квазиэнергетических мер и принимая во внимание (2.82), доказываем вторую часть формулы (2.79):

$$I_3(\overset{(n)}{\mathbf{g}}) = \det\,(\frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}}) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\det\mathbf{V})^{n-\mathrm{III}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}. \tag{2.84}$$

Подставляя теперь шестую формулу (2.49) в (2.79), действительно получаем соотношения (2.80) между $(\rho/\overset{\circ}{\rho})$ и $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$. Поскольку между инвариантами $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{g}})$ и $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{A}})$ существуют соотношения, аналогичные (2.48) (см. упр. 3.2.8), то и между $(\rho/\overset{\circ}{\rho})$ и $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{A}})$ также имеют место соотношения (2.81), аналогичные (2.80). ▲

3.2.20. Обобщенная форма представления мощности напряжений. Рассмотрим далее только случай неполярных сред, когда тензор $\mathbf{T}$ является симметричным, тогда

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}^K \equiv \mathbf{0}, \tag{2.85}$$

и, согласно формулам (2.12), (2.45), (2.50а) и (2.73а), мощность напряжений $w_{(i)}$ (2.1) можно представить в виде одной из следующих двадцати форм, эквивалентных между собой:

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{2.86}$$

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}{dt}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{2.87}$$

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}{dt} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{2.88}$$

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}{dt} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \tag{2.89}$$

Будем говорить, что *мощность напряжений* $w_{(i)}$ записана в *форме* A_n, B_n, C_n или D_n, если используются соответственно выражения (2.86), (2.87), (2.88) или (2.89).

Введем *обобщенные энергетические тензоры напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$, *обобщенные энергетические тензоры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$, *обобщенные энергетические меры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G$ и *обобщенный поворотный тензор напряжений* $\mathbf{S}_G$, где G будет обозначать индекс, пробегающий буквенные значения $G = A, B, C$ и D:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, & \text{если } G = A, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, & \text{если } G = B, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, & \text{если } G = C, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, & \text{если } G = D, \end{cases} \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = \begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, & \text{если } G = A, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, & \text{если } G = B, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, & \text{если } G = C, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, & \text{если } G = D, \end{cases}$$
$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G = \begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, & \text{если } G = A, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, & \text{если } G = B, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, & \text{если } G = C, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, & \text{если } G = D, \end{cases} \qquad \mathbf{S}_G = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } G = A, \\ \mathbf{0}, & \text{если } G = B, \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}, & \text{если } G = C, \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}, & \text{если } G = D. \end{cases} \tag{2.90}$$

Тогда все двадцать форм записи выражений (2.86)–(2.89) можно записать в единой обобщенной форме:

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}{dt} + \mathbf{S}_G \cdot\cdot \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \quad G = A, B, C, D. \tag{2.91}$$

3.2.21. Представление мощности напряжений с помощью коротационных производных. Для дальнейшего нам потребуется определение *соосности* двух симметричных *тензоров* $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, означающее, что они имеют один и тот же собственный базис $\mathbf{p}_\alpha^{(M)}$(их собственные значения $\lambda_\alpha^{(M)}$ и $\lambda_\alpha^{(N)}$ при этом, вообще говоря, различаются):

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{(M)} \mathbf{p}_\alpha^{(M)} \otimes \mathbf{p}_\alpha^{(M)}, \qquad \mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{(N)} \mathbf{p}_\alpha^{(M)} \otimes \mathbf{p}_\alpha^{(M)}.$$

В силу взаимной ортогональности векторов собственного базиса $\mathbf{p}_\alpha^{(M)}$, скалярное произведение соосных тензоров $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ не зависит от порядка сомножителей (коммутативно): $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}$, т.е. тензоры $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ коммутируют друг с другом. Верно и обратное утверждение: коммутирующие симметричные тензоры соосны (см. упр. 3.2.24).

Теорема 3.11. *Пусть известно, что тензоры* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$*, а также* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ *попарно соосны или попарно коммутируют для всякого n, тогда мощность напряжений* $w_{(i)}$ *(2.91) можно представить с помощью коротационных производных в следующем виде:*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{h} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{h}, \tag{2.92}$$

где $h = \{\cdot, U, V, J, S\}$.

▼ Заметим, что все коротационные производные, указанные в формулировке, имеют одинаковую структуру (см. (1.5.41)):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} - \mathbf{Z}_h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}}, \tag{2.93}$$

где $\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_U, \boldsymbol{\Omega}_V, \mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}\}$ — тензор второго ранга (см. (1.5.42)). Тогда, в силу свойства (2.2) свертки трех тензоров, имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h} &= \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} - \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{Z}_h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \mathbf{T} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}} = \\ &= \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} - (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{T}) \cdot\cdot \mathbf{Z}_h - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}) \cdot\cdot \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Поскольку, по предположению, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ коммутируют или соосны, то $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, а тензор $\mathbf{Z}_h$ — кососимметричный или нулевой, тогда, очевидно, получаем

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = w_{(i)}, \tag{2.95}$$

что и требовалось доказать.

В силу коммутативности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, по теореме 3.9 получаем, что $\overset{\circ}{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{0}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = 0$, тогда, повторяя проделанные выше выкладки, получаем

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h}. \ \blacktriangle \tag{2.96}$$

3.2.22. Соотношения между скоростями энергетических и квазиэнергетических тензоров и градиентом скорости. Ранее в п. 1.5.11 были установлены соотношения между коротационными производными (и полной производной по времени) тензоров и мер деформации Альманзи и Коши–Грина с одной стороны и градиентом скорости $\mathbf{L}$ с другой стороны. Используя соотношения (1.5.44) и (1.5.45), несложно перейти к энергетическим и квазиэнергетическим тензорам и мерам деформации и записать указанные соотношения в единой обобщенной форме:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G{}^h = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}_{Gh} \cdot\cdot \mathbf{D} + {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}{}_{Gh} \cdot\cdot \mathbf{W}, \tag{2.97}$$

$$h = \{\cdot, \mathrm{Ol}, \mathrm{CR}, d, D, U, V, J, S\}, \quad G = A, B, C, D, \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V},$$

где ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}{}_{Gh}$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}_{Gh}$ — тензоры четвертого ранга, их общее выражение для $G = C, D$ имеет вид

$$\begin{aligned} {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}_{Gh} &= {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}^0_{Gh} - ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{M}}{}^{(1342)}_h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G)^{(1423)} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G \cdot {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{M}}{}^{(2134)}_h, \\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}{}_{Gh} &= {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}{}^0_{Gh} - ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{M}}}{}^{(1342)}_h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G)^{(1423)} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G \cdot {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{M}}}{}^{(2134)}_h, \\ & G = C, D, \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}^0_{Gh}$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{M}}{}_h$ приведены в табл. 3.5. Входящие в эту таблицу тензоры определены: тензоры ${}^4\mathbf{Z}_{Dh}$ и ${}^4\mathbf{Z}_{Wh}$ — по формуле (1.5.43) и табл. 1.1, тензор ${}^4\widetilde{\mathbf{\Omega}}$ — в упр. 1.4.11, а тензор ${}^4\mathbf{E}_h$ — согласно табл. 1.1.

Таблица 3.5. Тензоры, участвующие в формуле (2.98), при различных n

n	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}{}^0_{Gh}$	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{M}}{}_h$	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{M}}}{}_h$	${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}{}^0_{Gh}$
I	$\mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	${}^4\mathbf{Z}_{Dh} + \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	${}^4\mathbf{Z}_{Wh} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	0
II	$\mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}} - {}^4\mathbf{E}_h - ({}^4\mathbf{Z}_{Dh} + {}^4\mathbf{Z}^{(2134)}_{Dh})$	${}^4\mathbf{Z}_{Dh} - \frac{1}{2}({}^4\widetilde{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}})$	${}^4\mathbf{Z}_{Wh} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	0
III	$\mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}} + {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{Y}} \cdot\cdot {}^4\widetilde{\mathbf{\Omega}}$	${}^4\mathbf{Z}_{Dh}$	${}^4\mathbf{Z}_{Wh}$	${}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{Y}}$
IV	$\mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}} + {}^4\mathbf{E}_h + {}^4\mathbf{Z}_{Dh} + {}^4\mathbf{Z}^{(2134)}_{Dh}$	${}^4\mathbf{Z}_{Dh} - \frac{1}{2}({}^4\widetilde{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}})$	${}^4\mathbf{Z}_{Wh} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	0
V	$\mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	${}^4\mathbf{Z}_{Dh} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	${}^4\mathbf{Z}_{Wh} - \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}}$	0

Тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}_{Dh}$ и ${}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{Y}}$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}_{Dh} = \mathbf{0}, \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV}, \mathrm{V}; \quad {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{X}}_{Dh} = {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{X}}_{Ch},\\ {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{V} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^{-1}).\end{gathered} \tag{2.99}$$

Для энергетических тензоров — мер деформации ($G = A, B$) обычно применяют только полные производные по времени, для них

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}_{Gh} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}, \qquad {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}_{Gh} = \mathbf{0}, \quad G = A, B, \tag{2.100}$$

где тензоры четвертого ранга ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}$ одинаковы для мер и тензоров деформации и различаются только для разных значений n:

$$\begin{gathered}{}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F})^{(1432)}, \quad {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{O})^{(1432)}, \quad {}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1432)},\\ {}^4\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\Delta} + {}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(1342)} \cdot \mathbf{O})^{(1423)} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot ((\boldsymbol{\Delta} + {}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(2134)})^{(1342)} \cdot \mathbf{F})^{(1423)}),\end{gathered} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}{}^4\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Delta} - {}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(1342)} \cdot \mathbf{O})^{(1423)} &+ \\ &+ \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot ((\boldsymbol{\Delta} - {}^4\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(2134)})^{(1342)} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1423)}).\end{aligned}$$

Доказательство формулы (2.100) оставим в качестве упр. 3.2.22.

Таким образом, скорости энергетических тензоров и мер деформации не зависят от тензора вихря и являются линейной тензорной функцией только от тензора скоростей деформации:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{G} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \qquad G = A, B. \tag{2.102}$$

Если выразить тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{W}$ через $\mathbf{L}$ (см. упр. 1.4.12):

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\Delta} \cdot\cdot\, \mathbf{L}, \qquad \mathbf{W} = \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \cdot\cdot\, \mathbf{L}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{III}} - \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{II}}), \tag{2.103}$$

то соотношение (2.97) можно представить в виде связи $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h}_{G}$ и $\mathbf{L}$:

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{h}_{G} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{B}}_{Gh} \cdot\cdot\, \mathbf{L}, \quad G = A, B, C, D;\\ h = \{\cdot,\ \mathrm{Ol},\ \mathrm{CR},\ U,\ V,\ J,\ S\}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V},\end{gathered} \tag{2.104}$$

где

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{B}}_{Gh} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}_{Gh} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\Delta} + {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Y}}_{Gh} \cdot\cdot\, \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}. \tag{2.105}$$

Упражнения к 3.2

Упражнение 3.2.1. Пусть симметричный тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ в актуальной конфигурации имеет следующие компоненты (2.2.27): $\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = T_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j$.

Используя соотношения между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}$ (см. табл. 3.1) и уравнение (1.1.36), показать, что энергетические тензоры имеют те же самые компоненты, но в других тензорных базисах:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} = T_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} = T^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}T_{ij}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}{}^j + \widehat{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j),$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}T^{ij}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}_j + \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j), \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} = T_{ij}\widehat{\mathbf{r}}{}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}{}^j = T^{ij}\widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}_j,$$

где

$$\widehat{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}^i, \qquad \widehat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_i.$$

Упражнение 3.2.2. Показать, что квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ имеют те же компоненты T_{ij}, T^{ij}, как и тензор Коши $\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = T_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j$, но в других тензорных базисах:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} = T_{ij}\breve{\mathbf{r}}{}^i \otimes \breve{\mathbf{r}}{}^j, \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} = \mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}T_{ij}(\mathbf{r}^i \otimes \breve{\mathbf{r}}{}^j + \breve{\mathbf{r}}{}^i \otimes \mathbf{r}^j),$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}T^{ij}(\mathbf{r}_i \otimes \breve{\mathbf{r}}_j + \breve{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}_j), \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{S}} = T^{ij}\breve{\mathbf{r}}_i \otimes \breve{\mathbf{r}}_j,$$

где

$$\breve{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \breve{\mathbf{r}}_i = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i.$$

Упражнение 3.2.3. Используя факт того, что компоненты $\overset{(\mathrm{n})}{S}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ определены в базисе $\mathbf{p}_i$, а $\overset{(\mathrm{n})\circ}{T}{}^{(p)}_{\alpha\beta}$ — в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, и учитывая формулу (1.3.23а), показать, что все энергетические и квазиэнергетические тензоры напряжений связаны с помощью тензора поворота $\mathbf{O}$, сопровождающего деформацию, следующим образом:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \mathbf{O} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}\ .$$

Упражнение 3.2.4. Показать, что все энергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$, имеют следующие представления в собственном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

а все квазиэнергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$, имеют следующие представления в базисе $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha.$$

Упражнение 3.2.5. Используя формулы (1.1.36), (1.2.7), (1.2.8), (1.4.131), (2.46) и результаты упр. 1.1.7, показать, что компонентами энергетических мер деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ являются метрические матрицы g_{ij}, g^{ij} в различных тензорных базисах:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1} = -\frac{1}{2}g^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}g^{ij}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}_j + \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j),$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2} g_{ij} (\mathring{\mathbf{r}}^i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j + \widehat{\mathbf{r}}^i \otimes \mathring{\mathbf{r}}^j), \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}\mathbf{G} = \frac{1}{2} g_{ij} \mathring{\mathbf{r}}^i \otimes \mathring{\mathbf{r}}^j.$$

Упражнение 3.2.6. Показать, что компонентами квазиэнергетических мер деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ ($n = \mathrm{I}$, II, IV, V) являются метрические матрицы g_{ij}, g^{ij} в различных тензорных базисах:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{g}} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^{-1} = -\frac{1}{2} g^{ij} \breve{\mathbf{r}}_i \otimes \breve{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{g}} = -\frac{1}{2} g^{ij} (\breve{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \otimes \breve{\mathbf{r}}_j),$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{g}} = \frac{1}{2} g_{ij} (\breve{\mathbf{r}}^i \otimes \mathbf{r}^j + \mathbf{r}^i \otimes \breve{\mathbf{r}}^j), \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\mathbf{g} = \frac{1}{2} g_{ij} \breve{\mathbf{r}}^i \otimes \breve{\mathbf{r}}^j.$$

Упражнение 3.2.7. Показать, что энергетические тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}}$ имеют компоненты ε^{ij} и ε_{ij} в следующих базисах:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \varepsilon^{ij} \breve{\mathbf{r}}_i \otimes \breve{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}} = \mathbf{J} = \varepsilon_{ij} \breve{\mathbf{r}}^i \otimes \breve{\mathbf{r}}^j.$$

Упражнение 3.2.8. Используя результаты упр. 1.3.1, показать, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ связаны соотношением

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \mathbf{O} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V},$$

а, используя формулы (2.71) и (2.42), показать, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ связаны аналогичным соотношением:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.$$

Используя эти соотношения между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, а также между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, показать, что главные инварианты энергетических и квазиэнергетических тензоров и мер деформации совпадают:

$$I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \qquad I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Упражнение 3.2.9. Показать, что базисы $\breve{\mathbf{r}}^i$, $\breve{\mathbf{r}}_i$ и $\widehat{\mathbf{r}}^j$, $\widehat{\mathbf{r}}_j$, введенные в упр. 3.2.1 и 3.2.2, обладают следующими свойствами:

$$\breve{\mathbf{r}}^i = \mathring{g}^{ij} \breve{\mathbf{r}}_j, \qquad \widehat{\mathbf{r}}^i = g^{ij} \widehat{\mathbf{r}}_j, \qquad \breve{\mathbf{r}}^i \cdot \breve{\mathbf{r}}^j = \mathring{g}^{ij}, \qquad \breve{\mathbf{r}}_i \cdot \breve{\mathbf{r}}_j = \mathring{g}_{ij}, \qquad \widehat{\mathbf{r}}^i \cdot \widehat{\mathbf{r}}^j = g^{ij}, \qquad \widehat{\mathbf{r}}_i \cdot \widehat{\mathbf{r}}_j = g_{ij}.$$

Упражнение 3.2.10. Доказать теорему 3.4.

Упражнение 3.2.11. Доказать, что энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ всегда можно представить в форме (2.35).

Упражнение 3.2.12. Используя результат упр. 1.5.6, показать, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^U$, а также $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^U$ — попарно коммутативны:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^U = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^U \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^U = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^U \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.$$

Используя результат упр. 1.5.7, показать, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^V$, а также $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^V$ — попарно коммутативны:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^V = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^V \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^V = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^V \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}.$$

Упражнение 3.2.13. Используя результаты упр. 1.1.1, 1.2.1 и 1.3.2, показать, что в задаче о растяжении бруса (см. пример 1.1) тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} (k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{\bar{C}}{}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V};$$

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}} = \sum_{\alpha=1}^{3} (1 + \ln k_\alpha)\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha\ .$$

Используя формулы (2.79)–(2.81), показать, что в данной задаче главные инварианты $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$, $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ и изменение плотности $J = \rho/\overset{\circ}{\rho}$ имеют следующий вид:

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{n - \mathrm{III}} (\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 3), \quad I_1(\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln k_\alpha, \quad J = \frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3},$$

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}}, \quad I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^3} (k_1 k_2 k_3)^{n-\mathrm{III}}.$$

Используя результаты упр. 1.3.2, показать что тензоры энергетической и квазиэнергетической эквивалентности, определяемые по (2.37) и (2.67), в задаче о растяжении бруса имеют следующий вид:

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{E}{}_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}^\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}^\alpha.$$

$$\overset{\mathrm{I}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{k_\alpha k_\beta}, \quad \overset{\mathrm{II}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{2}{k_\alpha + k_\beta}, \quad \overset{\mathrm{III}}{E}_{\alpha\beta} = 1, \quad \overset{\mathrm{IV}}{E}_{\alpha\beta} = \frac{2k_\alpha k_\beta}{k_\alpha + k_\beta}, \quad \overset{\mathrm{V}}{E}_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta.$$

Упражнение 3.2.14. Используя результаты упр. 1.2.2 и 1.3.3, показать, что в задаче о простом сдвиге (см. пример 1.2) тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_G = \overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{0G} \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{1G} \mathbf{O}_3 + \overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{2G} \bar{\mathbf{e}}_2^2, \qquad G = A, B, C, D,$$

где коэффициенты $\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{\alpha G}$ определяют по табл. 3.6.

Таблица 3.6. К упр. 3.2.14

$\overset{(n)}{c}_{\alpha G}$	$n=$I	$n=$II	$n=$IV	$n=$V
$\overset{(n)}{c}_{0A}$	$-a^2/2$	$1-U_2/\Delta$	U_0-1	0
$\overset{(n)}{c}_{1A}$	$a/2$	U_1/Δ	U_1	$a/2$
$\overset{(n)}{c}_{2A}$	0	$1-U_0/\Delta$	U_2-1	$a^2/2$
$\overset{(n)}{c}_{0B}$	$-(1+a^2)/2$	$-U_2/\Delta$	U_0	$1/2$
$\overset{(n)}{c}_{1B}$	$a/2$	U_1/Δ	U_1	$a/2$
$\overset{(n)}{c}_{2B}$	$-1/2$	$-U_0/\Delta$	U_2	$(1+a^2)/2$
$\overset{(n)}{c}_{0C}$	0	$1-U_0/\Delta$	U_2-1	$a^2/2$
$\overset{(n)}{c}_{1C}$	$a/2$	U_1/Δ	U_1	$a/2$
$\overset{(n)}{c}_{2C}$	$-a^2/2$	$1-U_2/\Delta$	U_0-1	0
$\overset{(n)}{c}_{0D}$	$-1/2$	$-U_0/\Delta$	U_2	$(1+a^2)/2$
$\overset{(n)}{c}_{1D}$	$a/2$	U_1/Δ	U_1	$a/2$
$\overset{(n)}{c}_{2D}$	$-(1+a^2)/2$	$-U_2/\Delta$	U_0	$1/2$

Здесь $\Delta = U_0U_2 - U_1^2$.

Упражнение 3.2.15. Используя результаты упр. 1.2.3, показать, что в задаче о вращении бруса с растяжением (см. пример 1.3) тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{g}}$ имеют следующий вид:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(k_\alpha^{n-\mathrm{III}}-1)\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{A}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(k_\alpha^{n-\mathrm{III}}-1)\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha, \quad \overset{(n)}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha,$$

$$n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V};$$

где $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{O}_0\cdot\bar{\mathbf{e}}_\alpha$.

Упражнение 3.2.16. Показать, что если тензоры $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}$ — диагональные (например, как в задаче о растяжении бруса):

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3}k_\alpha\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^{3}D_\alpha\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha,$$

то выражения (2.101) для ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{X}}$ принимают следующий вид:

$${}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{-1}\otimes\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1432)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}k_\alpha^{-1}k_\beta^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{\alpha\beta}, \quad {}^4\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{-1}\otimes\mathbf{E})^{(1432)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}k_\alpha^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{\alpha\beta},$$

$$ {}^4\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{X}} = \mathbf{\Delta}_{\mathrm{III}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \mathbf{\Delta}_{\alpha\beta}, \qquad {}^4\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{E})^{(1432)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} k_\alpha \mathbf{\Delta}_{\alpha\beta}, $$

$$ {}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{X}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F})^{(1432)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} k_\alpha k_\beta \mathbf{\Delta}_{\alpha\beta}, $$

где $\mathbf{\Delta}_{\alpha\beta} \equiv \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha$.

Упражнение 3.2.17. Доказать, что все квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ могут быть представлены в виде (2.65).

Упражнение 3.2.18. Показать, что имеют место формулы (2.37) и (2.40) для $n = \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}$.

Упражнение 3.2.19. Доказать формулу (2.67) для $n = \mathrm{III}$, IV и V.

Упражнение 3.2.20. Вводя компоненты собственных векторов $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$:

$$ \mathbf{p}_i = \widetilde{Q}^k{}_i \widetilde{\mathbf{r}}_k, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^k{}_i \widetilde{\mathbf{r}}_k, $$

показать, что тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$ (2.37) и (2.67) в этом базисе имеют следующие компоненты:

$$ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{E}}{}^{ijkl} \widetilde{\mathbf{r}}_i \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_j \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_l, \qquad {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} = \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{Q}}{}^{ijkl} \widetilde{\mathbf{r}}_i \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_j \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{r}}_l, $$

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{E}}{}^{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta} \widetilde{Q}^i{}_\alpha \widetilde{Q}^j{}_\beta \overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^k{}_\beta \overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^l{}_\alpha, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{Q}}{}^{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta} \widetilde{Q}^i{}_\alpha \widetilde{Q}^j{}_\beta \widetilde{Q}^k{}_\beta \widetilde{Q}^l{}_\alpha. $$

Упражнение 3.2.21. Показать, что для $n = \mathrm{I}$ и V тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ могут быть явным образом представлены через $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$:

$$ {}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}} = (\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \otimes \mathbf{F}^{-1})^{(1432)}, \qquad {}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{E}} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{(1432)}, $$

$$ {}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{Q}} = (\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{V}^{-1})^{(1432)}, \qquad {}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{Q}} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})^{(1432)}. $$

Упражнение 3.2.22. Используя выражения (1.4.103), (1.4.104), (1.4.130) и (1.4.140), доказать формулы (2.97), (2.100) и (2.101) для $G = A$ и B.

Упражнение 3.2.23. Используя формулы (2.41), (2.42), (2.64), (2.70) и (1.3.7), показать, что энергетические и квазиэнергетические тензоры и меры деформации можно представить в виде соответствующей дробной степени от градиента деформации:

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F})^{(n-\mathrm{III})/2}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} ((\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F})^{(n-\mathrm{III})/2} - \mathbf{E}), $$

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{(n-\mathrm{III})/2}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} ((\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{(n-\mathrm{III})/2} - \mathbf{E}), $$

$$ n = \mathrm{I}, \ \mathrm{II}, \ \mathrm{IV}, \ \mathrm{V}. $$

Упражнение 3.2.24. Доказать, что коммутирующие друг с другом симметричные тензоры соосны, и наоборот (см. п. 3.2.21).

3.3. Основное термодинамическое тождество

3.3.1. Различные формы основного термодинамического тождества. Вернемся к вопросу об установлении определяющих соотношений МСС. Привлечем для этого законы термодинамики в форме (2.4.23) и (2.5.13):

$$\rho\ (de/dt) = \mathbf{T}\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \rho q_m - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}, \tag{3.1}$$

$$\rho\theta\ (d\eta/dt) = \rho q_m - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + w^*. \tag{3.2}$$

Исключая $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}$ из этих уравнений, получим

$$\rho\left(\frac{de}{dt} - \theta\frac{d\eta}{dt}\right) - w_{(i)} + w^* = 0. \tag{3.3}$$

Подставляя в (3.3) обобщенную форму (2.91) для мощности напряжений $w_{(i)}$, получаем

$$e\text{-форма}:\ \rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G\cdot\cdot\ \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}{dt} - \mathbf{S}_G\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.4}$$
$$n = \mathrm{I},\ldots,\mathrm{V}, \qquad G = A, B, C, D.$$

Это соотношение называют *основным термодинамическим тождеством* (ОТТ), записанным *в обобщенной e-форме*.

Если подставить в (3.3) вместо $w_{(i)}$ выражения (2.86)–(2.89), то получим *основное термодинамическое тождество в форме* A^e_n, B^e_n, C^e_n или D^e_n:

$$A^e_n:\qquad \rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\ \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.5}$$

$$B^e_n:\qquad \rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\ \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.6}$$

$$C^e_n:\qquad \rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}{dt} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.7}$$

$$D^e_n:\qquad \rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0. \tag{3.8}$$

Замечательное свойство основного термодинамического тождества состоит в том, что оно не содержит градиентов по координатам (т.е. величин типа $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}$), и поэтому его можно рассматривать как некоторое соотношение, связывающее изменение трех основных величин: e, θ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ (или e, θ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, или e, θ, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, или e, θ, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$) в локальной точке сплошной среды.

Основное термодинамическое тождество является основой построения различных определяющих соотношений сплошных сред.

Можно также использовать выражение (2.7) для мощности напряжений $w_{(i)}$, тогда из (3.3) получим соотношение

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{de}{dt} - \overset{\circ}{\rho}\theta\frac{d\eta}{dt} - \mathbf{P}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \overset{\circ}{w}{}^* = 0, \tag{3.9}$$

которое называют *основным термодинамическим тождеством в* $\overset{\circ}{e}$*-форме в материальном описании*, в нем присутствуют плотность $\overset{\circ}{\rho}$ и тензор Пиолы–Кирхгофа $\mathbf{P}$, определенные в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

3.3.2. Неравенство Клаузиуса–Дюгема. Если подставить в ОТТ (3.4) выражение (2.5.14) для функции рассеивания w^* и учесть, что ρq^* всегда неотрицательна ввиду неравенства Планка (2.5.5а), то из (3.4) получим

$$\rho\frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}{dt} - \mathbf{S}_G \cdot\cdot\, \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \leqslant 0 \tag{3.10}$$

— *неравенство Клаузиуса–Дюгема в обобщенной e-форме* в пространственном описании. Из (3.9) и (2.5.22) аналогично получаем неравенство Клаузиуса–Дюгема в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{de}{dt} - \overset{\circ}{\rho}\theta\frac{d\eta}{dt} - \mathbf{P}\cdot\cdot\,\frac{d\mathbf{F}}{dt} + \frac{1}{\theta}\overset{\circ}{\mathbf{q}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta \leqslant 0. \tag{3.11}$$

3.3.3. Свободная энергия Гельмгольца. Введем новую термодинамическую величину ψ, называемую *свободной энергией Гельмгольца*:

$$\psi = e - \theta\eta. \tag{3.12}$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\psi = \frac{de}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\eta - \theta\frac{d\eta}{dt}. \tag{3.13}$$

Выражая производную de/dt из (3.13) и подставляя ее в (3.3), получаем

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - w_{(i)} + w^* = 0, \tag{3.14}$$

а после подстановки (3.13) в (3.4) имеем

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}{dt} - \mathbf{S}_G \cdot\cdot\, \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0. \tag{3.14a}$$

Это соотношение называют *основным термодинамическим тождеством в обобщенной* ψ*-форме*.

Выбирая различные значения индекса $G = A, B, C$ или D, получаем из (3.14) следующие четыре ψ-формы основного термодинамического тождества:

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.15}$$

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.16}$$

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}{dt} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.17}$$

$$\rho\frac{d\psi}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}{dt} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + w^* = 0, \tag{3.18}$$

где (3.15) называют *основным термодинамическим тождеством в форме* A_n, (3.16) — *в форме* B_n, (3.17) — *в форме* C_n, а (3.18) — *в форме* D_n.

Совершенно аналогично из (3.9) и (3.13) получено ОТТ в $\overset{\circ}{\psi}$-форме в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\psi}{dt} + \overset{\circ}{\rho}\eta\frac{d\theta}{dt} - \mathbf{P}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \overset{\circ}{w}{}^* = 0. \tag{3.19}$$

3.3.4. Свободная энергия Гиббса. Введем еще одну термодинамическую функцию

$$\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A = \psi - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{3.20}$$

называемую *свободной энергией Гиббса в форме* A_n, и вычислим от нее производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\right)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\cdot\cdot\ \frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}. \tag{3.21}$$

Выразив производную $d\psi/dt$ из этого уравнения, а затем, подставив полученный результат в (3.15), получим основное термодинамическое тождество *в форме* A_n^ζ:

$$\rho\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A}{dt} + \rho\eta\frac{d\theta}{dt} + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\right) + w^* = 0, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \tag{3.22}$$

Это тождество связывает изменения функций $\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A$, θ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho$.

Для других форм B_n, C_n и D_n, свободная энергия Гиббса вводится следующим образом:

$$\text{в форме } B_n: \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_B = \psi - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \tag{3.23}$$

$$\text{в форме } C_n: \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_C = \psi - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \tag{3.24}$$

$$\text{в форме } D_n: \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_D = \psi - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}. \tag{3.25}$$

Введем также обобщенную свободную энергию Гиббса:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G = \begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A, & \text{если } G = A, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_B, & \text{если } G = B, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_C, & \text{если } G = C, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_D, & \text{если } G = D. \end{cases} \tag{3.26}$$

Тогда, проводя преобразования, аналогичные (3.21), из (3.16)–(3.18) получаем ОТТ *в обобщенной ζ-форме*:

$$\rho\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G}{dt}+\rho\eta\frac{d\theta}{dt}+\rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G\cdot\cdot\ \frac{d}{dt}(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G}{\rho})-\mathbf{S}_G\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt}+w^*=0,\qquad n=\mathrm{I},\ldots,\mathrm{V},\qquad G=A,B,C,D. \tag{3.27}$$

Отсюда, фиксируя значение индекса G, легко получить ОТТ в форме A_n^ζ, B_n^ζ, C_n^ζ или D_n^ζ.

Свободную энергию Гиббса можно формально ввести и с помощью пары тензоров $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$:

$$\zeta=\psi-\frac{1}{\overset{\circ}{\rho}}\ \mathbf{P}\cdot\cdot\ \mathbf{F}, \tag{3.28}$$

ее называют *свободной энергией Гиббса в материальном описании*, и для нее, очевидно, имеет место ОТТ *в $\overset{\circ}{\zeta}$-форме* в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\zeta}{dt}+\overset{\circ}{\rho}\eta\frac{d\theta}{dt}+\mathbf{F}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{P}}{dt}+\overset{\circ}{w}{}^*=0. \tag{3.29}$$

3.3.5. Энтальпия. Наконец, введем еще одну термодинамическую функцию

$$\overset{(\mathrm{n})}{i}_G=e-\frac{1}{\rho}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G,\qquad n=\mathrm{I},\ldots,\mathrm{V},\qquad G=A,B,C,D, \tag{3.30}$$

называемую *энтальпией* (или теплосодержанием). Из (3.20) и (3.23)–(3.25) следует, что $\overset{(\mathrm{n})}{i}_G$ связана с $\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G$ соотношением

$$\overset{(\mathrm{n})}{i}_G=\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G+\eta\theta. \tag{3.31}$$

Выбирая в (3.30) различные значения индекса G, получим четыре различных энтальпии, вообще говоря, не совпадающие друг с другом:

$$\begin{aligned}\overset{(\mathrm{n})}{i}_A&=e-\frac{1}{\rho}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, &\quad \overset{(\mathrm{n})}{i}_B&=e-\frac{1}{\rho}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}},\\ \overset{(\mathrm{n})}{i}_C&=e-\frac{1}{\rho}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, &\quad \overset{(\mathrm{n})}{i}_D&=e-\frac{1}{\rho}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Из (3.31) находим скорость $d\overset{(\mathrm{n})}{i}_G/dt$:

$$\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{i}_G}{dt}=\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G}{dt}+\eta\frac{d\theta}{dt}+\theta\frac{d\eta}{dt}. \tag{3.33}$$

Подставляя это выражение в ОТТ в ζ-форме (3.27), приходим к

$$\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{i}_G}{dt}-\theta\frac{d\eta}{dt}+\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G\cdot\cdot\ \frac{d}{dt}(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G}{\rho})-\frac{\mathbf{S}_G}{\rho}\cdot\cdot\ \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt}+\frac{w^*}{\rho}=0, \tag{3.34}$$

$$n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \qquad G = A, B, C, D,$$

— *основному термодинамическому тождеству в i-форме.*

Выбирая различные значения индекса G, получаем ОТТ в формах A_n^i, B_n^i, C_n^i, D_n^i.

По аналогии с (3.30) введем *энтальпию в материальном описании*:

$$i = e - (1/\overset{\circ}{\rho})\mathbf{P} \cdot\cdot\, \mathbf{F} = \zeta + \eta\theta, \tag{3.35}$$

с помощью которой из (3.29) и (3.35) получаем ОТТ *в i-форме в материальном описании*:

$$\frac{di}{dt} - \theta\frac{d\eta}{dt} + \frac{\mathbf{F}}{\overset{\circ}{\rho}} \cdot\cdot\, \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{\overset{\circ}{w}{}^*}{\overset{\circ}{\rho}} = 0. \tag{3.36}$$

3.3.6. Универсальная форма основного термодинамического тождества. Можно дать общую запись основного термодинамического тождества для всех четырех форм (3.4), (3.14), (3.27) и (3.34). Она будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\pi + \mu\frac{d\lambda}{dt} - \mathbf{N} \cdot\cdot\, \frac{d}{dt}\mathbf{K} - \mathbf{M} \cdot\cdot\, \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + \frac{w^*}{\rho} = 0. \tag{3.37}$$

Здесь введены скалярные функции: π — обычно называемая *термодинамическим потенциалом* (или *накоплением*), μ, λ, а также симметричные тензоры $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, значения которых представлены в табл. 3.7.

Форму (3.37) называют *универсальной формой ОТТ*.

Обратим внимание, что в каждой из четырех форм ОТТ (3.4), (3.14), (3.27) и (3.34) существуют по два варианта того, какую скалярную функцию принять за накопление. Например, в e-форме (3.4) можно выбрать $\pi = e$, $\lambda = \eta$, $\mu = -\theta$, а можно иначе: $\pi = \eta$, $\lambda = e$, $\mu = -1/\theta$. Оба эти варианта равноправны, и поэтому оба они указаны в табл. 3.7. То же самое относится и к другим формам ОТТ. Таким образом, для четырех форм ОТТ существуют восемь различных вариантов выбора термодинамического потенциала.

Заметим, что выбор температуры θ в качестве термодинамического потенциала приводит к тому, что в качестве переменной μ выступает $\mu = 1/\eta$, но законы термодинамики не исключают ситуацию, в которой $\eta \to 0$, в этом случае $\mu = 1/\eta \to +\infty$, поэтому к выбору температуры θ в качестве накопления π следует относиться с осторожностью.

Все четыре ОТТ для материального описания (3.9), (3.19), (3.29) и (3.36) также могут быть объединены *универсальной формой* (3.37). Значения функций π, μ, λ, а также тензоров $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ для этих форм определяют по табл. 3.8. Заметим, что в материальном описании тензор $\mathbf{M}$ нулевой, однако $\mathbf{N}$ и $\mathbf{K}$ являются несимметричными.

Для каждой из четырех форм ОТТ в материальном описании также имеются по два варианта выбора термодинамического потенциала, поэтому также получаем восемь различных вариантов наборов функций π, λ, μ, $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ в универсальной форме ОТТ (3.37).

Таблица 3.7. Различные варианты значений функций π, μ, λ, $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ в универсальной форме ОТТ (3.37) в пространственном описании

N	Обобщенная форма ОТТ	Формы ОТТ	π	μ	λ	$\mathbf{N}$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{M}$
1	ψ-форма (3.14)	A_n, B_n, C_n, D_n	ψ	η	θ	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\mathbf{S}_G/\rho$
2	e-форма (3.4)	A_n^e, B_n^e, C_n^e, D_n^e	e	$-\theta$	η	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\mathbf{S}_G/\rho$
3	e-форма (3.4)	A_n^e, B_n^e, C_n^e, D_n^e	η	$-1/\theta$	e	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho\theta$	$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\mathbf{S}_G/\rho\theta$
4	ψ-форма (3.14)	A_n, B_n, C_n, D_n	θ	$1/\eta$	ψ	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\mathbf{S}_G/\rho\eta$
5	ζ-форма (3.27)	A_n^ζ, B_n^ζ, C_n^ζ, D_n^ζ	$\overset{(n)}{\zeta}_G$	η	θ	$-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\mathbf{S}_G/\rho$
6	ζ-форма (3.27)	A_n^ζ, B_n^ζ, C_n^ζ, D_n^ζ	θ	$1/\eta$	$\overset{(n)}{\zeta}_G$	$-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G/\eta$	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\mathbf{S}_G/\rho\eta$
7	i-форма (3.34)	A_n^i, B_n^i, C_n^i, D_n^i	$\overset{(n)}{i}_G$	$-\theta$	η	$-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\mathbf{S}_G/\rho$
8	i-форма (3.34)	A_n^i, B_n^i, C_n^i, D_n^i	η	$-1/\theta$	$\overset{(n)}{i}_G$	$-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G/\theta$	$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$	$\mathbf{S}_G/\rho\theta$

Таблица 3.8. Различные варианты значений функций π, μ, λ, $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ в универсальной форме ОТТ (3.37) в материальном описании

N	Форма ОТТ	π	μ	λ	$\mathbf{N}$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{M}$
1	$\overset{\circ}{\psi}$-форма (3.19)	ψ	η	θ	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{0}$
2	$\overset{\circ}{e}$-форма (3.9)	e	$-\theta$	η	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{0}$
3	$\overset{\circ}{e}$-форма (3.9)	η	$-1/\theta$	e	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}\theta$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{0}$
4	$\overset{\circ}{\psi}$-форма (3.19)	θ	$1/\eta$	ψ	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}\eta$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{0}$
5	$\overset{\circ}{\zeta}$-форма (3.29)	ζ	η	θ	$-\mathbf{F}$	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{0}$
6	$\overset{\circ}{\zeta}$-форма (3.29)	θ	$1/\eta$	ζ	$-\mathbf{F}/\eta$	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{0}$
7	$\overset{\circ}{i}$-форма (3.36)	i	$-\theta$	η	$-\mathbf{F}$	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{0}$
8	$\overset{\circ}{i}$-форма (3.36)	η	$-1/\theta$	i	$-\mathbf{F}/\theta$	$\mathbf{P}/\overset{\circ}{\rho}$	$\mathbf{0}$

3.3.7. Запись основного термодинамического тождества с помощью коротационных производных.

Теорема 3.12. *Пусть известно, что тензоры* $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ *и* $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, *а также* $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ *и* $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, *попарно соосны для всякого* n, *тогда основное термодинамическое тождество (3.37) можно представить в виде*

$$\pi^h + \mu\lambda^h - \mathbf{N}\cdot\cdot\,\mathbf{K}^h - \mathbf{M}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \frac{w^*}{\rho} = 0, \quad h = \{\cdot, U, V, J, S\}. \tag{3.38}$$

▼ Поскольку π и λ — скаляры, то для них коротационные производные совпадают с полной производной по времени: $\dot{\pi} = \pi^h$, $\dot{\lambda} = \lambda^h$. Второе и третье слагаемые в (3.37) для ψ- и e-форм ОТТ, согласно обозначениям, введенным в табл. 3.7, и согласно формуле (2.91), представляют собой обобщенную запись мощности напряжений:

$$w_{(i)} = \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}_G + \mathbf{S}_G\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{N}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{M}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \tag{3.39}$$

но тогда для $w_{(i)}$ имеет место теорема 3.11, согласно которой действительно можно заменить полную производную $\dot{\mathbf{K}}$ на коротационную $\mathbf{K}^h$, если тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{K}$ (т.е. пары $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ или $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$) — соосны.

Для ζ-формы ОТТ второе и третье слагаемые в (3.37) не совпадают с $w_{(i)}$, но могут быть расшифрованы с помощью табл. 3.7:

$$\mathbf{N}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{M}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \rho\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\cdot\cdot\,(\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho)^{\bullet} + \mathbf{S}_G\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}. \tag{3.40}$$

Если тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ или $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ соосны, то соосны и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$, $\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G/\rho$. Тогда, повторяя доказательство теоремы 3.11, получаем

$$\mathbf{N}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{N}\cdot\cdot\,\mathbf{K}^h, \tag{3.41}$$

что и доказывает теорему. ▲

Упражнения к 3.3

Упражнение 3.3.1. Используя формулы (2.42) и (2.69), показать, что свободные энергии Гиббса $\overset{(n)}{\zeta}_A$, $\overset{(n)}{\zeta}_B$, $\overset{(n)}{\zeta}_C$ и $\overset{(n)}{\zeta}_D$, определенные по формулам (3.20), (3.23)–(3.25), не совпадают между собой и связаны следующими соотношениями:

$$\overset{(n)}{\zeta}_A = \overset{(n)}{\zeta}_B + \frac{1}{n - \mathrm{III}} I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), \qquad \overset{(n)}{\zeta}_C = \overset{(n)}{\zeta}_D + \frac{1}{n - \mathrm{III}} I_1(\overset{(n)}{\mathbf{S}}).$$

Упражнение 3.3.2. Используя результаты упр. 3.2.3 и 3.2.8, показать, что $\overset{(n)}{\zeta}_B$ и $\overset{(n)}{\zeta}_D$, а также $\overset{(n)}{\zeta}_A$ и $\overset{(n)}{\zeta}_C$ совпадают: $\overset{(n)}{\zeta}_A = \overset{(n)}{\zeta}_C$, $\overset{(n)}{\zeta}_B = \overset{(n)}{\zeta}_D$, $n = \mathrm{I, II, IV, V}$.

Упражнение 3.3.3. Используя определение (2.2.31) тензора $\mathbf{P}$, показать, что свободную энергию Гиббса $\overset{\circ}{\zeta}$ в материальном описании (3.28) можно записать в следующей форме:

$$\zeta = \psi - (1/\rho)\ I_1(\mathbf{T}).$$

3.4. Принципы термодинамически согласованного детерминизма, равноприсутствия и локальности

3.4.1. Активные и реактивные переменные. Рассмотрим основное термодинамическое тождество в форме A_n (3.15). Входящие в него функции ψ, θ, η, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и w^*/ρ разделим на две группы: функции, входящие в (3.15) своими производными, кроме ψ, назовем *реактивными переменными*:

$$\mathcal{R} = \{\theta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\}, \tag{4.1}$$

а остальные — *активными переменными*:

$$\Lambda = \{\psi,\ \eta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho,\ w^*/\rho\}. \tag{4.2}$$

В такое разделение вкладывается следующий смысл: с помощью активных переменных мы описываем некоторые обобщенные «внутренние силы», вызванные внешними воздействиями на материальную точку $\mathcal{M}$ сплошной среды, а с помощью реактивных переменных — описываем реакцию сплошной среды на эти внешние воздействия.

Выбор реактивных и активных переменных не абсолютен — если рассмотреть основное термодинамическое тождество в форме C_n (3.17), то в качестве реактивных переменных выбирают функции

$$\mathcal{R} = \{\theta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\}, \tag{4.3}$$

а в качестве активных — функции

$$\Lambda = \{\psi,\ \eta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho,\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}/\rho,\ w^*/\rho\}. \tag{4.4}$$

Аналогично, если ОТТ рассматривают в форме B_n (3.16), то $\mathcal{R}$ и Λ выбирают следующим образом:

$$\mathcal{R} = \{\theta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\}, \qquad \Lambda = \{\psi,\ \eta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho,\ w^*/\rho\}, \tag{4.5}$$

а если в форме D_n (3.18), то в виде

$$\mathcal{R} = \{\theta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}},\ \mathbf{O}\}, \qquad \Lambda = \{\psi,\ \eta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho,\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}/\rho,\ w^*/\rho\}. \tag{4.6}$$

Ниже представлены активные и реактивные переменные для универсальной формы ОТТ (3.30) в пространственном описании:

$$\mathcal{R} = \{\lambda,\ \mathbf{K},\ \mathbf{O}\}, \qquad \Lambda = \{\pi,\ \mu,\ \mathbf{N},\ \mathbf{M},\ w^*/\rho\}, \tag{4.7}$$

где все обобщенные термодинамические функции определяют по табл. 3.7 или 3.8.

3.4.2. Формулировка принципа термодинамически согласованного детерминизма. Сформулируем этот важный принцип в виде следующей аксиомы.

Аксиома 11 (принцип термодинамически согласованного детерминизма). *Для любой сплошной среды активные переменные* Λ *полностью определяются реактивными переменными* $\mathcal{R}$, *иначе говоря, существует отображение обобщенного пространства реактивных переменных* $\mathcal{X}_{\mathcal{R}}$ *в пространство активных переменных* $\mathcal{X}_{\Lambda}$:

$$\breve{f}: \quad \mathcal{X}_{\mathcal{R}} \to \mathcal{X}_{\Lambda}, \tag{4.8}$$

которое называют операторным соотношением *(оператором) и записывают в виде*

$$\Lambda = \breve{f}(\mathcal{R}), \qquad \mathcal{R} \in \mathcal{X}_{\mathcal{R}}, \quad \Lambda \in \mathcal{X}_{\Lambda}, \tag{4.9}$$

причем это соотношение «согласовано с термодинамикой», т.е. тождественно удовлетворяет ОТТ (3.37).

Частным случаем оператора (4.8) является отображение в виде обычной функции

$$\Lambda(t) = f(\mathcal{R}(t)), \tag{4.10}$$

в которой активные переменные $\Lambda(t)$ зависят от реактивных $\mathcal{R}(t)$, рассматриваемых в те же самые моменты времени. Другие примеры операторов будут представлены далее.

Если рассматривают ОТТ в форме A_n (3.15), то оператор (4.9) с учетом (4.1) и (4.2) записывают следующим образом:

$$\begin{cases} \psi = \breve{\psi}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \\ \eta = \breve{\eta}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \\ w^* = \breve{w}^*\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta). \end{cases} \tag{4.11}$$

Здесь мы учли, что плотность ρ всегда можно выразить как функцию от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ (см. п. 3.2.19).

Соотношения (4.11) представляют собой *определяющие соотношения* (но не все) сплошной среды, их называют также *моделью* A_n сплошной среды.

Обратим внимание на то, что, согласно аксиоме 11, операторы (4.9) не являются полностью произвольными — после их подстановки в ОТТ (3.15) получаем соотношение

$$\rho \frac{d}{dt} \breve{\psi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) + \rho \breve{\eta}(\breve{\mathbf{C}}, \theta) \frac{d\theta}{dt} - \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\mathbf{C}, \theta) \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + w^*(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = 0,$$

которое должно тождественно выполняться при всех процессах изменения аргументов $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau)$, $\theta(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Если же ОТТ рассматривают в форме B_n (3.16), то определяющие соотношения (4.11) с учетом (4.5) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \psi = \breve{\psi}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \\ \eta = \breve{\eta}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \\ w^* = \breve{w}^*\ (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}, \end{cases} \tag{4.12}$$

плотность ρ можно выразить и как функцию $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ (см. п. 3.2.19). Соотношения (4.12) называют *моделью* B_n.

Аналогично, используя ОТТ в форме C_n, из (4.9) получаем определяющие соотношения

$$\begin{cases} \psi = \breve{\psi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \eta = \breve{\eta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ w^* = \breve{w}^*(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^0(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \end{cases} \tag{4.13}$$

которые называют *моделью* C_n сплошной среды.

Применяя ОТТ в форме D_n, из (4.6) и (4.9) получаем определяющие соотношения сплошной среды в виде

$$\begin{cases} \psi = \breve{\psi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \eta = \breve{\eta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), \\ w^* = \breve{w}^*(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^0(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), \end{cases} \tag{4.14}$$

которые называют *моделью* D_n сплошной среды.

Здесь мы учли, что плотность ρ можно представить как функцию $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ или $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ (см. п. 3.2.19).

Заметим, что тензорный оператор $\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ во всех соотношениях (4.9)–(4.12) конечно же различен.

Если же рассматривают ОТТ в универсальной форме (3.37), то следствием аксиомы 11 являются следующие определяющие соотношения:

$$\begin{cases} \pi = \breve{\pi}(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}), \\ \mu = \breve{\mu}(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}), \\ \mathbf{N} = \breve{\mathbf{N}}(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}), \\ w^* = \breve{w}^*(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}), \qquad \mathbf{M} = \breve{\mathbf{M}}(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}). \end{cases} \tag{4.15}$$

Выбирая различные формы ОТТ, согласно табл. 3.7 и 3.8, получаем значительное число моделей МСС — по 20 штук для ψ-, e-, η- и ζ-форм (каждой форме соответствуют по два представления), а также четыре формы: $\overset{\circ}{\psi}$, $\overset{\circ}{e}$, $\overset{\circ}{\eta}$ и $\overset{\circ}{\zeta}$, которым тоже соответствуют по два представления. Итого получаем: $20 \times (4 \times 2 + 4 \times 2) = 320$ (!) типов моделей. Следует отметить, что наиболее распространенными в МСС являются модели A_n, B_n, C_n и D_n, им в дальнейшем будет уделено основное внимание.

3.4.3. Принцип равноприсутствия. Анализируя определяющие соотношения (4.11)–(4.15), можно заметить, что для каждой модели во всех операторах участвуют одни и те же реактивные переменные. Этот факт в механике сплошных сред выделяют в отдельную аксиому.

Аксиома 12 (принцип равноприсутствия). *Определяющие соотношения должны представлять собой операторы одних и тех же реактивных переменных.*

Этот принцип не составляет содержание какого-либо физического закона, а представляет собой императив, которому необходимо следовать при построении конкретных моделей сплошных сред.

Из этого принципа, в частности, следует, что поскольку в моделях A_n не участвует тензор поворота $\mathbf{O}$, то в соответствующих формах определяющих соотношений (4.11) в число аргументов не будет входить этот тензор.

Еще одним важным следствием принципа равноприсутствия является такой вывод: поскольку в ОТТ (3.37), ни в одну из его форм, не входит градиент температуры $\boldsymbol{\nabla}\theta$, то он не может входить и в число активных и реактивных переменных Λ и $\mathcal{R}$ в определяющих соотношениях (4.9), согласованных с термодинамикой.

Этот вывод далее будем существенно использовать в п. 3.11.1.

3.4.4. Принцип локальности. Обратим теперь внимание на тот факт, что общее определение (4.9) оператора допускает такую ситуацию, когда процесс изменения активных переменных $\Lambda(X^i, t)$ в материальной точке X^i зависит от процесса изменения реактивных переменных $\mathcal{R}(X'^i, \tau)$ в других материальных точках $X'^i \neq X^i$, где $X^i, X'^i \in \overset{\circ}{V}$.

Для запрещения таких зависимостей вводят еще один основополагающий принцип.

Аксиома 13 (принцип локальности). *Для всякой сплошной среды операторы определяющих соотношений в любой из форм (4.9) таковы, что* *активные переменные в любой материальной точке* $X^i \in \overset{\circ}{V}$ *зависят только от реактивных переменных в этой же точке* X^i $\forall t \geqslant 0$.

Замечание 1. Принцип локальности позволяет построить определяющие соотношения, адекватно описывающие поведение подавляющего большинства реальных сплошных сред. Тем не менее, этот принцип не является абсолютным (т.е. не составляет собой универсальный физический закон) — существуют сплошные среды, для которых наиболее подходящими оказываются не локальные определяющие соотношения.

Сплошные среды, удовлетворяющие принципу локальности, иногда называют *простыми*.

Замечание 2. Заметим, что принцип локальности допускает зависимость определяющих соотношений (4.9) в материальной точке $\mathcal{M}$ от самих координат X^i этой точки. В явном виде такую зависимость можно записать следующим образом:

$$\Lambda = \breve{f}(\mathcal{R}, X^i), \tag{4.16}$$

или, например, для моделей A_n:

$$\begin{cases} \psi = \breve{\psi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta, X^i), \\ \eta = \breve{\eta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta, X^i), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta, X^i), \\ w^* = \breve{w}^*(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta, X^i). \end{cases} \tag{4.17}$$

Такая зависимость от X^i физически оправдана и может быть вызвана либо влиянием *факторов немеханической природы* (например, электромагнитного поля и др.): в этом случае зависимость от X^i является непрерывной, либо *неоднородностью* сплошной среды (таковыми являются, например, композиционные материалы, многофазные среды и др.): в этом случае зависимость является разрывной (обычно кусочно-непрерывной) функцией от X^i.

Сплошную среду, у которой определяющие соотношения (4.9) одинаковы для всех материальных точек $X^i \in \overset{\circ}{V}$, называют *однородной*, в противном случае сплошную среду называют *неоднородной*.

3.5. Определение идеальных сплошных сред

3.5.1. Классификация типов сплошных сред. Далее мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся в МСС виды операторов (4.9). В зависимости от вида операторов, выделяют следующие основные *типы сплошных сред*:

- идеальные,
- максвелловские (вязкоупругие среды интегрального типа),
- фойгтовские (вязкоупругие среды скоростного типа),
- пластические.

В пп. 3.5–3.11 и гл. 5 мы рассмотрим наиболее широко используемый в приложениях тип идеальных сплошных сред, продемонстрировав на нем, как «работают» принципы построения определяющих соотношений. Затем в гл. 6 и 7 мы рассмотрим вязкоупругие среды скоростного и интегрального типов (фойгтовские и максвелловские среды) соответственно, и, наконец, в гл. 8 будут рассмотрены пластические среды. Все перечисленные классы сред рассматриваем для случая произвольных конечных деформаций.

3.5.2. Общий вид определяющих соотношений для идеальных сплошных сред.

Определение 3.2. *Сплошную среду называют* и д е а л ь н о й, *если для нее соответствующие определяющие соотношения (4.9) представляют собой обычные функции от активных переменных, т.е. имеют место соотношения (4.10), в которых значения $\Lambda(t)$ и $\mathcal{R}(t)$ рассматривают в одни и те же моменты времени t.*

Говорят, что рассматривается *модель A_n идеальной среды*, если выбрана модель A_n сплошной среды, а соответствующие операторные определяющие соотношения (4.11) — это просто функции указанных аргументов; в частности, свободная энергия

$$\psi(t) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \theta(t)) \tag{5.1}$$

— это скалярная функция одного тензорного аргумента $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и одного скалярного θ. В дальнейшем, если не указан знак оператора $\breve{\ }$, то соотношение вида (5.1) будем считать просто функцией от текущих значений аргументов в момент времени t: $\psi(t) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \theta(t))$, а само время t будем опускать.

Все функции (4.10) предполагают непрерывно-дифференцируемыми, тогда можно вычислить, например, полную производную от свободной энергии $d\psi/dt$. Используя правило дифференцирования скалярной функции по тензорному аргументу (см. [12]), получаем для моделей A_n идеальной среды:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\cdot\,\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}, \tag{5.2}$$

где $\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ представляет собой симметричный тензор второго ранга.

Поскольку определяющие соотношения (4.9) должны быть «согласованы с термодинамикой», т.е. удовлетворять ОТТ (3.15), то, подставляя (5.2) в ОТТ (3.15), после приведения подобных получим

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\right)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\Big)\, d\theta + \frac{w^*}{\rho}dt = 0. \tag{5.3}$$

Дифференциалы $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $d\theta$ и dt являются независимыми, поэтому тождество (5.3) имеет место тогда и только тогда, когда обращаются в нуль коэффициенты при этих дифференциалах, т.е. имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Иначе говоря, соотношения (5.4) эквивалентны тождеству (5.3). Эти соотношения (5.4) представляют собой *определяющие соотношения для модели A_n идеальных сред* и являются частным случаем соотношений (4.9). Анализируя соотношения (5.4), можно сделать два важных вывода:

1) идеальные среды являются *недиссипативными*, т.е. функция рассеивания w^* для них тождественно равна нулю,
2) модель идеальной сплошной среды задается только одной скалярной функцией (5.1) — ψ, а остальные определяющие соотношения вычисляются дифференцированием этой функции, согласно формулам (5.4).

Замечание. Обратим внимание на то, что тензорная функция $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ в (5.4) не является потенциальной. Поскольку ρ является скалярной функцией от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ (см. п. 3.2.19), потенциальность имела бы место, если бы существовала некоторая скалярная функция $\psi' = \psi'(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ такая, что $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta) = \partial\psi'/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$. Тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$, удовлетворяющую (5.4), называют *квазипотенциальной*. □

Говорят, что рассматривается *модель B_n идеальной среды*, если выбрана модель B_n сплошной среды, а соответствующие определяющие соотношения (4.10) — это функции указанных аргументов, в частности:

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}},\theta). \tag{5.5}$$

Вычисляя производную от (5.5) по t и подставляя ее в ОТТ (3.16), после приведения подобных членов, в силу независимости дифференциалов $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $d\theta$ и dt, получаем, что соотношение (3.16) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}},\theta), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

которые называют *определяющими соотношениями для модели B_n идеальной среды*. Очевидно, что модели B_n идеальных сред также недиссипативны и обладают потенциалом (5.5).

Если же использовать модели C_n для идеальной сплошной среды, то все активные переменные $\Lambda(t)$ в (4.13) зависят от значений реактивных переменных $\mathcal{R}(t)$ в один и тот же момент времени, в частности, свободная энергия ψ является функцией вида

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta). \tag{5.7}$$

Дифференцируя эту функцию по t, получим

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}. \tag{5.8}$$

Подставляя это выражение в ОТТ (3.17), приходим к тождеству

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}}{\rho}\right) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} - \frac{\overset{\circ}{\mathbf{S}}}{\rho}\right) \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right) d\theta + \frac{w^*}{\rho}dt = 0. \tag{5.9}$$

Все дифференциалы $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, $d\theta$ и dt являются независимыми, поэтому это тождество эквивалентно системе соотношений

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \rho\ (\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho\ (\partial\psi/\partial\mathbf{O}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

представляющих *определяющие соотношения для модели C_n идеальных сред*. Очевидно, что модели C_n для идеальных сред, так же как и модели A_n, являются недиссипативными и потенциальными, однако для них появляется дополнительное соотношение, связывающее поворотный тензор напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ с ψ.

Если рассматривать модели D_n идеальной сплошной среды, то все соотношения (4.14) являются просто функциями указанных аргументов, и, в частности, ψ имеет вид

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta). \tag{5.11}$$

Тогда, подставляя функцию (5.11) в ОТТ (3.18), в силу независимости дифференциалов $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, $d\theta$ и dt, получаем

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \rho\ (\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho\ (\partial\psi/\partial\mathbf{O}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

— *определяющие соотношения для модели D_n идеальных сред.*

Наконец, если для идеальной среды рассмотреть ОТТ в универсальной форме (3.37), то все соотношения (4.15) являются функциями указанных аргументов, в частности, накопление π имеет вид

$$\pi = \pi(\lambda, \mathbf{K}, \mathbf{O}), \tag{5.13}$$

и для производной по t имеем

$$\dot{\pi} = \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{K}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{O}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{dt} + \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\,\frac{d\lambda}{dt}. \tag{5.14}$$

Поскольку, согласно аксиоме 11, соотношения (4.15) должны тождественно удовлетворять ОТТ в форме (3.37), то, подставляя (5.14) в (3.37), после приведения подобных и в силу независимости дифференциалов $d\mathbf{K}$, $d\mathbf{O}$ и $d\lambda$, приходим к следующей системе определяющих соотношений:

$$\begin{cases} \mu = -\partial\pi/\partial\lambda, \\ \mathbf{N} = \partial\pi/\partial\mathbf{K}, \\ \mathbf{M} = \partial\pi/\partial\mathbf{O}, \\ w^* = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

3.6. Принцип материальной симметрии

3.6.1. Различные отсчетные конфигурации. Перейдем теперь к рассмотрению уже упоминавшегося в разд. 3.1 принципа материальной симметрии. Этот принцип вводит несколько важнейших понятий МСС: понятие анизотропии (а также изотропии) среды, понятия инвариантов тензоров, а также понятия индифферентных тензорных функций и функционалов. Кратко принцип материальной симметрии заключается в том, что определяющие соотношения сплошной среды (4.9) не должны изменяться при определенных преобразованиях отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Дадим математическую формулировку этого принципа.

Определяющие соотношения (4.9) соответствуют движению сплошной среды из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$. Если мы в качестве отсчетной конфигурации выберем другую отсчетную конфигурацию $\overset{*}{\mathcal{K}}$, то движению среды $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ будут соответствовать, вообще говоря, некоторые другие определяющие соотношения, которые можно записать в виде

$$\overset{*}{\Lambda} = \breve{f}^*(\overset{*}{\mathcal{R}}), \tag{6.1}$$

где $\overset{*}{\Lambda}$ и $\overset{*}{\mathcal{R}}$ — активные и реактивные переменные (4.1), (4.2) или (4.3), (4.4), или вообще (4.7), соответствующие движению $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$. Оператор $\breve{f}^*$, вообще говоря, может отличаться от $\breve{f}$ (4.9). Основная задача заключается в том, чтобы найти такие отсчетные конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, что движение $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ не изменяет оператора $\breve{f}$, т.е. вместо (6.1) имеет место соотношение

$$\overset{*}{\Lambda} = \breve{f}(\overset{*}{\mathcal{R}}). \tag{6.2}$$

Найдем эти конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$.

Положение одной и той же точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ или в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ характеризуют радиусы-векторы $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ или $\overset{*}{\mathbf{x}}$ соответственно (рис. 3.1):

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^i), \qquad \overset{*}{\mathbf{x}} = \overset{*}{\mathbf{x}}(X^i), \tag{6.3}$$

причем $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $\overset{*}{\mathbf{x}}$ связаны дифференцируемым преобразованием:

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(\overset{*}{x}{}^i). \tag{6.4}$$

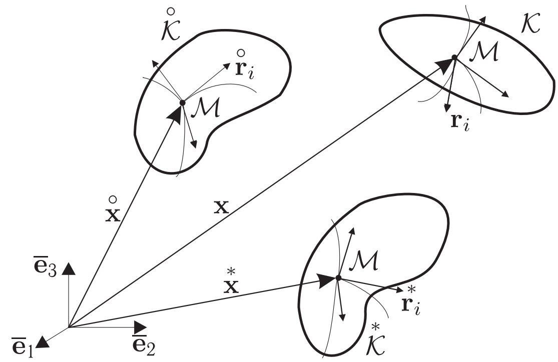

Рис. 3.1. Положение точки $\mathcal{M}$ в актуальной и различных отсчетных конфигурациях

Для одной и той же точки $\mathcal{M}$ можно ввести локальные базисы и метрические матрицы в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^i}, \qquad \overset{*}{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \overset{*}{\mathbf{x}}}{\partial X^i}, \tag{6.5}$$

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{r}}_j, \tag{6.6}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{*}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{*}{g}{}^{ij} \overset{*}{\mathbf{r}}_j, \tag{6.7}$$

а также градиенты деформации при преобразованиях: $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$, $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{*}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \mathbf{H} = \overset{*}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i. \tag{6.8}$$

Тензор $\mathbf{H}$, описывающий движение из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$, связывает градиенты деформации $\mathbf{F}$ и $\overset{*}{\mathbf{F}}$:

$$\mathbf{F} = \overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{H}, \qquad \overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1}. \tag{6.9}$$

Таким образом, каждой отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$ соответствуют свой локальный базис $\overset{*}{\mathbf{r}}_i$ и свой тензор $\mathbf{H}$. Собственно само выражение *переход от одной отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ к другой отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$*

можно представить себе как переход от описания тела в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ к описанию в базисе $\overset{*}{\mathbf{r}}_i$.

3.6.2. H-индифферентные и H-инвариантные тензоры. С помощью тензора $\mathbf{H}$ и соотношения (6.9) можно связать любой тензор $\boldsymbol{\Omega}$, имеющий физический смысл и определенный при преобразовании $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ и соответствующий тензор $\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}$, определенный при преобразовании $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$.

Определение 3.3. *Тензор $\boldsymbol{\Omega}$ называют H-индифферентным, если его компоненты не изменяются при переходе из одной отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$ в другую $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:*

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \overset{*}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{*}{\mathbf{x}}). \tag{6.10}$$

Здесь $\overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}$ и $\overset{*}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}$ — компоненты соответствующих тензоров $\boldsymbol{\Omega}$ и $\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}$ в конфигурациях $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\overset{*}{\mathcal{K}}$ с радиусами-векторами $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ и $\overset{*}{\mathbf{x}}$ соответственно:

$$\boldsymbol{\Omega}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{\circ}{\mathbf{x}})\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n}, \quad \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}(\overset{*}{\mathbf{x}}) = \overset{*}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{*}{\mathbf{x}})\overset{*}{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathbf{r}}_{i_n}. \tag{6.11}$$

Определение 3.4. *Тензор $\boldsymbol{\Omega}$ называют H-инвариантным, если он не изменяется при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$, т.е.*

$$\boldsymbol{\Omega}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}(\overset{*}{\mathbf{x}}). \tag{6.12}$$

Векторы локальных базисов $\mathbf{r}^i$ и $\mathbf{r}_i$ не изменяются при преобразованиях отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, поэтому они являются H-инвариантными.

Векторы локальных базисов $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ уже изменяются при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$, поэтому они не являются H-инвариантными, но их можно разложить по своему базису так же, как и векторы $\overset{*}{\mathbf{r}}_i$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \delta_i^j \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{*}{\mathbf{r}}_i = \delta_i^j \overset{*}{\mathbf{r}}_j, \tag{6.13}$$

т.е. компоненты δ_i^j векторов $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ не изменяются при переходе $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, следовательно, векторы $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ являются H-индифферентными (аналогично можно показать, что $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$ являются H-индифферентными).

Кроме того, вследствие формул (6.5), (6.8), получаем соотношения

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}. \tag{6.14}$$

а также

$$\overset{*}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \mathbf{H}^{-1}. \tag{6.15}$$

Подставляя (6.14) в (6.11), с учетом (6.10) получаем, что любой H-индифферентный тензор удовлетворяет соотношению

$$\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}(\overset{*}{\mathbf{x}}) = \overset{*}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{*}{\mathbf{x}})\overset{*}{\mathbf{r}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{*}{\mathbf{r}}_{i_n} = \overset{\circ}{\Omega}{}^{i_1\ldots i_n}(\overset{\circ}{\mathbf{x}})\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_1} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \otimes \ldots \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{i_n} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}. \tag{6.16}$$

Для скаляра φ H-индифферентность означает, что

$$\varphi(\overset{*}{x}) = \varphi(x), \tag{6.17}$$

для вектора $\mathbf{a}$:

$$\overset{*}{\mathbf{a}}(\overset{*}{\mathbf{x}}) = \mathbf{a}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}), \tag{6.18}$$

а для тензора второго ранга:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}(\overset{*}{\mathbf{x}}) = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}. \tag{6.19}$$

На рис. 3.2*а* изображен пример инвариантного вектора $\mathbf{a}$, который не изменяется при замене конфигураций $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$. На рис. 3.2*б* изображен пример индифферентного вектора $\mathbf{b}$, который движется вместе с базисом $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$: вектор $\overset{*}{\mathbf{b}}$ в базисе $\overset{*}{\mathbf{r}}_i$ имеет те же координаты, что и вектор $\mathbf{b}$ в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$.

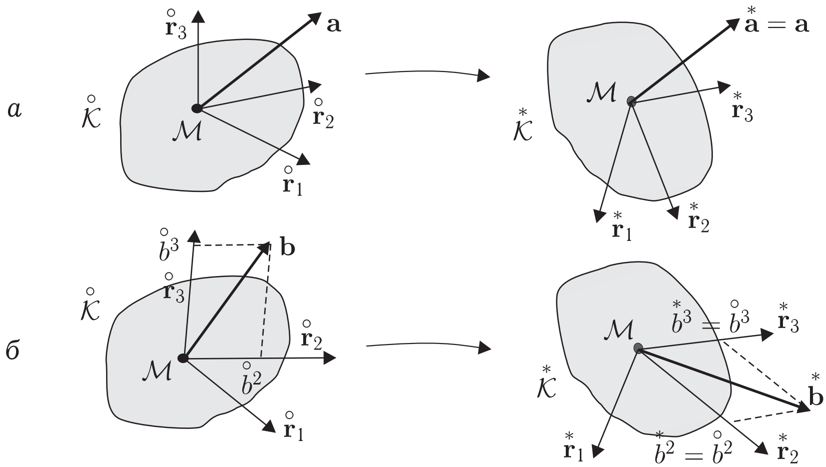

Рис. 3.2. *а* — инвариантный вектор $\mathbf{a}$; *б* — индифферентный вектор $\mathbf{b}$

Метрический тензор $\mathbf{E}$ одинаков во всех конфигурациях: $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\overset{*}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$, т.е. он является H-инвариантным, в чем можно убедиться и непосредственной проверкой. Действительно, используя формулы (6.14) и (6.15), имеем

$$\overset{*}{\mathbf{E}} = \overset{*}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{*}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{H} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{E}. \tag{6.20}$$

Градиент деформации $\mathbf{F}$ не является ни H-инвариантным, ни H-индифферентным, так как он при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуется по закону (6.9), отличному как от (6.12), так и от (6.19).

Подобно тензорам $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, описывающим деформацию локальной точки $\mathcal{M}$ при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$, можно определить тензоры и меры деформации при переходе из $\overset{*}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$, например:

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}{}^* = \overset{*}{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} - \mathbf{E}), \quad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^* = \frac{1}{2}\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}. \tag{6.21}$$

Однако ни один из тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, также как и $\mathbf{F}$, не является ни H-индифферентным, ни H-инвариантным, так тензоры $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}$ при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered}\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^* = \frac{1}{2}\overset{*}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \\ \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}{}^* = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{H}^{-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{E}).\end{gathered} \tag{6.21a}$$

Только правая мера Альманзи $\mathbf{G}^{-1}$ (5.2.8), а соответственно и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$, являются H-индифферентными, так как

$$\begin{aligned}\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^* = -\frac{1}{2}\overset{*}{\mathbf{G}}{}^{-1} = -\frac{1}{2}\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \\ = -\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{6.22}$$

но $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}$ уже не является ни H-индифферентным, ни H-инвариантным:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}{}^* = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^* - \frac{1}{2}\mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}). \tag{6.22a}$$

Поскольку актуальная конфигурация $\mathcal{K}$ не изменяется при преобразованиях $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, а тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ определен именно в $\mathcal{K}$, то он остается без изменения при преобразованиях $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, т.е. является H-инвариантным:

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = \mathbf{T}. \tag{6.23}$$

Однако другие тензоры напряжений — $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}$ — не являются H-инвариантными, так как они зависят не только от $\mathbf{T}$, но и от градиента деформации $\mathbf{F}$. Из всех тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{P}$ H-индифферентным является только тензор $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$, так как, согласно (6.9) и (6.23), имеем

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}{}^* = \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \tag{6.24}$$

а, например, тензор $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$ при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуется следующим образом:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}{}^* = \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1}. \tag{6.24a}$$

Замечание. Тип преобразования (6.21а) и (6.24а) при переходе $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ оказывается весьма полезным для МСС, несмотря на то, что он не относится ни к H-индифферентному, ни к H-инвариантному типу. Поэтому далее тензоры $\mathbf{\Omega}$, преобразующиеся при $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ по этому типу:

$$\overset{*}{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \tag{6.24б}$$

будем называть *H-псевдоиндифферентными.* □

3.6.3. Группы симметрии сплошной среды. Предположим теперь, что существует некоторое множество преобразований начальной конфигурации $H : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, каждое из которых не изменяет определяющих соотношений (4.9), т.е. если имеет место (4.9), то имеет место и (6.2) при этих преобразованиях. Такие преобразования в отсчетной конфигурации называют *H-преобразованиями*, и каждому из них ставится в соответствие тензор $\mathbf{H}$.

Все H-преобразования $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ происходят без изменения плотности $\overset{\circ}{\rho}$:

$$\overset{*}{\rho} = \overset{\circ}{\rho}, \tag{6.25}$$

так как плотность $\overset{\circ}{\rho}$ является характеристикой среды, а H-преобразования по определению не изменяют свойства среды.

Плотность ρ в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ является независимой от преобразований $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, и, следовательно, она как H-индифферентна, так и H-инвариантна.

Теорема 3.13. *Множество всех H-преобразований $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ сплошной среды (или множество $\mathbf{H}$-тензоров) с определяющими соотношениями (4.9), для которого выполнены соотношения (6.2), образует группу, называемую группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ сплошной среды.*

Эту группу иногда называют *группой эквивалентности.*

▼ Покажем, что множество всех H-преобразований действительно обладает свойствами группы (см. определение группы в [12]), т.е. в этом множестве определена операция умножения — это суперпозиция H-преобразований, в нем есть единичный и обратный элементы.

Действительно, суперпозиция двух H-преобразований также является H-преобразованием с тензором $\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1$. Это утверждение можно доказать следующим образом. Пусть существуют преобразование $\mathbf{H}_1 : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ и преобразование $\mathbf{H}_2 : \overset{*}{\mathcal{K}} \to \widehat{\mathcal{K}}$ с градиентами деформации:

$$\overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}_1^{-1}, \qquad \widehat{\mathbf{F}} = \overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{H}_2^{-1}. \tag{6.26}$$

Заметим, что поскольку энергетические и квазиэнергетические тензоры деформации выражаются однозначно через градиент деформации $\mathbf{F}$ (см. упр. 3.2.23), а энергетические и квазиэнергетические тензоры напряжений —

через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$ по формулам (2.35) и (2.65), то определяющие соотношения (4.9) можно представить в едином универсальном виде:

$$\Lambda = \breve{f}(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R} = \{\theta,\ \mathbf{F}\}, \quad \Lambda = \{\psi,\ \eta,\ \mathbf{T}/\rho,\ w^*/\rho\}, \tag{6.27}$$

для всех групп моделей A_n, B_n, C_n и D_n.

По определению H-преобразования, из определяющих соотношений (6.27) после $\mathbf{H}_1$-преобразования следует соотношение (6.2), которое можно записать в аналогичной форме:

$$\begin{gathered}\overset{*}{\Lambda} = \breve{f}(\overset{*}{\mathcal{R}}), \quad \overset{*}{\mathcal{R}} = \{\theta^*,\ \mathbf{F}^*\} = \{\theta,\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}_1^{-1}\},\\ \overset{*}{\Lambda} = \{\psi^*, \eta^*, \mathbf{T}^*/\rho, (w^*)^*/\rho\} = \{\psi,\ \eta,\ \mathbf{T}/\rho,\ w^*/\rho\},\end{gathered} \tag{6.28}$$

а из определяющих соотношений (6.28) после $\mathbf{H}_2$-преобразования следуют соотношения

$$\widehat{\Lambda} = \breve{f}(\widehat{\mathcal{R}}), \tag{6.29}$$

где

$$\widehat{\mathcal{R}} = \{\widehat{\theta},\ \widehat{\mathbf{F}}\}, \qquad \widehat{\Lambda} = \{\widehat{\psi},\ \widehat{\eta},\ \widehat{\mathbf{T}}/\rho,\ \widehat{w}^*/\rho\}. \tag{6.30}$$

Тогда, действительно, из соотношений (6.27) после преобразования $\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_1$ следуют соотношения (6.29), так как $\widehat{\mathcal{R}}$ и $\widehat{\Lambda}$ (6.30), участвующие в них, можно представить как после обычного H-преобразования с тензором $\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_1$:

$$\widehat{\mathcal{R}} = \{\theta,\ \mathbf{F}\cdot(\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_1)^{-1}\}, \qquad \widehat{\Lambda} = \{\psi,\ \eta,\ \mathbf{T}/\rho,\ w^*/\rho\}. \tag{6.31}$$

Здесь мы учли то, что все скаляры при H-преобразованиях не изменяются: $\psi = \overset{*}{\psi} = \widehat{\psi}$, $\eta = \overset{*}{\eta} = \widehat{\eta}$ и т.д., а тензор $\mathbf{T}$ является H-инвариантным: $\mathbf{T} = \overset{*}{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{T}}$. Эта часть доказательства завершена.

Тензор $\mathbf{H} = \mathbf{E}$, очевидно, является единичным элементом множества H-преобразований. Тогда, используя представление (6.27) для реактивных и активных переменных и выбирая $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, а $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^{-1}$, из представления (6.31) легко получить, что $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$ и $\widehat{\Lambda} = \Lambda$, а значит после преобразования $\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^{-1}$ получаем определяющие соотношения (4.9) с $\mathcal{R}, \Lambda$ в виде (6.27). Следовательно, для любого H-преобразования, преобразование с тензором $\mathbf{H}^{-1}$ также является H-преобразованием. ▲

3.6.4. Формулировка принципа материальной симметрии. Мы показали, что если существует множество H-преобразований, удовлетворяющих уравнению (6.2), то это множество является группой. Однако вопрос о том, всегда ли существует это множество, остается открытым. Следующая аксиома дает положительный ответ на этот вопрос.

Аксиома 14 (принцип материальной симметрии). *Для любой сплошной среды с определяющими соотношениями (4.9) для движения $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ и с произвольной отсчетной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует соответствующая группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ — группа H-преобразований отсчетной конфи-*

гурации $H : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, *которые не изменяют определяющих соотношений, т.е. имеет место (6.2) для любого движения* $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$:

$$\overset{*}{\Lambda} = \breve{f}(\overset{*}{\mathcal{R}}). \tag{6.32}$$

3.7. Определение жидких и твердых сред

3.7.1. Классификация сред на жидкие и твердые. Рассмотрим примеры групп симметрии $\overset{\circ}{G}_s$.

Теорема 3.14. *Всякий* **H**-*тензор, соответствующий* H-*преобразованию, является унимодулярным, т.е. удовлетворяет соотношению*

$$\det \mathbf{H} = \pm 1. \tag{7.1}$$

▼ Действительно, из уравнения неразрывности (2.1.8) и соотношений (6.9) получаем

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = |\det \mathbf{F}| = |\det (\overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{H})| = |\det \overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \det \mathbf{H}| = \frac{\overset{*}{\rho}}{\rho}\, |\det \mathbf{H}|. \tag{7.2}$$

В силу (6.25), из (7.2) действительно получаем (7.1). ▲

Заметим, что H-преобразования могут и не быть непрерывными (такие преобразования не могут быть представлены как последовательность преобразований, сходящихся к тождественному). Например, таковым является H-преобразование зеркального отражения относительно какой-либо плоскости. Для таких H-преобразований в уравнении неразрывности в отличие от (2.1.8), которое было записано для непрерывных преобразований, следует брать значение $\det \mathbf{F}$ по абсолютной величине, с тем чтобы знак $\overset{\circ}{\rho}/\rho$ был положителен. Это и было сделано в (7.2).

Множество всех унимодулярных тензоров образует полную *унимодулярную группу* U [12]. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.15. *Группа симметрии* $\overset{\circ}{G}_s$ *любой сплошной среды является подгруппой полной унимодулярной группы:*

$$\overset{\circ}{G}_s \subset U. \tag{7.3}$$

Определение 3.5. *Сплошную среду, которая для любой отсчетной конфигурации* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ *имеет группу симметрии* $\overset{\circ}{G}_s$, *совпадающую с полной унимодулярной группой*

$$\overset{\circ}{G}_s = U, \tag{7.4}$$

называют *ж и д к о с т ь ю* *(жидкой средой).*

Рассмотрим H-преобразования отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ с ортогональными тензорами **H**, удовлетворяющими условию

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}. \tag{7.5}$$

Множество всех тензоров, удовлетворяющих условию (7.5), образует *полную ортогональную группу* I [12].

Определение 3.6. *Сплошную среду, для которой существует отсчетная конфигурация $\widehat{\mathcal{K}}$, такая что ее группа симметрии $\widehat{G}_s$ является подгруппой полной ортогональной группы:*

$$\widehat{G}_s \subset I, \tag{7.6}$$

называют т в е р д о й с р е д о й *(твердым телом).*

Конфигурацию $\widehat{\mathcal{K}}$ твердой среды, для которой выполнено условие (7.6), называют *неискаженной.*

3.7.2. Изомерные группы симметрии. Напомним, что группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ сплошной среды (группа H-преобразований) определена для некоторой фиксированной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Для другой отсчетной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$, в сответствии с аксиомой 14, также существует группа симметрии $\widehat{G}_s$, но эта группа, вообще говоря, не совпадает с $\overset{\circ}{G}_s$.

Теорема 3.16 (Нолла). *Для всякой сплошной среды группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ и $\widehat{G}_s$, соответствующие различным отсчетным конфигурациям $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$, являются изомерными, т.е. связаны соотношением*

$$\widehat{G}_s = \mathbf{S}\ \overset{\circ}{G}_s\ \mathbf{S}^{-1}, \tag{7.7}$$

где $\mathbf{S}$ — невырожденный градиент деформации, соответствующий преобразованию $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \widehat{\mathcal{K}}$, которое связывает локальные базисы $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ и $\widehat{\mathbf{r}}_i$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$:

$$\mathbf{S} = \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \widehat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i, \qquad \widehat{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \mathbf{S}^{-1}. \tag{7.8}$$

▼ Если соотношение (7.7) в самом деле выполнено, это означает, что каждому тензору преобразования $\mathbf{H}$ группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ можно поставить в соответствие тензор

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}^{-1} \tag{7.9}$$

группы $\widehat{G}_s$ и обратно. Такие группы $\overset{\circ}{G}_s$ и $\widehat{G}_s$ называют *изомерными*. Отсчетные конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\widehat{\mathcal{K}}$ и соответствующие конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, $\widetilde{\mathcal{K}}$ после H- и $\widehat{H}$-преобразований показаны на рис. 3.3. Градиенты деформации $\mathbf{F}$, $\widehat{\mathbf{F}}$, $\overset{*}{\mathbf{F}}$ и $\widetilde{\mathbf{F}}$ преобразуют конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\widehat{\mathcal{K}}$, $\overset{*}{\mathcal{K}}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}$, соответственно, в $\mathcal{K}$.

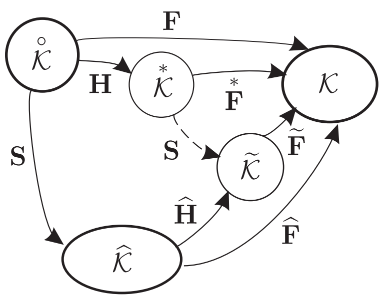

Рис. 3.3. Связь различных конфигураций

Используя представление (6.27) определяющих соотношений, получаем, что для всех H- и $\widehat{H}$-преобразований выполнены соотношения

$$\Lambda = \breve{f}(\theta, \mathbf{F}) = \breve{f}(\theta, \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1})\ \forall \mathbf{F}, \tag{7.10}$$

$$\Lambda = \breve{\widehat{f}}(\theta, \widehat{\mathbf{F}}) = \breve{\widehat{f}}(\theta, \widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{-1}) \ \forall \widehat{\mathbf{F}}. \tag{7.11}$$

Здесь знак $\widehat{\ }$ в $\breve{\widehat{f}}$ означает, что зависимость $\breve{f}$ от $\mathbf{F}$ и $\widehat{\mathbf{F}}$ может быть разной в различных конфигурациях.

Поскольку $\mathbf{F}$ и $\widehat{\mathbf{F}}$ связаны с помощью тензора $\mathbf{S}$:

$$\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^{-1}, \tag{7.12}$$

находим соотношение

$$\breve{f}(\theta, \mathbf{F}) = \breve{\widehat{f}}(\theta, \widehat{\mathbf{F}}) = \breve{\widehat{f}}(\theta, \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^{-1}). \tag{7.13}$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для любого градиента деформации $\mathbf{F}$, мы можем применить его к $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1}$, подставив это произведение вместо $\mathbf{F}$:

$$\breve{f}(\theta, \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1}) = \breve{\widehat{f}}(\theta, \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}). \tag{7.14}$$

Так как $\mathbf{H} \subset \overset{\circ}{G}_s$, то вследствие (7.10) два равенства (7.13) и (7.14) оказываются совпадающими, т.е.

$$\breve{\widehat{f}}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^{-1}) = \breve{\widehat{f}}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}). \tag{7.15}$$

Возвращаясь от $\mathbf{F}$ к $\widehat{\mathbf{F}}$ с помощью соотношения $\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S}$, из (7.15) получаем

$$\Lambda = \breve{\widehat{f}}(\widehat{\mathbf{F}}) = \breve{\widehat{f}}(\widehat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}). \tag{7.16}$$

Таким образом, преобразование $\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$ сохраняет вид тензорной функции $\breve{f}$ без изменений. Это означает, что тензор $\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$ принадлежит группе $\widehat{G}_s$. Тогда существует тензор $\widehat{\mathbf{H}} \in \widehat{G}_s$, такой, что $\widehat{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$. Из этого соотношения можно получить формулу (7.9). ▲

Представим теперь тензоры $\mathbf{H}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ в базисах $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ и $\widehat{\mathbf{r}}_i$:

$$\mathbf{H} = H^i{}_j \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j, \qquad \widehat{\mathbf{H}} = \widehat{H}^i{}_j \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j. \tag{7.17}$$

Подставляя (7.17) в (7.9), с учетом (7.8) получаем

$$\widehat{H}^i{}_j \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j = H^i{}_j \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{S}^{-1} = H^i{}_j \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^j. \tag{7.18}$$

Таким образом, вследствие единственности разложения тензора в диадном базисе, находим $\widehat{H}^i{}_j = H^i{}_j$. Следовательно, тензоры $\mathbf{H}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ имеют одинаковые компоненты, но в различных базисах, такие тензоры называют *изомерными* [12].

Теорема 3.16, как и определения 3.5 и 3.6, были предложены Ноллом.

Замечание 1. Условия теоремы 3.16 подразумевают, что в качестве группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, соответствующей конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, мы выбираем подгруппу унимодулярной группы U, которая является максимально допустимой определяющими соотношениями (6.27), т.е. если для $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует еще одна группа симметрии G'_s, то $G'_s \subset \overset{\circ}{G}_s$. То же самое верно и для $\widehat{G}_s$. Предполагаем далее, что это условие всегда выполнено.

Замечание 2. Так как при переходе из одной отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в другую $\widehat{\mathcal{K}}$ по теореме 3.16 мы получаем, вообще говоря, различные группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ или $\widehat{G}_s$, то само понятие группы симметрии сплошной среды является относительным и зависит от выбора отсчетной конфигурации. Например, если группа $\overset{\circ}{G}_s$ является ортогональной в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, то в конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$ эта группа может уже не являться таковой.

Применим теорему 3.16 для твердых сред. В соответствии с определением 3.6, неискаженная конфигурация $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ определена не единственным образом. Соотношение между группами симметрии двух неискаженных конфигураций устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.17. *Группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ и $\widehat{G}_s$ твердого тела, которые соответствуют двум неискаженным конфигурациям $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$, связаны соотношением*

$$\widehat{G}_s = \mathbf{O}_0 \overset{\circ}{G}_s \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}}, \tag{7.19}$$

где $\mathbf{O}_0$ — ортогональный тензор поворота, сопровождающий преобразование $\mathbf{S} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \widehat{\mathcal{K}}$.

▼ Перепишем формулу (7.9) в виде

$$\widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}, \tag{7.20}$$

где $\widehat{\mathbf{H}} \in \widehat{G}_s$, $\mathbf{H} \in G_s$ — ортогональные тензоры.

Поскольку тензор $\mathbf{S}$ является невырожденным, можно записать его полярное разложение:

$$\mathbf{S} = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{O}_0, \tag{7.21}$$

причем тензоры $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{V}_0$ связаны соотношением

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}}. \tag{7.22}$$

Подставляя теперь (7.21) и (7.22) в (7.20), получаем

$$\widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H}. \tag{7.23}$$

Поскольку тензор $\mathbf{B} \equiv \widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0$, входящий в (7.23), является невырожденным, так как $\det \mathbf{B} = \det \widehat{\mathbf{H}} \cdot \det \mathbf{S} = \pm\det \mathbf{S} \neq 0$, то тензоры $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{V}_0$ — симметричные и положительно определенные, а тензоры $\widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{O}_0$ и $\mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H}$ — ортогональные, таким образом, формула (7.23) является полярным разложением тензора $\mathbf{B}$. Но вследствие теоремы 1.12, это разложение единственно, поэтому выполнено соотношение $\widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{O}_0 = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H}$, которое можно записать в виде

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}}. \tag{7.24}$$

Это уравнение доказывает формулу (7.19). ▲

Рассмотрим соотношение (7.23). В этом уравнении заменим $\mathbf{V}_0$ на $\mathbf{U}_0$, используя формулу (7.22), а затем умножим обе части соотношения (7.23) на $\mathbf{O}_0^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$ слева. В результате получим

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{H}. \tag{7.25}$$

Здесь использована формула (7.24).

Таким образом, из (7.25) находим, что тензоры $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{H}$ переставимы:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{H} \qquad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{7.26}$$

3.7.3. Определение анизотропных твердых сред. Рассмотрим твердое тело. Согласно принципу материальной симметрии, оно обладает некоторой ортогональной группой симметрии $\widehat{G}_s$ в соответствующей неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$. Такое твердое тело называют *анизотропным телом класса* $\widehat{G}_s$.

Определение 3.7. *Твердое тело называют изотропным, если его группа симметрии $\widehat{G}_s$ в неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$ совпадает с I:*

$$\widehat{G}_s = I. \tag{7.27}$$

Следует заметить, что условие (7.27) выполнено, вообще говоря, только в некоторой неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$. При переходе в другую отсчетную конфигурацию, например в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, твердое тело может уже не быть изотропным.

Всего же у полной ортогональной группы I существует 39 подгрупп $\widehat{G}_s$ (включая саму I), 32 из которых содержат конечное число элементов $\mathbf{H} \in \widehat{G}_s$ (эти группы называют *точечными*), а 7 групп содержат континуальное множество элементов $\mathbf{H}$ (их называют *непрерывными*). Описание всех элементов групп можно найти в [12].

Рассмотрим ниже только четыре наиболее широко используемые в МСС подгруппы $\widehat{G}_s \subset I$:

- триклинная группа $\widehat{G}_s = E$ (точечная, состоит из 2 элементов),
- группа ортотропии $\widehat{G}_s = O$ (точечная, состоит из 8 элементов),
- группа трансверсальной изотропии $\widehat{G}_s = T_3$ (непрерывная),
- группа изотропии (полная ортогональная) $\widehat{G}_s = I$ (непрерывная).

Как отмечалось выше, каждой конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$ твердых тел соответствуют свои локальные базисы: $\mathbf{r}_i$ и $\widehat{\mathbf{r}}_i$, а также группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ и $\widehat{G}_s$. Ортогональная группа $\widehat{G}_s$, соответствующая неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$, характеризуется своим ортонормированным базисом $\widehat{\mathbf{c}}_i$, который называют *главным базисом анизотропии*, а оси координат, ориентированные по векторам $\widehat{\mathbf{c}}_i$, называют *главными осями анизотропии*.

На рис. 3.4 показано взаимное расположение неискаженной и начальной конфигураций $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, а также изображены базисы $\mathbf{r}_i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, направленные по касательным к координатным линиям X^i (прерывистые линии) твердого тела, а также базис $\widehat{\mathbf{c}}_i$, направленный по линиям (сплошные линии), характеризующим геометрическую структуру тела и его анизотропию. Следует отметить,

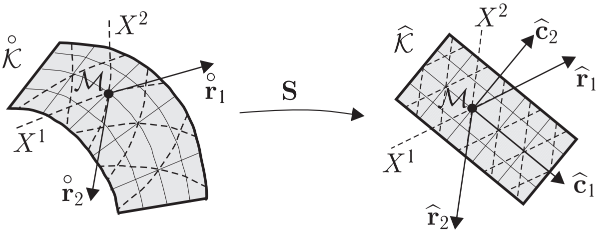

Рис. 3.4. Начальная искаженная и неискаженная конфигурации твердого тела

что анизотропные свойства твердых тел, как правило, вызваны специфической геометрической структурой тел, в которой не все направления равноправны. Таковы, например, композиционные материалы, резинокордные материалы и шины, армированные волокнами, металлы и сплавы, в которых после прокатки листов зеренная микроструктура получает ориентацию в направлении прокатки, горные породы и грунты, имеющие слоистую структуру, и другие. Заметим, что базис $\widehat{\mathbf{c}}_i$, вообще говоря, может зависеть от координат $\mathbf{x}$ рассматриваемой материальной точки $\mathcal{M}$, в этом случае говорят, что твердое тело обладает криволинейной анизотропией класса $\widehat{G}_s$.

Если представить тензоры H-преобразований из группы $\widehat{G}_s$ в главном базисе анизотропии:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{H}^i{}_j\ \widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}_j, \qquad \widehat{\mathbf{H}} \in \widehat{G}_s. \tag{7.28}$$

то матрицы $\widehat{H}^i{}_j$ компонент этих тензоров будут ортогональными:

$$\widehat{H}^i{}_j\ \widehat{H}_k{}^j = \delta^i{}_k, \tag{7.29}$$

стандартного вида (в ортонормированных базисах матрицы $\widehat{H}^i{}_j$ и $\widehat{H}_i{}^j$ совпадают).

Для группы ортотропии $\widehat{G}_s$ имеется 8 матриц стандартного вида $\widehat{H}^i{}_j$ [12]:

$$\widehat{H}^i{}_j \in \{E,\ C,\ R_\alpha,\ D_\alpha\}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{7.30}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.31}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь E — единичная матрица, C — матрица центрально-симметричного отражения, R_α — матрицы зеркального отражения относительно плоскостей, ортогональных векторам $\widehat{\mathbf{c}}_\alpha$, D_α — матрицы поворота на угол π вокруг осей с векторами $\widehat{\mathbf{c}}_\alpha$.

Для триклинной группы $\widehat{G}_s = E$ имеются только две матрицы $\widehat{H}^i{}_j$:

$$\widehat{H}^i{}_j \in \{E,\ C\}, \tag{7.32}$$

соответствующие тождественному и центрально-симметричному преобразованиям.

Для группы трансверсальной изотропии $\widehat{G}_s = T_3$ имеется одна ось вращения (*ось трансверсальной изотропии*) — в данном случае ось с вектором $\widehat{\mathbf{c}}_3$, а матрицы $\widehat{H}^i{}_j$ имеют следующий вид:

$$\widehat{H}^i{}_j \in \{\ Q_3^\phi,\ D_\gamma Q_3^\phi,\ R_\alpha Q_3^\phi\}, \qquad \alpha = 1,2,3, \quad \gamma = 1,2, \tag{7.33}$$

где Q_3^ϕ — матрица поворота на угол ϕ вокруг оси с вектором $\widehat{\mathbf{c}}_3$:

$$Q_3^\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi. \tag{7.34}$$

Для групп $\widehat{G}_s = T_1$ и $\widehat{G}_s = T_2$ оси трансверсальной изотропии ориентированы по векторам $\widehat{\mathbf{c}}_1$ и $\widehat{\mathbf{c}}_2$ соответственно.

Главный базис анизотропии $\widehat{\mathbf{c}}_i$ и базис $\widehat{\mathbf{r}}_i$ для неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$ могут не совпадать (см. рис. 3.4). Если ввести тензор $\widehat{\mathbf{Q}}$ (вообще говоря, не ортогональный), связывающий эти два базиса: $\widehat{\mathbf{c}}_i = \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}_i$, $\widehat{\mathbf{Q}} = \widehat{Q}^i{}_j\ \widehat{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}_j$, то тензоры H-преобразований (7.28) из группы $\widehat{G}_s$ можно представить и в базисе $\widehat{\mathbf{r}}_i$:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{H}^i{}_j \widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}^j = \widehat{H}^i{}_j\ \widehat{Q}^k{}_i \widehat{Q}^j{}_l\ \widehat{\mathbf{r}}_k \otimes \widehat{\mathbf{r}}^l. \tag{7.35}$$

3.7.4. *H*-индифферентность и *H*-инвариантность тензоров, описывающих движение твердой сплошной среды. Продолжаем рассматривать твердые сплошные среды. Положим далее, что начальная конфигурация $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ является неискаженной, тогда группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ этой сплошной среды, которая соответствует конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, также является ортогональной, $\mathbf{H}$-тензоры преобразований, входящие в группу $\overset{\circ}{G}_s$, являются ортогональными, и вследствие формулы (7.19) существует ортогональный тензор $\mathbf{O}_0$, связывающий элементы групп $\overset{\circ}{G}_s$ и $\widehat{G}_s$:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{O}_0^{\mathrm{T}} \quad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s, \quad \widehat{\mathbf{H}} \in \widehat{G}_s. \tag{7.36}$$

Для неискаженной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует свой главный базис анизотропии, будем далее его также обозначать как $\widehat{\mathbf{c}}_i$. Хотя этот базис может и отличаться от ранее введенного в п. 3.7.3 базиса в неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$, но далее мы не будем их одновременно рассматривать, так что недоразумения из-за обозначения $\widehat{\mathbf{c}}_i$ не возникнет. Заметим, что все построения, приведенные далее в разд. 3.7 и 3.8, могут быть аналогично записаны и для неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$, но, поскольку для формулировки задач МСС нам необходимо иметь окончательный вид определяющих соотношений в начальной конфигурации, а переход от $\widehat{\mathcal{K}}$ к $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ осуществляется по формулам преобразований тензоров из п. 3.6.2, то этот окончательный вид может быть достаточно громоздким. В силу сказанного, далее мы ограничимся только случаем неискаженной $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Поскольку для неискаженной $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ все $\mathbf{H}$-тензоры ортогональны, то введем для дальнейшего обозначение

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{7.37}$$

где $\overset{*}{\mathbf{Q}}$ — ортогональный тензор, описывающий преобразование твердой среды из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$.

Определение 3.8. *Тензор $\mathbf{\Omega}$, заданный в конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, называют H-индифферентным относительно группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, если для любого ортогонального тензора преобразования $\overset{*}{\mathbf{Q}} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ из этой группы, он удовлетворяет условию*

$$\overset{*}{\mathbf{\Omega}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \qquad \forall\, \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{7.38}$$

Иначе говоря, существуют тензоры, H-индифферентные относительно только определенных подгрупп ортогональной группы; тензоры же, которые H-индифферентны относительно любых H-преобразований будем называть *абсолютно H-индифферентными*.

Из определения (6.9) получаем

$$\overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \tag{7.39}$$

т.е. градиент деформации не является ни H-индифферентным, ни H-инвариантным даже относительно подгрупп $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Можно легко установить, что следующие комбинации для $\mathbf{F}$ также не являются ни H-индифферентными, ни H-инвариантными, так как

$$\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1} = \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \qquad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \tag{7.40}$$

Метрический тензор является одновременно и H-индифферентным, и H-инвариантным относительно любой ортогональной группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, так как из (6.20) следует:

$$\overset{*}{\mathbf{E}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{E} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \tag{7.41}$$

Заметим, что при произвольных H-преобразованиях (не ортогональных) метрический тензор является только лишь H-инвариантным (см. (6.20)).

Теорема 3.18. *Все квазиэнергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ являются H-инвариантными, а все энергетические тензо-*

ры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ *и меры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ *являются* H*-индифферентными относительно любой ортогональной группы* $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

▼ Покажем вначале, что тензор деформации Коши–Грина $\mathbf{C}$ является H-индифферентным, а тензор деформации Альманзи $\mathbf{A}$ — H-инвариантным. Из (6.21) и (7.40) находим

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}{}^* = \overset{*}{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} - \mathbf{E}) = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{7.42}$$

а также

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}{}^* = \overset{*}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}. \tag{7.43}$$

Аналогично можно доказать, что $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} = \mathbf{\Lambda}$ является H-индифферентным, а тензор $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}} = \mathbf{J}$ — H-инвариантным.

Покажем теперь, что правый тензор искажений $\mathbf{U}$ является H-индифферентным, левый тензор искажений $\mathbf{V}$ — H-инвариантным, а тензор поворота $\mathbf{O}$, сопровождающего деформацию, не является ни H-индифферентным, ни H-инвариантным.

Подставляя полярное разложение для $\mathbf{F}$ в соотношение (7.39), имеем

$$\overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) = \overset{*}{\mathbf{V}} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}. \tag{7.44}$$

Здесь, с одной стороны, мы образовали новый ортогональный тензор $\mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}$, а, с другой стороны, получили для $\overset{*}{\mathbf{F}}$ свое полярное разложение. Но так как полярное разложение является единственным, получаем

$$\overset{*}{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \qquad \text{и} \qquad \overset{*}{\mathbf{O}} = \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \tag{7.45}$$

Используя формулу (1.3.1) для полярного разложения, получаем

$$\overset{*}{\mathbf{U}} = \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{7.46}$$

т.е. $\mathbf{U}$ является H-индифферентным.

Аналогично доказываем теорему для остальных тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$. ▲

Заметим, что, как было показано в п. 3.6.2, только лишь мера $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ является абсолютно H-индифферентной относительно любых, а не только ортогональных H-преобразований.

Теорема 3.19. *Все энергетические тензоры напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ *являются* H*-индифферентными, а все квазиэнергетические тензоры напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ — H*-инвариантными относительно любой ортогональной группы* $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

▼ Энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ являются H-индифферентными, так как

$$\overset{(I)*}{\mathbf{T}} = \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q},$$

$$\overset{(II)*}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\Big(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}} + \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} + {}$$
$$+ \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}\Big) = \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} \quad \text{и т.д.} \qquad (7.47)$$

Тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ являются H-инвариантными, потому что они образованы сверткой H-инвариантных тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{V}$. ▲

Заметим, что, как было показано в п. 3.6.2, только тензор $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ является абсолютно H-индифферентным, а тензор $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} = \mathbf{T}$ — абсолютно H-инвариантным.

Поворотный тензор напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ не является ни H-инвариантным, ни H-индифферентным, и преобразуется подобно тензору поворота $\mathbf{O}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}{}^{*} = \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{V}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{V}}{}^{-1} - \overset{*}{\mathbf{V}}{}^{-1} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{V}}) \cdot \overset{*}{\mathbf{O}} = \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}. \qquad (7.48)$$

3.7.5. *H*-инвариантность скоростных характеристик твердого тела. Вектор скорости $\mathbf{v}$ является абсолютно H-инвариантным для любых преобразований $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, так как этот вектор определен в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$.

По той же причине градиент скорости

$$\mathbf{L} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = (\partial \mathbf{v}/\partial X^i) \otimes \mathbf{r}^i \qquad (7.49)$$

также является абсолютно H-инвариантным. Поэтому тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{W}$ также абсолютно H-инвариантны:

$$\overset{*}{\mathbf{D}} = \mathbf{D}, \qquad \overset{*}{\mathbf{W}} = \mathbf{W}. \qquad (7.50)$$

Теорема 3.20. *Полная производная по времени $\dot{\mathbf{B}}$, производные Олдройда $\mathbf{B}^{\mathrm{Ol}}$, Коттера–Ривлина $\mathbf{B}^{\mathrm{CR}}$, смешанные коротационные $\mathbf{B}^d$ и $\mathbf{B}^D$, в собственном базисе левого тензора искажений $\mathbf{B}^V$, Яуманна $\mathbf{B}^J$ являются абсолютно H-инвариантными, если они применены к абсолютно H-инвариантному тензору $\mathbf{B}$.*

Эти же коротационные производные, а также производная в собственном базисе $\mathbf{B}^V$ и спиновая производная $\mathbf{B}^S$ являются H-инвариантными относительно группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, если таковым является тензор $\mathbf{B}$.

▼ Предположим, что тензор $\mathbf{B}$ является H-инвариантным: $\mathbf{B} = \overset{*}{\mathbf{B}}$. Тогда H-инвариантность производных $\dot{\mathbf{B}}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{Ol}}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{CR}}$, $\mathbf{B}^d$, $\mathbf{B}^D$ и $\mathbf{B}^J$ следует из H-инвариантности тензоров $\mathbf{L}$ и $\mathbf{W}$, например,

$$(\overset{*}{\mathbf{B}}{}^J) = \dot{\overset{*}{\mathbf{B}}} + \overset{*}{\mathbf{B}} \cdot \overset{*}{\mathbf{W}} - \overset{*}{\mathbf{W}} \cdot \overset{*}{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^J. \qquad (7.51)$$

Если же $\mathbf{B}$ является H-инвариантным только относительно подгруппы $\overset{\circ}{G}_s$ полной ортогональной группы, то из (7.51) очевидно следует, что и $\overset{*}{\mathbf{B}}{}^J$ является таковым.

Мы должны рассмотреть отдельно только $\mathbf{B}^V$. Поскольку левый тензор искажений $\mathbf{V}$ является H-инвариантным (см. (7.45)) для всех $\mathbf{H} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \in \overset{\circ}{G}_s$ (входящих в ортогональные группы $\overset{\circ}{G}_s$), его собственный базис $\mathbf{p}_i$ и полная производная собственного базиса $\dot{\mathbf{p}}_i$ также являются H-инвариантными:

$$\overset{*}{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i, \qquad \dot{\overset{*}{\mathbf{p}}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i. \tag{7.52}$$

Тогда спин $\boldsymbol{\Omega}_V$ и тензор поворота $\mathbf{O}_V$ являются H-инвариантными:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}_V = \dot{\overset{*}{\mathbf{p}}}_i \otimes \overset{*}{\mathbf{p}}{}^i = \dot{\mathbf{p}}_i \otimes \mathbf{p}^i = \boldsymbol{\Omega}_V, \tag{7.52}$$

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}_V = \overset{*}{\mathbf{p}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i = \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i = \mathbf{O}_V. \tag{7.54}$$

Из этих соотношений получаем, что тензор $\mathbf{B}^V$ является H-инвариантным:

$$(\overset{*}{\mathbf{B}})^V = \dot{\overset{*}{\mathbf{B}}} - \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}_V \cdot \overset{*}{\mathbf{B}} + \overset{*}{\mathbf{B}} \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}_V = \dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_V = \mathbf{B}^V. \tag{7.55}$$

Рассмотрим теперь тензор спина $\boldsymbol{\Omega} = \overset{*}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$. Используя свойство (7.45) преобразования тензора поворота $\mathbf{O}$, получаем

$$\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} = \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\bullet} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega},$$

т.е. тензор спина $\boldsymbol{\Omega}$ является H-инвариантным относительно всякой ортогональной подгруппы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Тогда спиновая производная (1.5.39) в конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$ имеет вид

$$\overset{*}{\mathbf{B}}{}^S = \overset{*}{\mathbf{B}}{}^{\bullet} - \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{*}{\mathbf{B}} + \overset{*}{\mathbf{B}} \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^S, \tag{7.56}$$

если тензор $\mathbf{B}$ является H-инвариантным относительно $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Заметим, что абсолютно H-инвариантными производными $\mathbf{B}^S$ и $\mathbf{B}^V$ не являются, даже если тензор $\mathbf{B}$ является абсолютно H-инвариантным. ▲

Конечно, эта теорема остается справедливой и для произвольного H-инвариантного вектора $\mathbf{a}$ (см. упр. 3.7.3).

Следствием этой теоремы является H-инвариантность полной и коротационной производных от квазиэнергетических тензоров деформации:

$$(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*)^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} \qquad \text{и} \qquad (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*)^V = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^V. \tag{7.57}$$

Теорема 3.21. *Полная производная по времени $\dot{\mathbf{B}}$ от H-индифферентного тензора $\mathbf{B}$ является также H-индифферентной.*

▼ Действительно, так как тензор преобразований $\mathbf{H}$ не зависит от времени t, то, дифференцируя условие индифферентности

$$\overset{*}{\mathbf{B}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \tag{7.58}$$

получим

$$(\overset{*}{\mathbf{B}})^{\bullet} = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}. \qquad \blacktriangle \tag{7.59}$$

Остальные коротационные производные, указанные в теореме 3.20, не образуют ни H-индифферентного, ни H-инвариантного тензора, если они применены к H-индифферентному тензору.

Следствием этой теоремы является абсолютная H-индифферентность полной производной от энергетической меры деформации $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$:

$$(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*})^{\bullet} = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \tag{7.60}$$

и H-индифферентность производных $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ относительно любой ортогональной группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{*})^{\bullet} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \qquad \mathbf{H} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}. \tag{7.60a}$$

Теорема 3.22. *Коротационная производная в собственном базисе правого тензора искажений $\mathbf{B}^U$ является H-индифферентной, если она применена к H-индифферентному тензору $\mathbf{B}$ отноистельно группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.*

▼ Сперва рассмотрим, как изменяются тензоры $\mathbf{O}_U$ и $\mathbf{\Omega}_U$ при H-преобразованиях. Используя соотношение (1.4.96) между $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_U$ и $\mathbf{O}_V$, а также формулу преобразования (7.45) для тензора $\mathbf{O}$, получим

$$\overset{*}{\mathbf{O}} = \overset{*}{\mathbf{O}}_V \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}_U, \tag{7.61}$$

или

$$\mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \mathbf{O}_V \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}_U, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{O}_V \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}_V \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}_U. \tag{7.62}$$

Таким образом, тензор поворота $\mathbf{O}_U$ не является ни H-индифферентным, ни H-инвариантным:

$$\overset{*}{\mathbf{O}}_U = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_U. \tag{7.63}$$

Используя определение (1.4.89) тензора $\mathbf{\Omega}_U$, находим

$$\overset{*}{\mathbf{\Omega}}_U = \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\bullet}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}_U = \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}}_U \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{7.64}$$

т.е. спин правого тензора искажений $\mathbf{\Omega}_U$ является H-индифферентным.

Пусть тензор $\mathbf{B}$ является H-индифферентным. Используя формулу (1.5.27), получаем

$$\overset{*}{\mathbf{B}}{}^U = \overset{*}{\mathbf{B}}{}^{\bullet} - \overset{*}{\mathbf{\Omega}}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{B}} + \overset{*}{\mathbf{B}} \cdot \overset{*}{\mathbf{\Omega}}_U = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} - \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} + \\ + \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \ \blacktriangle \tag{7.65}$$

Эта теорема справедлива и для любого H-индифферентного вектора (см. упр. 3.7.4).

Замечание. Если тензор $\mathbf{B}$ является H-инвариантным, то его производная $\mathbf{B}^U$ не является ни H-инвариантной, ни H-индифферентной.

Таблица 3.9. Данные об H-индифферентности и H-инвариантности основных тензоров

Тензоры и векторы	Абсолютная H-индифферентность	H-псевдоиндифферентность	H-индифферентность относительно ортогональной подгруппы $G_s \subset I$	Абсолютная H-инвариантность	H-инвариантность относительно ортогональной подгруппы $G_s \subset I$
$\mathbf{r}_i,\ \mathbf{r}^i$	$-$		$-$	$+$	$+$
$\mathring{\mathbf{r}}_i,\ \mathring{\mathbf{r}}^i$	$+$		$+$	$-$	$-$
$\mathbf{E}$	$-$		$+$	$+$	$+$
$\mathbf{F}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $n = \mathrm{I} \ldots \mathrm{V}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{G}},\ \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{G}}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, $n = \mathrm{I} \ldots \mathrm{V}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathbf{T} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathbf{P}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}},\ \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}},\ \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathring{\mathbf{S}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathbf{\Omega}_V$, $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathbf{\Omega}_U$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\mathbf{v},\ \mathbf{L},\ \mathbf{D},\ \mathbf{W}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Таблица 3.10. Данные об H-индифферентности и H-инвариантности основных тензоров (продолжение)

Тензоры и векторы	Абсолютная H-индифферентность	H-псевдоиндифферентность	H-индифферентность относительно ортогональной подгруппы $G_s \subset I$	Абсолютная H-инвариантность	H-инвариантность относительно ортогональной подгруппы $G_s \subset I$
$\mathbf{B}^h$, $h = \{\cdot, \mathrm{Ol}, \mathrm{CR}, d, D, J, S\}$ если $\mathbf{B}$ – абсолютно H-инвариантен	–	–	–	+	+
$\mathbf{B}^h$, $h = \{\cdot, \mathrm{Ol}, \mathrm{CR}, d, D, J, S, V\}$, если $\mathbf{B}$ – H-инвариантен относительно $\overset{\circ}{G}_s \subset I$	–	–	–	–	+
$\dot{\mathbf{B}}$, если $\mathbf{B}$ – абсолютно H-индифферентен	+	–	+	–	–
$\mathbf{B}^h$, $h = \{\cdot, U\}$ если $\mathbf{B}$ – H-индифферентен относительно $\overset{\circ}{G}_s \subset I$	–	–	+	–	–

В табл. 3.9 и 3.10 представлены сводные данные об H-индифферентности или H-инвариантности основных тензоров.

Упражнения к 3.7

Упражнение 3.7.1. Показать, что если неискаженная конфигурация $\widehat{\mathcal{K}}$ может быть получена из конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ с помощью преобразования объемного растяжения, т.е. тензор преобразования $\mathbf{S}$ (7.8) является шаровым:

$$\mathbf{S} = k\mathbf{E}, \qquad k \neq 0,$$

то $\widehat{G}_s = \overset{\circ}{G}_s$.

Упражнение 3.7.2. Показать, что если H-преобразования $H : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ не являются ортогональными, то тензор $\mathbf{V}$ — не H-инвариантен, а $\mathbf{U}$ не является H-индифферентным.

Упражнение 3.7.3. Доказать теорему 3.20 для H-инвариантного вектора $\mathbf{a}$.

Упражнение 3.7.4. Доказать теоремы 3.21 и 3.22 для H-индифферентного вектора $\mathbf{a}$.

3.8. Следствия из принципа материальной симметрии и определяющие соотношения идеальных сплошных сред

Применим теперь принцип материальной симметрии к идеальным твердым телам и рассмотрим следствия из этого принципа. Обычно идеальные твердые среды называют *упругими средами*.

3.8.1. Следствие из принципа материальной симметрии для моделей A_n идеальных твердых (упругих) сред. Пусть имеется анизотропная идеальная твердая среда класса $\overset{\circ}{G}_s$ с неискаженной начальной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Полагаем, что определяющие соотношения анизотропной идеальной сплошной среды соответствуют моделям A_n (5.1), (5.4). Применим принцип материальной симметрии в виде (6.2) к этим моделям. Тогда получим, что для любого $\overset{*}{\mathbf{Q}}$-преобразования из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta), \tag{8.1}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta), \qquad \eta = -\partial\psi/\partial\theta \tag{8.2}$$

при движении $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$, если для $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ выполнены соотношения (5.1), (5.4). Здесь мы учли, что все скалярные функции H-инвариантны, т.е. $\overset{*}{\theta} = \theta$, $\overset{*}{\psi} = \psi$, $\overset{*}{\eta} = \eta$.

Учитывая, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ являются H-индифферентными относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, из (8.2) получаем, что для соблюдения принципа материальной симметрии определяющие соотношения идеальных моделей A_n анизотропных сред должны удовлетворять условиям

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \qquad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s, \tag{8.3а}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{8.3б}$$

$$\psi = \Psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \Psi(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta). \tag{8.3в}$$

Теорема 3.23. *Необходимым и достаточным условием выполнимости принципа материальной симметрии для моделей A_n идеальных твердых сред является выполнение одного условия (8.3в) для потенциала ψ.*

▼ Необходимость условия (8.3в) очевидна, так как если принцип материальной симметрии соблюдается, то выполнены все три условия (8.3).

Достаточность. Действительно, пусть выполнено только (8.3в), тогда, подставляя выражение для потенциала ψ в (8.3а), после дифференцирования скаляра по сложному тензорному аргументу (см. [12, 56]), получаем

$$\rho\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\,\psi(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}},\theta)\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}=$$

$$=\rho\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})*}{\mathbf{C}}}\,(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}},\theta)\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})*}{\mathbf{C}}}. \quad (8.4)$$

Аналогично доказываем (8.3б). ▲

3.8.2. Скалярные индифферентные функции тензорного аргумента. Рассмотрим несколько подробнее условие (8.3в), налагаемое на функцию $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ для выполнения принципа материальной симметрии.

Определение 3.9. *Скалярную функцию $\varphi(\mathbf{\Omega})$ от тензорного аргумента называют* и н д и ф ф е р е н т н о й *относительно группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s\subset\subset I$, если для любого тензора $\overset{*}{\mathbf{Q}}\in\overset{\circ}{G}_s$ из этой группы выполняется условие*

$$\varphi(\mathbf{\Omega})=\varphi(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}). \quad (8.5)$$

С помощью понятия индифферентной функции, результаты п. 3.8.1 можно переформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.24. *Для модели A_n твердой идеальной сплошной среды с группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ и неискаженной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ условие того, что свободная энергия $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ является индифферентной скалярной функцией, т.е. удовлетворяет условию (8.3в), является необходимым и достаточным условием соблюдения для этой модели принципа материальной симметрии.*

Рассмотрим твердое тело с неискаженной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s$. Согласно п. 3.7.4, главный базис анизотропии в конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ обозначен как $\widehat{\mathbf{c}}_i$, и произвольный тензор преобразований $\overset{*}{\mathbf{Q}}\in\overset{\circ}{G}_s$ можно разложить по этому базису (см. (7.28)):

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}=\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\widehat{H}^i{}_j\widehat{\mathbf{c}}^j\otimes\widehat{\mathbf{c}}_i, \quad (8.6)$$

где $\widehat{H}^i{}_j$ — компоненты тензора преобразования $\mathbf{H}=\overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}}$ (например, вида (7.30) и (7.33)). Если теперь имеется скалярная функция $\varphi(\mathbf{\Omega})$, индифферентная относительно этой же группы $\overset{\circ}{G}_s$, то для нее кроме безындексной записи существует еще *компонентное представление*:

$$\varphi=\varphi(\mathbf{\Omega})=\varphi(\widehat{\Omega}^{ij}), \quad (8.7)$$

т.е. запись функции через компоненты тензора

$$\mathbf{\Omega}=\widehat{\Omega}^{ij}\widehat{\mathbf{c}}_i\otimes\widehat{\mathbf{c}}_j. \quad (8.8)$$

Условие (8.5) индифферентности скалярной функции $\varphi(\mathbf{\Omega})$ в этом случае будет иметь вид

$$\varphi(\widehat{\Omega}^{ij}) = \varphi(\Omega'^{ij}), \qquad \Omega'^{ij} = \widehat{H}^i{}_k \widehat{H}^j{}_l \widehat{\Omega}^{kl} \quad \forall\ H^i{}_j \in \widehat{G}_s. \tag{8.9}$$

Иначе говоря, сам вид скалярной индифферентной функции не изменяется при замене аргументов $\widehat{\Omega}^{ij}$ на Ω'^{ij} для любой матрицы H^{ij} из группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Рассмотрим пример — скалярную линейную функцию симметричного тензорного аргумента

$$\varphi(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{M} \cdot\cdot\ \mathbf{\Omega} + \varphi_0, \tag{8.10}$$

где $\mathbf{M}$ — некоторый симметричный тензор второго ранга, не зависящий от $\mathbf{\Omega}$ и «задающий» функцию $\varphi(\mathbf{\Omega})$, а $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Если такая функция (8.10) является индифферентной, то условие (8.5) для нее имеет вид

$$\mathbf{M} \cdot\cdot\ \mathbf{\Omega} = \mathbf{M} \cdot\cdot\ (\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}). \tag{8.11}$$

Используя правила (2.3), (2.4) перестановки множителей в скалярном тензорном произведении, а также учитывая симметрию тензоров $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{M}$, получаем

$$(\mathbf{M} - \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \cdot\cdot\ \mathbf{\Omega} = 0. \tag{8.12}$$

Так как это соотношение должно выполняться при любых $\mathbf{\Omega}$, то оно имеет место тогда и только тогда, когда тензор $\mathbf{M}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{M} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \quad \forall\ \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{8.13}$$

Определение 3.10. *Тензор второго ранга* $\mathbf{M}$*, удовлетворяющий условию (8.13) для любого ортогонального тензора* $\overset{*}{\mathbf{O}} \in \overset{\circ}{G}_s$*, называют индифферентным относительно группы* $\overset{\circ}{G}_s$.

Сравнивая формулу (8.13) с (7.38) и (6.12), получаем, что тензор $\mathbf{M}$ является индифферентным относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ тогда и только тогда, когда он одновременно является H-индифферентным и H-инвариантным относительно той же группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\mathbf{M} = \overset{*}{\mathbf{M}}, \qquad \overset{*}{\mathbf{M}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \widehat{G}_s. \tag{8.14}$$

Сравнивая это условие с (7.38), получаем, что линейная скалярная функция (8.10) является индифферентной относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ тогда и только тогда, когда задающий эту функцию тензор $\mathbf{M}$ является индифферентным относительно той же группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Этот пример показывает, что индифферентные скалярные функции (и не только скалярные, как будет показано далее) «конструируются» с помощью индифферентных тензоров.

3.8.3. Образующие тензоры групп. Рассмотрим теперь множество $S_3^{(2)}$ всех симметричных тензоров второго ранга $\mathbf{M}$, индифферентных относительно какой-либо фиксированной группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Пусть также имеется главный базис анизотропии $\widehat{\mathbf{c}}_i$, в котором все ортогональные тензоры $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s$ имеют вид (8.6), где $\widehat{H}^i{}_j$ — ортогональные матрицы стандартного вида (7.30), (7.33) и т.п.

Множество $S_3^{(2)}$ образует конечномерное пространство [12] размерности k, и в нем можно выбрать базис — набор симметричных тензоров $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$, $\gamma = 1, \ldots, k$, обладающих следующими свойствами:

- каждый из тензоров $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ является индифферентным относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$;
- любой другой индифферентный относительно этой же группы тензор $\mathbf{M} \in S_3^{(2)}$ является линейной комбинацией тензоров $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$:

$$\mathbf{M} = \sum_{\gamma=1}^{k} a_\gamma \mathbf{O}_{s(\gamma)}, \tag{8.15}$$

где a_γ — не все нулевые числа.

Тензоры $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ называют *образующими тензорами группы* $\overset{\circ}{G}_s$.

Таблица 3.11. Образующие тензоры групп

Группа симметрии	Образующие тензоры $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$, $\gamma = 1, \ldots, k$	Число k
Ортотропии O	$\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2, \quad \gamma = 1, 2, 3$	3
Трансверсальной изотропии T_3	$\widehat{\mathbf{c}}_3^2, \quad \mathbf{E}$	2
Изотропии I	$\mathbf{E}$	1

Для групп трансверсальной изотропии T_3, ортотропии O (см. п. 3.7.3), а также полной ортогональной группы I тензоры $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ представлены в табл. 3.11 (см. [12]). Здесь обозначены тензоры

$$\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 = \widehat{\mathbf{c}}_\gamma \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\gamma. \tag{8.16}$$

Тогда представление (8.15) для групп O, T_3 и I будет иметь вид

$$\begin{gathered} \mathbf{M} = \sum_{\gamma=1}^{3} a_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 \quad \text{для } \overset{\circ}{G}_s = O, \\ \mathbf{M} = a_1 \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + a_2 \mathbf{E} \quad \text{для } \overset{\circ}{G}_s = T_3, \\ \mathbf{M} = a\,\mathbf{E} \quad \text{для } \overset{\circ}{G}_s = I, \end{gathered} \tag{8.17}$$

т.е. все индифферентные относительно полной ортогональной группы I тензоры второго ранга пропорциональны метрическому тензору.

3.8.4. Скалярные инварианты тензора второго ранга. Покажем теперь, как с помощью индифферентных тензоров «конструируются» индифферентные скалярные функции — не обязательно линейные. Вначале дадим два определения.

Определение 3.11. *Пусть имеется некоторый тензор второго ранга* $\mathbf{\Omega}$, *имеющий в ортонормированном базисе* $\widehat{\mathbf{c}}_i$ *следующий вид:* $\mathbf{\Omega} = \widehat{\Omega}^{ij}\widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}_j$, *а также задана группа симметрии* $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, *каждый тензор преобразований которой* $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \widehat{G}_s$ *имеет вид (8.6), тогда* *скалярным инвариантом тензора* $\mathbf{\Omega}$ *относительно группы* $\overset{\circ}{G}_s$ *называют любую скалярную функцию*

$$I^{(s)}(\mathbf{\Omega}) = I^{(s)}(\widehat{\Omega}^{ij})$$

от этого тензора, индифферентную относительно этой же группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Полезность введения нового названия фактически для одного и того же объекта — скалярной индифферентной функции — проясняет еще одно определение.

Определение 3.12. *Систему из* r *скалярных инвариантов* $I^{(s)}_\gamma(\mathbf{\Omega})$ *(где* $\gamma = 1\ldots r$*) тензора* $\mathbf{\Omega}$ *относительно группы преобразований* $\overset{\circ}{G}_s$ *называют функциональным базисом независимых инвариантов тензора относительно группы преобразований* $\overset{\circ}{G}_s$, *если*

- *она является функционально независимой,*
- *любой иной, не входящий в эту систему, скалярный инвариант* $I^{(s)}(\mathbf{\Omega})$ *тензора* $\mathbf{\Omega}$ *относительно этой же группы преобразований* $\overset{\circ}{G}_s$ *можно представить в виде функции от этих инвариантов* $I^{(s)}_\gamma$:

$$I^{(s)}(\mathbf{\Omega}) = f(I^{(s)}_1(\mathbf{\Omega}), \ldots, I^{(s)}_r(\mathbf{\Omega})), \tag{8.18}$$

где $f(I_1, \ldots I_r)$ *— обычная скалярная функция* r *переменных, т.е.* $f:\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^1$.

Далее везде, если не оговорено особо, f предполагаем непрерывно-дифференцируемой на всем $\mathbb{R}^r$, так же как сами инварианты $I^{(s)}(\widehat{\Omega}^{ij})$ — непрерывно-дифференцируемыми функциями $I^{(s)}:\ \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1$ на всем $\mathbb{R}^6$ (число независимых компонент симметричного тензора $\mathbf{\Omega}$ второго ранга равно 6). Индекс s у инвариантов означает, что для разных групп $\overset{\circ}{G}_s$ инварианты одного и того же тензора различаются. Определения функциональной зависимости и независимости системы инвариантов даны в [12].

Приведем без доказательства (см. [12]) теорему о числе элементов в функциональном базисе.

Теорема 3.24а. *Для всякого симметричного тензора второго ранга* $\mathbf{\Omega}$ *его функциональный базис независимых инвариантов относительно группы* $\overset{\circ}{G}_s \subset I$ *состоит из* r *элементов, где*

- $r = 3$ *для группы изотропии* $\overset{\circ}{G}_s = I$,
- $r = 5$ *для группы трансверсальной изотропии* $\overset{\circ}{G}_s = T_3$,

• $r = 6$ *для группы ортотропии* $\overset{\circ}{G}_s = O$ *и триклинной группы* $\overset{\circ}{G}_s = E$.

В качестве функционального базиса можно выбрать различные системы инвариантов. Наиболее широко в МСС применяют полиномиальные инварианты $I^{(s)}_\gamma(\mathbf{\Omega})$, образованные с помощью операций свертки образующих тензоров $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ соответствующей группы $\overset{\circ}{G}_s$ с самим тензором $\mathbf{\Omega}$ (*линейные инварианты*), либо с его тензорными степенями $\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{\Omega}$ (*квадратичные* и *кубичные инварианты* соответственно). Ниже приведены функциональные базисы, построенные таким способом для четырех рассматриваемых групп симметрии.

Триклинная группа $\overset{\circ}{G}_s = E$:

$$\begin{gathered} I^{(E)}_\gamma = \mathbf{\Omega} \cdot\cdot\, \widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma, \qquad I^{(E)}_{3+\gamma} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega} \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\beta + \widehat{\mathbf{c}}_\beta \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\alpha), \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \end{gathered} \tag{8.19}$$

или

$$I^{(E)}_\gamma = \{\widehat{\Omega}_{11},\ \widehat{\Omega}_{22},\ \widehat{\Omega}_{33},\ \widehat{\Omega}_{23},\ \widehat{\Omega}_{13},\ \widehat{\Omega}_{12}\}.$$

Группа ортотропии $\overset{\circ}{G}_s = O$:

$$\begin{gathered} I^{(O)}_\alpha = \mathbf{\Omega} \cdot\cdot\, \widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3, \qquad I^{(O)}_4 = (\widehat{\mathbf{c}}_2 \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}_3 \cdot \mathbf{\Omega}), \\ I^{(O)}_5 = (\widehat{\mathbf{c}}_1 \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}_3 \cdot \mathbf{\Omega}), \qquad I^{(O)}_6 = ((\widehat{\mathbf{c}}_1 \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot (\widehat{\mathbf{c}}_2 \cdot \mathbf{\Omega})) \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}_3 \cdot \mathbf{\Omega}), \end{gathered} \tag{8.20}$$

или

$$I^{(O)}_\gamma = \{\widehat{\Omega}_{11},\quad \widehat{\Omega}_{22},\quad \widehat{\Omega}_{33},\quad \widehat{\Omega}^2_{23},\quad \widehat{\Omega}^2_{13},\quad \widehat{\Omega}_{12}\widehat{\Omega}_{13}\widehat{\Omega}_{23}\}. \tag{8.20a}$$

Группа трансверсальной изотропии $\overset{\circ}{G}_s = T_3$:

$$\begin{gathered} I^{(3)}_1 = (\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}^2_3) \cdot\cdot\, \mathbf{\Omega}, \qquad I^{(3)}_2 = \mathbf{\Omega} \cdot\cdot\, \widehat{\mathbf{c}}^2_3, \\ I^{(3)}_3 = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}^2_3) \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}^2_3 \cdot \mathbf{\Omega}), \\ I^{(3)}_4 = \mathbf{\Omega}^2 \cdot\cdot\, \mathbf{E} - I^{(3)2}_2 - 2I^{(3)}_3, \qquad I^{(3)}_5 = \det \mathbf{\Omega}, \end{gathered} \tag{8.21}$$

или

$$I^{(3)}_\gamma = \{\widehat{\Omega}_{11} + \widehat{\Omega}_{22},\quad \widehat{\Omega}_{33},\quad \widehat{\Omega}^2_{13} + \widehat{\Omega}^2_{23},\quad \widehat{\Omega}^2_{11} + \widehat{\Omega}^2_{22} + 2\widehat{\Omega}^2_{12},\quad \det \mathbf{\Omega}\}. \tag{8.21a}$$

Группа изотропии $\overset{\circ}{G}_s = I$:

$$I^{(I)}_\gamma = I_\gamma(\mathbf{\Omega}), \qquad \gamma = 1, 2, 3. \tag{8.22}$$

Здесь $I_\gamma(\mathbf{\Omega})$ — это *главные инварианты тензора*, определяемые по формулам (2.47):

$$I_1(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} \cdot\cdot\, \mathbf{E}, \quad I_2(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2}(I^2_1(\mathbf{\Omega}) - I_1(\mathbf{\Omega}^2)), \quad I_3(\mathbf{\Omega}) = \det \mathbf{\Omega}. \tag{8.23}$$

Доказательство индифферентности главных инвариантов тензора является достаточно очевидным, например, для I_1:

$$I_1(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\Omega} = (\overset{*}{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{E}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}})\cdot\cdot\,\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E}\cdot\cdot\,(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}) = \\ = I_1(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall\,\widehat{\mathbf{Q}}\in\overset{\circ}{G}_s = I. \quad (8.24)$$

Аналогично показываем, что $I_1(\boldsymbol{\Omega}^2)$ также удовлетворяет условию (8.5), а значит, ему удовлетворяет и $I_2(\boldsymbol{\Omega})$. Для $I_3(\boldsymbol{\Omega})$ имеем

$$I_3(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}) = \det\,(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}) = \det\,\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\det\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\det\,\overset{*}{\mathbf{Q}} = \det\,\boldsymbol{\Omega} = I_3(\boldsymbol{\Omega}), \quad (8.25)$$

так как $\overset{*}{\mathbf{Q}}$ — ортогональный тензор из группы $\overset{\circ}{G}_s = I$.

Доказательство индифферентности инвариантов $I_\alpha^{(O)}$ и $I_\alpha^{(3)}$ можно найти в [12].

В скобках в формулах (8.19)–(8.22) указаны *компонентные представления* инвариантов $I_\gamma^{(s)}$ в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$.

Подчеркнем еще раз, что функциональные базисы инвариантов могут быть различными, их выбор, вообще говоря, определяется рассматриваемой задачей. Так для триклинной группы $\overset{\circ}{G}_s = E$ кроме (8.19) в п. 3.8.4 удобно будет использовать другой базис:

$$\widetilde{I}_\gamma^{(E)} = I_\gamma(\boldsymbol{\Omega}), \qquad \gamma = 1, 2, 3, \qquad \widetilde{I}_{3+\gamma}^{(E)} = I_{3+\gamma}^{(E)}. \quad (8.26)$$

Здесь мы использовали тот факт, что главные инварианты тензора $I_\gamma(\boldsymbol{\Omega})$ являются инвариантами относительно любой подгруппы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

3.8.5. Представление скалярной индифферентной функции через инварианты. В силу теоремы 3.24а, любую скалярную функцию тензорного аргумента $\varphi(\boldsymbol{\Omega})$, индифферентную относительно группы $\widehat{G}_s$, можно представить как функцию инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\boldsymbol{\Omega})$ этого тензора, т.е.

$$\varphi(\boldsymbol{\Omega}) = \varphi(I_1^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}), \ldots I_r^{(s)}(\boldsymbol{\Omega})). \quad (8.27)$$

Вернемся теперь снова к моделям A_n твердых сред и применим этот результат к свободной энергии $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$. Так как, согласно принципу материальной симметрии, эта функция должна быть индифферентной относительно некоторой группы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, то ее можно представить как функцию от функционального базиса независимых инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, т.е.

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \psi(I_1^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \ldots, I_r^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta). \quad (8.28)$$

Индифферентную относительно группы ортотропии O функцию (8.28) называют *ортотропной скалярной функцией*, она зависит от шести инвариантов ($r = 6$), например (8.20). Индифферентную относительно группы трансверсальной изотропии T_3 функцию (8.21) называют *трансверсально-изотропной скалярной функцией*, она зависит от пяти инвариантов ($r = 5$), например (8.27). Индифферентную относительно группы изотропии I функцию (8.28) называют *изотропной скалярной функцией*, она зависит от трех главных инвариантов:

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \psi(I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{8.29}$$

3.8.6. Индифферентные тензорные функции тензорного аргумента и тензорно-инвариантное представление определяющих соотношений для упругих сред. Вернемся теперь вновь к условиям (8.3) и рассмотрим подробнее первое из этих условий — (8.3а) — на тензорную функцию тензорного аргумента $\mathcal{F}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$.

Определение 3.13. *Тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\Omega})$ от тензорного аргумента называют* ***индифферентной относительно группы*** *симметрии $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, если для любого тензора $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s$ из этой группы выполнено условие*

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}). \tag{8.30}$$

Записывая тензор $\overset{*}{\mathbf{Q}}$ в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$ (см. (8.6)), а также тензор $\boldsymbol{\Omega}$ и тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ в этом базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\Omega}) = \widehat{\mathcal{F}}^{ij} \widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}_j, \qquad \widehat{\mathcal{F}}^{ij} = \widehat{\mathcal{F}}^{ij}(\widehat{\Omega}^{kl}), \tag{8.31}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \widehat{\Omega}^{kl} \widehat{\mathbf{c}}_k \otimes \widehat{\mathbf{c}}_l, \tag{8.32}$$

можно записать *компонентное представление* условия (8.30) индифферентности этой тензорной функции:

$$\widehat{H}^{i_1}{}_{j_1} \widehat{H}^{i_2}{}_{j_2} \widehat{\mathcal{F}}^{j_1 j_2}(\widehat{\Omega}^{kl}) = \widehat{\mathcal{F}}^{i_1 i_2}(\widehat{H}^{k_1}{}_{l_1}\, \widehat{H}^{k_2}{}_{l_2}\, \widehat{\Omega}^{l_1 l_2}). \tag{8.33}$$

Тензорная функция $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$ в моделях A_n является *квазипотенциальной*, т.е удовлетворяет первому условию в (5.4):

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}). \tag{8.34}$$

причем скалярная функция $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$ является индифферентной относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ и, следовательно, ее всегда можно представить в виде (8.28) функции от инвариантов тензора $I^{(s)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$. Тогда для квазипотенциальной функции $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$ имеем следующее представление:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}. \tag{8.35}$$

где

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \ldots, I_r^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta) = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}), \qquad I_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}. \quad (8.36)$$

Функции φ_γ зависят только от инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ и θ, поскольку плотность ρ однозначно выражается через три главных инварианта тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ (см. п. 3.2.19).

Формулу (8.35) называют *представлением индифферентной квазипотенциальной тензорной функции в тензорном базисе* или *тензорно-инвариантным представлением определяющих соотношений для модели A_n упругих сред.*

Подставляя в (8.35) в качестве инвариантов $I_\gamma^{(s)}$ различные наборы (8.19)–(8.22), получим представления тензорных функций, индифферентных относительно групп E, O, T_3 и I.

Для триклинной группы E тензорно-инвариантное представление (8.35) имеет вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{3}(\varphi_\gamma\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \frac{1}{2}\varphi_{\gamma+3}\mathbf{O}_\gamma), \quad (8.37а)$$

а компонентное представление этой функции в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_\gamma$ записывается следующим образом:

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}{}^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{3}(\varphi_\gamma\delta_\gamma^i\delta_\gamma^j + \frac{1}{2}\varphi_{\gamma+3}(\delta_\alpha^i\delta_\beta^j + \delta_\beta^i\delta_\alpha^j)), \quad (8.37б)$$

где φ_γ — скалярные функции инвариантов $I_\gamma^{(E)}$ (8.19):

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{11}, \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{22}, \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{33}, \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23}, \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}, \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12}, \theta). \quad (8.37в)$$

Для группы ортотропии O тензорно-инвариантное представление таково:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{3}\varphi_\gamma\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \frac{1}{2}(\varphi_4\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \varphi_5\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2 + \varphi_7\mathbf{O}_3\otimes\mathbf{O}_3)\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \\ + 3\varphi_6\;{}^6\mathbf{O}_m\cdot\cdot\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \quad (8.38а)$$

а соответствующее компонентное представление этой функции в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$ имеет вид:

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}{}^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{3}\varphi_\gamma\delta_\gamma^i\delta_\gamma^j + \frac{1}{2}(\varphi_4\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}\varphi_6)(\delta_2^i\delta_3^j + \delta_3^i\delta_2^j) + \frac{1}{2}(\varphi_5\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13} + \\ + \varphi_6\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23})(\delta_1^i\delta_3^j + \delta_3^i\delta_1^j) + \frac{1}{2}(\varphi_7\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12} + \varphi_6\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23})(\delta_1^i\delta_2^j + \delta_2^i\delta_1^j). \quad (8.38б)$$

Здесь $\widehat{\overset{(n)}{T}}{}^{ij}$ и $\widehat{\overset{(n)}{C}}{}^{ij}$ — компоненты тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$, а $\mathbf{O}_\gamma$, $\gamma = 1, 2, 3$, и ${}^6\mathbf{O}_m$ — индифферентные относительно группы O тензоры, составленные из образующих тензоров $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ этой группы (см. табл. 3.11 и [12]):

$$\mathbf{O}_\gamma = \widehat{\mathbf{c}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\beta + \widehat{\mathbf{c}}_\beta \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \tag{8.39}$$

$${}^6\mathbf{O}_m = \frac{1}{48} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha}}^{3} (\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\beta + \mathbf{O}_\beta \otimes \mathbf{O}_\alpha) \otimes \mathbf{O}_\gamma. \tag{8.40}$$

При выводе выражения (8.38а) из представления (8.35) используются правила дифференцирования инвариантов — скалярных функций по тензорному аргументу [12]. Заметим, для того чтобы сделать формулу (8.38а) симметричной относительно трех индексов 1, 2 и 3, в число инвариантов $I_\gamma^{(O)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$, $\gamma = 1, \ldots 6$, включен добавочный седьмой инвариант:

$$I_7^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2 \cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}_2^2 \cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}) = \widehat{\overset{(n)}{C}}_{12}, \tag{8.41}$$

не являющийся независимым. Функции φ_γ в этом случае в (8.38а) зависят от всех семи инвариантов:

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\widehat{\overset{(n)}{C}}_{11},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{22},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{33},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{23},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{13},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{12}\widehat{\overset{(n)}{C}}_{23}\widehat{\overset{(n)}{C}}_{13},\ \widehat{\overset{(n)}{C}}_{12},\ \theta). \tag{8.42}$$

Функцию (8.38а) называют *ортотропной тензорной функцией*.

Для группы трансверсальной изотропии T_3 представление (8.35) имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\mathbf{T}} &= (\varphi_1 + I_2\varphi_5)(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) + (\varphi_2 + I_2\varphi_5)\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \Big(\frac{1}{2}\varphi_3(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \\ &+ 2\varphi_4\big(\boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_3^2\big) - \varphi_5 I_1 \boldsymbol{\Delta}\Big) \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}} + \varphi_5 \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2, \end{aligned} \tag{8.43}$$

а компонентное представление в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{\overset{(n)}{T}}{}^{ij} &= (\varphi_1 + I_2\varphi_5)\delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 \widehat{\overset{(n)}{C}}_{33})\delta_3^i\delta_3^j + (\varphi_3 - 2\varphi_4)\big((\delta_2^i\delta_3^j + \\ &+ \delta_3^i\delta_2^j)\widehat{\overset{(n)}{C}}_{23} + (\delta_1^i\delta_3^j + \delta_3^i\delta_1^j)\widehat{\overset{(n)}{C}}_{13}\big) + (2\varphi_4 - I_1\varphi_5)\widehat{\overset{(n)}{C}}{}^{ij} + \varphi_5 \widehat{\overset{(n)}{C}}{}^{ik}\widehat{\overset{(n)}{C}}{}^{kj}, \end{aligned} \tag{8.44}$$

где

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma\big(\widehat{\overset{(n)}{C}}_{11} + \widehat{\overset{(n)}{C}}_{22}, \widehat{\overset{(n)}{C}}_{33}, \widehat{\overset{(n)}{C}}_{13}{}^2 + \widehat{\overset{(n)}{C}}_{23}{}^2, \widehat{\overset{(n)}{C}}_{11}{}^2 + \widehat{\overset{(n)}{C}}_{22}{}^2 + 2\widehat{\overset{(n)}{C}}_{12}{}^2, \det \widehat{\overset{(n)}{\mathbf{C}}}, \theta\big). \tag{8.45}$$

Здесь $\mathbf{\Delta}$ — симметричный единичный тензор четвертого ранга (1.1.22а). Для полной ортогональной (изотропной) группы I представление (8.35) имеет вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \psi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2, \tag{8.46}$$

или

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}{}^{ij} = \psi_1\delta^{ij} + \psi_2\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{ij} + \psi_3\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{i}{}_{k}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{kj},$$

где

$$\begin{gathered}\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad \psi_2 = -(\varphi_2 + I_1\varphi_3), \qquad \psi_3 = \varphi_3,\\ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma\big(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta\big), \qquad \psi = \psi\big(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta\big).\end{gathered} \tag{8.46а}$$

Приведем использованные при выводе (8.46) формулы дифференцирования главных инвариантов тензора [12]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial I_1(\mathbf{\Omega})}{\partial\mathbf{\Omega}} = \mathbf{E}, \qquad \frac{\partial I_2(\mathbf{\Omega})}{\partial\mathbf{\Omega}} = \mathbf{E}I_1(\mathbf{\Omega}) - \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}},\\ \frac{\partial I_3(\mathbf{\Omega})}{\partial\mathbf{\Omega}} = I_3(\mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}2} - I_1(\mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}I_2(\mathbf{\Omega}).\end{gathered} \tag{8.47}$$

Замечание 1. Для всех групп $\widehat{G}_s$ индифферентные квазипотенциальные тензорные функции (8.35) можно представить в едином тензорном виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \xi\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 + {}^6\mathbf{L}\cdot\cdot\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}). \tag{8.48}$$

Тензор ${}^4\mathbf{M}$ назовем *квазилинейным тензором упругости*, ξ — *параметром квадратичной упругости*, а ${}^6\mathbf{L}$ — *тензором квадратичной упругости*.

Из (8.46) следует, что для группы изотропии I

$${}^4\mathbf{M} = \frac{\psi_1}{I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{\Delta}, \qquad \xi = \psi_3, \qquad {}^6\mathbf{L} = 0. \tag{8.49а}$$

Из (8.43) следует, что для трансверсально-изотропной группы T_3

$$\begin{gathered}{}^4\mathbf{M} = \frac{\varphi_1 + I_2\varphi_5}{I_1}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{I_2} - 2\varphi_4\right)\widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2 +\\ + \left(\frac{\varphi_3}{2} - \varphi_4\right)(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2) + (2\varphi_4 + \varphi_5)I_1\mathbf{\Delta},\\ \xi = \varphi_5, \qquad {}^6\mathbf{L} = 0.\end{gathered} \tag{8.49б}$$

Из (8.38а) следует, что для ортотропной группы O:

$$\begin{gathered}{}^4\mathbf{M} = \sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\varphi_\gamma}{I_\gamma^{(0)}}\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \frac{\varphi_4}{2}\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \frac{\varphi_5}{2}\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2 + \frac{\varphi_7}{2}\mathbf{O}_3\otimes\mathbf{O}_3,\\ {}^6\mathbf{L} = 3\varphi_6\,{}^6\mathbf{O}_m, \qquad \xi = 0.\end{gathered} \tag{8.49в}$$

Основной результат этого раздела — получение представлений (8.35), (8.37а), (8.38а), (8.43) и (8.46) для индифферентных тензорных функций. Эти представления доказывают, что тензорная нелинейность для индифферентных тензорных функций не может быть выше второй степени, т.е. тензорные степени вида $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^3$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}} \otimes \overset{(n)}{\mathbf{C}} \otimes \overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и т.п. не участвуют в этих функциях, а «более сложная» нелинейность содержится в скалярных функциях (8.36), (8.42), (8.45) или (8.46а) от инвариантов. Задание этих функций уже не вызывает особой сложности — это обычные функции от многих переменных.

Полученные представления тензорных функций фактически являются следствием применения принципа материальной индифферентности к моделям A_n твердых сред и наглядно демонстрируют, как этот «кажущийся далеким от аналитической формулировки» принцип позволяет получать вполне конкретные аналитические формы определяющих соотношений.

Заметим также, что представления (8.37а), (8.38а), (8.43) и (8.46) отвергают возможные попытки построения индифферентных тензорных функций в виде обобщенных тензорных рядов Тейлора.

Замечание 2. В МСС иногда используют понятие *естественного состояния* сплошной среды, под которым понимают такую конфигурацию $\mathcal{K}^e$, в которой: градиент деформации $\mathbf{F}$ совпадает с метрическим тензором, тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ принимает некоторые значения (например, является шаровым: $\mathbf{T}^e = -p^e\mathbf{E}$, где p^e — некоторая константа, имеющая смысл «давления в естественном состоянии»), а температура и свободная энергия ψ равны некоторым «естественным» значениям:

$$\mathcal{K}^e: \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \theta = \theta^e, \quad \psi = \psi^e. \tag{8.50}$$

Очевидно, что в естественном состоянии все энергетические и квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ совпадают с $\mathbf{T}^e$, все тензоры деформации $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ — нулевые, а меры $\overset{(n)}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ с точностью до коэффициента совпадают с $\mathbf{E}$:

$$\mathcal{K}^e: \quad \overset{(n)}{\mathbf{T}} = \overset{(n)}{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^e, \quad \overset{(n)}{\mathbf{A}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{g}} = \overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{E}. \tag{8.51}$$

Часто в МСС (обычно для твердых сред) полагают, что в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ сплошная среда находится в *естественном ненапряженном состоянии*, т.е. для нее $\mathbf{T}^e = \mathbf{0}$ и $\psi^e = \psi_0$, тогда для нее выполняются следующие соотношения:

$$\overset{\circ}{\mathcal{K}}: \quad \overset{(n)}{\mathbf{T}} = \overset{(n)}{\mathbf{S}} = \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{A}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{g}} = \overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{E}, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0. \tag{8.52}$$

Существует определенный класс задач (к ним относятся задачи о возникновении технологических или начальных напряжений в конструкциях), в которых условия (8.52) заменяются на (8.50), (8.51).

Очевидно, что если в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ среда находится в ненапряженном состоянии, то в любой отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, полученной из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ с помощью H-преобразования из соответствующей данной среде группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, среда также будет находиться в ненапряженном состоянии. В этом случае на определяющие соотношения (8.35) или (8.48) накладывается дополнительное требование — удовлетворение условиям (8.52) в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, которое приводит к определенным ограничениям на потенциал ψ. Например, для моделей A_n изотропной идеальной среды из (8.46) следует, что в $\overset{\circ}{\mathcal{K}} = \mathcal{K}^e$ должны выполняться соотношения

$$\varphi_1 = \varphi_1(0,0,0,\theta_0) = 0, \quad \psi(0,0,0,\theta_0) = 0. \tag{8.53}$$

3.8.7. Квазилинейные и линейные модели A_n упругих сред. Для *квазилинейных моделей* A_n упругих сред в соотношениях (8.48) следует положить

$$\xi = 0, \qquad {}^6\mathbf{L} = 0. \tag{8.54}$$

в результате получаем следующее соотношение:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{M} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}. \tag{8.54a}$$

Для изотропной среды соотношения (8.54) означают, что скалярная функция $\psi_3 = \varphi_3$ в (8.46) обращается в нуль: $\varphi_3(I_1, I_2, I_3) = 0$. Это соотношение представляет собой дополнительное условие на инварианты I_1, I_2, I_3. Выразив из этого соотношения один из инвариантов, можно исключить этот инвариант из аргументов функций φ_γ (8.46a). Обычно в МСС выражают таким образом кубический инвариант $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$, с тем чтобы в качестве аргументов функций (8.46a) остались только линейный и квадратичный инварианты. Тогда соотношения (8.46) для изотропных квазилинейных упругих сред принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \psi_1 \mathbf{E} - \varphi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \theta), \quad \gamma = 1, 2.$$

Для трансверсально-изотропной группы T_3 соотношения (8.54) также приводят к одному дополнительному условию:

$$\varphi_5(I_1^{(3)}, \ldots, I_5^{(3)}) = 0,$$

которое позволяет исключить кубический инвариант $I_5^{(3)}$ из аргументов функций φ_γ (8.45), и число аргументов этих функций φ_γ сокращается до четырех.

Для ортотропной группы O соотношения (8.54) приводят к условию

$$\varphi_6(I_1^{(O)}, \ldots, I_7^{(O)}) = 0,$$

которое также дает возможность исключить кубический инвариант $I_6^{(O)}$ из аргументов скалярных функций φ_γ (8.36).

Для *линейных моделей* A_n твердых сред полагают, что свободная энергия (8.28) является квадратичной функцией от инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$, т.е. она является квадратичной формой от линейных инвариантов $I_\gamma^{(s)}$, $\gamma = 1, \ldots, r_1$, и линейной формой от квадратичных инвариантов $I_\gamma^{(s)}$, $\gamma = r_1+1,\ldots r_2$, соответствующей группы:

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\bar{\psi}^0 + \sum_{\gamma=1}^{r_1} \bar{m}_\gamma I_\gamma^{(s)} + \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)} I_\beta^{(s)} + \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I_\gamma^{(s)}, \tag{8.55}$$

где ψ_0, $\bar{\psi}^0$, $\bar{m}_\gamma$, $l_{\gamma\beta}$ — константы; кубические инварианты $I_\gamma^{(s)}$, $\gamma = r_2+1,\ldots,r$, не входят в выражение (8.55), поэтому очевидно, что для линейных моделей A_n выполняются оба условия (8.54).

Заметим, что общее число различных констант $l_{\gamma\beta}$ не превышает 21, поскольку матрица $(l_{\gamma\beta})$, составленная из этих констант, имеет максимальный размер 6×6 (6 — это максимальное число инвариантов $I_\gamma^{(s)}$) и является симметричной, а симметричная матрица размером $n\times n$ имеет $n(n+1)/2$ различных компонент. Функции φ_γ в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_\gamma = J\sum_{\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\beta^{(s)} + Jm_\gamma, \quad \gamma = 1,\ldots,r_1,\\ \varphi_\gamma = Jl_{\gamma\gamma}, \quad \gamma = r_1+1,\ldots,r_2; \quad J = \rho/\overset{\circ}{\rho}, \quad I_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\end{gathered} \tag{8.56}$$

а определяющие соотношения (8.35) и (8.48) для линейных моделей принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\sum_{\gamma=1}^{r_1} \bar{m}_\gamma \mathbf{O}_\gamma^{(s)} + J\sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)} \mathbf{O}_\beta^{(s)} + J\sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)}. \tag{8.57}$$

Если среда в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ находится в ненапряженном состоянии, то, подставляя (8.55) и (8.57) в соотношение нормировки (8.52), находим, что константы $\bar{\psi}^0$ и $\bar{m}_\gamma$ могут быть только нулевыми:

$$\bar{\psi}^0 = 0, \qquad \bar{m}_\gamma = 0, \qquad \gamma = 1,\ldots,r_1. \tag{8.58}$$

Таким образом, для линейных моделей A_n чисто линейные слагаемые отсутствуют.

1) Для изотропных упругих сред имеется только один линейный инвариант и один квадратичный ($r_1 = 1$, $r_2 = 2$), поэтому для *изотропных линейных моделей A_n* свободная энергия ψ (8.55) имеет вид

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \left(\frac{1}{2}l_1 + l_2\right) I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) - 2l_2 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{l_1}{2} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) + l_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2), \tag{8.59}$$

где l_1 и l_2 — константы ($l_{11} = l_1 + 2l_2$, $l_{22} = -2l_2$).

Функции φ_γ (8.36) и ψ_γ (8.46а) для изотропной линейной модели имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_1 = J(l_1 + 2l_2)I_1, \qquad \varphi_2 = -2l_2 J, \qquad \varphi_3 = 0,\\ \psi_1 = l_1 I_1 J, \qquad \psi_2 = 2l_2 J, \qquad J = \rho/\overset{\circ}{\rho},\end{gathered} \tag{8.60}$$

тензор ${}^4\mathbf{M}$ (8.49а) имеет только две независимые компоненты:

$$
{}^4\mathbf{M} = J(l_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2l_2 \mathbf{\Delta}), \tag{8.61}
$$

а определяющие соотношения (8.46) записываются следующим образом:

$$
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}). \tag{8.62}
$$

Поскольку в соотношениях (8.62) присутствует множитель J, то они не являются линейными, поэтому часто модели (8.59), (8.62) называют *полулинейными*. Полулинейную модель A_{IV} называют *моделью Джона*, а модель A_{V} — *моделью Мурнагана*.

2) Для трансверсально-изотропных сред имеются два линейных инварианта $I_\gamma^{(s)}$ и два квадратичных ($r_1 = 2, r_2 = 4$), поэтому для трансверсально-изотропных линейных моделей A_n свободная энергия ψ (8.55) имеет вид

$$
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}(l_{11} I_1^{(3)2} + 2l_{12} I_1^{(3)} I_2^{(3)} + l_{22} I_2^{(3)2}) + l_{33} I_3^{(3)} + l_{44} I_4^{(3)}, \tag{8.63}
$$

и содержит пять констант $l_{\gamma\beta}$.

Функции φ_γ (8.36) для этой модели имеют вид

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 = J(l_{11} I_1^{(3)} + l_{12} I_2^{(3)}), \qquad \varphi_2 = J(l_{22} I_2^{(3)} + l_{12} I_1^{(3)}), \\
\varphi_3 = J l_{33}, \qquad \varphi_4 = J l_{44}, \qquad \varphi_5 = 0,
\end{gathered} \tag{8.64}
$$

тензор ${}^4\mathbf{M}$ (8.49б) имеет пять независимых компонент:

$$
\begin{gathered}
{}^4\mathbf{M} = J\Big(l_{11} \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \widetilde{l}_{22} \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + (l_{12} - l_{11})(\mathbf{E} \otimes \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \mathbf{E}) + \\
+ \Big(\frac{l_{33}}{2} - l_{44}\Big)(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + 2l_{44} \mathbf{\Delta}\Big), \\
\widetilde{l}_{22} = l_{22} - 2l_{44} - 2l_{12} + l_{11},
\end{gathered} \tag{8.65}
$$

а определяющие соотношения (8.43) записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big((l_{11} I_1^{(3)} + l_{12} I_2^{(3)})(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) + ((l_{22} - 2l_{44}) I_2^{(3)} + l_{12} I_1^{(3)})\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \\
+ \Big(\frac{l_{33}}{2} - l_{44}\Big)(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + 2l_{44} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}\Big).
\end{gathered} \tag{8.66}
$$

3) Для ортотропных сред имеется три линейных инварианта и три квадратичных ($r_1 = 3,\ r_2 = r = 6$), поэтому для ортотропных линейных моделей A_n свободная энергия ψ (8.55) имеет вид

$$
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2} \sum_{\gamma,\beta=1}^{3} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(O)} I_\beta^{(O)} \sum_{\gamma=1}^{3} l_{3+\gamma,3+\gamma} I_{3+\gamma}^{(O)} \tag{8.67}
$$

и содержит девять констант $(l_{11}, l_{22}, \ldots, l_{66}, l_{12}, l_{13}, l_{23})$, поэтому тензор ${}^4\mathbf{M}$ (8.49в) имеет девять независимых компонент:

$$ {}^4\mathbf{M} = J\sum_{\gamma,\beta=1}^{3} l_{\gamma\beta}\widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma \otimes \widehat{\mathbf{c}}^2_\beta + J\sum_{\gamma=1}^{3} l_{3+\gamma,3+\gamma}\mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma, \tag{8.68} $$

а определяющие соотношения (8.38а) принимают вид

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{3} Jl_{\gamma\beta}I^{(O)}_\beta\widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{3} Jl_{3+\gamma,3+\gamma}\mathbf{O}_\gamma(\mathbf{O}_\gamma \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}). \tag{8.69} $$

3.8.8. Определяющие соотношения для моделей B_n упругих сред. Формально вся теория, изложенная в пп. 3.8.1–3.8.6, справедлива и для моделей B_n определяющих соотношений, с той лишь разницей, что энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ в формулах этих разделов следует заменить на соответствующие энергетические меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, поскольку $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, так же как и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, являются H-индифферентными относительно ортогональной группы I. В частности, соотношения (8.28), (8.35) и (8.36) примут вид

$$ \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta) = \psi(I^{(s)}_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \ldots, I^{(s)}_r(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta), $$

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r}\varphi_\gamma\frac{\partial I^{(s)}_\gamma}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}, \tag{8.70} $$

$$ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I^{(s)}_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \ldots I^{(s)}_r(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta) = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I^{(s)}_\gamma}. $$

Аналогично преобразуем и формулы (8.37), (8.43) и (8.46), например, для группы I представление (8.70) примет вид

$$ \psi = \psi(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \ldots, I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} + \psi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^2, $$

$$ \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad \psi_2 = -(\varphi_2 + \varphi_3 I_1), \qquad \psi_3 = \varphi_3, \tag{8.71} $$

$$ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \ldots, I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \;\; \theta) = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma). $$

Если в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ среда находится в ненапряженном состоянии, то соотношения (8.71) должны удовлетворять условиям (8.52), которые приводят к следующим условиям нормировки для функции φ:

$$ \varphi_1(a_1, a_2, a_3) + \varphi_2(a_1, a_2, a_3)\frac{2}{n - \mathrm{III}} + \varphi_3(a_1, a_2, a_3)\frac{1}{(n - \mathrm{III})^2} = 0. \tag{8.71а} $$

Здесь мы учли, что в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$

$$I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = I_\gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{3}{n - \mathrm{III}} \equiv a_1,$$
$$I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{3}{(n - \mathrm{III})^2} \equiv a_2, \quad I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^3} \equiv a_3. \tag{8.71б}$$

Для линейных моделей B_n свободную энергию также выбираем в виде (8.55), где $I_\gamma = I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$, в частности, для изотропной линейной среды имеем

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\psi^0 + (\frac{l_1}{2} + l_2) I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) - 2l_2 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) + m I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \tag{8.72}$$

и определяющие соотношения принимают вид, подобный (8.62):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(m + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}))\mathbf{E} + 2Jl_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}. \tag{8.73}$$

Если среда в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ находится в ненапряженном состоянии, то из (8.52) получим следующие соотношения для констант ψ^0, l_1, l_2 и m:

$$m = -\frac{3l_1 + 2l_2}{n - \mathrm{III}}, \qquad \psi^0 = \frac{3(3l_1 + 2l_2)}{2\overset{\circ}{\rho}(n - \mathrm{III})^2},$$

тогда соотношения (8.72) и (8.73) принимают вид

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{3(3l_1 + 2l_2)}{2(n - \mathrm{III})^2} - \frac{3l_1 + 2l_2}{n - \mathrm{III}} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) + \frac{l_1}{2} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) + l_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^2),$$
$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big((l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) - \frac{3l_1 + 2l_2}{n - \mathrm{III}})\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big). \tag{8.74}$$

Эти же соотношения можно получить из (8.59), (8.62), если воспользоваться заменой $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - (1/(n - \mathrm{III}))\mathbf{E}$ (см. упр. 3.8.11), т.е. модели B_n (8.74) и A_n (8.59), (8.62) эквивалентны и являются только различными формами друг друга.

Далее в разд. 3.9 будет показано, что для некоторых типов идеальных сред существуют не эквивалентные между собой модели A_n и B_n.

3.8.9. Следствия из принципа материальной симметрии для моделей C_n и D_n упругих сред. Рассмотрим теперь следствия из принципа материальной симметрии для моделей C_n твердых сред.

Пусть имеется твердая среда с неискаженной начальной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s$. Если определяющие соотношения твердой среды соответствуют моделям C_n (5.7), (5.10) для любого движения $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$, то на основании принципа материальной симметрии (6.2) должны выполняться следующие соотношения:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^* = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*) \equiv \mathbf{\Phi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta),$$

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*,\ \overset{*}{\mathbf{O}},\ \theta), \quad \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \tag{8.75}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}{}^* = \rho(\partial\psi/\partial\overset{*}{\mathbf{O}}) \equiv \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta)$$

при движении $\overset{*}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}$ для любой конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, полученной из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ с помощью $\overset{*}{\mathbf{Q}}$-преобразования: $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ из группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Учитывая, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ являются H-инвариантными относительно любых ортогональных преобразований (см. теоремы 3.18 и 3.19), а тензоры $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{O}$ преобразуются по законам (7.45) и (7.48), из (8.75) получаем, что для соблюдения принципа материальной симметрии определяющие соотношения моделей C_n твердых сред должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{\Phi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \mathbf{\Phi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{8.76а}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{8.76б}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta)\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{8.76в}$$

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \quad \forall\ \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{8.76г}$$

Теорема 3.25. *Необходимым и достаточным условием выполнимости принципа материальной симметрии для моделей C_n идеальных твердых сред является выполнение одного условия (8.76г) для потенциала ψ.*

▼ Необходимость условия (8.76г) очевидна, так как если принцип материальной симметрии соблюдается, то из (8.75) следует (8.76г).

Достаточность. Условия (8.76а) и (8.76б) доказываем так же, как и в теореме 3.23, дифференцированием функции ψ в (8.76г) по аргументам $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и θ.

Для доказательства (8.76в) продифференцируем функцию (8.76г) по $\mathbf{O}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta) =$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial\overset{*}{\mathbf{O}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta)\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta)\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}.$$

Здесь мы учли связь производных от ψ по $\mathbf{O}$ и $\overset{*}{\mathbf{O}}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{*}{\mathbf{O}}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}, \quad \overset{*}{\mathbf{O}} = \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{8.77}$$

которая вытекает из следующей дифференциальной формы:

$$d'\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{*}{\mathbf{O}}}\cdot\cdot\, d\overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{*}{\mathbf{O}}}\cdot\cdot\,(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}) = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{*}{\mathbf{O}}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}}\cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}},$$

где $d'\psi$ — частичный дифференциал при фиксированном $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$. ▲

Условие (8.76г) на функцию ψ существенно отличается от условия (8.3в) индифферентности, которое было получено для моделей A_n.

Определение 3.14. *Скалярную функцию $P(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O})$ от двух тензорных аргументов $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{O}$ называют псевдоинвариантом относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, если она*

1) поворотно-индифферентна относительно группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, т.е. для любого тензора $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s$ из этой группы и для любых $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\mathbf{O}$ выполнено условие

$$P(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}) = P(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}), \tag{8.78}$$

2) для любых $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{O}$ выполняется тождество

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial P}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\partial P}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{8.79}$$

Функция $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta)$, удовлетворяющая принципу материальной симметрии, представляет собой псевдоинвариант, поскольку она удовлетворяет условию (8.76г) — поворотной индифферентности, а также удовлетворяет соотношению (8.79), поскольку из (5.10) и (2.75) следует, что

$$0 = \overset{\circ}{\mathbf{S}} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{O} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} = \rho(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{O} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}}. \tag{8.80}$$

Теорема 3.26. *Пусть $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ — инвариант тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ относительно $\overset{\circ}{G}_s$, тогда скалярная функция*

$$P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}) = I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}) \tag{8.81}$$

является псевдоинвариантом относительно той же группы $\overset{\circ}{G}_s$.

▼ 1) Действительно, если $I_\alpha^{(s)}$ — инвариант тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, то, по определению, он удовлетворяет условию H-индифферентности относительно $\overset{\circ}{G}_s$:

$$I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = I_\alpha^{(s)}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{8.82}$$

Но тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ всегда можно выразить через $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ с помощью формулы (см. упр. 3.2.8):

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}. \tag{8.83}$$

Подставляя (8.83) в (8.82), получаем

$$I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}) = I_\alpha^{(s)}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in G_s. \tag{8.84}$$

Если теперь определить функцию двух аргументов $P_\alpha^{(s)}$ по формуле (8.81), то из (8.84) получаем, что она удовлетворяет условию

$$P_\alpha^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}) = P_\alpha^{(s)}(\mathbf{A}, \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in G_s, \tag{8.85}$$

т.е. функция $P_\alpha^{(s)}$ (8.81) является поворотно-индифферентной относительно группы G_s.

2) Покажем, что всякая скалярная функция (8.81) удовлетворяет условию (8.79). Вычислим для этого производную $\partial P_\alpha / \partial \overset{(n)}{\mathbf{A}}$, используя понятие частичного дифференциала при фиксированном $\mathbf{O}$:

$$d' P_\alpha^{(s)} = \frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{A}}} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\mathrm{T}} = \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot d\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}) = \Bigl(\mathbf{O} \cdot \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\Bigr) \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{A}}. \tag{8.86}$$

Здесь мы учли, что $P_\alpha^{(s)}$, на основании (8.81) и (8.83), можно рассматривать как функцию от $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$. Сравнивая второе и последнее равенства, получаем

$$\frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{A}}} = \mathbf{O} \cdot \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{8.87}$$

Аналогично, используя частичный дифференциал при фиксированном $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, получаем

$$d' P_\alpha^{(s)} = \frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial \mathbf{O}} \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\mathrm{T}} = \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, (d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O} +$$
$$+ \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{O}) = \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O} \cdot \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot\cdot\, d\mathbf{O} =$$
$$= \Bigl(\overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O} \cdot \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} - \mathbf{O} \cdot \frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(n)}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}\Bigr) \cdot d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{8.88}$$

Здесь мы учли, что $d\mathbf{O} = -\mathbf{O}\cdot d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}$. Из (8.88) находим

$$\frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial\mathbf{O}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} - \mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}. \qquad (8.89)$$

Подставляя теперь (8.87) и (8.89) в (8.79), убеждаемся, что это соотношение тождественно выполняется:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}\cdot\frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \frac{\partial P_\alpha^{(s)}}{\partial\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}} -$$
$$- \mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O}\cdot\frac{dP_\alpha^{(s)}}{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \equiv 0. \qquad (8.90)$$

Это и означает, что всякая скалярная функция (8.81) является псевдоинвариантом. ▲

Эта теорема открывает способ построения псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}$ — они могут быть построены из соответствующих инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$, после применения к ним формулы (8.81). Число z элементов в функциональном базисе псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\mathbf{O})$ определяется следующей теоремой.

Теорема 3.27. *Функциональный базис псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\mathbf{O})$ относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ состоит из z элементов, где*

- *$z = 3$ для группы изотропии $\overset{\circ}{G}_s = I$,*
- *$z = 5$ для группы трансверсальной изотропии $\overset{\circ}{G}_s = T_3$,*
- *$z = 6$ для группы ортотропии $\overset{\circ}{G}_s = O$,*
- *$z \leqslant 6$ для любой подгруппы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.*

▼ 1) Поскольку симметричный тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ имеет шесть независимых компонент, а ортогональный тензор $\mathbf{O}$ — три независимые компоненты, то общее число функциональных псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}$ не может превышать девяти. Однако, в силу того, что на функции $P_\alpha^{(s)}$ наложено дополнительное ограничение — (8.79), то число независимых псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}$ сокращается. Несложно заметить, что левая часть (8.79) представляет собой кососимметричный тензор, поэтому в (8.79) имеется только три независимых соотношения. В результате получаем, что число z независимых псевдоинвариантов не превышает $9 - 3 = 6$ для произвольной ортогональной подгруппы $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

2) Покажем, что для изотропной группы I число псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}$ равно трем. Разобьем доказательство на два этапа.

Этап 1. Для изотропной среды условие (8.78) должно выполняться для полной ортогональной группы, т.е. $\forall\ \overset{*}{\mathbf{Q}} \in I$. Так как тензор $\mathbf{O}$ — также ортогонален, то это условие в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$ можно переписать в виде

$$P_\alpha^{(s)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{A}{}^{ij}}, \widehat{O}^{kl}) = P_\alpha^{(s)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{A}{}^{ij}}, \widehat{O}'^{kl}) \quad \forall \mathbf{O}', \mathbf{O} \in I, \quad \forall \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \tag{8.91}$$

где $\mathbf{O}' = \mathbf{O} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}} \in I$. Компонентное представление $P_\alpha^{(s)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{A}{}^{ij}}, \widehat{O}^{kl})$ можно рассматривать как функцию девяти переменных, заданную на множестве $\mathbb{R}^6 \times V_0$, где $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ — область значений компонент ортогональных тензоров $\widehat{O}^{kl}$. Поскольку в условии (8.91) компоненты $\widehat{O}^{kl}$ и $\widehat{O}'^{kl}$ пробегают все множество значений V_0 (группа I — это полная ортогональная группа), то из этого условия (8.91) следует, что функция ψ на множестве V_0 не изменяется, т.е. является константой, и на всей области определения $\mathbb{R}^6 \times V_0$ она не зависит от $\widehat{O}^{kl}$, т.е. $P_\alpha^{(s)}$ не зависит от тензора поворота $\mathbf{O}$:

$$P_\alpha^{(s)} = P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) \quad \text{или} \quad P_\alpha^{(s)} = P_\alpha^{(s)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{A}{}^{ij}}). \tag{8.92}$$

Этап 2. Заметим теперь, что хотя на функцию (8.82) не было наложено требование индифферентности (8.5), она все-таки является индифферентной, только возможно относительно не всей группы I, а, по крайней мере, относительно триклинной группы $\overset{\circ}{G}_s = E \subset I$ (в эту группу входит только тождественное и центрально-симметричное преобразования $\overset{*}{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}$, $\overset{*}{\mathbf{Q}} = -\mathbf{E}$, и условие (8.5) всегда будет выполнено для любой функции $P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$).

Задача состоит в том, чтобы найти максимальную подгруппу $\overset{\circ}{G}_s$, относительно которой является индифферентной функция (8.92).

Воспользуемся тем, что в группе E существует особый функциональный базис независимых инвариантов (8.26). Тогда к $P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \theta)$ можно применить формулу (8.28) и записать ее как функцию от этого функционального базиса $\widetilde{I}_\alpha^{(E)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$ (8.26):

$$P_\alpha^{(s)} = P_\alpha^{(s)}(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \ldots, I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \quad \widetilde{I}_4(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \ldots \widetilde{I}_6(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \theta). \tag{8.93}$$

Тогда, подставляя потенциал (8.93) в соотношение (8.79), получаем, что должно выполняться следующее уравнение:

$$\sum_{\gamma=1}^{6} \varphi_\gamma \Big(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \widetilde{I}_\gamma^{(E)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\partial I_\gamma^{(E)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \Big) = 0, \tag{8.94}$$

где $\varphi_\gamma = \partial P_\alpha^{(s)} / \partial I_\gamma^{(E)}$.

С учетом формул (8.47) дифференцирования главных инвариантов $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$ и формул дифференцирования остальных трех инвариантов:

$$\frac{\partial \widetilde{I}^{(E)}_{\gamma+3}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) = \widehat{\mathbf{O}}_\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \tag{8.95}$$

$$\widehat{\mathbf{O}}_\gamma \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{c}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\beta + \widehat{\mathbf{c}}_\beta \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\alpha), \tag{8.96}$$

получаем для формулы (8.94) следующее представление:

$$\psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2 + \varphi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^3 + \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_{\gamma+3} \mathbf{O}_\gamma \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} =$$
$$= \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2 + \varphi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^3 + \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_{\gamma+3} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}_\gamma, \tag{8.97}$$

где ψ_1 и ψ_2 определяются формулами (8.46a).

Отсюда получаем, что должно иметь место следующее тождество:

$$\sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_{\gamma+3}(\mathbf{O}_\gamma \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}_\gamma) = 0. \tag{8.98}$$

Поскольку произведение тензоров $\mathbf{O}_\gamma$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ не коммутативно, в чем легко убедиться непосредственно умножением $\mathbf{O}_\gamma$ (8.39) на $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{A}{}^{ij}} \widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}_j$, то получаем, что тождество (8.98) имеет место тогда и только тогда, когда коэффициенты $\varphi_{3+\gamma}$, $\gamma = 1, 2, 3$, обращаются тождественно в нуль:

$$\varphi_\gamma = \partial P^{(s)}_\alpha / \partial \widetilde{I}^{(E)}_\gamma \equiv 0, \quad \gamma = 4, 5, 6. \tag{8.99}$$

Следовательно, всякий псевдоинвариант P (8.93) для изотропной среды не может зависеть от инвариантов $\widetilde{I}^{(E)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$, $\gamma = 4, 5, 6$, а зависит только от трех главных инвариантов $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$, т.е. для изотропной среды базис псевдоинвариантов состоит из трех элементов.

3) Доказательство теоремы для трансверсально-изотропной среды проводится аналогичным образом, оставим его в качестве упр. 3.8.7. ▲

Следствием из этой теоремы являются несколько важных утверждений.

Для изотропных сред потенциал ψ (см. (5.7)) не зависит от тензора $\mathbf{O}$ (поскольку ψ — псевдоинвариант), а поворотный тензор напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$, вследствие этого факта, тождественно равен нулю (с учетом формулы (5.12)):

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \theta), \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho \frac{\partial \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \theta)}{\partial \mathbf{O}} = \mathbf{0}. \tag{8.100}$$

Поскольку для ортогональных групп $\overset{\circ}{G}_s = T_3$, O или I число z элементов в функциональном базисе псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O})$ равно числу r элементов в базисе инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ соответствующей группы $\overset{\circ}{G}_s$ (ср. теоремы 3.24 и 3.27), а на основе всякого инварианта $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ можно построить псевдоинвариант по формулам (8.81) и (8.83), то весь базис псевдоинвариантов $P_\alpha^{(s)}$ может быть построен на основе только инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ (8.81). Следовательно, для моделей C_n потенциал ψ всегда можно представить в виде

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \psi(P_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}), \theta) = \psi(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}), \theta). \tag{8.101}$$

Подставляя (8.101) в (5.10), получаем общее представление определяющих соотношений моделей C_n идеальных сред в тензорном базисе (аналог (8.35)):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Phi}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}.\mathbf{O}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}}, \tag{8.102}$$

$$\varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}) = \varphi_\gamma(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}), \theta). \tag{8.103}$$

В частности, для изотропной твердой среды соотношения (8.102), (8.103) модели C_n имеют стандартный вид, аналогичный (8.46):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \varphi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2, \tag{8.104}$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \quad -\psi_2 = \varphi_2 + I_1\varphi_3, \quad \varphi_\gamma = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_\gamma}, \quad \psi = \psi(I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \theta).$$

Установим взаимосвязь между соотношением (8.102) моделей C_n и соотношением (8.35) моделей A_n, учитывая, что квазиэнергетические тензоры напряжений и деформации связаны с соответствующими энергетическими тензорами с помощью тензора поворота $\mathbf{O}$ (см. упр. 3.2.3):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \mathbf{O} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{8.105}$$

Подставляя (8.105) и (8.83) в (8.102), находим

$$\mathbf{O} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \mathbf{O} \cdot \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{8.106}$$

Сравнивая (8.106) и (8.35), заключаем, что модели A_n и C_n идеальных сред отличаются друг от друга только умножением определяющих соотношений на тензор поворота $\mathbf{O}$. Таким образом, можно считать эти модели лишь различными формами представления одних и тех же соотношений.

Несмотря на такой «не приносящий ничего нового» результат, проделанный выше вывод достаточно существенен: мы показали, что форма C_n

(8.102) определяющих соотношений является единственно возможной формой с участием тензора $\mathbf{O}$, удовлетворяющей принципу материальной симметрии, что совершенно не очевидно, если бы мы воспользовались формой A_n (8.35) и просто домножили бы ее на тензор $\mathbf{O}$.

Кроме того, формы A_n и C_n весьма существенно различаются, если их продифференцировать по времени (этому посвящен п. 3.8.12), поэтому и далее мы будем их называть моделями A_n и C_n. Заметим, что для неидеальных сред различие моделей A_n и C_n еще более значительно, об этом пойдет речь в гл. 6 и 7.

Поскольку квазиэнергетические меры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, так же как и квазиэнергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, являются H-инвариантными относительно группы I, то формально все формулы п. 3.8.8 справедливы и для моделей D_n твердых идеальных сред (4.14) с заменой $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \to \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$. В частности, определяющее соотношение (8.104) для изотропной среды при переходе к моделям D_n принимает вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} + \varphi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^2, \quad \psi = \psi(I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}), \theta). \tag{8.107}$$

3.8.10. Общее представление определяющих соотношений для всех моделей упругих сред. Определяющие соотношения (8.35), (8.70) и (8.102) для моделей A_n, B_n, C_n и D_n упругих сред с помощью обобщенных энергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ (2.90) можно записать в единой форме

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \mathbf{O}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}, \tag{8.108}$$

где обозначены тензоры производной

$$\begin{gathered}
\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} = \partial I^{(s)}_{\gamma G} / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \qquad \varphi_\gamma = \rho(\partial \psi / \partial I^{(s)}_{\gamma G}), \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma G}, \theta), \\
I^{(s)}_{\gamma G} = h_G I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G) + (1 - h_G) I^{(s)}_\gamma(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G \cdot \mathbf{O}), \\
G = A, B, C, D, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}.
\end{gathered} \tag{8.109}$$

Здесь введены функции — указатели класса моделей:

$$h_G = \begin{cases} 1, & G = A, B, \\ 0, & G = C, D, \end{cases} \qquad \bar{h}_G = \begin{cases} 1, & G = A, C, \\ 0, & G = B, D. \end{cases} \tag{8.110}$$

Определяющие соотношения (8.108) для всех моделей всегда можно привести к зависимости тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ от градиента деформации $\mathbf{F}$. Для этой цели следует воспользоваться соотношениями (2.36) и (2.66), выражающими $\mathbf{T}$ через $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$. Подставляя в соотношения (2.36) и (2.66) определяющие соотношения (8.35) модели A_n, (8.70) — модели B_n, (8.102) —

моделей C_n и D_n, получаем *общее представление определяющих соотношений для всех моделей упругих сред*:

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}, \theta), \qquad G = A, B, C, D, \tag{8.111}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}, \theta) \equiv {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot\, \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}, \tag{8.112}$$

а

$$\begin{gathered}{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G = h_G {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} + (1 - h_G){}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} = \\ = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes (h_G \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + (1 - h_G)\mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha)\end{gathered} \tag{8.113}$$

— обобщенные тензоры энергетической эквивалентности.

Для моделей $n = \mathrm{I}$ и V тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G$ выписываются явным образом (см. упр. 3.2.21) через $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$, поэтому для моделей A_n, B_n, C_n и D_n, $n = \mathrm{I}$ и V тензорная функция (8.111) имеет явное представление:

$$\begin{gathered}\overset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_A = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}, \theta) \cdot \mathbf{F}^{-1}, \qquad \overset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_B = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \theta) \cdot \mathbf{F}^{-1}, \\ \overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_A = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}, \theta) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_B = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \theta) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \\ \overset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_C = \mathbf{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) \cdot \mathbf{V}^{-1}, \qquad \overset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_D = \mathbf{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta) \cdot \mathbf{V}^{-1}, \\ \overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_C = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) \cdot \mathbf{V}, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_D = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta) \cdot \mathbf{V}.\end{gathered} \tag{8.114}$$

Обобщенные энергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ можно выразить через $\mathbf{F}$ по формулам (2.40), (2.41), (2.64) и (2.70) (см. также упр. 3.2.23). Эти формулы запишем в едином виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F}) = \frac{1}{n - \mathrm{III}}((h_G \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + (1 - h_G)\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{(n-\mathrm{III})/2} - \bar{h}_G \mathbf{E}, \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \tag{8.115а}$$

Для моделей при $n = \mathrm{III}$ вместо соотношений (8.115а) к уравнению (8.111) присоединяем дополнительно дифференциальные соотношения (1.4.136) и (2.42б), (2.61), (2.70б) для вычисления тензоров $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}_G$ через $\mathbf{F}$. Эти соотношения также можно записать в едином обобщенном виде:

$$\begin{gathered}\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_G = \frac{h_G}{2}\mathbf{U}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{U}^{-1} + \frac{1 - h_G}{2}\mathbf{V}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{V}^{-1}, \\ \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}_G(0) = \mathbf{0}, \quad G = A, C; \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}_G(0) = \mathbf{E}, \quad G = B, D.\end{gathered} \tag{8.115б}$$

Процедуры возведения тензоров типа $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}$ в дробную и отрицательную степени производятся путем перехода к собственным базисам $\mathbf{p}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$. Если использовать представление (1.3.4) для тензоров $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ в собственных базисах, то формулы (8.115а) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}(h_G\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha+(1-h_G)\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha))-\frac{\bar{h}_G}{n-\mathrm{III}}\mathbf{E}, \quad (8.115\text{в})$$

$$n=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.$$

Замечание. Определяющее соотношение (8.111) можно представить и в виде функции от обратного градиента $\mathbf{F}^{-1}$, что иногда удобно при формулировке задач теории упругости. Для этого следует тензоры энергетической эквивалентности ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}}$, и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ выразить именно через $\mathbf{F}^{-1}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{n-\mathrm{III}}((h_G\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}+(1-h_G)\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1})^{(\mathrm{III}-n)/2}-\bar{h}_G\mathbf{E}), \quad (8.116)$$

где собственные значения λ_α и собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, $\mathbf{p}_\alpha$ следует выразить через $\mathbf{F}^{-1}$, т.е. вместо (1.3.4) необходимо рассмотреть уравнение $\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{-2}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha$ для вычисления λ_α и $\mathbf{p}_\alpha$. Тогда вместо (8.111) имеем следующее определяющее соотношение:

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}^{-1},\theta), \quad (8.117)$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G$ выражается по тем же самым формулам (8.112), (8.113) и (8.109), а $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ рассматривается как функция вида (8.116).

3.8.11. Представление определяющих соотношений изотропных упругих сред в собственных базисах. Определяющие соотношения (8.46), (8.71), (8.104) и (8.107) моделей A_n, B_n, C_n и D_n для изотропных упругих сред можно выразить в собственных базисах $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ или $\mathbf{p}_\alpha$. Согласно результатам упр. 3.2.4, тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ можно представить в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, а тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ — в базисе $\mathbf{p}_\alpha$. Подставляя эти разложения в определяющие соотношения (8.46), (8.71), (8.104) и (8.107), получаем, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ при $n=\mathrm{I}$, II, IV, V являются диагональными в базисах $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha, \quad (8.118)$$

Здесь $\overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha$ — собственные значения тензоров напряжений, которые для моделей B_n и D_n, очевидно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \psi_1 + \frac{\psi_2}{n-\mathrm{III}}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} + \frac{\varphi_3}{(n-\mathrm{III})^2}\lambda_\alpha^{2(n-\mathrm{III})}, \quad \varphi_\alpha = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})}, \\ &\overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha = \psi_1 + \frac{\psi_2}{n-\mathrm{III}}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} + \frac{\varphi_3}{(n-\mathrm{III})^2}\lambda_\alpha^{2(n-\mathrm{III})}, \quad \varphi_\alpha = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})}, \end{aligned} \tag{8.119}$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad -\psi_2 = \varphi_2 + I_1\varphi_3. \tag{8.120}$$

Для моделей A_n и C_n аналогичные соотношения приведены в упр. 3.8.9. Так как главные инварианты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ совпадают (см. упр. 3.8.2), т.е. $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$, то собственные значения $\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha$ и $\overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha$ тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ для изотропных сред тоже совпадают:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{8.121}$$

Теорема 3.28. *Для моделей A_n, B_n, C_n и D_n изотропных упругих сред собственные значения $\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha$ тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ всегда можно представить в виде*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \rho\lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}; \qquad \rho = \overset{\circ}{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{8.122}$$

а ψ можно рассматривать как функцию от λ_α:

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta). \tag{8.123}$$

▼ Поскольку для моделей B_n и D_n изотропных сред ψ является функцией от $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ и θ, а главные инварианты $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ однозначно выражаются через λ_α (см. упр. 3.8.3), то потенциал ψ действительно всегда можно рассматривать как функцию вида (8.123).

Для доказательства формулы (8.122) продифференцируем сложную функцию $\psi = \psi(I_\beta, \theta)$ по λ_α и умножим на $\lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}$:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha} &= \lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial I_\beta}\frac{\partial I_\beta}{\partial\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\sum_{\alpha=1}^{3}\varphi_\beta\frac{\partial I_\beta}{\partial\lambda_\alpha} = \\ &= \lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\Big(\varphi_1\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}} + \frac{\varphi_2}{n-\mathrm{III}}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}(\lambda_\beta^{n-\mathrm{III}} + \lambda_\gamma^{n-\mathrm{III}}) + \\ &\quad + \frac{\varphi_3}{(n-\mathrm{III})^2}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}(\lambda_\beta\lambda_\gamma)^{n-\mathrm{III}}\Big) = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{n-\mathrm{III}}(\lambda_\beta^{n-\mathrm{III}} + \lambda_\gamma^{n-\mathrm{III}}) + \frac{\varphi_3}{(n-\mathrm{III})^2}(\lambda_\beta\lambda_\gamma)^{n-\mathrm{III}}. \end{aligned} \tag{8.124}$$

Здесь мы использовали результаты упр. 3.8.4.

С другой стороны, подставляя выражение (8.120) в (8.119), находим, что

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \varphi_1 + \varphi_2\Big(I_1 - \frac{\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}}{n-\mathrm{III}}\Big) + \varphi_3\Big(I_2 - I_1\frac{\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}}{n-\mathrm{III}} + \frac{\lambda_\alpha^{2(n-\mathrm{III})}}{(n-\mathrm{III})^2}\Big). \qquad (8.125)$$

Если теперь воспользоваться соотношениями между I_1, I_2 и λ_α (см. упр. 3.8.3), то получим, что выражения (8.124) и (8.125) в точности совпадают, что и доказывает теорему. Доказательство теоремы для моделей A_n и C_n оставим в качестве упр. 3.8.10. ▲

Формулы (8.118), (8.122) и (8.123) называют *представлением определяющих соотношений изотропных упругих сред в собственном базисе.*

Особо следует рассмотреть случай $n = \mathrm{III}$.

Теорема 3.28а. *Для изотропных упругих сред тензор* $\mathbf{B}$*, определенный по (1.4.136), энергетически эквивалентен тензору логарифмической деформации* $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ *(1.3.31), тензор* $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}$*, определенный по (2.42а), энергетически эквивалентен мере логарифмической деформации* $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_1$ *(1.3.31), тензор* $\mathbf{Y}$ *(2.61) — тензору* $\widetilde{\mathbf{H}}$*, мера* $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}$ *(2.70а) — мере* $\mathbf{H}_1$*, в том смысле, что имеют место следующие соотношения:*

$$w_{(i)} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{B}} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\bullet} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{Y}} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{H}} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} =$$

$$= \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_1^{\bullet} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}{}^{\bullet} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{H}}_1 = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha}{\lambda_\alpha}\dot{\lambda}_\alpha, \qquad (8.126)$$

где $\overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha$ *— собственные значения тензоров* $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ *и* $\mathbf{T}$*, которые связаны с собственными значениями* λ_α *тензоров* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{V}$ *соотношениями*

$$\sigma_\alpha = \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha = \rho\lambda_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}, \qquad \psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta). \qquad (8.127)$$

▼ а) Для всех моделей C_n, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$, изотропных сред поворотный тензор $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ равен нулю (см. (8.100)), поэтому, учитывая определение этого тензора (2.51), для этих моделей, в том числе для C_{III}, получаем

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{V} = 0, \qquad (8.128)$$

или $\mathbf{V}^2\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{V}^2 = 0$, т.е. тензор $\mathbf{T} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}$ коммутирует с $\mathbf{V}^2$, а значит эти тензоры соосны (см. п. 3.2.21). Таким образом, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{V}^2$ имеют общий собственный базис — $\mathbf{p}_\alpha$ и могут быть представлены в виде

$$\mathbf{V}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^2\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{T} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\alpha. \qquad (8.129)$$

Найдем теперь представление производной $\dot{\mathbf{Y}}$ в собственном базисе $\mathbf{p}_\alpha$, используя ее определение (2.61):

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \lambda_\alpha(\dot{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{p}}_\alpha)\Big) \cdot \sum_{\beta=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\beta}\mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta +$$
$$+ \frac{1}{2}(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha) \cdot \sum_{\beta=1}^{3}(\dot{\lambda}_\beta \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta + \lambda_\beta(\dot{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta + \mathbf{p}_\beta \otimes \dot{\mathbf{p}}_\beta)) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\Big(\Big(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\Big(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\Big)(\dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\beta)\Big)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{p}}_\alpha)\Big). \tag{8.130}$$

Учитывая свойства ортонормированного собственного базиса $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\beta + \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{p}}_\beta = 0, \\ \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{p}}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\alpha)^\bullet = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{p}_\alpha|^2 = 0, \end{gathered} \tag{8.131}$$

составим свертку тензоров $\mathbf{T}$ (8.129) и $\dot{\mathbf{Y}}$ (8.130), в результате получим

$$\mathbf{T} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{Y}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha \frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha}. \tag{8.132}$$

Но точно такой же результат мы получим, если возьмем тензор Генки $\widetilde{\mathbf{H}}$ (1.3.31), вычислим его производную:

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{H}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln\, \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \\ \dot{\widetilde{\mathbf{H}}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\Big(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \ln\, \lambda_\alpha(\dot{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{p}}_\alpha)\Big), \end{gathered} \tag{8.133}$$

и образуем свертку с $\mathbf{T}$ (8.129):

$$w_{(i)} = \mathbf{T} \cdot\cdot\, \dot{\widetilde{\mathbf{H}}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha \dot{\lambda}_\alpha / \lambda_\alpha. \tag{8.134}$$

Сравнивая (8.132) и (8.134), действительно получаем, что для изотропных сред тензоры $\widetilde{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{Y}$ энергетически эквивалентны, а свертка $\mathbf{T} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{T} \cdot\cdot\, \dot{\widetilde{\mathbf{H}}}$ образует мощность напряжений, поскольку для изотропных сред $\overset{\circ}{\mathbf{S}} = 0$.

Так как мера логарифмической деформации $\mathbf{H}_1$ (1.3.31) удовлетворяет соотношению: $\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\widetilde{\mathbf{H}}}$, а $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}{}^\bullet = \dot{\mathbf{Y}}$, то имеет место соотношение (8.126) и для мер: $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}}{}^\bullet = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{H}}_1$.

б) Рассмотрим модель A_{III} изотропной среды. Для нее имеет место определяющее соотношение (8.46). Из этого соотношения следует. что тензоры $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{B}$ — соосны. Для доказательства достаточно представить тензор $\mathbf{B}$ в собственном его базисе $\widetilde{\mathbf{p}}_\alpha$ и подставить в (8.46), тогда получим, что и $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ тоже будет диагональным в этом же базисе $\widetilde{\mathbf{p}}_\alpha$:

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^{3} B_\alpha \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha. \tag{8.135}$$

В отличие от модели C_{III} в данном случае нет начальной информации о том, что $\mathbf{T}$ соосен с $\mathbf{U}$, и $\widetilde{\mathbf{p}}_\alpha$, вообще говоря, может не совпадать с $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$. Однако для модели A_{III} есть неявное дополнительное условие, что соотношение (1.4.136) для тензора $\dot{\mathbf{B}}$ должно быть интегрируемо, либо тензор $\dot{\mathbf{B}}$ должен быть заменяем на энергетически эквивалентный ему интегрируемый тензор.

Примем во внимание, что тензор $\dot{\mathbf{B}}$ в собственном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ имеет такой же вид, как и (8.130):

$$\dot{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\biggl(\Bigl(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\Bigl(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\Bigr)(\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{\bullet}_\alpha \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta)\Bigr)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta + \\ + \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{\bullet}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{\bullet}_\alpha)\biggr). \tag{8.136}$$

С другой стороны, из (8.135) следует, что

$$\dot{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^{3}(\dot{B}_\alpha \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha + B_\alpha(\dot{\widetilde{\mathbf{p}}}_\alpha \otimes \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha + \widetilde{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \dot{\widetilde{\mathbf{p}}}_\alpha)). \tag{8.137}$$

Образуем теперь свертку тензоров $\dot{\mathbf{B}}$ и $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$, используя оба выражения (8.136) и (8.137):

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha \Bigl(\sum_{\gamma=1}^{3}\Bigl(\frac{\dot{\lambda}_\alpha}{\lambda_\alpha}p_{\alpha\gamma}^2 + p_{\alpha\gamma}\widetilde{p}_{\alpha\gamma} + \sum_{\beta=1}^{3}\lambda_{\alpha\beta}p_{\alpha\gamma}p_{\gamma\beta}\Bigr)\Bigr) = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha \dot{B}_\alpha, \tag{8.138}$$

где

$$p_{\alpha\gamma} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_\gamma, \qquad \widetilde{p}_{\alpha\gamma} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{\bullet}_\alpha \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_\gamma, \qquad \lambda_{\alpha\beta} = \Bigl(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\Bigr)(\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{\bullet}_\alpha \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta).$$

Согласно соотношению (8.138), коэффициент при $\overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha$ должен образовывать полную производную. Необходимым и достаточным условием для этого является обращение в нуль коэффициентов $p_{\alpha\gamma} = 0$ при $\alpha \neq \gamma$ и $p_{\alpha\alpha} = 1$, но это и означает совпадение базисов $\widetilde{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$. В этом случае

$$w_{(i)} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha \dot{B}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha (\ln \lambda_\alpha)^{\bullet}. \tag{8.139}$$

К этому же выражению приводит и свертка тензора $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ с $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$, где

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$
$$\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^\bullet = \sum_{\alpha=1}^{3}((\ln \lambda_\alpha)^\bullet \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \ln \lambda_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^\bullet_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^\bullet_\alpha)). \tag{8.139a}$$

Следовательно, тензор $\mathbf{B}$ действительно можно заменить на энергетически эквивалентный ему тензор $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$.

Так как мера логарифмической деформации $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_1$ (1.3.31) удовлетворяет соотношению: $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_1{}^\bullet = \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^\bullet$, а $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}{}^\bullet = \dot{\mathbf{B}}$, то имеет место соотношение (8.126) и для мер: $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}}{}^\bullet = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \dot{\overset{\circ}{\mathbf{H}}}_1$.

в) Поскольку левые части выражений (8.132) и (8.139) совпадают, то должны совпадать и правые, а это и означает, что собственные значения тензоров $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}$ совпадают: $\sigma_\alpha = \overset{\mathrm{III}}{\sigma}_\alpha$.

Если теперь подставить формулы (8.126) в ОТТ (3.14), то получим

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha} - \sigma_\alpha\lambda_\alpha\right) d\lambda_\alpha + \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right) d\theta = 0, \tag{8.140}$$

поскольку для изотропной среды ψ всегда можно рассматривать как функцию от λ_α и θ: $\psi = \psi(\lambda_\alpha, \theta)$. Из (8.140) очевидно следуют определяющие соотношения (8.127). ▲

Если теперь объединить утверждения обеих теорем (8.122) и (8.127), то получим, что для всех моделей A_n, B_n, C_n и D_n, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$, определяющие соотношения изотропных упругих сред можно представить в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \lambda_\alpha^{\mathrm{III}-n}\sigma_\alpha, \qquad \sigma_\alpha = \rho\lambda_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}, \quad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V},$$
$$\psi = \psi(\lambda_\alpha, \theta), \qquad \rho = \overset{\circ}{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{8.141}$$

Мощность напряжений $w_{(i)}$, определяемая по (2.1), с учетом соотношений (2.86)–(2.89), (8.118), (8.126) и выражений для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ через λ_α и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ (см. упр. 3.2.4) для всех моделей A_n, B_n, C_n и D_n может быть представлена в следующем виде:

$$w_{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha \lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}} \dot{\lambda}_\alpha, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \tag{8.141a}$$

Таким образом, для изотропных упругих сред обобщенные определяющие соотношения (8.111) для всех моделей A_n, B_n, C_n и D_n существенно упрощаются и записываются единым образом:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_B(\mathbf{F}, \theta), \tag{8.142а}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_B(\mathbf{F}, \theta) = \overset{\circ}{\rho}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \quad \psi = \psi(\lambda_\alpha, \theta), \qquad \lambda_\alpha,\ \mathbf{p}_\alpha \ \parallel\ \mathbf{F}.$$

Если λ_α и $\mathbf{p}_\alpha$ рассматривают как функции от $\mathbf{F}^{-1}$, то определяющие соотношения (8.142а) можно представить в виде (8.117):

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_B(\mathbf{F}^{-1},\ \theta), \tag{8.142б}$$

где тензорная функция $\boldsymbol{\mathcal{F}}_B(\mathbf{F}^{-1}, \theta)$ формально имеет тот же самый вид, что и в (8.142а).

Поскольку для всех моделей A_n, B_n, C_n и D_n, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$, изотропных упругих сред все тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, а также $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ являются соосными, то эти тензоры — коммутативны, тогда, применяя теорему 3.11, получаем, что для этих сред мощность напряжений можно выразить с помощью коротационной производной (см. п. 3.2.21):

$$\begin{gathered} w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^h = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h, \\ n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \qquad h = \{\cdot,\ U,\ V,\ J,\ S\}. \end{gathered} \tag{8.143}$$

Здесь $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}} = \overset{\circ}{\mathbf{H}}$, $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{G}} = \overset{\circ}{\mathbf{H}}_1$, $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{H}}$ и $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{g}} = \mathbf{H}_1$.

3.8.12. Представление определяющих соотношений изотропных упругих сред «в скоростях». Для некоторых задач механики твердых сред (обычно для исследования динамических процессов) удобно использовать представление определяющих соотношений «в скоростях».

Рассмотрим вначале модели A_n и B_n упругих сред, которым соответствуют определяющие соотношения (8.108) для $G = A, B$, не зависящие от тензора $\mathbf{O}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r}\varphi_\gamma \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}. \tag{8.144}$$

Теорема 3.29. *Для моделей A_n и B_n идеальных твердых сред определяющие соотношения (8.144) для $G = A, B$ могут быть представлены «в скоростях»:*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^{\bullet} = {}^4\mathbf{P}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \theta) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_G + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta}, \qquad G = A, B. \tag{8.145}$$

▼ Действительно, дифференцируя соотношение (8.144) по t, с учетом определения тензоров производной (8.109) имеем

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^{\bullet} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{r}\Bigl(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial I^{(s)}_\beta}\mathbf{I}^{(s)}_{\beta G} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_G + \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta}\dot{\theta}\Bigr)\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} + \sum_{\gamma=1}^{r}\varphi_\gamma\frac{\partial \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_G. \tag{8.146}$$

Вводя тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{P}_G$ и тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}$ следующим образом:

$$ {}^4\mathbf{P}_G = \sum_{\gamma,\beta=1}^{r} (\varphi_{\gamma\beta}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} \otimes \mathbf{I}^{(s)}_{\beta G} + \varphi_\gamma \delta_{\gamma\beta}{}^4\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G} = \sum_{\beta=1}^{r} \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}, \tag{8.147} $$

где

$$ \varphi_{\gamma\beta} = \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial I^{(s)}_\beta} = \frac{\partial}{\partial I^{(s)}_\beta}\Big(\rho\frac{\partial\psi}{\partial I^{(s)}_\gamma}\Big), \qquad {}^4\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} = \frac{\partial \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G} = \frac{\partial^2 I^{(s)}_\gamma}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}, \tag{8.148} $$

действительно получаем, что (8.146) можно представить в виде (8.145). ▲

Рассмотрим теперь модели C_n и D_n идеальных твердых изотропных сред. Как было показано в п. 3.8.9, для изотропных сред определяющие соотношения (8.108) не зависят от тензора $\mathbf{O}$ и также могут быть представлены в виде (8.144) при $G = C, D$.

Теорема 3.30. *Для моделей C_n и D_n изотропных идеальных твердых сред определяющие соотношения (8.144) могут быть представлены «в скоростях» следующим образом:*

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^h = {}^4\mathbf{P}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \theta) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h_G + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_{\theta G}\dot\theta, \qquad G = C, D, \tag{8.149} $$

где h означает коротационную производную:

$$ h = \{U,\ V,\ J,\ S\}. $$

▼ Воспользуемся общим видом коротационных производных от тензора второго ранга (формула (1.5.41)):

$$ \begin{gathered} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^h = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^\bullet - \mathbf{Z}_h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{Z}_h = \{\boldsymbol{\Omega}_U,\ \boldsymbol{\Omega}_V,\ \mathbf{W},\ \boldsymbol{\Omega}\}, \quad h = \{U, V, J, S\}. \end{gathered} \tag{8.150} $$

Подставляя в (8.150) правую часть соотношения (8.144), получаем

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^h = \sum_{\gamma=1}^{3} (\dot\varphi_\gamma \mathbf{I}_{\gamma G} + \varphi_\gamma \mathbf{I}^h_{\gamma G}), \tag{8.151} $$

так как $\dot\varphi_\gamma = \varphi_\gamma{}^h$. Здесь мы учли, что для изотропных сред в (8.144) имеются только три главных инварианта $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G)$.

Покажем теперь, что $\dot\varphi_\gamma$ можно представить с помощью коротационных производных в следующем виде:

$$ \dot\varphi_\alpha = \frac{d}{dt}\varphi_\alpha(I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G), \theta) = \sum_{\gamma=1}^{3}\Big(\varphi_{\alpha\gamma}\mathbf{I}_{\gamma G} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h_G + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\theta}\dot\theta\Big). \tag{8.152} $$

Здесь использовано обозначение для тензоров производной от главных инвариантов: $\mathbf{I}_{\gamma G} = \partial I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G)/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$..

Фактически нам необходимо показать только то, что в двойных свертках полную производную можно заменить на коротационную:

$$\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{G}=\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{h}_{G}. \tag{8.153}$$

Действительно, для изотропных сред тензоры производной $\mathbf{I}_{\gamma G}$ имеют вид (8.47) и пропорциональны тензорам $\mathbf{E}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2_G$, следовательно, все эти $\mathbf{I}_{\gamma G}$ — соосны с $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$, а значит $\mathbf{I}_{\gamma G}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$ — коммутативны. Тогда, используя представление (8.150) коротационной производной, получаем

$$\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G{}^{h}=\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{G}-\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\mathbf{Z}_h\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G-\mathbf{I}_{\gamma G}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\cdot\mathbf{Z}_h^{\mathrm{T}}. \tag{8.154}$$

Вследствие коммутативности $\mathbf{I}_{\gamma G}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$, второе и третье слагаемые в правой части (8.154) взаимно сокращаются, а значит формулы (8.153) и (8.152) действительно имеют место.

Вычислим теперь в формуле (8.151) коротационные производные $\mathbf{I}^h_{\gamma G}$, используя формулу (8.150) (она верна и после замены $\overset{(n)}{\mathbf{S}}\to\mathbf{I}_{\gamma G}$), а также формулы дифференцирования главных инвариантов (8.47):

$$\mathbf{I}^h_{1G}=\mathbf{0},\quad \mathbf{I}^h_{2G}=\left(\frac{\partial I_2}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G}\right)^h=(\mathbf{E}I_1-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G)^h=\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G-\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^h_{3G}&=(\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2_G-I_1\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G+\mathbf{E}I_2)^h=\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G+\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G-I_1\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G-\dot{I}_1\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G+\dot{I}_2\mathbf{E}=\\&=\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G+\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G-I_1\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G-(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\otimes\mathbf{E})\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G+\mathbf{E}\otimes(\mathbf{E}I_1-\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G)\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G.\end{aligned} \tag{8.155}$$

Здесь мы снова использовали правило (8.153) замены полной производной на коротационную производную.

Подставляя теперь (8.152) и (8.155) в (8.151), после приведения подобных приходим к представлению (8.149) определяющих соотношений, в которых тензоры ${}^4\mathbf{P}_G$ и $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_{\theta G}$ имеют вид

$${}^4\mathbf{P}_G=\sum_{\gamma,\beta=1}^{3}(\varphi_{\gamma\beta}\mathbf{I}_{\gamma G}\otimes\mathbf{I}_{\gamma G}+\varphi_\gamma{}^4\widetilde{\mathbf{P}}_\gamma\delta_{\gamma\beta}),\qquad \overset{(n)}{\mathbf{S}}_{\theta G}=\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta}\mathbf{I}_{\gamma G}, \tag{8.156}$$

где

$${}^4\widetilde{\mathbf{P}}_1=\mathbf{0},\qquad {}^4\widetilde{\mathbf{P}}_2=\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\boldsymbol{\Delta},$$

$$\begin{aligned}{}^4\widetilde{\mathbf{P}}_3=(\mathbf{E}\otimes\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G)^{(3214)}+(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\otimes\mathbf{E})^{(1423)}+I_1(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\boldsymbol{\Delta})-\\-(\mathbf{E}\otimes\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G+\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\otimes\mathbf{E}).\ \blacktriangle\end{aligned} \tag{8.157}$$

Замечание 1. Использование коротационных производных в соотношениях (8.149), как будет показано в п. 3.10.7, обеспечивает их корректность, чего не удается достичь, если использовать для моделей C_n и D_n обычную производную по времени.

Замечание 2. Формально соотношения (8.145) и (8.149) могут использоваться в задачах МСС самостоятельно, без соотношений (8.144). В этом случае возникает вопрос о соответствии этих соотношений принципу материальной симметрии. Очевидно, что этот принцип автоматически выполняется для моделей C_n и D_n в скоростях (8.149), так как тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G = \{\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{g}}\}$ — все H-инвариантны.

Доказательство того, что соотношения (8.145) «в скоростях» для моделей A_n и B_n удовлетворяют принципу материальной симметрии оставим в качестве упр. 3.8.8.

Если воспользоваться представлениями (8.104) и (8.107) определяющих соотношений для моделей C_n и D_n изотропных сред и продифференцировать их, то получим следующие соотношения «в скоростях»:

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^h = \dot{\psi}_1\mathbf{E} + \dot{\psi}_2\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G + \dot{\varphi}_3\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^2_G + \psi_2\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G + \varphi_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G + \overset{(n)}{\mathbf{C}}_G\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G), \qquad (8.158)$$

которые являются просто другой формой соотношений (8.149). Здесь, как обычно, ψ_α выражаются по формулам

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad -\psi_2 = \varphi_2 + I_1\varphi_3, \qquad I_\gamma = I_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G). \qquad (8.159)$$

Замечание 3. Соотношения «в скоростях» для моделей A_n, B_n (8.144) и для моделей C_n, D_n (8.149) формально можно записать в едином виде:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^h_G = {}^4\mathbf{P}_G(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G,\theta)\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G + \overset{(n)}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta}, \quad G = A, B, C, D, \qquad (8.160)$$

если условиться, что для $G = A, B$ параметр h принимает только одно значение $h = \{\cdot\}$ (т.е. это полная производная по t), а для $G = C, D$ параметр h принимает значения $h = \{U, V, J, S\}$, но рассматриваются только изотропные среды.

Тогда можно воспользоваться обобщенной формой соотношений (2.104) между $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G$ и $\mathbf{L}$ и записать соотношения (8.160) следующим образом:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^h_G = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{Gh}(\mathbf{F},\theta)\cdot\cdot\,\mathbf{L} + \overset{(n)}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta}, \qquad (8.161)$$

где

$${}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{Gh} = {}^4\mathbf{P}_G\cdot\cdot\,{}^4\overset{(n)}{\mathbf{B}}_{Gh}, \qquad (8.162)$$

а ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{B}}_{Gh}$ определяют по (2.105).

Запишем соотношение (8.161) иначе, используя формулу (1.5.41) для коротационных производных $\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^h_G$ от симметричного тензора второго ранга:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^{\bullet}_G - \mathbf{Z}_{Gh} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G - \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}_{Gh} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{Gh} \cdot\cdot\, \mathbf{L} + \overset{(n)}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta}. \tag{8.163}$$

Здесь мы обозначили тензор

$$\mathbf{Z}_{Gh} = \begin{cases} \mathbf{0}, & G = A, B, \\ \mathbf{Z}_h, & G = C, D, \end{cases} \tag{8.164}$$

и учли, что для $G = A, B$ по определению $\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^h_G = \overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^{\bullet}_G$. Тензоры $\mathbf{Z}_h$ определяют по формулам (1.5.42).

Представим теперь полную производную $\overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^{\bullet}_G$ с учетом уравнения неразрывности в следующем виде (см. формулы (2.1.20)):

$$\frac{\partial \rho \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G) = \rho \overset{(n)}{\mathbf{T}}{}^{\bullet}_G. \tag{8.165}$$

Подставляя (8.165) в (8.163), получаем

$$\frac{\partial \rho \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G) = \rho {}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{Gh} \cdot\cdot\, \mathbf{L} + \rho \mathbf{Z}_{Gh} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G + \rho \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}_{Gh} + \rho \overset{(n)}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta},$$
$$G = A, B, C, D, \qquad h = \{\cdot,\ U,\ V,\ J,\ S\}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}, \tag{8.166}$$

— обобщенную дивергентную форму определяющих соотношений идеальных твердых сред «в скоростях».

3.8.13. Применение принципа материальной симметрии для жидких сред. До сих пор в этом разделе мы рассматривали только твердые среды. Если же применить принцип материальной симметрии к жидким средам, то его следствием будет следующая важная теорема.

Теорема 3.31. *Для моделей A_n, $n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}$, жидких идеальных сред определяющие соотношения (5.1), (5.4), удовлетворяющие принципу материальной симметрии, можно представить в следующем виде:*

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \tag{8.167а}$$

$$p = p(I_3, \theta) = \overset{\circ}{\rho} I_3 (\partial\psi/\partial I_3) \left((n - \mathrm{III})^3 I_3\right)^{1/(\mathrm{III}-n)} (\mathrm{III} - n), \tag{8.167б}$$

$$\eta = \partial\psi/\partial\theta, \tag{8.167в}$$

$$\psi = \psi(I_3(\overset{(n)}{\mathbf{G}}), \theta), \tag{8.167г}$$

причем

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E}, \tag{8.168а}$$

$$p = p(\rho, \theta) = \rho^2 (\partial\psi/\partial\rho), \tag{8.168б}$$

$$\psi = \Psi(\rho, \theta), \tag{8.168в}$$

$$\eta = -\partial\psi/\partial\theta. \tag{8.168г}$$

Функция p, введенная формулами (8.167б) и (8.168б), — одна и та же, и называется *давлением*. Тензор $\mathbf{T}$, пропорциональный метрическому тензору (соотношение (8.168а)), называют *шаровым*.

▼ Согласно определению 3.5, в любой отсчетной конфигурации, в том числе в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, жидкая среда обладает унимодулярной группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s = U$. Поэтому для любого $\mathbf{H}$-преобразования из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ должны выполняться соотношения (8.2), где $\mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s = U$ (т.е. $\det \mathbf{H} = 1$).

Заметим, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ не являются H-индифферентными относительно унимодулярной группы (за исключением $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$, который абсолютно H-индифферентен), поэтому соотношения (8.3) уже не имеют место для жидкости, и для ψ вместо условия индифферентности (8.3в) должно выполняться более общее условие:

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta) \quad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s = U. \tag{8.169}$$

Единственным решением уравнения (8.169) является скалярная функция ψ, зависящая от детерминанта соответствующей энергетической меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, т.е.

$$\psi = \psi\left(\det\, (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{E}), \theta\right) = \psi(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta). \tag{8.170}$$

Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что третий главный инвариант $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ всегда удовлетворяет условию (8.169):

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^*) = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) \qquad \forall \mathbf{H} \in U, \tag{8.171}$$

так как при всех $n = \mathrm{I, II, IV, V}$ этот инвариант можно выразить через отношение плотностей $\rho/\overset{\circ}{\rho}$ (см. формулы (2.79)):

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^2}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}, \tag{8.172}$$

а плотности ρ и $\overset{\circ}{\rho}$ всегда абсолютно H-индифферентны (см. п. 3.6.3). Более того, фактически унимодулярные H-преобразования вводились как преобразования отсчетной конфигурации, сохраняющие единственную скалярную функцию — плотность $\overset{\circ}{\rho}$, поэтому функции $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ являются единственными решениями уравнения (8.169). Все остальные решения — это только функции от $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$, в частности, функция (8.170). Таким образом, мы показали, что для жидкости свободная энергия ψ действительно имеет вид (8.170).

Подставляя в (8.170) выражение (8.172), ψ для всех моделей A_n можно выразить только через плотность ρ и θ:

$$\psi = \psi(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta) = \psi\left(\frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}, \theta\right) \equiv \Psi(\rho, \theta). \tag{8.173}$$

Вычислим теперь тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, подставив (8.170) в (5.4):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}. \tag{8.174}$$

Здесь мы учли, что в соответствии с формулой (2.42), от производной по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ можно перейти к производной по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, так как $\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Delta}$.

Используя формулу (8.47) для $\partial I_3/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$:

$$\partial I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \tag{8.175}$$

определяющие соотношения (8.174) можно записать в виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}I_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}. \tag{8.176}$$

Если теперь ввести обозначение для давления:

$$p = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})(\mathrm{III}-n) \tag{8.177}$$

и подставить в эту формулу выражение (8.172) для ρ через $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$, то из (8.176) получим в точности представления (8.167а) и (8.167б) для определяющих соотношений жидкости.

Покажем теперь, что все четыре соотношения (8.167а) допускают представление (8.168а). Для этого следует представить выражение для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}$ с помощью формул (2.30) и (2.46) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = -2\mathbf{G} = -2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}, \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = -\mathbf{U} = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}),\\
\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}), \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = 2\mathbf{G}^{-1} = 2\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}},
\end{gathered} \tag{8.178}$$

а затем подставить их вместе с выражениями для энергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (см. табл. 3.1) в соотношения (8.167а). В результате получим для каждого n линейное уравнение относительно тензора $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}
n = \mathrm{I}:&\qquad \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F} = -p\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F},\\
n = \mathrm{II}:&\qquad \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}) = -\frac{1}{2}p(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}),
\end{aligned} \tag{8.179}$$

$$n = \mathrm{IV}: \qquad \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) = -\frac{1}{2}p(\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}),$$

$$n = \mathrm{V}: \qquad \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = -p\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}.$$

Решением каждого из этих линейных уравнений является в точности выражение (8.168а), причем это решение единственное (действительно, каждое уравнение (8.179) можно записать в компонентах, например, в базисе $\mathbf{r}_i$, тогда получим линейное невырожденное уравнение относительно компонент тензора T^{ij}, имеющее единственное решение).

Формула (8.168б) для давления следует из (8.177), если инвариант $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ выразить через ρ в соответствии с (8.172):

$$p = \rho \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial I_3} I_3(\mathrm{III} - n) =$$

$$= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \frac{\overset{\circ}{\rho}}{(\mathrm{III} - n)} I_3^{\frac{1}{\mathrm{III} - n} - 1} (n - \mathrm{III})^{3/(\mathrm{III} - n)} I_3(\mathrm{III} - n) = \rho^2 \ (\partial \psi / \partial \rho). \quad (8.180)$$

Нам осталось показать, что полученные определяющие соотношения (8.167а) удовлетворяют принципу материальной симметрии, т.е. что из (8.167а) следует соотношение:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{*-1} \qquad \forall \mathbf{H} \in U. \qquad (8.181)$$

Заметим, что давление p, согласно (8.167б), является функцией только от $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ и θ, и, следовательно, всегда H-индифферентно: $p^* = p$. А поскольку тензор напряжений $\mathbf{T}$ — тоже абсолютно H-индифферентен, то для всех моделей A_n в любой конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$ имеет место соотношение (8.168а):

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = -p^* \mathbf{E} \qquad \forall \mathbf{H} \in U, \quad \mathbf{H}: \ \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}. \qquad (8.182)$$

Подставляя теперь (8.182) в соотношения (8.179), записанные в произвольной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$n = \mathrm{I}: \qquad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}} = -p^* \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}, \qquad (8.183)$$

$$n = \mathrm{II}: \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}} + \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}) = -\frac{1}{2}p(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{O}} + \overset{*}{\mathbf{O}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}) \text{ и др. } \forall \mathbf{H} \in U,$$

находим, что они тождественно выполняются (независимо от того, как преобразуются тензоры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{O}$ при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$!).

Соотношения (8.183) в точности эквивалентны (8.181), следовательно, соотношения (8.181) действительно имеют место при любых унимодулярных H-преобразованиях $\mathbf{H}: \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$. ▲

Замечание 1. Теорема 3.31 показывает, что фактически вместо энергетических тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ для жидких сред используют только соответствующие меры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, иначе говоря, модели A_n и B_n для жидких сред совпадают. Для твердых сред различие моделей A_n и B_n оказывается существенным.

Теорема 3.32. *Для моделей C_n, $n = \mathrm{I, II, IV, V}$, жидких идеальных сред определяющие соотношения (5.1), (5.4), удовлетворяющие принципу материальной симметрии, можно представить в следующем виде:*

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -\dfrac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1}, & (8.184а) \\ p = p(I_3,\theta) = \overset{\circ}{\rho} I_3 \dfrac{\partial\psi}{\partial I_3}\left((n-\mathrm{III})^3 I_3\right)^{1/(\mathrm{III}-n)}(\mathrm{III}-n), & (8.184б) \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, & (8.184в) \\ \psi = \psi(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}),\theta), & (8.184г) \end{cases}$$

причем соотношения для тензора $\mathbf{T}$ во всех этих моделях совпадают между собой и имеют вид (8.168).

Третий инвариант в (8.184) вычисляем от тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$: $I_3 = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$.

▼ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Согласно принципу материальной индифферентности (6.32) для потенциала ψ, в моделях C_n идеальной жидкости должно выполняться следующее соотношение:

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\mathbf{O},\theta) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*,\overset{*}{\mathbf{O}},\theta) \quad \forall \mathbf{H}\in \overset{\circ}{G}_s = U. \tag{8.185}$$

Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ не являются H-инвариантными при унимодулярных преобразованиях, поэтому соотношение (8.76г) не имеет места.

Единственным решением уравнения (8.185) является скалярная функция, зависящая от третьего главного инварианта квазиэнергетической меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, связанной с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ соотношением (2.70):

$$\psi = \psi(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}),\theta). \tag{8.186}$$

Из соотношения (8.172) следует, что инвариант $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ однозначно выражается через отношение плотностей $\rho/\overset{\circ}{\rho}$:

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^{\mathrm{III}-n}. \tag{8.187}$$

Поскольку плотности $\overset{\circ}{\rho}$ и ρ всегда являются H-индифферентными, то и функция $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ будет H-индифферентной при любых унимодулярных преобразованиях, т.е.

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^*) = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) \quad \forall \mathbf{H}\in \overset{\circ}{G}_s = U, \tag{8.188}$$

следовательно, функция (8.186) действительно является решением уравнения (8.185). Единственность решения (8.186) также следует из формулы (8.187), поскольку, как отмечалось выше, унимодулярные H-преобразования фактически определены как преобразования, сохраняющие единственную величину — плотность ρ.

Подставляя функцию (8.186) в определяющие соотношения (5.10), находим квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и тензор $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\ \frac{\partial I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}, \tag{8.189}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho(\partial\psi/\partial\mathbf{O}) \equiv \mathbf{0}. \tag{8.190}$$

Здесь мы учли, что $\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Delta}$.

Используя формулу (8.47) для производной от детерминанта тензора, определяющие соотношения (8.189) можно записать в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\ I_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1}. \tag{8.191}$$

Вводя в формуле (8.191) обозначение для давления

$$\widetilde{p} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\ I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})(\mathrm{III} - n) = p, \tag{8.192}$$

получаем в точности представление (8.184а) для определяющих соотношений моделей C_n идеальной жидкости.

Так как, согласно (8.187), инварианты $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ и $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ совпадают, то давление p, введенное по (8.177), и $\widetilde{p}$, введенное по (8.192), совпадают. Подставляя в (8.192) выражение (8.187) для ρ через $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$, получаем формулу (8.184в).

Покажем теперь, что все четыре определяющих соотношения (8.184а) действительно эквивалентны представлению (8.168а) для тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$. Используя определение квазиэнергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ (см. табл. 3.2) и квазиэнергетических мер $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ (2.70), определяющие соотношения (8.184а) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
n = \mathrm{I}: &\quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{V} = -p\mathbf{V}\cdot\mathbf{V},\\
n = \mathrm{II}: &\quad \frac{1}{2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{V}) = -p\mathbf{V},\\
n = \mathrm{IV}: &\quad \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{V}^{-1}) = -p\mathbf{V}^{-1},\\
n = \mathrm{V}: &\quad \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}^{-1} = -p\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{V}^{-1}.
\end{aligned} \tag{8.193}$$

Нетрудно проверить, что единственным решением каждого из этих линейных уравнений относительно тензора $\mathbf{T}$ действительно является выражение (8.168а).

Поскольку поворотный тензор напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ для идеальной жидкости тождественно равен нулю (см. (8.190)), то из определения (2.51) тензора $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ следует, что для жидкости всегда должно выполняться соотношение

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}. \tag{8.194}$$

Но оно действительно всегда выполнено, поскольку мы показали, что для жидкости тензор напряжений — шаровой (см. (8.168а)).

Нам осталось показать, что полученные определяющие соотношения (8.184а) также удовлетворяют принципу материальной симметрии, т.е. из (8.184а) следует, что должны выполняться соотношения

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^{*} = -\frac{p^*}{n - \mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{*-1} \qquad \forall \mathbf{H} \in U, \tag{8.195}$$

или

$$\begin{aligned} &\text{для } n = \mathrm{I}: \qquad \overset{*}{\mathbf{V}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{V}} = -p^* \overset{*}{\mathbf{V}}{}^2, \\ &\text{для } n = \mathrm{II}: \qquad \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{V}} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} + \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{V}}) = -p^* \overset{*}{\mathbf{V}} \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \tag{8.196}$$

Но эти соотношения (8.196) действительно выполняются, так как тензор $\overset{*}{\mathbf{T}}$, согласно (8.182), тоже шаровой при любых H-преобразованиях $\mathbf{H} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$. ▲

Замечание 2. Из теоремы 3.32 следует, что модели C_n и D_n для идеальных жидких сред совпадают — энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ «самостоятельно» не участвуют в определяющих соотношениях жидкости (только через соответствующую меру $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$).

Подводя итог этому разделу, отметим, что

- все модели A_n, B_n, C_n и D_n идеальных жидких сред эквивалентны и могут быть представлены в форме (8.168),
- тем не менее определяющие соотношения жидкости в форме (8.167) и (8.184) также используют для различных задач МСС.

Замечание 3. Доказательство теорем 3.31 и 3.32 показало, что для выполнения принципа материальной симметрии тензоры, участвующие в определяющих соотношениях, не обязательно должны быть H-индифферентными или H-инвариантными, главное условие — это то, что они должны преобразовываться при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ *согласованным образом* (см. формулы (8.183) и (8.196)).

Отметим еще одно обстоятельство. Принцип материальной симметрии позволил получить явное представление определяющих соотношений идеальных твердых и жидких сред — это формулы (8.168), (8.35), (8.37а), (8.38а), (8.46) и (8.43), в отличие от исходных неявных представлений (5.4) и (5.10).

Упражнения к 3.8

Упражнение 3.8.1. Используя формулу (1.3.31) связи тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, показать, что главные инварианты этих тензоров всегда совпадают:

$$I_\alpha(\mathbf{U}) = I_\alpha(\mathbf{V}), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Упражнение 3.8.2. Используя результаты упр. 3.8.1, показать, что главные инварианты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ также совпадают:

$$I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \quad n = \mathrm{I},\ \ \mathrm{II},\ \ \mathrm{IV},\ \ \mathrm{V},$$

причем

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^3}(I_3(\mathbf{U}))^{n-\mathrm{III}}.$$

Показать, что совпадают также главные инварианты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$:

$$I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Упражнение 3.8.3. Используя результаты упр. 3.2.4, показать, что главные инварианты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ можно выразить через λ_α — собственные значения тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ следующим образом:

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}, \qquad I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^3}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{n-\mathrm{III}},$$

$$I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = \frac{1}{(n - \mathrm{III})^2}((\lambda_1\lambda_2)^{n-\mathrm{III}} + (\lambda_2\lambda_3)^{n-\mathrm{III}} + (\lambda_1\lambda_3)^{n-\mathrm{III}}).$$

Упражнение 3.8.4. Используя результаты упр. 3.8.3, показать, что

$$\frac{\partial I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})}{\partial\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}, \qquad \frac{\partial I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})}{\partial\lambda_\alpha} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}(\lambda_\beta^{n-\mathrm{III}} + \lambda_\gamma^{n-\mathrm{III}}),$$

$$\frac{\partial I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})}{\partial\lambda_\alpha} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}(\lambda_\beta\lambda_\gamma)^{n-\mathrm{III}}, \quad \alpha \ne \beta \ne \gamma \ne \alpha.$$

Упражнение 3.8.5. Показать, что для квазилинейных моделей A_n и B_n (см. п. 3.8.7) тензоры ${}^4\mathbf{P}_G$, $G = A, B$, совпадают с квазилинейным тензором упругости ${}^4\mathbf{M}$, введенным в п. 3.8.6:

$${}^4\mathbf{P}_A = {}^4\mathbf{P}_B = {}^4\mathbf{M},$$

причем для линейных моделей A_n тензор ${}^4\mathbf{M}$ имеет вид

$${}^4\mathbf{M} = J\ {}^4\widetilde{\mathbf{M}}, \qquad J = \rho/\overset{\circ}{\rho},$$

где тензор-константа ${}^4\mathbf{M}$ зависит только от образующих тензоров соответствующей группы симметрии G_s.

Упражнение 3.8.6. Используя результаты (8.168) теорем 3.31 и 3.32, показать, что свободная энергия Гиббса $\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_G$ (3.20) и энтальпия $\overset{(\mathrm{n})}{i}_G$ (3.31) для идеальной жидкости имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_D = \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_B = \psi + \frac{p}{\rho(n-\mathrm{III})}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_A = \psi + \frac{p}{\rho(n-\mathrm{III})}\Big(1 - \frac{I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1})}{n-\mathrm{III}}\Big),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\zeta}_C = \psi + \frac{p}{\rho(n-\mathrm{III})}\Big(1 - \frac{I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1})}{n-\mathrm{III}}\Big).$$

Упражнение 3.8.7. Доказать теорему 3.27 для трансверсально-изотропной среды.

Упражнение 3.8.8. Используя свойства H-индифферентности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^{\bullet}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ (см. п. 3.7.4), доказать, что соотношения (8.145) удовлетворяют принципу материальной симметрии.

Упражнение 3.8.9. Показать, что для моделей A_n и ${}_n$ соотношения (8.119), (8.120) между собственными значениями тензоров напряжений $\overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha$ и λ_α имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha = \overset{\circ(n)}{\sigma}_\alpha = \psi_1 + \frac{\psi_2}{n-\mathrm{III}}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1) + \frac{\varphi_3}{(n-\mathrm{III})^2}(\lambda_\alpha^{(n-\mathrm{III})} - 1)^2,$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad -\psi_2 = \varphi_2 + I_1\varphi_3,$$

где $\varphi_\alpha = \rho(\partial\psi/\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}))$ для моделей A_n и $\varphi_\alpha = \rho(\partial\psi/\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}))$ для моделей ${}_n$.

Упражнение 3.8.10. Используя результаты упр. 3.8.9, доказать теорему 3.28 для моделей A_n и ${}_n$ изотропных упругих сред.

Упражнение 3.8.11. Показать, что соотношения (8.74) для моделей B_n могут быть получены из соотношений (8.59), (8.62) для модели A_n после подстановки в них формулы (2.42).

3.9. Несжимаемые сплошные среды

3.9.1. Определение несжимаемых сред. Рассмотрим особый случай сплошных сред, который достаточно часто встречается на практике.

Определение 3.15. *Сплошную среду называют* н е с ж и м а е м о й, *если в любой актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ ее плотность ρ совпадает с плотностью $\overset{\circ}{\rho}$ в отсчетной конфигурации:*

$$\rho = \overset{\circ}{\rho} = \mathrm{const} \quad \forall\mathcal{K} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{9.1}$$

Существуют как несжимаемые жидкости, так и несжимаемые твердые среды. Собственно жидкостью часто и называют несжимаемую жидкую среду, а если же жидкая среда не является несжимаемой, то ее называют *сжимаемой жидкостью* или *газом*.

Из уравнения неразрывности в переменных Лагранжа (2.1.8) следует, что для несжимаемых сред объем любого элементарного объема dV не изменяется:

$$\rho = \overset{\circ}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad dV = d\overset{\circ}{V}, \tag{9.2}$$

а, следовательно, и объем $|V(t)|$ области, которую занимает несжимаемая среда, не изменяется: $|V(t)| = |\overset{\circ}{V}| = \text{const}$.

Из этого же уравнения неразрывности (2.1.8) следует, что для несжимаемой среды всегда имеется дополнительное условие на градиент деформации:

$$\det \mathbf{F} = 1. \tag{9.3}$$

Используя полярное разложение (1.3.1), находим, что для несжимаемой среды тензоры искажений всегда имеют единичный детерминант:

$$\det \mathbf{V} = \det \mathbf{F} \cdot \det \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{F} = 1, \qquad \det \mathbf{U} = 1. \tag{9.4}$$

Тогда, подставляя эти формулы в (2.41) и (2.70), находим, что детерминант всех энергетических и квазиэнергетических мер деформации тоже имеет всегда постоянное значение:

$$\det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \det \left(\frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{U}^{n-\mathrm{III}}\right) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\det \mathbf{U}^{n-\mathrm{III}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}, \tag{9.5}$$

$$\det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \det \left(\frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}}\right) = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}, \qquad n = \mathrm{I, II, IV, V}. \tag{9.6}$$

3.9.2. Основное термодинамическое тождество для несжимаемых сред. Для несжимаемых сред не все компоненты тензоров $\mathbf{F}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ являются независимыми, так как на эти тензоры наложены дополнительные условия (9.3)–(9.6). Следовательно, для несжимаемых сред уже не имеют место определяющие соотношения (5.4) и (5.10), так как при их выводе использовался факт независимости дифференциалов $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ или $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$.

Для того чтобы найти общий вид определяющих соотношений для несжимаемых сред, преобразуем ОТТ в формах (3.15) и (3.17). Введем две дополнительные скалярные функции, значения которых тождественно равны нулю:

$$\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) = \det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3} = 0, \qquad \gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) = \det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3} = 0, \tag{9.7}$$

причем, в силу формул (9.5) и (9.6), производные этих функций по тензорному аргументу имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}} = \det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1}. \tag{9.8}$$

Так как $\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ и $\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ тождественно равны нулю, то их полные дифференциалы тоже тождественно равны нулю: $d\gamma = 0$. Перепишем основное термодинамическое тождество в формах (3.15) и (3.17), добавив к нему равное нулю слагаемое $\widetilde{p}d\gamma$:

$$\rho d\psi - \widetilde{p}d\gamma - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \rho\eta d\theta + w^* dt = 0, \tag{9.9}$$

и

$$\rho d\psi - \widetilde{p}d\gamma - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \rho\eta d\theta + w^* dt = 0, \tag{9.10}$$

где

$$d\gamma = (\partial\gamma/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = (\partial\gamma/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = 0. \tag{9.11}$$

Здесь мы ввели некоторую ненулевую функцию $\widetilde{p}$, называемую *неопределенным множителем Лагранжа*.

3.9.3. Определяющие соотношения для идеальных несжимаемых сред. Если рассматривается модель A_n идеальных сплошных сред, то ψ является функцией вида (5.1):

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\ \theta). \tag{9.12}$$

Вычисляя дифференциал этой функции и подставляя его в ОТТ (9.9), с учетом формулы (9.11) получаем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho} - \frac{\widetilde{p}}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}}\right) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right) d\theta + \frac{w^*}{\rho} dt = 0. \tag{9.13}$$

За счет выбора множителя Лагранжа $\widetilde{p}$ приращения тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ можно считать снова независимыми и приравнять выражения при $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $d\theta$, dt в (9.13) к нулю, тогда получим:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -(p/(n - \mathrm{III}))\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \qquad \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \end{cases} \tag{9.14}$$

— *определяющие соотношения для моделей A_n несжимаемых идеальных сред*, где

$$p = \widetilde{p}/(n - \mathrm{III})^2. \tag{9.14a}$$

Заменяя в ОТТ (9.13) тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ на $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, приходим к *определяющим соотношениям для моделей B_n несжимаемых идеальных сред*:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -(p/(n - \mathrm{III}))\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \qquad \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta). \end{cases} \tag{9.15}$$

Если же рассматривать модели C_n идеальных сред, то ψ является функцией вида (5.7):

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \tag{9.16}$$

и ОТТ (9.10) можно записать следующим образом:

$$\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}}{\rho} - \frac{\widetilde{p}}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}\Big)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} - \frac{\overset{\circ}{\mathbf{S}}}{\rho}\Big)\cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\big)d\theta + \frac{w^*}{\rho}dt = 0. \tag{9.17}$$

Введение лагранжева множителя $\widetilde{p}$ позволяет рассматривать приращения $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $d\mathbf{O}$, $d\theta$ и dt как независимые, и тогда из (9.17) получаем

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -(p/(n-\mathrm{III}))\;\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\mathbf{O}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \qquad \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \end{cases} \tag{9.18}$$

— *определяющие соотношения для моделей C_n несжимаемых идеальных сред.*

Аналогично заменой $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \to \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ получаем *определяющие соотношения для моделей D_n несжимаемых идеальных сред*:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -(p/(n-\mathrm{III}))\;\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\mathbf{O}), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = 0, \qquad \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta). \end{cases} \tag{9.18a}$$

По аналогии с жидкостью (см. формулы (8.167)), функцию p называют *гидростатическим давлением*. Заметим однако, что для несжимаемых сред давление p, как и неопределенный множитель Лагранжа $\widetilde{p}$, является дополнительной неизвестной функцией и не выражается ни через ρ, ни через $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ или $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$.

3.9.4. Следствие из принципа материальной симметрии для несжимаемых жидких сред. Соотношения (9.14) или (9.18) верны как для твердых, так и для жидких несжимаемых сред. Рассмотрим несжимаемые среды, являющиеся жидкостью.

Теорема 3.33. *Для моделей A_n, $n = \mathrm{I}$, II, IV, V, идеальных несжимаемых жидких сред определяющие соотношения (9.14), удовлетворяющие прин-*

ципу материальной симметрии, могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -(p/(n-\mathrm{III}))\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ \psi = \psi(\theta), \end{cases} \tag{9.19}$$

причем соотношение для тензора истинных напряжений Коши во всех моделях A_n имеет вид

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E}, \tag{9.20}$$

где p не зависит от ρ и является самостоятельной неизвестной функцией.

▼ Поскольку рассматриваемая среда является жидкостью, то как было показано при доказательстве теоремы 3.31, ее свободная энергия ψ может зависеть только от третьего инварианта $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ и θ (формула (8.170)):

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \psi(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}),\ \theta). \tag{9.21}$$

Это утверждение верно для всех жидкостей: сжимаемых и несжимаемых. Но для несжимаемых жидкостей инвариант $I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$ всегда является константой (формула (9.5)), следовательно, в этом случае ψ может изменяться только с изменением температуры, т.е. функцию (9.21) можно представить в виде

$$\psi = \psi(\theta). \tag{9.22}$$

Но тогда $\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \equiv 0$, и соотношения (9.14) для несжимаемых жидкостей действительно принимают вид (9.19). То, что формула (9.20) следует из (9.19), доказываем точно так же, как это было проделано в теореме 3.31.

Заметим, что для несжимаемой жидкости формула (8.168б), связывающая давление p с плотностью ρ, не имеет места, и p является самостоятельной неизвестной функцией. ▲

Теорема 3.34. *Для моделей C_n, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$, идеальных несжимаемых жидких сред определяющие соотношения (9.18), удовлетворяющие принципу материальной симметрии, могут быть представлены в виде*

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -(p/(n-\mathrm{III}))\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1}, \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ \psi = \psi(\theta), \end{cases} \tag{9.23}$$

причем соотношения для тензора **T** *во всех этих моделях совпадают между собой и имеют вид (9.20), а давление p также является самостоятельной неизвестной функцией.*

▼ Доказательство теоремы осуществляем по аналогии с теоремой 3.33. ▲

3.9.5. Представление определяющих соотношений для несжимаемых твердых сред в тензорных базисах. Рассмотрим теперь несжимаемую твердую идеальную среду, которую также называют *несжимаемой упругой* *средой*. Согласно принципу материальной симметрии, такая среда должна обладать некоторой группой симметрии $\widehat{G}_s$ в неискаженной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}$. Как и ранее, будем полагать, что начальная конфигурация $\overset{\circ}{G}_s$ является неискаженной. Если рассматривать модели A_n несжимаемых твердых сред (9.14), то свободная энергия $\psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, \theta)$, согласно формуле (8.28), является функцией инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ тензора $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\psi = \psi(I_1^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \ldots, I_r^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \theta). \tag{9.24}$$

Однако для несжимаемых твердых сред плотность ρ не меняется ($\rho = \overset{\circ}{\rho}$), и поэтому, согласно формуле (2.80), главные инварианты $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ связаны одним соотношением:

$$I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{1}{n - \mathrm{III}} I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) + \frac{I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}})}{(n - \mathrm{III})^2} = 0, \tag{9.25}$$

т.е. из трех инвариантов $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$, $\alpha = 1, 2, 3$, независимыми являются только два. Поскольку, как было отмечено в п. 3.8.4, главные инварианты $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ всегда можно включить в состав функционального базиса $I_\alpha^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ любой ортогональной группы $\overset{\circ}{G}_s$, то для несжимаемых сред функциональный базис содержит только $(r-1)$ инвариант и функция (9.24) имеет следующий вид:

$$\psi = \psi(I_1^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \ldots, I_{r-1}^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \theta). \tag{9.26}$$

Обычно для несжимаемых изотропных и трансверсально-изотропных сред исключают третий главный инвариант $I_3(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ из полного функционального базиса $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ (см. формулы (8.21) и (8.22)), а для ортотропных несжимаемых сред исключают инвариант $I_6^{(O)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}})$ из набора (8.20).

Подставляя свободную энергию (9.26) в (9.14), получаем следующее *общее представление для определяющих соотношений несжимаемых упругих сред в тензорном базисе*:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_\gamma(I_1^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \ldots, I_{r-1}^{(s)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}), \theta) \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}}, \tag{9.27}$$

где

$$\varphi_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi / \partial I_\gamma^{(s)}) \tag{9.28}$$

— аналогично представлению (8.35), (8.36).

В частности, определяющие соотношения для изотропной несжимаемой упругой среды имеют следующий вид (ср. с (8.46)):

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \psi_1\mathbf{E} - \psi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\\ \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1, \qquad \psi_2 = \varphi_2,\\ \varphi_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\gamma), \quad \gamma = 1,2, \quad \psi = \psi(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}),\ I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}),\ \theta).\end{gathered} \tag{9.29}$$

Если принимаются условия нормировки (8.50), (8.51), где $\mathbf{T}^e = -p^e$, то на потенциал ψ накладываются дополнительные условия (сравните их с (8.53)):

$$\varphi_1(0,0,\theta_e) = p_0 - p^e, \quad \psi(0,0,\theta_e) = 0, \tag{9.29а}$$

где p_0 — значение гидростатического давления p в естественном состоянии.

Модели B_n несжимаемых упругих сред приводят к определяющим соотношениям, аналогичным (9.27) и отличающимся от них формальной заменой $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \to \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$:

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1}\varphi_\gamma\frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}},\\ \varphi_\gamma(I_1^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}),\ldots,I_{r-1}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}),\ \theta) = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}).\end{gathered} \tag{9.30}$$

В частности, для моделей B_n изотропных несжимаемых упругих сред имеем

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \psi_1\mathbf{E} - \varphi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \tag{9.31}$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1, \quad \varphi_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\gamma) = \varphi_\gamma(I_1, I_2, \theta), \quad \psi = \psi(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}),\ I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}),\ \theta).$$

Если принимаются условия нормировки (8.50), (8.51), то на потенциал ψ накладываются такие дополнительные условия (сравните с (8.71а)):

$$\varphi_1(a_1,a_2,\theta_e) + (2/(n-\mathrm{III}))\varphi_2(a_1,a_2,\theta_e) = p_0 - p^e, \quad \psi(a_1,a_2,\theta_e) = 0, \tag{9.32}$$

здесь использованы обозначения (8.71б).

Для моделей C_n несжимаемых твердых идеальных сред можно использовать теоремы из п. 3.8.9 и представить свободную энергию в виде (8.102), тогда придем к следующим представлениям определяющих соотношений (9.18) в тензорном базисе:

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1}\varphi_\gamma\frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}},\\ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}),\ \theta) = \overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial I_\gamma^{(s)}}, \quad \alpha = 1,\ldots,r-1.\end{gathered} \tag{9.33}$$

Соотношение (9.18) для поворотного тензора $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ при этом автоматически удовлетворяется.

Если же рассматривать модели C_n несжимаемых изотропных сред, то, согласно (8.104), свободную энергию ψ можно представить в виде функции от трех главных инвариантов $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$. Однако для несжимаемых сред эти три инварианта также связаны соотношением (9.25):

$$I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) + \frac{1}{n - \mathrm{III}} I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) + \frac{1}{(n-\mathrm{III})^2} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) = 0,$$

т.е. только два из них являются независимыми, поэтому ψ можно считать зависящей только от двух инвариантов, например, от I_1 и I_2:

$$\psi = \psi(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \theta). \tag{9.34}$$

Тогда определяющие соотношения (9.23) можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1} + \psi_1 \mathbf{E} - \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \\ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}),\ I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}),\ \theta). \end{gathered} \tag{9.35}$$

Как и для сжимаемых сред, определяющие соотношения (9.29) моделей A_n и (9.35) моделей C_n можно связать с помощью только тензора поворота $\mathbf{O}$, поскольку $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$ (см. упр. 3.8.2).

Определяющие соотношения для моделей D_n (9.18а) в тензорном базисе записывают следующим образом:

$$\begin{gathered} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_\gamma \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}}, \\ \varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{O}),\ \theta) = \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma^{(s)}}, \quad \alpha = 1, \ldots, r-1. \end{gathered} \tag{9.36}$$

Они эквивалентны соотношениям (9.30) и могут быть получены друг из друга умножением на тензор $\mathbf{O}$ (см. (8.106)).

3.9.6. Общее представление определяющих соотношений для всех моделей несжимаемых идеальных твердых сред. Подобно тому, как это было проделано в п. 3.8.10, определяющие соотношения (9.27) для моделей A_n, (9.30) для моделей B_n, (9.33) для моделей C_n и (9.36) для моделей D_n можно записать в единой обобщенной форме — с помощью обобщенных энергетических тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G$ (2.90):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = -\frac{p}{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_G^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_\gamma \mathbf{I}_{\gamma G}^{(s)}. \tag{9.37}$$

Здесь использованы обозначения (8.109), (8.110).

Эти соотношения можно преобразовать к форме (8.111), явно выразив тензор истинных напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G(\mathbf{F}, \theta), \tag{9.38}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G(\mathbf{F}, \theta) \equiv \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_\gamma \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_{\gamma G}. \tag{9.39}$$

Остальные обозначения приведены в п. 3.8.10.

3.9.7. Линейные модели идеальных несжимаемых упругих сред. В качестве примера рассмотрим линейные модели идеальных упругих изотропных сред, для которых свободная энергия ψ (9.29) или (9.30) является квадратичной функцией от соответствующих инвариантов $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ или $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$. Для изотропных линейных моделей A_n несжимаемых сред ψ имеет такой же вид (8.59), как и для соответствующих сжимаемых изотропных сред, но определяющие соотношения изменяются за счет появления гидростатического давления p;

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\bar{\psi}^0 + \frac{l_1 + 2l_2}{2} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) - 2l_2 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) + \bar{m} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (\bar{m} + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}))\mathbf{E} + 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}.
\end{gathered} \tag{9.40}$$

В силу несжимаемости среды, коэффициент $J = \rho/\overset{\circ}{\rho} = 1$.

Для того, чтобы эти определяющие соотношения удовлетворяли условиям (8.50),(8.51) в естественной конфигурации $\mathcal{K}^e$ при $\mathbf{T}^e = -p^e$, в $\mathcal{K}^e$ должны выполняться соотношения (9.29а), которые в данном случае принимают вид

$$p_0 = p^e + \bar{m}, \qquad \bar{\psi}^0 = 0, \tag{9.41}$$

где p_0 — значение функции p в $\mathcal{K}^e$.

Для изотропных линейных моделей B_n несжимаемых сред свободная энергия ψ имеет вид (8.72), так же как и для сжимаемых сред, а определяющие соотношения подобны (9.40):

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\psi^0 + \frac{l_1 + 2l_2}{2} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) - 2l_2 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) + m I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (m + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}))\mathbf{E} + 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}.
\end{gathered} \tag{9.42}$$

Условия нормировки (8.50), (8.51) приводят к ограничениям (9.32) на вид потенциала ψ, которые в данном случае устанавливают соотношения между ψ^0, m, l_1, l_2 и p_0:

$$p_0 = p^e + m + \frac{3l_1 + 2l_2}{n - \mathrm{III}}, \qquad \psi^0 = -\frac{3(3l_1 + 2l_2)}{2\overset{\circ}{\rho}(n - \mathrm{III})^2} - \frac{3m}{(n - \mathrm{III})\overset{\circ}{\rho}}. \tag{9.43}$$

Соотношения (9.40), (9.41) моделей A_n и (9.42), (9.43) моделей B_n являются полностью эквивалентными (как и для сжимаемых сред) и могут быть получены одна из другой с помощью замены $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - (1/(n - \mathrm{III}))\mathbf{E}$ (см. упр. 3.9.1). Эти модели содержат по три независимые константы m, l_1 и l_2 — на одну больше, чем соответствующие модели A_n (8.59) и B_n (8.74) для сжимаемых сред.

Рассматривая в моделях (9.40), (9.42) частные случаи значений констант, например, полагая $m = 0$ и $\bar{m} = 0$, из условий нормировки (9.41) и (9.43) будем получать новые значения для p_0 и $\bar{\psi}^0$, ψ^0, при этом модели A_n и B_n уже не будут эквивалентными.

Наиболее широко на практике используют модели B_n (см. (9.42)), в которых полагают

$$l_1 + 2l_2 = 0, \qquad l_2 = -(\mu/2)(1-\beta)(n - \mathrm{III})^2, \qquad m = \mu(1+\beta)(n - \mathrm{III}), \tag{9.44}$$

где μ и β — две новые независимые константы, причем из условий нормировки (9.43) в этом случае имеем:

$$\psi^0 = -6\mu/\overset{\circ}{\rho}, \qquad p_0 = p^e + \mu(3-\beta)(n - \mathrm{III})^2. \tag{9.45}$$

Соотношения (9.42) в этом случае можно представить в следующем виде (см. упр. 3.9.2):

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \mu\Big((1+\beta)((n-\mathrm{III})I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) - 3) + (1-\beta)((n-\mathrm{III})^2 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) - 3)\Big), \\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\Big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\Big)\mathbf{E} - (1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big).
\end{gathered} \tag{9.46}$$

Соотношения (9.46) при $n = \mathrm{IV}$ называют *моделью К.Ф.Черных*, которая в частном случае $\beta = 1$ приводит к *модели Бартенева–Хазановича*. Соотношения (9.46) при $n = \mathrm{V}$ называют *моделью Муни*, в частном случае $\beta = 1$ она приводит к *модели Трелоара* (*неогуковской модели*).

3.9.8. Представление моделей B_n и D_n несжимаемых изотропных упругих сред в собственном базисе. Для несжимаемых сред три собственных значения λ_i уже не являются независимыми, потому что они связаны соотношениями (9.4):

$$\gamma = I_3(\mathbf{U}) - 1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 1 = 0. \tag{9.47}$$

Подобно тому, как это сделано в п. 3.9.2, можно ввести множитель Лагранжа p и переписать основное термодинамическое тождество (9.9) в виде

$$\rho d\psi - p d\gamma - \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_\alpha \lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}} d\lambda_\alpha + \rho\eta d\theta = 0, \tag{9.48}$$

где

$$d\gamma = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial\gamma}{\partial\lambda_\alpha} d\lambda_\alpha = 0, \tag{9.49}$$

здесь мы использовали выражение (8.141a) для мощности напряжений $w_{(i)}$. Тогда $d\lambda_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, можно снова рассматривать как независимые.

После вычисления производных функции (9.47):

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda_\alpha} = \lambda_\beta\lambda_\gamma = \frac{1}{\lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \tag{9.50}$$

и подстановки их в (9.48), получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha} - \frac{p}{\lambda_\alpha} - \overset{\circ(n)}{\sigma}{}_\alpha\lambda_\alpha^{n-\mathrm{IV}}\right)d\lambda_\alpha + \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)d\theta = 0. \tag{9.51}$$

В результате находим следующие определяющие соотношения для несжимаемых сред (модели B_n и D_n):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}{}_\alpha = -p\lambda_\alpha^{\mathrm{III}-n} + \overset{\circ}{\rho}\lambda_\alpha^{\mathrm{IV}-n}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,3, \quad n = \mathrm{I},\ldots,\mathrm{V}, \tag{9.52}$$

или с учетом (8.141):

$$\sigma_\alpha = -p + \overset{\circ}{\rho}\lambda_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_\alpha}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\sigma}{}_\alpha = \lambda_\alpha^{\mathrm{III}-n}\sigma_\alpha. \tag{9.53}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.35. *Определяющие соотношения (9.29), (9.35) для несжимаемых изотропных сред можно записать в виде трех скалярных соотношений (9.53) между σ_α и λ_α.*

В качестве примера определяющих соотношений в собственном базисе, рассмотрим потенциалы (9.46) для несжимаемых сред и перейдем от I_α к λ_α по формуле из упр. 3.8.3:

$$B_{\mathrm{I}},\ B_{\mathrm{V}}: \qquad \psi = \psi_0 + \mu(1+\beta)(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) + \\ + \mu(1-\beta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \tag{9.54}$$

$$B_{\mathrm{II}},\ B_{\mathrm{IV}}: \qquad \psi = \psi_0 + \mu(1+\beta)(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} - 3) + \\ + \mu(1-\beta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3). \tag{9.55}$$

Здесь мы воспользовались условием несжимаемости $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Второй инвариант I_2 можно выразить следующим образом:

$$4I_2(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}) = \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2}\lambda_3^{-2} + \lambda_1^{-2}\lambda_3^{-2} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \tag{9.56}$$

Подставляя (9.54) и (9.55) в (9.53), получаем соответствующие определяющие соотношения в собственном базисе:

$$B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{V}}: \quad \sigma_\alpha = -p + 2\mu((1-\beta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (1+\beta)(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2})), \tag{9.57}$$

$$B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{IV}}: \quad \sigma_\alpha = -p + \mu((1-\beta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - (1-\beta)(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1})). \tag{9.58}$$

Упражнения к 3.9

Упражнение 3.9.1. Показать, что линейные модели A_n (9.40), (9.41) и B_n (9.42), (9.43) несжимаемых сред эквивалентны между собой.

Упражнение 3.9.2. Доказать, что из соотношений (9.42) следуют соотношения (9.46), если приняты допущения модели (9.44).

3.10. Принцип материальной индифферентности

3.10.1. Жесткое движение. Перейдем теперь к рассмотрению еще одного важнейшего принципа, упоминавшегося в разд. 3.1, — принципа материальной индифферентности. Кратко, этот принцип заключается в том, что определяющие соотношения сплошной среды не должны зависеть от выбора системы отсчета, в которой рассматриваются эти соотношения.

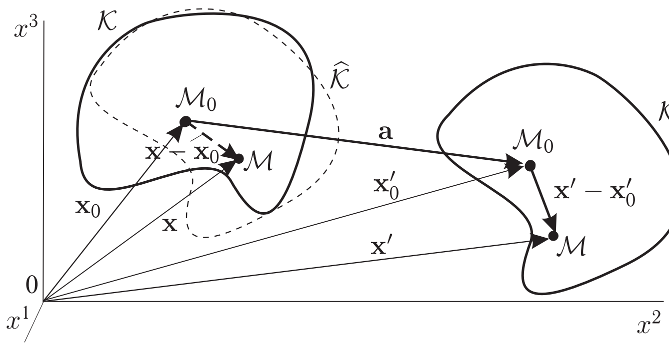

Рис. 3.5. Жесткое движение сплошной среды

Если принцип материальной симметрии предполагает изменение отсчетной конфигурации: $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, то, согласно принципу материальной индифферентности, рассматриваются специальные — жесткие движения актуальной конфигурации: $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$.

Дадим определение *жесткого движения* сплошной среды. Выберем в конфигурации $\mathcal{K}$ (рис. 3.5) произвольную точку $\mathcal{M}_0$ с радиусом-вектором $\mathbf{x}_0$ (не путать с $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$) и совершим переход в конфигурацию $\widehat{\mathcal{K}}$, которая отличается от $\mathcal{K}$ только поворотом как жесткого целого вокруг точки $\mathcal{M}_0$. Тогда произвольный вектор $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ из $\mathcal{K}$ перейдет в вектор $\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$ в $\widehat{\mathcal{K}}$, причем

$$\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{Q}(t), \tag{10.1}$$

где $\mathbf{x}$ и $\widehat{\mathbf{x}}$ — координаты одной и той же точки $\mathcal{M}$ в $\mathcal{K}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$, а $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор поворота,:

$$\mathbf{Q} = Q^{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \qquad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \tag{10.2}$$

Здесь Q^{ij} — ортогональная матрица поворота.

Далее перейдем от $\widehat{\mathcal{K}}$ к следующей конфигурации $\mathcal{K}'$, отличающейся от $\widehat{\mathcal{K}}$ только параллельным переносом на вектор $\mathbf{a}$, тогда радиус-вектор точки $\mathcal{M}$ в $\mathcal{K}'$ вычисляют следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{Q}(t), \tag{10.3}$$

или

$$\mathbf{x}'(X^i, t) = \mathbf{x}'_0(X^i_0, t) + \big(\mathbf{x}(X^i, t) - \mathbf{x}_0(X^i_0, t)\big) \cdot \mathbf{Q}(t), \tag{10.4}$$

где X^i — лагранжевы координаты точки $\mathcal{M}$, X^j_0 — точки $\mathcal{M}_0$, а $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}$ — радиус-вектор точки $\mathcal{M}_0$ в $\mathcal{K}'$, являющейся мгновенным центром поворота. Тензор поворота $\mathbf{Q}(t)$ и радиусы-векторы $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(t)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{x}}'(t)$ зависят от t.

Движения, удовлетворяющие уравнению (10.4), называют *жесткими движениями* сплошной среды.

3.10.2. S-индифферентные и S-инвариантные тензоры. Пусть произвольный тензор $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ задан в точке $\mathbf{x}$ в конфигурации $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = A^{i_1 \ldots i_n} \mathbf{r}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}_{i_n}, \tag{10.5}$$

где $\mathbf{r}_i$ — локальный базис в $\mathcal{K}$.

Тензор $\mathbf{A}$ называют *индифферентным* относительно жесткого движения (10.4) или *S-индифферентным* (от слова solid — твердый), если при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ определен по тем же правилам, что и $\mathbf{A}$, но только в $\mathcal{K}'$, новый тензор $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = A'^{i_1 \ldots i_n} \mathbf{r}'_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}'_{i_n},$$

для которого

$$A^{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}, t) = A'^{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}', t), \tag{10.6}$$

где $\mathbf{r}'_i$ — локальный базис в $\mathcal{K}'$.

Компоненты S-индифферентного тензора $\mathbf{A}$ движутся вместе с векторами локального базиса, т.е. «вморожены» в сплошную среду.

Тензор $\mathbf{A}$ называют *инвариантным относительно жесткого движения* (10.4) или *S-инвариантным*, если

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \tag{10.7}$$

Понятие инвариантности тензора относительно жесткого движения, очевидно, не совпадает с определением тензора как инвариантного объекта, так как при переходе $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ получаем, вообще говоря, различные тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, а их совпадение является лишь некоторым условием на тензор $\mathbf{A}$.

Продифференцируем (10.4) по X^i, тогда

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial X^i} = \mathbf{r}'_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.8}$$

Таким образом, при жестком движении векторы локального базиса преобразуются по закону (10.8), а само определение S-индифферентности тензора (10.6) можно записать в виде:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = A'^{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}', t) \mathbf{r}'_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}'_{i_n} = A^{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}, t) \mathbf{r}_{i_1} \cdot \mathbf{Q} \otimes \ldots \mathbf{r}_{i_n} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.9}$$

Для скаляра φ S-индифферентность означает

$$\varphi'(\mathbf{x}', t) = \varphi(\mathbf{x}, t), \tag{10.10}$$

для вектора $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \tag{10.11}$$

для тензора второго ранга $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = A'^{i_1 i_2} \mathbf{r}'_{i_1} \otimes \mathbf{r}'_{i_2} = A^{i_1 i_2} \mathbf{r}_{i_1} \cdot \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_{i_2} \cdot \mathbf{Q} = \\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot A^{i_1 i_2} \mathbf{r}_{i_1} \otimes \mathbf{r}_{i_2} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.12}$$

Вектор $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, согласно (10.4), является S-индифферентным.

Рассмотрим другие примеры.

3.10.3. Плотность и градиент деформации. Плотность ρ является S-индифферентным скаляром. Действительно, при движении из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ выполняется уравнение (2.1.6):

$$\rho dV = \rho' dV', \tag{10.13}$$

где ρ' и dV' — плотность и элементарный объем в конфигурации $\mathcal{K}'$, но при жестких движениях $dV' = dV$ и, следовательно,

$$\rho'(\mathbf{x}', t) = \rho(\mathbf{x}, t). \tag{10.14}$$

Локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$ S-индифферентны в силу (10.8).

Градиент деформации $\mathbf{F}'$ в $\mathcal{K}'$ определяется так же, как и $\mathbf{F}$ в $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{r}'_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i\prime} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}'_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \tag{10.15}$$

и очевидно не является S-индифферентным тензором, так как при жестких движениях отсчетная конфигурация не изменяется: $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'^{i} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i}$.

Транспонированный градиент деформации также не является S-индифферентным, так как

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i\prime} \otimes \mathbf{r}'_i = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i} \otimes \mathbf{r}_i \cdot \cdot\, \mathbf{Q} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.16}$$

Не являются S-индифферентными и обратные градиенты:

$$\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}\prime} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime})^{-1} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}-1}, \tag{10.17а}$$

$$\mathbf{F}^{-1\prime} = (\mathbf{F}')^{-1} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.17б}$$

Локальные векторы взаимного базиса S-индифферентны, так как

$$\mathbf{r}^{i\prime} = \mathbf{r}^{j\prime} \delta^i_j = \mathbf{r}^{j\prime} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'_j \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i\prime} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}\prime} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i\prime} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}^i. \tag{10.18}$$

Единичный тензор $\mathbf{E} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$ является, очевидно, S-индифферентным и одновременно S-инвариантным.

С помощью (10.18) можно определить набла-оператор $\boldsymbol{\nabla}'$ в $\mathcal{K}'$:

$$\boldsymbol{\nabla}' = \mathbf{r}'^{i} (\partial / \partial X^i). \tag{10.19}$$

Из (10.18) и (10.19) очевидно следует, что

$$\boldsymbol{\nabla}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \qquad \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial X^i} = \bar{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10.19a}$$

3.10.4. Тензоры деформации. Левый тензор деформации Альманзи является S-индифферентным, так как

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2}(\mathbf{E}' - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{F}^{-1\prime}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}' - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.20}$$

Правый тензор Альманзи S-инвариантен:

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \frac{1}{2}(\mathbf{E}' - \mathbf{F}^{-1\prime} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}\prime}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\Lambda}. \tag{10.21}$$

Левый тензор деформации Коши–Грина S-инвариантен, так как

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{F}' - \mathbf{E}') = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \mathbf{C}. \tag{10.22}$$

Правый тензор деформации Коши–Грина является S-индифферентным:

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{2}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} - \mathbf{E}') = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.23}$$

Правый тензор искажений $\mathbf{U}$ S-инвариантен. В самом деле, по определению полярного разложения формула (10.16) преобразования $\mathbf{F}$ имеет вид:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{O}' \cdot \mathbf{U}',$$

но так как $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$ — ортогонален, а полярное разложение единственно, то

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' \quad \text{и} \quad \mathbf{O}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}. \tag{10.24}$$

Отсюда следует S-инвариантность $\mathbf{U}$. Тензор поворота $\mathbf{O}$, сопровождающий деформацию, не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным.

Аналогично, используя определение $\mathbf{V}$ и связь $\mathbf{O}'$ и $\mathbf{Q}$, имеем

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{O}' = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O},$$

т.е. получаем, что

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

Откуда следует S-индифферентность тензора $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.25}$$

Из (10.24) и (10.25) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.36. *Все энергетические тензоры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ *и энергетические меры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, *пропорциональные степени* $\mathbf{U}^{n-\mathrm{III}}$, *являются* S-*инвариантными, а все квазиэнергетические тензоры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ *и квазиэнергетические меры деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, *пропорциональные степени* $\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}}$, *являются* S-*индифферентными*, $n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}$.

Тензоры $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}}$ и $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}}$ будут рассмотрены в п. 3.10.7.

3.10.5. Тензоры напряжений. Тензор напряжений Коши является S-индифферентным. Для доказательства этого утверждения воспользуемся соотношением Коши (2.2.22): $\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$. По определению вектор усилий $\mathbf{t}_n$ является «следящим», т.е. движется вместе с площадкой $d\Sigma$ при любых движениях, следовательно, он является S-индифферентным. Но $\mathbf{n}$ также движется вместе с площадкой, следовательно, $\mathbf{n}$ тоже S-индифферентен. Тогда

$$\mathbf{t}'_n = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}, \tag{10.26}$$

откуда

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}, \tag{10.27}$$

т.е. $\mathbf{T}$ — действительно S-индифферентен.

Тензор Пиолы–Кирхгофа не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным, так как

$$\mathbf{P}' = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1\prime} \cdot \mathbf{T}' = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.28}$$

Теорема 3.37. *Все энергетические тензоры напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ *являются S-инвариантными, а все квазиэнергетические тензоры напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *являются S-индифферентными:*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}' = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Q}, \qquad n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}. \tag{10.29}$$

▼ Действительно, по определению тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (см. табл. 3.1) имеем

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}{}' = \mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}},$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}}{}' = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{O}' + \mathbf{O}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{F}'\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} + \\ + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}\Big) = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}}, \tag{10.30}$$

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}{}' = \mathbf{O}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{O}' = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}} \quad \text{и т.д.,}$$

а по определению тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ (см. табл. 3.3) получаем

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}}{}' = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Q},$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}}{}' = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}' \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{V}'\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}\Big) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Q}, \tag{10.31}$$

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}}{}' = \mathbf{T}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Q} \quad \text{и т.д.} \ \blacktriangle$$

3.10.6. Вектор скорости при жестком движении.

Теорема 3.38. *Вектор скорости* $\mathbf{v}$ *не является* S*-индифферентным.*

▼ Используя определение (1.4.10) и формулу (10.4), получаем

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d\mathbf{x}'_0}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{10.32}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, а $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{x}_0/dt$ — скорость точки $\mathcal{M}_0$ (не зависит от X^i). Из (10.32) действительно следует, что вектор $\mathbf{v}$ не является S-индифферентным. ▲

3.10.7. Тензоры скоростей деформации и вихря при жестких движениях.

Теорема 3.38а. *Тензор скоростей деформации* $\mathbf{D}$ *является* S*-индифферентным, а тензор вихря* $\mathbf{W}$ *не является ни* S*-индифферентным, ни* S*-инвариантным.*

▼ Вследствие соотношения (10.32) получаем

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}\prime} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})' = \mathbf{r}^{i\prime} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial X^i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}^i \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^i} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_i\right) =$$
$$= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \tag{10.33}$$

$$\mathbf{L}' = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}\prime} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial X^i} \otimes \mathbf{r}^{i\prime} = \left(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^i} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_i\right) \otimes \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{Q} =$$
$$= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.34}$$

Суммируя (10.33) и (10.34), находим

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})' + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v})^{\mathrm{T}\prime} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.35}$$

Тензор вихря преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{W}' = \frac{1}{2}((\boldsymbol{\nabla}' \otimes \mathbf{v}')^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}' \otimes \mathbf{v}') = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} =$$
$$= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}. \ \blacktriangle \tag{10.36}$$

3.10.8. Коротационные производные при жестких движениях.

Теорема 3.39. *Полная производная любого* S*-инвариантного тензора по времени является* S*-инвариантной.*

▼ Пусть тензор $\boldsymbol{\Omega}$ является S-инвариантным, тогда

$$\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} \quad \text{и} \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}' = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega}. \ \blacktriangle \tag{10.37}$$

Следовательно, полные производные энергетических тензоров деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ и энергетических тензоров напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ по времени являются S-инвариантными.

Теорема 3.40. *Производная любого S-индифферентного тензора $\mathbf{\Omega}$ по времени не является ни S-индифферентной, ни S-инвариантной.*

▼ Для тензора $\mathbf{\Omega}$ получаем

$$(\mathbf{\Omega}')^{\bullet} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q})^{\bullet} = \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{Q}. \ \blacktriangle \quad (10.38)$$

В силу S-инвариантности тензоров $\mathbf{U}$ и $\dot{\mathbf{U}}$, тензор $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{C}} = \mathbf{B}$, определенный соотношениями (1.4.136), будет также S-инвариантен, а тензор $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}} = \mathbf{Y}$, определенный соотношениями (4.1.137) не является ни S-инвариантным, ни S-индифферентным, так как он зависит от не S-индифферентного тензора $\dot{\mathbf{V}}$. Вместо тензора $\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{A}} = \mathbf{Y}$ для изотропных сред обычно используют энергетически эквивалентный ему тензор (см. теорему 3.28) Генки $\mathbf{H}$ (1.3.31), который уже S-индифферентен.

В самом деле, собственные значения λ_α тензора $\mathbf{U}$ не изменяются при движениях $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, поскольку сам $\mathbf{U}$ не изменяется, но так как λ_α являются и собственными значениями тензора $\mathbf{V}$, то $\mathbf{V}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{V}' = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}'_\alpha \otimes \mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{Q}.$$

Отсюда находим, что

$$\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p}_\alpha$$

— собственные векторы $\mathbf{p}_\alpha$ являются S-индифферентными.

Тензор Генки (1.3.31) в $\mathcal{K}'$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}' = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{p}'_\alpha \otimes \mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{H}$ действительно является S-индифферентным.

Очевидно, что тензор $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ (1.3.31) S-инвариантен.

Чтобы получить S-индифферентные скоростные характеристики от S-индифферентного тензора, надо использовать коротационные (объективные) производные по времени, которые были введены в разд. 1.5.

Теорема 3.41. *Производные Олдройда любого S-индифферентного вектора $\mathbf{a}$ и любого S-индифферентного тензора $\mathbf{T}$ также являются S-индифферентными.*

▼ Из (1.5.18) получаем

$$(\mathbf{a}')^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{a}}' - \mathbf{a}' \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}\prime} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q})^{\bullet} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{a}} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{Ol}}, \quad (10.39)$$

и

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}')^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{T}}' - \mathbf{T}' \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}\prime} - \mathbf{L}' \cdot \mathbf{T}' = (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q})^{\bullet} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} -\\ - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} =\\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}} -\\ - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^{\mathrm{Ol}} \cdot \mathbf{Q}. \blacktriangle\end{aligned} \tag{10.40}$$

Производные Олдройда любого S-инвариантного вектора $\mathbf{a}$ и любого S-инвариантного тензора $\mathbf{\Pi}$ не являются ни S-инвариантными, ни S-индифферентными.

Теорема 3.42. *Производные Коттера–Ривлина любого S-индифферентного вектора $\mathbf{a}$ и любого S-индифферентного тензора $\mathbf{T}$ также являются S-индифферентными.*

▼ Из (1.5.19) получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}')^{\mathrm{CR}} = \dot{\mathbf{a}}' + \mathbf{L}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{a}' = (\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q})^{\bullet} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} =\\ = \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} - \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{CR}},\end{aligned} \tag{10.41}$$

а из (1.5.20):

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}')^{\mathrm{CR}} = \dot{\mathbf{T}}' + \mathbf{L}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{L}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} +\\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} +\\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \cdot\, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} =\\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^{\mathrm{CR}} \cdot \mathbf{Q}. \blacktriangle\end{aligned} \tag{10.42}$$

Производная Коттера–Ривлина любого S-инвариантного вектора (или любого S-инвариантного тензора) также не является ни S-инвариантной, ни S-индифферентной.

Теорема 3.43. *Смешанные левая и правая коротационные производные любого S-индифферентного тензора $\mathbf{T}$ являются S-индифферентными.*

▼ Из (1.5.23) получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}')^{d} = \dot{\mathbf{T}}' - \mathbf{L}' \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{L}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}} -\\ - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} +\\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^{d} \cdot \mathbf{Q}\end{aligned} \tag{10.43}$$

и

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}')^{D} = \dot{\mathbf{T}}' + \mathbf{L}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}' - \mathbf{T}' \cdot \mathbf{L}'^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} +\\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} +\\ + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^{D} \cdot \mathbf{Q}. \blacktriangle\end{aligned} \tag{10.44}$$

Смешанные коротационные производные любого S-инвариантного тензора не являются ни S-инвариантными, ни S-индифферентными.

Теорема 3.44. *Тензор поворота $\mathbf{O}_U$ и спин правого тензора искажений $\boldsymbol{\Omega}_U$, определенные по формулам (1.4.89), являются S-инвариантными.*

▼ Так как правый тензор искажений $\mathbf{U}$ является S-инвариантным, т.е. не изменяется при жестком движении, его собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ также не изменяются:

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}'_i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i. \qquad (10.45)$$

Вследствие соотношения (10.37), полная производная S-инвариантного вектора $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ по времени также является S-инвариантной:

$$\dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}{}'_i = \dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}_i. \qquad (10.46)$$

Таким образом, получаем

$$\boldsymbol{\Omega}'_U = \dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}{}'_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}'^i = \dot{\overset{\circ}{\mathbf{p}}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i = \boldsymbol{\Omega}_U, \qquad \mathbf{O}'_U = \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}'_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i = \mathbf{O}_U. \ \blacktriangle \qquad (10.47)$$

Теорема 3.45. *Производная в собственном базисе правого тензора искажений, примененная к любому S-инвариантному вектору $\mathbf{a}$ или тензору $\boldsymbol{\Pi}$, является S-инвариантной.*

▼ Из (1.5.25) и (1.5.26) получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}')^U &= \dot{\mathbf{a}}' + \mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\Omega}'_U = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U = \mathbf{a}^U, \\ (\boldsymbol{\Pi}')^U &= \dot{\boldsymbol{\Pi}}' - \boldsymbol{\Omega}'_U \cdot \boldsymbol{\Pi}' + \boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{\Omega}'_U = \dot{\boldsymbol{\Pi}} - \boldsymbol{\Omega}_U \cdot \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Omega}_U = \boldsymbol{\Pi}^U. \ \blacktriangle \end{aligned} \qquad (10.48)$$

Теорема 3.46. *Тензор поворота $\mathbf{O}_V$ и спин левого тензора искажений $\boldsymbol{\Omega}_V$, определенные по формулам (1.4.91), не являются ни S-индифферентными, ни S-инвариантными.*

▼ Из соотношения (1.4.96) между $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_U$ и $\mathbf{O}_V$ получаем

$$\mathbf{O}' = \mathbf{O}'_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}\prime}. \qquad (10.49)$$

Так как тензор поворота $\mathbf{O}$ преобразуется по формуле (10.24), то имеем

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}'_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}'_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}_V \cdot \mathbf{O}_U^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, тензор поворота $\mathbf{O}_V$ не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным:

$$\mathbf{O}'_V = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_V. \qquad (10.50)$$

Спин левого тензора искажений $\boldsymbol{\Omega}_V$, определенный по формуле (1.4.91) с помощью тензора поворота $\mathbf{O}_V$, преобразуется при жестком движении следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}'_V = \dot{\mathbf{O}}'_V \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}\prime} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}}_V \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_V \cdot \mathbf{O}_V^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_V \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}. \end{aligned} \qquad (10.51)$$

Таким образом, $\boldsymbol{\Omega}'_V$ не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным. ▲

Теорема 3.47. *Производная любого S-индифферентного вектора* $\mathbf{a}$ *или тензора* $\mathbf{T}$ *в собственном базисе левого тензора искажений является S-индифферентной.*

▼ Из (1.5.29) получаем

$$(\mathbf{a}')^V = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q})^\bullet + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Omega}'_V = \dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}_V\cdot\mathbf{Q} - \\ - \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\Omega}_V)\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{a}^V\cdot\mathbf{Q}, \quad (10.52)$$

и

$$(\mathbf{T}')^V = \dot{\mathbf{T}}' - \boldsymbol{\Omega}'_V\cdot\mathbf{T}' + \mathbf{T}'\cdot\boldsymbol{\Omega}'_V = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q} + \\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}_V\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q} - \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q} + \\ + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}_V\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} = \\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot(\dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_V\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\Omega}_V)\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^V\cdot\mathbf{Q}. \ \blacktriangle \quad (10.53)$$

Теорема 3.48. *Спин* $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, *сопровождающий деформацию, не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным.*

▼ Используя (10.24), получаем

$$\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{O}}'\cdot\mathbf{O}'^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} = \\ = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}. \ \blacktriangle \quad (10.54)$$

Теорема 3.49. *Спиновая производная, определенная по формулам (1.5.36) и (1.5.37), для любого S-индифферентного объекта является S-индифферентной.*

▼ Для любого S-индифферентного вектора из (1.5.38) получаем

$$\mathbf{a}'^S = \dot{\mathbf{a}}' + \mathbf{a}'\cdot\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{Q} + \\ + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} = (\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{a}^S\cdot\mathbf{Q}. \quad (10.55)$$

Аналогично для любого S-индифферентного тензора из (1.5.39) находим

$$\mathbf{T}^{S\prime} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^S\cdot\mathbf{Q}. \quad \blacktriangle \quad (10.56)$$

Теорема 3.50. *Производная Яуманна является S-индифферентной, если она применена к любому S-индифферентному вектору или тензору.*

▼ Для любого S-индифферентного вектора из (1.5.32) находим

$$(\mathbf{a}')^J = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q})^J = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q})^\bullet + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{W}' = \dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{Q}} + \\ + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}) = (\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{W})\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{a}^J\cdot\mathbf{Q} = (\mathbf{a}^J)'. \quad (10.57)$$

Аналогично можно убедиться, что производная $\mathbf{T}^J$ (1.5.33) является S-индифферентной:

$$(\mathbf{T}')^J = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^J\cdot\mathbf{Q}. \quad \blacktriangle \quad (10.58)$$

В табл. 3.12 представлены сводные данные об S-индифферентности и S-инвариантности основных тензоров.

Таблица 3.12. Сводная таблица основных S-инвариантных и S-индифферентных тензоров

Тензоры и векторы	S-индифферентность	S-инвариантность
$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i$	$-$	$+$
$\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}^i$	$+$	$-$
$\mathbf{E}$	$+$	$+$
$\mathbf{F}$	$-$	$-$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$	$-$	$+$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$	$+$	$-$
$\mathbf{T}$	$+$	$-$
$\mathbf{P}$	$-$	$-$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$	$-$	$+$
$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$	$+$	$-$
$\mathbf{v}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{W}$	$-$	$-$
$\mathbf{D}$	$+$	$-$
$\mathbf{B}^h$, $h = \{\cdot, U\}$ если $\mathbf{B}$ — S-инвариантен	$-$	$+$
$\mathbf{B}^h$, $h = \{\mathrm{Ol}, \mathrm{CR}, d, D, V, S, J\}$, если $\mathbf{B}$ — S-индифферентен	$+$	$-$
$\mathbf{O}_U$, $\mathbf{\Omega}_U$	$-$	$+$
$\mathbf{O}_V$, $\mathbf{\Omega}_V$, $\mathbf{\Omega}$	$-$	$-$

3.10.9. Утверждение принципа материальной индифферентности.

Аксиома 15 (принцип материальной индифферентности, или принцип объективности). *При жестком движении все универсальные законы механики сплошной среды в дифференциальной форме (2.9.1), а также определяющие соотношения (4.9), связывающие активные* Λ *и реактивные* $\mathcal{R}$ *переменные, не изменяются. Иначе говоря, если в конфигурации* $\mathcal{K}$ *выполнены уравнения (2.9.1) и определяющие соотношения*

$$\Lambda = \breve{f}(\mathcal{R}), \tag{10.59}$$

то в $\mathcal{K}'$ *должны выполняться следующие соотношения:*

$$\rho' \frac{d' \bar{A}'_\alpha}{dt} = \boldsymbol{\nabla}' \cdot \bar{B}'_\alpha + \rho' C'_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, 6, \tag{10.60}$$

а также

$$\Lambda' = \breve{f}(\mathcal{R}'), \tag{10.61}$$

где $\breve{f}$ — один и тот же оператор.

3.10.10. Материальная индифферентность уравнения неразрывности. Установим ограничения, которые накладывает принцип материальной индифферентности на уравнение неразрывности (см. систему (2.9.1) при $\alpha = 1$).

В силу (10.14), плотность ρ всегда является S-инвариантной. Поэтому, по теореме 3.39, получаем

$$\rho' \frac{d}{dt}(1/\rho') = \rho \frac{d}{dt}(1/\rho). \tag{10.62}$$

В соответствии с результатами упр. 3.10.1,

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{v}' = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}, \tag{10.63}$$

в итоге, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.51. *Принцип материальной индифферентности всегда выполняется для уравнения неразрывности, т.е. из (2.9.1) при $\alpha = 1$ всегда получаем, что*

$$\rho' \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho'}\right) = \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{v}'. \tag{10.64}$$

3.10.11. Материальная индифферентность уравнений движения. Рассмотрим уравнение даижения (2.9.1), $\alpha = 2$. Докажем сперва следующее вспомогательное утверждение.

Теорема 3.52. *Вектор ускорения $d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2 = \ddot{\mathbf{x}}$ материальной точки не является ни S-индифферентным, ни S-инвариантным, и при жестком движении он преобразуется следующим образом:*

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{v}}_0) + \ddot{\mathbf{x}}_0' + (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s' - \boldsymbol{\Omega}_s'^2) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + 2\boldsymbol{\Omega}_s' \cdot (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}_0'), \tag{10.65}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_s' = \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}. \tag{10.66}$$

▼ Из формулы (10.4) при жестком движении получаем

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{10.67}$$

Тогда формула (10.32) для $\mathbf{v}'$ с учетом (10.67) принимает вид

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{x}}_0' + \boldsymbol{\Omega}_s' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0'), \tag{10.68}$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{x}}_0') \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0'). \tag{10.69}$$

Дифференцируя (10.68) по времени t, получаем

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{v}}' = (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{v}}_0) \cdot \mathbf{Q} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \ddot{\mathbf{x}}_0' + \boldsymbol{\Omega}_s' \cdot (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}_0') + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_s' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0'). \tag{10.70}$$

Переходя от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{v}'$ по формуле (10.69), находим

$$\ddot{\mathbf{x}}' = (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{v}}_0)\cdot\mathbf{Q} + (\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{x}}_0')\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Omega}_s'\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + \\ + \ddot{\mathbf{x}}_0' + \boldsymbol{\Omega}_s'\cdot(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}_0') + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_s'\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') = (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{v}}_0)\cdot\mathbf{Q} + \ddot{\mathbf{x}}_0' + \\ + (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s' - \boldsymbol{\Omega}_s'^2)\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + 2\boldsymbol{\Omega}_s'\cdot(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}_0'). \quad (10.71)$$

Наличие последних трех слагаемых в этой формуле означает, что вектор ускорения $\ddot{\mathbf{x}}$ не является S-индифферентным. Ясно также, что вектор $\ddot{\mathbf{x}}$ не является S-инвариантным. ▲

Рассмотрим теперь, как преобразуется уравнение движения (2.2.47) при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$.

Теорема 3.53. *Уравнение движения в переменных Эйлера (2.2.47), записанное в $\mathcal{K}$ в виде*

$$\rho\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}, \quad (10.72)$$

где

1) *вектор $\mathbf{a}$ определяется следующим образом: в $\mathcal{K}$ он совпадает с абсолютным ускорением $\ddot{\mathbf{x}}$, а при переходе в $\mathcal{K}'$ он преобразуется S-индифферентным образом:*

$$\mathcal{K}: \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}; \qquad \mathcal{K}': \quad \mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Q}, \quad (10.73)$$

2) *вектор $\mathbf{f}$ при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ полагают S-индифферентным:*

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}\cdot\mathbf{Q}, \quad (10.74)$$

удовлетворяет принципу материальной индифферентности, т.е. в $\mathcal{K}'$ это уравнение движения имеет вид

$$\rho'\mathbf{a}' = \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{T}' + \rho'\mathbf{f}'. \quad (10.75)$$

▼ Действительно, пусть векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{a}$ при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ преобразуются по формулам (10.73) и (10.74), тогда получаем

$$\rho'\mathbf{a}' - \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{T}' - \rho'\mathbf{f}' = \rho'\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Q} - \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{T}' - \rho'\mathbf{f}\cdot\mathbf{Q}.$$

Так как тензор $\mathbf{T}$ является S-индифферентным, то, согласно результатам упр. 3.10.2, дивергенция $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}$ также является S-индифферентным вектором. Тогда вследствие того, что $\rho = \rho'$, и принимая во внимание формулу (10.72), получаем

$$\rho'\mathbf{a}' - \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{T}' - \rho'\mathbf{f}' = (\rho\mathbf{a} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} - \rho\mathbf{f})\cdot\mathbf{Q} = 0.$$

Таким образом, из (10.72) в самом деле следует (10.75). ▲

Замечание 1. Если использовать традиционную форму уравнения движения (2.2.47), то при переходе в $\mathcal{K}'$, согласно принципу материальной индифферентности, оно должно было бы записываться в следующем виде: $\rho'(d\mathbf{v}'/dt) = \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{T}' + \rho'\mathbf{f}'$, но, в силу не S-индифферентности векторов скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $d\mathbf{v}/dt$, это уравнение не имеет места. В этом заключается один из парадоксов МСС — традиционная форма уравнения движения (2.2.47) не удовлетворяет принципу объективности, т.е. она зависит от выбора системы координат. Устранить этот парадокс удается, только определив вектор ускорения $\mathbf{a}$ специальным S-индифферентным образом (10.73). В определение

(10.73) входит аксиоматическое допущение о существовании *инерциальной системы отсчета* $O\bar{\mathbf{e}}_i$, для которой в конфигурации $\mathcal{K}$ ускорение $\mathbf{a}$ есть обычная вторая производная от радиуса-вектора $\ddot{\mathbf{x}}$. Факт же существования инерциальной системы отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$ гарантируется нам аксиомой 5 (см. п. 2.2.1).

Замечание 2. Выражение для ускорения $\mathbf{a}'$ в $\mathcal{K}'$ с учетом формулы (10.71) можно представить в виде

$$\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{x}}' + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q} - \ddot{\mathbf{x}}_0' - (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s' - \boldsymbol{\Omega}_s'^2) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') - 2\boldsymbol{\Omega}_s' \cdot (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}_0'). \qquad (10.73\text{а})$$

Учитывая результат теоремы 3.53 и замечание 1 к ней, необходимо снова вернуться к формулировке аксиомы 5 (см. п. 2.2.1) и переформулировать ее следующим образом.

Аксиома 5а. *1) Для любой сплошной среды $\mathcal{B}$ $\forall t \geqslant 0$ существует вектор $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)}(\mathcal{B}, t)$, называемый силой инерции тела, который в исходной инерциальной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$ для конфигурации $\mathcal{K}$ имеет вид*

$$\mathcal{K}: \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)} = d\mathbf{I}/dt, \qquad (10.76а)$$

где $\mathbf{I}$ — вектор импульса тела (2.2.1), а при переходе в $\mathcal{K}'$ изменяется S-индифферентным образом:

$$\mathcal{K}': \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)} \cdot \mathbf{Q}. \qquad (10.76б)$$

2) Для любой пары тел $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_1$ $\forall t \geqslant 0$ существует вектор силы взаимодействия тел $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, t)$, возможно ноль-значный, обладающий следующими свойствами:

- *аддитивностью:*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}' + \mathcal{B}'', \mathcal{B}_1, t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}'', \mathcal{B}_1, t),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1' + \mathcal{B}_1'', t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1', t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1'', t),$$

где $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1' \cup \mathcal{B}_1''$,

- *S-индифферентностью при переходе в $\mathcal{K}'$:*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}' = \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{Q},$$

- *инерционностью, т.е. суммарный вектор внешних сил, действующих на тело $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e, t)$ (где $\mathcal{B}^e = \mathcal{U} \setminus \mathcal{B}$ — внешность тела $\mathcal{B}$) в $\mathcal{K}$ равен вектору силы инерции тела:*

$$\mathcal{K}: \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}. \qquad (10.77)$$

Следствием из этой аксиомы является следующая очевидная теорема.

Теорема 3.53а. *Если принята аксиома 5а, то при переходе от конфигурации $\mathcal{K}$ в конфигурацию $\mathcal{K}'$ закон изменения количества движения сохраняет свой вид:*

$$\mathcal{K}': \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{(i)}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}'. \qquad (10.77а)$$

Эта теорема является интегральным аналогом теоремы 3.53. Принятие аксиомы 5а делает истиными условия, лежащие в формулировке теорем 3.53 и 3.53а. Следовательно, после введения аксиомы 5а основная цель этого раздела — сделать уравнения движения удовлетворяющими принципу материальной индифферентности, будет достигута. Очевидно, что введенная ранее в п. 2.2.1 аксиома 5 полностью содержится в формулировке обобщенной аксиомы 5а, поэтому все выводы, полученные ранее на основе аксиомы 5, сохраняются.

3.10.12. Материальная индифферентность законов термодинамики. О материальной индифферентности термодинамических функций говорит следующая аксиома.

Аксиома 7а (объективность термодинамических функций). *Термодинамические функции U, Q, H, $\bar{Q}^*$ и температура θ являются S-индифферентными скалярами:*

$$U' = U, \quad Q' = Q, \quad H' = H, \quad \bar{Q}^{*\prime} = \bar{Q}^*, \quad \theta' = \theta. \tag{10.78}$$

Из (10.78) следует, что плотности внутренней энергии и энтропии являются S-индифферентными скалярами:

$$e' = e, \qquad \eta' = \eta, \tag{10.78а}$$

а из (10.78), (2.4.5) и (2.5.6) следует S-индифферентность притоков тепла за счет массовых и поверхностных источников, а также плотности внутреннего производства энтропии:

$$q'_m = q_m, \qquad q'_\Sigma = q_\Sigma, \qquad q^{*\prime} = q^*, \tag{10.78б}$$

поскольку масса m не зависит от жестких движений, а $d\Sigma$ всегда определяется S-индифферентным образом.

В силу S-индифферентности вектора нормали $\mathbf{n}$ (см. п. 3.10.5) и соотношения (2.4.10), находим, что вектор потока тепла $\mathbf{q}$ является S-индифферентным:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}, \tag{10.79}$$

поскольку, в силу S-индифферентности q_Σ, имеет место соотношение

$$-q'_\Sigma = -\mathbf{n}' \cdot \mathbf{q}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_\Sigma.$$

Теорема 3.54. *Принцип материальной индифферентности справедлив для первого закона термодинамики, т.е. из уравнения энергии (2.4.17), записанного для $\mathcal{K}$ в следующей форме:*

$$\rho\left(\frac{de}{dt} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}\right) - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} - \rho q_m - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{10.80}$$

следует аналогичное уравнение энергии в $\mathcal{K}'$:

$$\rho'\left(\frac{de'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{a}'\right) - \boldsymbol{\nabla}' \cdot (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}') + \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{q}' - \rho' q'_m - \rho' \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' = 0, \tag{10.81}$$

где $\mathbf{a}'$ определяется по (10.73).

▼ Рассмотрим преобразования отдельных слагаемых в правой части уравнения (10.81). Поскольку предполагается справедливой аксиома 7а, то имеет место уравнение движения (10.75) в $\mathcal{K}'$, тогда, домножая левую и правую части этого уравнения на $\mathbf{v}'$, получаем

$$\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{T}' + \rho' \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}', \tag{10.82а}$$

или

$$\rho'\mathbf{v}'\cdot\mathbf{a}' - \boldsymbol{\nabla}'\cdot(\mathbf{T}'\cdot\mathbf{v}') + \mathbf{T}'\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}'\otimes\mathbf{v}')^{\mathrm{T}} - \rho'\mathbf{f}'\cdot\mathbf{v}' = 0. \qquad (10.82б)$$

Предполагаем, что справедлива также аксиома 7а, тогда, в соответствии с результатами упр. 3.10.2 и 3.10.5, имеем

$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{q}' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}, \qquad \rho'\frac{de'}{dt} = \rho\frac{de}{dt}. \qquad (10.83)$$

Поскольку $\mathbf{T}'$ является симметричным (см. упр. 3.10.6), то, используя результаты упр. 3.10.4 и теорему 3.38, получаем

$$\mathbf{T}'\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}'\otimes\mathbf{v}')^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}'\cdot\cdot\,\mathbf{D}' = \mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{D} = \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}}. \qquad (10.84)$$

Преобразуем выражение в левой части (10.81) с учетом формул (10.82б), (10.83) и (10.84):

$$\begin{aligned}\rho'\Big(\frac{de'}{dt} + \mathbf{v}'\cdot\mathbf{a}'\Big) - \boldsymbol{\nabla}'\cdot(\mathbf{T}'\cdot\mathbf{v}') + \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{q}' - \rho'\mathbf{f}'\cdot\mathbf{v}' - \rho' q'_m &= \\ = \rho\frac{de}{dt} - \mathbf{T}'\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}'\otimes\mathbf{v}')^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{q}' - \rho q'_m &= \\ = \rho\frac{de}{dt} - \mathbf{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} - \rho q_m&. \qquad (10.85)\end{aligned}$$

Так как выполнено уравнение (10.80), то справедливо и его следствие — уравнение притока тепла (2.4.23).

Сравнивая (10.85) и (2.4.23), заключаем, что выражение (10.85) должно обращаться в нуль, и поэтому уравнение (10.81) действительно имеет место. Таким образом, теорема доказана. ▲

Теорема 3.55. *Уравнение баланса энтропии (второй закон термодинамики) удовлетворяет принципу материальной индифферентности, т.е. из (2.9.1) при $\alpha = 4$ следует уравнение*

$$\rho'\frac{d\eta'}{dt} - \boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\frac{\mathbf{q}'}{\theta'}\right) - \frac{\rho'}{\theta'}(q'_m + q^{*\prime}) = 0. \qquad (10.86)$$

▼ Доказательство теоремы оставим в качестве упр. 3.10.7. ▲

3.10.13. Материальная индифферентность уравнения совместности. Проверим всегда ли уравнения (2.9.1) при α =5 и 6 удовлетворяют принципу материальной индифферентности.

Теорема 3.56. *Кинематическое уравнение (2.9.1) при $\alpha = 5$ и динамическое уравнение совместности (2.9.1) при $\alpha = 6$ всегда удовлетворяют принципу материальной индифферентности.*

▼ Поскольку $\mathbf{u}' = \mathbf{x}' - \overset{\circ}{\mathbf{x}}$, то $d\mathbf{u}'/dt = d\mathbf{x}'/dt = \mathbf{v}'$, поэтому кинематическое уравнение всегда выполняется в $\mathcal{K}'$:

$$\rho'(d\mathbf{u}'/dt) = \rho'\mathbf{v}'. \qquad (10.87)$$

Пусть уравнение совместности (2.9.1) выполнено при $\alpha = 6$ в $\mathcal{K}$:

$$\rho\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}) = 0. \qquad (10.88)$$

Рассмотрим подобное выражение в $\mathcal{K}'$:

$$\rho' \frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime}}{dt} - \boldsymbol{\nabla}' \cdot (\rho' \mathbf{F}' \otimes \mathbf{v}') = \rho' \frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \rho' \mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \boldsymbol{\nabla}' \otimes \mathbf{v}' - (\boldsymbol{\nabla}' \cdot \rho' \mathbf{F}') \otimes \mathbf{v}'. \quad (10.89)$$

Здесь мы использовали формулу (10.15). С учетом этого уравнения и (10.34), третье слагаемое принимает вид

$$\rho' \mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime} \cdot \boldsymbol{\nabla}' \otimes \mathbf{v}' = \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + \\ + \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}. \quad (10.90)$$

Четвертое слагаемое в (10.89) равно нулю, потому что

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \rho' \mathbf{F}' = \mathbf{r}'^{i} \cdot \frac{\partial \rho' \mathbf{F}'}{\partial X^i} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \rho \mathbf{F}}{\partial X^i} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{F} = 0. \quad (10.91)$$

Последнее равенство в (10.91) справедливо вследствие теоремы 2.24.

Подставляя (10.90) и (10.91) в (10.89), в итоге получаем

$$\rho' \frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}\prime}}{dt} - \boldsymbol{\nabla}' \cdot (\rho' \mathbf{F}' \otimes \mathbf{v}') = \left(\rho \frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} - \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{F}) \otimes \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{Q} = \\ = \left(\rho \frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (10.92)$$

так как уравнение (10.88) выполняется по условию. ▲

3.10.14. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей A_n и B_n идеальных сред. Рассмотрим определяющие соотношения (5.1) и (5.3) моделей A_n идеальных сплошных сред (как твердых, так и жидких) в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$. Тогда в конфигурации $\mathcal{K}'$ эти же соотношения, согласно принципу материальной индифферентности (10.59)–(10.61), должны иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}' = \rho(\partial\psi/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}', \theta'), \\ \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}', \theta'), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \end{cases} \quad (10.93)$$

где ψ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}', \theta')$ — те же самые тензорные функции, что и в (5.1), (5.3).

Но соотношения (10.93) действительно имеют место, если выполняются (5.1) и (5.3), поскольку все тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ являются S-инвариантными, т.е. $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}' = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}' = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, а температура θ', в силу (10.78), также является S-инвариантной: $\theta' = \theta$. Все сказанное относится и к моделям B_n.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.57. *Для моделей A_n и B_n идеальных сплошных сред, как твердых, так и жидких, принцип материальной индифферентности всегда тождественно выполнен для любого потенциала $\psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}},\theta)$ и $\psi(\overset{(n)}{\mathbf{G}},\theta)$.*

3.10.15. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей C_n и D_n идеальных сред. Иначе обстоит дело с моделями C_n идеальных сплошных сред.

Пусть в конфигурации $\mathcal{K}$ имеют место соотношения (5.7), (5.10), тогда, согласно принципу материальной индифферентности (10.59)–(10.61), в конфигурации $\mathcal{K}'$ должны иметь место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \overset{(n)}{\mathbf{S}}{}' = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}') \equiv \mathbf{\Phi}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}', \mathbf{O}', \theta), \\ \psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}', \mathbf{O}', \theta), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}{}' = \rho\partial\psi/\partial\mathbf{O}' \equiv \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}', \mathbf{O}', \theta), \end{cases} \tag{10.94}$$

где $\mathbf{\Phi}$, $\overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}$ и ψ — те же самые тензорные функции, что и в (5.7), (5.10).

Поскольку тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ являются S-индифферентными (см. теоремы 3.35 и 7.37), а тензор $\mathbf{O}$ при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ преобразуется по формуле (10.24), то соотношения (10.94) имеют место тогда и только тогда, когда функции $\mathbf{\Phi}$, $\overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}$ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Phi}(\overset{(n)}{\mathbf{A}},\ \mathbf{O},\ \theta) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O},\ \theta), & (10.95\text{а}) \\ (1/2)(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) + \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) \cdot \mathbf{Q}) = & \\ \qquad = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}, \theta), & (10.95\text{б}) \\ \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}},\ \mathbf{O},\ \theta) = \psi(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O},\ \theta)\ \ \forall\mathbf{Q}. & (10.95\text{в}) \end{cases}$$

Теорема 3.58. *Для моделей C_n идеальных сплошных сред, как твердых, так и жидких, принцип материальной индифферентности выполнен тогда и только тогда, когда скалярная функция $\psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta)$ удовлетворяет условию (10.95в) для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$.*

▼ Справедливость прямого утверждения очевидна, так как если принцип материальной индифферентности выполнен, то выполняются все соотношения (10.95), в том числе (10.95в).

Докажем обратное утверждение. Если выполнено условие (10.95в), то дифференцируя эту функцию по тензорным аргументам $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{O}$ и учитывая, что $\mathbf{\Phi} = \rho\partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{\Phi}} = \rho\partial\psi/\partial\mathbf{O}$, получаем, что имеют место и два других соотношения (10.95а) и (10.95б), а, следовательно, имеет место и (10.94). ▲

Сравнивая условие (10.95в) с условиями (8.5) и (8.78), получаем, что для выполнения принципа материальной индифферентности функция $\psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta)$ должна быть одновременно индифферентной относительно полной группы ортогональных преобразований $G_s = I$ по отношению к первому аргументу $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и поворотно-индифферентной относительно той же группы I по отношению ко второму аргументу $\mathbf{O}$.

Теорема 3.59. *Для моделей C_n идеальных твердых сред принцип материальной индифферентности всегда выполняется.*

▼ Действительно, для моделей C_n потенциал ψ всегда можно представить в виде (8.101):

$$\psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) = \psi(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}), \theta). \tag{10.96а}$$

Для проверки выполнимости условия (10.95в) необходимо подставить в правую часть этого соотношения вместо $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}$, а вместо $\mathbf{O}$ — тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$. Выполняя эти подстановки, получаем:

$$\psi(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}, \theta) = \psi(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}), \theta) =$$

$$= \psi(I_\alpha^{(s)}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}), \theta). \tag{10.96б}$$

Сравнивая два выражения (10.96а) и (10.96б), находим, что они совпадают, следовательно, соотношения (10.95в) выполняются для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$. ▲

Теорема 3.60. *Определяющие соотношения для идеальной жидкости в форме моделей C_n (8.184) всегда удовлетворяют принципу материальной индифферентности.*

▼ Поскольку тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ являются S-индифферентными, а также S-индифферентными являются тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{g}}{}^{-1}$ (так как $\overset{(n)}{\mathbf{g}}$ — S-индифферентен, то имеет место соотношение

$$\overset{(n)}{\mathbf{g}}{}'^{\,-1} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{g}}{}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{g}}{}^{-1} \cdot \mathbf{Q}),$$

тогда, домножая соотношение (8.184а) слева на $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ и справа на $\mathbf{Q}$, действительно получаем, что в конфигурации $\mathcal{K}'$ имеет место соотношение

$$\mathbf{S}' = -\frac{p}{n - \mathrm{III}} \overset{(n)}{\mathbf{g}}{}'^{\,-1}. \tag{10.97}$$

Функция $\psi(I_3(\overset{(n)}{\mathbf{g}}), \theta)$ (8.184г) всегда удовлетворяет условию (10.95в), так как $I_3(\overset{(n)}{\mathbf{g}})$ — инвариант относительно любого ортогонального преобразования, поэтому и давление p (8.184б) также будет S-инвариантной функцией: $p' = p$, а значит и определяющие соотношения (8.184) в целом будут удовлетворять принципу материальной индифферентности. ▲

Все сказанное выше относится и к моделям B_n.

Таким образом, построенные ранее в разд. 3.8 определяющие соотношения моделей A_n, B_n, C_n и D_n идеальных сплошных сред удовлетворяют принципу материальной индифферентности, т.е. являются корректными.

3.10.16. Соблюдение принципа материальной индифферентности для несжимаемых сред. Все установленные выше определяющие соотношения для несжимаемых жидких сред (9.19), (9.23) и несжимаемых твердых сред (9.27), (9.35) удовлетворяют принципу материальной индифферентности. В самом деле, формально соотношения для несжимаемых сред отличаются от соответствующих определяющих соотношений для сжимаемых сред добавлением слагаемого $-(p/(n-\mathrm{III}))\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1}$ или $-(p/(n-\mathrm{III}))\overset{(n)}{\mathbf{g}}{}^{-1}$. Но это слагаемое, по аналогии с моделью идеальной сжимаемой жидкости (см. теорему 3.59), действительно согласовано с принципом материальной индифферентности.

3.10.17. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей твердых сред «в скоростях».

Теорема 3.62. *Модели A_n и B_n (8.145) идеальных твердых сред «в скоростях» автоматически удовлетворяют принципу материальной индифферентности, а модели C_n и D_n (8.149) «в скоростях» для изотропных сред удовлетворяют этому принципу, только если h — коротационная производная из следующего списка:*

$$h=\{V,J,S\}. \tag{10.98}$$

Для производной $h=U$ в собственном базисе правого тензора искажений и для полной производной по времени d/dt принцип материальной индифферентности не выполнен.

▼ 1) Поскольку все тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G=\{\overset{(n)}{\mathbf{C}},\overset{(n)}{\mathbf{G}}\}$ — S-инвариантны, то соотношения (8.145) не изменяются при жестких движениях $\mathcal{K}\to\mathcal{K}'$ и действительно автоматически удовлетворяют принципу материальной индифферентности.

2) Рассмотрим соотношения (8.149) для моделей C_n и D_n в форме (8.158). Если перейти от $\mathcal{K}$ к $\mathcal{K}'$, то эти соотношения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}(\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^h)'=\varphi_1^h{}'\mathbf{E}+\varphi_2^h{}'\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}'_G+\varphi_3^h{}'\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}'^2_G+\varphi_2'(\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G)'+{}\\ +\varphi_3'((\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G)'\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}'_G+\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}'_G\cdot(\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G)'),\quad \overset{(n)}{\mathbf{C}}_G=\{\overset{(n)}{\mathbf{A}},\overset{(n)}{\mathbf{g}}\}.\end{aligned} \tag{10.99}$$

Тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_G$ являются S-индифферентными (см. теоремы 3.36 и 3.37), тогда, согласно теоремам 3.43, 3.49 и 3.50, коротационные производные $\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^h$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G$ также являются S-индифферентными, где h входит в набор (10.98):

$$(\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^h)'=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^h\cdot\mathbf{Q},\qquad (\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G)'=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^h_G\cdot\mathbf{Q}. \tag{10.100}$$

Функции φ_α зависят от инвариантов $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G)$ (см. (8.104)), и, согласно результатам упр. 3.10.5, инварианты $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G)$ являются S-инвариантными скалярными функциями. Поэтому φ_α также S-инвариантны, т.е. $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$, и из теоремы 3.39 получаем

$$(\dot{\varphi}_\alpha)' = (\varphi^h_\alpha)' = \varphi^h_\alpha. \qquad (10.101)$$

После подстановки (10.100) в (8.158) получаем

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^h \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\Big(\varphi^h_1\mathbf{E} + \varphi^h_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \varphi^h_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_G + \\ + \varphi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h_G + \varphi_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h_G \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^h_G)\Big) \cdot \mathbf{Q}. \qquad (10.102)$$

Таким образом, соотношения (10.100) выполнены в $\mathcal{K}'$.

Для коротационной производной $h = U$ и полной производной по времени, соотношения (10.100) и, следовательно, (10.102) уже не являются справедливыми, и принцип материальной индифферентности не выполняется. ▲

Упражнения к 3.10

Упражнение 3.10.1. Используя формулы (10.34) и (10.16), показать, что дивергенция вектора скорости является как S-индифферентной, так и S-инвариантной:

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{r}'^i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial X^i} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \nabla' \otimes \mathbf{v}' = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Упражнение 3.10.2. Показать, что дивергенция любого S-индифферентного тензора $\mathbf{B}$ второго ранга (и любого S-индифферентного вектора $\mathbf{b}$) является S-индифферентной:

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{r}'^i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial X^i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{B}, \qquad \nabla' \cdot \mathbf{b}' = \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

Упражнение 3.10.3. Показать, что для всякого S-индифферентного вектора $\mathbf{b}$, его ротор является также S-индифферентным:

$$\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b}.$$

Упражнение 3.10.4. Доказать, что свертка любых двух S-индифферентных тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дает скаляр, являющийся как S-индифферентным, так и S-инвариантным:

$$\mathbf{A}' \cdot\cdot\, \mathbf{B}' = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B}.$$

Упражнение 3.10.5. Показать, что главные инварианты всякого симметричного S-индифферентного тензора $\mathbf{A}$ всегда одновременно S-индифферентны и S-инвариантны:

$$I'_\alpha(\mathbf{A}') = I_\alpha(\mathbf{A}') = I_\alpha(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}.$$

Упражнение 3.10.6. Показать, что если тензор $\mathbf{B}$ второго ранга является симметричным и S-индифферентным, то $\mathbf{B}'$ будет также симметричным.

Упражнение 3.10.7. Доказать теорему 3.55, используя метод, предложенный при доказательстве теоремы 3.54.

Упражнение 3.10.8. Показать, что из (10.78б) следует S-индифферентность скорости диссипации w^* (6.5.14):

$$w^{*\prime} = w^*.$$

Упражнение 3.10.9. Пусть существует скалярная функция тензорного аргумента:

$$\psi = \Psi(\mathbf{A}) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ — тензор второго ранга, независимый от $\mathbf{A}$. Доказать, что

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}'} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial\psi(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}.$$

3.11. Соотношения в подвижной системе отсчета

3.11.1. Подвижная система отсчета. В МСС широко применяют не только жесткое движение актуальной конфигурации, рассмотренное в разд. 3.10, но и жесткое движение системы отсчета, методы описания которого аналогичны. Поэтому рассмотрим здесь это движение.

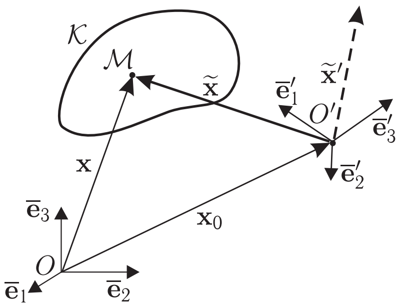

Рис. 3.6. Подвижная система отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}_i'$ для $\mathcal{K}$

В п. 1.1.7 была введена подвижная система отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}_i'$ (1.1.39), которая характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{x}_0(t)$ точки O' — центра вращения и ортогональным тензором поворота $\mathbf{Q}(t)$ системы координат $O'\bar{\mathbf{e}}_i'$ относительно системы $O\bar{\mathbf{e}}_i$ (рис. 3.6), причем

$$\bar{\mathbf{e}}_i' = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = Q^j{}_i \bar{\mathbf{e}}_j. \tag{11.1}$$

Положение точки $\mathcal{M}$ в системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$ определяется радиусом-вектором $\mathbf{x}$, а в системе координат $O'\bar{\mathbf{e}}_i'$ — радиусом-вектором

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i', \tag{11.2}$$

(см. (1.1.26)).

Введем вектор

$$\widetilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}}, \tag{11.3}$$

который в базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ имеет такие же координаты $\widetilde{x}^i$, как и вектор $\widetilde{\mathbf{x}}$ в подвижном базисе $\bar{\mathbf{e}}_i'$:

$$\widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Q} = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i' \cdot \mathbf{Q} = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \widetilde{x}'^i \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{11.4}$$

т.е.

$$\widetilde{x}'^i = \widetilde{x}^i. \tag{11.5}$$

Из (11.1) и (11.2) следует, что (см. (1.1.27)):

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (x^i - x_0^i)\bar{\mathbf{e}}_i = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i' = \widetilde{x}^i Q^j{}_i \bar{\mathbf{e}}_j, \\ x^i - x_0^i(t) = Q^i{}_j(t)\widetilde{x}^j, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j} = Q^i{}_j(t). \end{gathered} \tag{11.6}$$

3.11.2. Формула Эйлера. Продифференцируем формулу (11.2):

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0. \tag{11.7}$$

Поскольку $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{v}_0$ — векторы скорости точки $\mathcal{M}$ и точки O' относительно неподвижной системы отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$, то, используя для $\widetilde{\mathbf{x}}$ формулу (11.3), получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\widetilde{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{\bullet}. \tag{11.8}$$

Дифференцируя произведение $\widetilde{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{Q}$ и используя еще раз формулу (11.3), находим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \widetilde{\mathbf{x}} \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}). \tag{11.9}$$

Поскольку тензор $\mathbf{Q}$ — ортогонален, то $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ — кососимметричен (см. п. 1.4.10), и его можно представить с помощью сопутствующего вектора $\boldsymbol{\omega}_s$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{\Omega}_s \equiv \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{E} = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}. \tag{11.10}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_s$, вообще говоря, не совпадает с вектором вихря $\boldsymbol{\omega}$, введеным по формуле (1.4.47), совпадение имеет место, если сплошная среда при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ совершает только жесткое движение, тензор поворота которого совпадает с тензором $\mathbf{Q}$ подвижной системы отсчета.

С учетом (11.10) формулу (11.9) можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \widetilde{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s. \tag{11.9a}$$

Очевидно, что имеют место следующие соотношения:

$$-\widetilde{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s = -\boldsymbol{\Omega}_s^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega}_s \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{E}) \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}. \tag{11.11}$$

Используя формулы (11.4), введем следующий вектор:

$$\mathbf{v}_r \equiv \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}'_i, \tag{11.12}$$

который называют *относительной скоростью* точки $\mathcal{M}$ в подвижной системе $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$. Компоненты вектора $\mathbf{v}_r$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$ есть производные $\dot{\widetilde{x}}^i$ от компонент $\widetilde{x}^i$ радиуса-вектора $\widetilde{\mathbf{x}}$ в том же подвижном базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$ — иначе говоря, $\mathbf{v}_r$ определяется по тем же правилам, что и вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i$ в неподвижной системе координат $O\bar{\mathbf{e}}_i$.

С учетом (11.10)–(11.12) формула (11.9) принимает вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_r. \tag{11.13}$$

Скорость $\mathbf{v}$ называют *абсолютной скоростью точки* $\mathcal{M}$, а $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}$ — *переносной скоростью*. Формула (11.13), называемая *формулой Эйлера*, отражает тот факт, что абсолютная скорость материальной точки равна сумме переносной и относительной скоростей.

3.11.3. Формула Кориолиса. Введем по аналогии с обычным вектором ускорения материальной точки $\mathcal{M}$ в неподвижной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i, \tag{11.14}$$

вектор относительного ускорения точки $\mathcal{M}$ в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$:

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}'_i. \tag{11.15}$$

Согласно (11.1) и (11.4), вектор $\mathbf{a}_r$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\widetilde{x}}^i \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \ddot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{11.16}$$

Теорема 3.61 (Кориолиса). *Ускорение $\ddot{\mathbf{x}}$ материальной точки $\mathcal{M}$ в неподвижной системе координат и относительное ускорение $\mathbf{a}_r$ в подвижной системе координат связаны формулой Кориолиса:*

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c, \tag{11.17}$$

где

$$\mathbf{a}_e = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \times \widetilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega}_s \times (\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}), \tag{11.18}$$

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_r = 2\boldsymbol{\omega}_s \times (\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}), \tag{11.19}$$

$\mathbf{a}_e$ называют переносным ускорением, $\mathbf{a}_c$ — кориолисовым ускорением, а $\ddot{\mathbf{x}}$ — абсолютным ускорением.

▼ Выберем в качестве исходной формулу (11.9) для скорости $\mathbf{v}$ и продифференцируем ее по t:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \ddot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_s \cdot \widetilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega}_s \cdot \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}. \tag{11.20}$$

Здесь мы использовали формулу (11.10) для спина $\boldsymbol{\Omega}_s$. Преобразуем третье слагаемое в правой части:

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) \cdot (\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\Omega}_s \cdot \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_r. \tag{11.21}$$

Четвертое слагаемое преобразуем с помощью формулы (11.10):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{E})^{\bullet} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \times \mathbf{E} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}. \tag{11.22}$$

Последнее слагаемое в правой части (11.20) преобразуем с помощью формул (11.3) и (11.12):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_s \cdot \dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\Omega}_s \cdot (\widetilde{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{\bullet} = \boldsymbol{\Omega}_s \cdot (\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{\Omega}_s \cdot (\widetilde{\mathbf{x}}' \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}) = \\ = \boldsymbol{\Omega}_s \cdot \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega}_s \cdot (\widetilde{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}})) = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega}_s \cdot (\boldsymbol{\Omega}_s \cdot \widetilde{\mathbf{x}}) = \\ = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}_s \times (\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}).\end{aligned} \tag{11.23}$$

Подставляя формулы (11.21)–(11.23) в (11.20), действительно получаем (11.17). ▲

Замечание 1. Используя определение (1.5.4) коротационных производных $\mathbf{a}^h$, можно выражения (11.12) и (11.16) для относительной скорости $\mathbf{v}_r$ и относительного ускорения $\mathbf{a}_r$ представить как коротационные производные $\mathbf{a}^Q$ от вектора $\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{x}^i \bar{\mathbf{e}}'_i$ в ортонормированном подвижном базисе $\mathbf{h}_i = \bar{\mathbf{e}}'_i$:

$$\mathbf{v}_r = \widetilde{\mathbf{x}}^Q \equiv \dot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}'_i, \qquad \mathbf{a}_r = \widetilde{\mathbf{x}}^{QQ} = \mathbf{v}_r^Q \equiv \ddot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}'_i. \tag{11.24}$$

В п. 1.1.7 были установлены соотношения (1.1.50) и (1.1.53) между подвижным базисом $\bar{\mathbf{e}}'_i$ и базисами $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}^i$:

$$\bar{\mathbf{e}}'_i = \widetilde{P}^j{}_i \widetilde{\mathbf{r}}_j, \qquad \widetilde{\mathbf{r}}^i = \widetilde{P}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}'^j, \qquad \widetilde{\mathbf{r}}_i = \widetilde{Q}^j{}_i \bar{\mathbf{e}}'_j, \tag{11.25}$$

$$\widetilde{Q}^i{}_j = \partial\widetilde{x}^i/\partial\widetilde{X}^j, \qquad \widetilde{P}^i{}_j = \partial\widetilde{X}^i/\partial\widetilde{x}^j,$$

причем матрицы $\widetilde{Q}^i{}_j$ и $\widetilde{P}^i{}_j$, согласно (1.1.44), не зависят от t, тогда формулы (11.24) можно представить и в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$:

$$\mathbf{v}_r = \widetilde{v}^i_r\widetilde{\mathbf{r}}_i = \widetilde{v}_{ri}\widetilde{\mathbf{r}}^i, \qquad \mathbf{a}_r = \widetilde{a}^i_r\widetilde{\mathbf{r}}_i = \widetilde{a}_{ri}\widetilde{\mathbf{r}}^i,$$
$$\widetilde{v}^i_r = \frac{d}{dt}(\widetilde{x}^j\widetilde{P}^i{}_j), \qquad \widetilde{a}^i_r = \frac{d^2}{dt^2}(\widetilde{x}^j\widetilde{P}^i{}_j) = \frac{d\widetilde{v}_{ri}}{dt}, \tag{11.26}$$

— эти формулы полностью аналогичны представлениям скорости и ускорения в неподвижном базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ и в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ лагранжевых координат:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{x}^i\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{v}^i\bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{v}{}^i\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i, \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{x}^i\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{a}^i\bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{a}{}^i\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i, \tag{11.27}$$
$$\overset{\circ}{v}{}^i = \frac{d}{dt}x^i = \frac{d}{dt}\Big(x^i\Big(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big)\Big), \qquad \overset{\circ}{a}{}^i = \frac{d^2}{dt^2}x^i = \frac{d}{dt}\overset{\circ}{v}{}^i = \frac{d^2}{dt^2}\Big(x^i\Big(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big)\Big). \ \square$$

Замечание 2. Для подвижных базисов типа $\bar{\mathbf{e}}'_i$, которые связаны с $\bar{\mathbf{e}}_i$ ортогональным тензором $\mathbf{Q}$ по формуле (11.1), в п. 1.4.10 была установлена формула (1.4.86), которая применительно к $\bar{\mathbf{e}}'_i$ записывается следующим образом:

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}'_i = \boldsymbol{\omega}_s \times \bar{\mathbf{e}}'_i. \tag{11.28}$$

Тогда, если разложить вектор $\boldsymbol{\omega}_s$ по базису $\bar{\mathbf{e}}'_i$: $\boldsymbol{\omega}_s = \omega'^i_s\bar{\mathbf{e}}'_i$, то

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\omega'^i_s\bar{\mathbf{e}}'_i)^{\bullet} = \dot{\omega}'^i_s\bar{\mathbf{e}}'_i + \omega'^i_s\dot{\bar{\mathbf{e}}}'_i = \boldsymbol{\omega}_s \times (\omega'^i_s\bar{\mathbf{e}}'_i). \tag{11.29}$$

Так как $\boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0}$, то отсюда получаем

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \boldsymbol{\omega}^Q_s, \qquad \boldsymbol{\omega}^Q_s \equiv \dot{\omega}'^i_s\bar{\mathbf{e}}'_i, \tag{11.30}$$

где $\boldsymbol{\omega}^Q_s$ обозначена коротационная производная (1.5.4) в базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$.

3.11.4. Набла-оператор в подвижной системе отсчета. В п. 1.1.7 была доказана теорема 1.2 о том, что в подвижной системе отсчета набла-операторы $\boldsymbol{\nabla}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}$ совпадают:

$$\boldsymbol{\nabla} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} = \widetilde{\mathbf{r}}^i\frac{\partial}{\partial\widetilde{X}^i}, \qquad \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{r}^i\frac{\partial}{\partial X^i}, \tag{11.31}$$

где $\widetilde{X}^i$ — криволинейные пространственные координаты (1.1.45), а $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}^i$ — локальные базисы в $\mathcal{K}$ по отношению к координатам $\widetilde{X}^i$, введенные по (1.1.48) и (1.1.53).

С помощью соотношений (11.25) набла-оператор $\boldsymbol{\nabla}$ можно представить в базисах $\bar{\mathbf{e}}_i$ и $\bar{\mathbf{e}}'_i$:

$$\boldsymbol{\nabla} = \bar{\mathbf{e}}^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \delta^{ik}\delta_{ms}P^m{}_k\bar{\mathbf{e}}'^s\Big(\frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j} =$$
$$= \delta^{ik}\delta_{ms}P^m{}_kP^j{}_i\,\bar{\mathbf{e}}'^s\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j} = \delta^j_s\bar{\mathbf{e}}'^s\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j} = \bar{\mathbf{e}}'^j\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j}. \tag{11.32}$$

Здесь мы использовали формулы перехода в ортонормированных базисах:

$$\bar{\mathbf{e}}^i = \delta^{ik}\bar{\mathbf{e}}_k, \qquad \bar{\mathbf{e}}'_m = \delta_{ms}\bar{\mathbf{e}}'^s, \tag{11.33}$$

а также учли, что обе матрицы $Q^i{}_j$ и $P^i{}_j$ являются ортогональными, следовательно, для них имеет место соотношение

$$P^i{}_k P^j{}_l\,\delta^{kl} = \delta^{ij}. \tag{11.34}$$

Из (11.32) и (11.26), (11.27) следует, что в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ ортонормированный базис $\bar{\mathbf{e}}'_i$ играет ту же роль, что и базис $\bar{\mathbf{e}}_i$ в неподвижной системе отсчета, а локальные базисы $\widetilde{\mathbf{r}}^i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ подобны базисам $\mathbf{r}^i$, $\mathbf{r}_i$ по отношению к набла-оператору, так как

$$\boldsymbol{\nabla} = \bar{\mathbf{e}}^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{r}^i\frac{\partial}{\partial X^i} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} = \bar{\mathbf{e}}'^i\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} = \widetilde{\mathbf{r}}^i\frac{\partial}{\partial \widetilde{X}^i}, \tag{11.35}$$

и аналогичны базисам $\mathring{\mathbf{r}}_i$, $\mathring{\mathbf{r}}^i$ — по отношению к производной по времени.

3.11.5. Градиент скорости в подвижной системе отсчета. Применяя соотношения (11.35) к формуле (11.9а), получаем

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}_r - (\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\widetilde{\mathbf{x}})\cdot\boldsymbol{\Omega}_s. \tag{11.36}$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\Omega}_s$ не зависят от координат.

Поскольку

$$\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\widetilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{e}}'^i\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}\otimes(\widetilde{x}^j\bar{\mathbf{e}}'_j) = \bar{\mathbf{e}}'^i\otimes\bar{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{E} \tag{11.37}$$

(аналогично тому, как $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{x} = \mathbf{E}$), то (11.36) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}_r - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_s. \tag{11.38}$$

В частности, поскольку $\boldsymbol{\Omega}_s$ — кососимметричен, то

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{v}_r. \tag{11.39}$$

3.11.6. Уравнение неразрывности в подвижной системе отсчета. Подставляя соотношение (11.39) в уравнение неразрывности (2.1.15) в переменных Эйлера, получаем

$$d\rho/dt = -\rho\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{v}_r, \tag{11.40}$$

или, поскольку коротационная производная ρ^Q от скаляра совпадает с $\dot{\rho}$,

$$\rho\Big(\frac{1}{\rho}\Big)^Q = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{v}_r \tag{11.41}$$

— уравнение неразрывности в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, которое формально имеет тот же вид, что и соответствующее уравнение (2.1.15) в неподвижной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$, если все величины рассматривать относительно системы $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, т.е. осуществлять замену $\mathbf{v}\to\mathbf{v}_r$, $\boldsymbol{\nabla}\to\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}$.

3.11.7. Уравнение движения в подвижной системе отсчета. Иначе обстоит дело с уравнением движения — подставляя формулу Кориолиса (11.17) и соотношение (11.35) в (2.2.47), получаем

$$\rho(\ddot{\widetilde{\mathbf{x}}}'\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c) = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}. \tag{11.42}$$

Здесь мы учли, что тензор напряжений $\mathbf{T}$ определяется в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ и не зависит от выбора системы отсчета (однако от него зависят компоненты тензора $\widetilde{T}^{ij}$ в базисе системы отсчета: $\mathbf{T} = \widetilde{T}^{ij}\bar{\mathbf{e}}'_i \otimes \bar{\mathbf{e}}'_j$).

Используя представление (11.24) относительно ускорения $\mathbf{a}_r$, уравнение (11.42) можно переписать в виде

$$\rho\widetilde{\mathbf{x}}^{QQ} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{T} + \rho\widetilde{\mathbf{f}}, \tag{11.43}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c = \mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}_0 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \times \widetilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega}_s \times (\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}) - 2\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_r \tag{11.44}$$

— плотность массовой силы в подвижной системе отсчета, включающая в себя переносное и кориолисово ускорения. Если $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_s$ полагаем известными, то переносное ускорение $\mathbf{a}_e$ представляет собой известную величину, но кориолисово ускорение из-за наличия скорости $\mathbf{v}_r$ является неизвестным вектором.

Уравнение движения (11.43) с учетом (11.24) можно переписать также в форме

$$\rho\mathbf{v}_r^Q = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{T} + \rho\widetilde{\mathbf{f}}, \tag{11.45}$$

в которой его можно считать аналогичным уравнению движения (2.2.47) в неподвижной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$. Отличие его лишь в том, что набла-оператор $\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}$, коротационная производная $\mathbf{v}_r^Q$, сама скорость $\mathbf{v}_r$ рассматриваются в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, а плотность массовых сил $\widetilde{\mathbf{f}}$ включает добавочные члены — переносное $\mathbf{a}_e$ и кориолисово $\mathbf{a}_c$ ускорения.

3.11.8. Законы термодинамики в подвижной системе отсчета. Скалярные термодинамические величины e, η, θ, q_m, очевидно, не зависят от выбора системы отсчета, поскольку вводятся для актуальной конфигурации. Вектор потока тепла $\mathbf{q}$, как и $\mathbf{T}$, также вводится в $\mathcal{K}$ и поэтому не меняется при переходе в систему отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ — меняются лишь его компоненты в базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$. Изменяется также плотность кинетической энергии, определяемая квадратом модуля вектора скорости; действительно, с помощью формулы Эйлера (11.13) имеем

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}_r|^2 + |\mathbf{v}_0|^2 + |\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}|) + \\ + \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r \cdot (\boldsymbol{\omega}_s \times \widetilde{\mathbf{x}}).$$

Однако, если использовать уравнение притока тепла (2.4.23) в качестве формулировки первого закона термодинамики, то $(1/2)|\mathbf{v}|^2$ в него не входит, и, следовательно, получаем

$$\rho\frac{de}{dt} = \mathbf{T} \cdot\cdot (\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}_r)^{\mathrm{T}} + \rho q_m - \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{q} \tag{11.46}$$

— *уравнение притока тепла в подвижной системе отсчета* $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$. Здесь мы учли формулу (11.38), а также тот факт, что $\mathbf{T} \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_s = 0$, так как $\mathbf{T}$ — симметричен, а $\boldsymbol{\Omega}_s = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_s$ — кососимметричен.

Для того, чтобы получить аналог закона сохранения энергии в форме (2.4.17), рассмотрим следующую свертку:

$$\mathbf{v}_r^Q \cdot \mathbf{v}_r = (\ddot{\widetilde{x}}^i \bar{\mathbf{e}}'_i) \cdot (\dot{\widetilde{x}}^j \bar{\mathbf{e}}'_j) = \ddot{\widetilde{x}}^i \dot{\widetilde{x}}^j \delta_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\widetilde{x}}^i \dot{\widetilde{x}}^j \delta_{ij})^{\bullet} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r)^{\bullet} = |\mathbf{v}_r|^{\bullet}/2. \tag{11.47}$$

Умножая теперь (11.45) на $\mathbf{v}_r$, с учетом (11.47) получаем

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{|\mathbf{v}_r|}{2} = \mathbf{v}_r \cdot \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{T} + \rho \widetilde{\mathbf{v}}_r \cdot \widetilde{\mathbf{f}} \tag{11.48}$$

— *теорему живых сил в подвижной системе отсчета.*

Складывая (11.48) и (11.46), получаем окончательно

$$\rho \frac{d}{dt}\Big(e + \frac{|\mathbf{v}_r|^2}{2}\Big) = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_r - \mathbf{q}) + \rho \widetilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}_r + \rho q_m \tag{11.49}$$

— *закон сохранения энергии в подвижной системе отсчета.*

Второй закон термодинамики (2.5.13) при переходе в $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ формально не изменяет своего вида:

$$\rho\theta \frac{d\eta}{dt} = -\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{q} + \rho q_m + w^*. \tag{11.50}$$

3.11.9. Уравнение совместности деформаций в подвижной системе отсчета. Рассмотрим динамическое уравнение совместности деформаций в форме (2.7.9):

$$\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}. \tag{11.51}$$

По аналогии с декартовыми координатами $\overset{\circ}{x}{}^i$ для $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$, введем декартовы координаты $\overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^i$ в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ также для конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (используем при этом формулу (11.6)):

$$\overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^i = \overset{\circ}{P}{}^i{}_j(\overset{\circ}{x}{}^j - x^j_{00}), \tag{11.52}$$

где $\overset{\circ}{P}{}^i{}_j$, $\overset{\circ}{Q}{}^i{}_j$, x^j_{00} — значения $P^i{}_j$, $Q^i{}_j$ и x^j_0 при $t = 0$. Так как между x^i и $\overset{\circ}{x}{}^i$ существует соотношение $x^i = x^i(\overset{\circ}{x}{}^j, t)$, то с учетом (11.6) и (11.52) находим связь между $\widetilde{x}^i$ и $\overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^j$:

$$\widetilde{x}^i = P^i{}_j(x^j - x^j_0) = P^i{}_j(x^j(\overset{\circ}{x}{}^k, t) - x^j_0) =$$
$$= P^i{}_j(x^j(x^k_{00} + \overset{\circ}{Q}{}^k{}_m \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m, t) - x^j_0) \equiv \widetilde{x}^i(\overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m, t). \tag{11.53}$$

Введем также базис $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'_i = \bar{\mathbf{e}}'_i(0)$, который может, вообще говоря, не совпадать с $\bar{\mathbf{e}}_i$ и для которого на основании (11.1) имеем

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'_j = \overset{\circ}{Q}{}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i = \Big(\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j}\Big)_{t=0} \bar{\mathbf{e}}_i = (\partial \overset{\circ}{x}{}^i / \partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^j) \bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{e}}'_i, \\ \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^j = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{e}}'^i, \qquad \bar{\mathbf{e}}^i = \overset{\circ}{P}{}^i{}_j \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^j = \Big(\frac{\partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j}\Big) \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^j,\end{gathered} \tag{11.54}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{Q}{}^i{}_j \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j$ — значение ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ при $t = 0$ (если $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'_i = \bar{\mathbf{e}}_i$, то $\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}$).

Воспользуемся представлением градиента деформации $\mathbf{F}$ в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ (см. упр. 1.1.5) и найдем его представление в базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^k} \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m} \frac{\partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m} \bar{\mathbf{e}}'_k \otimes \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^m \equiv \widetilde{F}^k{}_m \bar{\mathbf{e}}'_k \otimes \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^m, \quad (11.55)$$

$$\widetilde{F}^k{}_m = (\partial \widetilde{x}^k / \partial \overset{\circ}{\widetilde{x}}{}^m).$$

Введем еще два тензора, которые имеют такие же компоненты $\widetilde{F}^k{}_m$, но в других диадных базисах:

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{F}^k{}_m \bar{\mathbf{e}}'_k \otimes \bar{\mathbf{e}}'^m, \qquad \mathbf{F}' = \widetilde{F}^k{}_m \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}^m. \quad (11.56)$$

В силу (11.54) и (11.1), очевидно, что

$$\mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{F}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}. \quad (11.57)$$

Вычислим теперь производную по времени $d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}/dt$, используя представление (11.55):

$$\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} = \frac{d\widetilde{F}^k{}_m}{dt} \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^m \otimes \bar{\mathbf{e}}'_k + \widetilde{F}^k{}_m \overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^m \otimes \dot{\bar{\mathbf{e}}}'_k =$$
$$= \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{d\widetilde{F}^k{}_m}{dt} \bar{\mathbf{e}}'^m \otimes \bar{\mathbf{e}}'_k - \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{F}^k{}_m \bar{\mathbf{e}}'^m \otimes \bar{\mathbf{e}}'_k \times \boldsymbol{\omega}_s. \quad (11.58)$$

Здесь мы учли, что $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'^m$ не зависит от t, а также воспользовались формулами (11.54) и (11.28) для $\dot{\bar{\mathbf{e}}}'_k$.

Если теперь в первом слагаемом заменить базис $\bar{\mathbf{e}}'_i$ на $\mathbf{e}_i$ по (11.1) и принять во внимание, что $d\mathbf{F}'/dt = (d\widetilde{F}^k{}_m/dt)\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}^m$, то получим

$$\frac{d\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{dt} = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{F}'^{\mathrm{T}}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \widetilde{\mathbf{F}} \times \boldsymbol{\omega}_s\right). \quad (11.59)$$

Преобразуем правую часть уравнения совместности (11.51), используя (11.57) и (11.38):

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}_r - \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{\omega}_s). \quad (11.60)$$

Подставляя (11.59) и (11.60) в (11.51), получаем окончательно

$$\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{F}'^{\mathrm{T}}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}_r \quad (11.61)$$

— *динамическое уравнение совместности деформаций в подвижной системе отсчета* $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$.

Так как

$$\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{F}'^{\mathrm{T}}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{d\widetilde{F}^k{}_m}{dt} \bar{\mathbf{e}}'^m \otimes \bar{\mathbf{e}}'_k = \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}Q} \quad (11.62)$$

(здесь мы использовали определение (1.5.6) коротационной производной в подвижном ортонормированном базисе $\bar{\mathbf{e}}'_i$), то уравнение (11.61) можно представить в эквивалентной форме:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}Q} = \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}_r, \tag{11.63}$$

которая является формальным аналогом уравнений совместности (11.49) в неподвижной системе отсчета.

Уравнение (11.61) можно записать также в форме, аналогичной (2.9.1), $\alpha = 5$. Для этого вычислим дивергенцию тензора $\rho\widetilde{\mathbf{F}}$, используя формулы (11.55) и (2.7.4):

$$\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho\widetilde{\mathbf{F}}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{F} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{F}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \\ + \rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot\ \boldsymbol{\nabla} \otimes (\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho\mathbf{F}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{11.64}$$

Здесь мы учли, что тензоры вращения $\overset{\circ}{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ не зависят от координат x^i.

Из (11.64) следует, что $(\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \rho\widetilde{\mathbf{F}}) \otimes \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$. Умножая (11.63) на ρ и складывая с полученным соотношением, находим

$$\rho\widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}Q} = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho\widetilde{\mathbf{F}} \otimes \widetilde{\mathbf{v}}_r). \tag{11.65}$$

3.11.10. Кинематическое соотношение в подвижной системе отсчета. Аналогом кинематического соотношения (2.9.1), $\alpha = 6$, в неподвижной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}, \tag{11.66}$$

при переходе в подвижную систему отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ является первое соотношение в (11.24) для относительной скорости $\mathbf{v}_r$, записанное через коротационную производную.

3.11.11. Полная система законов сохранения подвижной системе отсчета. Уравнения (11.40), (11.45), (11.49), (11.50), (11.65) и (11.24) можно записать в единой универсальной форме, аналогичной форме (2.9.1):

$$\rho\bar{A}^Q_\alpha = \widetilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \bar{B}_\alpha + \rho C_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, 6, \tag{11.67}$$

где обозначены обобщенные векторы

$$\bar{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1/\rho \\ \mathbf{v}_r \\ e + (|\mathbf{v}_r|^2/2) \\ \eta \\ \widetilde{\mathbf{x}} \\ \widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_r - \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}/\theta \\ 0 \\ \rho\widetilde{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{v}_r \end{pmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\mathbf{f}} \\ \widetilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}_r + q_m \\ (q_m + q^*)/\theta \\ \mathbf{v}_r \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11.68}$$

которые аналогичны соответствующим обобщенным векторам из (2.9.2).

3.11.12. Определяющие соотношения подвижной системе отсчета. Рассмотрим случай, когда $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{e}}}{}'_i = \bar{\mathbf{e}}_i$, т.е. подвижный базис $\bar{\mathbf{e}}'_i$ при $t = 0$ совпадает с $\bar{\mathbf{e}}_i$, тогда $\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}$ и из (11.57) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{11.69}$$

Сравнивая (11.69) с (6.9), можно установить аналогию между преобразованием системы отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i \to O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, описываемым тензором поворота $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{e}}'_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^i$, и ортогональным преобразованием отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, которое, согласно разд. 3.6, описывается тензором $\mathbf{H} = \overset{*}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}$. Аналогом тензора $\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}$ является тензор $\mathbf{Q}$.

Используя эту аналогию, замечаем, что все результаты из разд. 3.6 о преобразовании тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ при ортогональных H-преобразованиях являются справедливыми и для ортогональных преобразований системы отсчета. Так, согласно теоремам 3.18 и 3.19, все энергетические тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ будут H-инвариантными, т.е.

$$\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad \overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{11.70}$$

где $\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{T}}}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{C}}}$ — тензоры, определенные в $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$.

Тензоры же $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ — H-инвариантны, а $\mathbf{O}$ преобразуется по формуле, аналогичной (7.45):

$$\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{A}}} = \overset{(n)}{\mathbf{A}}, \qquad \overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{S}}} = \overset{(n)}{\mathbf{S}}, \qquad \widetilde{\mathbf{O}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{11.71}$$

Следовательно, определяющие соотношения для моделей A_n идеальных твердых сред в форме (8.35) при переходе в $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ записываются следующим образом:

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{Q} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}, \tag{11.72}$$

$$\varphi_\gamma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I^{(s)}_\gamma}, \quad I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}} = \frac{\partial I^{(s)}_\gamma}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial I^{(s)}_\gamma}{\partial \overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{C}}}} \cdot \mathbf{Q}, \quad I^{(s)}_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{C}}) = I^{(s)}_\gamma(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{Q}). \tag{11.73}$$

Из (11.70) следует, что тензоры $\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{T}}}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{C}}}$ имеют в базисе $\widehat{\widehat{\mathbf{c}}}_i = \mathbf{Q} \cdot \widehat{\mathbf{c}}_i$ такие же компоненты $\widehat{\overset{(n)}{T}}{}^{ij}$, $\widehat{\overset{(n)}{C}}{}^{ij}$, как тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$ главных осей анизотропии тела. Базис $\widehat{\widehat{\mathbf{c}}}_i$ является ортонормированным и называется *базисом подвижных осей анизотропии*. Из (11.72) и (11.73) следует, что в этом базисе $\widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}_i$ инварианты $I_\gamma^{(\widetilde{s})}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}})$ тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}$ относительно группы $\widetilde{G}_s = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot G_s \cdot \mathbf{Q}$ имеют такой же вид, как и инварианты $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ относительно группы G_s, записанные в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$:

$$I_\gamma^{(\widetilde{s})}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}) = I_\gamma^{(\widetilde{s})}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{ij}}) = I_\gamma^{(s)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{ij}}) = I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = I_\gamma^{(s)}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{Q}), \tag{11.74}$$

(индекс $(\widetilde{s})$ означает, что инвариант рассматривается относительно группы $\widetilde{G}_s$ с базисом подвижных осей анизотропии $\widetilde{\mathbf{c}}_i$). С учетом (11.73) и (11.74) определяющие соотношения (11.72) можно записать в следующей форме:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{T}}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{C}}}, \qquad \varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(\widetilde{s})}), \qquad I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{C}}} = \partial I_\gamma^{(\widetilde{s})}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}. \tag{11.75}$$

Для изотропных сред $G_s = I$, и главные инварианты $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ просто совпадают с $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}})$, поэтому определяющие соотношения (11.75) в точности совпадают с соответствующими соотношениями в неподвижной системе отсчета $O\bar{\mathbf{e}}_i$ и имеют вид (8.46):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{T}}} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}{}^2, \qquad \psi_\alpha = \psi_\alpha(I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}), \theta). \tag{11.76}$$

Для трансверсально-изотропных сред с группой $G_s = T_3$ инварианты которой $I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = I_\gamma^{(3)}(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{ij}})$ выбираются в виде (8.21), соответствующие инварианты $I_\gamma^{(\widetilde{3})}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}})$ в базисе $\widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}_i$ имеют такой же вид, а в безындексной форме вычисляются по правилу (11.74):

$$\begin{gathered} I_1^{(\widetilde{3})} = (\mathbf{E} - \widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}{}_3^2) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}, \qquad I_2^{(\widetilde{3})} = \widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}{}_3^2 \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}, \qquad I_5^{(\widetilde{3})} = \det \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}, \\ I_3^{(\widetilde{3})} = ((\mathbf{E} - \widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}{}_3^2) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}) \cdot\cdot (\widehat{\widetilde{\mathbf{c}}}{}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}), \qquad I_4^{(\widetilde{3})} = \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}{}^2 \cdot\cdot \mathbf{E} - I_2^{(\widetilde{3})2} - 2I_3^{(\widetilde{3})}. \end{gathered} \tag{11.77}$$

Аналогично вычисляют инварианты и для других групп $G_s \subset I$.

Для моделей B_n идеальных твердых сред определяющие соотношения (8.70) при переходе в $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ преобразуются аналогичным образом и записываются в форме

$$\begin{gathered} \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{T}}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{G}}}, \\ \varphi_\gamma = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I_\gamma^{(\widetilde{s})}}, \qquad I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{G}}} = \partial I_\gamma^{(\widetilde{s})}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{G}}}, \qquad I_\gamma^{(\widetilde{s})}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{G}}}) = I_\gamma^{(s)}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{Q}). \end{gathered} \tag{11.78}$$

Определяющие соотношения (8.102), (8.103) для моделей C_n идеальных твердых сред в подвижной системе отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ с учетом (11.71) записывают следующим образом:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{S}}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{A}}}, \qquad \varphi_\gamma = \rho\frac{\partial\psi}{\partial I^{(\widetilde{s})}_\gamma}, \quad I^{(\widetilde{s})}_{\gamma\widetilde{\mathbf{A}}} = \frac{\partial I^{(\widetilde{s})}_\gamma}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{A}}}},$$
$$I^{(\widetilde{s})}_\gamma(\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{A}}}\cdot\widetilde{\mathbf{O}}) = I^{(s)}_\gamma(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}). \tag{11.79}$$

Для идеальных жидкостей определяющие соотношения в форме (8.168) не изменяют свой вид при переходе в $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, поскольку тензор $\mathbf{T}$ является H-инвариантным, а ρ и θ не зависят от ортогональных преобразований отсчетной конфигурации.

3.11.13. Общие замечания. Проведенный выше анализ позволяет сделать такой вывод: при переходе в подвижную систему отсчета уравнения сохранения (11.67), (11.68) и определяющие соотношения (11.75) формально записываются так же, как и в неподвижной системе отсчета, за исключением того, что: 1) следует учесть добавочные члены $\mathbf{a}_e$ и $\mathbf{a}_c$ в выражении для массовой силы $\mathbf{f}$, 2) производные по времени следует заменить на коротационные производные.

Наличие переносного $\mathbf{a}_e$ и кориолисова $\mathbf{a}_c$ ускорений в системе (11.67) обычно является весьма существенным, однако для частного случая равномерного прямолинейного движения подвижной системы $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$, например, вдоль оси $O\bar{\mathbf{e}}_1$, при котором

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{v}_0 = \bar{v}^1_0\bar{\mathbf{e}}_1, \qquad \bar{v}^1_0 = \mathrm{const}, \tag{11.80}$$

имеем

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{a}_e = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{a}_c = \mathbf{0}, \tag{11.81}$$

т.е. переносное и кориолисово ускорения отсутствуют, и, следовательно, уравнения (11.67) будут полностью совпадать с уравнениями (2.9.1) в неподвижной системе отсчета. В этом случае все процессы и явления, описываемые этими системами, также будут совпадать, поэтому наблюдателю, движущемуся в такой подвижной системе отсчета, никаким способом не удастся распознать — движется ли он прямолинейно и равномерно или покоится.

В менее общей формулировке этот вывод был сделан еще Галилеем и Ньютоном при изучении только кинематики недеформируемых тел, поэтому движение вида (11.80) называют *галилеевым*.

Упражнения к 3.11

Упражнение 3.11.1. Показать, что если подвижная система отсчета $O'\bar{\mathbf{e}}'_i$ вращается равномерно с круговой частотой ω относительно неподвижной оси $O\bar{\mathbf{e}}_3$, а $O' = O$, то в формуле Кориолиса (11.17):

$$\mathbf{v}_0 \equiv 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \equiv 0, \quad \boldsymbol{\omega}_s = \omega\bar{\mathbf{e}}_3, \quad \widetilde{\mathbf{x}}_3 \equiv x^1\bar{\mathbf{e}}_1 + x^2\bar{\mathbf{e}}_2 = r\mathbf{e}_r, \quad -\mathbf{a}_e = \mathbf{f}_{\text{цс}} \equiv \omega^2\widetilde{\mathbf{x}}_3 = \omega^2 r\mathbf{e}_r,$$

и выражение (11.44) для $\widetilde{\mathbf{f}}$ принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\text{цс}} - \mathbf{a}_c,$$

где $\mathbf{f}_{\text{цс}}$ называют вектором плотности центростремительной силы, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}_r$ цилиндрической системы координат $O\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi\bar{\mathbf{e}}_3$ с осью $O\bar{\mathbf{e}}_3$.

3.12. Принцип Онзагера

3.12.1. Принцип Онзагера и закон Фурье. Теперь обратим внимание на то, что в ОТТ (3.15)–(3.18), которые являлись основой построения определяющих соотношений для моделей A_n, B_n, C_n и D_n, не входит вектор потока тепла $\mathbf{q}$. Однако он входит в основную систему законов сохранения (2.9.1), и без задания каких-то соотношений для $\mathbf{q}$ эта система даже с учетом определяющих соотношений (4.11), (4.12), (4.13) или (4.14) не будет замкнутой.

Для задания соотношений для $\mathbf{q}$ используют принцип Онзагера. Рассмотрим его. Воспользуемся формулой (2.5.16) для плотности внутреннего производства энтропии:

$$\rho q^* = w^* - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \geqslant 0. \tag{12.1}$$

Неотрицательность ρq^* имеет место в силу неравенства Планка (2.5.5а).

Аксиома 16 (принцип Онзагера). *Для обеспечения выполнения неравенства Планка плотность внутреннего производства энтропии q^* должна представлять собой квадратичную форму вида*

$$\rho q^* = \sum_{\beta=1} Q_\beta X_\beta = \sum_{\beta,\gamma=1} L_{\beta\gamma} X_\beta X_\gamma \geqslant 0. \tag{12.2}$$

Здесь

$$Q_\beta = \sum_{\beta=1} L_{\beta\gamma} X_\gamma \tag{12.3}$$

— некоторые функции, называемые *термодинамическими потоками*, а X_β — функции, называемые *термодинамическими силами*.

Из (12.2) следует, что $L_{\beta\gamma}$ — симметричная матрица:

$$L_{\beta\gamma} = L_{\gamma\beta}. \tag{12.3a}$$

Замечание 1. В п. 3.4.3 было установлено, что из принципов термодинамически согласованного детерминизма и равноприсутствия вытекает независимость всех активных переменных Λ в определяющих соотношениях (4.11)–(4.14) от градиента температуры $\boldsymbol{\nabla}\theta$. Следовательно, и функция рассеивания w^*, входящая в состав активных переменных, не зависит от $\boldsymbol{\nabla}\theta$. Но тогда, если положить $\boldsymbol{\nabla}\theta \equiv 0$ $\forall \mathcal{M} \in V$ и $\forall t \geqslant 0$, то значение w^* при этом не изменится, а слагаемое $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta$ обратится в нуль, и из (12.1) следует, что

$$w^* \geqslant 0. \tag{12.4}$$

Это неравенство, как мы знаем из (2.5.18), называют *неравенством диссипации*.

Приведенные рассуждения составляют доказательство того, что неравенство диссипации является следствием неравенства Планка (12.1) и принципов термодинамически согласованного детерминизма и равноприсутствия.

Поскольку для идеальных сред $w^* \equiv 0$, то из неравенства Планка (12.1) получаем, что должно выполняться следующее неравенство:

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \leqslant 0, \tag{12.5}$$

называемое *неравенством Фурье*.

Для неидеальных сред неравенство Фурье (12.5) не вытекает из неравенства Планка (12.1) и его принимают как самостоятельную аксиому 10 (см. п. 2.5.2). $\square$

Принцип Онзагера применяют следующим образом: выражение (12.1) для ρq^* представляют в виде суммы $\sum_\beta Q_\beta X_\beta$, например, для идеальных сред в качестве термодинамической силы X_1 выбирают градиент температуры: $X_1 = \boldsymbol{\nabla}\theta$, в качестве термодинамического потока — величину $Q_1 = -(1/\theta)\mathbf{q}$.

Тогда, согласно принципу Онзагера, термодинамические потоки должны быть линейной (или более строго — тензорно-линейной) функцией от X_1, т.е.

$$-\frac{1}{\theta}\mathbf{q} = Q_1 = L_{11}X_1 = L_{11}\boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{12.6}$$

Коэффициент L_{11} в данном случае является тензором второго ранга, а комплекс $\theta L_{11} = \boldsymbol{\lambda}$ называют *тензором теплопроводности*, тогда соотношение (12.6) принимает вид

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{12.7}$$

которое называют *законом Фурье* в пространственном описании.

Следствием неравенства Фурье является положительная определенность тензора теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\theta \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \geqslant 0. \tag{12.8}$$

Закон Фурье можно сформулировать и в материальном описании. Для этого надо в (12.7) вектор $\mathbf{q}$ заменить на вектор $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$ по формуле (2.4.27) и градиент $\boldsymbol{\nabla}\theta$ на $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$ по формуле, аналогичной формулам (1.1.23): $\boldsymbol{\nabla}\theta = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$. Тогда получим соотношение

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta, \tag{12.9}$$

где введен $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ — тензор теплопроводности в отсчетной конфигурации:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}. \tag{12.10}$$

Закон Фурье (12.7) входит в общую систему определяющих соотношений (4.11), (4.12), (4.13) или (4.14) сплошной среды. Этот закон также можно записать в форме операторного соотношения (4.9), в котором активной переменной является вектор $\mathbf{q}$, а реактивной — вектор $\boldsymbol{\nabla}\theta$.

Тогда, в зависимости от рассматриваемой модели A_n, B_n, C_n или D_n, тензоры теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ следует рассматривать как операторы от соответствующего набора реактивных переменных $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{модели } A_n: & \boldsymbol{\lambda} = \breve{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), & \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \breve{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \\ \text{модели } B_n: & \boldsymbol{\lambda} = \breve{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), & \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \breve{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \\ \text{модели } C_n: & \boldsymbol{\lambda} = \breve{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), & \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \breve{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \text{модели } D_n: & \boldsymbol{\lambda} = \breve{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta), & \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \breve{\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \mathbf{O}, \theta). \end{array} \tag{12.10а}$$

3.12.2. Следствия из принципа материальной симметрии для закона Фурье. Рассмотрим закон Фурье (12.9) в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, используя при этом одну из моделей $A_n, \ldots, D_n$, для определенности выберем модель B_n. Поскольку закон Фурье, как и определяющие соотношения (4.11)–(4.14), описывает некоторые физические свойства сплошной среды, то для него должен выполняться принцип материальной симметрии (6.1), (6.2), если в качестве Λ рассматривать вектор $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$, а в качестве $\mathcal{R}$ — вектор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$. Иначе говоря, если в конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ имеет место соотношение (12.9), то должна существовать группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, такая что для каждого H-преобразования из этой группы $\mathbf{H} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ вид функции (12.9) не меняется:

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta) \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta. \tag{12.11а}$$

и

$$\overset{*}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{*}, \theta) \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\nabla}}\theta. \tag{12.11б}$$

Теорема 3.63. *Принцип материальной симметрии (12.11а), (12.11б) для закона Фурье в материальном описании выполняется в том и только в том случае, если в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует такая группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, относительно которой тензор теплопроводности преобразуется следующим образом:*

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta) = \sqrt{\overset{*}{g}/\overset{\circ}{g}}\ \mathbf{H}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{*}, \theta) \cdot \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \quad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{12.12}$$

▼ Поскольку вектор $\mathbf{q}$ и температура θ определены в $\mathcal{K}$, то они являются H-инвариантными. Тогда $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$ при H-преобразованиях изменяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \overset{*}{\mathbf{q}} = \sqrt{g/\overset{*}{g}}\ \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \sqrt{g/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \sqrt{g/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}}, \\ \overset{*}{\boldsymbol{\nabla}}\theta = \overset{*}{\mathbf{r}}{}^{i} \frac{\partial \theta}{\partial X^i} = \overset{*}{\mathbf{r}}{}^{i} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^{k} \frac{\partial \theta}{\partial X^k} = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta. \end{gathered} \tag{12.13}$$

Пусть имеет место принцип материальной симметрии, тогда выполняются соотношения (12.11а) и (12.11б). Подставляя (12.13) в (12.11б), получим

$$\sqrt{\overset{\circ}{g}/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta, \tag{12.14}$$

или

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\sqrt{\overset{*}{g}/\overset{\circ}{g}}\ (\mathbf{H}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}})\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta. \tag{12.15}$$

Сравнивая (12.11а) и (12.15), находим, что в этом случае действительно должно выполняться соотношение (12.12) для тензора теплопроводности $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$.

Докажем эту теорему в обратную сторону. Пусть выполнено условие (12.12). Подставим его в соотношение (12.9) и, таким образом, получим формулу (12.15). Выполнив преобразования в обратном порядке, получим формулы (12.11а) и (12.11б). ▲

Очевидно, что теорема 3.63 имеет место и для других моделей A_n, C_n и D_n. Соотношение (12.12) для них имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*,\theta) = \sqrt{\overset{\circ}{g}/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\\
\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^*,\mathbf{O}^*,\theta) = \sqrt{\overset{\circ}{g}/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\mathbf{O},\theta)\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\\
\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^*,\mathbf{O}^*,\theta) = \sqrt{\overset{\circ}{g}/\overset{*}{g}}\ \mathbf{H}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}},\mathbf{O},\theta)\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}.
\end{gathered} \tag{12.16}$$

Теорема 3.64. *Для закона Фурье (12.7) в пространственном описании принцип материальной симметрии выполняется тождественно для любой группы симметрии G_s.*

▼ Действительно, каково бы ни было H-преобразование отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, поскольку векторы $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\nabla}\theta$ всегда являются H-инвариантными, соотношение (12.7) будет сохранять свой вид с тем же самым тензором теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}$ для любого тензора $\mathbf{H}$. ▲

Разумеется никакого противоречия между соотношениями (12.12) для тензора $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ и неизменяемостью тензора $\boldsymbol{\lambda}$ нет, поскольку именно формула (12.12) вместе с (12.10) и формулой (6.9) преобразования градиента деформации $\mathbf{F}$ обеспечивает независимость $\boldsymbol{\lambda}$ от выбора отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\ \mathbf{F}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\ \overset{*}{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{H}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} = \sqrt{\overset{*}{g}/g}\ \overset{*}{\mathbf{F}}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\lambda})^*.$$

Здесь $(\boldsymbol{\lambda})^*$ — тензор $\boldsymbol{\lambda}$, определенный для конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, как и должно быть, совпадает с самим тензором $\boldsymbol{\lambda}$ (не путать с $\overset{*}{\boldsymbol{\lambda}}$, который представляет собой $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$, но определенный в конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$).

3.12.3. Следствие из принципа материальной индифферентности для закона Фурье. Вектор потока тепла $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$ и градиент температуры $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$ определены в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, поэтому они не изменяются при жестких движениях из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ (т.е. $\overset{\circ}{\mathbf{q}}{}' = \overset{\circ}{\mathbf{q}}$, $(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)' = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$). Следовательно, и сам закон Фурье (12.9) в материальном описании также не изменяется при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}}{}' = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)' \tag{12.17}$$

для любого ортогонального тензора поворота $\mathbf{Q}$. Это означает, что соотношение (12.9) закона Фурье удовлетворяет принципу материальной индифферентности (10.59), (10.61) с одним и тем же тензором теплопроводности $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$, т.е.

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}' = \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{12.18}$$

Иначе обстоит дело с законом Фурье (12.7) в пространственном описании.

Теорема 3.65. *Закон Фурье (12.7) в пространственном описании удовлетворяет принципу материальной индифферентности (10.59), (10.61) (т.е. из (12.7) следует соотношение*

$$\mathbf{q}' = -\boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\theta)' \tag{12.19}$$

для любого жесткого движения $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$) в том и только в том случае, если тензор теплопроводности является одновременно S-инвариантным и S-индифферентным:

$$\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{Q}. \tag{12.20}$$

Напомним, что тензоры, удовлетворяющие условию (12.20) для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$, согласно (8.14), называют *индифферентными относительно полной ортогональной группы.*

▼ Вектор потока тепла $\mathbf{q}$ является S-индифферентным подобно тензору $\mathbf{T}$. Для доказательства этого факта следует воспользоваться соотношением (2.4.10) и учесть, что скалярная функция притока тепла за счет поверхностных источников q_Σ является S-инвариантной: $q'_\Sigma = q_\Sigma$, а вектор нормали $\mathbf{n}$ — S-индифферентный, тогда

$$-q'_\Sigma = \mathbf{q}' \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{q}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{n} = -q_\Sigma = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, \tag{12.21}$$

откуда получаем

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{q}. \tag{12.22}$$

Градиент скаляра $\boldsymbol{\nabla}\theta$ также является S-индифферентным, так как

$$(\boldsymbol{\nabla}\theta)' = \mathbf{R}^{i\prime} \frac{\partial \theta}{\partial X^i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}^i \frac{\partial \theta}{\partial X^i} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{12.23}$$

Тогда, домножая соотношение (12.7) на $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, получаем

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta = -\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{12.24}$$

или

$$\mathbf{q}' = -\boldsymbol{\lambda}' \cdot \boldsymbol{\nabla}'\theta, \tag{12.25}$$

$$\boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{Q}. \tag{12.26}$$

Из (12.25) следует, что для выполнения принципа материальной индифферентности действительно необходимо и достаточно выполнение условия индифферентности тензора $\boldsymbol{\lambda}$, т.е. $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}$. ▲

Заметим, что соотношения (12.18) и (12.20) согласованы: подставляя в (12.10) формулы (12.20) и (10.15), (10.16), получаем

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}{}' = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\,\mathbf{F}^{-1\prime} \cdot \boldsymbol{\lambda}' \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}\prime} = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\,\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda}' \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \\ = \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (12.27)$$

— в точности соотношение (12.18).

3.12.4. Закон Фурье для жидкостей. Для жидкостей обычно используют закон Фурье в пространственном описании (12.7).

Согласно теореме 3.64, соотношение (12.7) при любом тензоре $\boldsymbol{\lambda}$ тождественно удовлетворяет принципу материальной симметрии для любой группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, в том числе и для унимодулярной группы $\overset{\circ}{G}_s = U$, соответствующей жидкости.

Однако для удовлетворения принципу материальной индифферентности необходимо, чтобы тензор $\boldsymbol{\lambda}$ в (12.7) был индифферентен относительно полной ортогональной группы $G_s = I$, т.е. удовлетворял соотношениям (12.20).

Единственным решением уравнения (12.20) для группы I, как было установлено в п. 3.8.3 (см. (8.17)), является шаровой тензор $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{E}, \qquad \lambda > 0, \qquad (12.28)$$

где λ — константа, называемая *коэффициентом теплопроводности*.

Подставив (12.28) в (12.7), получим закон Фурье для жидкостей:

$$\mathbf{q} = -\lambda \boldsymbol{\nabla}\theta. \qquad (12.29)$$

С помощью соотношения (12.10) можно записать и тензор теплопроводности $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ для жидкостей:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = \lambda\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\mathbf{G}^{-1}. \qquad (12.30)$$

Этот тензор уже не является шаровым, но несложно убедиться в том, что он удовлетворяет уравнению (12.12).

Закон Фурье (12.9) в материальном описании для жидкостей имеет вид:

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\lambda\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\;\mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta. \qquad (12.31)$$

3.12.5. Закон Фурье для твердых сред. Для твердых сред обычно используют закон Фурье в материальном описании (12.9).

Это соотношение, как было отмечено в п. 3.12.3, при любом тензоре $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ тождественно удовлетворяет принципу материальной индифферентности. Однако для удовлетворения принципу материальной симметрии, согласно теореме 3.63, необходимо, чтобы тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ был индифферентен относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, соответствующей группе симметрии рассматриваемой твердой среды, т.е. было выполнено соотношение (12.12).

Используя теперь результаты п. 3.8.3 (см. формулы (8.17)), получаем, что

- если $\overset{\circ}{G}_s = I$ (изотропная твердая среда), то тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ имеет только одну независимую компоненту — $\overset{\circ}{\lambda}$:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \overset{\circ}{\lambda}\mathbf{E}, \tag{12.32}$$

- если $\overset{\circ}{G}_s = \widehat{T}_3$ (трансверсально-изотропная твердая среда с вектором трансверсальной изотропии $\widehat{\mathbf{c}}_3$), то тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ имеет две независимые компоненты — $\overset{\circ}{\lambda}_1$ и $\overset{\circ}{\lambda}_2$:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \overset{\circ}{\lambda}_1\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \overset{\circ}{\lambda}_2\mathbf{E}, \tag{12.33}$$

- если $\overset{\circ}{G}_s = \widehat{O}$ (ортотропная среда с главным базисом ортотропии $\widehat{\mathbf{c}}_\gamma$), то тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$ имеет три независимые компоненты — $\overset{\circ}{\lambda}_\gamma$:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{\gamma=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2. \tag{12.34}$$

Заметим, что для того чтобы найти тензор $\boldsymbol{\lambda}$ для твердых сред, следует подставить формулы (12.32)–(12.34) в (12.10). Например, для изотропной среды тензор $\boldsymbol{\lambda}$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{\lambda} = \sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\ \mathbf{F}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\lambda}\sqrt{\overset{\circ}{g}/g}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{12.35}$$

Подставляя выражения (12.32)–(12.34) в соотношение (12.9), получаем

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\lambda}\mathbf{E} \tag{12.36}$$

— закон Фурье для изотропных твердых сред,

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -(\overset{\circ}{\lambda}_1\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \overset{\circ}{\lambda}_2\mathbf{E}) \tag{12.37}$$

— закон Фурье для трансверсально-изотропных сред,

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\sum_{\gamma=1}^{3} \overset{\circ}{\lambda}_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 \tag{12.38}$$

— закон Фурье для ортотропных сред.

Глава 4
СООТНОШЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА

4.1. Соотношения на поверхности разрыва в материальном описании

4.1.1. Поверхности разрыва. До сих пор мы рассматривали случай, когда все функции, входящие в законы сохранения: ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$ и др. — являются непрерывно-дифференцируемыми функциями координат X^i (или x^i) и t. Однако часто на практике встречаются задачи, в которых это условие нарушается. Например, в явлениях удара, взрыва, горения часть указанных функций в рассматриваемой области V может терпеть разрыв на некоторой поверхности S (рис. 4.1).

В качестве поверхности разрыва можно рассматривать и поверхность S раздела двух контактирующих сплошных сред (рис. 4.2).

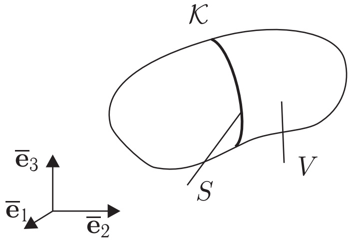

Рис. 4.1. Поверхность разрыва S внутри области V

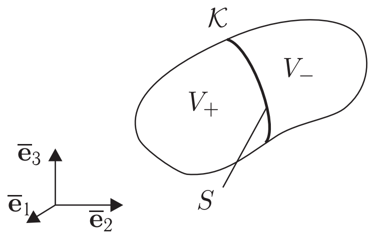

Рис. 4.2. Поверхность раздела S двух сплошных сред V_+ и V_-

Математическая формулировка задач в механике сплошных сред кроме записи дифференциальных уравнений в области V предполагает наличие граничных условий на границе области V. Эту границу также можно рассматривать как поверхность разрыва функций.

Интегральные законы сохранения остаются справедливыми и для областей V с поверхностями разрыва S, а дифференциальные формулировки соответствующих законов не выполняются на таких поверхностях S, так как при их выводе существенно использовалось условие непрерывной дифференцируемости функций внутри V. Поэтому необходимо установить соответствующие следствия из законов сохранения для поверхностей разрыва функций. Этому вопросу посвящена данная глава.

4.1.2. Первая классификация поверхностей разрыва. Рассмотрим сплошную среду, занимающую в $\mathcal{K}$ объем V. Полагаем, что имеется поверхность S, разделяющая V на две части V_+ и V_-, такие, что внутри V_+ и V_- все рассматриваемые функции (ρ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ и др.) являются непрерывно-дифференцируемыми.

При переходе же из V_+ в V_- некоторые из функций могут терпеть разрыв. Рассмотрим множество M_t материальных точек, принадлежащих в момент времени $t > 0$ поверхности разрыва $S(t)$. Это множество M_t в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ принадлежит некоторой поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$, которая, вообще говоря, зависит от t и разбивает $\overset{\circ}{V}$ на две области V_+ и V_-.

Для различных моментов времени t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, положение поверхности разрыва $S(t)$ в актуальной конфигурации может различаться, при этом существует альтернатива:

- множества M_t, соответствующие поверхностям $S(t)$ для $\forall t \in [t_1, t_2]$, совпадают,
- множества M_t, соответствующие поверхностям $S(t)$ в рассматриваемые моменты времени t, $t \in [t_1, t_2]$, не все совпадают.

В первом случае говорят, что материальные точки *не переходят* через поверхность разрыва $S(t)$ для $\forall t \in [t_1, t_2]$, во втором же случае говорят, что происходит *переход материальных точек через поверхность разрыва*.

Если материальные точки не переходят через поверхность раздела $S(t)$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, то положение поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ для $t \in [t_1, t_2]$ не меняется (рис. 4.3), в случае же перехода материальных точек через поверхность разрыва при $t \in [t_1, t_2]$ положение поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$ в отсчетной конфигурации изменяется (рис. 4.4).

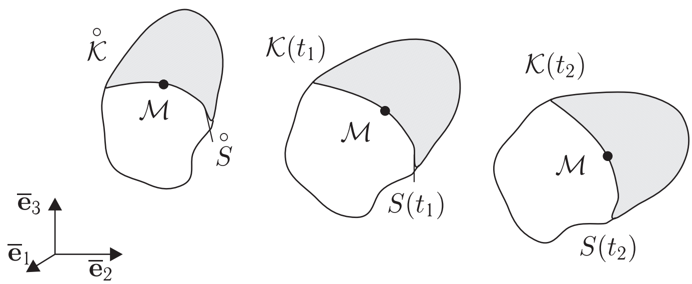

Рис. 4.3. Материальные точки не переходят через поверхность разрыва

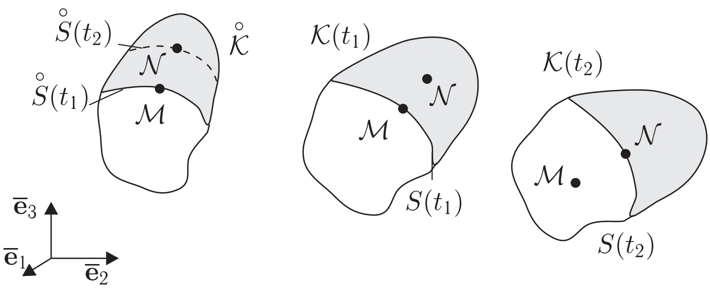

Рис. 4.4. Материальные точки переходят через поверхность разрыва

Дадим теперь следующую классификацию поверхностей разрыва (рис. 4.5), иногда их называют просто *разрывами*.

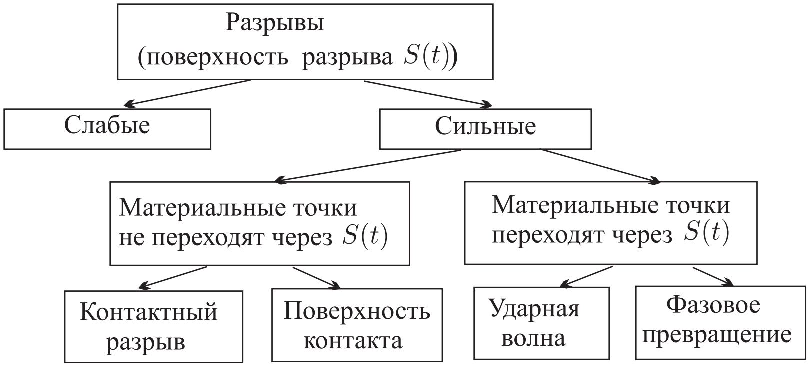

Рис. 4.5. Классификация разрывов

Определение 4.1. *Поверхность разрыва $S(t)$, при переходе через которую терпят разрыв сами неизвестные функции ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$ и др. называют поверхностью сильного разрыва, если же эти функции остаются непрерывными, а терпят разрыв только их первые производные по t и координатам ($\boldsymbol{\nabla}\rho$, $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}$ и т.д.), то $S(t)$ называют поверхностью слабого разрыва.*

Переход точек может осуществляться только для поверхностей сильного разрыва.

Определение 4.2. *Поверхность сильного разрыва $S(t)$, через которую для $\forall t \in [t_1, t_2]$ не переходят материальные точки, называют поверхностью контактного разрыва, если определяющие соотношения в областях $V_+(t)$ и $V_-(t)$ одинаковы для всех рассматриваемых t, в противном же случае ее называют поверхностью контакта.*

Определение 4.3. *Поверхность сильного разрыва $S(t)$, через которую при $t \in [t_1, t_2]$ переходят материальные точки, называют поверхностью ударной волны, если определяющие соотношения одинаковы для всех рассматриваемых t, в противном случае $S(t)$ называют поверхностью фазового превращения.*

Кроме введенной выше классификации, поверхности разрыва разделяют на *когерентные* и *некогерентные*.

Определение 4.4. *Поверхность разрыва $S(t)$, при переходе через которую терпят разрывы радиусы-векторы $\mathbf{x}$ материальных точек $\mathcal{M} \in S(t)$, называют некогерентными, в противном случае поверхность называют когерентной.*

Для некогерентной поверхности $S(t)$ локальная окрестность dV всякой точки $\mathcal{M}$, принадлежащей в некоторый момент t поверхности $S(t)$, в момент времени $t + \Delta t$ разделяется на две полуокрестности dV_+ и dV_-, «расходящиеся» друг от друга, так как если в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathcal{M})$ точки $\mathcal{M}$

непрерывен, то радиус-вектор $\mathbf{x}(\mathcal{M}, t+\Delta t)$ в этой точке уже разрывен:

$$[\overset{\circ}{\mathbf{x}}] = 0, \qquad [\mathbf{x}] \neq 0. \tag{1.1}$$

Для когерентной поверхности $S(t)$ локальные полуокрестности dV_+ и dV_- любой ее точки $\mathcal{M} \in S(t)$ в любой момент времени t «не расходятся» друг от друга, и скачок радиуса-вектора $\mathbf{x}$ равен нулю, если $[\overset{\circ}{\mathbf{x}}] = 0$:

$$[\overset{\circ}{\mathbf{x}}] = 0, \qquad [\mathbf{x}] = 0. \tag{1.2}$$

Примером некогерентной поверхности является поверхность контакта идеальной жидкости и твердого тела: идеальная жидкость «скользит» по твердому телу без сцепления.

Если в момент t выбрать две контактирующие точки $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$ некогерентной поверхности $S(t)$, то их радиусы-векторы $\mathbf{x}_+$ и $\mathbf{x}_-$ совпадают, но не совпадают радиусы-векторы $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_+$ и $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_-$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, т.е. вместо (1.1) могут иметь место также соотношения

$$[\overset{\circ}{\mathbf{x}}] \neq 0, \qquad [\mathbf{x}] = 0. \tag{1.1а}$$

Очевидно, что некогерентная поверхность является поверхностью сильного разрыва.

4.1.3. Аксиома о классе функций при переходе через поверхность разрыва. Рассмотрим далее поверхность сильного разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$, разделяющую область $\overset{\circ}{V}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ на две подобласти $\overset{\circ}{V}_+$ и $\overset{\circ}{V}_-$.

Определение 4.5. *Пусть имеется функция $A(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, t)$, определенная в области $\overset{\circ}{V}$. С к а ч к о м функции ч е р е з п о в е р х н о с т ь р а з р ы в а $\overset{\circ}{S}$ называют следующую величину:*

$$[A] = A_+\big|_{\overset{\circ}{S}} - A_-\big|_{\overset{\circ}{S}}, \tag{1.3}$$

где

$$A_\pm\big|_{\overset{\circ}{S}} = \lim_{\substack{\overset{\circ}{\mathbf{x}} \to \overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma \\ \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_\pm,\ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma \in \overset{\circ}{S}}} A_\pm(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, t).$$

Если поверхность $S(t)$ является когерентной, то из (1.2) следует, что при переходе через поверхность разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$ функции $x^i(X^i, t)$ не терпят разрывов:

$$x^i(X^j\big|_{\overset{\circ}{S}_+}, t) = x^i(X^j\big|_{\overset{\circ}{S}_-}, t). \tag{1.1б}$$

Тогда в (1.3) всегда можно перейти от координат $\overset{\circ}{x}{}^i$ к x^i и рассмотреть скачок функции через поверхность раздела $S(t)$ в $\mathcal{K}$:

$$[A] = A_+\big|_S - A_-\big|_S, \tag{1.4}$$

где

$$A_\pm\big|_S = \lim_{\substack{x^i \to x^i_\Sigma \\ x^i \in V_\pm,\ x^i_\Sigma \in S(t)}} A(x^i, t).$$

Аксиома 17. *Для сплошной среды, содержащей в* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ *поверхность разрыва* $\overset{\circ}{S}(t)$*, которая разделяет область* $\overset{\circ}{V}$ *на части* $\overset{\circ}{V}_+$ *и* $\overset{\circ}{V}_-$*, функции* $\overset{\circ}{\rho}$*,* $\overset{\circ}{A}_\alpha$ *и* $\overset{\circ}{B}_\alpha$ *в системе законов сохранения (2.9.8) предполагаются гладкими в* $\overset{\circ}{V}_+$ *и* $\overset{\circ}{V}_-$*:*

$$\overset{\circ}{A}_\alpha = \begin{cases} \overset{\circ}{A}_{\alpha+}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_+, \\ \overset{\circ}{A}_{\alpha-}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_-, \end{cases} \qquad \overset{\circ}{B}_\alpha = \begin{cases} \overset{\circ}{B}_{\alpha+}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_+, \\ \overset{\circ}{B}_{\alpha-}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_-, \end{cases} \tag{1.5}$$

а на поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$ *могут иметь конечный скачок, т.е.*

$$[\overset{\circ}{A}_\alpha] < +\infty, \qquad [\overset{\circ}{B}_\alpha] < +\infty. \tag{1.6}$$

Функции C_α *в системе (2.9.8) также предполагаются гладкими в* $\overset{\circ}{V}_+$ *и* $\overset{\circ}{V}_-$*, а на поверхности разрыва могут иметь неограниченный скачок типа скачка* δ*-функции:*

$$\overset{\circ}{\rho} C_\alpha = \overset{\circ}{\rho}\widetilde{C}_\alpha + \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}\delta(\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma - \overset{\circ}{\mathbf{x}}), \qquad \widetilde{C}_\alpha = \begin{cases} C_{\alpha+}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_+, \\ C_{\alpha-}, & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{V}_-, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma, t)$ — *конечная гладкая по* $\overset{\circ}{S}(t)$ *функция, удовлетворяющая условию:*

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}\delta(\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma - \overset{\circ}{\mathbf{x}})d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{S}} \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{1.8}$$

Функция $\overset{\circ}{C}_{4\Sigma}$ *состоит из двух слагаемых: скачка производства энтропии за счет внешних источников* $\overset{\circ}{\bar{C}}_{4\Sigma}$ *и скачка производства энтропии за счет внутренних источников* $\overset{\circ}{C}{}^*_{4\Sigma}$*, который полагают всегда неотрицательным:*

$$\overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = \overset{\circ}{\bar{C}}_{4\Sigma} + \overset{\circ}{C}{}^*_{4\Sigma}, \quad \overset{\circ}{C}{}^*_{4\Sigma} \geqslant 0. \tag{1.8a}$$

Чтобы аксиому 17 применить для сплошной среды, содержащей не одну, а несколько поверхностей разрыва $\overset{\circ}{S}_\alpha$, следует разбить всю область $\overset{\circ}{V}$ на подобласти $\overset{\circ}{V}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, каждая из которых уже содержит только одну поверхность разрыва $\overset{\circ}{S}_\alpha$.

4.1.4. Правило дифференцирования объемного интеграла при наличии поверхности разрыва. Для дальнейшего нам потребуется установить правило дифференцирования объемного интеграла для случая, когда область интегрирования $\overset{\circ}{V}$ содержит поверхность разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$ функций $\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha(\overset{\circ}{x}{}^i, t)$, определенных в $\overset{\circ}{V}$.

Используя аксиому 17, вычислим эту производную отдельно для областей $\overset{\circ}{V}_+(t)$ и $\overset{\circ}{V}_-(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha d\overset{\circ}{V}=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-(t)}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}d\overset{\circ}{V}+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+(t)}\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha+}d\overset{\circ}{V}. \qquad (1.9)$$

Воспользуемся стандартным определением производной от скалярной функции по скалярному аргументу (времени):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-(t)}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)d\overset{\circ}{V}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big(\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-+\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)d\overset{\circ}{V}-\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-}\overset{\circ}{\rho}_-A_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)d\overset{\circ}{V}\Big)=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\Big(\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-}\overset{\circ}{\rho}_-\frac{\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)}{\Delta t}d\overset{\circ}{V}+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)d\overset{\circ}{V}\Big)=$$

$$=\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-(t)}\overset{\circ}{\rho}_-\frac{\partial\overset{\circ}{A}_{\alpha-}}{\partial t}d\overset{\circ}{V}+\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)\frac{1}{\Delta t}d\overset{\circ}{V}. \qquad (1.10)$$

Здесь $\Delta\overset{\circ}{V}$ — приращение объема $\overset{\circ}{V}_-$ за счет перехода материальных точек через поверхность разрыва в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$: $\Delta\overset{\circ}{V}=\Delta\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}\overset{\circ}{S}$, а $\Delta\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma$ — приращение радиуса-вектора $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ точек, принадлежащих поверхности $\overset{\circ}{S}$. Соответствующий элементарный объем $d\overset{\circ}{V}$ вычисляют следующим образом (рис. 4.6):

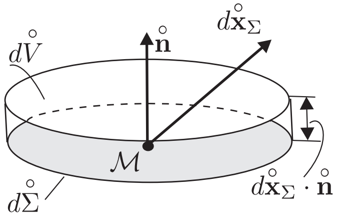

Рис. 4.6. Бесконечно малое изменение области за счет перехода материальных точек через поверхность разрыва

$$d\overset{\circ}{V}=d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}, \qquad (1.11)$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ — нормаль из $\overset{\circ}{V}_-$ в $\overset{\circ}{V}_+$, а $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma=d\overset{\circ}{\mathbf{x}}(X^i\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}},t)$ — бесконечно малое приращение радиуса-вектора $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ точек, принадлежащих поверхности разрыва. Тогда вектор

$$\overset{\circ}{\mathbf{c}}=d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma/dt \qquad (1.12)$$

представляет собой *вектор скорости движения поверхности разрыва* $\overset{\circ}{S}$.

В силу построения, вектор $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$, очевидно, отличен от нуля тогда и только тогда, когда материальные точки переходят через поверхность разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$ (и, следовательно, $S(t)$).

С учетом (1.11) и (1.12) второе слагаемое в последней строке формулы (1.10) можно записать следующим образом:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)\frac{d\overset{\circ}{V}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)\frac{d\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma}{\Delta t}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}=\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -}\overset{\circ}{\mathbf{v}}_\Sigma\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}. \quad (1.13)$$

Тогда выражение для производной от первого интеграла в (1.9) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-}\overset{\circ}{\rho}_-\frac{\partial\overset{\circ}{A}_{\alpha -}}{\partial t}d\overset{\circ}{V}+\int\limits_{\overset{\circ}{S}}\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -}\overset{\circ}{\mathbf{c}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}. \quad (1.14)$$

Совершенно аналогично вычисляется производная от второго интеграла в (1.9):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+(t)}\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha +}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)d\overset{\circ}{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big(\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+-\Delta\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha +}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t+\Delta t)d\overset{\circ}{V}-$$

$$-\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+}\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha +}(\overset{\circ}{\mathbf{x}},t)d\overset{\circ}{V}\Big)=\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+}\overset{\circ}{\rho}_+\frac{\partial\overset{\circ}{A}_{\alpha +}}{\partial t}d\overset{\circ}{V}-\int\limits_{\overset{\circ}{S}}\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha +}\overset{\circ}{\mathbf{c}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}d\overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.15)$$

так как нормаль $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ для объема $\overset{\circ}{V}_+$ направлена в другую сторону.

Подставляя (1.14) и (1.15) в (1.9), приходим к следующей теореме.

Теорема 4.1. *Для любых функций $\overset{\circ}{A}_\alpha$, определенных в области $\overset{\circ}{V}$ с поверхностью разрыва $\overset{\circ}{S}$ и удовлетворяющих аксиоме 17, имеет место правило дифференцирования объемного интеграла:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha d\overset{\circ}{V}=\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\overset{\circ}{A}_\alpha}{\partial t}d\overset{\circ}{V}-\int\limits_{\overset{\circ}{S}}(\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha +}-\overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha -})\overset{\circ}{D}d\overset{\circ}{\Sigma}, \quad (1.16)$$

где

$$\overset{\circ}{D}=\overset{\circ}{\mathbf{c}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}} \quad (1.16a)$$

— нормальная скорость движения поверхности разрыва.

Принимая во внимание определение 4.4, а также учитывая, что в $\mathring{\mathcal{K}}$ полная и частная производные по t совпадают, соотношение (1.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathring{V}} \mathring{\rho}\mathring{A}_\alpha d\mathring{V} = \int\limits_{\mathring{V}} \mathring{\rho}\frac{d\mathring{A}_\alpha}{dt}d\mathring{V} - \int\limits_{\mathring{S}} [\mathring{\rho}\mathring{A}_\alpha]\mathring{D}d\mathring{\Sigma}. \tag{1.17}$$

4.1.5. Вывод соотношений на когерентной поверхности разрыва в $\mathring{\mathcal{K}}$. Пусть поверхность разрыва $S(t)$ является когерентной, рассмотрим ее образ в $\mathring{\mathcal{K}}$ — поверхность разрыва $\mathring{S}$ и точку $\mathcal{M} \in \mathring{S}$. Построим специальную область $\mathring{V}_h$, называемую *окрестностью поверхности разрыва* и содержащую точку $\mathcal{M}$ (рис. 4.7).

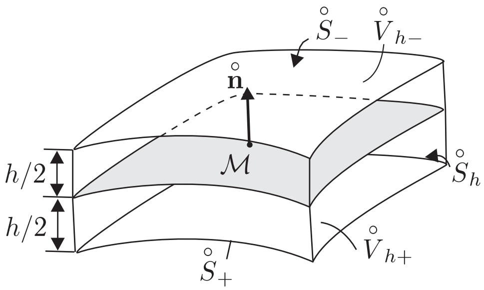

Рис. 4.7. Область для вывода условий на поверхности разрыва

Для построения области $\mathring{V}_h$ выберем часть $\mathring{\Sigma}_h$ поверхности $\mathring{S}$, так что $\mathcal{M} \in \mathring{\Sigma}_h$, и введем криволинейные координаты X^i таким образом, что линии X^1, X^2 принадлежат поверхности $\mathring{S}$, а линии X^3 направлены по нормали к $\mathring{S}$. Область $\mathring{V}_h$ ограничена поверхностью $\partial\mathring{V}_h$, состоящей из боковых поверхностей $\mathring{\Sigma}_{h\pm}$ (их уравнения $X^3 = \pm h/2$), торцевых поверхностей $\tilde{\mathring{\Sigma}}_{h\pm}$ (их уравнения $0 < X^3 < h/2$ и $-h/2 < X^3 < 0$, а X^I, $I = 1, 2$, удовлетворяют уравнению контура $\mathring{\mathcal{L}}_\Sigma$, ограничивающего поверхность $\mathring{\Sigma}_h$: $X^I = X^I_\Sigma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$).

Воспользуемся интегральной формой законов сохранения (2.9.11), которые справедливы для произвольного конечного объема, в том числе и для $\mathring{V}_h$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathring{V}_h} \mathring{\rho}\mathring{A}_\alpha d\mathring{V} = \int\limits_{\mathring{V}_h} \mathring{\rho}C_\alpha d\mathring{V} + \int\limits_{\partial\mathring{V}_h} \mathring{\mathbf{n}}\cdot\mathring{B}_\alpha d\mathring{\Sigma}. \tag{1.18}$$

Уравнения сохранения (1.18) с учетом теоремы (1.16) и условий (1.7), (1.8) для функций C_α можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\mathring{V}_h} \mathring{\rho}\frac{\partial\mathring{A}_\alpha}{\partial t}d\mathring{V} - \int\limits_{\mathring{\Sigma}_h}[\mathring{\rho}\mathring{A}_\alpha]\mathring{D}d\mathring{\Sigma} - \int\limits_{\partial\mathring{V}_h}\mathring{\mathbf{n}}\cdot\mathring{B}_\alpha d\mathring{\Sigma} - \int\limits_{\mathring{V}_h}\mathring{\rho}\widetilde{C}_\alpha d\mathring{V} - \int\limits_{\mathring{\Sigma}_h}\mathring{C}_{\alpha\Sigma}d\mathring{\Sigma} = 0. \tag{1.19}$$

Здесь $[\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha]$ соответствует скачку функций на поверхности разрыва $\overset{\circ}{\Sigma}_h$:

$$[\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha] = (\overset{\circ}{\rho}_+\overset{\circ}{A}_{\alpha+} - \overset{\circ}{\rho}_-\overset{\circ}{A}_{\alpha-})_{\overset{\circ}{\Sigma}_h}. \tag{1.20}$$

Воспользуемся тем, что область $\overset{\circ}{V}_h$ выбрана специальным образом, и можно рассмотреть однопараметрическое семейство таких областей, нумеруя их по параметру $h \in (0, h_0)$. Тогда, принимая во внимание, что, согласно аксиоме 17, функции $\overset{\circ}{\rho}(\partial\overset{\circ}{A}_\alpha/\partial t)$, $\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\overset{\circ}{B}_\alpha$ и C_α являются непрерывными в областях $\overset{\circ}{V}_{h\pm}$ и могут иметь только конечный разрыв на $\overset{\circ}{\Sigma}_h$ (поле вектора нормали $\overset{\circ}{\mathbf{n}}(X^i)$ в каждой точке X^i области $\overset{\circ}{V}_{h\pm}$ доопределяем так: $\overset{\circ}{\mathbf{n}}(X^i) = \pm\overset{\circ}{\mathbf{n}}(X^I)$), а функции $[\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha]D$ и $\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}$ — непрерывны на $\overset{\circ}{\Sigma}_h$, можно перейти к пределу при $h \to 0$ (говорят «стянуть область $\overset{\circ}{V}_h$ к точке»). В предельном переходе имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|\overset{\circ}{\Sigma}_h|}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_h}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}d\overset{\circ}{V} = 0, \tag{1.21}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|\overset{\circ}{\Sigma}_h|}\int\limits_{\partial\overset{\circ}{V}_h}\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\overset{\circ}{B}_\alpha d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}_+\cdot\overset{\circ}{B}_{\alpha+} + \overset{\circ}{\mathbf{n}}_-\cdot\overset{\circ}{B}_{\alpha-} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot(\overset{\circ}{B}_{\alpha+} - \overset{\circ}{B}_{\alpha-}) = \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{\circ}{B}_\alpha], \tag{1.22}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|\overset{\circ}{\Sigma}_h|}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_h}[\overset{\circ}{\rho}A_\alpha]\overset{\circ}{D}d\overset{\circ}{\Sigma} = [\overset{\circ}{\rho}A_\alpha]\overset{\circ}{D}, \tag{1.23}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|\overset{\circ}{\Sigma}_h|}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_h}\overset{\circ}{\rho}\widetilde{C}_\alpha d\overset{\circ}{V} = 0, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{|\overset{\circ}{\Sigma}_h|}\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_h}\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}. \tag{1.24}$$

Поделив теперь каждое слагаемое в (1.19) на $|\overset{\circ}{\Sigma}_h|$ и переходя к пределу $h \to 0$, с помощью формул (1.21)–(1.24) приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. *Для системы функций $\overset{\circ}{\rho}$, $\overset{\circ}{A}_\alpha$, $\overset{\circ}{B}_\alpha$ и C_α:*

- *определенной в области $\overset{\circ}{V}$ с когерентной поверхностью разрыва $\overset{\circ}{S}$,*
- *удовлетворяющей аксиоме 17,*
- *удовлетворяющей интегральным законам сохранения (2.9.11),*

имеют место следующие соотношения на поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$:

$$-[\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha]\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{\circ}{B}_\alpha] + \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}, \qquad \alpha = 1, \ldots 6. \tag{1.25}$$

4.1.6. Соотношение между скоростями движения поверхности разрыва в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$. Определим скорость движения поверхности разрыва $S(t)$ в

$\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathbf{c} = \frac{d\mathbf{x}_\Sigma}{dt}(X^i\big|_{\overset{\circ}{S}(t)}, t), \qquad \mathbf{x}_\Sigma \in S(t). \tag{1.26}$$

Даже если материальные точки не переходят через поверхность разрыва (т.е. $\overset{\circ}{S}$ не зависит от t), этот вектор $\mathbf{c}$ все равно может быть отличен от нуля из-за движения самих материальных точек $\mathcal{M}$ поверхности разрыва при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$.

Установим теперь важную для дальнейшего формулу, связывающую скорости $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{c}$ движения поверхности разрыва в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$, определенные формулами (1.12) и (1.26). Рассмотрим для этой цели соотношения (1.2) на когерентной поверхности, принимая во внимание закон движения (1.1.4) материальных точек на поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$. Учитывая, что от координат X^i можно перейти к $\overset{\circ}{x}{}^i$, это соотношение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}_\Sigma(X^i\big|_{\overset{\circ}{S}}, t) = \mathbf{x}(\overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma(X^j\big|_{\overset{\circ}{S}_+}, t), t) = \mathbf{x}(\overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma(X^j\big|_{\overset{\circ}{S}_-}, t), t), \tag{1.27}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma = \overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma \bar{\mathbf{e}}_i$ — радиус-вектор точек на поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, зависящий не только от X^j, но и от t. Здесь мы использовали условие когерентности поверхности $S(t)$: $X^i\big|_{\overset{\circ}{S}_+} = X^i\big|_{\overset{\circ}{S}_-}$.

Подставляя (1.27) в определение $\mathbf{c}$ (1.26), находим

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{x}_\Sigma}{\partial t}(\overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma(X^j\big|_{\overset{\circ}{S}_+}, t), t) + \frac{\partial \mathbf{x}_+}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma}{\partial t} = \mathbf{v}_{\Sigma+} + \mathbf{F}_+ \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}} = \mathbf{v}_{\Sigma-} + \mathbf{F}_- \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}}. \tag{1.28}$$

Здесь было использовано определение (1.4.1) вектора скорости материальной точки $\mathcal{M}$ на поверхности разрыва

$$\mathbf{v}_{\Sigma\pm} = \frac{\partial \mathbf{x}_\Sigma}{\partial t}(X^i\big|_{\overset{\circ}{S}_\pm}, t),$$

а также определение (1.12) скорости движения поверхности раздела в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$: $\overset{\circ}{\mathbf{c}} = \dfrac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma}{\partial t} = \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_i$, и введены обозначения для градиента деформации на поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$:

$$\mathbf{F}_\pm = \left(\frac{\partial x^m}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\right)\Big|_{\overset{\circ}{S}_\pm} \bar{\mathbf{e}}_m \otimes \bar{\mathbf{e}}^i. \tag{1.29}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Скорости $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{c}$ движения когерентной поверхности разрыва $S(t)$ в отсчетной и актуальной конфигурациях, определенные по (1.12) и (1.26), связаны следующими соотношениями:*

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_{\Sigma\pm} + \mathbf{F}_\pm \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}}, \tag{1.30}$$

или

$$\overset{\circ}{\mathbf{c}} = \mathbf{F}_{\pm}{}^{-1} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{\Sigma\pm}). \tag{1.31}$$

4.2. Соотношения на поверхности разрыва в пространственном описании

4.2.1. Вывод соотношений на когерентных поверхностях разрыва в пространственном описании. Установим теперь соотношения для скачков функций ρ_α, A_α, B_α и C_α на когерентной поверхности разрыва $S(t)$, соответствующей поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Для этого умножим соотношение (1.25) на элементарную площадку $d\overset{\circ}{\Sigma}$:

$$-[\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{A}_\alpha]\overset{\circ}{\mathbf{c}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [B_\alpha] d\overset{\circ}{\Sigma} + \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma} d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.1}$$

Теорема 4.4. *Для функций $\overset{\circ}{B}_\alpha$ и B_α, определенных формулами (2.9.6) и (2.9.9), имеют место соотношения:*

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{B}_\alpha] d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot [B_\alpha] d\Sigma, \qquad \alpha = 1, \ldots 6. \tag{2.2}$$

▼ Действительно, при $\alpha = 2$ имеем: $B_2 = \mathbf{T}$, $\overset{\circ}{B}_2 = \mathbf{P}$, и поэтому, в силу (2.2.30), получаем

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}]\ d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}]\ d\Sigma. \tag{2.3}$$

При $\alpha = 3$ имеем $B_3 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}$, $\quad \overset{\circ}{B}_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}$, и, следовательно,

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}] d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}] d\Sigma. \tag{2.4}$$

При $\alpha = 4$ имеем $B_4 = \mathbf{q}/\theta$, $\overset{\circ}{B}_4 = \overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta$, поэтому на основании формулы (2.4.28) выполняется соотношение

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta] d\overset{\circ}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}/\theta] d\Sigma. \tag{2.5}$$

При $\alpha = 6$ имеем $B_6 = \rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}$, $\overset{\circ}{B}_6 = \overset{\circ}{\rho} \mathbf{E} \otimes \mathbf{v}$, поэтому, используя формулу (1.2.49), получаем

$$\mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}] d\Sigma = \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\rho \sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\, \mathbf{E} \otimes \mathbf{v}] d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\rho} \mathbf{E} \otimes \mathbf{v}] d\overset{\circ}{\Sigma}, \tag{2.6}$$

что и требовалось доказать. ▲

Для того чтобы преобразовать левую часть в (2.1), используем соотношение (1.31), тогда имеют место следующие соотношения:

$$\overset{\circ}{\rho}_+ \overset{\circ}{D} d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\rho}_+ \overset{\circ}{\mathbf{c}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} d\overset{\circ}{\Sigma} = \overset{\circ}{\rho}_+ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_+{}^{-1} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{\Sigma+}) d\overset{\circ}{\Sigma} =$$
$$= \overset{\circ}{\rho}_- \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_-{}^{-1} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{\Sigma-}) d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.7}$$

Но, учитывая свойство преобразования элементарных площадок (см. (1.2.49)), примененное к площадкам на поверхности разрыва:

$$\overset{\circ}{\rho}_{\pm}\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_{\pm}{}^{-1} d\overset{\circ}{\Sigma} = \rho_{\pm}\mathbf{n}d\Sigma, \tag{2.8}$$

получаем

$$\overset{\circ}{\rho}_{\pm}\overset{\circ}{D}d\overset{\circ}{\Sigma} = \rho_{\pm}\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}d\Sigma - \rho_{\pm}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\Sigma\pm}d\Sigma = \rho_{\pm}(D - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\Sigma\pm})d\Sigma, \tag{2.9}$$

где обозначена нормальная скорость D движения поверхности раздела в $\mathcal{K}$:

$$D = \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) и (2.2) в (2.1), приходим к следующей теореме.

Теорема 4.5. *Соотношения (1.25) на когерентной поверхности разрыва* $\overset{\circ}{S}$ *в* $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ *эквивалентны соотношениям*

$$-[\rho A_{\alpha}]D + \mathbf{n}\cdot[\rho\mathbf{v}\otimes A_{\alpha}] - \mathbf{n}\cdot[B_{\alpha}] = C_{\alpha\Sigma}, \tag{2.11}$$

имеющим место на соответствующей поверхности разрыва $S(t)$ *в* $\mathcal{K}$.

Здесь скачки функций, соответствующих поверхности разрыва S, согласно (1.2), определяются соотношениями

$$[\rho A_{\alpha}] = (\rho_{+}A_{\alpha+} - \rho_{-}A_{\alpha-})_{S}. \tag{2.12}$$

Кроме того в (2.11) введены сингулярные источники в $\mathcal{K}$, связанные с $\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}$ соотношениями

$$C_{\alpha\Sigma}d\Sigma = \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}d\overset{\circ}{\Sigma}. \tag{2.13}$$

4.2.2. Правило дифференцирования интеграла по подвижному объему с наличием поверхности разрыва. Установим теперь имеющее самостоятельное значение правило дифференцирования интеграла по подвижному объему $V(t)$. Это правило является обобщением формулы (2.1.12) для случая области $V(t)$ с поверхностью разрыва $S(t)$.

Рассмотрим функцию $A_{\alpha}(\overset{\circ}{x}{}^{i}, t)$, где $\overset{\circ}{x}{}^{i} \in \overset{\circ}{V}$, удовлетворяющую аксиоме 17. Переходя из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ с помощью закона движения $x^{i} = x^{i}(\overset{\circ}{x}{}^{j}, t)$, получим, что функция $A_{\alpha}(x^{j}, t) = A_{\alpha}(x^{i}(\overset{\circ}{x}{}^{j}, t), t) = A_{\alpha}(\overset{\circ}{x}{}^{j}, t)$ будет непрерывно-дифференцируемой в V_{+} и V_{-}, а на границе раздела $S(t)$ областей может иметь конечный разрыв, т.е.

$$A_{\alpha} = \begin{cases} A_{\alpha+}, & x^{i}\in V_{+}, \\ A_{\alpha-}, & x^{i}\in V_{-}, \end{cases} \qquad [A_{\alpha}] < +\infty, \tag{2.14}$$

где

$$[A_{\alpha}] = A_{+}\big|_{S} - A_{-}\big|_{S}. \tag{2.15}$$

Согласно теореме 4.1, для функции A_α выполняется правило дифференцирования (1.17) в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Преобразуем интеграл, стоящий в левой части (1.17), следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} A_\alpha d\overset{\circ}{V} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_+} A_{\alpha+}\overset{\circ}{\rho}_+ d\overset{\circ}{V} + \frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{\circ}{V}_-} A_{\alpha-}\overset{\circ}{\rho}_- d\overset{\circ}{V} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{V_+} A_{\alpha+}\rho_+ dV + \frac{d}{dt}\int\limits_{V_-} A_{\alpha-}\rho_- dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho A_\alpha dV. \quad (2.16)$$

Здесь мы использовали тот факт, что в областях $\overset{\circ}{V}_+$ и $\overset{\circ}{V}_-$, а также в V_+ и V_-, функции $\overset{\circ}{\rho}_\pm$ и $A_{\alpha\pm}$ являются гладкими и для них выполняется уравнение неразрывности (2.1.6), позволяющее перейти от интегралов по $\overset{\circ}{V}_\pm$ к интегралам по $V_\pm$.

Аналогично преобразуем первый интеграл в правой части формулы (1.17):

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\frac{dA_\alpha}{dt} d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{V} \rho\frac{dA_\alpha}{dt} dV. \quad (2.17)$$

Второй интеграл в правой части формулы (1.17) преобразуем, используя соотношение (2.9) для элементарных площадок $d\overset{\circ}{\Sigma}$ и $d\Sigma$:

$$\int\limits_{\overset{\circ}{S}} [\overset{\circ}{\rho} A_\alpha]\overset{\circ}{D} d\Sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{S}} (\overset{\circ}{\rho}_+ A_+ \overset{\circ}{D} d\overset{\circ}{\Sigma} - \overset{\circ}{\rho}_- A_- \overset{\circ}{D} d\overset{\circ}{\Sigma}) =$$

$$= \int\limits_{S} (\rho_+ A_+ (D - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_+) d\Sigma - \rho_- A_- (D - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_-)) d\Sigma = \int\limits_{S} [\rho A(D - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v})] d\Sigma. \quad (2.18)$$

Подставляя формулы (2.16)–(2.18) в соотношение (1.17), приходим к следующей теореме.

Теорема 4.6. *Для любых функций A_α, определенных в области $V(t)$ с когерентной поверхностью разрыва $S(t)$ и удовлетворяющих следствию (2.14) из аксиомы 17, имеет место правило дифференцирования интеграла по подвижному объему при наличии поверхности разрыва:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho A_\alpha dV = \int\limits_{V} \rho\frac{dA_\alpha}{dt} dV - \int\limits_{S} [\rho A_\alpha (D - v_n)] d\Sigma. \quad (2.19)$$

Формулу (2.19) можно записать иначе. Разбивая первый интеграл в правой части (2.19) на интегралы по областям V_+ и V_-, и используя формулу

(2.1.20), имеем

$$\int\limits_{V_\pm} \left(\rho \frac{dA_\alpha}{dt}\right)_\pm dV = \int\limits_{V_\pm} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho A_\alpha) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes A_\alpha)\right)_\pm dV. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в (2.19), получаем еще два представления правила дифференцирования интеграла по подвижному объему при наличии поверхности разрыва $S(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho A_\alpha dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial \rho A_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes A_\alpha)\right) dV - \int\limits_S [\rho A_\alpha (D - v_n)] d\Sigma \tag{2.21}$$

и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho A_\alpha dV = \int\limits_V \frac{\partial \rho A_\alpha}{\partial t} dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes A_\alpha) d\Sigma - \int\limits_S [\rho A_\alpha (D - v_n)] d\Sigma. \tag{2.22}$$

4.3. Явный вид соотношений на поверхности разрыва

4.3.1. Явный вид соотношений на поверхности сильного разрыва в отсчетной конфигурации. Распишем теперь соотношения (1.25) в явном виде. Воспользуемся обозначениями $\overset{\circ}{A}_\alpha$, $\overset{\circ}{B}_\alpha$ и C_α (см. (2.9.2), (2.9.6) и (2.9.9)). Подставляя их в (1.25), получаем явный вид соотношений для скачков функций на поверхности сильного разрыва в $\mathcal{K}$:

$$\begin{gathered}
[\overset{\circ}{\rho}]\overset{\circ}{D} = 0,\\
[\overset{\circ}{\rho}\mathbf{v}]\overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] + \overset{\circ}{C}_{2\Sigma} = 0,\\
[\overset{\circ}{\rho}(e + v^2/2)]\overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}] + \overset{\circ}{C}_{3\Sigma} = 0,\\
[\overset{\circ}{\rho}\eta]\overset{\circ}{D} - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta] + \overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0,\\
[\overset{\circ}{\rho}\mathbf{u}]\overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{C}_{5\Sigma} = 0,\\
[\overset{\circ}{\rho}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}]\overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes [\overset{\circ}{\rho}\mathbf{v}] + \overset{\circ}{C}_{6\Sigma} = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

4.3.2. Явный вид соотношений на поверхности сильного разрыва в актуальной конфигурации. Подставляя обозначения функций A_α, B_α и C_α (см. (2.9.2) и (2.9.6)) в соотношения (2.11), получаем явный вид этих соотношений:

$$\begin{gathered}
[\rho(D - v_n)] = 0,\\
[\rho\mathbf{v}(D - v_n)] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] + C_{2\Sigma} = 0,\\
[\rho(e + v^2/2)(D - v_n)] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0,\\
[\rho\eta(D - v_n)] - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}/\theta] + C_{4\Sigma} = 0,\\
[\rho\mathbf{u}(D - v_n)] + C_{5\Sigma} = 0,\\
[\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(D - v_n)] + \mathbf{n} \cdot [\rho\mathbf{F} \otimes \mathbf{v}] + C_{6\Sigma} = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$v_{n\pm} = \mathbf{v}_{\Sigma\pm} \cdot \mathbf{n}. \tag{3.3}$$

Функции $\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}$ и $C_{\alpha\Sigma}$, вообще говоря, в этих уравнениях являются независимыми. Выражения для них задаются с помощью дополнительных гипотез о характере поверхностей раздела $\overset{\circ}{S}$ и S.

4.3.3. Массовая скорость движения поверхности разрыва. Обозначим *массовую скорость движения поверхности разрыва* в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ как

$$\overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{D}\overset{\circ}{\rho}_{+}, \tag{3.4}$$

причем, в силу первого соотношения в (3.1):

$$\overset{\circ}{\rho}_{+}\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{\rho}_{-}\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{M}. \tag{3.5}$$

Из первого уравнения в (3.2) имеем

$$\rho_{+}(D - \mathbf{v}_{\Sigma+} \cdot \mathbf{n}) = \rho_{-}(D - \mathbf{v}_{\Sigma-} \cdot \mathbf{n}) \equiv M, \tag{3.6}$$

где M — *массовая скорость* движения поверхности разрыва в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$.

Теорема 4.7. *Массовые скорости $\overset{\circ}{M}$ и M связаны соотношением*

$$M = \frac{k_{+}\rho_{+}}{\overset{\circ}{\rho}_{+}}\overset{\circ}{M}, \quad k_{\pm} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{\pm}^{-1} \cdot \mathbf{n})^{1/2} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_{\pm} \cdot \mathbf{F}_{\pm}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{n})^{1/2}, \tag{3.7}$$

причем

$$k_{+}\rho_{+}/\overset{\circ}{\rho}_{+} = k_{-}\rho_{-}/\overset{\circ}{\rho}_{-}, \tag{3.8}$$

т.е. $[k\rho/\overset{\circ}{\rho}] = 0$ *или* $[\rho/(\overset{\circ}{k}\,\overset{\circ}{\rho})] = 0$.

▼ Подставляя в определение (3.6) выражение (2.10) и формулу (1.30), получим

$$M = \rho_{+}(D - \mathbf{v}_{\Sigma+} \cdot \mathbf{n}) = \rho_{+}(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{\Sigma\pm}) \cdot \mathbf{n} = \rho_{+}\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_{+} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}}. \tag{3.9}$$

Применим формулу (1.2.57), связывающую векторы нормали $\mathbf{n}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, к материальным точкам на поверхности разрыва:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_{+} = k_{+}\overset{\circ}{\mathbf{n}}, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_{-} = k_{-}\overset{\circ}{\mathbf{n}}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), находим окончательно:

$$M = k_{+}\rho_{+}\overset{\circ}{\mathbf{c}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = \frac{k_{+}\rho_{+}}{\overset{\circ}{\rho}_{+}}\overset{\circ}{M}. \tag{3.11}$$

Аналогично показываем, что

$$M = \frac{k_{-}\rho_{-}}{\overset{\circ}{\rho}_{-}}\overset{\circ}{M}. \quad ▲ \tag{3.12}$$

Часто вводят также *собственную скорость движения поверхности разрыва* D_0:
$$D_0 = D - \mathbf{v}_{\Sigma+} \cdot \mathbf{n}, \tag{3.13}$$
которая на основании (1.30) и (2.10) связана с $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ соотношением
$$D_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_+ \cdot \overset{\circ}{\mathbf{c}}. \tag{3.14}$$
Если материальные точки не переходят через поверхность разрыва, то $\overset{\circ}{\mathbf{c}} = 0$ и, следовательно,
$$\overset{\circ}{D} = D_0 = 0, \qquad \overset{\circ}{M} = M = 0. \tag{3.15}$$
Соотношение (3.6) с учетом (3.1) можно представить в виде
$$[\rho] D_0 = \rho_- [v_n]. \tag{3.16}$$

Введение массовой скорости $\overset{\circ}{M}$ позволяет переписать соотношения (1.25) на скачках следующим образом:
$$\overset{\circ}{M}[A_\alpha] + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{B}_\alpha] + \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad \alpha = 2 \ldots 6, \tag{3.17}$$
или в явной форме:
$$[\overset{\circ}{\rho}]\overset{\circ}{D} = 0, \tag{3.17а}$$
$$\overset{\circ}{M}[\mathbf{v}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0, \tag{3.17б}$$
$$\overset{\circ}{M}[e + \frac{v^2}{2}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}] + \overset{\circ}{C}_{3\Sigma} = 0, \tag{3.17в}$$
$$\overset{\circ}{M}[\eta] - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta] + \overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0, \tag{3.17г}$$
$$\overset{\circ}{M}[\mathbf{u}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{5\Sigma} = 0, \tag{3.17д}$$
$$\overset{\circ}{M}[\mathbf{F}^{\mathrm{T}}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes [\overset{\circ}{\rho}\mathbf{v}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{6\Sigma} = 0. \tag{3.17е}$$

Аналогично с учетом (3.6) соотношения (2.11) можно представить в виде
$$M[A_\alpha] + \mathbf{n} \cdot [B_\alpha] + C_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad \alpha = 2 \ldots 6, \tag{3.18}$$
или в явной форме
$$[\rho(D - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] = 0, \tag{3.19}$$
$$M[\mathbf{v}] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \tag{3.20}$$
$$M[e + \frac{v^2}{2}] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0, \tag{3.21}$$
$$M[\eta] - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}/\theta] + C_{4\Sigma} = 0, \tag{3.22}$$
$$M[\mathbf{u}] + \mathbf{C}_{5\Sigma} = 0, \tag{3.23}$$
$$M[\mathbf{F}^{\mathrm{T}}] + \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}] + \mathbf{C}_{6\Sigma} = 0. \tag{3.24}$$

4.3.4. Соотношения на поверхности разрыва в случае отсутствия перехода материальных точек. Из (3.18) следует, что если материальные точки не переходят через поверхность разрыва, т.е. $\overset{\circ}{M} = M = 0$, то на $\overset{\circ}{S}$ и S имеют место соотношения:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{B}_\alpha] + \overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{S}, \tag{3.25}$$

$$\mathbf{n} \cdot [B_\alpha] + C_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad \mathbf{x} \in S, \qquad \alpha = 2\ldots 6. \tag{3.26}$$

Или

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{q}}] + \overset{\circ}{C}_{3\Sigma} = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{q}/\theta] + \overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0, \\ \overset{\circ}{C}_{5\Sigma} = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes [\overset{\circ}{\rho}\mathbf{v}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{6\Sigma} = 0, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \overset{\circ}{S}, \end{cases} \tag{3.27}$$

а также

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}/\theta] + C_{4\Sigma} = 0, \\ C_{5\Sigma} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\rho\mathbf{F} \otimes \mathbf{v}] + \mathbf{C}_{6\Sigma} = 0, \qquad \mathbf{x} \in S. \end{cases} \tag{3.28}$$

4.4. Основные типы поверхностей разрыва

Проанализируем теперь возможный вид поверхностных функций $C_{\alpha\Sigma}$ и $\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma}$ для поверхности разрыва $S(t)$, которая, вообще говоря, может быть некогерентной.

4.4.1. Скачок плотности. На любой поверхности разрыва $S(t)$ всегда выполнено условие отсутствия скачка массы (так как $C_1 = \overset{\circ}{C}_1 \equiv 0$), поэтому

$$\overset{\circ}{C}_{1\Sigma} = C_{1\Sigma} = 0. \tag{4.1}$$

Из (3.17а) следует, что скачок плотности $[\overset{\circ}{\rho}]$ может быть отличен от нуля только в том случае, если материальные точки не переходят через поверхность разрыва (вектор $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ и, следовательно, $\overset{\circ}{D}$ равны нулю):

$$\overset{\circ}{D} = 0, \qquad [\overset{\circ}{\rho}] \neq 0. \tag{4.2}$$

Если же материальные точки переходят через поверхность разрыва, то скачок плотности $\overset{\circ}{\rho}$ всегда равен нулю:

$$\overset{\circ}{D} \neq 0, \qquad [\overset{\circ}{\rho}] = 0. \tag{4.3}$$

Заметим, что скачок плотности $[\rho]$ в этом случае отличен от нуля (см. соотношение (3.19)).

4.4.2. Скачки радиуса-вектора и вектора перемещений. Сделанные предположения о гладкости всех функций $\rho_\pm$, $A_{\alpha\pm}$, $B_{\alpha\pm}$ в областях $V_\pm$ вплоть до границы S означают отсутствие несплошностей в актуальной конфигурации, т.е. невозможность движения двух сплошных сред так, как это изображено на рис. 4.8. Математически это можно описать следующим образом: для всех точек границы S в $\mathcal{K}$ радиусы-векторы $\mathbf{x}$ слева и справа совпадают:

$$\mathbf{x}_{\Sigma+} - \mathbf{x}_{\Sigma-} = 0 \quad \text{или} \quad [\mathbf{x}] = 0. \tag{4.4}$$

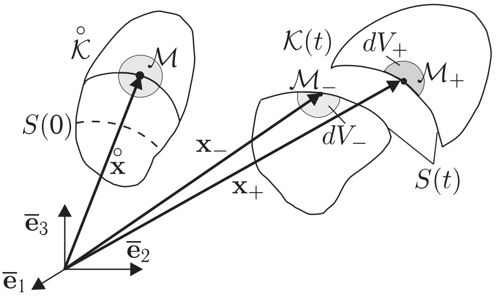

Рис. 4.8. Такое движение сплошной среды невозможно при сделанных предположениях о гладкости всех функций $\rho_\pm$, $A_{\alpha\pm}$, $B_{\alpha\pm}$

Однако вектор перемещений $\mathbf{u}$ может терпеть разрыв на S.

Поверхность Σ называют *поверхностью без сингулярных смещений*, если выполнены условия

$$\overset{\circ}{C}_{5\Sigma} = C_{5\Sigma} = 0. \tag{4.5}$$

На поверхности без сингулярных смещений из (3.19)–(3.24) имеем:

- при отсутствии перехода материальных точек через S, когда $D_0 = \overset{\circ}{D} = 0$, $M = \overset{\circ}{M} = 0$, скачок перемещений может быть отличен от нуля

$$M = 0, \qquad [\mathbf{u}] \neq 0, \tag{4.6}$$

- при наличии перехода материальных точек через S, когда $D_0 \neq 0$, $M \neq 0$, скачок перемещений отсутствует:

$$M \neq 0, \qquad [\mathbf{u}] = 0. \tag{4.7}$$

В случае когерентных поверхностей S очевидно (см. определение 4.4), что, кроме $\mathbf{x}$, радиус-вектор в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ также является непрерывным:

$$[\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)] = 0. \tag{4.8}$$

Примером *некогерентных поверхностей* являются поверхности взаимодействия твердой сплошной среды и идеальной газовой среды, на которой происходит «скольжение» газа, а также поверхность S с сингулярными перемещениями, на которой выполнено условие

$$C_{5\Sigma} \neq 0. \tag{4.9}$$

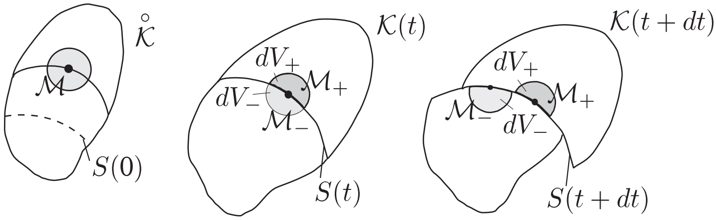

Рис. 4.9. Перемещение соседних точек на некогерентной поверхности

На некогерентных поверхностях материальные точки M_+ и M_- сплошной среды, соседние в отсчетной конфигурации, могут разойтись на произвольное расстояние, хотя на границе раздела S не появится несплошностей (рис. 4.9). Вектор перемещений при этом терпит скачок

$$M \neq 0, \qquad [\mathbf{u}] \neq 0. \tag{4.10}$$

Логическая схема когерентных и некогерентных поверхностей представлена на рис. 4.10.

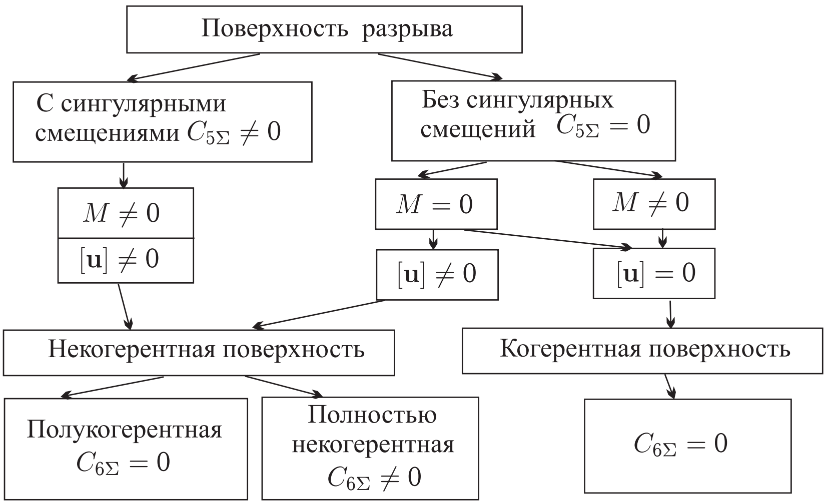

Рис. 4.10. Логическая схема поверхностей разрыва

4.4.3. Полукогерентные и полностью некогерентные поверхности разрыва. Некогерентную поверхность разрыва $S(t)$ называют *полукогерентной*, если на ней выполнены условия:

$$\overset{\circ}{C}_{6\Sigma} = 0, \qquad C_{6\Sigma} = 0. \tag{4.11}$$

Если же на некогерентной поверхности $S(t)$ выполнены условия

$$\overset{\circ}{C}_{6\Sigma} \neq 0, \qquad C_{6\Sigma} \neq 0, \tag{4.12}$$

то такую поверхность называют *полностью некогерентной*.

На полукогерентных поверхностях разрыва отсутствуют сингулярные скачки градиента деформации $\mathbf{F}$ (рис. 4.11).

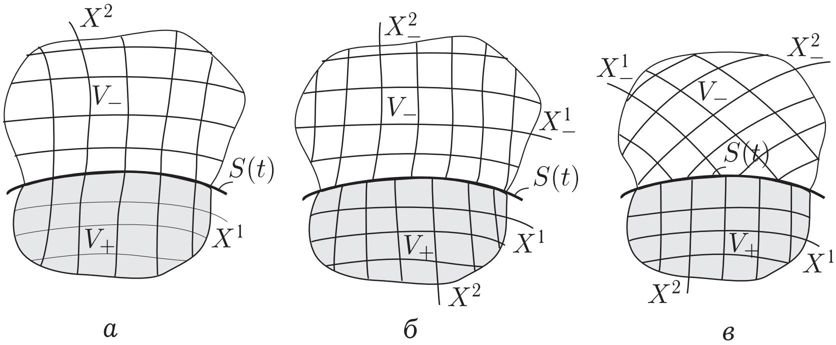

Рис. 4.11. Схематическое изображение: *а* — когерентной, *б* — полукогерентной и *в* — некогерентной поверхностей разрыва $S(t)$ в $\mathcal{K}$. Здесь X^i и $X_-{}^i$ — лагранжевы координаты в областях V_+ и V_-

4.4.4. Недиссипативные и гомотермические поверхности разрыва. Поверхность разрыва является *недиссипативной*, если на ней отсутствуют сингулярные источники производства энтропии

$$\overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0, \qquad C_{4\Sigma} = 0. \tag{4.13}$$

Недиссипативными обычно являются поверхности плавления, отверждения, сублимации и осаждения из газовой фазы для твердых сред, а также многие поверхности фазовых превращений. Примером диссипативных поверхностей являются поверхности ударных волн, поверхности химических реакций и др.

Заметим, что функция $C_{4\Sigma}$, согласно (1.8а), представляет собой скачок производства энтропии за счет внешних источников тепла и за счет внутренних источников. Если внешние источники тепла отсутствуют (такие процессы движения называют *адиабатическими*), то $\mathbf{q} = 0$, $q_m = 0$ и $\widetilde{C}_4 = 0$, а $C_{4\Sigma}$ — неотрицательна:

$$C_{4\Sigma} = C^*_{4\Sigma} \geqslant 0. \tag{4.13a}$$

Вектор поверхностных усилий $\mathbf{C}_{2\Sigma}$ и энергия поверхностных сил $C_{3\Sigma}$ обычно связаны с явлением поверхностного натяжения:

$$\mathbf{C}_{2\Sigma} = -P_\Sigma \mathbf{n}, \qquad P_\Sigma = \sigma_\Sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{4.14}$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности $S(t)$ (см. [12]), а σ_Σ — *коэффициент поверхностного натяжения* — характеристика поверхности среды, определяемая экспериментально.

Соответствующее значение энергии поверхностных сил определяется как

$$C_{3\Sigma} = (1/2)\mathbf{C}_{2\Sigma} \cdot (\mathbf{v}_{\Sigma+} + \mathbf{v}_{\Sigma-}). \tag{4.15}$$

При наличии электромагнитных эффектов функции $\mathbf{C}_{2\Sigma}$ и $C_{3\Sigma}$ связаны с поверхностными электромагнитными силами и энергией.

При отсутствии электромагнитных эффектов и поверхностного натяжения

$$\overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{C}_{3\Sigma} = C_{3\Sigma} = 0. \tag{4.16}$$

Поверхность Σ называют *гомотермической*, если на ней выполнено условие отсутствия скачка температуры:

$$[\theta] = 0 \qquad \text{на } \mathbf{x} \in \Sigma. \tag{4.17}$$

Это условие используют в подавляющем большинстве задач о фазовых превращениях, химических реакциях, ударных волнах и др.

4.4.5. Поверхности идеального контакта. Гомотермическую, когерентную, недиссипативную поверхность $S(t)$, через которую нет перехода материальных точек, называют *поверхностью идеального контакта*. Для такой поверхности:

$$\overset{\circ}{C}_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad C_{\alpha\Sigma} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, 6, \tag{4.18}$$

и

$$[\overset{\circ}{\mathbf{x}}] = 0, \qquad M = 0, \qquad [\theta] = 0, \qquad [\mathbf{u}] = 0, \qquad [\mathbf{v}] = 0. \tag{4.19}$$

Поскольку материальные точки не переходят через поверхность идеального контакта, то скорость движения поверхности $S(t)$ совпадает со скоростью $\mathbf{v}$ движения материальных точек $\mathcal{M}$ на $S(t)$, причем скачок скорости также равен нулю, что следует из (3.6) или (3.17e).

К соотношениям (4.18), (4.19) следует присоединить соотношения (3.28), которые в данном случае имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] = 0, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}], \tag{4.21}$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}/\theta] = 0, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}] = 0. \tag{4.23}$$

Из (4.19) и (4.22) следует, что скачок нормальной составляющей вектора потока тепла равен нулю:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] = 0, \tag{4.24}$$

а соотношение (4.21) не является независимым, оно удовлетворяется тождественно, если выполнены (4.19) и (4.22). Соотношение (4.23), в силу $[\mathbf{v}] = 0$, эквивалентно следующему:

$$\mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{F}] = 0, \tag{4.23a}$$

которое, в силу формулы (1.2.49), представляет собой не что иное, как геометрическое условие сохранения вектора нормали в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$0 = [\overset{\circ}{\mathbf{n}}] d\overset{\circ}{\Sigma} = [\rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}] d\Sigma / \overset{\circ}{\rho}.$$

Таким образом, в системе (4.19)–(4.24) независимыми являются следующие соотношения:

$$\begin{cases} [\mathbf{u}] = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] = 0, \\ [\theta] = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] = 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

которые называют *соотношениями на поверхности идеального контакта.*

Аналогично в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ из (4.19) и (3.27) получаем следующие независимые соотношения на поверхности идеального контакта:

$$\begin{cases} [\mathbf{u}] = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \\ [\theta] = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}] = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

4.4.6. О граничных условиях. Выше мы рассматривали случай, когда в обеих областях V_+ и V_- функции $\rho_\pm$, $A_{\alpha\pm}$ и $B_{\alpha\pm}$ являются неизвестными и подлежат нахождению. Однако соотношения (3.18) могут быть использованы и для другого случая: когда в одной из областей, например в V_+, функции ρ_+, $A_{\alpha+}$, $B_{\alpha+}$ заданы, а в другой области — V_- — функции ρ_-, $A_{\alpha-}$, $B_{\alpha-}$ являются искомыми. В этом случае соотношения (3.18) на поверхности S раздела областей V_+ и V_- служат источником получения *граничных условий на* S при формулировке начально-краевых задач. Заметим, что при этом, как правило, не все функции ρ_+, $A_{\alpha+}$, $B_{\alpha+}$ в области V_+ могут быть заданы произвольным образом, часть из них обычно при формулировке соответствующей задачи МСС должна оставаться неизвестной и определяться в ходе ее решения.

4.4.7. Уравнения поверхности разрыва в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Уравнение всякой гладкой поверхности, в том числе и поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}(t)$, может быть задано *неявным образом* — с помощью одного скалярного уравнения в координатах $\overset{\circ}{x}{}^i$:

$$\overset{\circ}{S}: \qquad \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{x}{}^i, t) = 0. \tag{4.27}$$

Аргумент t указывает на то, что функция $\overset{\circ}{f}$ поверхности может изменяться во времени.

Если ввести криволинейные координаты $\widetilde{X}^I, I = 1, 2$ на поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$ [12], то можно записать *параметрическое задание поверхности* $\overset{\circ}{S}$ в координатах $\overset{\circ}{x}{}^i$:

$$\overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma = \overset{\circ}{x}{}^i(\widetilde{X}^I, t), \tag{4.28}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma = \overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma \bar{\mathbf{e}}_i$ — радиус-вектор точки поверхности $\overset{\circ}{S}$.

Введем касательные векторы на поверхности $\overset{\circ}{S}$ и ортогональный к ним единичный вектор нормали на поверхности:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_I = \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}_\Sigma}{\partial \widetilde{X}^I}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{n}} = \frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_2}{|\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_2|}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_I = 0, \quad I = 1, 2. \tag{4.29}$$

На основе касательных векторов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_I$ всегда можно построить ортонормированные касательные векторы $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I$, поэтому на поверхности $\overset{\circ}{S}$ всегда имеется ортонормированный базис $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I, \overset{\circ}{\mathbf{n}}$ $(I = 1, 2)$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I = 0, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_1 \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_2 = 0, \quad I = 1, 2. \tag{4.29a}$$

Подставляя (4.28) в (4.27), уравнение поверхности разрыва можно представить как сложную функцию криволинейных координат поверхности: $\overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{x}{}^i(\widetilde{X}^I, t), t) = 0$. Дифференцируя это уравнение по $\widetilde{X}^I$, получаем

$$\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i} \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma}{\partial \widetilde{X}^I} = 0. \tag{4.30}$$

Если ввести теперь вектор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f} = \dfrac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i} \bar{\mathbf{e}}^i$ — *градиент поверхности*, то с учетом (4.29) соотношение (4.30) можно переписать в виде скалярного произведения $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_I = 0$. Иначе говоря, градиент поверхности $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f}$ ортогонален касательным векторам, следовательно, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f}$ коллинеарен вектору $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$. Тогда, нормируя вектор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f}$, получаем следующую важную формулу:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f} / |\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f}|, \tag{4.31}$$

позволяющую вычислить вектор нормали $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ к поверхности $\overset{\circ}{S}$, заданной неявным образом в виде уравнения (4.27).

Вычислим теперь полный дифференциал по t от уравнения (4.27): $d\overset{\circ}{f} = \dfrac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i} d\overset{\circ}{x}{}^i_\Sigma = 0$. Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i} \bar{\mathbf{e}}^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^j_\Sigma}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_j \right) = 0. \tag{4.32}$$

Используя определения (1.12) вектора скорости движения поверхности разрыва $\overset{\circ}{\mathbf{c}}$ и градиента поверхности, получаем

$$\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial t} + \overset{\circ}{\mathbf{c}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f} = 0. \tag{4.33}$$

С учетом определения (1.16a) для нормальной скорости движения поверхности разрыва $\overset{\circ}{D}$ и формулы (4.31) для вектора нормали уравнение (4.33) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial t} + \overset{\circ}{D}|\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\overset{\circ}{f}| = 0. \tag{4.34}$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением поверхности разрыва* $\overset{\circ}{S}(t)$, оно позволяет найти уравнение (4.27) поверхности $\overset{\circ}{S}(t)$, если задана только нормальная скорость $\overset{\circ}{D}$ и начальное положение этой поверхности $\overset{\circ}{S}(0)$:

$$\overset{\circ}{S}(0): \qquad \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{x}{}^i, 0) = 0. \tag{4.35}$$

4.4.8. Уравнения поверхности разрыва в $\mathcal{K}$. Рассмотрим теперь уравнение поверхности разрыва $S(t)$ в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$. В *неявном виде* это уравнение имеет вид, аналогичный (4.27):

$$S: \qquad f(x^i, t) = 0, \tag{4.36}$$

а параметрическое уравнение поверхности разрыва аналогично (4.28):

$$x^i_\Sigma = x^i(\widetilde{X}^I, t), \qquad I = 1, 2, \tag{4.37}$$

где $\mathbf{x}_\Sigma = x^i_\Sigma \bar{\mathbf{e}}_i$ — радиус-вектор точки поверхности S. Дифференцируя этот радиус-вектор по криволинейным координатам поверхности, получаем выражение для касательных векторов к $S(t)$ и для вектора нормали:

$$\boldsymbol{\rho}_I = \frac{\partial \mathbf{x}_\Sigma}{\partial \widetilde{X}^I} \qquad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2|}, \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_I = 0, \quad I = 1, 2. \tag{4.38}$$

На основе касательных векторов $\boldsymbol{\rho}_I$ всегда можно построить ортонормированные касательные векторы $\boldsymbol{\tau}_I$, поэтому на поверхности S всегда имеется ортонормированный базис $\boldsymbol{\tau}_I, \mathbf{n}$, $I = 1, 2$:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}_I = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2 = 0, \quad I = 1, 2. \tag{4.38a}$$

Подставляя функцию (4.37) в (4.36), уравнение поверхности разрыва представляем как сложную функцию криволинейных координат поверхности: $f(x^i(\widetilde{X}^I, t), t) = 0$. Дифференцируя это уравнение по X^I, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i_\Sigma}{\partial \widetilde{X}^I} = 0. \tag{4.39}$$

Если ввести градиент поверхности $\boldsymbol{\nabla} f = (\partial f/\partial x^i)\bar{\mathbf{e}}^i$, то с учетом (4.38) соотношение (4.39) принимает вид: $\boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{\rho}_I = 0$. Сравнивая это соотношение с формулой (4.38) ортогональности касательных векторов и вектора нормали, получаем формулу связи вектора единичной нормали $\mathbf{n}$ с градиентом поверхности $\boldsymbol{\nabla} f$:

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|} \tag{4.40}$$

— аналог формулы (4.31).

Вычислим полный дифференциал по t от уравнения (4.36):

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i_\Sigma = 0.$$

С учетом формулы (1.26) это уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = 0. \tag{4.41}$$

Если теперь использовать определение (2.10) нормальной скорости D движения поверхности разрыва $S(t)$ в $\mathcal{K}$, уравнение (4.41) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D|\boldsymbol{\nabla} f| = 0, \tag{4.42}$$

его называют *дифференциальным уравнением поверхности разрыва* $S(t)$ в $\mathcal{K}$. Переходя от D к собственной скорости движения поверхности разрыва D_0, заданной формулой (3.13), уравнение (4.42) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (D_0 + \mathbf{v}_{\Sigma+}\cdot\mathbf{n})|\boldsymbol{\nabla} f| = 0. \tag{4.43}$$

Это уравнение позволяет найти уравнение поверхности $S(t)$ в форме (4.36), если заданы только нормальная скорость D и начальное положение этой поверхности $S(0) = \overset{\circ}{S}(0)$:

$$S(0): \qquad f(x^i, 0) = \overset{\circ}{f}(x^i, 0) = 0. \tag{4.44}$$

Упражнения к 4.4

Упражнение 4.4.1. Показать, что уравнение (4.43) движения поверхности разрыва может быть записано также в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D_0|\boldsymbol{\nabla} f| + \mathbf{v}_{\Sigma+}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = 0,$$

а при отсутствии перехода материальных точек через поверхность разрыва — следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_{\Sigma+}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = 0.$$

Глава 5

УПРУГИЕ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

5.1. Замкнутые системы уравнений в пространственном описании

5.1.1. $\theta RUVF$-система уравнений термоупругости. Перейдем теперь к формулировке задач для общего случая упругих, т.е. идеальных твердых сред с произвольными конечными деформациями, определяющие соотношения для которых были установлены в разд. 3.5–3.9.

Общая система законов сохранения (2.9.5) в пространственном (эйлеровом) описании состоит из уравнения неразрывности ($\alpha = 1$), уравнения движения ($\alpha = 2$), уравнения энергии ($\alpha = 3$), динамического уравнения совместности деформаций ($\alpha = 5$) и кинематического уравнения ($\alpha = 6$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \tag{1.1а}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \tag{1.1б}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \varepsilon + \mathbf{q}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q_m, \tag{1.1в}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}) = 0, \tag{1.1г}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{v}. \tag{1.1д}$$

Вообще система законов сохранения (2.9.5), как отмечалось, состоит из шести групп уравнений ($\alpha = 1, \ldots 6$), суммарно образующих 18 скалярных уравнений: $1 + 3 + 1 + 1 + 9 + 3 = 18$. Однако после присоединения к этой системе определяющих соотношений, мы должны исключить из нее одно из уравнений термодинамики. В самом деле, вспомним (см. разд. 3.4), что часть определяющих соотношений эквивалентна ОТТ, которое было получено суммированием двух уравнений термодинамики (см. разд. 3.3), поэтому ОТТ заменяет одно из них. Чаще всего исключают уравнение баланса энтропии (2.9.5) при $\alpha = 4$. В этом случае система (1.1а)–(1.1д) состоит из 17 скалярных уравнений и содержит 27 скалярных неизвестных:

$$\rho, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{T}, e, \theta, \mathbf{q}, \mathbf{F} \parallel \mathbf{x}, t. \tag{1.1е}$$

Каждое векторное поле $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{q}$ эквивалентно трем скалярным функциям, тензорное поле $\mathbf{T}$ — шести скалярным функциям, а поле $\mathbf{F}$ — девяти скалярным функциям.

Для замыкания этой системы к ней следует присоединить определяющие соотношения. Часть этих соотношений имеет одинаковый вид для всех идеальных твердых сред — это закон Фурье (3.12.7) и выражение для плотностей полной энергии ε и внутренней энергии e (см. (3.3.12) и (3.5.4)):

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{1.2а}$$

$$\varepsilon = e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = \psi - \theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{v^2}{2}. \tag{1.2б}$$

Остальные определяющие соотношения для идеальных твердых сред зависят от выбора той или иной модели среды. Вид этих соотношений был рассмотрен в разд. 3.8. Воспользуемся установленным в п. 3.8.10 наиболее общим представлением определяющих соотношений упругих сред в форме (3.8.111):

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}, \theta), \tag{1.3а}$$

$$\psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma G}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F})), \theta) \equiv \psi(\mathbf{F}, \theta), \tag{1.3б}$$

где тензорные функции $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G$ и потенциал ψ зависят от выбора модели A_n, B_n, C_n или D_n и определяются соотношениями (3.8.109)–(3.8.115):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}, \theta) = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\mathbf{F}, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \; {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G},$$

$$\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} = \partial I^{(s)}_{\gamma G} / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \qquad \varphi_\gamma = \rho(\partial\varphi / \partial I^{(s)}_{\gamma G}),$$

$$I^{(s)}_{\gamma G} = h_G I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G) + (1 - h_G) I^{(s)}_\gamma(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G \cdot \mathbf{O}), \tag{1.4}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} (\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} (h_G \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + (1 - h_G)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha)) - \frac{\bar{h}_G}{n - \mathrm{III}} \mathbf{E},$$

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes (h_G \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha + (1 - h_G)\mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha).$$

Здесь $I^{(s)}_\gamma$ — инварианты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ относительно группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ рассматриваемой упругой среды, а

$$\lambda_\alpha, \; \mathbf{p}_\alpha, \; \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \;\; \| \;\; \mathbf{F} \tag{1.5}$$

— собственные значения и собственные векторы, являющиеся функциями тензора $\mathbf{F}$, коэффициенты $E_{\alpha\beta}$ выражаются только через λ_α (см. (3.2.38)), $\mathbf{O} = \mathbf{p}_ß \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^ß$ — тензор поворота, сопровождающий деформацию, также зависит только от $\mathbf{F}$, а h_G и $\bar{h}_G$ — функции-указатели класса модели:

$$h_G = \begin{cases} 1, & G = A, B, \\ 0, & G = C, D, \end{cases} \qquad \bar{h}_G = \begin{cases} 1, & G = A, C, \\ 0, & G = B, D. \end{cases} \tag{1.4а}$$

Внутреннюю энергию e можно рассматривать как функцию $\mathbf{F}$ и θ, т.е.

$$e = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = e(\mathbf{F}, \theta). \tag{1.6}$$

Тогда мы получим систему из 10 скалярных определяющих соотношений (векторное соотношение (1.2а) эквивалентно трем скалярным; соотношение (1.2б), в которое подставлено (1.3б) — одно скалярное соотношение, а (1.3а) эквивалентно шести скалярным соотношениям), которые вместе с (1.1) образуют замкнутую систему из 27 скалярных уравнений относительно 27 скалярных неизвестных функций (1.1е).

Число уравнений и неизвестных в этой системе может быть сокращено, если подставить определяющие соотношения (1.2) и (1.3) в (1.1б) и (1.1в), в результате получим систему из 17 скалярных уравнений относительно 17 неизвестных:

$$\theta, \rho, \nu, \mathbf{v}, \mathbf{F} \parallel \mathbf{x}, t. \tag{1.7}$$

Такую систему уравнений (1.1) назовем *$\theta RUVF$-системой уравнений термоупругости*.

Замечание 1. Выбирая функции $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I_{\gamma G}^{(s)}$ для моделей A_n, B_n, C_n или D_n в каком-либо виде из числа рассмотренных в разд. 3.8, будем получать частные представления тензорных функций (1.4). Так, если рассматривают модели A_n, то общее представление функции таково (см. (3.8.48)):

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_A(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = {}^4\mathbf{M} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \xi \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 + {}^6\mathbf{L} \cdot\cdot\cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \tag{1.8}$$

где ${}^4\mathbf{M}$ — квазилинейный тензор упругости, ξ — параметр квадратичной упругости, ${}^6\mathbf{L}$ — тензор квадратичной упругости, вообще говоря, зависят от инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$. Для квазилинейных моделей A_n полагают (см. (3.8.54)) $\xi = 0$, ${}^6\mathbf{L} = 0$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_A(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = {}^4\mathbf{M} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \tag{1.8а}$$

а для линейных моделей кроме того ${}^4\mathbf{M} = J\, {}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$, где ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ — тензор модулей упругости, не зависящий от $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$.

Подставляя указанное выражение для $\boldsymbol{\mathcal{F}}_A$ в (1.4), получаем соответствующее ему представление тензорной функции $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_A$:

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_A(\mathbf{F}, \theta) = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_A = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot ({}^4\mathbf{M} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \xi \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 + {}^6\mathbf{L} \cdot\cdot\cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha.$$

Замечание 2. Вместо уравнения энергии (1.1в) можно использовать эквивалентное ему уравнение притока тепла (2.4.24):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} e + \mathbf{q}) = \mathbf{T} \cdot\cdot\ \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \rho q_m, \tag{1.9а}$$

или, вообще, уравнение баланса энтропии (2.9.5) при $\alpha = 4$, которое можно записать в форме (2.5.13):

$$\theta \rho \frac{d\eta}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \rho q_m. \tag{1.9б}$$

Определяющие соотношения (1.2б) при этом заменяются на

$$\eta = -\partial \psi / \partial \theta = \eta(\mathbf{F}, \theta). \tag{1.9в}$$

Иногда уравнения (1.9а) или (1.9б) оказываются более удобными, чем уравнение энергии (1.1в), поскольку они содержат меньшее число слагаемых. Однако при численном решении задач уравнение (1.1в), имеющее полностью дивергентную форму (уравнение (1.9а) обладает дивергентной формой условно — с точностью до слагаемого $\mathbf{T} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$), часто является более предпочтительным.

Уравнение баланса энтропии (1.9б) можно преобразовать, используя для этого основное термодинамическое тождество в форме (3.3.14):

$$\frac{d\psi}{dt} + \eta \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{1.10}$$

Здесь для мощности напряжений $w_{(i)}$ использовано определение (3.2.1) и учтено, что для упругих сред $w^* = 0$.

Дифференцируя (1.10) по θ и принимая во внимание, что ρ и $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ выражаются только через $\mathbf{F}$ и не зависят от θ, а $\mathbf{F}$ и θ — независимые переменные, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}.$$

Подставляя сюда соотношение (1.9в), приходим к следующему выражению для скорости изменения плотности энтропии:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot\cdot\ \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}. \tag{1.10а}$$

Если же подставить (1.2а), (1.3а) и (1.10а) в (1.9б), то получим следующее уравнение:

$$\rho c_\varepsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\mathbf{F}, \theta) \cdot\cdot\ \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \rho q_m, \tag{1.11}$$

которое называют *уравнением теплопроводности упругой среды в пространственном описании*. Здесь введено обозначение для функции

$$c_\varepsilon(\mathbf{F}, \theta) = -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \tag{1.11а}$$

называемой *теплоемкостью упругой среды* при фиксированных деформациях.

5.1.2. θRVF-, θRUV- и θUV-системы динамических уравнений термоупругости. Заметим, что формально вектор перемещений $\mathbf{u}$ входит только в кинематическое соотношение (1.5), и это уравнение можно исключить из общей системы. В этом случае говорят, что рассматривается *θRVF-система уравнений теории термоупругости*. Однако из-за граничных условий это уравнение не всегда можно исключить из общей системы (см. далее разд. 5.3).

Можно еще сократить число уравнений и неизвестных в системе (1.1)–(1.3), исключив градиент деформации $\mathbf{F}$ из числа неизвестных (1.1е). Для этого следует вспомнить, что обратный градиент обладает векторным потенциалом (см. (1.2.10)):

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}. \tag{1.12}$$

Это соотношение по сути является уравнением совместности — динамическое уравнение совместности (1.1г) было выведено из этого уравнения (см. п. 2.7.1). Поэтому соотношение (1.12) можно рассмотреть вместо уравнения (1.1г). Тогда, подставляя (1.12) в определяющие соотношения (1.3), представим их как функции обратного градиента (см. п. 3.8.10, формулы (3.8.116) и (3.8.117)):

$$\begin{gathered}
\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}^{-1}, \theta), \\
\psi = \psi(I_{\gamma G}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F}^{-1})), \theta) \equiv \theta(\mathbf{F}^{-1}, \theta), \\
e = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = e(\mathbf{F}^{-1}, \theta),
\end{gathered} \tag{1.13а}$$

тензорная функция $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G$ при этом формально имеет такой же вид (1.4), но λ_α, $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ рассматриваются в зависимости от $\mathbf{F}^{-1}$:

$$\lambda_\alpha,\ \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,\ \mathbf{p}_\alpha\ \parallel\ \mathbf{F}^{-1}. \tag{1.13б}$$

Тогда, подставляя определяющие соотношения (1.13а) и (1.2а) в уравнения (1.1б) и (1.1в), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \tag{1.14а}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \theta) + \rho \mathbf{f}, \tag{1.14б}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \varepsilon = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta + \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \theta) \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q_m, \tag{1.14в}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{v}, \tag{1.14г}$$

$$\varepsilon = e(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \theta) + \frac{v^2}{2} \tag{1.14д}$$

— *θRUV-систему уравнений термоупругости*, состоящую из 8 скалярных уравнений относительно 8 скалярных неизвестных:

$$\theta, \rho, \mathbf{u}, \mathbf{v} \ \| \ \mathbf{x}, t. \tag{1.15}$$

Замечание 3. Ввиду достаточно сложной зависимости тензоров ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ от $\mathbf{F}^{-1}$ (см. соотношения (1.4) и (1.13б)), которая в общем случае не имеет даже явного аналитического представления (собственные значения λ_α и собственные векторы $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, вообще говоря, аналитически не могут быть выражены через $\mathbf{F}^{-1}$, а только в виде вычислительного алгоритма (см. п. 1.3.2)), зависимость тензора $\mathbf{T}$ от градиента перемещений $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}$ в теории конечных упругих деформаций имеет весьма непростой вид. Даже для линейных моделей (см. п. 3.8.7 и (1.8)), в которых тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ связаны линейным образом, из-за указанных зависимостей $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F}^{-1})$ и ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G(\mathbf{F}^{-1})$ нелинейная зависимость между $\mathbf{T}$ и $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}$ остается очень сложной. Однако исключением являются модели A_{I} и B_{I}, для которых тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_A = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Lambda}$, $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}_B = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и ${}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}}_A = {}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}}_B = {}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}}$ достаточно просто аналитически выражаются через $\mathbf{F}^{-1}$ (см. упр. 3.2.21 и (1.2.6а)), и тензорные зависимости $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F}^{-1})$ и ${}^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{E}}_G(\mathbf{F}^{-1})$ являются квадратичными. Система θRUV динамических уравнений теории упругости (1.14) для этих моделей существенно упрощается и имеет следующий вид (модель A_{I}):

$$\begin{cases} \partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v} = 0, \\ \partial\rho\mathbf{v}/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}, \\ \partial\rho\varepsilon/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + \mathbf{T}\cdot\mathbf{v}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \rho q_m, \\ \partial\rho\mathbf{u}/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) = \rho\mathbf{v}, \end{cases} \tag{1.16а}$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \sum_{\gamma=1}^{r}\varphi_\gamma \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{I}_\gamma^{(s)}\cdot\mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial\boldsymbol{\Lambda}, \quad \varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}), \quad \psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\boldsymbol{\Lambda}), \theta), \\ \boldsymbol{\Lambda} = (1/2)(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}), \\ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \\ \varepsilon = e + v^2/2, \qquad e = \psi - \theta(\partial\psi/\partial\theta). \end{cases} \tag{1.16б}$$

Заменяя $\boldsymbol{\Lambda} \to \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$, получаем аналогичную систему для модели B_{I}. Находить собственные базисы и собственные значения λ_α в моделях A_{I} и B_{I} не требуется, что выделяет эти модели из всех остальных и является объяснением наиболее широкого использования этих моделей в рамках пространственного описания.

Следующими по уровню сложности являются модели A_{V} и B_{V}. Определяющие соотношения (1.16б) в модели A_{V} заменяют на следующие:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{I}_\gamma^{(s)} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \mathbf{C}, \quad \varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}), \quad \psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}), \theta), \\ \mathbf{C} = (1/2)(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}})^{-1}, \\ \varepsilon = e + (v^2/2), \quad e = \psi - \theta(\partial\psi/\partial\theta). \end{cases} \tag{1.16в}$$

Для этой модели также не требуется вычислять собственные векторы и собственные значения, но по сравнению с моделями A_{I} и B_{I} дополнительно необходимо обращать обратный градиент деформации, восстанавливая тензор $\mathbf{F}$.

Наиболее сложными с точки зрения использования для численного решения задач с произвольной геометрией области V являются модели A_{II}, B_{II} и A_{IV} и B_{IV}, для которых необходимо применить процедуру вычисления λ_α, $\mathbf{p}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$.

Замечание 4. Заметим также, что плотность ρ в системах (1.14) и (1.16) рассматривается как самостоятельная неизвестная, поэтому множитель $J = \rho/\overset{\circ}{\rho}$ в определяющих соотношениях (см. п. 3.8.7) следует оставлять в таком виде, не выражая его через тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ или $\overset{(n)}{\mathbf{g}}$ по формулам (3.2.80), (3.2.81). Если же осуществить такую подстановку, то получим, что ρ можно выразить через $\mathbf{F}$, но такое соотношение $\rho = \rho(\mathbf{F})$ нам хорошо известно — это уравнение неразрывности в переменных Лагранжа (2.1.8):

$$\rho = \overset{\circ}{\rho} \det \mathbf{F}^{-1} = \overset{\circ}{\rho} \det (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}). \tag{1.17}$$

Поскольку это уравнение полностью эквивалентно уравнению неразрывности (1.14а) (см. разд. 2.1), то в рассматриваемом случае уравнение неразрывности следует исключить из общей системы (1.14) или (1.16), а в оставшиеся уравнения этих систем, в том числе и в определяющие соотношения, следует подставить (1.17). В этом случае получим θUV-систему (1.14б)–(1.14д), (1.17), состоящую из семи уравнений относительно семи неизвестных:

$$\theta, \ \mathbf{u}, \ \mathbf{v} \ \| \ \mathbf{x}, t. \tag{1.18}$$

Замечание 5. Сокращение числа уравнений и неизвестных обычно делает систему более сложной — так $\theta RUVF$-система (1.1) имеет первый порядок производных по $\mathbf{x}$ и t, а θUV-система — смешанный: относительно $\mathbf{v}$ — первый порядок, а относительно $\mathbf{u}$ — второй по $\mathbf{x}$ и первый по t. Поэтому часто более удобно рассматривать $\theta RUVF$-систему, в которой хотя и большее число уравнений, однако они все имеют одинаковый тип.

5.1.3. $T\theta RUVF$-система динамических уравнений термоупругости. Иногда при решении конкретных задач для твердых сред удобнее увеличить число уравнений даже по сравнению с $\theta RUVF$-системой (1.1), вводя тензор $\mathbf{T}$ или обобщенный энергетический тензор напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G$ (см. (3.2.90)) в качестве дополнительного неизвестного.

Для этого следует привлечь определяющие соотношения в скоростях (3.8.166). Выражая тензор $\mathbf{T}$ через энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$ с помощью соотношений (3.2.36), (3.2.66), (3.8.111):

$$\mathbf{T} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{Q}} \cdot\cdot \mathbf{S} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G, \tag{1.19}$$

получаем следующую $T\theta RUVF$*-систему уравнений термоупругости*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v} = 0, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G) + \rho\mathbf{f}, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G)\cdot\mathbf{v}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \rho q_m, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) = \rho\mathbf{v}, \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial\rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G) = \rho\,{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{P}}_{Gh}(\mathbf{F},\theta)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \\ + \rho\mathbf{Z}_{Gh}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G\cdot\mathbf{Z}_{Gh} + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}\dot{\theta}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho(\mathbf{v}\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}\otimes\mathbf{v}) = 0, \tag{1.25}$$

состоящую из 23 уравнений относительно $6+1+1+3+3+9=23$ скалярных неизвестных:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G, \theta, \rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F} \ \ \| \ \ \mathbf{x}, t. \tag{1.26}$$

К достоинствам этой системы следует отнести то, что все уравнения в ней имеют одинаковую дивергентную форму.

Входящие в уравнение (1.24) тензоры определены в п. 3.8.12: тензор ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{P}}_{Gh}$ — по формулам (3.8.147), (3.8.162), (3.2.105), (3.2.98), (1.5.43), тензор $\mathbf{Z}_{Gh}$ по (3.8.164) и (1.5.42), а тензор $\mathbf{T}_{\theta G}$ — по (3.8.147). Все эти тензоры являются функциями от $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}$.

Замечание 6. Уравнение (1.24) было установлено в п. 3.8.12 для моделей упругих сред, не содержащих тензор поворота $\mathbf{O}$, т.е. для моделей A_n, B_n, а также для изотропных сред, описываемых моделями C_n и D_n.

Поэтому для этих же классов моделей имеет место и $T\theta RUVF$-система (1.20)–(1.25).

5.1.4. Компонентная запись систем динамических уравнений термоупругости в пространственном описании. Для компонентной записи представленных выше систем уравнений чаще всего используют неподвижные базисы $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ и $\widetilde{\mathbf{r}}^i$ (см. п. 1.1.7). Локальные базисы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}^i$ применяют редко по причине, указанной в п. 2.1.2.

Компонентная запись $\theta RUVF$-системы (1.1) в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\widetilde{\nabla}_j(\rho\widetilde{v}^j)=0,$$

$$\frac{\partial\rho\widetilde{v}^i}{\partial t}+\widetilde{\nabla}_j(\rho\widetilde{v}^i\widetilde{v}^j-\widetilde{T}^{ji})=\rho\widetilde{f}^i,$$

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\widetilde{\nabla}_j(\widetilde{v}^i(\rho\varepsilon\delta_i^j-\widetilde{T}^{jk}\widetilde{g}_{ki})+\widetilde{q}^j)=\rho\widetilde{f}^i\widetilde{v}^j\widetilde{g}_{ij}+\rho q_m, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial\rho\widetilde{F}^i{}_j}{\partial t}+\widetilde{\nabla}_k(\rho\widetilde{v}^k\widetilde{F}^i{}_j-\rho\widetilde{F}^k{}_j\,\widetilde{v}^i)=0,$$

$$\frac{\partial\rho\widetilde{u}^i}{\partial t}+\widetilde{\nabla}_j\rho\widetilde{v}^j\widetilde{u}^i=\rho\widetilde{v}^i.$$

Определяющие соотношения (1.7), (1.8) в компонентах записывают следующим образом:

$$\widetilde{q}^i=-\widetilde{\lambda}^{ij}\widetilde{\nabla}_j\theta,\qquad \varepsilon=\psi-\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\widetilde{v}^i\widetilde{v}^j\widetilde{g}_{ij}. \tag{1.28}$$

Определяющие соотношения (1.3), (1.4) в компонентах имеют следующий вид:

$$\widetilde{T}^{ij}=\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}{}^{ij}_G(\widetilde{F}^k{}_l\,,\theta),$$

$$\psi=\psi(I^{(s)}_{\gamma G}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}{}^{ij}_G(\widetilde{F}^k{}_l\,)),\theta)\equiv\psi(\widetilde{F}^k{}_l\,,\theta),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}{}^{ij}_G=\sum_{\gamma=1}^{3}\varphi_\gamma\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{E}}{}^{ijkl}_G\widetilde{I}^{(s)}_{\gamma G,kl},$$

$$\widetilde{I}^{(s)}_{\gamma G,kl}=\partial I^{(s)}_{\gamma G}/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{C}}{}^{kl}_G,\qquad \varphi_\gamma=\rho(\partial\psi/\partial I^{(s)}_{\gamma G}), \tag{1.29}$$

$$I^{(s)}_{\gamma G}=h_G I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{C}}{}^{kl}_G)+(1-h_G)I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{C}}{}^{ij}_G\widetilde{O}_{ik}\widetilde{O}_{jl}),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{C}}{}^{ij}_G=\frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}(h_G\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^i{}_\alpha\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^j{}_\alpha+(1-h_G)\widetilde{Q}^i{}_\alpha\widetilde{Q}^j{}_\alpha)-\frac{\bar{h}_G}{n-\mathrm{III}}\widetilde{g}^{ij},$$

$$\widetilde{E}^{ijkl}_G=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}E_{\alpha\beta}\widetilde{Q}^i{}_\alpha\widetilde{Q}^j{}_\alpha(h_G\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^k{}_\beta\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^l{}_\alpha+(1-h_G)\widetilde{Q}^k{}_\beta\widetilde{Q}^l{}_\alpha).$$

Здесь собственные значения λ_α и якобиевы матрицы $\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^i{}_\alpha$, $\widetilde{Q}^i{}_\alpha$ собственных векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$, $\mathbf{p}_\alpha$ (см. упр. 3.2.20), согласно (1.5), являются функциями компонент $\widetilde{F}^i{}_j$ градиента деформации $\mathbf{F}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$:

$$\lambda_\alpha,\overset{\circ}{\widetilde{Q}}{}^i{}_\alpha,\widetilde{Q}^i{}_\alpha\ \parallel\ \widetilde{F}^i{}_j. \tag{1.30}$$

При переходе к компонентному представлению θRUV-системы (1.14) следует лишь исключить из (1.27) динамическое уравнение совместности деформаций, заменив его компонентным представлением соотношений (1.13а):

$$(\widetilde{F}^{-1})^k_{\ l} = (\widetilde{F}^k_{\ l})^{-1} = \delta^k_l - \widetilde{\nabla}_l \widetilde{u}^k, \tag{1.31}$$

в результате придем к следующей системе:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\rho \widetilde{v}^j) = 0,\\
\frac{\partial \rho \widetilde{v}^i}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\rho \widetilde{v}^i \widetilde{v}^j - \widetilde{T}^{ji}) = \rho \widetilde{f}^i,\\
\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\widetilde{v}^i(\rho\varepsilon\delta^j_i - \widetilde{g}_{mi}\widetilde{T}^{jm})) = \widetilde{\nabla}_j(\widetilde{\lambda}^{ij}\widetilde{\nabla}_i\theta) + \rho \widetilde{f}^i \widetilde{v}^j \widetilde{g}_{ij} + \rho q_m,\\
\frac{\partial \rho \widetilde{u}^i}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j \rho \widetilde{v}^j \widetilde{u}^i = \rho \widetilde{v}^i,\\
\varepsilon = \psi - \theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\widetilde{v}^i\widetilde{v}^j\widetilde{g}_{ij},\\
\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}{}^{ij} = \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}{}^{ij}_G(\delta^k_l - \widetilde{\nabla}_l\widetilde{u}^k, \theta), \qquad \psi = \psi(\delta^l_k - \widetilde{\nabla}_l \widetilde{u}^k, \theta).
\end{gathered} \tag{1.32}$$

Здесь мы, как и в (1.13б), перешли в определяющих соотношениях (1.29) к обратному градиенту $\mathbf{F}^{-1}$.

Компонентное представление системы (1.16) совпадает с (1.32), а тензорная функция $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_{ij}(F^k_{\ l})$, соответствующая этой системе (модель A_{I}), приведена в упр. 5.1.3.

Компонентное же представление $T\theta RUVF$-системы имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\rho \widetilde{v}^j) = 0,\\
\frac{\partial \rho \widetilde{v}^i}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\rho \widetilde{v}^i \widetilde{v}^j - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{E}}{}^{ijkl}_G \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gkl}) = \rho \widetilde{f}^i,\\
\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\widetilde{v}^i(\rho\varepsilon\delta^j_i - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{E}}{}^{kjml}_G \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gml}\widetilde{g}_{ki})) = \widetilde{\nabla}_j(\widetilde{\lambda}^{ij}\widetilde{\nabla}_i\theta) + \rho \widetilde{f}^i \widetilde{v}^j \widetilde{g}_{ij} + \rho q_m,\\
\frac{\partial \rho \widetilde{F}^i_{\ j}}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_k(\rho \widetilde{v}^k \widetilde{F}^i_{\ j} - \rho \widetilde{F}^k_{\ j}\, \widetilde{v}^i) = 0,\\
\frac{\partial \rho \widetilde{u}^i}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_j(\rho \widetilde{v}^j \widetilde{u}^i) = \rho \widetilde{v}^i,
\end{gathered} \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial \rho \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gij}}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_k(\rho \widetilde{v}^k \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gij}) = \rho \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{P}}_{Ghij}{}^k_{\ l}\, \widetilde{\nabla}_k \widetilde{v}^l +$$

$$+ \rho \widetilde{Z}_{Ghi}{}^k\, \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gkj} + \rho \widetilde{Z}_{Gh}{}^k_{\ j}\, \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{Gik} + \rho \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{\theta Gij}\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{P}}{}_{Ghij}{}^{k}{}_{l}$ и $\widetilde{Z}_{Ghi}{}^{k}$ — компоненты тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{P}}{}_{Gh}$ и $\mathbf{Z}_{Gh}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$.

5.1.5. Модель квазистатических процессов в упругих средах с конечными деформациями. В МСС широко используют понятие моделей процессов — движений сплошных сред при наличии некоторых допущений. Одной из самых распространенных является модель квазистатических процессов (т.е. очень медленных в некотором смысле движений из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$).

Определение 5.1. *Говорят, что рассматривается модель квазистатических процессов в твердой среде, если в уравнениях (1.1б) и (1.1в) $\theta RUVF$-системы (1.1) членами, содержащими скорость $\mathbf{v}$, по сравнению с другими членами можно пренебречь, т.е. положить, что в этих уравнениях*

$$\mathbf{v} \equiv 0. \tag{1.34}$$

На рис. 5.1 показан схематический график изменения во времени всех известных и неизвестных функций Ω для квазистатических и динамических процессов (движений, для которых нельзя ввести модель квазистатических процессов).

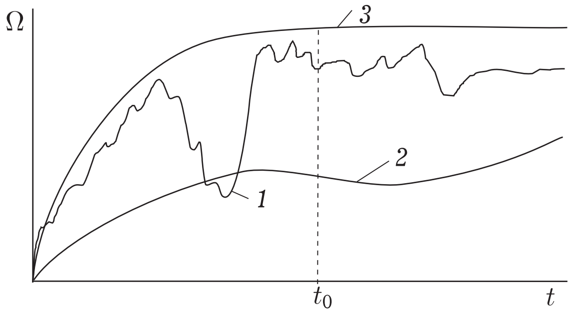

Рис. 5.1. Типичный график изменения функций во времени для динамических (*1*), квазистатических (*2*) и статических (*3*) процессов

Уравнение движения (1.1б) и уравнение теплопроводности (1.11), которое используется вместо уравнения энергии (1.1в), с учетом (1.34) принимают вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = 0,\\ \rho c_{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta) + \rho q_m.\end{gathered} \tag{1.35}$$

Присоединяя к этой системе определяющие соотношения (1.12) и (1.13):

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_G(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \theta), \tag{1.36}$$

получим замкнутую систему четырех скалярных уравнений относительно четырех скалярных функций:

$$\theta, \mathbf{u} \ \| \ \mathbf{x}, t. \tag{1.37}$$

Такую систему называют *квазистатической системой уравнений термоупругости в пространственном описании*. Плотность ρ в этой системе полагают выраженной через перемещения по уравнению неразрывности (1.17).

Остальные уравнения системы (1.1) в модели квазистатических процессов в общем случае выполняются только приближенно и поэтому не рассматриваются. Однако, если рассматривают систему уравнений (1.35) для *статических процессов*, для которых, начиная с некоторого момента t_0, функции θ и $\mathbf{u}$ не зависят от t (см. рис. 5.1), то уравнения (1.1а), (1.1г), (1.1д) принимают вид

$$\partial\rho/\partial t = 0, \qquad \partial\mathbf{F}/\partial t = 0, \qquad \partial\mathbf{u}/\partial t = 0, \tag{1.38}$$

и выполняются точно при $t > 0$, их решение таково:

$$\rho = \rho(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \tag{1.39}$$

где правые части этих соотношений находятся после решения системы (1.35), (1.36).

Упражнения к 5.1

Упражнение 5.1.1. Показать, что для квазилинейных моделей A_{I} (см. замечание 1 или п. 3.8.7) определяющие соотношения (1.8а) можно представить в явном аналитическом виде, подобно (1.16б):

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot ({}^4\mathbf{M} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{F}^{-1},$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}), \qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}},$$

или

$$\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}) \cdot ({}^4\mathbf{M} \cdot\cdot\, (\mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}).$$

Упражнение 5.1.2. Используя формулу (3.8.46), показать, что для изотропных сред соотношения (1.9а) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot (\psi_1\mathbf{E} + \psi_2\boldsymbol{\Lambda} + \psi_3\boldsymbol{\Lambda}^2) \cdot \mathbf{F}^{-1},$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad -\psi_2 = \varphi_2 + I_1\varphi_3,$$

$$\psi_3 = \varphi_3, \qquad I_\alpha = I_\alpha(\boldsymbol{\Lambda}), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Используя формулу (3.8.61), показать, что для линейной модели A_{I} изотропных сред это соотношение принимает вид

$$\mathbf{T} = J(l_1 I_1(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + 2l_2\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{F}^{-1}),$$

или

$$\mathbf{T} = J\Big(l_1(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u})(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) + \\ + 2l_2(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} \cdot (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\Big),$$

где l_1 и l_2 — константы.

Упражнение 5.1.3. Показать, что компонентное представление определяющих соотношений (1.16б) модели A_{I} в базисе $\widetilde{\mathbf{r}}_i$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{T}^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \widetilde{g}^{ik}\widetilde{g}^{jl}(\widetilde{F}^{-1})^m_{\ \ k}\,(\widetilde{F}^{-1})^s_{\ \ l}\,\widetilde{I}^{(s)}_{\gamma ms},$$

$$\widetilde{I}^{(s)}_{\gamma ms} = \partial I^{(s)}_\gamma / \partial \widetilde{\Lambda}^{ms}, \qquad \varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I^{(s)}_\gamma), \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_\gamma(\widetilde{\Lambda}^{ms}), \theta),$$

$$\widetilde{\Lambda}^{ms} = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}^m \widetilde{u}^s + \widetilde{\nabla}^s \widetilde{u}^m - \widetilde{\nabla}^k \widetilde{u}^m \widetilde{\nabla}_k \widetilde{u}_s), \quad (\widetilde{F}^{-1})^m_{\ \ k} = \delta^m_k - \widetilde{\nabla}_k \widetilde{u}^m.$$

Используя результат упр. 5.1.1, показать, что для квазилинейной модели A_{I} это компонентное представление принимает вид

$$\widetilde{T}^{ij} = \widetilde{g}^{ik}\widetilde{g}^{jl}(\widetilde{F}^{-1})^p_{\ \ k}(\widetilde{F}^{-1})^q_{\ \ l}\,\widetilde{M}_{pqms}\widetilde{\Lambda}^{ms},$$

а для модели A_{I} изотропной среды — следующий вид:

$$\widetilde{T}^{ij} = \widetilde{g}^{ik}\widetilde{g}^{jl}(\widetilde{F}^{-1})^p_{\ \ k}(\widetilde{F}^{-1})^q_{\ \ l}\left(\psi_1 \widetilde{g}_{pq} + \psi_2 \widetilde{g}_{pm}\widetilde{g}_{qs}\widetilde{\Lambda}^{ms} + \psi_3 \widetilde{g}_{pm}\widetilde{g}_{qs}\widetilde{g}_{uv}\widetilde{\Lambda}^{mu}\widetilde{\Lambda}^{sv}\right).$$

5.2. Замкнутые системы уравнений в материальном описании

5.2.1. θUVF-система динамических уравнений термоупругости в материальном описании. При переходе к материальному описанию необходимо рассмотреть систему законов сохранения (2.9.8), которую в явном виде записывают следующим образом:

$$\rho = \overset{\circ}{\rho} \det \mathbf{F}^{-1}, \tag{2.1а}$$

$$\overset{\circ}{\rho}(\partial \mathbf{v}/\partial t) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}, \tag{2.1б}$$

$$\overset{\circ}{\rho}\theta(\partial \eta/\partial t) = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} + \overset{\circ}{\rho} q_m, \tag{2.1в}$$

$$\partial \mathbf{F}^{\mathrm{T}}/\partial t = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}, \tag{2.1г}$$

$$\partial \mathbf{u}/\partial t = \mathbf{v}. \tag{2.1д}$$

Вместо уравнения энергии здесь мы использовали уравнение баланса энтропии (2.5.21).

Система (2.1), как и (1.1), замыкается после присоединения к ней определяющих соотношений, состоящих из двух уравнений:

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}} = -\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta, \qquad \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \tag{2.2}$$

и универсальных определяющих соотношений (1.3), (1.4), которые записывают для тензора Пиолы–Кирхгофа:

$$\mathbf{P} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{F}, \theta), \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma G}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\mathbf{F})), \theta) \equiv \psi(\mathbf{F}, \theta), \tag{2.3}$$

где обозначена тензорная функция

$$\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}^{\circ}(\mathbf{F},\theta) \equiv (\overset{\circ}{\rho}/\rho)\mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}(\mathbf{F},\theta). \tag{2.4}$$

Система (2.1)–(2.3) содержит 16 скалярных неизвестных (плотность ρ полагают выраженной через $\mathbf{F}$):

$$\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F} \ \parallel \ X^i, t, \tag{2.5}$$

являющихся функциями лагранжевых координат X^i и времени t, и состоит из 16 скалярных уравнений (после подстановки (2.2) и (2.3) в (2.1)). Эту систему называют *θUVF-системой уравнений термоупругости в материальном описании*.

Для твердых сред чаще отдают предпочтение именно этой системе, поскольку область определения неизвестных функций (2.5) этой системы известна — это $\overset{\circ}{V} \times [0, t_{\max}]$. Исключение составляют задачи с фазовыми превращениями, в которых $\overset{\circ}{V}$ изменяется со временем и определяется в процессе решения. Однако и в этом случае, чаще система (2.1)–(2.3) предпочтительней, чем соответствующая система (1.1)–(1.6) в пространственном описании.

Замечание 1. Хотя в определении (2.4) тензорной функции $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}^{\circ}$ присутствует $\mathbf{F}^{-1}$, она, тем не менее, может быть представлена в виде зависимости от аргумента $\mathbf{F}$. Для этого следует использовать представление $\mathbf{F}^{-1}$ в собственном базисе (см. (1.3.35)), а также представление (1.4) функции $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}$, тогда получим

$$\mathbf{P} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}^{\circ}(\mathbf{F},\theta) = \sum_{\gamma=1}^{r} \overset{\circ}{\varphi}_{\gamma}\, {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{G}^{\circ} \cdot\cdot\, \mathbf{I}_{\gamma G}^{(s)}, \tag{2.6}$$

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{G}^{\circ} = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{G} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \mathbf{p}_{\beta} \otimes (h_G \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\beta} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} + (1-h_G)\mathbf{p}_{\beta} \otimes \mathbf{p}_{\alpha}),$$

$$\overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}/\lambda_{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\varphi}_{\gamma} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)\varphi_{\gamma}, \quad G = A, B, C, D.$$

Вид тензоров $\mathbf{I}_{\gamma G}^{(s)}$ совпадает с (1.9в). Тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{G}^{\circ}$ называют *лагранжевыми тензорами энергетической эквивалентности*, они связывают тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}_{G}$:

$$\mathbf{P} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{G}^{\circ} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}_{G}. \tag{2.7}$$

Например, выбирая тензорные функции $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}_{G} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_{G}, \theta)$ для моделей A_n в форме (1.8), получаем тензорную функцию $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{G}^{\circ}$ в следующем виде:

$$\mathbf{P} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^{\circ} \cdot\cdot\, ({}^4\mathbf{M} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \xi \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 + {}^6\mathbf{L} \cdot\cdot\cdot\cdot\, (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})), \tag{2.8}$$

где ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^{\circ} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G$.

Обратим внимание на то, что хотя в систему уравнений (2.1) входит тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа $\mathbf{P}$, но для заключительного (после решения системы (2.1) с граничными и начальными условиями) анализа поля напряжений в упругом теле, обычно нужно знать тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$, поэтому в материальном описании кроме определяющих соотношений (2.6) привлекают также и соотношения (1.4).

Замечание 2. Достаточно сложный и, вообще говоря, не имеющий аналитического выражения вид тензорной функции (2.6) значительно упрощается для двух исключительных моделей A_{V} и B_{V}, поскольку

$$\mathbf{P} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}\mathbf{F}^{-1}\cdot(\mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}) = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{2.9}$$

Подставляя сюда выражение (1.4) для тензорной функции $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_A(\mathbf{F},\theta)$, получаем

$$\mathbf{P} = \overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}^{\circ}_A(\mathbf{F},\theta) = \sum_{\gamma=1}^{r}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{2.10}$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{\gamma} = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I^{(s)}_{\gamma}), \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma}(\mathbf{C}),\theta), \quad \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma} = \partial I^{(s)}_{\gamma}/\partial\mathbf{C},$$
$$\mathbf{C} = (1/2)(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} - \mathbf{E}),$$

— тензорную функцию, имеющую явное аналитическое представление.

Делая в (2.10) замену $\mathbf{C}\to\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$, получаем тензорную функцию $\overset{\mathrm{V}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}^{\circ}_B(\mathbf{F},\theta)$ для модели B_{V}.

Вычислять собственные базисы и собственные значения для моделей A_{V} и B_{V} при построении функций (2.10) не требуется. Указанные преимущества выделяют модели A_{V} и B_{V} среди других при использовании материального описания так же, как и модели A_{I} и B_{I} в пространственном описании (см. замечание 3 в разд. 5.1). Эти модели наиболее широко используют на практике при численном решении задач теории упругости с конечными деформациями.

Следующими по уровню сложности в материальном описании являются модели A_{I} и B_{I}. Так определяющие соотношения (2.10) в модели A_{I} заменяют на соотношения

$$\mathbf{P} = \overset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}^{\circ}_A(\mathbf{F},\theta) = \sum_{\gamma=1}^{r}\overset{\circ}{\varphi}_{\gamma}\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma}\cdot\mathbf{F}^{-1}, \tag{2.11}$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{\gamma} = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I^{(s)}_{\gamma}), \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}),\theta), \quad \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma} = \partial I^{(s)}_{\gamma}/\partial\boldsymbol{\Lambda},$$
$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}).$$

В этой модели, хотя можно и не вычислять собственные значения и собственные векторы, однако дополнительно, по сравнению с моделями A_{V} и B_{V}, требуется обращать тензор $\mathbf{F}^{-1}$.

Наиболее сложными для численной реализации, как и в пространственном описании, являются модели A_{II}, B_{II} и A_{IV}, B_{IV}. $\square$

Уравнение баланса энтропии в системе (2.1) можно преобразовать подобно тому, как это было проделано в п. 5.1.1, используя при этом основное термодинамическое тождество в материальном описании (3.3.19):

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{d\psi}{dt} + \overset{\circ}{\rho}\eta\frac{d\theta}{dt} - \mathbf{P}\cdot\cdot\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{2.12}$$

Дифференцируя это тождество по θ, а затем используя второе соотношение в (2.2), получаем выражение для скорости изменения плотности энтропии в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta}\cdot\cdot\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) и (2.2), (2.3) в уравнение баланса энтропии в системе (2.1), получаем искомое уравнение теплопроводности для упругой среды в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_{\overset{\circ}{G}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G})\cdot\cdot\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\rho}q_m, \tag{2.14}$$

где теплоемкость c_ε определяется по (1.11а). Здесь мы также учли, что из (2.6) следует выражение для производной по θ:

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{F},\theta) = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_{\overset{\circ}{G}}\cdot\cdot\ \sum_{\gamma=1}^{r}\frac{\partial\overset{\circ}{\varphi}_\gamma}{\partial\theta}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_{\overset{\circ}{G}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}, \tag{2.14а}$$

где тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}$ введен по формуле (3.8.147):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G} = \sum_{\gamma=1}^{r}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}. \tag{2.14б}$$

5.2.2. $\boldsymbol{\theta UV}$- и $\boldsymbol{\theta U}$-системы уравнений термоупругости в материальном описании. Возвращаясь к общей системе (2.1)–(2.3), заметим, что градиент деформации $\mathbf{F}$ можно исключить из этой системы с помощью соотношения (1.2.10):

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \tag{2.15}$$

тогда получаем *θUV-систему уравнений термоупругости в материальном описании*:

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}((\mathbf{E}+\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}),\theta) + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f},\\
\overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{E}+\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}},\theta)\cdot\cdot\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\rho}q_m,\\
\partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{v},
\end{gathered} \tag{2.16}$$

состоящую из семи уравнений относительно семи скалярных неизвестных:

$$\theta,\mathbf{u},\mathbf{v}\ \parallel\ X^i, t. \tag{2.17}$$

Плотность ρ явным образом не входит в эту систему и всегда может быть вычислена с помощью уравнения неразрывности (1.17):

$$\rho = \overset{\circ}{\rho} \det\, (\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}). \tag{2.18}$$

Поскольку в материальном описании скорость $\mathbf{v}$ связана с вектором перемещений $\mathbf{u}$ явным кинематическим соотношением, то можно исключить скорость $\mathbf{v}$ из числа неизвестных, в результате получим *θU-систему уравнений термоупругости в материальном описании*:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{\overset{\circ}{G}}((\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}), \theta) + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f},\\ \overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}_{\overset{\circ}{G}}((\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}), \theta) \cdot\cdot\, \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \overset{\circ}{\rho}q_m,\end{gathered} \tag{2.19}$$

относительно четырех скалярных неизвестных:

$$\theta, \mathbf{u} \;\parallel\; X^i, t. \tag{2.20}$$

В частности, для исключительной модели A_{V} θU-система (2.19) с учетом (2.10) и (1.2.11) записывается в виде

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f},\\ \overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + (\sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_{\gamma\theta}\mathbf{I}^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}) \cdot\cdot\, (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}) + \overset{\circ}{\rho}q_m,\\ \varphi_{\gamma\theta} = \overset{\circ}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial I^{(s)}_\gamma}, \qquad \overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial I^{(s)}_\gamma},\\ \mathbf{P} = \sum_{\gamma=1}^{r} \overset{\circ}{\varphi}_\gamma \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \psi = \psi(I^{(s)}_\gamma(\mathbf{C}), \theta), \qquad \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}} = \partial I^{(s)}_\gamma/\partial\mathbf{C},\\ \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}), \qquad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

5.2.3. *$T\theta UVF$*-система уравнений термоупругости в материальном описании. Если использовать соотношения (2.7) между тензорами $\mathbf{P}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$, то, присоединяя к системе (2.1) определяющие соотношения (3.8.166) «в скоростях», можно записать следующую $T\theta UVF$-систему уравнений термоупругости в материальном описании:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{\overset{\circ}{G}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G) + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f},\\ \overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + (\overset{\circ}{\rho}/\rho)({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_{\overset{\circ}{G}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}) \cdot\cdot\, \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\rho}q_m,\\ \partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{v}, \qquad \partial\mathbf{F}/\partial t = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G}{\partial t} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{\overset{\circ}{G}h}(\mathbf{F},\theta)\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}_{Gh}\cdot\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G + \overset{(n)}{\mathbf{T}}_G\cdot\mathbf{Z}_{Gh} + \overset{(n)}{\mathbf{T}}_{\theta G}\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

относительно 22 скалярных неизвестных:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_G, \theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F} \ \parallel\ X^i, t. \tag{2.23}$$

Здесь обозначен следующий тензор четвертого ранга:

$${}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}_{\overset{\circ}{G}h} \equiv ({}^4\overset{(n)}{\mathbf{P}}{}^{(1243)}_{Gh}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}})^{(1243)}. \tag{2.24}$$

Остальные обозначения такие же, как и в п. 5.1.3. При записи уравнения теплопроводности в (2.22) мы использовали (2.14).

Компонентное представление систем уравнений теории упругости в материальном описании чаще всего используют в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (см. упр. 5.2.2 и 5.2.3).

5.2.4. Система уравнений термоупругости для квазистатических процессов в материальном описании. Модель квазистатических процессов, введенная в п. 5.1.5, может быть рассмотрена и для материального описания. В этом случае система уравнений (2.1)–(2.3) с учетом допущения (1.34) принимает вид

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} = 0, \tag{2.25}$$

$$\rho c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + \overset{\circ}{\rho}q_m, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{P} = \overset{(n)}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}, \theta). \tag{2.27}$$

Она состоит из четырех скалярных уравнений относительно четырех скалярных неизвестных функций

$$\theta, \mathbf{u} \ \parallel\ X^i, t, \tag{2.28}$$

и называется *квазистатической системой уравнений термоупругости в материальном описании.*

Динамическое уравнение совместности и кинематическое соотношение в системе (2.1) при этом также удовлетворяются лишь приближенно и не рассматриваются. Точное выполнение этих уравнений обеспечивается для статических процессов, начиная с некоторого t_0.

Упражнения к 5.2

Упражнение 5.2.1. Показать, что для квазилинейной модели A_{V} определяющие соотношения (2.10) можно представить в виде

$$\mathbf{P} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)({}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,\mathbf{C})\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{T} = \mathbf{F}\cdot({}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,\mathbf{C})\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}},$$

или через градиент вектора перемещений:

$$\mathbf{P} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho}({}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,(\mathbf{E} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u})\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\cdot(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}).$$

Упражнение 5.2.2. Используя результаты упр. 5.1.1, показать, что для изотропных сред соотношения (2.10) имеют следующий вид:

$$\mathbf{P} = (\overset{\circ}{\psi}_1\mathbf{E} + \overset{\circ}{\psi}_2\mathbf{C} + \overset{\circ}{\psi}_3\mathbf{C}^2)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{T} = J\mathbf{F}\cdot(\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2\mathbf{C} + \overset{\circ}{\psi}_3\mathbf{C}^2)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}},$$

$$\overset{\circ}{\psi}_1 = \overset{\circ}{\varphi}_1 + \overset{\circ}{\varphi}_2 I_1 + \overset{\circ}{\varphi}_3 I_2, \quad -\overset{\circ}{\psi}_2 = \overset{\circ}{\varphi}_2 + I_1\overset{\circ}{\varphi}_3, \quad \overset{\circ}{\psi}_3 = \overset{\circ}{\varphi}_3,$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_\alpha = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\alpha), \qquad I_\alpha = I_\alpha(\mathbf{C}), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Показать, что для линейной модели A_{V} изотропных сред эти соотношения принимают вид

$$\mathbf{P} = l_1 I_1(\mathbf{C})\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + 2l_2\mathbf{C}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{T} = J(l_1 I_1(\mathbf{C})\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + 2l_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}),$$

или через градиент вектора перемещений:

$$\mathbf{P} = l_1(\overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}})(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}) +$$
$$+ l_2(\overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u} + \overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\cdot(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol\nabla}\otimes\mathbf{u}).$$

Упражнение 5.2.3. Используя результат упр. 5.2.1, показать, что компонентное представление определяющих соотношений квазилинейной модели A_{V} в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ имеет вид

$$\overset{\circ}{P}{}^{j}{}_{i} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)\overset{\circ}{M}{}^{jkms}\varepsilon_{ms}\overset{\circ}{F}{}^{l}{}_{k}\overset{\circ}{g}_{li},$$

для модели A_{V} изотропных сред:

$$\overset{\circ}{P}{}^{j}{}_{i} = (\overset{\circ}{\psi}_1\overset{\circ}{g}{}^{jk} + \overset{\circ}{\psi}_2\overset{\circ}{g}{}^{jm}\overset{\circ}{g}{}^{ks}\varepsilon_{ms} + \overset{\circ}{\psi}_3\overset{\circ}{g}{}^{jm}\overset{\circ}{g}{}^{ks}\overset{\circ}{g}{}^{uv}\varepsilon_{mu}\varepsilon_{sv})\overset{\circ}{F}{}^{l}{}_{k}\overset{\circ}{g}_{li},$$

$$T^{ij} = \overset{\circ}{\psi}_1\overset{\circ}{g}{}^{ij} + \overset{\circ}{\psi}_2\overset{\circ}{g}{}^{im}\overset{\circ}{g}{}^{js}\varepsilon_{ms} + \overset{\circ}{\psi}_3\overset{\circ}{g}{}^{im}\overset{\circ}{g}{}^{js}\overset{\circ}{g}{}^{uv}\varepsilon_{mu}\varepsilon_{sv}.$$

Упражнение 5.2.4. Показать, что компонентное представление θUVF-системы (2.1)–(2.3), (2.6) в материальном описании в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ имеет вид

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\rho}(\partial\overset{\circ}{v}{}^{i}/\partial t) = \overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{P}{}^{ji} + \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{f}{}^{i}, \\ \overset{\circ}{\rho}(\partial e/\partial t) = \overset{\circ}{\nabla}_j(\overset{\circ}{\lambda}{}^{ji}\overset{\circ}{\nabla}_i\theta) + \overset{\circ}{P}{}^{ij}\overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{v}{}^{k}\overset{\circ}{g}_{kj} + \overset{\circ}{\rho}q_m, \\ \partial\overset{\circ}{F}{}^{i}{}_{j}/\partial t = \overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{u}{}^{i}, \\ \partial\overset{\circ}{u}{}^{i}/\partial t = \overset{\circ}{v}{}^{i}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{P}{}^{ij} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathcal{F}}{}^{\circ ij}_{G}(\overset{\circ}{F}{}^{k}{}_{l}, \theta), \qquad e = \psi - \theta(\partial\psi/\partial\theta), \\ \psi = \psi(I^{(s)}_{\gamma G}(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{\circ ij}_{G}(\overset{\circ}{F}{}^{k}{}_{l})), \theta) \equiv \psi(\overset{\circ}{F}{}^{k}{}_{l}, \theta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathcal{F}}{}^{\circ ij}_{G} = \sum_{\gamma=1}^{r}\overset{\circ}{\varphi}_\gamma\overset{(\mathrm{n})}{E}{}^{\circ ijkl}_{G}\overset{\circ}{I}{}^{(s)}_{\gamma Gkl}, \\ \overset{\circ}{I}{}^{(s)}_{\gamma Gkl} = \partial I^{(s)}_{\gamma G}/\partial\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{\circ kl}_{G}, \qquad \overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I^{(s)}_{\gamma G}), \\ I^{(s)}_{\gamma G} = h_G I^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{\circ kl}_{G}) + (1-h_G)I^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{\circ ij}_{G}\overset{\circ}{O}_{ik}\overset{\circ}{O}_{jl}), \\ \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{\circ kl}_{G} = \dfrac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}(h_G\overset{\circ}{Q}{}^{i}{}_{\alpha}\overset{\circ}{Q}{}^{j}{}_{\alpha} + (1-h_G)Q^{i}{}_{\alpha}Q^{j}{}_{\alpha}) - \dfrac{h_G}{n-\mathrm{III}}\overset{\circ}{g}{}^{ij}, \\ \overset{(\mathrm{n})}{E}{}^{\circ ijkl}_{G} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\overset{\circ}{E}_{\alpha\beta}Q^{i}{}_{\alpha}Q^{j}{}_{\beta}(h_G\overset{\circ}{Q}{}^{k}{}_{\beta}\overset{\circ}{Q}{}^{l}{}_{\alpha} + (1-h_G)Q^{k}{}_{\beta}Q^{l}{}_{\alpha}). \end{cases}$$

Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{Q}{}^i{}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{p}_\alpha = Q^i{}_\alpha \mathbf{p}_i$.

Упражнение 5.2.5. Показать, что компонентное представление θU-системы (2.21) для модели A_{V} в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ имеет вид

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\rho}(\partial^2 \overset{\circ}{u}_i/\partial t^2) = \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{P}{}^j{}_i + \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{f}_i, \\ \overset{\circ}{\rho}(\partial e/\partial t) = \overset{\circ}{\nabla}_j(\overset{\circ}{\lambda}{}^{ji}\overset{\circ}{\nabla}_i\theta) + \overset{\circ}{P}{}^j{}_i \overset{\circ}{\nabla}_j(\partial \overset{\circ}{u}_k/\partial t)\overset{\circ}{g}{}^{ik} + \overset{\circ}{\rho} q_m, \\ \overset{\circ}{P}{}^j{}_i = \sum_{\gamma=1}^r \overset{\circ}{\varphi}_\gamma (\partial I^{(s)}_{\gamma G}/\partial \varepsilon_{jk}) \overset{\circ}{F}{}^l{}_k \overset{\circ}{g}_{li}, \\ \overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I^{(s)}_\gamma), \quad \psi = \psi(I^{(s)}_\gamma(\varepsilon_{jk}),\theta), e = \psi - \theta(\partial\psi/\partial\theta), \\ \varepsilon_{jk} = (1/2)(\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_k + \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{u}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_m \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{u}_i \overset{\circ}{g}{}^{mi}), \\ \overset{\circ}{F}{}^i{}_k = \delta^i_k + \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{u}_m \overset{\circ}{g}{}^{mi}, \end{cases}$$

здесь $\varepsilon_{jk} = \overset{\circ}{C}_{jk}$ — компоненты тензора деформации $\mathbf{C} = \varepsilon_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j$ (см. (1.2.1)).

Упражнение 5.2.6. Используя факт того, что компоненты тензора $\overset{\text{V}}{\mathbf{T}}$ в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ совпадают с компонентами T^{ij} тензора Коши $\mathbf{T}$ в базисе $\mathbf{r}_i$ (см. упр. 3.2.1), показать, что для модели A_{V} компоненты T^{ij} можно легко вычислить с помощью определяющих соотношений (1.3а):

$$T^{ij} = \mathcal{F}^{ij}_A = \sum_{\gamma=1}^r \varphi_\gamma \frac{\partial I^{(s)}_{\gamma G}}{\partial \varepsilon_{kl}} \overset{\circ}{g}{}^{ik} \overset{\circ}{g}{}^{jl}.$$

5.3. Постановки задач для упругих сред с конечными деформациями

5.3.1. Граничные условия в пространственном описании. Напомним, что замкнутые системы дифференциальных уравнений, представленные в пп. 5.1.1–5.1.4, имеют место только в области V, которая не содержит поверхностей разрыва $S(t)$. При наличии таких поверхностей вместо указанных систем следует записать соотношения для скачков (4.3.19)–(4.3.24).

1) Для случая гомотермической когерентной поверхности $S_1(t)$ эти соотношения записывают следующим образом:

$$\begin{cases} [\rho(D - \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})] = 0, \\ M[\mathbf{v}] + \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \\ M[e + v^2/2] + \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0, \\ [\theta] = 0, \\ [\mathbf{u}] = 0, \\ M[\mathbf{F}^{\text{T}}] + \mathbf{n}\cdot[\rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}] = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}' - \mathbf{v}''$ — скачки функций на поверхности разрыва $S_1(t)$ (см. рис. 5.2), $M = \rho'(D - \mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}) = \rho''(D - \mathbf{v}''\cdot\mathbf{n})$ — массовая скорость движения поверхности разрыва (см. (4.3.6)).

В случае квазистатических процессов в упругой среде (см. п. 5.1.5), согласно определению (1.34), следует положить $\mathbf{v} = 0$ в соотношениях (3.1), тогда вместо (3.1) имеем

$$\begin{cases} [\rho] = 0, \\ \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \\ [\mathbf{u}] = 0, \\ M[e] - \mathbf{n}\cdot[\mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0, \\ [\theta] = 0, \end{cases} \tag{3.1a}$$

последним соотношением в (3.1) пренебрегают, так же как и уравнением совместности деформаций в квазистатической системе уравнений.

2) В частном случае, если поверхность $S_2(t)$ является поверхностью идеального контакта (рис. 5.2), то на ней выполняются соотношения контакта (4.4.25):

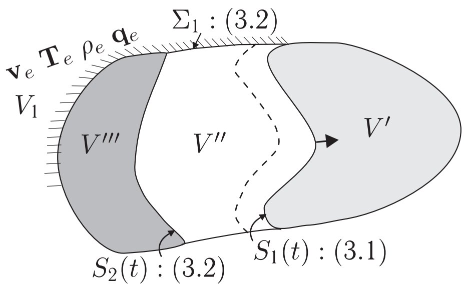

Рис. 5.2. Граничные условия для твердых тел в $\mathcal{K}$

$$\begin{cases} [\mathbf{u}] = 0, \\ \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}] = 0, \\ [\theta] = 0, \\ \mathbf{n}\cdot[\mathbf{q}] = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Граница Σ области V фактически также является поверхностью разрыва, поэтому на Σ необходимо формулировать граничные условия, используя для этого указанные соотношения на скачках (3.1). Выделим несколько основных частных случаев граничных условий.

3) При наличии перехода материальных точек через часть поверхности Σ_1 граничные условия на Σ_1 для твердой среды имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} M[\mathbf{v}] + \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \\ M[e + \frac{v^2}{2}] + \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0, \end{gathered} \tag{3.3}$$

здесь $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}$ и т.д., причем функции без индексов соответствуют рассматриваемой области V и являются неизвестными, а функции с индексом e соответствуют внешности области V (внешняя среда) и полагаются известными. Оставшиеся соотношения на скачках в системе (3.1) не участвуют в формулировке граничных условий — они налагают ограничения на параметры внешней среды.

Если рассматривают модель квазистатических процессов в упругой среде, то, согласно определению (1.34), в граничных условиях (3.3) полагают $\mathbf{v} \equiv 0$, в этом случае они принимают вид

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}] + \mathbf{C}_{2\Sigma} = 0, \\ M[e] - \mathbf{n}\cdot[\mathbf{q}] + C_{3\Sigma} = 0. \end{cases} \tag{3.3a}$$

4) Если внешняя среда на части поверхности Σ_2 является идеальной жидкостью, то для нее тензор напряжений Коши $\mathbf{T}_e = -p_e$ является шаровым (см.(3.8.168а)) и соотношения (3.3) можно записать в виде (см. упр. 5.3.5)

$$\begin{cases} M[v_n] - T_n = p_e - C_{n\Sigma}, \\ M[v_{\tau_I}] - T_{\tau_I} = 0, \quad I = 1, 2, \\ M[e + v_n^2/2] - T_n v_n = p_e v_{ne} - \widetilde{C}'_{3\Sigma}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\widetilde{C}'_{3\Sigma} = C_{3\Sigma} - \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{2}(v_{\tau_I} + v_{\tau_I e})^2 - [q_n],$$

здесь e, $T_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$, $v_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$, $T_{\tau_I} = \boldsymbol{\tau}_\alpha\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$ — неизвестные функции, относящиеся к твердому телу, e_0, p_e, $v_{\tau_I e}$, v_{ne}, q_{ne} — заданные функции, относящиеся к жидкости.

Для квазистатических процессов соотношения (3.4) принимают вид

$$\begin{cases} T_n = -p_e + C_{n\Sigma}, \\ T_{\tau_I} = 0, \quad I = 1, 2, \\ M[e] - [q_n] = C_{3\Sigma}. \end{cases} \tag{3.4а}$$

5) На части Σ_3 поверхности области V переход материальных точек может и отсутствовать ($M = 0$). Если эта поверхность является еще и когерентной, то на ней имеют место следующие граничные условия:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = \widetilde{q}_{ne}, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{\mathbf{t}}_{ne} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_e + \mathbf{C}_{2\Sigma}$, $\quad \widetilde{q}_{ne} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_e - C_{3\Sigma}$ — заданные значения.

6) Если $M = 0$ и внешняя среда является идеальной жидкостью, то хотя такая поверхность Σ_4 и не является когерентной (см. пп. 4.1.2 и 4.4.2), но на ней все равно выполняются граничные условия (3.5), причем вектор напряжений $\widetilde{\mathbf{t}}_{ne}$ коллинеарен вектору нормали:

$$\widetilde{\mathbf{t}}_{ne} = -p_e\mathbf{n}. \tag{3.6}$$

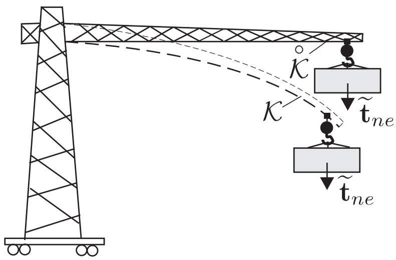

Рис. 5.3. Фиксированное нагружение стрелы крана под действием силы тяжести подвешенного груза

Граничное условие (3.6) часто называют *следящим нагружением*, поскольку оно «отслеживает» изменение нормали поверхности Σ_4 в актуальной конфигурации. В противоположность ему, граничное условие (3.5) допускает существование вектора напряжений $\widetilde{\mathbf{t}}_{ne}$ с фиксированным его значением и направлением в любой актуальной конфигурации, такое граничное условие называют *фиксированным нагружением* (рис. 5.3).

7) При $M = 0$ вместо вектора напряжений $\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}$ на части Σ_5 может быть задан вектор перемещений (или радиус-вектор $\mathbf{x}$) материальной точки $\mathcal{M}$ и температура θ:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \theta = \theta_e. \tag{3.7}$$

В этом случае соотношения на скачках (4.3.28) не участвуют в формулировке граничных условий — они определяют ограничения на параметры внешней среды.

8) и 9) Кроме того, возможны и две другие комбинации граничных условий на частях поверхности Σ_6 и Σ_7 области V:

$$\begin{cases}\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = q_{ne},\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{n}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{t}_{ne}, \\ \theta = \theta_e.\end{cases} \tag{3.8}$$

10) Для твердых тел могут задаваться граничные условия на искусственных границах. Наиболее широко используемым типом таких условий являются *условия симметрии*, которые имеют место в том случае, когда

а) существует неподвижная плоскость симметрии Π_Σ области V, разделяющая ее на две части V' и V'',

б) на внешних границах Σ' и Σ'' областей V' и V'' граничные условия также симметричны относительно Π_Σ, а также симметричны массовые силы и источники тепла,

в) имеется симметрия относительно Π_Σ определяющих соотношений твердого тела и значений неизвестных функций в начальный момент времени.

В этом случае поля всех неизвестных функций должны оставаться симметричными относительно Π_Σ в любой момент времени $t \geqslant 0$. Это означает, что производные от всех скалярных неизвестных по нормали к Π_Σ должны обращаться в нуль, движение точек по нормали к Π_Σ должно отсутствовать (иначе нарушится симметрия), а вектор напряжений $\mathbf{t}_n$ должен быть коллинеарен вектору нормали $\mathbf{n}$ к Π_Σ, т.е. должны выполняться следующие соотношения на Π_Σ:

$$\begin{gathered}\partial\rho/\partial\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_I = T_{\tau_I} = 0, \qquad I = 1, 2.\end{gathered} \tag{3.9}$$

5.3.2. Граничные условия в материальном описании. Все рассмотренные типы граничных условий соответствуют актуальной конфигурации $\mathcal{K}$, однако их можно переформулировать в терминах отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и затем использовать для постановки задач в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

1) Для поверхности разрыва $\overset{\circ}{S}_1(t)$ внутри области $\overset{\circ}{V}$ в случае, когда $\overset{\circ}{S}_1(t)$ является гомотермической и когерентной, формулируются условия (4.3.17):

$$\begin{cases}[\overset{\circ}{\rho}]\overset{\circ}{D} = 0, \\ \overset{\circ}{M}[\mathbf{v}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P} + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0, \\ \theta\overset{\circ}{M}[\eta] - \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{\circ}{\mathbf{q}}] + \theta\overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0, \\ [\mathbf{u}] = 0, \\ \overset{\circ}{M}[\mathbf{F}^{\mathrm{T}}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes[\overset{\circ}{\rho}\mathbf{v}] = 0, \\ [\theta] = 0.\end{cases} \tag{3.10}$$

Здесь $\overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{\rho}{}'\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{\rho}{}''\overset{\circ}{D}$ — массовая скорость движения поверхности разрыва в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ (см. (4.3.5)).

Заметим, что в (3.10) включено условие для скачка энтропии (третье соотношение), поскольку в систему законов сохранения (2.1) также включено именно уравнение баланса энтропии. Если бы в (2.1) вместо него было включено уравнение энергии, то и в (3.10) следовало бы выбрать соотношение для скачка энергии (соотношение в (4.3.17в)).

В случае квазистатических процессов с учетом (1.34) система соотношений (3.10) принимает вид

$$
\begin{gathered}
[\overset{\circ}{\rho}] = 0,\\
\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0,\\
[\mathbf{u}] = 0,\\
\theta\overset{\circ}{M}[\eta] - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}] + \theta\overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0,\\
[\theta] = 0.
\end{gathered}
\tag{3.10a}
$$

(Уравнение совместности деформаций в квазистатической постановке не рассматривают.)

2) Если поверхность $\overset{\circ}{S}_2(t)$ внутри области $\overset{\circ}{V}$ является поверхностью идеального контакта, то на ней выполняются соотношения (4.4.26):

$$
[\mathbf{u}] = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad [\theta] = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}] = 0. \tag{3.11}
$$

3) На части внешней поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ области $\overset{\circ}{V}$ (соответствующей поверхности Σ_1), на которой $M \neq 0$, $\overset{\circ}{M} \neq 0$, формулируются следующие условия:

$$
\begin{cases}
\overset{\circ}{M}[\mathbf{v}] + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0,\\
\overset{\circ}{M}[\eta] - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta] + \overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0.
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

Здесь $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}$ и т.д., где функции без индекса соответствуют рассматриваемой области V, а с индексом e соответствуют внешней среде (заданные значения).

Для квазистатических процессов эти соотношения принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] + \overset{\circ}{\mathbf{C}}_{2\Sigma} = 0,\\
\overset{\circ}{M}[\eta] - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{\circ}{\mathbf{q}}/\theta] + \overset{\circ}{C}_{4\Sigma} = 0.
\end{gathered}
\tag{3.12a}
$$

4) На части $\overset{\circ}{\Sigma}_2$, соответствующей поверхности Σ_2, на которой $\overset{\circ}{M} \neq 0$, $M \neq 0$, а внешняя среда является идеальной жидкостью, граничные условия имеют такой же вид (3.12), но вектор напряжений Пиолы–Кирхгофа во внешней среде $\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}_e = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}$ задается следующим образом:

$$
\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne} = -p_e\ (\overset{\circ}{\rho}/\rho)\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \tag{3.13}
$$

где p_e — давление в жидкости (соответствует актуальной конфигурации $\mathcal{K}$), а $\overset{\circ}{\rho}$, ρ и $\mathbf{F}^{-1}$ — параметры твердого тела.

5) На части $\overset{\circ}{\Sigma}_3$, соответствующей гомотермической когерентной поверхности Σ_3, на которой $M = 0$ и $\overset{\circ}{M} = 0$, граничные условия (3.12) преобразуются в следующие условия:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} = \overset{\circ}{q}_{ne}, \tag{3.14}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}$ и $\overset{\circ}{q}_{ne}$ — заданные значения.

6) На части $\overset{\circ}{\Sigma}_4$, соответствующей поверхности Σ_4, на которой заданы параметры идеальной жидкости и $M = 0$ и $\overset{\circ}{M} = 0$, имеют место условия (3.14), в которых вектор напряжений $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}$ имеет вид (3.13), а $\overset{\circ}{q}_{ne}$ определяют по q_{ne}:

$$\overset{\circ}{q}_{ne} = \mathbf{q}_e \cdot \mathbf{n}(d\Sigma/d\overset{\circ}{\Sigma}) = q_{ne}\overset{\circ}{k}(\overset{\circ}{\rho}/\rho),$$

где $\overset{\circ}{k}$ определяется формулой (1.2.54). Поэтому на $\overset{\circ}{\Sigma}_4$ имеют место следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = -p_e(\overset{\circ}{\rho}/\rho)\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} = q_{ne}\overset{\circ}{k}(\overset{\circ}{\rho}/\rho), \\ \overset{\circ}{k} = (\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}})^{-1/2}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

7) На части $\overset{\circ}{\Sigma}_5$, соответствующей поверхности Σ_5, граничные условия (3.7) формально сохраняют свой вид.

8) и 9) На части $\overset{\circ}{\Sigma}_6$, соответствующей поверхности Σ_6, граничные условия (3.8) преобразуются к следующим условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} = \overset{\circ}{q}_{ne}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \\ \theta = \theta_e. \end{cases} \tag{3.16}$$

10) Условия симметрии (3.9), формулирующиеся в $\mathcal{K}$ на неподвижной для любого $t \geqslant 0$ плоскости Π_Σ, при переходе в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{q}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I = 0, \tag{3.17}$$

так как на Π_Σ: $\mathbf{n} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}$, $\boldsymbol{\tau}_I = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I$.

5.3.3. Постановки основных задач теории термоупругости с конечными деформациями в пространственном описании. Присоединяя теперь к каждой из замкнутых систем уравнений, сформулированных в разд. 5.1, граничные условия, указанные в п. 5.3.1, а также дополняя эти системы начальными условиями (число которых равно числу производных по t в замкнутой системе) и уравнением (4.4.43) движения поверхности Σ рассматриваемой области V тела, получаем постановки соответствующих начально-краевых задач для упругих сред с конечными деформациями.

Так постановка *динамической $\theta RUVF$-задачи термоупругости в пространственном описании* состоит из

- системы уравнений (1.1), определенной в $V \times (0, t_{\max})$,
- определяющих соотношений (1.2)–(1.4), заданных в $\overline{V} \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (4.4.43) движения поверхности Σ тела V:

$$\partial f/\partial t + D_0|\nabla f| + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = 0, \tag{3.18}$$

- граничных условий (3.1)–(3.8), которые заданы на $\Sigma \times (0, t_{\max})$,
- начальных условий, заданных в V при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \rho = \overset{\circ}{\rho}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad f = f^0. \tag{3.19}$$

Постановка *динамической θRUV-задачи термоупругости* состоит из

- системы уравнений (1.14), определенной в $V \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (3.18) движения поверхности Σ тела V,
- граничных условий (3.1)–(3.8) на $\Sigma \times (0, t_{\max})$, в которые подставлены определяющие соотношения (1.2)–(1.4),
- начальных условий в V при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \rho = \overset{\circ}{\rho}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad f = f^0. \tag{3.20}$$

Подобным образом даются постановки *динамической θUV-задачи термоупругости* и *динамической θU-задачи.*

Постановка *динамической $T\theta RUVF$-задачи термоупругости среды* состоит из

- системы уравнений (1.20)–(1.25) в $V \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (3.18) движения поверхности Σ тела V,
- граничных условий (3.1)–(3.8) на $\Sigma \times (0, t_{\max})$, в которые подставлены соотношения (1.2)–(1.4), (1.19),
- начальных условий в V при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \rho = \overset{\circ}{\rho}, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad f = f^0. \tag{3.21}$$

По заданному значению тензора напряжений Коши $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ при $t = 0$ вычисляют значения $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G$ при $t = 0$.

Постановка *квазистатической задачи термоупругости в пространственном описании* состоит из

- системы уравнений (1.35) в $V \times (0, t_{\max})$,
- определяющих соотношений (1.36) в $\overline{V} \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (3.18) движения поверхности тела,
- граничных условий (3.1a), (3.2), (3.3a), (3.4a), (3.5)–(3.8) (скорость $\mathbf{v}$ в граничных условиях (3.8) в этой постановке не участвует),
- начальных условий:

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0, \quad f = f^0.$$

Замечание 1. Определяющие соотношения для всех постановок фактически имеют место как внутри области V, так и на ее границе Σ.

Замечание 2. Уравнение (3.18) движения поверхности Σ тела V имеет место для всех перечисленных в п. 5.3.1 ее частей Σ_α, причем на частях Σ_1 и Σ_2: $M \neq 0$, а на остальных — $M = 0$. Кроме того, уравнение (3.18) записывается и для подвижных поверхностей разрыва $S_1(t)$, $S_2(t)$ внутри области V. Для поверхностей Σ_α без перехода материальных точек ($M = 0$) уравнение (3.18) можно заменить соотношением (1.2.9):

$$\mathbf{x} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(x^i\big|_{\Sigma_\alpha}, t) + \mathbf{u}(x^i\big|_{\Sigma_\alpha}, t), \tag{3.22}$$

где $x^i\big|_{\Sigma_\alpha}$ — координаты точек на поверхности Σ_α.

Замечание 3. Во всех сформулированных выше постановках задач скорость D_0 фазового превращения предполагают заданной функцией вида

$$D_0 = D_0(\mathbf{F}, \theta, \Omega_e), \tag{3.23}$$

где $\Omega_e = \{\rho_e, \mathbf{F}_e, \theta_e, \mathbf{v}_e\}$ — параметры внешней среды.

Замечание 4. Все перечисленные выше постановки задач в общем случае являются *связанными*, т.е. задача теплопроводности, состоящая из уравнения энергии (1.1в) с соответствующими граничными условиями (3.1)–(3.8) для q_n или θ и начальным условием (3.19) для θ, не может быть решена отдельно от задач теории упругости с конечными деформациями. Действительно, на примере динамической $\theta RUVF$-задачи термоупругости, если вместо уравнения энергии (1.1в) использовать уравнение теплопроводности (1.11), то можно указать шесть факторов связанности:

1) уравнение (1.11) содержит конвективный член $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta$, в который входит скорость,
2) оно содержит также член $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$, зависящий от $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}$,
3) тензор теплопроводности для твердой среды обычно определяется в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ — это тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$, а в $\mathcal{K}$ его вычисляют с помощью формулы (3.12.10): $\boldsymbol{\lambda} = (\rho/\overset{\circ}{\rho})\mathbf{F} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, и, следовательно, $\boldsymbol{\lambda}$ зависит от $\mathbf{F}$,
4) область V интегрирования системы (1.1) является неизвестной и вычисляется в результате решения уравнения (3.18) или из соотношения (3.20), которые, в свою очередь, содержат «механические неизвестные» — векторы скорости $\mathbf{v}$ и перемещений $\mathbf{u}$,
5) скорость D_0 фазового превращения (3.23) в общем случае может зависеть от «механических неизвестных» $\mathbf{F}$ и $\mathbf{T}$,
6) в свою очередь, определяющие соотношения упругости (1.3а) зависят от температуры θ.

Вкладом слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ в уравнение теплопроводности часто можно пренебречь, скорость D_0 часто полагают зависящей только от температуры: $D_0 = D_0(\theta, \Omega_e)$, однако остальными указанными факторами 1), 3) и 4), обеспечивающими связанность системы (1.1а), (1.1б), (1.11), (1.12), (1.19), в общем случае пренебречь нельзя. Этим постановка связанной *динамической $\theta RUVF$-задачи термоупругости при конечных деформациях* принципиально отличается от задачи термоупругости с малыми деформациями [33], в которой связаностью можно, как правило, пренебречь. В силу сказанного, задачи термоупругости при малых деформациях называют *слабо связанными*, а $\theta RUVF$-задачу называют *сильно связанной*.

Сильно связанными являются и динамические θRUV-, θUV- и $T\theta RUVF$-задачи термоупругости в пространственном описании. $\square$

5.3.4. Постановки задач термоупругости в материальном описании. Постановки всех задач в материальном описании при отсутствии фазовых превращений ($\overset{\circ}{M} = 0$) формулируются в области $\overset{\circ}{V}$ отсчетной конфигурации, которая является известной — в этом состоит их основное преимущество по сравнению с постановками задач в пространственном описании.

Если же часть поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ области $\overset{\circ}{V}$ является подвижной из-за фазовых превращений ($\overset{\circ}{M} \neq 0$), то область $\overset{\circ}{V}$ тоже становится неизвестной и к системе (2.1) законов сохранения следует присоединить уравнение (4.4.34) для нахождения формы поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}(t)$ области $\overset{\circ}{V}$.

Постановка *динамической θUVF-задачи термоупругости в материальном описании* состоит из

- системы уравнений (2.1) в $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$,
- определяющих соотношений (2.2)–(2.4) в $\overline{\overset{\circ}{V}} \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (4.4.34) движения поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ за счет фазовых превращений:

$$\partial \overset{\circ}{f} / \partial t + \overset{\circ}{D} |\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \overset{\circ}{f}| = 0, \tag{3.24}$$

- граничных условий (3.10)–(3.17) (часть которых может отсутствовать) на $\overset{\circ}{\Sigma} \times (0, t_{\max})$, в которые подставлены определяющие соотношения (2.2), (2.3),
- начальных условий в V при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \overset{\circ}{f} = 0. \tag{3.25}$$

Постановка *динамической θUV-задачи термоупругости в материальном описании* состоит из

- системы уравнений (2.16) в $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (3.24) движения поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ тела,
- граничных условий (3.10)–(3.17) на $\overset{\circ}{\Sigma} \times (0, t_{\max})$, в которые подставлены определяющие соотношения (2.2), (2.3) и (2.15),
- начальных условий в $\overset{\circ}{V}$ при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \overset{\circ}{f} = 0. \tag{3.26}$$

Аналогично дается постановка динамической θU-задачи.

Постановка *динамической $T\theta UVF$-задачи термоупругости в материальном описании* состоит из

- системы уравнений (2.22) в $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$,
- уравнения (3.24) движения поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ тела,
- граничных условий (3.10)–(3.17) на $\overset{\circ}{\Sigma} \times (0, t_{\max})$, в которые подставлены определяющие соотношения (2.2) и (2.7),
- начальных условий в $\overset{\circ}{V}$ при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{G0}, \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \overset{\circ}{f} = 0. \quad (3.27)$$

Постановка *квазистатической задачи термоупругости в материальном описании* состоит из

- системы уравнений (2.25), (2.26) в $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$,
- определяющих соотношений (2.27) в $\overline{\overset{\circ}{V}} \times (0, t_{\max})$,
- граничных условий (3.10а), (3.11), (3.12а), (3.13)–(3.17) на $\overset{\circ}{\Sigma}$ (уравнение для $\mathbf{v}$ в (3.17) не участвует в этой постановке),
- уравнения (3.24) движения поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ тела,
- начальных условий:

$$t = 0: \quad \theta = \theta_0, \qquad \overset{\circ}{f} = 0. \quad (3.28)$$

Скорость $\overset{\circ}{D}$ во всех перечисленных выше постановках предполагают заданной функцией вида

$$\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{D}(\mathbf{F}, \theta, \Omega_e), \quad (3.29)$$

где $\Omega_e = \{\rho_e, \mathbf{F}_e, \theta_e, \mathbf{v}_e\}$ — параметры внешней среды.

Замечание 5. Сформулированные постановки задач термоупругости в материальном описании являются *слабо связанными* при отсутствии фазовых превращений, или, когда скорость фазовых превращений зависит только от температуры: $\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{D}(\theta, \Omega_e)$, поскольку в этом случае связанность задачи теплопроводности (например, в θUVF-постановке — это уравнение (2.14) с соответствующими ему «тепловыми» граничными и начальными условиями из (3.10)–(3.17), (3.19), а также (3.18)) с задачей механики (оставшиеся уравнения в θUVF-задаче) осуществляется только за счет энтропийного слагаемого $(\overset{\circ}{\rho}/\rho)({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_G^{\circ} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_{\theta G}) \cdot\cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ в (2.14) и зависимости скачка энтропии $[\eta]$ от $\mathbf{F}$. Влиянием же этих факторов в большинстве задач термоупругости можно пренебречь, в результате задачи теплопроводности и механики оказываются несвязанными. Обычно сначала решают задачу теплопроводности и находят поле температуры $\theta(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, t)$ в $\overset{\circ}{V}$, а затем с уже известным полем температуры решают задачу механики.

Если же скорость фазового превращения $\overset{\circ}{D}$ существенным образом зависит от θ и от «механических неизвестных» $\mathbf{F}$ и $\mathbf{T}$ (в некоторых задачах с фазовыми превращениями в твердых телах реализуется такая ситуация), то задачи термоупругости в материальном описании оказываются *сильно связанными* (т.е. их связанностью пренебречь нельзя).

5.3.5. Постановки квазистатических задач теории упругости с конечными деформациями. Важнейшим частным случаем движения упругих сред, который реализуется на практике, является случай движения с постоянной температурой:

$$\theta = \theta_0 = \text{const} \qquad \forall t \geqslant 0,$$

при этом говорят, что рассматривается модель *изотермических процессов* в твердых телах.

В этом случае уравнение энергии (или баланса энтропии) во всех рассмотренных выше (в пп. 5.3.3 и 5.3.4) постановках исключается из общей системы, а температура θ — из числа неизвестных. Соответствующие задачи носят название *задач теории упругости с конечными деформациями*. Например, постановка *квазистатической задачи теории упругости в пространственном описании* имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = 0 \quad \text{в } V, \\ \mathbf{T} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \quad \text{в } \overline{V}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \text{на } \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_7, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \text{на } \Sigma_5, \Sigma_6, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0 \quad \text{на } \Sigma_8, \quad G = A, B, C, D, \end{cases} \tag{3.30}$$

а постановка квазистатической задачи теории упругости в материальном описании — такой вид:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = 0 \quad \text{в } \overset{\circ}{V}, \\ \mathbf{P} = \overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \quad \text{в } \overline{\overset{\circ}{V}}, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_1, \ldots, \overset{\circ}{\Sigma}_4, \overset{\circ}{\Sigma}_7, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_5, \overset{\circ}{\Sigma}_6, \\ \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I = 0 \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_8. \end{cases} \tag{3.31}$$

Отметим, что граничные условия (3.3), (3.4) на частях поверхности Σ_1 и Σ_2 с переходом материальных точек через поверхность ($M \neq 0$) для квазистатических процессов совпадают с условиями (3.5), (3.6) на поверхностях без такого перехода, поскольку членом $M[\mathbf{v}]$ по сравнению с $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}]$ в этих условиях пренебрегают.

Для несжимаемых сред постановку *квазистатической задачи теории упругости в пространственном описании* получают с использованием определяющих соотношений из п. 3.9.6:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{f} = 0 \quad \text{в } V, \\ \det \mathbf{F}^{-1} = 1 \quad \text{в } V, \\ \mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G(\mathbf{F}^{-1}) \quad \text{в } \overline{V}, \\ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \nabla \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \qquad \text{в } \overline{V}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad \text{на } \Sigma_1, \ldots, \Sigma_4, \Sigma_7, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \qquad \text{на } \Sigma_5, \Sigma_6, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0 \quad \text{на } \Sigma_8. \end{cases} \tag{3.32}$$

Второе уравнение в этой системе — это уравнение несжимаемости.

Тензорная функция $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G(\mathbf{F}^{-1}, \theta)$ имеет такой же вид, как и соответствующая функция $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G(\mathbf{F}^{-1}, \theta)$ в (1.13а), (1.4), и отличается от нее только на единицу меньшим числом $(r-1)$ инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G)$ в потенциале (1.3б): $\psi = \psi(I_{\gamma G}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G), \theta)$ из-за условия несжимаемости.

Неизвестными в задаче (3.32) являются функции

$$\mathbf{u}, p \ \parallel \ x^i.$$

Соответствующая постановка *квазистатической задачи теории упругости для несжимаемых сред в материальном описании* имеет вид

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} = 0 \quad \text{в } \overset{\circ}{V}, \\ \det \mathbf{F} = 1 \qquad \text{в } \overset{\circ}{V}, \\ \mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{F}) \quad \text{в } \overline{\overset{\circ}{V}}, \\ \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} \qquad \text{в } \overline{\overset{\circ}{V}}, \\ \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_1, \ldots, \overset{\circ}{\Sigma}_4, \overset{\circ}{\Sigma}_7, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \qquad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_5, \overset{\circ}{\Sigma}_6, \\ \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_\alpha = 0 \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_8, \end{cases} \tag{3.33}$$

и рассматривается относительно тех же неизвестных функций, но зависящих от X^i:

$$\mathbf{u}, p \ \parallel \ X^i.$$

Тензорная функция $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_{\overset{\circ}{G}}(\mathbf{F}, \theta)$ отличается от $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\overset{\circ}{G}}$ (2.6) только на единицу меньшим числом инвариантов: $(r-1)$.

Обратный градиент в (3.33) вычисляем по формуле [12]

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^2 - I_1(\mathbf{F})\mathbf{F} + I_2(\mathbf{F})\mathbf{E}.$$

Замечание 1. Поскольку в актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ область решения V является неизвестной, к системам (3.30) и (3.32) необходимо присоединить соотношения (5.3.22), которые позволяют найти неизвестную геометрию области V. Для задач (3.31) и (3.33) в материальном описании область решения $\overset{\circ}{V}$ является известной.

Замечание 2. Вид тензорных функций $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}^{\circ}_G$ в постановках (1.30)–(1.33) определяется соотношениями (1.4), (1.13а) и (2.6), и вообще говоря, как отмечалось в замечании 1 к п. 5.1.1, является весьма сложным, не имеющим явного аналитического представления. Исключением являются модели A_{I} и B_{I} для задач (1.30) и (1.32) в пространственном описании и модели A_{V} и B_{V} для задач (1.31) и (1.33) в материальном описании — они допускают явное аналитическое представление указанных тензорных функций (см. (1.16б), (1.16в) и упр. 5.1.1 и 5.1.2).

Если рассматривают какую-либо частную модель упругой среды, например, квазилинейную модель A_n, то в качестве тензорных функций $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}{}^{\circ}_G$ в (1.30) и (1.31) можно использовать представления (1.8а) и (2.8), в которых следует положить $\xi = 0$ и ${}^6\mathbf{L} \equiv 0$. Для линейных моделей A_n тензор ${}^4\mathbf{M}$ имеет вид ${}^4\mathbf{M} = J\ {}^4\widetilde{\mathbf{M}}$, где ${}^4\widetilde{\mathbf{M}}$ — тензор модулей упругости, который для различных групп симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ упругой среды выбирают в соответствии с представлениями из п. 3.8.7.

5.3.6. Условия на внешние силы в квазистатических задачах. Вспомним (см. п. 2.3.1), что кроме уравнений движения (или равновесия), имеющих локальный характер, в МСС существуют интегральные законы: законы изменения количества движения (2.2.7) и момента количества движения (2.3.5). Для квазистатических процессов инерциальными силами в этих законах пренебрегают и получают следующие соотношения:

$$\int\limits_V \rho\mathbf{f}\ dV + \int\limits_\Sigma \widetilde{\mathbf{t}}_n\ d\Sigma = 0, \qquad \int\limits_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{f}\ dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{x}\times\widetilde{\mathbf{t}}_n\ d\Sigma = 0. \tag{3.34}$$

Эти соотношения представляют собой дополнительные условия на внешние силы $\mathbf{f}$ и $\widetilde{\mathbf{t}}_{ne}$ и перемещения $\mathbf{u}_e$ в квазистатической задаче (3.30). С учетом граничных условий из (3.30), условия (3.34) можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}\int\limits_V \rho\mathbf{f}\ dV + \sum_{\alpha=1,\ldots,4,7}\int\limits_{\Sigma_\alpha} \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\ d\Sigma + \sum_{\alpha=5,6}\int\limits_{\Sigma_\alpha}\mathbf{t}_n d\Sigma = 0,\\ \int\limits_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{f}dV + \sum_{\alpha=1,\ldots,4,7}\int\limits_{\Sigma_\alpha}\mathbf{x}\times\widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\ d\Sigma + \sum_{\alpha=5,6}\int\limits_{\Sigma_\alpha}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}+\mathbf{u}_e)\times\mathbf{t}_n d\Sigma = 0.\end{gathered} \tag{3.35}$$

Эти же условия можно переписать в терминах отсчетной конфигурации:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}\, d\overset{\circ}{V} + \sum_{\alpha=1,\ldots,4,7} \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha} \widetilde{\overset{\circ}{\mathbf{t}}}_{ne} d\overset{\circ}{\Sigma} + \sum_{\alpha=5,6} \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n d\overset{\circ}{\Sigma} = 0, \\ \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \mathbf{x} \times \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} d\overset{\circ}{V} + \sum_{\alpha=1,\ldots,4,7} \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha} \mathbf{x} \times \widetilde{\overset{\circ}{\mathbf{t}}}_{ne}\, d\overset{\circ}{\Sigma} + \sum_{\alpha=5,6} \int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha} (\overset{\circ}{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_e) \times \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n d\overset{\circ}{\Sigma} = 0.\end{gathered} \tag{3.36}$$

В результате получаем условия на векторы $\widetilde{\overset{\circ}{\mathbf{t}}}_{ne}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{u}_e$ в квазистатической задаче в материальном описании.

5.3.7. Вариационная постановка квазистатической задачи в пространственном описании. Для численного решения задач механики сред с конечными деформациями широко применяют вариационные (или «слабые») постановки задач.

Для формулировки этих задач введем понятие *кинематически допустимого* векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, которое определено в области $V \cup \Sigma$, дважды непрерывно-дифференцируемо в этой области и удовлетворяет граничным условиям задачи (3.30) на части поверхности $\Sigma_u = \Sigma_5 \cup \Sigma_6$ и Σ_8, где заданы перемещения:

$$\mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Sigma_8} = 0. \tag{3.37}$$

Если же векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, кроме того, удовлетворяет всем остальным уравнениям системы (3.30), то назовем его *действительным*. Очевидно, что действительное векторное поле $\mathbf{u}$ и есть искомое решение задачи (3.30).

Введем понятие *вариации* $\delta\mathbf{u}$ векторного поля, понимая под ней разность двух кинематически допустимых полей. Вариация $\delta\mathbf{u}$ удовлетворяет нулевым граничным условиям:

$$\delta\mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = 0, \qquad \delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Sigma_8} = 0. \tag{3.38}$$

Введем теперь интегральные характеристики движения сплошной среды: A^e — работу внешних сил на перемещении $\mathbf{u}$, состоящую из работы A^e_Σ внешних поверхностных сил и работы A^e_m внешних массовых сил:

$$A^e = A^e_\Sigma + A^e_m, \qquad A^e_\Sigma = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\cdot\mathbf{u}d\Sigma, \qquad A^e_m = \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dV, \tag{3.39}$$

где $\Sigma_\sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_7$ — часть поверхности тела, на которой задан вектор усилий $\widetilde{\mathbf{t}}_{ne}$ в системе (3.30).

Введем также *потенциальную энергию тела* Π:

$$\Pi = \int\limits_V \rho\psi dV, \tag{3.40}$$

где $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \mathbf{O}, \theta)$ — свободная энергия (потенциал) (1.3б) при изотермических процессах, зависящая от обобщенного энергетического тензора деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ и $\mathbf{O}$ в соответствии с моделями A_n, B_n, C_n и D_n.

Составим функционал

$$L(\mathbf{u}) = \Pi - A^e, \tag{3.40а}$$

который называют *лагранжианом*, и введем понятие *вариации функционалов δL, $\delta\Pi$ и dA^e* на перемещениях $\mathbf{u}$, которую вычисляют по тем же правилам, что и дифференциал df функции $f(t)$. Тогда для $\delta\Pi$ получаем следующее выражение:

$$\delta\Pi = \delta\int\limits_V \rho\psi dV = \delta\int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\psi d\overset{\circ}{V} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\delta\psi d\overset{\circ}{V} = \int\limits_V \rho\delta\psi dV. \tag{3.41}$$

Здесь мы применили правило дифференцирования интеграла по подвижному объему (см. упр. 2.1.2). Воспользуемся теперь формулой (3.5.14) дифференцирования скалярной функции $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t), \mathbf{O}(t), \theta)$ по аргументу t для случая изотермических процессов ($\theta = \mathrm{const}$) и для идеальных сред ($w^* = 0$). Согласно этой формуле вычисляем вариацию $\delta\psi$:

$$\rho\delta\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \mathbf{O}, \theta) = \rho\frac{\delta\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G}\cdot\cdot\,\delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \rho\frac{\delta\psi}{\partial\mathbf{O}}\cdot\cdot\,\delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G\cdot\cdot\,\delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \mathbf{S}_G\cdot\cdot\,\delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{3.42}$$

Поскольку формула (3.42) имеет место для всех значений $n = \mathrm{I}, \ldots \mathrm{V}$ и $G = A, B, C, D$, то, выбирая $n = \mathrm{V}$ и $G = A$, получаем, что

$$\begin{aligned}\rho\delta\psi = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\delta\mathbf{C} = \frac{1}{2}\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\,\delta(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{F}) =&\\ = \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot(\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \delta\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1}) =&\\ = \mathbf{T}\cdot\cdot\,\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u} + (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{T}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}).&\end{aligned} \tag{3.43}$$

Здесь мы использовали формулу (1.2.6) связи $\mathbf{C}$ и $\mathbf{F}$, формулу (3.2.24) связи $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}$, а также формулы (1.2.12) и (1.1.37), следствием которых являются соотношения

$$\delta\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}, \qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u}. \tag{3.44}$$

В соотношениях (3.43) обозначен линейный тензор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ и его вариация:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}), \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}). \tag{3.45}$$

Приравнивая правые части (3.42) и (3.43), получаем, что

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G\cdot\cdot\,\delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \mathbf{S}_G\cdot\cdot\,\delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}). \tag{3.46}$$

Эта формула является аналогом формул (3.2.91), (3.2.8) для мощности напряжений в случае симметричного тензора $\mathbf{T}$. В качестве аналога тензора $\mathbf{D}dt = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}dt)$ в (3.46) выступает тензор $\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})$.

Подставляя теперь (3.42) и (3.46) в (3.41) и вычисляя вариацию δA^e, находим выражение для вариации лагранжиана:

$$\delta L = \int\limits_V \mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV - \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}dV - \int\limits_{\Sigma_\sigma} \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma. \tag{3.47}$$

Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 5.1 (вариационный принцип Лагранжа). *Среди всех кинематически допустимых полей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ действительное поле отличается тем, что для него и только для него лагранжиан L имеет стационарное значение:*

$$\delta L = 0. \tag{3.48}$$

▼ Докажем справедливость прямого утверждения. Пусть выполнено уравнение (3.47) для поля $\mathbf{u}$, тогда, подставляя (3.47) в (3.48), получаем

$$\int\limits_V \mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV - \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}dV - \int\limits_{\Sigma_\sigma} \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma = 0. \tag{3.49}$$

Преобразуем первый интеграл, используя (3.45) и свойства произведения дивергенции тензора и вектора [12]:

$$\int\limits_V \mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV = \int\limits_V \mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}dV = \int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})dV - \int\limits_V \delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}dV =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma + \sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Sigma_8} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha\delta u_{\tau_\alpha}d\Sigma - \int\limits_V \delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}dV. \tag{3.50}$$

Здесь мы учли симметрию тензора $\mathbf{T}$ и применили формулу Гаусса–Остроградского, а также учли, что $\delta\mathbf{u} = 0$ на Σ_u, а на части Σ_8 имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{u} = \mathbf{t}_n\cdot\delta\mathbf{u} = \Big(t_{nn}\mathbf{n} + \sum_{\alpha=1}^{2} t_{n\tau_\alpha}\boldsymbol{\tau}_\alpha\Big)\cdot\Big(\delta u_n\mathbf{n} + \sum_{\beta=1}^{2}\delta u_{\tau_\alpha}\boldsymbol{\tau}_\alpha\Big) =$$

$$= t_{nn}\delta u_n + \sum_{\alpha=1}^{2} t_{n\tau_\alpha}\delta u_{\tau_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{2} t_{n\tau_\alpha}\delta u_{\tau_\alpha},$$

поскольку $\delta u_n = \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{u} = 0$ на Σ_8. Здесь $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ — ортонормированный базис, а t_{nn}, $t_{n\tau_\alpha}$ и u_n, u_{τ_α} — проекции векторов $\mathbf{t}_n$ и $\mathbf{u}$ на векторы этого базиса.

Подставляя (3.50) в (3.49), получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Sigma_8}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha)\delta u_{\tau_\alpha}d\Sigma+\int\limits_{\Sigma_\sigma}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}-\widetilde{\mathbf{t}}_{ne})\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma-\int\limits_{V}\delta\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}-\rho\mathbf{f})dV=0. \tag{3.51}$$

В силу произвольности функций $\delta\mathbf{u}$, из уравнения (3.51) следует, что все выражения в скобках должны обращаться в нуль, следовательно, действительно выполняются уравнения равновесия в системе (3.30), а также граничные условия на Σ_σ и Σ_8. На оставшейся части поверхности Σ_u граничные условия удовлетворяются за счет выбора функций $\mathbf{u}$. Таким образом, $\mathbf{u}$ — есть решение всей задачи (3.30).

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — действительное поле перемещений, удовлетворяющее всей системе (3.30), тогда, домножая на $\delta\mathbf{u}$ уравнения равновесия и граничные условия на Σ_σ и Σ_8, приходим к уравнению (3.51). Затем, повторяя в обратном порядке все выкладки от (3.50) до (3.47), убеждаемся в истинности уравнения (3.47). ▲

Уравнение (3.49) называют *вариационным уравнением*, а вариационная постановка квазистатической задачи (3.30) заключается в отыскании кинематически допустимого поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего вариационному уравнению (3.49).

5.3.8. Вариационная постановка квазистатической задачи в материальном описании. Аналогичным образом формулируется вариационная постановка для квазистатической задачи (3.31). Используя формулы (3.43),(1.1.37) и (3.2.4), преобразуем вариацию $\delta\psi$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho\delta\psi&=\frac{1}{2}(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u}+\mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}})=\\&=\frac{1}{2}(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}+\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}})=\\&=\frac{\rho}{2\overset{\circ}{\rho}}(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}+\mathbf{P}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}})=\frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}}\mathbf{P}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Тогда, используя формулы перехода (3.2.30) из $\mathcal{K}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, после подстановки (3.52) в (3.49) получаем

$$\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\mathbf{P}\cdot\cdot\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}d\overset{\circ}{V}-\int\limits_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}d\overset{\circ}{V}-\int\limits_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma}\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}\cdot\delta\mathbf{u}d\overset{\circ}{\Sigma}=0 \tag{3.53}$$

— вариационное уравнение в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

5.3.9. Вариационная постановка для несжимаемых сред в материальном описании. Сформулируем теперь вариационную постановку квазистатической задачи (3.32) теории упругости для несжимаемых сред. Для этого введем поле *возможных давлений* $p(\mathbf{x})$ — произвольное скалярное поле, определенное и непрерывно-дифференцируемое в $V\cup\Sigma$, а также *действительное поле давлений* $p(\mathbf{x})$, удовлетворяющее вместе с действительным полем перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ системе (3.32), и вариацию давлений δp — как разность двух возможных давлений.

Потенциальную энергию для несжимаемой среды введем следующим образом:

$$\Pi = \int_V (\rho\psi - \widetilde{p}\gamma)dV, \tag{3.54}$$

где $\widetilde{p}$ — неопределенный множитель Лагранжа: $\widetilde{p} = p(n - \mathrm{III})^2$ (см. (3.9.14а)), а γ — скалярная функция от тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G$, значение которой равно нулю (см. (3.9.7)):

$$\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G) = \det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G - \frac{1}{(1-\mathrm{III})^3} = 0. \tag{3.55}$$

Вариацию функции γ вычисляем, по общему соглашению, по тем же правилам, что и дифференциал $d\gamma$ (см. (3.9.8)):

$$\delta\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G} \cdot\cdot\, \delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_G^{-1} \cdot\cdot\,\delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G. \tag{3.56}$$

Поскольку определяющие соотношения для несжимаемой упругой среды могут быть представлены в виде (3.9.37):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_G^{-1} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G} = \sum_{\gamma=1}^{r-1}\varphi_\gamma \mathbf{I}^{(s)}_{\gamma G}, \tag{3.57}$$

то вариацию $\delta\psi$, подобно формуле (3.42), можно представить следующим образом:

$$\rho\delta\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G, \mathbf{O}, \theta) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G \cdot\cdot\, \delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \mathbf{S}_G \cdot\cdot\, \delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{3.58}$$

С учетом (3.56) и (3.58) находим $\delta\Pi$:

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \int_V (\rho\delta\psi - \widetilde{p}\delta\gamma - \gamma\delta\widetilde{p})dV = \int_V \Big(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_G - \frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_G^{-1}\Big) \cdot\cdot\, \delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G dV + \\ + \int_V \mathbf{S}_G \cdot\cdot\, \delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}} dV - \int_V \Big(\det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\Big)\delta\widetilde{p}dV = \\ = \int_V (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G \cdot\cdot\, \delta\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G + \mathbf{S}_G \cdot\cdot\, \delta\mathbf{O}^{\mathrm{T}})dV - \int_V \Big(\det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_G - \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\Big)\delta\widetilde{p}dV = \\ = \int_V \mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV - \frac{1}{n-\mathrm{III}}\int_V ((\det \mathbf{F})^{n-\mathrm{III}} - 1)\delta p dV.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Здесь мы использовали формулы (3.57) и (3.46), которые имеют место и для несжимаемых сред, а также учли, что

$$\det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}\det \mathbf{U}^{n-\mathrm{III}} = \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\det \mathbf{U})^{n-\mathrm{III}} = $$
$$= \frac{1}{(n-\mathrm{III})^3}(\det \mathbf{F})^{n-\mathrm{III}} = \det \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}},$$

так как $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V}$.

Принимая во внимание определяющие соотношения несжимаемых упругих сред в форме (3.32), приходим к окончательному виду для $\delta\Pi$:

$$\delta\Pi = \int\limits_V (\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G - p\mathbf{E}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV - \frac{1}{n-\mathrm{III}}\int\limits_V ((\det \mathbf{F})^{n-\mathrm{III}} - 1)\delta p dV. \tag{3.60}$$

Составляя лагранжиан $L(\mathbf{u}, p)$ по формулам (3.40а), (3.54), (3.39), можно сформулировать вариационный принцип Лагранжа для несжимаемых сред.

Теорема 5.2. *Среди всех кинематически допустимых полей* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *и возможных давлений* p *действительные поля перемещений и давлений для несжимаемых сред отличаются тем, что для них и только для них лагранжиан* $L(\mathbf{u}, p)$ *имеет стационарное значение:*

$$\delta L(\mathbf{u}, p) = 0. \tag{3.61}$$

Подставляя в (3.61) выражения (3.40а), (3.54) и (3.39) и учитывая независимость вариаций $\delta\mathbf{u}$ и δp, получим следующую *систему вариационных уравнений для несжимаемых упругих сред*:

$$\begin{cases} \int_V (\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G - p\mathbf{E}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})dV - \int_V \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}dV - \int_{\Sigma_\sigma} \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma = 0, \\ \int_V (\det\,(\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}) - 1)\delta p dV = 0. \end{cases} \tag{3.62}$$

Доказательство этой теоремы осуществляем аналогично доказательству теоремы 5.1. Подробности оставим в качестве упражнения 5.3.6.

Вариационную постановку квазистатической задачи (3.33) теории упругости для несжимаемой среды получаем из (3.62), с помощью преобразований (3.52):

$$\begin{cases} \int_{\overset{\circ}{V}} (\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}{}^0_G - p\mathbf{F}^{-1}) \cdot\cdot\, \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\delta\mathbf{u}d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma} \widetilde{\overset{\circ}{\mathbf{t}}}_{ne}\cdot\delta\mathbf{u}d\overset{\circ}{\Sigma} = 0, \\ \int_{\overset{\circ}{V}} (\det\,(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{u}) - 1)\delta p d\overset{\circ}{V} = 0. \end{cases} \tag{3.63}$$

Упражнения к 5.3

Упражнение 5.3.1. Показать, что постановка (3.32) квазистатической задачи теории упругости в пространственном описании для модели A_I несжимаемых сред имеет следующий вид (использовать при этом соотношение (1.16б)):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f} = 0, \quad \det \mathbf{F}^{-1} = 1 \ \text{ в } V,$$

$$\begin{cases}\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \varphi_\gamma \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_\gamma^{(s)} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \mathbf{\Lambda}, \quad \varphi_\gamma = \rho(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}), \quad \psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\mathbf{\Lambda}), \theta), \\ \mathbf{\Lambda} = (1/2)(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}), \\ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \quad \text{в } \overline{V}, \end{cases}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\big|_{\Sigma_\sigma} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e,$$

$$\mathbf{u}\big|_{\Sigma_8} \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\big|_{\Sigma_8} \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0.$$

Упражнение 5.3.2. Показать, что постановку квазистатической задачи теории упругости (3.30) для моделей B_n и D_n изотропных сред можно представить в следующем виде (использовать при этом определяющие соотношения (3.8.142a)):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = 0, \qquad \mathbf{T} = \overset{\circ}{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi(\lambda_\beta)}{\partial \lambda_\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha,$$

$$\lambda_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \ \parallel\ \mathbf{F}^{-1}, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\big|_{\Sigma_\sigma} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_8} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\big|_{\Sigma_8} \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0,$$

причем для несжимаемых сред определяющие соотношения заменяются на следующие:

$$\begin{cases}\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \overset{\circ}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \dfrac{\partial \psi(\lambda_\beta)}{\partial \lambda_\alpha} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \\ \det \mathbf{F}^{-1} = 1. \end{cases}$$

Упражнение 5.3.3. Показать, что постановку квазистатической задачи теории упругости (3.31) в материальном описании для моделей B_n и D_n изотропных сред можно представить в следующем виде (использовать результат упр. 5.3.2):

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = 0, \qquad \mathbf{P} = \overset{\circ}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \psi(\lambda_\beta)}{\partial \lambda_\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha,$$

$$\lambda_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \ \parallel\ \mathbf{F}^{-1}, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}},$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I = 0,$$

причем для несжимаемых сред определяющие соотношения заменяются на следующие:

$$\begin{cases}\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \overset{\circ}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{3} \dfrac{\partial \psi(\lambda_\beta)}{\partial \lambda_\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ \det \mathbf{F}^{-1} = 1. \end{cases}$$

Упражнение 5.3.4. Показать, что постановка квазистатической задачи теории упругости (3.33) в материальном описании для модели A_{V} несжимаемых сред имеет следующий вид (использовать при этом соотношение (2.10)):

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = 0, \quad \det \mathbf{F} = 1 \quad \text{в } V,$$

$$\begin{cases}\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \overset{\circ}{\varphi}_\gamma \mathbf{I}_\gamma^{(s)} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \mathbf{C}, \quad \overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}), \quad \psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}), \theta), \\ \mathbf{C} = (1/2)(\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}), \\ \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \quad \text{в } \overline{V}, \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma}=\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne},\quad \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_u}=\mathbf{u}_e,\quad \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{n}}=0,\quad \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_I=0,$$

Показать, что компонентное представление этой задачи в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$ таково:

$$\overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{P}{}^j{}_i+\overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{f}_i=0,\quad \det\,(\overset{\circ}{F}{}^k{}_l)=1,$$

$$\begin{cases}\overset{\circ}{P}{}^j{}_i=-p(\overset{\circ}{F}{}^{-1})^j{}_i+\sum_{\gamma=1}^{r-1}\overset{\circ}{\varphi}_\gamma(\partial I_{\gamma G}/\partial\varepsilon_{jk})\overset{\circ}{F}{}^l{}_k\overset{\circ}{g}_{il},\\ \overset{\circ}{\varphi}_\gamma=\overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}),\quad \psi=\psi(I_\gamma^{(s)}(\varepsilon_{jk}),\theta),\\ \varepsilon_{jk}=(1/2)(\overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{u}_k+\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{\circ}{u}_j+\overset{\circ}{\nabla}_j\overset{\circ}{u}_m\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{\circ}{u}_i\overset{\circ}{g}{}^{mi}),\\ \overset{\circ}{F}{}^i{}_k=\delta^i_k+\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{\circ}{u}_m\overset{\circ}{g}{}^{mi},\\ (\overset{\circ}{F}{}^{-1})^j{}_i=(1/2)\epsilon^{jmk}\epsilon_{iqs}\overset{\circ}{F}{}^q{}_m\overset{\circ}{F}{}^s{}_k,\end{cases}$$

$$\overset{\circ}{n}_j\overset{\circ}{P}{}^j{}_i\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma}=\overset{\circ}{t}_{nei},\quad \overset{\circ}{u}_i\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_u}=\overset{\circ}{u}_{ei},\quad \overset{\circ}{u}_i\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8}\overset{\circ}{n}{}^i=0,\quad \overset{\circ}{n}_j\overset{\circ}{P}{}^j{}_k\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8}\overset{\circ}{\tau}{}^k_I=0.$$

(Выражение для $(\overset{\circ}{F}{}^{-1})^j{}_i$ вывести, используя соотношение (1.2.58) между элементами обратной и исходной матриц.)

Упражнение 5.3.5. Доказать соотношения (3.4).

Упражнение 5.3.6. Доказать теорему 5.2.

5.4. Задача о растяжении упругого бруса

5.4.1. Полуобратный метод. Рассмотрим несколько классических примеров решения задач теории упругости (3.30), (3.31). Практически все основные аналитические решения квазистатических задач теории упругости с конечными деформациями получают с помощью *полуобратного метода*, в котором, исходя из геометрической формы тела, в отсчетной конфигурации подбирают (угадывают) закон его движения $\mathbf{x}(X^i,t)$, по которому вычисляют поле градиента деформации $\mathbf{F}(X^i,t)$, а затем и поля тензоров напряжений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ с помощью определяющих соотношений. Далее осуществляют проверку того, что полученные поля тензоров $\mathbf{P}(X^i,t)$ и $\mathbf{T}(X^i,t)$ удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям в системах (3.30), (3.31). Если закон движения угадан правильно, то эти уравнения и условия удовлетворяются тождественно.

5.4.2. Деформация бруса при растяжении. Рассмотрим задачу о растяжении бруса, закон движения которого имеет вид (1.1.6):

$$x^\alpha=k_\alpha(t)X^\alpha. \tag{4.1}$$

Градиент деформации $\mathbf{F}$ в данной задаче таков (см. упр. 1.2.1):

$$\mathbf{F}=\sum_{\alpha=1}^{3}k_\alpha\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{4.2}$$

Тензоры деформации для данной задачи были вычислены ранее, последовательность этих вычислений и ссылки на формулы приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1. Последовательность вычисления тензоров деформации

	Растяжение	Сдвиг	Вращение с растяжением
Закон движения	(1.1.6)	(1.1.7)	(1.1.8)
Локальные векторы базиса и метрические матрицы	упр. 1.1.1	упр. 1.1.2	упр. 1.1.3
Градиент деформации $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{J}$	упр. 1.2.1	упр. 1.2.2	упр. 1.2.3
Тензоры $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{O}$	упр. 1.3.2	упр. 1.3.3	упр. 1.3.4
Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$	упр. 3.2.13	упр. 3.2.14	упр. 3.2.15

В частности, тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{C}_{\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}, \tag{4.3}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}_{\alpha} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}(k_{\alpha}^{n-\mathrm{III}} - 1), \quad n = \mathrm{I, II, IV, V}; \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}_{\alpha} = \ln k_{\alpha}, \quad n = \mathrm{III}. \tag{4.4}$$

5.4.3. Напряжения в брусе. Положим далее, что брус является упругой (идеальной, твердой) изотропной средой, описываемой линейными моделями A_n (3.8.62):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \qquad J = \rho/\overset{\circ}{\rho}. \tag{4.5}$$

Вычислим напряжение в брусе. Подставляя выражения (4.3) и (4.4) для энергетических тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ в соотношение (4.2), находим компоненты $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}$ энергетических тензоров напряжений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{\alpha},$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{(n - \mathrm{III})k_1 k_2 k_3}(l_1(\sum_{\beta=1}^{3} k_{\beta}^{n-\mathrm{III}} - 3) + 2l_2(k_{\alpha}^{n-\mathrm{III}} - 1)), \quad n = \mathrm{I, II, IV, V},$$

$$\overset{\mathrm{III}}{T}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}(l_1 \sum_{\alpha=1}^{3} \ln\, k_{\alpha} + 2l_2 \ln\, k_{\alpha}). \tag{4.6}$$

Поскольку в данной задаче тензор поворота $\mathbf{O}$ является единичным (см. упр. 1.3.2), то квазиэнергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ совпадают с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (см. упр. 3.2.3): $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$.

Для вычисления тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ используем тензоры энергетической эквивалентности ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ и формулы (3.2.36), которые в данной задаче имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&n = \mathrm{I}: &&\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1},\\
&n = \mathrm{II}: &&\mathbf{T} = (1/2)(\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} + \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}),\\
&n = \mathrm{III}: &&\mathbf{T} = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}},\\
&n = \mathrm{IV}: &&\mathbf{T} = (1/2)(\mathbf{F} \cdot \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}} + \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}),\\
&n = \mathrm{V}: &&\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Подставляя в (4.7) выражение (4.2) для $\mathbf{F}$ и формулы (4.3), находим компоненты $\sigma_{\alpha\alpha}$ тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ в декартовом базисе для различных моделей A_n:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \qquad \sigma_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}, \tag{4.8}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{k_\alpha^{n-\mathrm{III}}}{(n-\mathrm{III})k_1k_2k_3}\Big(l_1\Big(\sum_{\beta=1}^{3} k_\beta^{n-\mathrm{III}} - 3\Big) + 2l_2(k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\Big), \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \tag{4.9а}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \overset{\mathrm{III}}{T}_\alpha, \qquad n = \mathrm{III}. \tag{4.9б}$$

Так как получившееся выражение для $\mathbf{T}$ не зависит от координат X^i, то этот тензор $\mathbf{T}$ (4.8) автоматически удовлетворяет уравнениям равновесия в системе (3.30): $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0$ при отсутствии массовых сил ($\mathbf{f} = 0$).

5.4.4. Граничные условия. Граничные условия в системе (3.30) применительно к задаче о растяжении бруса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&x^1 = 0: &&\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3;\\
&x^1 = h_1: &&\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = u_e^1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3;\\
&x^\alpha = \pm h_\alpha/2: &&\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \alpha = 2, 3.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Иначе говоря, в соответствии с постановкой задачи из примера 1.1, на одном торце бруса ($x^1 = 0$) задается условие симметрии, на втором ($x^1 = h_1$) задано перемещение u_e^1, а боковые поверхности ($x^I = \pm h_I/2$) свободны от нагрузок. Поскольку на поверхности $x^1 = 0$ бруса имеем $\mathbf{n} = -\bar{\mathbf{e}}_1$, $\boldsymbol{\tau}_\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\alpha$, $\alpha = 2, 3$, а на боковой поверхности $x^\alpha = \pm h_\alpha/2$: $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{e}}_\alpha$, то граничные условия (4.10) можно записать в виде

$$x^1 = 0: \qquad u^1 = 0, \quad \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3, \tag{4.11а}$$

$$x^1 = h_1: \qquad u^1 = u_e^1, \quad \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3; \tag{4.11б}$$

$$x^\alpha = \pm h_\alpha/2: \qquad \sigma_{\alpha\alpha} = 0, \quad \alpha = 2, 3. \tag{4.11в}$$

Из формул (4.8) следует, что касательных напряжений в данной задаче нет, поэтому условия $\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = 0$ удовлетворяются автоматически во всем брусе. Граничное условие $u^1 = 0$ при $x^1 = 0$ также удовлетворяется согласно (4.1), а из граничного условия при $x^1 = h_1$ выражаем k_1 через u_e^1:

$$u_e^1 = h_1 - h_1^0 = (k_1 - 1)h_1^0, \qquad k_1 = 1 + u_e^1/h_1^0. \tag{4.12}$$

5.4.5. Разрешающее соотношение $\boldsymbol{\sigma_1 \sim k_1}$. Подставляя (4.9а) в граничное условие (4.11в), находим, что компоненты σ_{22} и σ_{33} тензора напряжений $\mathbf{T}$ в данной задаче должны равняться нулю, ненулевой является только компонента σ_{11}. В результате, объединяя (4.9б) и (4.11в), получаем три соотношения:

$$\sigma_{11} = \frac{k_1^{n-\mathrm{III}}}{(n-\mathrm{III})k_1k_2k_3}(l_1(\sum_{\beta=1}^{3} k_\beta^{n-\mathrm{III}} - 3) + 2l_2(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)), \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \tag{4.13}$$

$$0 = l_1(\sum_{\beta=1}^{3} k_\beta^{n-\mathrm{III}} - 3) + 2l_2(k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1), \quad \alpha = 2, 3, \tag{4.14}$$

относительно трех неизвестных: k_1, k_2 и σ_{11} (k_1 находим из (4.12)).

Несложно заметить, что система (4.13), (4.14) допускает решение вида $k_2 = k_3$, тогда с помощью (4.14) можно выразить k_2 и k_3 через k_1:

$$k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1 = -\nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1), \qquad \alpha = 2, 3, \tag{4.15}$$

где

$$\nu = \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)} \tag{4.16}$$

— *коэффициент Пуассона*. Если вычислить отношение компонент $\overset{(\mathrm{n})}{C}_2$ и $\overset{(\mathrm{n})}{C}_1$ энергетических тензоров деформации, для которых имеют место соотношения (4.4), то с учетом формул (4.15) получаем, что коэффициент Пуассона представляет собой отношение этих компонент с обратным знаком:

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}_2/\overset{(\mathrm{n})}{C}_1 = \overset{(\mathrm{n})}{C}_3/\overset{(\mathrm{n})}{C}_1 = -\nu, \tag{4.17}$$

причем это соотношение имеет место для всех моделей A_n. Для большинства реальных изотропных упругих сред значения коэффициента Пуассона лежат в диапазоне $0 < \nu < 0.5$, поэтому при продольном растяжении бруса вдоль оси Ox^1, когда $\overset{(\mathrm{n})}{C}_1 > 0$, поперечные деформации отрицательны $\overset{(\mathrm{n})}{C}_2 = \overset{(\mathrm{n})}{C}_3 < 0$, т.е. происходит поперечное сжатие бруса. Это явление называют *эффектом Пуассона*.

Подставляя выражение (4.15) в (4.13), находим искомое разрешающее соотношение задачи: зависимость напряжения σ_{11} от кратности удлинения k_1:

$$\sigma_{11} = 2l_2(1+\nu)\frac{k_1^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1))^{-2/(n-\mathrm{III})}, \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}. \tag{4.18}$$

Следуя тому же методу, получаем разрешающее соотношение для модели A_{III} (см. упр. 5.4.1):

$$k_2 = k_3 = 1/k_1^{\nu}, \qquad \sigma_{11} = 2l_2(1+\nu)\frac{\ln k_1}{k_1^{1-2\nu}}. \tag{4.19}$$

5.4.6. Сравнительный анализ различных моделей A_n. Сравним полученные зависимости $k_2(k_1)$ и $\sigma_{11}(k_1)$ для разных моделей A_n.

Несложно заметить, что для всех моделей A_n зависимости $k_2(k_1)$ (4.15) и (4.19) являются монотонно убывающими, т.е. растяжению бруса по оси Ox^1 соответствует его сжатие по осям Ox^2 и Ox^3 (напомним, что значения $k_\alpha > 1$ соответствуют растяжению по оси Ox^α, а значения $0 < k_\alpha < 1$ — сжатию по Ox^α). Это свойство называют *эффектом Пуассона*.

Однако для моделей A_{I} и A_{II} функция $k_2(k_1)$ имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты (рис. 5.4):

$$k_1 = k_1^{**} \equiv \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{1/(\mathrm{III}-n)} \quad \text{и} \quad k_2 = k_2^{\infty} \equiv \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{1/(\mathrm{III}-n)}, \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II},$$

а для моделей A_{IV} и A_{V} асимптот нет, но имеется предельное значение $k_1^* = (1+\nu/\nu)^{1/(n-\mathrm{III})}$, при котором решение вырождается, теряя физический смысл.

Для модели A_{III}, согласно (4.19), функция $k_2(k_1)$ также имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты, совпадающие с осями абсцисс и ординат (рис. 5.4).

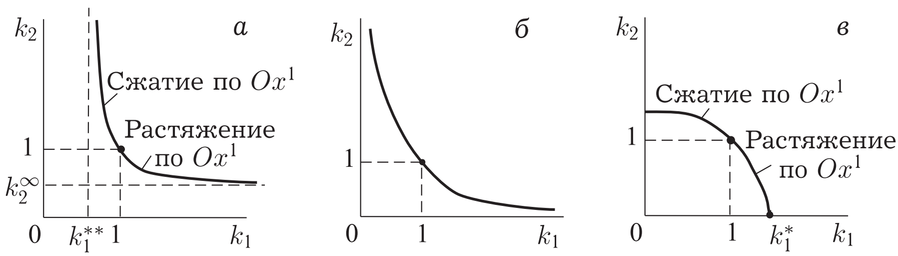

Рис. 5.4. Зависимость $k_2(k_1)$ для различных моделей A_n: *а* — $n = \mathrm{I}$ и $n = \mathrm{II}$, *б* — $n = \mathrm{III}$, *в* — $n = \mathrm{IV}$ и $n = \mathrm{V}$

Сравнивая графики функций $\sigma_{11}(k_1)$ (4.18) и (4.19), несложно усмотреть, что для всех моделей A_n, $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$, значения напряжений σ_{11} положительны при растяжении бруса по оси Ox^1 ($k_1 > 1$) и отрицательны при сжатии бруса по оси Ox^1 ($0 < k_1 < 1$), что соответствует реально наблюдаемым напряжениям на практике. Заметим, что значения k_1 легко находятся в эксперименте по перемещениям u_e^1 с помощью формулы (4.12), а напряжения σ_1 — по формуле (2.2.39), которая для бруса записывается следующим образом:

$$\sigma_{11} = \widehat{T}^{11} = \mathcal{F}_1^1/\Sigma_1, \tag{4.20}$$

где $\mathcal{F}_1^1$ — компонента по оси Ox^1 вектора внешних сил $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1 = \mathcal{F}_1^1\bar{\mathbf{e}}_1$, приложенного к грани Σ_1 бруса, ортогональной к Ox^1.

Однако для моделей A_{I} и A_{II} функция $\sigma_{11}(k_1)$ при растяжении (в области $k_1 > 1$) сначала возрастает, а затем убывает, а в области сжатия ($k_1 < 1$)

абсолютное значение $|\sigma_{11}(k_1)|$ также сначала возрастает, а затем убывает, причем $\sigma_{11}(k_1^{**}) = 0$ (см. рис. 5.5, на котором обозначено безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}/(2l_2(1+\nu))$). Монотонное возрастание функции $\sigma_{11}(k_1)$, которое обычно наблюдается в эксперименте, соответствует только интервалу $k_1^{**} < k_1^{\min} \leqslant k_1 \leqslant k_1^{\max}$. Экстремальные значения $k_1^{\min}$ и $k_1^{\max}$, при которых изменяется монотонность функции $\sigma_{11}(k_1)$ (т.е. $\dfrac{\partial}{\partial k_1}\sigma_{11}(k_1)\big|_{k_1=k_1^{\min},k_1^{\max}} = 0$), иногда трактуют как предельные значения потери устойчивости среды при сжатии или растяжении соответственно. Однако этот эффект нельзя отождествлять с явлением потери устойчивости конструкций из твердых тел при сжатии, которое, как правило, связывают не с нелинейностью определяющих соотношений, а с нелинейной зависимостью деформации от перемещений.

Для моделей A_{III}, A_{IV} функция $\sigma_{11}(k_1)$ является монотонно возрастающей при всех значениях k_1, но для моделей A_{IV} она существует только в интервале $0 < k_1 < k_1^*$, а при $k_1 \to k_1^*$ имеет место $\sigma_{11} \to +\infty$. Для модели A_{V} функция $\sigma_{11}(k_1)$ при растяжении ($k_1 > 1$) ведет себя так же, как и для модели A_{IV}, а при сжатии у нее имеется точка экстремума ($k_1 = k_{\min}$, см. рис. 5.6).

Модель A_{III} — единственная из всех моделей A_n, для которой функция $\sigma_{11}(k_1)$ существует и монотонна на всей полуоси $k > 0$, причем при $k \to 0$, $\sigma_{11}(k) \to -\infty$.

Таким образом, рассмотренная задача о растяжении бруса показывает, что моделям A_n при разных n соответствуют различные зависимости напряжения от кратности удлинения $\sigma_{11}(k)$, отличающиеся даже качественно. Вопрос о том, какую модель A_n следует применить для конкретной упругой среды, решается путем сравнения экспериментальных данных и расчетных результатов по разным моделям, в частности, путем сравнения функций $\sigma_{11} = \sigma_{11}(k_1)$ (4.18), (4.19) с полученными экспериментально зависимостями.

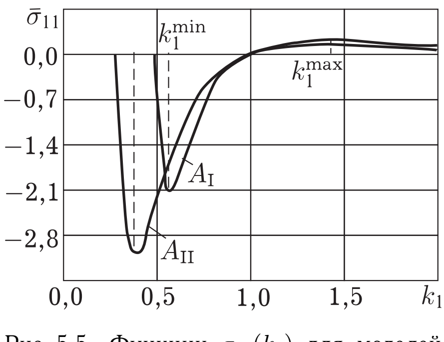

Рис. 5.5. Функции $\sigma_{11}(k_1)$ для моделей A_{I} и A_{II}, $\nu = 0{,}3$

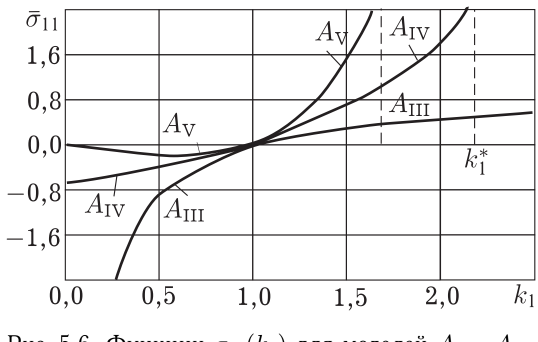

Рис. 5.6. Функции $\sigma_{11}(k_1)$ для моделей A_{III}, A_{IV} и A_{V}, $\nu = 0{,}3$

Обычно при экспериментальных исследованиях вместо k_1 используют относительное удлинение

$$\delta_1 = k_1 - 1 = \frac{u_e^1}{h_1^0} = \frac{h_1 - h_1^0}{h_1^0}, \tag{4.21}$$

а зависимость $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\delta_1)$ называют *диаграммой деформирования*.

Следует отметить также, что в эксперименте часто определяют напряжение Пиолы–Кирхгофа P_{11}, которое равно отношению экспериментально измеряемой компоненты $\mathcal{F}_1{}^1$ вектора внешних сил (т.е. просто силы, действующей на растягиваемый образец) к величине площадки $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ в недеформированном состоянии:

$$P_{11} = \mathcal{F}_1{}^1/\overset{\circ}{\Sigma}_1. \tag{4.22}$$

В задаче о растяжении площади $\overset{\circ}{\Sigma}_1$ и Σ_1 связаны соотношением

$$\Sigma_1/\overset{\circ}{\Sigma}_1 = k_2 k_3 = k_2^2, \tag{4.23}$$

поэтому P_{11} и σ_{11} связаны соотношением

$$\sigma_{11} = P_{11}/k_2^2. \tag{4.24}$$

С учетом (4.18),(4.19) и (4.24) отсюда находим выражение для функции $P_{11}(k_1)$:

$$P_{11} = 2l_2(1+\nu)\frac{k_1^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}}-1), \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V},$$

$$P_{11} = 2l_2(1+\nu)\frac{\ln k_1}{k_1}, \qquad n = \mathrm{III}. \tag{4.25}$$

Обратим внимание на то, что эти функции $P_{11}(k_1)$ не зависят от коэффициента Пуассона, следовательно, имея экспериментальную диаграмму $P_{11}(k_1)$, с помощью (4.25) нельзя установить значения ν — их определяют с помощью изменения толщины образца при растяжении или сжатии по формуле (4.16).

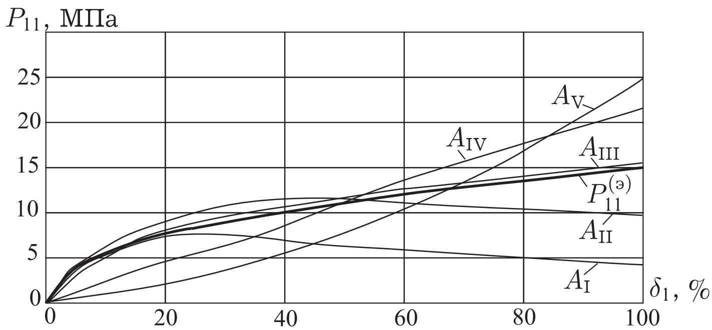

Рис. 5.7. Экспериментальная диаграмма деформирования $P_{11}^{э}(\delta_1)$ при растяжении наполненной резины ИРП и ее аппроксимация линейными моделями A_n с $\nu = 0{,}4$

На рис. 5.7 показана экспериментальная диаграмма деформирования $P_{11}^{(э)}(\delta_1)$, полученная указанным выше способом для наполненной резины ИРП, где $\delta_1 = k_1 - 1$, а также аппроксимация этой диаграммы с помощью моделей A_n по формулам (4.25). Значение константы l_2 в этих моделях находили с помощью минимизации среднеквадратического отклонения расчетных значений от экспериментальных, взятых в некоторых точках $\delta_{1(i)}$, $i = 1, \ldots N$:

$$\Delta = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| 1 - \frac{P_{11}(\delta_{1(i)})}{P_{11}^{(\text{э})}(\delta_{1(i)})} \right|^2 \right)^{1/2} \to \min. \tag{4.26}$$

Коэффициент Пуассона для наполненной резины ИРП был получен близким к $\nu = 0{,}4$.

Значения константы l_2, полученные указанным выше способом, приведены в табл. 5.2, там же указаны минимальные среднеквадратические отклонения, соответствующие этим оптимальным значениям l_2.

Таблица 5.2. Значения константы l_2 для различных моделей A_n для резины ИРП

n	l_2, МПа	Δ, %
I	29,6	37
II	27,1	17
III	16,4	9
IV	7,5	42
V	3,0	58

Полученные значения позволяют сделать вывод о том, что наилучшей аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования удается достичь с помощью модели A_{III} (см. рис. 5.7). Модели A_{I} и A_{II} достаточно хорошо аппроксимируют диаграмму $P_{11}^{\text{э}}(\delta_1)$ в диапазоне δ_1 от 0 до 22 и 45 % соответственно. При бóльших значениях δ_1 выполняется условие $k_1 > k_{\max}$, и функции $P_{11}(\delta_1)$ у этих моделей дают нефизический эффект снижения напряжений P_{11}.

На рис. 5.8 показаны диаграммы деформирования $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ для той же резины, которые пересчитаны из экспериментальной диаграммы $P_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ по формулам (4.24), в которых k_2 вычислены по (4.15) и (4.19). Так как функции $k_2(k_1)$ отличаются для разных моделей A_n, то и диаграммы $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ также различны для этих моделей.

Расчетные диаграммы $\sigma_{11}(\delta_1)$ для моделей A_n, полученные с помощью формул (4.18) и (4.19), в которых константа l_2 была найдена с помощью аппроксимации экспериментальной диаграммы $P_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ функциями (4.25) для резины ИРП (см. табл. 5.2), приведены на рис. 5.9.

Возможна также ситуация, когда в эксперименте определяют не $P_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$, а диаграмму деформирования $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$. Тогда константу l_2 находят из условия наилучшей аппроксимации функции $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ зависимостями (4.18) или (4.19), при этом коэффициент ν также обычно определяют из уравнения (4.17). Для рассмотренного класса наполненных резин качественное взаиморасположение функций $\sigma_{11}(\delta_1)$ и $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ было таким же, как и в случае использования

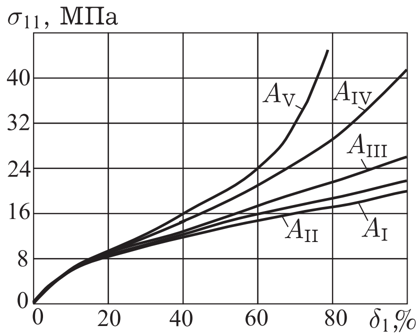

Рис. 5.8. Экспериментальная диаграмма деформирования при растяжении наполненной резины ИРП, пересчитанная в истинные напряжения Коши с помощью расчетных моделей A_n и $\nu = 0{,}4$

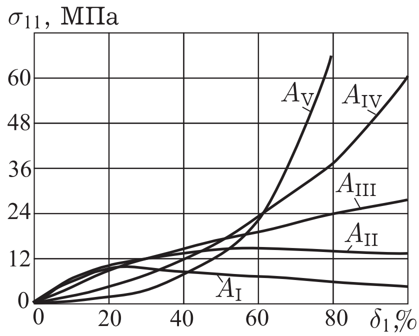

Рис. 5.9. Расчетные диаграммы деформирования при растяжении наполненной резины ИРП в истинных напряжениях Коши для моделей A_n и $\nu = 0{,}4$

напряжений Пиолы–Кирхгофа, модель A_{III} и в этом случае приводила к наилучшим результатам.

Упражнения к 5.4

Упражнение 5.4.1. Доказать справедливость соотношений (4.18) для линейной модели A_{III}.

5.5. Растяжение несжимаемого бруса

5.5.1. Деформация несжимаемого упругого бруса. Рассмотрим ту же задачу о растяжении бруса (см. пример 1.1 и п. 5.4.2), но будем полагать брус несжимаемой упругой (идеальной, твердой) средой.

Граничные условия для бруса выберем те же самые (4.10), и закон движения бруса снова будем искать в виде (4.1). Тогда градиент деформации $\mathbf{F}$ выражается по формуле (4.2), а меры и тензоры деформации имеют такой же вид, как и для сжимаемой среды, и вычисляются в соответствии с табл. 5.1. В частности, энергетические меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ имеют следующие выражения (см. упр. 3.2.13):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}. \tag{5.1}$$

Поскольку среда несжимаема, то для нее должно выполняться условие несжимаемости (3.9.3). Тогда, подставляя в (3.9.3) выражение (4.2) для $\mathbf{F}$, получаем следующее соотношение:

$$1 = \det \mathbf{F} = k_1 k_2 k_3, \tag{5.2}$$

из которого можно выразить k_2 и k_3 через k_1 (в данной задаче $k_2 = k_3$):

$$k_3 = k_2 = 1/\sqrt{k_1}\,. \tag{5.3}$$

Это простое соотношение является аналогом соотношений (4.15), (4.19) для сжимаемой среды, из него следует, что для несжимаемых сред также имеет место эффект Пуассона (см. п. 5.4.5), но зависимость k_2 и k_3 от k_1 имеет универсальный характер — она не зависит от констант μ и β несжимаемой среды (для сжимаемой среды это не так).

Поскольку k_1 в задаче о растяжении бруса сразу вычисляется из граничного условия по формуле (4.12), то и k_2, k_3 также находим без использования определяющих соотношений по формуле (5.3).

5.5.2. Напряжения в несжимаемом брусе согласно моделям B_n. Положим, что определяющие соотношения упругого несжимаемого бруса соответствуют линейным моделям B_n (3.9.46):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\big)\mathbf{E} - (1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big), \tag{5.4}$$

которые содержат две константы: μ и β.

Подставляя в это выражение соотношение (5.1), находим, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в данной задаче, как и для сжимаемых сред, не имеют касательных напряжений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} = -pk_\alpha^{\mathrm{III}-n} + \mu(n-\mathrm{III})\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\sum_{\gamma=1}^{3}k_\gamma^{n-\mathrm{III}} - k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\big)\Big),\\ \alpha=1,2,3, \qquad n=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Подставляя эти выражения в (4.7), находим представление для тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{T}$ в моделях B_n:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3}\sigma_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha\otimes\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha} = -p + \mu(n-\mathrm{III})k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\big(1+\beta+(1-\beta)\big(\sum_{\gamma=1}^{3}k_\gamma^{n-\mathrm{III}} - k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\big)\big),\\ \alpha=1,2,3.\end{gathered} \tag{5.8}$$

5.5.3. Разрешающее соотношение $\sigma_1(k_1)$. Ввиду совпадения k_2 и k_3 в (5.8) имеется только два независимых соотношения: при $\alpha=1$ и $\alpha=2$, причем из граничного условия (4.11в) следует, что $\sigma_{22}=0$. В результате имеем два уравнения

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = -p + \mu(n-\mathrm{III})k_1^{n-\mathrm{III}}(1+\beta+2(1-\beta)k_2^{n-\mathrm{III}}),\\ 0 = -p + \mu(n-\mathrm{III})k_2^{n-\mathrm{III}}(1+\beta+(1-\beta)(k_1^{n-\mathrm{III}}+k_2^{n-\mathrm{III}}))\end{gathered} \tag{5.9}$$

относительно двух неизвестных: σ_1 и p. Исключая p и используя соотношение (5.3), получаем разрешающее соотношение между напряжением σ_{11} и кратностью продольного удлинения k_1:

$$\sigma_{11} = \mu(n - \mathrm{III})\left((1+\beta)\left(k_1^{n-\mathrm{III}} - \frac{1}{k_1^{(n-\mathrm{III})/2}}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\beta)\left(k_1^{(n-\mathrm{III})/2} - \frac{1}{k_1^{n-\mathrm{III}}}\right)\right), \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}. \qquad (5.10)$$

5.5.4. Сравнительный анализ моделей B_n. На рис. 5.10 приведены графики функций $\dfrac{\sigma_{11}}{\mu}(k_1)$, построенные по формуле (5.10) для различных значений параметра β и различных n. Для моделей B_{II} и B_{IV} все функции выпуклы вверх при всех значениях константы β из отрезка $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$. Для моделей B_{I} и B_{V} функции $\dfrac{\sigma_{11}}{\mu}(k_1)$ имеют точку перегиба при $\beta < 1$ и $\beta > -1$ соответственно: в области сжатия $(0 < k < 1)$ эти функции выпуклы вверх, а в области растяжения $(k \geqslant 1)$ — выпуклы вниз. Для модели B_{I} с $\beta = 1$ и модели B_{V} с $\beta = 1$ (модель Трелоара) графики функций $\dfrac{\sigma_{11}}{\mu}(k)$ не имеют точек перегиба, они выпуклы вверх.

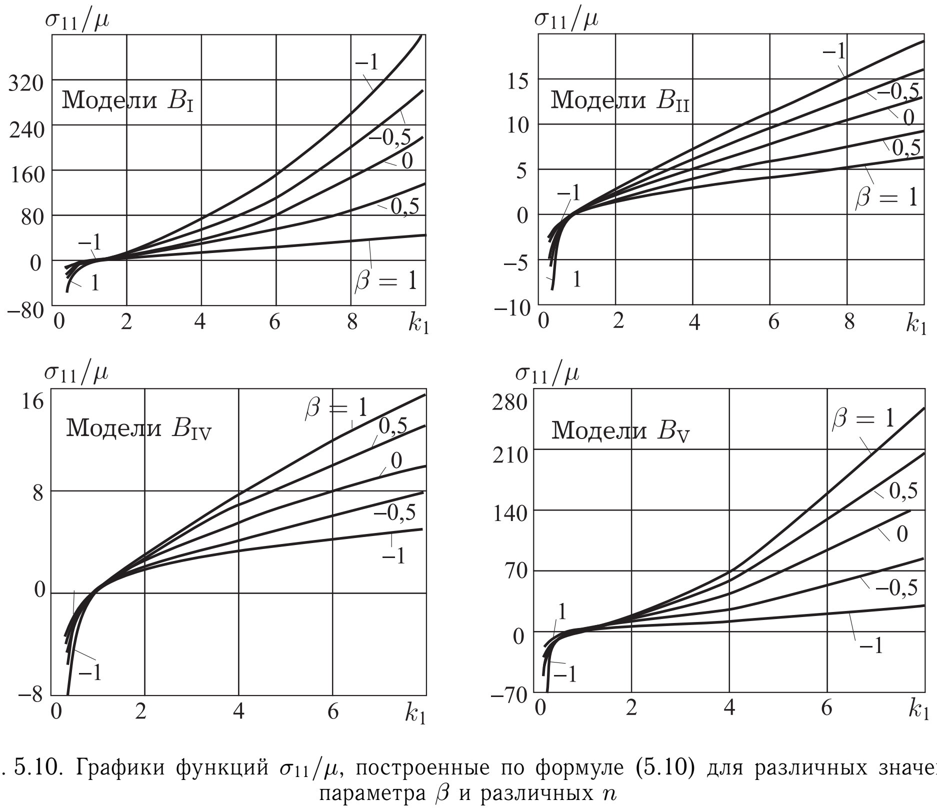

Рис. 5.10. Графики функций σ_{11}/μ, построенные по формуле (5.10) для различных значений параметра β и различных n

Для значений $\beta > 1$ и $\beta < -1$ графики функций $\dfrac{\sigma_{11}}{\mu}(k_1)$ имеют физический смысл только для некоторого интервала значений $k^*_{\min} < k_1 < k^*_{\max}$, поскольку при других значениях k_1 нарушается монотонность функции.

На рис. 5.11 и 5.13 приведены экспериментальные диаграммы деформирования $\sigma^{(э)}_{11}(\delta_1)$ для резины и полиуретанового эластомера, а также представлены зависимости $\sigma_{11}(\delta_1)$ (5.10), аппроксимирующие эти экспериментальные кривые. Для каждой модели B_n константы μ и β выбирались оптимальным образом из условия минимальности среднеквадратичного отклонения расчетной и экспериментальной диаграмм деформирования при растяжении, вычисляемого по N точкам:

$$\Delta = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{\sigma_{11}(\delta_{1(i)})}{\sigma^{(э)}_{11}(\delta_{1(i)})}\right)^2\right)^{1/2} \to \min. \tag{5.11}$$

Значения напряжений $\sigma^{(э)}_{11}(\delta_1)$ вычислялись по экспериментальным значениям напряжений Пиолы–Кирхгофа $P^{(э)}_{11}(\delta_1)$ согласно формуле (4.24) для несжимаемых сред:

$$\sigma^{(э)}_{11} = P^{(э)}_{11} k_1. \tag{5.12}$$

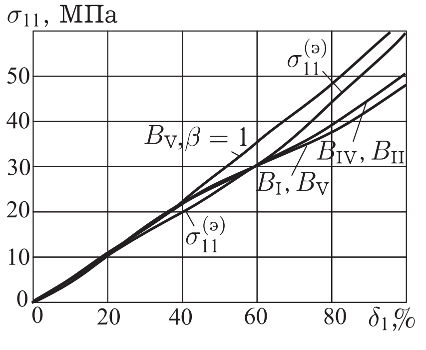

Рис. 5.11. Экспериментальная диаграмма деформирования резины при растяжении и ее аппроксимация с помощью моделей B_n и модели Трелоара

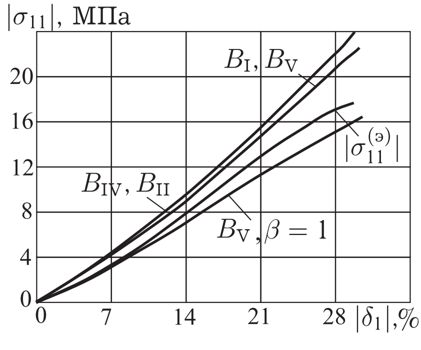

Рис. 5.12. Экспериментальная диаграмма деформирования резины при сжатии и ее расчет с помощью моделей B_n и модели Трелоара

Рассматривались также модели B_{IV} и B_{V} с $\beta = 1$ (модели Бартенева–Хазановича и Трелоара, см. п. 3.9.7).

В табл. 5.3 приведены значения констант μ и β, полученные указанным способом. Там же даны значения среднеквадратического отклонения Δ экспериментальных кривых от расчетных.

Все модели B_n имеют примерно одинаковое качество аппроксимации экспериментальных кривых. Несколько лучшую точность имеют модели B_{I} и B_{V}.

На рис. 5.12 и 5.14 показаны расчетные и экспериментальная диаграммы деформирования резины и полиуретана при сжатии, причем расчетные диаграммы были построены согласно формулам (5.10), в которых константы μ

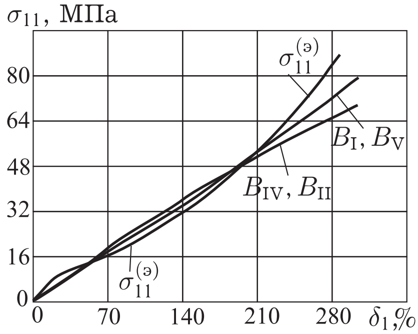

Рис. 5.13. Экспериментальная диаграмма деформирования полиуретана при растяжении и ее аппроксимация с помощью моделей B_n

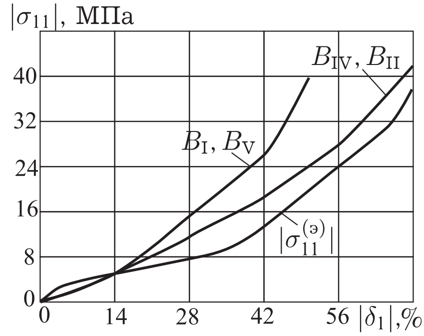

Рис. 5.14. Экспериментальная и расчетные диаграммы деформирования полиуретана при сжатии

Таблица 5.3. Значения констант μ и β для резины и полиуретана

Резина				Полиуретан			
n	μ, МПа	β	Δ, %	n	μ, МПа	β	Δ, %
I	5,145	0,13	7,8	I	3,15	0,616	11,3
II	19,11	1	8,7	II	11,5	−0,45	14,5
IV	19,11	−1	8,7	IV	11,56	0,45	14,5
V	5,145	−0,13	8,7	V	3,15	−0,616	11,3
V*	4,41	1	11				

и β были предварительно определены по диаграммам деформирования при растяжении. Для рассмотренных материалов модели B_{II} и B_{IV} более точно прогнозируют поведение полиуретана при сжатии, чем модели B_{I} и B_{V}. Следует отметить, что обычно результаты экспериментов на сжатие существенно зависят от условий проведения испытаний, в частности, от формы исследуемого образца материала и способа его закрепления. Например, при сжатии образцов цилиндрической формы диаграммы $\sigma_{11}(\delta_1)$ существенно зависят от соотношения начального диаметра и толщины. Более того, при определенном значении δ_1 обычно происходит потеря устойчивости формы образца, так цилиндрическая форма часто переходит в бочкообразную. Указанные обстоятельства, по-видимому, являются основными причинами имеющегося отклонения расчетных диаграмм $\sigma_{11}(\delta_1)$ от экспериментальных $\sigma_{11}^{(\,)}(\delta_1)$ при сжатии.

5.5.5. Напряжения в несжимаемом брусе согласно моделям $_n$. Для описания деформирования несжимаемого упругого бруса можно выбрать и другие модели из приведенных в разд. 3.9. Рассмотрим в качестве сравнения линейные модели A_n (3.9.40):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (\bar{m} + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}))\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \qquad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}, \qquad (5.13)$$

которые содержат три константы $\bar{m}$, l_1 и l_2.

Алгоритм нахождения диаграммы деформирования $\sigma_{11}(\delta_1)$ для этих моделей такой же, как и для моделей B_n. Напряжения $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}$ в задаче о растяжении имеют вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} = -pk_\alpha^{\mathrm{III}-n} + \bar{m} + \frac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 3) + \frac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1),$$
$$\alpha = 1, 2, 3. \tag{5.14}$$

Декартовы компоненты тензора напряжений Коши $\sigma_{\alpha\alpha}$ вычисляем по формулам (4.8): $\sigma_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}$, в результате получаем следующие уравнения:

$$\sigma_{11} = -p + (\bar{m} + \frac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 3) + \frac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1))k_1^{n-\mathrm{III}},$$
$$(5.15)$$
$$\sigma_{22} = 0 = -p + (\bar{m} + \frac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 3) + \frac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 1))k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}}.$$

Исключая из этих уравнений p, получаем искомую функцию $\sigma_{11}(k_1)$, которую представим в следующем виде:

$$\sigma_{11} = \bar{m}\overset{(\mathrm{n})}{Q}(k_1) + l_1\overset{(\mathrm{n})}{M}(k_1) + l_2\overset{(\mathrm{n})}{N}(k_1), \tag{5.16}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{Q} = k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}},$$
$$\overset{(\mathrm{n})}{M} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 3)(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}}), \tag{5.17}$$
$$\overset{(\mathrm{n})}{N} = \frac{2}{n-\mathrm{III}}((k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)k_1^{n-\mathrm{III}} - (k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}} - 1)k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}}).$$

На рис. 5.15 и 5.16 представлены результаты аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ для резины ИРП и полиуретана с помощью функций (5.16) для различных $n = \mathrm{I}$, II, IV V. Константы $\bar{m}$, l_1 и l_2 были найдены с помощью минимизации функционала среднеквадратического отклонения функций $\sigma_{11}(\delta_1)$ и $\sigma_{11}^{\text{э}}(\delta_1)$ в контрольных точках:

$$\Delta = \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(1 - \frac{\sigma_{11}(\delta_i)}{\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_i)}\Big)^2\Big)^{1/2} \to \min. \tag{5.18}$$

Значения вычисленных таким способом констант $\bar{m}$, l_1 и l_2 приведены в табл. 5.4.

Наилучшую аппроксимацию экспериментальной диаграммы деформирования для двух рассмотренных типов материалов обеспечивает модель A_{II} (см. рис. 5.15 и 5.16 и табл. 5.4), величина Δ для нее не превышает 16.1 и 9 % соответственно. Отметим, что для модели A_{II}, в отличие от других рассмотренных выше моделей A_n и B_n, функция $\sigma_{11}(\delta_1)$ имеет точку перегиба, так же как и экспериментальная диаграмма $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$.

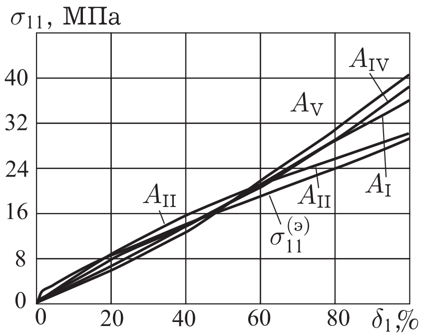

Рис. 5.15. Экспериментальная диаграмма деформирования резины и ее аппроксимация с помощью моделей A_n несжимаемых сред

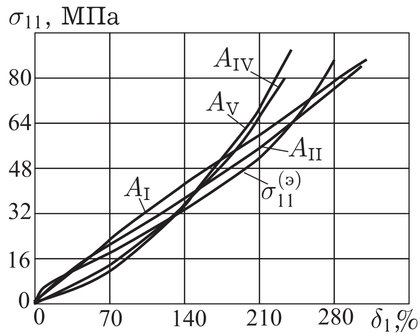

Рис. 5.16. Экспериментальная диаграмма деформирования полиуретана и ее аппроксимация с помощью моделей A_n несжимаемых сред

Таблица 5.4. Значения констант $\bar{m}$, l_1 и l_2 для резины и полиуретана

Резина				
n	$\bar{m}$, МПа	l_1, МПа	l_2, МПа	Δ, %
I	0,2	0,2	17,6	21,9
II	2,8	0,2	19,8	16,1
IV	19,8	0,2	2,4	28
V	10,6	0,2	0,2	31

Полиуретан				
n	m, МПа	l_1, МПа	l_2, МПа	Δ, %
I	0,2	0,2	10,6	21
II	25	0,2	29,4	9
IV	0,2	0,2	9	34
V	5,4	0,2	0,2	38

Для других твердых сред возможна иная ситуация. Целесообразность использования всего комплекса энергетических (или квазиэнергетических) моделей как раз и заключается в том, что, проделывая вычисления сразу со всеми моделями, в итоге появляется возможность выбора какой-то одной модели, приводящей к наилучшим результатам для конкретной упругой среды.

Упражнения к 5.5

Упражнение 5.5.1. Рассмотреть задачу о растяжении несжимаемого упругого бруса, использовав при этом линейные модели A_n (3.10.34) с $\bar{m} = p_0 = 0$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\mathbf{G}^{-1} + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},$$

показать, что в этом случае итоговое выражение для компоненты тензора напряжений Коши $\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_1$ имеет следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\sigma}_1 = \frac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 3)(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}) +$$
$$+ \frac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}(k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 1)), \quad n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.$$

5.6. Простой сдвиг

5.6.1. Деформация простого сдвига. Рассмотрим задачу о простом сдвиге твердого упругого тела в виде параллелепипеда, закон движения которого описывается соотношением (1.1.7) (см. пример 1.2 из п. 1.1.1):

$$x^i = X^i + a\delta^i_1 X^2, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.1}$$

Тензоры деформации для этой задачи также были вычислены ранее, ссылки на формулы приведены в табл. 5.1.

5.6.2. Напряжения в задаче о сдвиге. Полагая, что рассматриваемое тело является изотропным и соответствует линейной модели A_n (3.8.62), вычислим тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, подставляя в соотношение (3.8.62) или (4.5) тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ из упр. 3.2.14:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}^2_\alpha + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{12} \mathbf{O}_3, \tag{6.2}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} = (l_1 + 2l_2)\overset{(\mathrm{n})}{c}_{0A} + l_1 \overset{(\mathrm{n})}{c}_{2A}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{T}_{12} = 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{c}_{1A},$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_{22} = (l_1 + 2l_2)\overset{(\mathrm{n})}{c}_{2A} + l_1 \overset{(\mathrm{n})}{c}_{0A}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{T}_{33} = l_1(\overset{(\mathrm{n})}{c}_{0A} + \overset{(\mathrm{n})}{c}_{2A}),$$

$$n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V},$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{c}_{0A}$, $\overset{(\mathrm{n})}{c}_{1A}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{c}_{2A}$ определяются по табл. 3.6 из упр. 3.2.14.

Из-за ненулевых напряжений сдвига $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}$ тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в данной задаче не являются диагональными — у них отличны от нуля четыре компоненты. Для того, чтобы вычислить тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$, следует воспользоваться формулами (3.2.36) и (3.2.37). Поскольку в задаче о сдвиге тензор поворота $\mathbf{O}$ отличен от $\mathbf{E}$, то процедура вычисления тензоров энергетической эквивалентности ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ является более сложной, чем в задаче о растяжении — необходимо записать соотношения (3.2.36) в собственных базисах:

$$\mathbf{T} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathring{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathring{\mathbf{p}}_\alpha \cdot\cdot \Big(\sum_{\gamma=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\gamma\gamma} \bar{\mathbf{e}}^2_\gamma + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}\mathbf{O}_3\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T^{(p)}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta, \tag{6.3}$$

где обозначены компоненты $T^{(p)}_{\alpha\beta}$ тензора напряжений Коши в собственном базисе $\mathbf{p}_\alpha$:

$$T^{(p)}_{\alpha\beta} = \overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta}(\sum_{\gamma=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\gamma\gamma}\overset{\circ}{\bar{p}}_{\beta\gamma}\overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha\gamma} + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}(\overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha1}\overset{\circ}{\bar{p}}_{\beta2} + \overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha2}\overset{\circ}{\bar{p}}_{\beta1})), \tag{6.4}$$

а также компоненты $\overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha\gamma}$ разложения собственных векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ по базису $\bar{\mathbf{e}}_\gamma$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha i}\bar{\mathbf{e}}^i, \qquad \overset{\circ}{\bar{p}}_{\alpha\gamma} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}}_\gamma = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 b_1 & 0 \\ 0 & s_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$$s_\alpha = (1 + b_\alpha^2)^{-1/2}, \qquad b_\alpha = \frac{a}{2} - (-1)^\alpha \sqrt{1 + a^2/4}\,.$$

Здесь мы учли выражение для $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha$ из упр. 1.3.3: $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = s_\alpha(\bar{\mathbf{e}}_1 + b_\alpha\bar{\mathbf{e}}_2)$, $\alpha = 1, 2$, $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{p}}}_3 = 1$. С учетом (6.5) можно записать формулы (6.4) в явном виде:

$$\begin{aligned} T^{(p)}_{11} &= \overset{(\mathrm{n})}{E}_{11}(\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}s_1^2 + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{22}s_1^2 b_1^2 + 2\overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}s_1^2 b_1), \\ T^{(p)}_{22} &= \overset{(\mathrm{n})}{E}_{22}(\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}s_2^2 + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{22}s_2^2 b_2^2 + 2\overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}s_2^2 b_2), \\ T^{(p)}_{12} &= \overset{(\mathrm{n})}{E}_{12}(\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{22}b_1 b_2 + \overset{(\mathrm{n})}{T}_{12}(b_1 + b_2))s_1 s_2, \\ T^{(p)}_{13} &= T^{(p)}_{23} = 0, \quad T^{(p)}_{33} = \overset{(\mathrm{n})}{T}_{33}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Матрицы $\overset{(\mathrm{n})}{E}_{\alpha\beta}$ определены формулами (3.2.38), а входящие в них собственные значения λ_α, согласно результатам упр. 1.3.3, имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + b_1|a|}\,, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^{-1}, \quad \lambda_3 = 1. \tag{6.7}$$

Используя теперь выражение для собственных векторов (см. упр. 1.3.3) $\mathbf{p}_\alpha = (-1)^{\alpha+1}s_\alpha(b_\alpha\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2)$, из (6.3) получаем следующее выражение для тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 + \sigma_{12}\mathbf{O}_3, \tag{6.8}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — как и выше, компоненты тензора напряжений Коши в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$, которые в задаче о сдвиге имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= T^{(p)}_{11}s_1^2 b_1^2 - 2T^{(p)}_{12}s_1 s_2 b_1 b_2 + T^{(p)}_{22}s_2^2 b_2^2, \\ \sigma_{22} &= T^{(p)}_{11}s_1^2 - 2T^{(p)}_{12}s_1 s_2 + T^{(p)}_{22}s_2^2, \\ \sigma_{12} &= T^{(p)}_{11}s_1^2 b_1 - T^{(p)}_{12}s_1 s_2(b_1 + b_2) + T^{(p)}_{22}s_2^2 b_2, \quad \sigma_{33} = T^{(p)}_{33}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Таким образом, тензор напряжений Коши (6.8) в задаче о простом сдвиге также оказывается не зависящим от координат, поэтому автоматически удовлетворяет уравнениям равновесия в декартовом базисе:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(\partial\sigma_{\alpha\beta}/\partial x^{\beta})\bar{\mathbf{e}}_{\alpha}=0. \tag{6.10}$$

5.6.3. Граничные условия в задаче о сдвиге. Граничные условия в задаче о простом сдвиге, соответствующие закону движения (6.1), таковы:

$$x^2=h^2:\quad u^1=u_e^1,\quad u^2=0,\quad u^3=0, \tag{6.11а}$$

$$x^2=0:\quad u^{\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,3, \tag{6.11б}$$

$$x^3=0,h^3:\quad u^3=0,\quad \bar{\mathbf{e}}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\bar{\mathbf{e}}_3=0,\quad \bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\bar{\mathbf{e}}_3=0, \tag{6.11в}$$

$$x^1=0,h^1:\quad \bar{\mathbf{e}}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\bar{\mathbf{e}}_3=0,\quad u^2=0,\quad u^2=u_e^1X^2/h_2, \tag{6.11г}$$

т.е. грань $x^2=0$ параллелепипеда остается неподвижной, а на противоположной ей грани $x^2=h^2$ задается перемещение u_e^1, сдвигающее параллелепипед в сторону оси Ox^1, на гранях $x^3=0$ и $x^3=h^3$ отсутствуют перемещение по оси Ox^3 и оба касательных напряжения. На наклонных гранях $x^1=0,h^1$ задают нулевое касательное напряжение $\sigma_{13}=0$ и нулевое перемещение $u=0$ и продольное перемещение u^1, меняющееся по линейному закону вдоль координаты X^2.

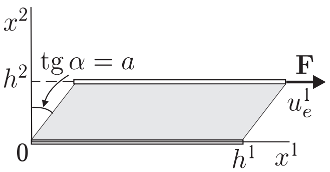

Рис. 5.17. Схема эксперимента, в котором приближенно реализуется решение задачи о простом сдвиге

Несложно убедиться, что закон движения (6.1) и тензор напряжений $\mathbf{T}$ (6.8) автоматически удовлетворяют граничным условиям (6.11а)–(6.11в), так как из (6.1) и (6.8) следует

$$u^i=x^i-X^i=a\delta_1^iX^2,\qquad \alpha=1,2,3, \tag{6.12а}$$

$$\sigma_{\alpha 3}=\bar{\mathbf{e}}_{\alpha}\cdot\mathbf{T}\cdot\bar{\mathbf{e}}_3\equiv 0,\qquad \alpha=1,2. \tag{6.12б}$$

Из (6.11г) и (6.12а) находим значение функции a через u_e^1:

$$a=u_e^1/h^2. \tag{6.13}$$

В силу (6.13), первое граничное условие в (6.11г) удовлетворяется. Второе и третье граничные условия в (6.11г) также удовлетворяются тождественно, если принять во внимание формулы (6.12) и (6.13).

Задача о простом сдвиге с граничными условиями (6.11) приближенно реализуется в эксперименте по продольному сдвигу тонкой полосы из рассматриваемого материала (например, из резины), расположенной между двумя жесткими (например, стальными) листами, смещаемыми друг относительно друга (рис. 5.17).

На некотором удалении от торцов $x^1=0,h^1$ и $x^3=0,h^3$ в такой пластине реализуется закон движения (6.1) и однородное напряженное состояние.

5.6.4. Сравнительный анализ различных моделей A_n в задаче о сдвиге. Обратим внимание на то, что в задаче о простом сдвиге кроме сдвиговых напряжений σ_{12} ненулевыми являются все нормальные напряжения σ_{11}, σ_{22} и σ_{33} — это явление, характерное для конечных деформаций называют *эффектом Пойнтинга*.

Зависимость $\sigma_{12}(a)$, выражаемая формулами (6.9), называют *диаграммой деформирования при простом сдвиге* (напомним, что $a = \operatorname{tg}\, \alpha = u_e^1/h^2$ — тангенс угла сдвига параллелепипеда).

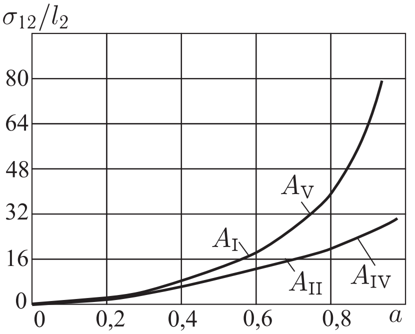

Рис. 5.18. Диаграммы деформирования при сдвиге для линейных моделей A_n и $\nu = 0{,}4$

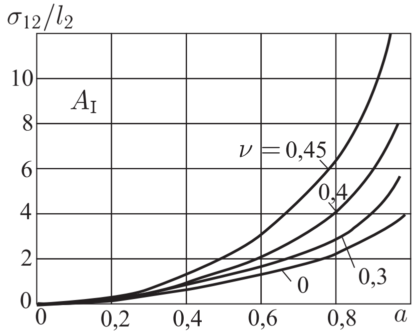

Рис. 5.19. Диаграммы деформирования при сдвиге для линейной модели A_{I} с различными значениями коэффициента Пуассона

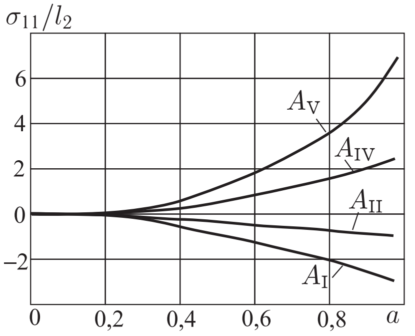

Рис. 5.20. Зависимость напряжений σ_{11} от угла сдвига a в задаче о простом сдвиге для линейных моделей A_n и $\nu = 0{,}4$

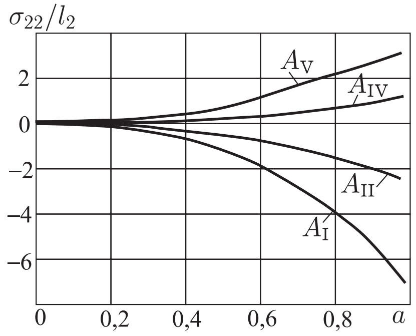

Рис. 5.21. Зависимость напряжений σ_{22} от угла сдвига a в задаче о простом сдвиге для линейных моделей A_n и $\nu = 0{,}4$

На рис. 5.18 и 5.19 приведены диаграммы деформирования при сдвиге для различных линейных моделей A_n и различных коэффициентов Пуассона (напряжение σ_{12} отнесено к l_2, а константа l_1 выражена через ν по формуле (4.16)). Увеличение значений ν от 0 до 0,5 приводит к смещению диаграммы $\sigma_{12}(a)$ в область более высоких значений. Особенностью задачи о простом сдвиге является тот факт, что диаграммы $\sigma_{12}(a)$ совпадают для моделей A_{I} и A_{V}, а также для моделей A_{II} и A_{IV} (рис. 5.18). Однако соответствующие диаграммы нормальных напряжений $\sigma_{11}(a)$ и $\sigma_{22}(a)$, вычисляемые по (6.9), существенно различаются: для моделей A_{I} и A_{II} напряжения σ_{11} и σ_{22} являются отрицательными, а для моделей A_{IV} и A_{V} — положительными (рис. 5.20 и 5.21).

5.6.5. Сдвиг несжимаемой упругой среды. Рассмотрим простой сдвиг для линейных моделей B_n несжимаемых сред (3.9.46). Заметим, что закон движения (6.1) даже для сжимаемых сред сохраняет объем, так как для него $\det\mathbf{F}=1$ (см. упр. 3.2.14). Поэтому для несжимаемых сред простой сдвиг также описывается законом (6.1) и граничными условиями (6.11а), (6.11б) и (6.11г), а вместо условий (6.11в) следует рассмотреть случай свободных торцов:

$$x^3=0,h^3:\qquad \sigma_{33}=0,\quad \sigma_{13}=0,\quad \sigma_{23}=0. \tag{6.14}$$

Подставляя выражения для тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ в задаче о сдвиге (см. упр. 3.2.14) в (3.9.46), получаем выражение для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}=-\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}+\sum_{\alpha=1}^{3}\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2+\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{12}\mathbf{O}_3, \tag{6.15}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11}=\mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}}+(1-\beta)(\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{2B}+\frac{1}{n-\mathrm{III}})\Big),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{22}=\mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}}+(1-\beta)(\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{0B}+\frac{1}{n-\mathrm{III}})\Big),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{33}=\mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}}+(1-\beta)(\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{0B}+\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{2B})\Big),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{12}=-\mu(n-\mathrm{III})^2\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{1B},$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{0B}$, $\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{1B}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{c}{}_{2B}$ определяют по табл. 3.6 из упр. 3.2.14.

С помощью тензоров энергетической эквивалентности ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ по аналогии с (6.3) получаем выражение для $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{E}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}T^{(p)}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta=\sum_{\alpha=1}^{3}\sigma_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2+\sigma_{12}\mathbf{O}_3, \tag{6.16}$$

где $T^{(p)}_{\alpha\beta}$ определяются по тем же формулам (6.6). Здесь мы учли, что ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}=(n-\mathrm{III})\mathbf{E}$. Декартовы компоненты тензора напряжений Коши $\sigma_{\alpha\beta}$ находим с помощью выражений для собственных векторов $\mathbf{p}_\alpha$ в декартовом базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$, в результате приходим к соотношениям, подобным (6.9):

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=-p+T^{(p)}_{11}s_1^2b_1^2-2T^{(p)}_{12}s_1s_2b_1b_2+T^{(p)}_{22}s_2^2b_2^2,\\ \sigma_{22}=-p+T^{(p)}_{11}s_1^2-2T^{(p)}_{12}s_1s_2+T^{(p)}_{22}s_2^2,\\ \sigma_{12}=T^{(p)}_{11}s_1^2b_1-T^{(p)}_{12}s_1s_2(b_1+b_2)+T^{(p)}_{22}s_2^2b_2,\quad \sigma_{33}=-p+T^{(p)}_{33}.\end{gathered} \tag{6.17}$$

Как и для сжимаемой среды в задаче о простом сдвиге $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, тогда, подставляя формулу для σ_{33} в граничное условие (6.14), выражаем для него p:

$$p = T_{33}^{(p)} = \overset{(\mathrm{n})}{T}_{33} = \mu(n - \mathrm{III})^2 \left(\frac{1+\beta}{n - \mathrm{III}} + (1-\beta)\left(\overset{(\mathrm{n})}{c}_{0B} + \overset{(\mathrm{n})}{c}_{2B}\right)\right). \qquad (6.18)$$

Здесь мы использовали формулы (6.15). Подставляя (6.18) в (6.17), получаем окончательное выражение для нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22}, а напряжение σ_{33} в данном случае оказывается нулевым во всем теле: $\sigma_{33} = 0$.

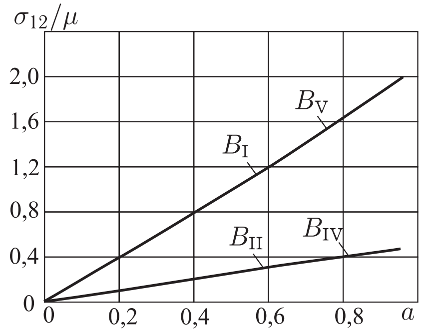

Рис. 5.22. Диаграммы деформирования при сдвиге для несжимаемых сред с моделями B_n

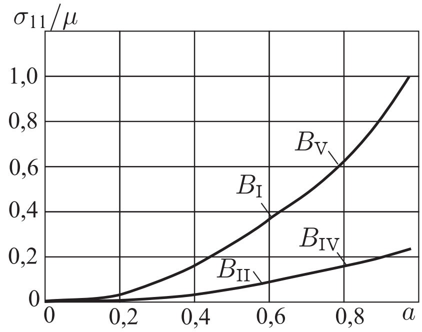

Рис. 5.23. Зависимость напряжений σ_{11} от угла сдвига a в задаче о простом сдвиге для несжимаемых сред с моделями B_n

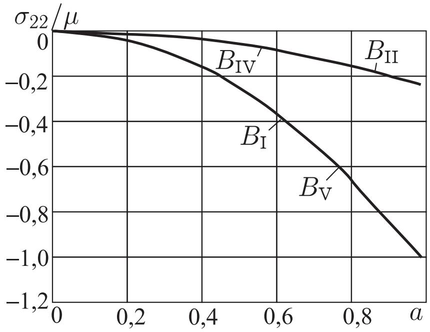

Рис. 5.24. Зависимость напряжений σ_{22} от угла сдвига a в задаче о простом сдвиге для несжимаемых сред с моделями B_n

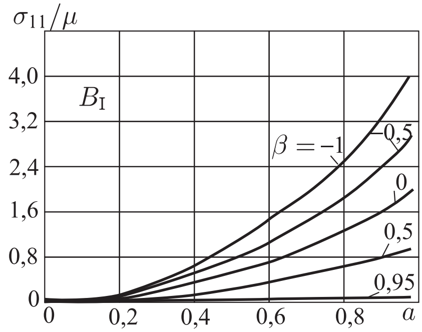

Рис. 5.25. Зависимость напряжений σ_{11} от угла сдвига a в задаче о простом сдвиге для модели B_{I} несжимаемых сред с различными значениями коэффициента β

На рис. 5.22–5.25 показаны диаграммы деформирования $\sigma_{12}(a)$ при сдвиге, а также функции $\sigma_{11}(a)$ и $\sigma_{22}(a)$ для линейных моделей B_n несжимаемых сред.

Для несжимаемых сред совпадают не только диаграммы деформирования $\sigma_{12}(a)$ для моделей B_{I} и B_{V}, а также для моделей B_{II} и B_{IV}, но и нормальные напряжения $\sigma_{11}(a)$ и $\sigma_{22}(a)$ (рис. 5.22–5.24), причем для всех моделей B_n $\sigma_{11} > 0$, а $\sigma_{22} < 0$. С увеличением значений параметра β от -1 до 1 все диаграммы $|\sigma_{11}(a)|$, $|\sigma_{22}(a)|$ смещаются в область более низких значений (рис. 5.25). Диаграммы деформирования $\sigma_{12}(a)$ от параметра β не зависят.

Упражнения к 5.6

Упражнение 5.6.1. Рассмотреть задачу о сдвиге для моделей A_{I} и A_{V}, используя для них вместо общих соотношений (3.2.36) явные соотношения между тензором напряжений Коши и энергетическими тензорами напряжений:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}.$$

Показать, что в этом случае формулы (6.9) для напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ принимают вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \overset{\mathrm{I}}{T}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 3, \quad \sigma_{22} = \overset{\mathrm{I}}{T}_{22} - 2a\overset{\mathrm{I}}{T}_{12} + a^2\overset{\mathrm{I}}{T}_{11}, \quad \sigma_{12} = \overset{\mathrm{I}}{T}_{12} - a\overset{\mathrm{I}}{T}_{11}$$

— для модели A_{I}, и

$$\sigma_{11} = \overset{\mathrm{V}}{T}_{11} + 2a\overset{\mathrm{V}}{T}_{12} + a^2\overset{\mathrm{V}}{T}_{22}, \quad \sigma_{22} = \overset{\mathrm{V}}{T}_{22}, \quad \sigma_{33} = \overset{\mathrm{V}}{T}_{33}, \quad \sigma_{12} = \overset{\mathrm{V}}{T}_{12} + a\overset{\mathrm{V}}{T}_{22}$$

— для модели A_{V}.

5.7. Задача Ламе

5.7.1. Закон движения трубы в задаче Ламе. В рассмотренных выше задачах о растяжении и простом сдвиге поле тензора напряжений $\mathbf{T}(X^i)$ было однородным, что обеспечивало автоматическое удовлетворение уравнениям равновесия. С помощью полуобратного метода аналитическое решение можно получить и для задачи о трубе под внешним и внутренним давлением (*задача Ламе*), в которой поле $\mathbf{T}(X^i)$ — неоднородное.

В этой задаче тело $\mathcal{B}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ представляет собой трубу (толстостенный цилиндр) конечной длины h^3 (рис. 5.26), который при действии давления p_{e1} и p_{e2} на внешней и внутренней поверхностях $r = r_2$ и $r = r_1$ имеет одну и ту же ось симметрии $Ox^3 = Oz$, т.е. остается самоподобным. На торце $z = h^3$ цилиндра задано перемещение u_3^e, а на втором торце $z = 0$ задано условие симметрии.

Введем цилиндрические координаты r, φ, z, связанные с цилиндром (рис. 5.26), в качестве лагранжевых координат X^i выберем: $X^1 = \overset{\circ}{r}$, $X^2 = \overset{\circ}{\varphi}$, $X^3 = \overset{\circ}{z}$ — значения цилиндрических координат материальных точек в начальный момент времени $t = 0$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Тогда радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ материальной точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ можно представить в виде разложения по базисным векторам цилиндрической системы координат $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ (физический базис) следующим образом:

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{r}\mathbf{e}_r + \overset{\circ}{z}\mathbf{e}_z. \tag{7.1}$$

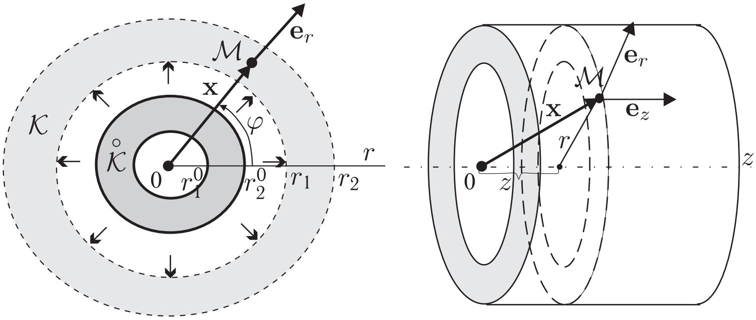

Рис. 5.26. К задаче Ламе

Поскольку под действием давления и осевого перемещения труба сохраняет осевую симметрию в $\mathcal{K}$, то закон движения ищем в следующем виде:

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \tag{7.2}$$

где r и z являются функциями вида

$$r = f(\overset{\circ}{r}, t), \qquad z = k(t)\overset{\circ}{z}, \tag{7.3}$$

причем

$$f(\overset{\circ}{r}, 0) = \overset{\circ}{r}, \qquad k(0) = 1. \tag{7.4}$$

5.7.2. Градиент деформации и тензоры деформации в задаче Ламе. Вычислим локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$ и $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, используя формулы (1.1.10), (7.2) и (7.3):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^1} = \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{r}}(f(\overset{\circ}{r}, t)\mathbf{e}_r(\overset{\circ}{\varphi}) + \overset{\circ}{z}k\mathbf{e}_z) = f'\mathbf{e}_r, \quad f' \equiv \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{r}},\\
\mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{\varphi}}(f\mathbf{e}_r(\overset{\circ}{\varphi}) + \overset{\circ}{z}k\mathbf{e}_z) = f\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \overset{\circ}{\varphi}} = f\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^3} = \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{z}}(f\mathbf{e}_r + \overset{\circ}{z}k\mathbf{e}_z) = k\mathbf{e}_z,\\
\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{e}_r, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 = \overset{\circ}{r}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь мы учли формулы дифференцирования векторов физического базиса цилиндрической системы координат (см. [12]).

Образуем метрические матрицы g_{ij}, g^{ij} и $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$:

$$\begin{gathered}
g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} f'^2 & 0 & 0\\ 0 & f^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} f'^{-2} & 0 & 0\\ 0 & f^{-2} & 0\\ 0 & 0 & k^{-2} \end{pmatrix},\\
\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \overset{\circ}{r}{}^2 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overset{\circ}{g}{}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \overset{\circ}{r}{}^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\\
g = (f'fk)^2, \qquad \overset{\circ}{g} = \overset{\circ}{r}{}^2
\end{gathered} \tag{7.6}$$

и найдем локальные векторы взаимных базисов по формулам (1.1.13):

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{e}_r}{f'}, \qquad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{f}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{1}{k}\mathbf{e}_z, \\ &\mathring{\mathbf{r}}^1 = \mathbf{e}_r, \qquad \mathring{\mathbf{r}}^2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\mathring{r}}, \quad \mathring{\mathbf{r}}^3 = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{7.7}$$

С помощью (7.6) и (7.7) вычисляем градиент деформации:

$$\begin{gathered} \mathbf{F} = \mathbf{r}_i \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i = f'\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{f}{\mathring{r}}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + k\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{F}^{-1} = \mathring{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^i = \frac{1}{f'}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\mathring{r}}{f}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{k}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ J = \rho/\mathring{\rho} = \det\, \mathbf{F}^{-1} = \frac{\mathring{r}}{f'fk}, \end{gathered} \tag{7.8}$$

который, как и для задачи о растяжении бруса, является диагональным тензором, но его компоненты зависят от лагранжевых координат. Поскольку $f = r$ — радиус, а k — кратность удлинения цилиндра по его оси, то f и k — всегда положительны, а из последнего соотношения (7.8) следует, что и f' — положительна, таким образом имеют место ограничения на знаки f', f и k:

$$f' > 0, \quad f > 0, \quad k > 0. \tag{7.9}$$

Ввиду диагональности $\mathbf{F}$ легко находим тензоры искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ и тензор поворота $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{E}. \tag{7.10}$$

С помощью формул (3.2.24) и (3.2.41) находим энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и меры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$:

$$\begin{aligned} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\Big(&((f')^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \\ &+ ((f/\mathring{r})^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + (k^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z\Big), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\big(&f'^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (f/\mathring{r})^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + k^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z\big). \end{aligned} \tag{7.11}$$

5.7.3. Напряжения в задаче Ламе согласно моделям A_n. Положим, что определяющие соотношения цилиндра соответствуют линейной модели A_n (4.5) изотропной упругой среды, тогда, подставляя выражение (7.11) в (4.5), находим энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{T}_r\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \overset{(\mathrm{n})}{T}_\varphi\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \overset{(\mathrm{n})}{T}_z\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \tag{7.12}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_r = \frac{\mathring{r}}{(n-\mathrm{III})f'fk}(l_1 I_1 + 2l_2(f'^{n-\mathrm{III}} - 1)),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_\varphi = \frac{\mathring{r}}{(n-\mathrm{III})f'fk}(l_1 I_1 + 2l_2((f/\mathring{r})^{n-\mathrm{III}} - 1)),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_z = \frac{\overset{\circ}{r}}{(n-\mathrm{III})f'fk}(l_1 I_1 + 2l_2(k^{n-\mathrm{III}} - 1)),$$
$$I_1 = (f')^{n-\mathrm{III}} + (f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}} + k^{n-\mathrm{III}} - 3.$$

В силу диагональности тензоров $\mathbf{F}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, из соотношений (4.7) и (7.8), (7.12) получаем выражение для тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = \sigma_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \sigma_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{F}^{n-\mathrm{III}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{7.13}$$
$$\sigma_r = \frac{\overset{\circ}{r}(f')^{n-\mathrm{III}-1}}{(n-\mathrm{III})fk}(l_1 I_1 + 2l_2(f'^{n-\mathrm{III}} - 1)),$$
$$\sigma_\varphi = \frac{1}{(n-\mathrm{III})f'k}(f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}-1}(l_1 I_1 + 2l_2((f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}} - 1)),$$
$$\sigma_z = \frac{\overset{\circ}{r}k^{n-\mathrm{III}-1}}{(n-\mathrm{III})f'f}(l_1 I_1 + 2l_2(k^{n-\mathrm{III}} - 1)).$$

Компоненты тензора напряжений в данной задаче оказываются зависящими от координаты $\overset{\circ}{r}$ и времени t, поэтому уравнения равновесия автоматически не удовлетворяются. В этом случае, как правило, удобно использовать уравнения равновесия (3.33) в материальном описании. Для этого нам потребуется вычислить тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа по формулам (2.2.31):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J_0}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J}\mathbf{F}^{n-\mathrm{III}-1} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \overset{\circ}{\sigma}_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \overset{\circ}{\sigma}_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \tag{7.14}$$

где

$$\overset{\circ}{\sigma}_r = \frac{(f')^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}((l_1 + 2l_2)f'^{n-\mathrm{III}} + l_1(f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}} - (3l_1 + 2l_2) + l_1 k^{n-\mathrm{III}}),$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_\varphi = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}-1}((l_1 + 2l_2)(f/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}} + {}&\\ + l_1 f'^{n-\mathrm{III}} - (3l_1 + 2l_2) + l_1 k^{n-\mathrm{III}}),& \end{aligned} \tag{7.15}$$
$$\overset{\circ}{\sigma}_z = \frac{k^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}((l_1 + 2l_2)k^{n-\mathrm{III}} + l_1(f'^{n-\mathrm{III}} + (1/\overset{\circ}{r})^{n-\mathrm{III}}) - (3l_1 + 2l_2)).$$

5.7.4. Уравнение для функции f. Записывая компоненты дивергенции $\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P}$ в физическом базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ (см. [12]), представим уравнение равновесия в проекции на ось $O\mathbf{e}_r$ в следующем виде:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_r}{\partial \overset{\circ}{r}} + \frac{\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\varphi}{\overset{\circ}{r}} = 0. \tag{7.16}$$

Здесь учтено, что $\overset{\circ}{\sigma}_r$, $\overset{\circ}{\sigma}_\varphi$ и $\overset{\circ}{\sigma}_z$ не зависят от $\overset{\circ}{\varphi}$ и $\overset{\circ}{z}$. Еще два уравнения равновесия в проекциях на оси $O\mathbf{e}_\varphi$ и $O\mathbf{e}_z$ удовлетворяются тождественно.

Подставляя выражения (7.15) в (7.16), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $f(\overset{\circ}{r}, t)$. Эта функция $f(\overset{\circ}{r},t)$ определяется с точностью до двух постоянных интегрирования $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — функций только времени, для вычисления которых привлекаем граничные условия.

5.7.5. Граничные условия «мягкого» типа. Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях цилиндра имеют вид (5.3.13) (задано давление газа или жидкости p_{e1} и p_{e2}). С учетом формулы (7.14) и того факта, что на поверхностях $\overset{\circ}{r} = \overset{\circ}{r}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, векторы нормали суть $\overset{\circ}{\mathbf{n}} = \mp\mathbf{e}_r$, граничное условие (5.3.13) для данной задачи можно записать следующим образом:

$$\overset{\circ}{r} = \overset{\circ}{r}_\alpha: \qquad \overset{\circ}{\sigma}_r = -p_{e\alpha}\frac{f(\overset{\circ}{r}_\alpha,t)k}{\overset{\circ}{r}_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{7.17}$$

Граничные условия на торцевых поверхностях $\overset{\circ}{z} = 0, h_3$ служат для определения функции k. Например, если на поверхности $z = 0$ заданы условия симметрии, а на $\overset{\circ}{z} = h_3^0$ — давление p_{e3}, то имеем такие условия:

$$\overset{\circ}{z} = 0: \qquad u_z = (z - \overset{\circ}{z})\big|_{\overset{\circ}{z}=0} = 0, \tag{7.18}$$

$$\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{h}_3: \qquad \sigma_z = -p_{e3}. \tag{7.19}$$

Подставляя выражения (7.2) и (7.13) в (7.18) и (7.19), убеждаемся, что первое граничное условие удовлетворяется тождественно, а второе представляет собой дополнительное дифференциальное уравнение на функцию f и константу k.

Полученным выше решением не удается в точности удовлетворить этому граничному условию, поэтому вместо него рассматривают другие варианты граничных условий.

В одном из таких вариантов граничное условие (7.19) на торце «ослабляют», заменяя его на интегральное:

$$\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{h}_3: \qquad \int\limits_{r_1}^{r_2} \sigma_z r\,dr = -\frac{1}{2}p_{e3}(r_2^2 - r_1^2). \tag{7.20}$$

Говорят, что такое условие имеет «мягкий» тип. Метод замены точных граничных условий на интегральные называют *методом Сен-Венана*.

Согласно (7.3), имеем: $r\,dr = f\,df = ff'd\overset{\circ}{r}$, тогда, подставляя выражение (7.13) для σ_z в (7.20) и переходя к отсчетной конфигурации, условие (7.20) записываем следующим образом:

$$\frac{k^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}\Bigg(\frac{2l_1}{\overset{\circ}{r}{}_2^2 - \overset{\circ}{r}{}_1^2}\int\limits_{\overset{\circ}{r}_1}^{\overset{\circ}{r}_2}\Big((f')^{n-\mathrm{III}} + \Big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\Big)^{n-\mathrm{III}}\Big)\overset{\circ}{r}d\overset{\circ}{r} +$$
$$+ (l_1 + 2l_2)k^{n-\mathrm{III}} - (3l_1 + 2l_2)\Bigg) = -p_{e3}\Bigg(\frac{f^2(\overset{\circ}{r}_2) - f^2(\overset{\circ}{r}_1)}{\overset{\circ}{r}{}_2^2 - \overset{\circ}{r}{}_1^2}\Bigg). \tag{7.21}$$

Выражая из уравнения (7.21) функцию k и подставляя ее в (7.15), а затем формулы (7.15) — в (7.16) и (7.17), получаем интегро-дифференциальное уравнение для нахождения функции $f(\overset{\circ}{r},t)$.

Для случая $n = \mathrm{IV}$ (модель Джона A_{IV}) эти уравнения (7.16), (7.17) имеют простое аналитическое решение:

$$f(\overset{\circ}{r},t) = C_1(t)\overset{\circ}{r} + \frac{C_2(t)}{\overset{\circ}{r}}. \tag{7.22}$$

Действительно, в этом случае уравнения (7.15) имеют вид

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_r &= 2(l_1+l_2)C_1 - 2l_2\frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}^2} + l_1k - (3l_1+2l_2),\\ \overset{\circ}{\sigma}_\varphi &= 2(l_1+l_2)C_1 + 2l_2\frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}^2} + l_1k - (3l_1+2l_2),\end{aligned} \tag{7.23}$$

а (7.13) — следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\overset{\circ}{r}{}^2}{(C_1\overset{\circ}{r}{}^2+C_2)k}\Bigl(l_1(2C_1+k) + 2l_2(C_1 - \frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}^2}) - (3l_1+2l_2)\Bigr),\\ \sigma_\varphi &= \frac{\overset{\circ}{r}{}^2}{(C_1\overset{\circ}{r}{}^2-C_2)k}\Bigl(l_1(2C_1+k) + 2l_2(C_1 + \frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}^2}) - (3l_1+2l_2)\Bigr),\\ \sigma_z &= \frac{\overset{\circ}{r}{}^4}{(C_1^2\overset{\circ}{r}{}^4-C_2^2)}\Bigl(l_1(2C_1+k) + 2l_2k - (3l_1+2l_2)\Bigr).\end{aligned} \tag{7.24}$$

Подставляя выражения (7.23) в (7.16), легко убеждаемся, что уравнение равновесия тождественно удовлетворяется.

Подставляя (7.23) в граничные условия (7.17) и (7.19), приводим их к следующему виду:

$$\begin{aligned}2(l_1+l_2)C_1 - \frac{2l_2}{\overset{\circ}{r}{}_1^2}C_2 + l_1k - (3l_1+2l_2) &= -p_{e1}\bigl(C_1 + \frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}_1^2}\bigr),\\ 2(l_1+l_2)C_1 - \frac{2l_2}{\overset{\circ}{r}{}_2^2}C_2 + l_1k - (3l_1+2l_2) &= -p_{e2}\bigl(C_1 + \frac{C_2}{\overset{\circ}{r}{}_2^2}\bigr).\end{aligned} \tag{7.25}$$

Граничное условие (7.21) для модели A_{IV} имеет следующий вид (после подстановки (7.22)):

$$2C_1l_1 + (l_1+2l_2)k - (3l_1+2l_2) = -p_{e3}\bigl(C_1^2 - \frac{C_2^2}{\overset{\circ}{r}{}_1^2\overset{\circ}{r}{}_2^2}\bigr). \tag{7.26}$$

Решая систему трех алгебраических уравнений (7.25), (4.26), находим C_1, C_2 и k.

5.7.6. Граничные условия жесткого типа. Вместо (7.20) можно рассмотреть другое граничное условие «жесткого» типа, при котором задано перемещения u_{ez} по оси Oz:

$$\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{h}_3: \qquad u_z = (z - \overset{\circ}{z})\bigr|_{\overset{\circ}{z}=\overset{\circ}{h}_3} = u_{ez}, \tag{7.27}$$

тогда для k получаем простое выражение

$$k = 1 + (u_{ez}/\overset{\circ}{h}_3), \tag{7.28}$$

аналогичное соответствующему выражению (4.12) в задаче о растяжении бруса. Для модели A_{IV} это соотношение заменяет условие (7.26) и система (7.25), (7.26) относительно C_1, C_2 и k становится линейной, ее решение таково:

$$\begin{gathered} C_1 = \gamma C_2, \qquad C_2 = \overset{\circ}{r}{}_1^2 \frac{1 - 2\nu(k-1)}{1 + (1-2\nu)\widetilde{p}_1)\gamma - (1-2\nu)(1-\widetilde{p}_1)}, \\ \gamma = \frac{\widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2\beta_0^2 - 1 + \beta_0^2}{\widetilde{p}_2 - \widetilde{p}_1}, \qquad \beta_0 = \overset{\circ}{r}_1/\overset{\circ}{r}_2, \end{gathered} \tag{7.29}$$

где $\widetilde{p}_\alpha = p_{e\alpha}/2l_2$, а также введен коэффициент Пуассона (4.16).

Выражения для внешнего и внутреннего радиусов цилиндра r_2 и r_1 в $\mathcal{K}$ находим, используя формулы (7.2) и (7.22):

$$r_\alpha/\overset{\circ}{r}_\alpha = f(\overset{\circ}{r}_\alpha, t)/\overset{\circ}{r}_\alpha = C_1 + (C_2/\overset{\circ}{r}{}_\alpha^2), \qquad \alpha = 1, 2. \tag{7.30}$$

Для других моделей A_n также можно рассмотреть граничное условие (7.27), из которого найдем выражение (7.28) для k. Тогда, после подстановки выражений (7.15) в (7.16) и (7.17), получим одно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции f с двумя граничными условиями.

5.8. Задача Ламе для несжимаемых сред

5.8.1. Уравнение для функции f. Рассмотрим ту же задачу Ламе о цилиндрической трубе под внутренним и внешним давлением (см. разд. 5.7), но материал трубы будем полагать изотропной несжимаемой средой, описываемой линейными моделями B_n (см. (3.9.46) или (5.4)). Закон движения трубы в этом случае также ищется полуобратным методом в виде (7.2),(8.3), поэтому имеют место все деформационные соотношения (7.5)–(7.11). Из условия несжимаемости среды $\det \mathbf{F} = 1$ и из (7.9) следует, что функция $f(\overset{\circ}{r}, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$f' f k = \overset{\circ}{r}. \tag{8.1}$$

Переписывая это уравнение в виде $f\,df = \frac{1}{k}\overset{\circ}{r}\,d\overset{\circ}{r}$, легко находим его решение (выбираем положительный корень):

$$f^2 = \frac{\overset{\circ}{r}{}^2}{k} + C, \tag{8.2}$$

где C — постоянная интегрирования.

5.8.2. Напряжения в задаче Ламе для несжимаемых сред. Подставляя соотношение (8.1) в (7.11), находим

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\Big(\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r + \big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi + k^{n-\mathrm{III}}\mathbf{e}_z\otimes\mathbf{e}_z\Big). \qquad (8.3)$$

После подстановки этого выражения в определяющее соотношение (5.4), получаем, что энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и в случае несжимаемой среды имеют диагональный вид (7.12), но их компоненты отличаются от случая сжимаемых сред:

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_r = -p\big(\frac{fk}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}} + \mu(n-\mathrm{III})\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}} + k^{n-\mathrm{III}}\big)\Big),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_\varphi = -p\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{f}\big)^{n-\mathrm{III}} + \mu(n-\mathrm{III})\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}} + k^{n-\mathrm{III}}\big)\Big), \qquad (8.4)$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_z = -pk^{n-\mathrm{III}} + \mu(n-\mathrm{III})\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}} + \big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}}\big)\Big),$$

$$n = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}.$$

Для тензора напряжений Коши также имеют место соотношения (7.13), а его компоненты таковы:

$$\sigma_r = -p + \widetilde{\sigma}_r, \quad \sigma_\varphi = -p + \widetilde{\sigma}_\varphi, \quad \sigma_z = -p + \widetilde{\sigma}_z, \qquad (8.5)$$

где

$$\widetilde{\sigma}_r = \mu(n-\mathrm{III})\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}}\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}} + k^{n-\mathrm{III}}\big)\Big),$$

$$\widetilde{\sigma}_\varphi = \mu(n-\mathrm{III})\big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}}\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}} + k^{n-\mathrm{III}}\big)\Big), \qquad (8.6)$$

$$\widetilde{\sigma}_z = \mu(n-\mathrm{III})k^{n-\mathrm{III}}\Big(1+\beta+(1-\beta)\big(\big(\frac{\overset{\circ}{r}}{fk}\big)^{n-\mathrm{III}} + \big(\frac{f}{\overset{\circ}{r}}\big)^{n-\mathrm{III}}\big)\Big).$$

С помощью соотношения $\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}$, находим компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа:

$$\overset{\circ}{\sigma}_r = \sigma_r\frac{fk}{\overset{\circ}{r}}, \qquad \overset{\circ}{\sigma}_\varphi = \frac{\overset{\circ}{r}}{f}\sigma_\varphi, \qquad \overset{\circ}{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{k}. \qquad (8.7)$$

5.8.3. Уравнение для гидростатического давления p. Подставляя компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа (8.7) в уравнение равновесия (7.16), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $p(\overset{\circ}{r}, t)$ — гидростатического давления в несжимаемой среде:

$$\big(\frac{pfk}{\overset{\circ}{r}}\big)' + \frac{p(f^2k - \overset{\circ}{r}{}^2)}{\overset{\circ}{r}{}^2 f} = \frac{\widetilde{h}}{\overset{\circ}{r}}, \qquad \widetilde{h} = \frac{\partial}{\partial\overset{\circ}{r}}(fk\widetilde{\sigma}_r) - \frac{\overset{\circ}{r}}{f}\widetilde{\sigma}_\varphi. \qquad (8.8)$$

Преобразуя с учетом (8.1) и (8.2) левую часть уравнения (8.8), приводим его к виду

$$\frac{dp}{d\overset{\circ}{r}}\,\frac{fk}{\overset{\circ}{r}} = \frac{\widetilde{h}}{\overset{\circ}{r}}. \tag{8.9}$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$p = p_0 + \frac{1}{k}\int\limits_{\overset{\circ}{r}_1}^{\overset{\circ}{r}} \frac{\widetilde{h}}{f}\, d\overset{\circ}{r}, \tag{8.10}$$

где p_0 — константа интегрирования, которую вместе с C находим из граничных условий (7.17) после подстановки в них выражений (8.7) и (8.10):

$$p_0 + \frac{1}{k}\int\limits_{\overset{\circ}{r}_1}^{\overset{\circ}{r}_2} \frac{\widetilde{h}}{f}\, d\overset{\circ}{r} = p_{e2} + \widetilde{\sigma}_r(\overset{\circ}{r}_2), \quad p_0 = p_{e1} + \widetilde{\sigma}_r(\overset{\circ}{r}_1). \tag{8.11}$$

Для константы C отсюда получаем нелинейное алгебраическое уравнение:

$$F(C) \equiv \widetilde{\sigma}_r(\overset{\circ}{r}_2) - \widetilde{\sigma}_r(\overset{\circ}{r}_1) - \frac{1}{k}\int\limits_{\overset{\circ}{r}_1}^{\overset{\circ}{r}_2} \frac{\widetilde{h}\, d\overset{\circ}{r}}{f} - \Delta p = 0, \quad \Delta p = p_{e1} - p_{e2}, \tag{8.12}$$

в которое следует подставить выражения (8.2), (8.6) и (8.8) для $\widetilde{\sigma}_r$, f и $\widetilde{h}$.

5.8.4. Численный анализ решения. График функции $F(C)$ показан на рис. 5.27.

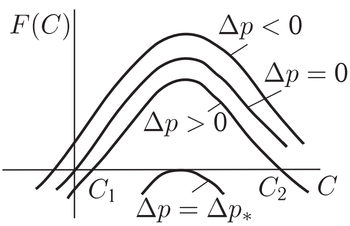

Рис. 5.27. Функция $F(C)$

В общем случае для всех n и β уравнение $F(C) = 0$ может иметь два корня C_1 и C_2, из которых следует выбрать наименьший C_1, поскольку именно он соответствует условию нормировки $F(C_1) = 0$ при $k = 1$ и $\Delta p = 0$, когда нагружение и деформация цилиндра отсутствуют. Для этого случая

$$\begin{gathered} C = 0, \quad f = \overset{\circ}{r}, \\ \widetilde{\sigma}_r = \widetilde{\sigma}_\varphi = \widetilde{\sigma}_z \equiv \sigma_0 = \mu(n - \mathrm{III})(3-\beta) = \mathrm{const}, \\ p = p_0 = \mathrm{const}, \qquad p_0 = p_{e_1} + \sigma_0, \\ \overset{\circ}{\sigma}_r = \overset{\circ}{\sigma}_\varphi = \overset{\circ}{\sigma}_z = -p_0 + \sigma_0 = p_{e1} = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{8.13}$$

Напряжения σ_r, σ_φ и σ_z в цилиндре равны нулю, когда $p_{e1} = p_{e2} = 0$, и равны между собой, но являются ненулевыми при $p_{e1} = p_{e2} \neq 0$.

При $k = 1$ и $\Delta p > 0$ (избыточное внутреннее давление) наименьший корень C_1 функции $F(C)$ является положительным, а при $\Delta p < 0$ (избыточное внешнее давление) корень C_1 — отрицателен (рис. 5.27). При увеличении значений $k > 1$ (продольное растяжение) корень C_1 смещается в область

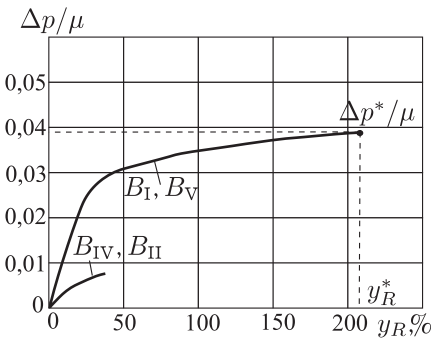

Рис. 5.28. Зависимость коэффициента относительного расширения тонкостенного цилиндра от внутреннего избыточного давления для различных моделей несжимаемых сред ($k = 1$, $r_2/r_1 = 1{,}01$)

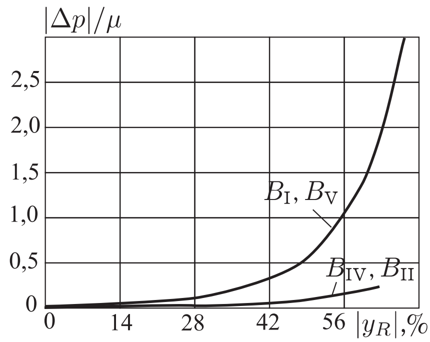

Рис. 5.29. Зависимость коэффициента относительного сжатия тонкостенного цилиндра от внешнего избыточного давления для различных моделей несжимаемых сред ($k = 1$, $r_2/r_1 = 1{,}01$)

отрицательных значений (происходит поперечное сжатие цилиндра), а при уменьшении значений $k < 1$ (продольное сжатие), наоборот, корень C_1 смещается в область положительных значений (происходит поперечное раздувание цилиндра).

Интересной особенностью функции $F(C)$ является факт существования предельного значения Δp_*: при $\Delta p > \Delta p_*$ корней у функции $F(C)$ нет (см. рис. 5.27). Это означает, что при таких значениях Δp нелинейная задача Ламе не имеет решения (в отличие от задачи Ламе в линейной теории упругости [40], которая имеет решение при всех Δp). Если рассмотреть процесс монотонного увеличения перепада давления Δp от 0 до Δp_*, то у цилиндра также монотонно будет увеличиваться его радиус, а при $\Delta p > \Delta p_*$ решение пропадет. Этот эффект называют потерей устойчивости материала при растяжении.

На рис. 5.28 показан график зависимости коэффициента расширения цилиндра $y_R = (r_1 - \mathring{r}_1)/\mathring{r}_1$ от безразмерного перепада давления $\Delta p/\mu$ при $\Delta p > 0$ для цилиндра с очень тонкой стенкой: $\mathring{h}/\mathring{r}_1 = 0{,}01$, где $\mathring{h} = \mathring{r}_2 - \mathring{r}_1$ — начальная толщина стенки. Функция $\Delta p(y_R)$ является нелинейной и существует только при $\Delta p \leqslant \Delta p^*$. Интересным фактом является очень слабая зависимость функции $\widetilde{h}(\mathring{r})$ от коэффициента β при $k = 1$, вследствие чего функции $F(C)$ и $\Delta p(y_R)$ также практически не зависят от значений β в диапазоне $[-1, 1]$. Кроме того численные значения функции $\Delta p(y_R)$ при $n = \text{I}$ и V, а также при $n = \text{II}$ и IV попарно практически не различимы. Поэтому при $k = 1$ имеются только две существенно различные функции $\Delta p(y_R)$ при $n = \text{I}$ и II (рис. 5.28). Соответствующие им предельные значения $\Delta p^*/\mu$ равны 0,04 и 0,0072, при $\mathring{h}/\mathring{r}_1 = 0{,}01$. Предельные значения коэффициента расширения y_R^* составляют 218 и 41 %. С увеличением толщины цилиндра $\mathring{h}$ предельные значения y_R^* уменьшаются.

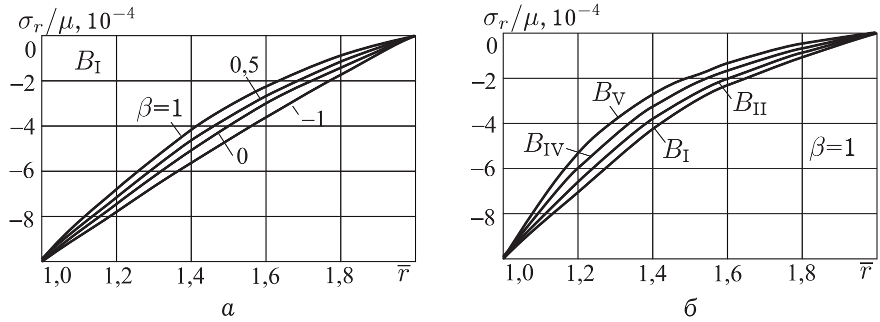

Рис. 5.30. Распределение радиальных напряжений по толщине толстостенного цилиндра для модели $B_{\rm I}$ и различных β (*а*) и различных моделей несжимаемого материала ($\beta = 1$) (*б*)

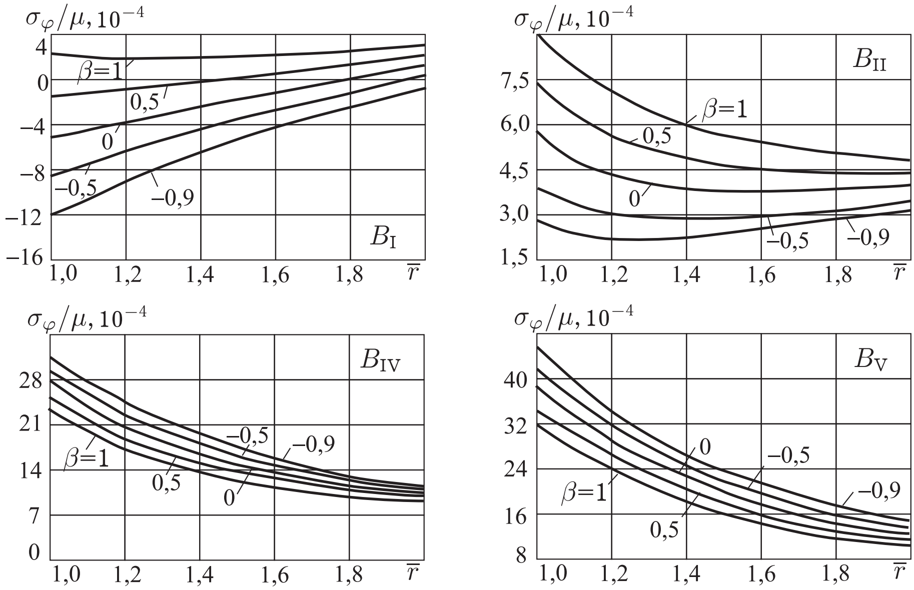

Рис. 5.31. Распределение тангенциальных напряжений по толщине толстостенного цилиндра для различных моделей несжимаемого материала и различных параметров β

В случае сжатия, при $\Delta p < 0$, корень C_1 отрицателен, и из уравнения (8.2) следует, что существует предельное значение C_1^*:

$$C_1^* = -\mathring{r}_1^2/k, \tag{8.14}$$

меньше которого корень C_1 быть не может. Следовательно, существует и предельное отрицательное значение перепада давления Δp^{**}, такое, что при $\Delta p < \Delta p^{**}$ решение задачи Ламе отсутствует. Графики функции $\Delta p(y_R)$ при сжатии показаны на рис. 5.29. Так же как при растяжении, в случае $k = 1$ функции $\Delta p(y_R)$ при различных значениях параметра β практически совпадают и различаются только для моделей $n = {\rm I}$, V и $n = {\rm II}$, IV. В случае, когда $\mathring{h}/\mathring{r}_1 = 0{,}01$, предельное значение $\Delta p^{**}/\mu$ при $n = {\rm I}$, V составляет $\Delta p^{**}/\mu = -3{,}2$, а для $n = {\rm II}$, IV: $\Delta p^{**}/\mu = -0{,}33$. Следует заметить, что для реальных тонкостенных конструкций при значительно меньших значениях давления сжатия, таких что $|\Delta p|/\mu \ll |\Delta p^{**}|/\mu$, происходит потеря устойчивости самой конструкции, так что значения $\Delta p^{**}/\mu$ обычно не реализуются.

На рис. 5.30 и 5.31 показаны распределения напряжений σ_r/μ и σ_φ/μ по толщине цилиндра при различных значениях параметра β и различных n для $p_{e2}=0$. Радиальное напряжение $\sigma_r(\bar{r})$, где $\bar{r}=\overset{\circ}{r}/\overset{\circ}{r}_1$, слабо зависит от β и n, оно монотонно убывает от значения $-p_{e1}$ до 0. Более существенно от β и n зависит тангенциальное напряжение $\sigma_\varphi(r)$, особенно для тонкостенных цилиндров. Так при $r_2/r_1=2$ для модели B_{I} и $\beta=1$ напряжение σ_φ всюду положительно, а минимум достигается во внутренней точке цилиндра $r/r_1\approx 1{,}2$. При значениях $\beta \leqslant 0{,}6$, напряжение σ_φ на внутренней части цилиндра становится отрицательным, а при $\beta=-1$ σ_φ отрицательно во всем цилиндре. Для других моделей B_{II}, B_{IV} и B_{V} напряжение σ_φ всегда положительно, но для модели B_{II} при $\beta=-1$ максимум σ_φ достигается на внешней поверхности цилиндра, а для моделей B_{IV} и B_{V} при всех β функция $\sigma_\varphi(\bar{r})$ всегда монотонно убывающая и достигает своего максимума на внутренней поверхности.

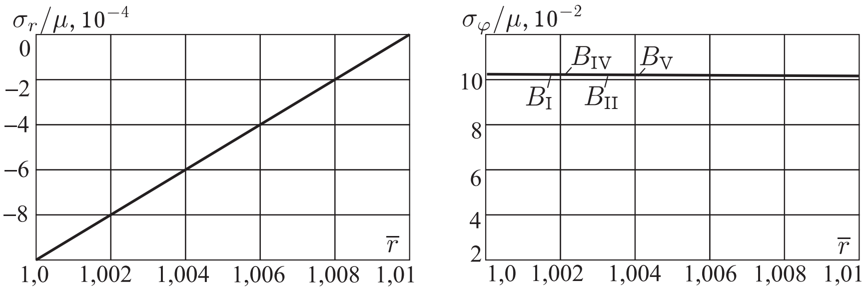

Рис. 5.32. Распределение радиальных и тангенциальных напряжений по толщине тонкостенного цилиндра для различных моделей несжимаемого материала ($\beta=1$)

Для тонкостенных цилиндров напряжение σ_φ положительно и практически постоянно по толщине цилиндра, его значение почти не зависит от β и n, численно оно близко к значению, получаемому по теории тонких линейно-упругих оболочек с малыми деформациями: $\sigma_\varphi \approx \Delta p\overset{\circ}{r}_1/\overset{\circ}{h}$ (рис. 5.32).

Глава 6

ФОЙГТОВСКИЕ СРЕДЫ СКОРОСТНОГО ТИПА

6.1. Модели A_n и B_n фойгтовских сред

6.1.1. Определяющие соотношения для моделей A_n фойгтовских сред. Перейдем теперь к рассмотрению неидеальных сплошных сред. Практические все реальные тела являются неидеальными средами и лишь в определенном приближении могут рассматриваться как идеальные. В соответствии с общей теорией определяющих соотношений, изложенной в п. 3.4.2, среда является неидеальной, если ее операторные определяющие соотношения (3.4.9) обладают ненулевой функцией рассеивания w^*. Одними из наиболее широко применяемых на практике моделей неидеальных сред являются модели *фойгтовских сред*, которые также называют *средами скоростного типа*.

Определение 6.1. *Сплошную среду называют фойгтовской (или средой скоростного типа, или дифференциальной средой), если соответствующие операторные соотношения (3.4.9) представляют собой обычные функции от активных переменных $\mathcal{R}(t)$ и их производных $\dot{\mathcal{R}}(t)$, т.е.*

$$\Lambda(t) = f\left(\mathcal{R}(t),\ \dot{\mathcal{R}}(t)\right). \tag{1.1}$$

Функции (1.1) полагают непрерывно-дифференцируемыми. Говорят, что рассматривается *модель A_n фойгтовской среды*, если выбрана модель A_n сплошной среды, а соответствующие ей операторные определяющие соотношения (3.4.9) — это просто функции указанных аргументов и их скоростей; в частности, свободная энергия Гельмгольца имеет вид

$$\psi(t) = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}(t), \theta(t)). \tag{1.2}$$

(Производную $\dot{\theta}$ в число аргументов функции (1.2) в МСС обычно не включают.)

Полная производная от ψ по времени имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}} \cdot\cdot \frac{d^2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}. \tag{1.3}$$

Частные производные $\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ представляют собой симметричные тензоры второго ранга.

Остальные определяющие соотношения (3.4.11), связывающие активные переменные с реактивными, для модели A_n фойгтовской среды имеют следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta), \qquad \eta = \eta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta), \qquad w^* = w^*(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta). \tag{1.4}$$

На основе тензорной функции, связывающей энергетические тензоры напряжений и деформации, введем две новые тензорные функции:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \mathbf{0}, \theta), \tag{1.5}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \tag{1.6}$$

называемые соответственно *функцией равновесных напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ и *функцией вязких напряжений* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v$.

Подставляя выражения (1.3) и (1.6) в ОТТ (3.3.15), после приведения подобных получим

$$\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e}{\rho}\Big)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}}\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} + \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\Big)d\theta + \frac{1}{\rho}(w^* - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet})dt = 0. \tag{1.7}$$

В силу независимости дифференциалов $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, $d\theta$ и dt, тождество (1.7) эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), & (1.8\text{а}) \\ \partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = 0, & (1.8\text{б}) \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, & (1.8\text{в}) \\ w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}. & (1.8\text{г}) \end{cases}$$

Заметим, что именно независимость слагаемых первой скобки в (1.7) от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ обеспечивает независимость дифференциалов $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$. В свою очередь, независимость слагаемых в этой скобке от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ обеспечена тем, что вместо $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в ней стоит $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ и выполняется соотношение (1.8б).

Таким образом, фойгтовские среды обладают следующими свойствами:

1) они являются диссипативными (т.е. неидеальными), так как w^* для них отлична от тождественного нуля,
2) тензорная функция равновесных напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ (а не $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$) является квазипотенциальной (см. п. 3.5.2),

3) сам квазипотенциал ψ зависит только от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и θ:

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta), \tag{1.9}$$

остальные же функции — η, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v$, w^* зависят от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet$ и θ.

В силу свойства 2), для фойгтовских моделей сплошной среды уже не достаточно задать только одну функцию ψ (1.9), необходимо еще дополнительно задать функцию вязких напряжений (1.6):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta), \tag{1.10}$$

которая на основании формул (1.4)–(1.6) зависит и от скоростей тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet$.

Система соотношений (1.8)–(1.10) представляет собой *определяющие соотношения для моделей A_n фойгтовских сплошных сред.*

6.1.2. Следствие из принципа Онзагера для моделей A_n фойгтовских сред. Тензорная функция вязких напряжений (1.10) не является полностью произвольной, она удовлетворяет условиям (1.5) и (1.6), т.е.

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \mathbf{0}, \theta) = \mathbf{0}. \tag{1.11}$$

Кроме того, она должна удовлетворять принципу Онзагера (см. п. 3.12.1, аксиома 16). Для фойгтовских сред этот принцип применяют следующим образом: составляют скалярную функцию (3.12.1) — плотность внутреннего производства энтропии:

$$\rho q^* = w^* - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Здесь мы учли выражение (1.8г) для функции рассеивания w^* фойгтовских сред. Затем выражение (1.12) представляют в виде суммы (3.12.2), выбирая в качестве термодинамических сил X_β следующие величины:

$$\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\nabla}\theta, \qquad \mathbf{X}_2 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet \tag{1.13}$$

($\mathbf{X}_1$ — вектор, а $\mathbf{X}_2$ — тензор второго ранга), а в качестве термодинамических потоков Q_β — величины

$$\mathbf{Q}_1 = -\frac{1}{\theta}\mathbf{q}, \qquad \mathbf{Q}_2 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta). \tag{1.14}$$

Тогда, согласно принципу Онзагера, термодинамические потоки Q_β должны быть линейными (тензорно-линейными) функциями от X_β вида (3.12.3), т.е.

$$\begin{cases} -(1/\theta)\mathbf{q} = \mathbf{L}_{11} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta + \mathbf{L}_{12}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, & (1.15) \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta) = \mathbf{L}_{12}\boldsymbol{\nabla}\theta + \mathbf{L}_{22} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet. & (1.16) \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{L}_{11}$ — тензор второго ранга, $\mathbf{L}_{12}$ — тензор третьего ранга, а $\mathbf{L}_{22}$ — тензор четвертого ранга. Заметим, что поскольку функция вязких напряжений $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ должна зависеть только от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и не должна зависеть от градиента температуры $\boldsymbol{\nabla}\theta$ (так как это противоречит принципу равноприсутствия), то в (1.16) $\mathbf{L}_{12} \equiv \mathbf{0}$, и мы приходим к соотношениям

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \qquad \boldsymbol{\lambda} \equiv \theta\mathbf{L}_{11}, \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta) = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \qquad {}^4\mathbf{L}_v \equiv \mathbf{L}_{22}. \tag{1.18}$$

Соотношение (1.17) — это известный нам закон Фурье, который в точности совпадает с законом Фурье (3.12.7) для идеальных сред, а соотношение (1.18) — это квазилинейный *закон Стокса* для вязких напряжений. Тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{L}_v$ называют *тензором вязкости*.

Поскольку $\mathbf{q}$ не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, а $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ не зависит от $\boldsymbol{\nabla}\theta$, то неравенство Планка (1.12) эквивалентно двум неравенствам:

$$-\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta \geqslant 0, \tag{1.19}$$

$$w^* = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v \cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \cdot\cdot\ {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \geqslant 0 \tag{1.20}$$

— неравенству Фурье и неравенству диссипации для фойгтовских сред. Из этих неравенств следует, что тензоры $\boldsymbol{\lambda}$ и ${}^4\mathbf{L}_v$ являются неотрицательно определенными. Кроме того, из (1.20) следует, что функция рассеивания w^* для фойгтовских сред является квадратичной скалярной функцией от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, а тензор вязкости ${}^4\mathbf{L}_v$ обладает следующей симметрией компонент:

$$\begin{gathered} {}^4\mathbf{L}_v = \widehat{L}^{ijkl}\widehat{\mathbf{c}}_i \otimes \widehat{\mathbf{c}}_j \otimes \widehat{\mathbf{c}}_k \otimes \widehat{\mathbf{c}}_l, \\ \widehat{L}^{ijkl} = \widehat{L}^{ijlk}, \qquad \widehat{L}^{ijkl} = \widehat{L}^{jikl}, \qquad \widehat{L}^{ijkl} = \widehat{L}^{klij}, \end{gathered} \tag{1.21}$$

где $\widehat{\mathbf{c}}_i$ — некоторый ортонормированный базис.

Общее число компонент тензора ${}^4\mathbf{L}_v$ равно 81, а число независимых компонент, в силу соотношений (1.21), не превышает 21 (см. [12]).

Заметим, что тензор вязкости ${}^4\mathbf{L}_v$ и его компоненты, вообще говоря, зависят от тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, а также и от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ (принцип Онзагера (1.18) не запрещает это, он только требует, чтобы $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ была квазилинейной тензорной функцией, см. п. 3.8.7 и [12]).

Если же тензор ${}^4\mathbf{L}_v$ не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, а только от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, то функция вязких напряжений $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ является *псевдопотенциальной*, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta) = \frac{1}{2}(\partial w^* / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}). \tag{1.22}$$

Такую функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ называют еще иначе — *потенциальной по второму тензорному аргументу*.

В справедливости соотношения (1.22) легко убедиться, если продифференцировать скалярную функцию w^* (1.20) по аргументу $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$.

6.1.3. Принцип материальной симметрии для моделей A_n фойгтовских сред. Обратим внимание на то, что принцип материальной симметрии (аксиома 14), а также определения 3.5 и 3.6 жидких и твердых сред были даны для произвольных операторных определяющих соотношений (3.4.9), т.е. они применимы не только для идеальных, но и для фойгтовских и других типов неидеальных сред.

Согласно этому принципу, модели A_n фойгтовских сред, которым соответствуют определяющие соотношения (1.8)–(1.10) в некоторой неискаженной отсчетной конфигурации $\widehat{\mathcal{K}}_s$ (в качестве которой будем выбирать $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$), обладают некоторой группой симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, такой, что для любого тензора преобразований $\mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s$ ($\mathbf{H} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$) определяющие соотношения (1.8)–(1.10) в отсчетной конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^*_e = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta) \equiv \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*), & (1.23\text{а}) \\ \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta), & (1.23\text{б}) \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, & (1.23\text{в}) \\ (w^*)^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^*_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{*\bullet}, & (1.23\text{г}) \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^*_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{*\bullet}, \theta). & (1.23\text{д}) \end{cases}$$

Рассмотрим вначале *модели A_n твердых фойгтовских сред*, для которых группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ является подгруппой полной ортогональной группы I. Для этих сред дальнейший ход построений такой же, как и в разд. 3.8 для идеальных твердых сред: поскольку тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ являются H-индифферентными относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, то H-индифферентными являются и тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ (1.5) и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v$ (1.6), а также и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, согласно теореме 3.21. Тогда соотношения (1.23) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{1.24а}$$

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = \psi(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{1.24б}$$

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta), \tag{1.24в}$$

для любых $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s$. Соотношение (1.23г), очевидно, всегда выполняется, так как

$$(w^*)^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^*_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{*\bullet} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot\cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = w^*. \tag{1.25}$$

Теорема 6.1. *Необходимым и достаточным условием выполнимости принципа материальной симметрии (1.24) для моделей A_n фойгтовских твердых сред является выполнение двух условий (1.24б) и (1.24в) для функции ψ и функции вязких напряжений $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$.*

▼ Необходимость условий (1.24б) и (1.24в) очевидна, так как если принцип материальной симметрии выполнен, то имеют место все условия (1.24).

Достаточность. Если выполнено условие (1.24б), то из него следует и (1.24а), доказательство аналогично доказательству формулы (3.8.4). ▲

6.1.4. Представление определяющих соотношений A_n фойгтовских твердых сред в тензорных базисах. По сравнению с идеальными средами для фойгтовских твердых сред должно выполняться не только условие (1.24б) — условие индифферентности скалярной функции $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ (см. определение 3.9), но и еще одно условие (1.24в) на тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet},\theta)$ двух тензорных аргументов.

Для скалярной функции $\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ справедливы все те же самые представления, которые были предложены в разд. 3.8, в частности, представление (3.8.28) в виде функций от инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\psi=\psi(I_1^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}),\ldots,I_r^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}),\theta), \tag{1.26}$$

а также представления (3.8.35), (3.8.48) для тензорной функции $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\theta)$ (1.8а).

Например, для изотропной фойгтовской среды, для равновесных напряжений из (3.8.46) получаем

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e=\psi_1\mathbf{E}+\psi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}+\psi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2, \tag{1.27}$$

где ψ_γ определены по формулам (3.8.46а).

Функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet},\theta)$ двух тензорных аргументов, удовлетворяющую условию (1.24в), аналогично определению 3.13 (см. п. 3.8.6) функции одного тензорного аргумента, называют *индифферентной относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$* (см. также [12]). Для нее имеет место следующее представление в тензорном базисе.

Теорема 6.2. *Всякая тензорная функция вязких напряжений (1.10), которая*

- *является индифферентной относительно некоторой ортогональной группы $\overset{\circ}{G}_s\subset I$, т.е. удовлетворяет условию (1.24в),*
- *является квазилинейной по второму аргументу $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$, т.е. удовлетворяет условиям (1.18) и (1.20),*

допускает представление в тензорном базисе соответствующей группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \theta) = (\mu_1 \mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2\mu_2 \boldsymbol{\Delta}) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \tag{1.28}$$

или

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet})\mathbf{E} + 2\mu \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \tag{1.29}$$

— *для изотропной фойгтовской среды* ($\overset{\circ}{G}_s = I$),

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = (\mu_1 \mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + \mu_2 \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_3 + \mu_3(\mathbf{E}\otimes \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\mathbf{E}) + \\ + \mu_4(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2) + 2\mu_5\boldsymbol{\Delta}) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \tag{1.30}$$

— *для трансверсально-изотропной фойгтовской среды* ($\overset{\circ}{G}_s = T_3$),

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \sum_{\alpha=1}^{3} (\mu_\alpha \widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\alpha + \mu_{3+\alpha}(\widehat{\mathbf{c}}_\beta^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_\beta^2) + \\ + \mu_{6+\alpha}\mathbf{O}_\alpha\otimes\mathbf{O}_\alpha) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}, \quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3, \tag{1.31}$$

— *для ортотропной фойгтовской среды* ($\overset{\circ}{G}_s = O$).

Тензоры $\widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2$ и $\mathbf{O}_\alpha$ определены по формулам (3.8.16) и (3.8.39).

▼ Подставляя соотношение (1.8) квазилинейности функции вязких напряжений $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v$ в условие (1.24в), получаем, что должно выполняться условие:

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot ({}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot (\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} \overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}. \tag{1.32}$$

Отсюда следует, что тензор вязкости ${}^4\mathbf{L}_v$ должен удовлетворять следующему соотношению (см. упр. 6.1.1):

$${}^4\mathbf{L}_v = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\cdot\cdot (\overset{*}{\mathbf{Q}}\otimes\overset{*}{\mathbf{Q}}\otimes\overset{*}{\mathbf{Q}}\otimes\overset{*}{\mathbf{Q}})^{(57312468)} \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{1.32а}$$

Это условие является аналогом условия (3.8.13) для тензоров 4-го ранга, поэтому всякий тензор 4-го ранга ${}^4\mathbf{L}_v$, удовлетворяющий (1.32а), называют *индифферентным относительно группы* $\overset{\circ}{G}_s$. Все индифферентные тензоры 4-го ранга образуются с помощью операций тензорного и скалярного умножения из образующих тензоров соответствующей группы $\overset{\circ}{G}_s$ (см. п. 3.8.3) и могут быть представлены в виде разложения по тензорному базису ${}^4\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ аналогично разложению (3.8.15) для тензоров 2-го ранга: ${}^4\mathbf{L}_v = \sum_{\gamma=1}^{k} a_\gamma {}^4\mathbf{O}_{s(\gamma)}$. Число k элементов в этом базисе совпадает с числом независимых компонент тензора ${}^4\mathbf{L}_v$, оно равно 2,5 и 9 для групп $\overset{\circ}{G}_s = I,\ T_3,\ O$ [12]. Тензоры модулей упругости ${}^4\mathbf{M}$, определенные по формулам (3.8.61), (3.8.65) и (3.8.68), тоже являются индифферентными относительно групп $\overset{\circ}{G}_s = I,\ T_3,\ O$ соответственно, а представления (3.8.61), (3.8.65) и (3.8.68) как раз и есть разложения по тензорным базисам, общие для каждой группы [12]. Следовательно, и тензор вязкости в соответствующей группе $\overset{\circ}{G}_s = I, T_3, O$ всегда может быть представлен в аналогичной форме, таким образом, представления (1.28)–(1.31) действительно имеют место. ▲

Замечание. Коэффициенты μ_γ в представлениях (1.28)–(1.31), вообще говоря, являются скалярными функциями соответствующих инвариантов тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet$:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta). \tag{1.33}$$

Но поскольку мы везде полагали, что μ_γ не изменяются при H-преобразованиях в соответствующей группе, то эти μ_γ должны удовлетворять соотношениям

$$\mu_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \theta) = \mu_\gamma(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{1.34}$$

Такие скалярные функции называют *совместными инвариантами двух тензорных аргументов относительно группы* $\overset{\circ}{G}_s$. В [12] приведена теорема о том, что для каждой группы $\overset{\circ}{G}_s$ существует функциональный базис независимых совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet)$, $\gamma = 1, \ldots z$, причем

- $z = 9$ для полной ортогональной группы I,
- $z = 11$ для трансверсально-изотропной группы T_3,
- $z = 12$ для ортотропной группы O.

В качестве функционального базиса совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet)$ двух тензоров могут быть выбраны следующие наборы [12]:

группа изотропии $\overset{\circ}{G}_s = I$:

$$\begin{gathered} J_\alpha^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \qquad J_{3+\alpha}^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ J_7^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \quad J_8^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet, \quad J_9^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet)^2; \end{gathered} \tag{1.35}$$

группа $\overset{\circ}{G}_s = T_3$:

$$\begin{gathered} J_\alpha^{(3)} = I_\alpha^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \quad \alpha = 1, \ldots, 5, \qquad J_{5+\beta}^{(3)} = I_\beta^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \quad \beta = 1, \ldots, 4, \\ J_{10}^{(3)} = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \quad J_{11}^{(3)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet - 2J_{10}^{(3)} - J_2^{(3)} J_8^{(3)}; \end{gathered} \tag{1.36}$$

группа $\overset{\circ}{G}_s = O$:

$$\begin{gathered} J_\alpha^{(O)} = I_\alpha^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \quad \alpha = 1, \ldots, 6, \qquad J_{6+\beta}^{(O)} = I_\beta^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \quad \beta = 1, 2, 3, 6, \\ J_{10}^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_2^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \qquad J_{11}^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet). \end{gathered} \tag{1.37}$$

Инварианты $I_\alpha^{(s)}$ соответствующих групп определяются формулами (8.19)–(8.21). Тогда *коэффициенты вязкости* всегда можно представить как функции совместных инвариантов:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \ldots, J_z^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet), \theta). \tag{1.38}$$

Функция рассеивания (1.20) для изотропной фойгтовской среды на основании (1.29) имеет вид

$$w^* = \mu_1 I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet) + \mu_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet 2}). \tag{1.39}$$

6.1.5. Модели B_n фойгтовских твердых сред. Для твердых фойгтовских сред формально модели B_n легко получаются из соответствующих моделей A_n заменой тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ на меры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$. В частности, определяющие соотношения (1.8)–(1.10) принимают вид

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta) = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \\ \psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \theta), \\ w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet, \theta), \end{cases} \tag{1.40}$$

а для моделей B_n изотропных фойгтовских сред тензоры равновесных и вязких напряжений имеют вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^2, \tag{1.41}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v = \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet)\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet, \tag{1.42}$$

где коэффициенты ψ_γ выражаются по формулам (3.8.46), а μ_γ являются функциями инвариантов:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet, \theta), \ldots, J_{10}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet, \theta)). \tag{1.43}$$

Аналогично из (1.28), (1.29) получаем соотношения для моделей B_n трансверсально-изотропных и ортотропных фойгтовских сред.

6.1.6. Модели B_n несжимаемых фойгтовских сред. Подобно тому, как были построены модели B_n упругих несжимаемых сред (см. разд. 3.9), можно ввести модели B_n несжимаемых фойгтовских сред. Для этих моделей, как было показано в разд. 3.9, потенциал ψ в (1.40) зависит только от $r-1$ линейных и квадратичных инвариантов $I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})$, в частности, для *изотроп-*

ных несжимаемых фойгтовских сред ψ зависит только от $I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ и $I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$, а $\overset{(n)}{\mathbf{T}}_e$ является квазилинейной функцией от $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\overset{(n)}{\mathbf{G}} + \mu_1 I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet})\mathbf{E} + 2\mu_2\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \tag{1.44}$$

$$\psi = \psi(I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}), I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}}), \theta), \quad \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1, \quad \psi_2 = \varphi_2, \quad \varphi_\alpha = \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial I_\alpha).$$

В *простейшей модели* B_n изотропных несжимаемых фойгтовских сред полагают, что коэффициенты вязкости связаны соотношением

$$\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2, \tag{1.45}$$

тогда определяющее соотношение (1.44) принимает вид:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \psi_1\mathbf{E} + \psi_2\overset{(n)}{\mathbf{G}} + 2\mu_2 \operatorname{dev}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \tag{1.46}$$

где

$$\operatorname{dev}\overset{(n)}{\mathbf{G}} = \overset{(n)}{\mathbf{G}} - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}})\mathbf{E} \tag{1.47}$$

— девиатор тензора (подробнее о девиаторах см. п. 7.2.13 и [12]). Для простейших моделей B_n первые главные инварианты тензора напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и мер деформации $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ связаны упругими соотношениями (см. упр. 6.1.4):

$$I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1}) + 3\psi_1 + \psi_2 I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}), \tag{1.48}$$

не зависящими от скоростей деформации.

При решении прикладных задач применяют *модели* B_n *несжимаемых фойгтовских сред с установившейся ползучестью*, в которых потенциал ψ не зависит от инвариантов $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\mu_2 \operatorname{dev}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \quad \psi = \psi(\theta). \tag{1.49}$$

Эта модель описывает явление *ползучести* — изменение деформации тела во времени при постоянных напряжениях (см. разд. 6.4).

Замечание. Условия согласования (3.8.52), которым должны удовлетворять определяющие соотношения в естественном ненапряженном состоянии, для фойгтовских сред дополняются требованием, чтобы скорости тензоров и мер деформации обращались в нуль в $\overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{K}}: \quad & \overset{(n)}{\mathbf{T}} = \overset{(n)}{\mathbf{S}} = \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{A}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{g}} = \overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\mathbf{E}, \\ & \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} = \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \mathbf{0}, \quad \overset{(n)}{\mathbf{g}}{}^{\bullet} = \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \mathbf{0}, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Очевидно, что все приведенные выше определяющие соотношения (1.29), (1.30), (1.31), (1.41), (1.42), (1.44), (1.46), (1.49) удовлетворяют этим условиям.

6.1.7. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей A_n и B_n фойгтовских сред. Поскольку все энергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ являются S-инвариантными, то определяющие соотношения (1.8)–(1.10), а также (1.28)–(1.31) для твердых фойгтовских сред одинаковы в актуальных конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, отличающихся жестким движением. Поэтому принцип материальной индифферентности для моделей A_n и B_n твердых фойгтовских сред (также как и упругих сред) выполняется тождественно.

Упражнения к 6.1

Упражнение 6.1.1. Показать эквивалентность соотношений (1.32) и (1.32а).

Упражнение 6.1.2. Показать, что компонентное представление функциональных базисов совместных инвариантов (1.35)–(1.37) в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_\alpha$ таково:

для группы трансверсальной изотропии $\overset{\circ}{G}_s = T_3$:

$$J^{(3)}_\alpha = \{\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{11} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{22},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{33},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^2_{13} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^2_{23},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^2_{11} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^2_{22} + 2\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^2_{12},\ \ \det \mathbf{C},$$

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{11} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{22},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{33},\ \ (\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{13})^2 + (\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{23})^2,\ \ (\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{11})^2 + (\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{22})^2 + 2(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}{}_{12})^2,$$

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{13} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{23},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{11}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{11} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{22}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{22} + 2\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{12}\};$$

для группы ортотропии $\overset{\circ}{G}_s = O$:

$$J^{(O)}_\alpha = \{\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{11},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{22},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{33},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{2}_{23},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{2}_{13},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{12}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{11},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{22},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{33},$$

$$\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{23}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{23},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{13},\ \ \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{12}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{23}\}.$$

Упражнение 6.1.3. Показать, что для простейшей модели B_n изотропных несжимаемых фойгтовских сред (1.46) имеет место соотношение (1.48) между первыми главными инвариантами.

6.2. Модели A_n и B_n фойгтовских жидких сред

6.2.1. Тензор равновесных напряжений для фойгтовских жидких сред. Воспользуемся принципом материальной симметрии (1.23) для установления определяющих соотношений жидких фойгтовских сред.

Для жидких сред группа симметрии $\overset{\circ}{G}_s$, относительно которой выполняются соотношения (1.23), — это унимодулярная группа $\overset{\circ}{G}_s = U$. Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$,

$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ уже не являются H-индифферентными относительно этой группы, за исключением $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ и тензора $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} - (1/2)\mathbf{E}$ (см. табл. 3.9), поэтому соотношения (1.24) для $\overset{\circ}{G}_s = U$ не имеют места и следует использовать их общий вид (1.23).

Из этих соотношений, согласно теореме 3.31, следует, что функция $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta)$ имеет вид (3.8.167а):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}, \theta) = -\frac{p}{n - \mathrm{III}}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \tag{2.1}$$

$$p = p(I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}), \theta), \tag{2.2}$$

где p — давление — скалярная функция, зависящая только от третьего инварианта тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$. Таким образом, для жидких сред в моделях A_n тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ появляется только в комбинации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \dfrac{1}{n - \mathrm{III}}\ \mathbf{E}$, т.е. фактически модели A_n и B_n совпадают.

Аналогичная ситуация возникает и с тензором вязких напряжений.

6.2.2. Тензор вязких напряжений в модели A_I фойгтовской жидкости. Рассмотрим далее только модели A_I и A_V. Тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ при переходе в конфигурацию $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуются по формулам (3.6.22) и (3.6.24а). Подставляя эти формулы в (1.23д), получаем, что для группы $\overset{\circ}{G}_s = U$ должно выполняться соотношение

$$\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) \cdot \mathbf{H}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \theta) \quad \forall \mathbf{H} \in U. \tag{2.3}$$

Здесь мы перешли от аргумента $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}$ к $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$, так как именно мера $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ удовлетворяет соотношению (2.3), а тензор $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}$ при переходе в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуется совсем по-другому — согласно формуле (3.6.22а), у него появляется дополнительное слагаемое: $-(1/2)(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E})$.

Тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta)$, удовлетворяющую условию (2.3), называют *A_I-унимодулярной* или *A_I-индифферентной относительно группы U*.

Заметим теперь, что группа U содержит подгруппой полную ортогональную группу I, поэтому если $\mathbf{H} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{Q} \in I$, то формула (2.3) переходит в (1.24в). Иначе говоря, A_I-унимодулярная тензорная функция является и изотропной (индифферентной относительно группы I). Но тогда, поскольку принцип Онзагера справедлив для всех групп и функция $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta)$ является квазилинейной:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \tag{2.4}$$

для нее должно иметь место и одно из представлений изотропной функции в тензорном базисе типа (1.29) с двумя независимыми константами. Но, очевидно, не всякое такое представление является A_I-унимодулярной функцией, в частности, (1.29) не удовлетворяет условию (2.3). Подходящей оказывается следующая изотропная тензорная функция:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v = \frac{1}{4}(\mu_1 I_1 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\mu_2 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}), \tag{2.5}$$

где

$$I_1(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot\cdot\, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}. \tag{2.6}$$

Несложно убедиться, что функция (2.5) является A_I-унимодулярной, т.е. удовлетворяет (2.3):

$$\begin{aligned}
4\boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*\bullet}, \theta) &= \mu_1(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*-1} \cdot\cdot\, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*\bullet})\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*-1} + 2\mu_2 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*\bullet} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{*-1} = \\
&= \mu_1(\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}}\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot\cdot\, \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}})\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{-1} + \\
&+ 2\mu_2 \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \\
&= \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot (\mu_1 J_1 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\mu_2 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{G}^{-1}) \cdot \mathbf{H}^{-1} = \\
&= 4\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) \cdot \mathbf{H}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что функция (2.5) удовлетворяет и условию (1.24в) для $G_s = I$, т.е. является изотропной. Таким образом, построенная изотропная тензорная функция (2.5) является и A_I-унимодулярной.

Приведенный вывод позволяет сделать следующее утверждение.

Теорема 6.3. *Всякую квазилинейную A_I-унимодулярную тензорную функцию вязких напряжений (2.4) можно представить в виде (2.5) или, переходя к тензору истинных напряжений Коши, в виде*

$$\mathbf{T}_v = \mu_1 I_1(\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{D}$ *— тензор скоростей деформации (1.4.45).*

▼ Первая часть теоремы — формула (2.5) нами фактически доказана выше. Докажем эквивалентность представлений (2.5) и (2.8).

Перейдем от энергетического тензора вязких напряжений $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_v$ к истинному тензору вязких напряжений $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_v \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.5) в (2.9), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_v = \frac{1}{4}\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot (\mu_1 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} J_1 + 2\mu_2 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \\
= \frac{1}{4}(-2\mu_1 J_1 \mathbf{E} - 4\mu_2 \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь мы учли, что $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{G}^{-1} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = -2\mathbf{G} = -2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}$. Воспользуемся теперь формулой (1.4.104) и выразим тензор $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ через тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$: $-2\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \dot{\mathbf{G}}^{-1} = -2\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$.

Если принять во внимание, что

$$I_1(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \mathbf{G}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{G}}^{-1} = \\ = -2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = -2\mathbf{D}\cdot\cdot\,\mathbf{E} = -2I_1(\mathbf{D}), \quad (2.11)$$

то из (2.10) действительно получаем формулу (2.8). ▲

6.2.3. Совместные инварианты для фойгтовских жидкостей. Заметим, что коэффициенты μ_1 и μ_2 в формуле (2.5) могут зависеть от $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta). \quad (2.12)$$

Однако при этом они не должны изменяться при унимодулярных преобразованиях:

$$\mu_\gamma(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) = \mu_\gamma(\mathbf{H}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \mathbf{H}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \theta), \qquad \forall\mathbf{H}\in U, \quad (2.13)$$

т.е. μ_γ должны быть скалярными A_I-унимодулярными функциями двух тензорных аргументов. Такие функции еще называют *совместными A_I-инвариантами* относительно группы U.

Теорема 6.4. *Функциональный базис независимых совместных A_I-инвариантов $J_\gamma^{(U)}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet})$ тензоров $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ относительно унимодулярной группы U состоит не более, чем из пяти элементов, в качестве которых могут быть выбраны следующие:*

$$J_\gamma^{(U)} = I_\gamma(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}), \quad \gamma = 1,2,3, \quad J_4^{(U)} = I_3(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}), \quad J_5^{(U)} = I_3(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}). \quad (2.14)$$

▼ Всякий совместный инвариант $J_\gamma^{(U)}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet})$ является A_I-унимодулярной функцией двух тензорных аргументов, т.е. удовлетворяет соотношению (2.13). Но тогда он является и изотропной тензорной функцией двух аргументов, если $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{Q}\in I\subset U$, т.е. является совместным инвариантом относительно группы I.

В группе I функциональный базис совместных инвариантов может быть образован из сверток степеней самих тензоров: $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$, $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1})^2\cdot\cdot\,\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ и др. Однако среди всех этих сверток только свертки тензора

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \quad (2.15)$$

являются инвариантами относительно группы U (см. упр. 6.2.1). Число r независимых инвариантов этого тензора не может превышать трех (инварианты этого тензора в группе U являются инвариантами и в группе I, а для нее $r = 3$), и в качестве этих инвариантов можно выбрать $I_\gamma(\boldsymbol{\Omega}_G)$, $\gamma = 1,2,3$. Кроме того, тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ имеют ровно по одному унимодулярному инварианту (см. теорему 3.31) — это det $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и det $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$. Других независимых совместных инвариантов тензоров $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ в этой группе нет. ▲

Замечание 1. Заметим, что в утверждении теоремы число r не превышает пяти, на самом же деле инвариант $I_3(\mathbf{\Omega}_G)$ не является независимым — он выражается через $I_3(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}})$ и $I_3(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet})$. Покажем это.

Перейдем к представлению (2.8), тогда совместные A_I-инварианты $J_\gamma^{(U)}$ (2.14) можно представить как функции главных инвариантов тензора $\mathbf{D}$ и плотности ρ:

$$\begin{gathered}
J_1^{(U)}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = I_1(\mathbf{\Omega}_G) = -2I_1(\mathbf{D}),\\
J_2^{(U)}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = I_2(\mathbf{\Omega}_G) = \frac{1}{2}(I_1^2(\mathbf{\Omega}_G) - I_1(\mathbf{\Omega}_G^2)) = 4I_2(\mathbf{D}),\\
J_3^{(U)}(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = \det\, \mathbf{\Omega}_G = \det\, \mathbf{G} \cdot \det\, \dot{\mathbf{G}}^{-1} = -8I_3(\mathbf{D}),\\
J_4^{(U)} = -\frac{1}{8}(\overset{\circ}{\rho}/\rho)^2, \qquad J_5^{(U)} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)^2 I_3(\mathbf{D}).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Откуда следует, что $J_5^{(U)}$ не является независимым, так как он выражается через $J_3^{(U)}$ и $J_4^{(U)}$:

$$J_5^{(U)} = J_3^{(U)}\ J_3^{(U)}. \tag{2.17}$$

Согласно теореме 6.4, коэффициенты вязкости μ_γ (2.12) можно представить как функции совместных инвариантов (2.14):

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1^{(U)}, \ldots, J_4^{(U)}, \theta), \tag{2.18}$$

или же в виде

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(I_\gamma(\mathbf{D}), \rho, \theta), \qquad \gamma = 1, 2, 3. \tag{2.19}$$

6.2.4. Тензор вязких напряжений в модели A_V фойгтовских жидкостей. Рассмотрим теперь модель A_V.

Тензоры $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$ при переходе в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуются по формулам (3.6.21а) и (3.6.24). Подставляя эти формулы в (1.23д), получаем, что функция вязких напряжений должна удовлетворять соотношению

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \theta) \tag{2.20}$$

$\forall \mathbf{H} \in U$. Такую тензорную функцию $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta)$ назовем *A_V-унимодулярной* или *A_V-индифферентной относительно группы U.*

Согласно принципу Онзагера, эта функция также должна быть квазилинейной:

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}. \tag{2.21}$$

Условие A_V-унимодулярности (2.20) переходит в условие изотропности тензорной функции, если $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{Q} \in I \subset U$, поэтому для функции (2.21) также должно быть справедливо одно из представлений изотропной функции в тензорном базисе типа (1.29) с двумя независимыми константами. Подходящей является следующая изотропная тензорная функция:

$$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_v = \boldsymbol{\mathcal{F}}_v = \frac{1}{4}(\mu_1 I_1 \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu_2 \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1}), \tag{2.22}$$

где $I_1 = I_1(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet})$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта функция является A_V-унимодулярной, т.е. удовлетворяет соотношению (2.20) (упр. 6.2.3), таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.5. *Всякую квазилинейную A_V-унимодулярную тензорную функцию вязких напряжений (2.21) можно представить в виде (2.22) или, переходя к тензору истинных напряжений Коши, в виде (2.8).*

▼ Первая часть теоремы доказана нами выше, поэтому покажем только эквивалентность представлений (2.22) и (2.8).

Переходя от $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_v$ к $\mathbf{T}_v$ по формуле

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{F} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_v \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{2.23}$$

из (2.22) получаем

$$\mathbf{T}_v = \frac{1}{4}\mathbf{F} \cdot (\mu_1 \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} I_1 + 2\mu_2 \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \frac{1}{4}(2\mu_1 I_1 \mathbf{E} + 4\mu_2 \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{-1}). \tag{2.24}$$

Здесь мы учли, что $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}\mathbf{G} = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = 2\mathbf{G}^{-1} = 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}$. Воспользуемся формулой (1.4.104) и выразим $\dot{\mathbf{G}}$ через $\mathbf{D}$:

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = 2\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \tag{2.25}$$

Принимая во внимание, что

$$I_1(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = \mathbf{G}^{-1} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = 2I_1(\mathbf{D}), \tag{2.26}$$

из (2.24) и (2.25) действительно получаем представление (2.8). ▲

6.2.5. Коэффициенты вязкости в модели A_V фойгтовской жидкости.

Коэффициенты μ_γ в формуле (2.22) являются функциями от $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) \tag{2.27}$$

и не меняются при унимодулярных преобразованиях:

$$\mu_\gamma(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}, \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}, \theta) = \mu_\gamma(\mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{H}^{-1}, \theta), \quad \forall \mathbf{H} \in U, \tag{2.28}$$

т.е. являются скалярными A_V-унимодулярными функциями, или иначе *совместными A_V-инвариантами* тензоров $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ относительно группы U.

Для этих инвариантов также справедливы теорема 6.4 и замечание 1 к ней. Поэтому μ_γ (2.27) можно представить как функции

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1^{(U)}, \ldots, J_4^{(U)}, \theta) \tag{2.29}$$

совместных A_V-инвариантов, образованных по формулам (2.14):

$$J_\gamma^{(U)} = I_\gamma(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}), \qquad \gamma = 1, 2, 3, \quad J_4^{(U)} = \det \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}. \tag{2.30}$$

Эти инварианты можно выразить через главные инварианты тензора $\mathbf{D}$ и ρ:

$$\begin{gathered} J_1^{(U)}(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}) = 2I_1(\mathbf{D}), \quad J_2^{(U)} = 4I_2(\mathbf{D}), \\ J_3^{(U)} = 8I_3(\mathbf{D}), \quad J_4^{(U)} = \frac{1}{8}(\rho/\overset{\circ}{\rho})^2, \end{gathered} \tag{2.31}$$

поэтому и коэффициенты вязкости (2.29) можно представить в виде (2.19).

6.2.6. Общее представление определяющих соотношений для фойгтовских жидкостей. Поскольку для обеих моделей A_I и A_V определяющие соотношения могут быть записаны в единой обобщенной форме (2.8), (2.18), то целесообразно дать и общее название модели фойгтовских жидких сред.

Определение 6.2. *Модели A_{I} и A_{V} (а также B_{I} и B_{V}, совпадающие с ними) фойгтовских жидких сред, допускающие представление определяющих соотношений (2.1), (2.5) и (2.22) в единой форме (2.8), (2.18), т.е.*

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_v, \\ \mathbf{T}_e = -p\mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_v = \mu_1 I_1(\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}, \\ \mu_\gamma = \mu_\gamma(I_\alpha(\mathbf{D}), \rho, \theta), \\ \psi = \psi(\rho, \theta), \quad p = p(\rho, \theta) = \rho^2(\partial\psi/\partial\rho), \quad \eta = \partial\psi/\partial\theta, \end{cases} \tag{2.32}$$

называют моделью вязкой жидкости.

Функцию рассеивания w^* для вязкой жидкости с помощью соотношения (1.20) можно представить в виде

$$w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \mathbf{T}_v \cdot\cdot \mathbf{D} = \mu_1 I_1^2(\mathbf{D}) + 2\mu_2 I_1(\mathbf{D}^2). \tag{2.33}$$

Закон Фурье (1.17) для вязкой жидкости имеет такой же вид, как и для идеальной жидкости:

$$\mathbf{q} = -\lambda\, \boldsymbol{\nabla}\theta, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbf{E}. \tag{2.34}$$

Если коэффициенты вязкости μ_γ не зависят от инвариантов $I_\gamma(\mathbf{D})$ и плотности ρ, то модель (2.32) называют *моделью линейно-вязкой жидкости* или моделью *ньютоновской жидкости*.

6.2.7. Определяющие соотношения для несжимаемых вязких жидкостей. Подобно тому, как в п. 3.9.4 была построена модель несжимаемых идеальных жидкостей, можно ввести модель несжимаемой вязкой жидкости.

Теорема 6.6. *Модели A_{I} и A_{V} (а также B_{I} и B_{V}) несжимаемых фойгтовских жидких сред (2.1), (2.5), (2.18) и (2.22), (2.29) можно представить в единой форме:*

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_v, \\ \mathbf{T}_e = -p\mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_v = \mu_1 I_1(\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}, \\ \mu_\gamma = \mu_\gamma(I_\alpha(\mathbf{D}), \theta), \\ \psi = \psi(\theta), \quad \eta = \partial\psi/\partial\theta, \end{cases} \tag{2.35}$$

где p не зависит от ρ и является самостоятельной функцией.

▼ Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.33. ▲

Модели A_{I} и A_{V} (а также B_{I} и B_{V}) несжимаемой фойгтовской жидкости, представленные в форме (2.35), называют *моделью несжимаемой вязкой жидкости*, а если μ_γ не зависят от $I_\gamma(\mathbf{D})$, то — моделью *линейно-вязкой несжимаемой жидкости.*

6.2.8. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей A_n и B_n жидких фойгтовских сред. Поскольку все энергетические тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ являются S-инвариантными, то определяющие соотношения (2.1), (2.5), (2.22) для жидких фойгтовских сред одинаковы в актуальных конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, отличающихся жестким движением. Поэтому принцип материальной индифферентности для моделей A_n и B_n жидких фойгтовских сред (также как и идеальных) выполняется тождественно.

Отдельно следует рассмотреть лишь представление (2.35) для жидких сред, которое в конфигурации $\mathcal{K}'$ имеет вид

$$\mathbf{T}'_v = \mu_1 I_1(\mathbf{D}')\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}', \quad \mu_\gamma = \mu_\gamma(I_1(\mathbf{D}'), \ldots, I_3(\mathbf{D}'), \rho, \theta). \tag{2.36}$$

Однако это соотношение действительно соблюдается, поскольку оба тензора $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}_v$ являются S-индифферентными (см. табл. 3.12), а инварианты $I_\gamma(\mathbf{D})$ и $I_\gamma(\mathbf{D}')$, очевидно, совпадают.

Упражнения к 6.2

Упражнение 6.2.1. Доказать, что свертки тензора (2.15) образуют скалярные инварианты относительно группы U.

Упражнение 6.2.2. Показать, что тензор ${}^4\mathbf{L}_v$ для A_I-унимодулярной функции (2.4) имеет вид

$${}^4\mathbf{L}_v = \frac{1}{4}(\mu_1 \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \otimes \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\mu_2(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \otimes \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{-1})^{(1432)}),$$

а для A_V-унимодулярной функции (2.21) следующий вид:

$${}^4\mathbf{L}_v = \frac{1}{4}(\mu_1 \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \otimes \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\mu_2(\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1} \otimes \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{G}}{}^{-1})^{(1432)}).$$

Упражнение 6.2.3. Показать, что тензорная функция (2.22) действительно удовлетворяет (2.20).

Упражнение 6.2.4. Показать, что функция рассеивания (6.20) для моделей B_I и B_V фойгтовской жидкой среды имеет вид

$$w^* = \mu_1 I_1^2(\mathbf{D}) + 2\mu_2 I_1(\mathbf{D}^2).$$

6.3. Модели $_n$ и D_n фойгтовских сред

6.3.1. Модели C_n фойгтовских сред. Согласно *фойгтовским моделям C_n сплошных сред*, свободная энергия и квазиэнергетические тензоры напряжений являются функциями вида

$$\psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.1}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}} = \overset{(n)}{\mathbf{S}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \overset{\circ}{\mathbf{S}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta). \tag{3.2}$$

$$w^* = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta). \tag{3.3}$$

Вводя тензоры равновесных напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_e$, $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e$ и вязких напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v$, $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v = \overset{(n)}{\mathbf{S}} - \overset{(n)}{\mathbf{S}}_e, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v = \overset{\circ}{\mathbf{S}} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e, \tag{3.4}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_e = \overset{(n)}{\mathbf{S}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{0}, \mathbf{O}, \mathbf{0}, \theta), \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \overset{\circ}{\mathbf{S}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{0}, \mathbf{O}, \mathbf{0}, \theta), \tag{3.5}$$

и подставляя их в ОТТ (3.3.17), приходим к следующему тождеству:

$$\Bigl(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{S}}_e}{\rho}\Bigr) \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{A}} + \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet + \Bigl(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} - \frac{\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e}{\rho}\Bigr) \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\mathbf{O}}} \cdot\cdot\, d\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \\ + \Bigl(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\Bigr)d\theta + \frac{1}{\rho}(w^* - \overset{(n)}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet - \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{O}})dt = 0. \tag{3.6}$$

В силу независимости всех дифференциалов $d\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, $d\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet$, $d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, $d\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}$, $d\theta$ и dt, тождество (3.6) эквивалентно системе соотношений:

$$\begin{cases} \overset{(n)}{\mathbf{S}}_e = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}) \equiv \mathbf{\Phi}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \rho(\partial\psi/\partial\mathbf{O}) = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \quad w^* = \overset{(n)}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet + \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}, \\ \psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), \quad \partial\psi/\partial\dot{\mathbf{O}} = 0, \quad \partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^\bullet = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

т.е. ψ, как и в случае моделей A_n, не должна зависеть от скоростей тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}$ и $\dot{\mathbf{O}}$. Так же как и в случае моделей A_n, к соотношениям (3.7) необходимо еще присоединить соотношения, связывающие тензоры вязких квазиэнергетических напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v$, $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v$ с реактивными переменными:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v = \mathbf{\Phi}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta). \tag{3.8}$$

Система (3.7), (3.8) представляет собой *определяющие соотношения для моделей C_n фойгтовских сред.*

Оказывается однако, что эти определяющие соотношения не являются корректными — они не удовлетворяют принципу материальной индифферентности. Действительно, поскольку тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ являются S-индифферентными, а $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}$ — нет, то даже при отсутствии не S-индифферентного тензора $\mathbf{O}$ в соотношениях (3.8) при переходе из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ эти соотношения преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}'_v &= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Phi}_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \theta) \cdot \mathbf{Q} = \\
&= \mathbf{\Phi}_v(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}, \;\; \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} \cdot \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \;\; \theta).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Можно показать, что для изотропных фойгтовских сред, удовлетворяющих принципу Онзагера, тензор вязких напряжений $\mathbf{\Phi}_v$ имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_v = \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet})\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}. \tag{3.10}$$

Вывод этого соотношения осуществляется тем же методом, что и для моделей A_n (см. п. 6.1.2), подробности вывода оставляем в качестве упр. 6.3.2.

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем, что это соотношение действительно не выполняется. Поэтому модели C_n фойгтовских сред не применимы для адекватного описания сплошных сред.

6.3.2. Модели C_n^h фойгтовских твердых сред с коротационной производной. Для того, чтобы получить корректную модель C_n, следует в соотношениях (3.1)–(3.2) полную производную заменить на некоторую коротационную.

Будем говорить, что рассматривается *модель C_n^h фойгтовских сред*, если активные переменные $\Lambda = \{\psi, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, \overset{\circ}{\mathbf{S}}\}$ зависят от следующих реактивных переменных:

$$\psi = \psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.11}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.12}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \overset{\circ}{\mathbf{S}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.13}$$

где

$$h = \{V, S, J\}. \tag{3.14}$$

Подставим (3.11)–(3.13) в ОТТ (3.3.17):

$$\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_e}{\rho}\Big)\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} + \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h}\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h\bullet} + \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{O}} - \frac{\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e}{\rho}\Big)\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} +$$

$$+ \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\mathbf{O}}}\cdot\cdot\,\ddot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} + \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\Big)\dot{\theta} + \frac{1}{\rho}\big(w^* - \overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_v\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}\big) = 0. \tag{3.15}$$

В силу независимости всех производных: $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h\bullet}$, $\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}$, $\ddot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}$ и $\dot{\theta}$, тождество (3.15) эквивалентно системе соотношений:

$$\begin{cases}
\psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), & \text{(3.16а)}\\
\partial\psi/\partial\dot{\mathbf{O}} = 0, \qquad \partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h = 0, & \text{(3.16б)}\\
\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_e = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}) \equiv \mathbf{\Phi}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), & \text{(3.16в)}\\
\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \rho(\partial\psi/\partial\mathbf{O}) = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta), & \text{(3.16г)}\\
w^* = \overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_v\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}_v\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}. & \text{(3.16д)}
\end{cases}$$

Для вязких напряжений, согласно принципу равноприсутствия, следует задать функции вида

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_v = \mathbf{\Phi}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.17}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta). \tag{3.18}$$

Заметим, что формально полученное выражение (3.16д) для функции рассеивания противоречит принципу равноприсутствия — w^* зависит от следующих аргументов:

$$w^* = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.19}$$

что не соответствует зависимостям (3.11)–(3.13). Однако далее мы покажем, что это несоответствие можно устранить.

6.3.3. Следствия из принципа материальной симметрии для моделей C_n^h фойгтовских твердых сред. Рассмотрим следствие из принципа материальной симметрии для моделей C_n^h фойгтовских сред. Согласно этому принципу, при переходе в отсчетную конфигурацию $\overset{*}{\mathcal{K}}$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}_e^* = \mathbf{\Phi}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.20а}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}{}_e^* = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.20б}$$

$$\psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{*}{\mathbf{O}}, \theta), \tag{3.20в}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^*_v = \mathbf{\Phi}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{*h}, \overset{*}{\mathbf{O}}, \dot{\mathbf{O}}^*, \theta), \tag{3.20г}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}{}^*_v = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{*h}, \overset{*}{\mathbf{O}}, \dot{\mathbf{O}}^*, \theta), \tag{3.20д}$$

$$w^* = \overset{(n)}{\mathbf{S}}{}^*_v \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{*\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}{}^*_v \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}^*, \tag{3.20е}$$

для любой конфигурации $\overset{*}{\mathcal{K}}$, полученной из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ с помощью H-преобразования: $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ из группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Из соотношений (3.16д) и (3.20е) следует, что функция рассеивания (3.19) должна удовлетворять соотношению

$$w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^*, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{*\bullet}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{*h}, \overset{*}{\mathbf{O}}, \dot{\mathbf{O}}^*, \theta) = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta) \qquad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{3.21}$$

Рассмотрим далее твердые фойгтовские среды, т.е. случай, когда $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Поскольку для всех ортогональных групп $\overset{\circ}{G}_s$ тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h$ являются H-инвариантными (см. табл. 3.9 и 3.10), а тензор $\mathbf{O}$ преобразуется по формуле (3.7.45) при переходе из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$, то соотношение (3.21) можно записать следующим образом:

$$w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{O}}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta) = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h}, \mathbf{O}, \dot{\mathbf{O}}, \theta) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s \subset I. \tag{3.22}$$

Аналогичное соотношение вытекает из (3.16а) и (3.20в) для свободной энергии Гельмгольца ψ:

$$\psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}\cdot\overset{*}{\mathbf{Q}}, \theta) = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \mathbf{O}, \theta) \qquad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s \subset I. \tag{3.23}$$

Иначе говоря, согласно определению 3.14, функция рассеивания (3.19) и свободная энергия (3.16а) должны быть поворотно-индифферентными относительно $\overset{\circ}{G}_s \subset I$.

Теорема 6.7. *Для моделей C_n^h изотропных фойгтовских сред функция рассеивания (3.19) и свободная энергия (3.16а), удовлетворяющие принципу материальной симметрии (т.е. соотношениям (3.22), (3.23)), не зависят от тензоров* $\mathbf{O}$ *и* $\dot{\mathbf{O}}$*, т.е.*

$$\psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{A}},\ \theta), \tag{3.24}$$

$$w^* = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}},\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet},\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{h}, \theta). \tag{3.25}$$

▼ Доказательство аналогично доказательству первого этапа теоремы 3.27. Оставим его в качестве упр. 6.3.3. ▲

Поскольку тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}$ и $\dot{\mathbf{O}}$ независимы, то из (3.25) и (3.16д) следует, что для изотропных твердых сред должны выполняться соотношения

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v \equiv \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}}_v \equiv 0 \tag{3.26а}$$

и

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v = \mathbf{\Phi}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \theta), \tag{3.26б}$$

т.е. поворотный тензор вязких напряжений тождественно равен нулю, а тензор вязких напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v$ не зависит от $\mathbf{O}$ и $\dot{\mathbf{O}}$.

Кроме того, поскольку для изотропных сред ψ не зависит от $\mathbf{O}$, то из (3.16г) следует, что и поворотный тензор равновесных напряжений тождественно равен нулю:

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \overset{\circ}{\mathbf{\Phi}} \equiv 0. \tag{3.27}$$

Поскольку оба поворотных тензора $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v$ и $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e$ тождественно равны нулю, то, согласно теореме 3.9 из п. 3.2.18, соответствующие тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v$ и $\overset{(n)}{\mathbf{S}}_e$ для изотропных фойгтовских сред коммутативны с $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} = \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{S}}_v, \tag{3.28}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_e \cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}} = \overset{(n)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{S}}_e. \tag{3.29}$$

Но тогда, согласно теореме 3.11, мощность напряжений $w_{(i)}$, а, следовательно, и мощность вязких напряжений, можно представить с помощью коротационных производных:

$$w_v \equiv \overset{(n)}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet} = \overset{(n)}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h = w^*, \qquad h = \{U, V, S, J\}. \tag{3.30}$$

Поскольку тензор вязких напряжений зависит только от $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h$ и θ, то из (3.30) и (3.16д) следует, что функция рассеивания (3.25) для изотропных фойгтовских сред не зависит от $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^{\bullet}$, т.е.

$$w^* = w^*(\overset{(n)}{\mathbf{A}},\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h,\ \theta), \tag{3.31}$$

что обеспечивает соблюдение принципа равноприсутствия.

6.3.4. Тензор вязкости в моделях C_n^h. Применим теперь принцип Онзагера для моделей C_n^h фойгтовских изотропных сред. Согласно этому принципу, функция вязких напряжений (3.26б) является квазилинейной по $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{S}}_v = \mathbf{\Phi}_v(\overset{(n)}{\mathbf{A}}, \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \theta) = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}^h, \tag{3.32}$$

где ${}^4\mathbf{L}_v$ — тензор вязкости, являющийся положительно-определенным:

$$w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h \cdot\cdot {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h \geqslant 0, \tag{3.33}$$

и обладающий симметрией вида (1.21).

Теорема 6.8. *Для моделей C_n изотропных фойгтовских твердых сред тензор вязкости ${}^4\mathbf{L}_v$ имеет вид*

$${}^4\mathbf{L}_v = \mu_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\mu_2 \mathbf{\Delta}, \tag{3.34}$$

а функция вязких напряжений —

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v = \mathbf{\Phi}_v = \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h)\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h, \tag{3.35}$$

где μ_γ — коэффициенты вязкости.

▼ Заметим, что квазилинейная функция (3.32) аргумента $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$ является индифферентной относительно триклинной группы E, т.е. удовлетворяет условию

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot ({}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot (\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h \cdot \mathbf{Q}), \tag{3.36}$$

если $\overset{*}{\mathbf{Q}} \in \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$.

Как и в теореме 3.27, мы хотим найти максимальную ортогональную подгруппу $\overset{\circ}{G}_s \subset I$, относительно которой является индифферентной тензорная функция (3.32).

Но в триклинной группе существует тензорный базис из шести тензоров [12], по которому можно разложить любую тензорную функцию (3.32), — это набор $\{\mathbf{E}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h2}, \mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3\}$, т.е.

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h = \varphi_1 \mathbf{E} + \varphi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h + \varphi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h\,2} + \sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_{3+\gamma} \mathbf{O}_\gamma, \tag{3.37}$$

где φ_γ — коэффициенты разложения.

Выше мы показали (см. (3.28)), что для изотропных твердых фойгтовских сред поворотный тензор вязкости $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_v$ коммутирует с тензором $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$. Подставляя (3.37) в (3.28), получаем, что должно выполняться соотношение

$$\sum_{\gamma=1}^{3} \varphi_{3+\gamma} (\mathbf{O}_\gamma \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}_\gamma) = 0, \tag{3.38}$$

из которого следует, что коэффициенты $\varphi_{3+\gamma}$, $\gamma = 1, 2, 3$, в представлении (3.37) всегда должны обращаться в нуль.

Кроме того, поскольку функция (3.32) является квазилинейной по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$, то и $\varphi_3 = 0$, тогда из (3.37) получаем, что функцию (3.32) для изотропной среды всегда можно представить в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_v = \varphi_1 \mathbf{E} + \varphi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h. \tag{3.39}$$

Вводя обозначения

$$\varphi_1 = \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h), \qquad \varphi_2 = 2\mu_2, \tag{3.40}$$

из (3.39) и (3.40) действительно получаем представления (3.34) и (3.35). ▲

6.3.5. Итоговое представление определяющих соотношений для модели C_n^h изотропных фойгтовских твердых сред. Получим теперь итоговую форму определяющих соотношений для модели C_n^h изотропных фойгтовских твердых сред.

Теорема 6.9. *Для моделей C_n^h изотропных фойгтовских твердых сред определяющие соотношения (3.24), (3.16в) для равновесных напряжений можно представить в виде функций от трех главных инвариантов $I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$:*

$$\psi(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \theta) = \psi(I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}), \theta), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{3.41}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e = \mathbf{\Phi} \equiv \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}) = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2, \tag{3.42}$$

где ψ_α выражаются по формулам (3.8.60).

▼ Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 3.27. ▲

Формулы (3.35) и (3.42) дают возможность получить итоговое представление определяющих соотношений модели C_n^h фойгтовской изотропной среды:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2 + \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h)\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h. \tag{3.43}$$

Полученное соотношение корректно — оно удовлетворяет принципу материальной индифферентности.

В самом деле, при переходе жестким движением из актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$, соотношение (3.43) преобразуется следующим образом:

$$\psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}' + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}'^{\,2} + \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h\,\prime})\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^{h\,\prime} =$$
$$= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot (\psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^2 + \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h)\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h) \cdot \mathbf{Q}. \tag{3.44}$$

Замечание 1. Заметим, что хотя представление (3.30) для мощности вязких напряжений справедливо для коротационных производных из списка (3.30), но для окончательного результата (3.43) мы вынуждены вернуться к списку (3.14), исключив из него правую производную в собственном базисе $h = U$, поскольку она, согласно табл. 3.12, не обеспечивает S-индифферентность производной $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$ для S-индифферентного тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$. Коротационные производные же в списке (3.14) обеспечивают это требование, чем мы и воспользовались при выводе (3.44).

Замечание 2. Коэффициенты ψ_γ в (3.43) являются функциями инвариантов $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}})$ (см. формулы (3.8.60)), а коэффициенты вязкости зависят от обоих тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$ и θ:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}},\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h, \theta). \tag{3.45}$$

Поскольку функции (3.45) не должны изменяться при жестких движениях актуальной конфигурации $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$, то они должны удовлетворять соотношению

$$\mu_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h, \theta) = \mu_\gamma(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h \cdot \mathbf{Q}, \theta) \quad \forall \mathbf{Q} \in I \tag{3.46}$$

(в силу S-индифферентности $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$). Но это означает, что μ_γ должны быть H-индифферентными относительно полной ортогональной группы.

Тогда, в силу результатов из п. 6.1.4, функции (3.45) должны зависеть от совместных инвариантов J_α тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$ относительно группы I :

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1, \ldots, J_{10}, \theta), \quad \gamma = 1, 2; \qquad J_\alpha = J_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h), \qquad \alpha = 1, \ldots, 10. \tag{3.47}$$

Совместные инварианты J_α удовлетворяют условию (3.46) и могут быть образованы так, как показано в (1.35).

В силу H-инвариантности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h$, при ортогональных преобразованиях отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ коэффициенты вязкости (3.45) всегда остаются неизменными при таких преобразованиях, что и учитывалось нами при доказательстве формулы (3.44).

6.3.6. Модели D_n^h изотропных фойгтовских твердых сред. Модели D_n^h фойгтовских твердых сред легко могут быть получены из соотношений (3.11)–(3.13) для моделей C_n^h заменой тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ на меры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$.

Ввиду H-инвариантности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$, все выкладки, проведенные для моделей C_n^h, остаются справедливыми и для моделей D_n^h. В частности, результирующие соотношения (3.43) для изотропных фойгтовских твердых сред в модели D_n^h принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}} + \psi_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^2 + \mu_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h)\mathbf{E} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h, \tag{3.48}$$

где коэффициенты ψ_γ являются функциями инвариантов $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}})$ (см. формулы (3.8.104)), а коэффициенты вязкости μ_γ зависят от совместных инвариантов тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h$:

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(J_1, \ldots, J_{10}, \theta), \quad \gamma = 1, 2; \qquad J_\alpha = J_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h), \quad \alpha = 1, \ldots, 10. \tag{3.49}$$

Соотношения (3.48), очевидно, удовлетворяют принципам материальной симметрии (поскольку все тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h$ являются H-инвариантными при ортогональных преобразованиях) и материальной индифферентности (в силу одновременной S-индифферентности всех тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^h$).

Упражнения к 6.3

Упражнение 6.3.1. Доказать теорему 6.9.

Упражнение 6.3.2. Доказать, что из принципа Онзагера следует представление (3.10) для функций $\mathbf{\Phi}_v$.

Упражнение 6.3.3. Доказать теорему 6.7.

Упражнение 6.3.4. Используя соотношения (3.33) и (3.35), показать, что для моделей изотропных фойгтовских сред функция рассеивания имеет вид:

$$w^* = \mu_1 I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h) + 2\mu_2 I_1((\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}^h)^2).$$

6.4. Задача о растяжении фойгтовского бруса

6.4.1. Скоростные характеристики бруса. Рассмотрим задачу о растяжении бруса, которая была исследована в п. 5.4.1, но материал бруса будем считать соответствующим модели B_n несжимаемых фойговских сред с установившейся ползучестью (см. (1.49)). Закон движения и тензоры $\mathbf{F}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ в этом случае сохраняют свой вид (5.4.1)–(5.4.4.), а вектор скорости $\mathbf{v}$ и градиент скорости $\mathbf{L}$, согласно (1.4.43), имеют следующий вид:

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{k}_\alpha X^\alpha \bar{\mathbf{e}}^2_\alpha, \qquad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^i} \otimes \mathbf{r}^i = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{k}_\alpha}{k_\alpha} \bar{\mathbf{e}}^2_\alpha. \tag{4.1}$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{r}^\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\alpha / k_\alpha$ (см. упр. 1.1.1).

Скорости тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet$ и их девиаторы находим, дифференцируя выражения (5.4.3):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}-1} \dot{k}_\alpha \bar{\mathbf{e}}^2_\alpha, \qquad \operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^\bullet = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha{}^\bullet(k_1) \bar{\mathbf{e}}^2_\alpha, \tag{4.2}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1) = \frac{2}{3(n-\mathrm{III})}\left(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{\frac{n-\mathrm{III}}{2}}\right), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_2 = \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_3 = -\frac{1}{2} \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1. \tag{4.3}$$

Здесь учтено, что для несжимаемых сред $k_2 = k_3 = 1/\sqrt{k_1}$ (см. п. 5.5.1).

6.4.2. Напряжения в брусе. Подставляя выражения (4.2) для dev $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ в определяющие соотношения (1.49), найдем компоненты $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}$ энергетических тензоров напряжений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^{2}, \quad \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} = -pk_{\alpha}^{\mathrm{III}-n} + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{f}_{\alpha}{}^{\bullet}. \tag{4.4}$$

Тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ вычисляем с помощью тех же соотношений (5.4.8), что и для упругих сред:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^{2}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = k_{\alpha}^{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}, \tag{4.5}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -p + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{f}_{\alpha}{}^{\bullet} k_{\alpha}^{n-\mathrm{III}}. \tag{4.6}$$

Как и в случае упругого бруса, тензор напряжений Коши (4.5) не зависит от координат, и поэтому уравнения равновесия бруса при отсутствии массовых сил удовлетворяются тождественно.

6.4.3. Разрешающее соотношение $\boldsymbol{\sigma(k_1, \dot{k}_1)}$. Подставляя (4.6) в граничное условие (5.4.11в), находим, что, как и для упругого бруса, компоненты σ_{22} и σ_{33} должны равняться нулю, а ненулевой является только компонента σ_{11}. В результате получаем два соотношения:

$$\sigma_{11} = -p + 2\mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{f}_{1}{}^{\bullet} k_1^{n-\mathrm{III}}, \quad 0 = -p + \mu_2 \overset{(\mathrm{n})}{f}_{1}{}^{\bullet} k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}}, \tag{4.7}$$

относительно трех неизвестных: k_1, p и σ_{11}. Исключая из этой системы p, получаем разрешающее соотношение задачи:

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu_2}{3k_1} \overset{(\mathrm{n})}{L}{}^{2}(k_1) \dot{k}_1, \tag{4.8}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1) = k_1^{n-\mathrm{III}} + \frac{1}{2} k_1^{\frac{\mathrm{III}-n}{2}}. \tag{4.9}$$

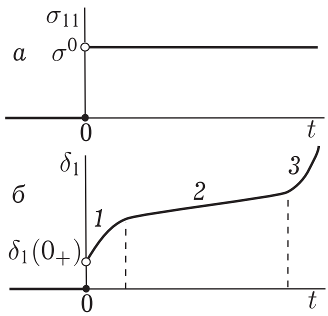

Рис. 6.1. Ступенчатый процесс нагружения (*а*) и типичная кривая ползучести (*б*)

6.4.4. Сравнительный анализ кривых ползучести для разных моделей $\boldsymbol{B_n}$. Рассмотрим *ступенчатый процесс нагружения* (рис. 6.1), в котором напряжение $\sigma_{11}(t)$ задается в виде

$$\sigma_{11}(t) = \sigma^0 h(t), \tag{4.10}$$

где σ^0 — константа, а $h(t)$ — *функция Хевисайда*

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Экспериментально измеряемую функцию удлинения $\delta_1(t) = k_1(t) - 1$ фойгтовского бруса при таком нагружении обычно называют *кривой ползучести*. Типичная кривая ползучести сред, свойства которых зависят от скорости деформации, приведена на рис. 6.1. На этой кривой различают 3 характерных участка: *1* — начальный участок, *2* — участок установившейся ползучести и *3* — участок неустановившейся ползучести. Значение удлинения $\delta_1(0_+)$ при $t \to 0_+$ называют мгновенно-упругим удлинением. Эффект ползучести наблюдается у металлов и сплавов при высоких температурах.

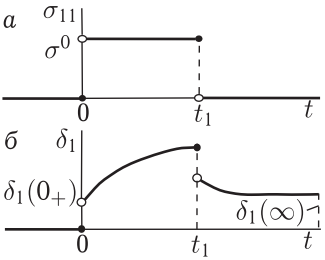

Рис. 6.2. Процесс нагружения–разгрузки (*а*) и кривая ползучести в таком процессе (*б*)

Если в момент времени t_1 осуществляется разгрузка (рис. 6.2):

$$\sigma_{11}(t) = \sigma^0(h(t) - h(t - t_1)), \tag{4.12}$$

то удлинение $\delta_1(t)$ уменьшается, причем для сред фойгтовского типа оно не возвращается к исходному нулевому значению при $t \to \infty$ (рис. 6.2) — возникает *остаточная деформация ползучести* $\delta_1(\infty)$.

Если задан процесс нагружения $\sigma_{11}(t)$, то (4.8) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции k_1, решая которое, находим

$$k_1(t) = H^{-1}\Big(\int\limits_0^t \frac{\sigma_{11}(\tau)}{\mu_2} d\tau\Big), \qquad H(k_1) \equiv \frac{2}{3} \int\limits_1^{k_1} \frac{\overset{(\mathrm{n})}{L}{}^2(k)}{k} dk. \tag{4.13}$$

Подставляя (4.10) в (4.13), находим, что при постоянном напряжении удлинение фойгтовского бруса увеличивается со временем:

$$\delta_1(t) = H^{-1}(\sigma^0 t/\mu_2) - 1, \tag{4.14}$$

а при разгрузке это удлинение остается постоянным и не уменьшается: $\delta_1(t) = \delta_1(t_1)$ при $t > t_1$.

На рис. 6.3 приведены расчетные и экспериментальные кривые ползучести $\delta_1(t)$ для никелевого сплава при температуре 1100 °C при сжатии для различных значений напряжения $\sigma^0 \leqslant 0$. Теоретические кривые рассчитаны по формуле (4.13) для разных моделей B_n, а кривые ползучести $\delta_{1\mathrm{p}}(t)$ представляют собой разность экспериментальных значений удлинения $\delta_1(t)$ и начального значения удлинения: $\delta_{1\mathrm{p}}(t) = \delta_1(t) - \delta_1(0_+)$. Одна из экспериментальных кривых ползучести $\delta_{1\mathrm{p}}(t)$ при наименьшем значении σ^0 использовалась для нахождения константы μ_2, которая вычислялась из условия наименьшего средне-квадратического отклонения расчетных и экспериментальных данных в N точках — моментах времени t_i:

$$\Delta = \Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(1 - \frac{\delta_1(t_i)}{\delta_{1\mathrm{p}}(t_i)}\Big)^2\Big)^{1/2} \to \min. \tag{4.15}$$

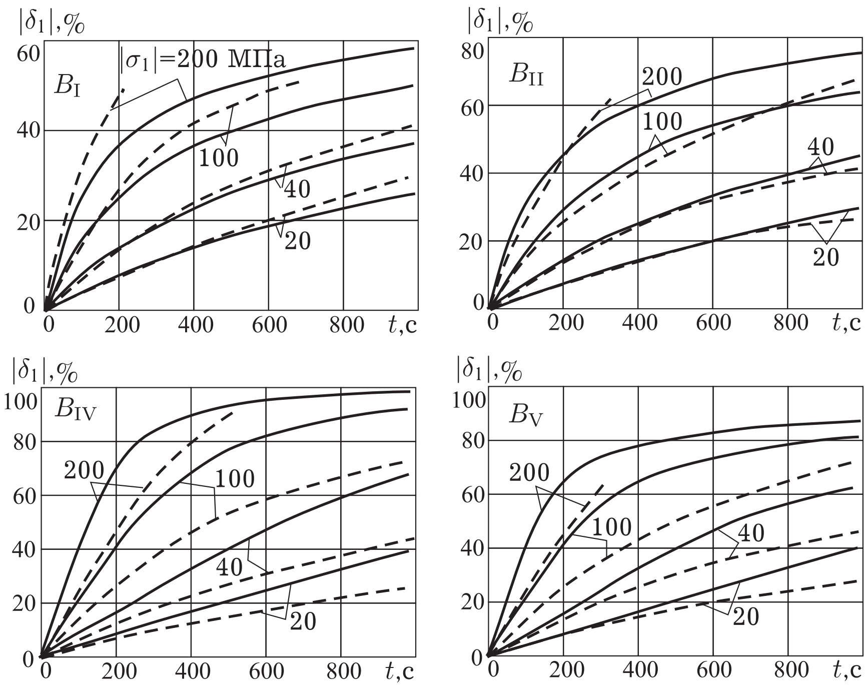

Рис. 6.3. Кривые ползучести для никелевого сплава (слошные линии — расчет, прерывистые — экспериментальные данные)

Таблица 6.1. Значения константы μ_2 и относительной ошибки δ аппроксимации кривых ползучести с помощью моделей B_n фойгтовских сред для никелевого сплава при температуре 1100 °C

n	I	II	IV	V
μ_2, ГПа	30	30	32	35
δ, %	18	17	19	20

В табл. 6.1 приведены значения константы μ_2 для никелевого сплава, рассчитанные указанным способом для различных моделей B_n. К наилучшему совпадению с экспериментальными данными в рассматриваемом случае приводит модель B_{II} (рис. 6.3). Следует отметить, что для многих металлов значения удлинения высокотемпературной ползучести $\delta_{1\mathrm{p}}(t)$ при «достаточно больших» t значительно превышают мгновенно-упругие значения $\delta_1(0_+)$, поэтому последними в задачах расчета ползучести часто пренебрегают. Рассмотренные модели B_n фойговских сред с установившейся ползучестью относятся именно к этому классу моделей.

6.4.5. Анализ диаграмм деформирования для разных моделей B_n фойгтовских сред. Рассмотрим еще один режим деформирования, в котором задан процесс деформирования бруса по закону

$$k_1(t) = 1 + \begin{cases} bt^2/2t_1, & t < t_1, \\ b(t - t_1/2), & t \geqslant t_1, \end{cases} \tag{4.16}$$

где $b = \mathrm{const}$ — скорость деформирования, а t_1 — момент начала деформирования с постоянной скоростью (начальный участок $0 \leqslant t \leqslant t_1$ необходим для удовлетворения условиям согласования (1.50)). Для скорости $\dot{k}_1$ имеем следующее выражение:

$$\dot{k}_1 = \sqrt{(2k_1 b/t_1)} \quad \text{при} \quad t < t_1$$

и

$$\dot{k}_1 = b \quad \text{при} \quad t \geqslant t_1.$$

Подставляя (4.16) в (4.8), получаем соотношение $\sigma_{11}(k_1)$ — диаграмму деформирования фойгтовского бруса.

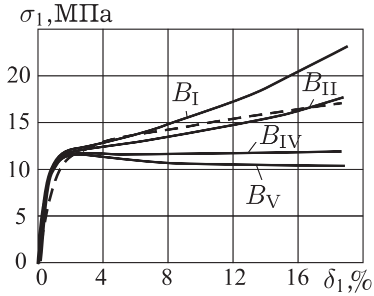

Рис. 6.4. Диаграммы деформирования никеля при сжатии

На рис. 6.4 представлены экспериментальная диаграмма деформирования никеля при сжатии при 1100 °C и $b = -0,00025$ с$^{-1}$ и расчетные диаграммы, в которых коэффициент вязкости μ_2 был вычислен по кривым ползучести (см. п. 6.4.4 и табл. 6.1). Наилучшее совпадение с экспериментом обеспечивала та же модель B_{II}.

Глава 7

ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

7.1. Вязкоупругие среды максвелловского типа

7.1.1. Определение вязкоупругих сред максвелловского типа. Кроме рассмотренных в гл. 6 моделей сред скоростного типа в МСС существуют и другие типы неидеальных сред. Широкое применение нашли вязкоупругие среды, которые иногда также называют средами интегрального типа, или еще, наследственно-упругими средами. Модели вязкоупругих сред наиболее адекватно описывают механические свойства полимерных материалов и композитов на их основе, различных эластомеров, резин, биоматериалов, в частности мышечных тканей человека.

Иногда фойгтовские среды скоростного типа объединяют с вязкоупругими в один класс, тогда среды интегрального типа называют вязкоупругими средами максвелловского типа.

Определение 7.1. *Сплошную среду называют вязкоупругой средой максвелловского типа (или просто вязкоупругой средой), если для нее принята какая-либо из моделей A_n, B_n, C_n или D_n, а соответствующие операторные определяющие соотношения (3.4.9) или (3.4.11)–(3.4.14) являются функционалами по времени t:*

$$\Lambda(t) = \mathop{f}_{\tau=0}^{\tau=t}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau)), \tag{1.1}$$

т.е. значения активных переменных $\Lambda(t)$ зависят не только от значений реактивных переменных $\mathcal{R}(t)$ в тот же момент времени, но и их предыстории $\mathcal{R}^t(\tau) \equiv \mathcal{R}(t-\tau)$, т.е. от их значений во все предшествующие моменты времени $0 < \tau \leqslant t$, начиная от некоторого начального $\tau = 0$.

В силу такой специфической зависимости, вязкоупругие среды еще называют *средами с памятью*.

Для вязкоупругих сред:

1) «настоящее может зависеть только от прошлого, но не от будущего» — поэтому все функционалы (1.1) зависят только от предысторий $\mathcal{R}(t-\tau)$, $0 < \tau \leqslant t$,
2) «прошлое не является бесконечным» — моменты времени $\tau > t$ не дают вклада в функционалы (1.1). Это означает, что

$$\mathcal{R}(\tau) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0; \qquad \mathcal{R}^t(\tau) = \mathcal{R}(t-\tau) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > \tau. \tag{1.2}$$

7.1.2. Тензорное функциональное пространство. Для проведения операций с функционалами (1.1) необходимы некоторые дополнительные построения и определенные сведения из функционального анализа [23].

Рассмотрим множество предысторий тензоров k-го ранга ${}^k\mathbf{T}^t(\tau) = {}^k\mathbf{T}(t - \tau)$, $0 < \tau \leqslant t$, и определим для двух произвольных предысторий ${}^k\mathbf{T}_1^t$ и ${}^k\mathbf{T}_2^t$ их скалярное произведение:

$$({}^k\mathbf{T}_1^t, {}^k\mathbf{T}_2^t)_t = \int\limits_0^t {}^k\mathbf{T}_1^t(\tau) \underbrace{\cdot \ldots \cdot}_{k} ({}^k\mathbf{T}_2^t(\tau))^{(k\ldots 1)} \gamma^2(\tau) d\tau. \tag{1.3}$$

Функцию $\gamma(\tau)$ называют *функцией памяти*, она является положительной, непрерывной, монотонно убывающей, определенной на $[0, +\infty)$ и интегрируемой с квадратом, т.е.

$$\int\limits_0^\infty \gamma^2(\tau) d\tau = \gamma_0^2 < +\infty. \tag{1.4}$$

Так как функция памяти является монотонно убывающей, то значения предыстории тензора ${}^k\mathbf{T}^t(\tau) = {}^k\mathbf{T}(t - \tau)$ при малых τ дают больший вклад в скалярное произведение (1.3), чем значения ${}^k\mathbf{T}^t(\tau)$ при больших τ. Выражаясь нестрого, среда «лучше помнит» события, произошедшие в моменты времени, более близкие к текущему моменту t, чем в более отдаленные моменты времени. Этим свойством наделяют и функционалы (1.1), поэтому вязкоупругие среды максвелловского типа называют также средами с *затухающей памятью*.

Если теперь рассмотреть множество ${}^k\mathcal{H}_t$ процессов изменений тензора ${}^k\mathbf{T}(\tau)$, $0 < \tau \leqslant t$, поставив каждому процессу в соответствие пару $({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}(\tau))$, образованную из значений тензора ${}^k\mathbf{T}(t)$ в момент времени t и предыстории ${}^k\mathbf{T}(\tau) = {}^k\mathbf{T}(t - \tau)$, $0 < \tau \leqslant t$, то можно ввести скалярное произведение процессов ${}^k\mathbf{T}_1(\tau)$ и ${}^k\mathbf{T}_2(\tau)$ из ${}^k\mathcal{H}_t$:

$$({}^k\mathbf{T}_1, {}^k\mathbf{T}_2)_t = ({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}(t)) + ({}^k\mathbf{T}_1^t, {}^k\mathbf{T}_2^t)_t, \tag{1.5}$$

где

$$({}^k\mathbf{T}_1(t), {}^k\mathbf{T}_2(t)) = {}^k\mathbf{T}_1(t) \underbrace{\cdot \ldots \cdot}_{k} ({}^k\mathbf{T}_2(t))^{(k,\ldots 1)} \tag{1.6}$$

— скалярное произведение тензоров k-го ранга.

Множество ${}^k\mathcal{H}_t$ всех процессов изменения тензора ${}^k\mathbf{T}(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, для которых существует скалярное произведение (1.5) и которые при каждом фиксированном τ являются элементами тензорного пространства $\mathcal{T}_3^k(\mathcal{E}_3)$ с введенными в нем обычным образом операциями сложения и умножения на число, называют *тензорным функциональным пространством* ${}^k\mathcal{H}_t$.

Пространство ${}^k\mathcal{H}_t$ является гильбертовым, поскольку всегда можно перейти к декартову базису, в котором компоненты $\bar{T}^{i_1\ldots i_k}(\tau)$ тензоров из ${}^k\mathcal{H}_t$ по условию являются интегрируемыми с квадратом функциями, т.е. принадлежат пространству функций $L_2^{(m)}[0, t]$, где $m = 3^k$, о котором известно [23], что оно — гильбертово.

Благодаря свойству (1.2), скалярное произведение процессов из ${}^k\mathcal{H}_t$ (1.5) можно представить в виде

$$({}^k\mathbf{T}_1^t, {}^k\mathbf{T}_2^t)_t = \int\limits_0^\infty {}^k\mathbf{T}_1^t(\tau) \underbrace{\cdot \ldots \cdot}_{k} (\mathbf{T}_2^t(\tau))^{(k\ldots 1)} \gamma^2(\tau) d\tau < +\infty, \tag{1.7}$$

который часто бывает удобен при анализе моделей вязкоупругой среды.

В пространстве ${}^k\mathcal{H}_t$ существует естественная норма процесса ${}^k\mathbf{T}(\tau)$:

$$\| {}^k\mathbf{T} \| = ({}^k\mathbf{T}, {}^k\mathbf{T})_t^{1/2}, \tag{1.8}$$

где $(\ \cdot\ )_t$ — скалярное произведение (1.5).

7.1.3. Непрерывные и дифференцируемые функционалы. Используя норму (1.8), введем понятие *непрерывного функционала* вида (1.1):

$${}^m\mathbf{S} = {}^m \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)), \tag{1.9}$$

рассматриваемого как отображение области U из пространства ${}^k\mathcal{H}_t$ в область V в пространстве ${}^m\mathcal{H}_t$:

$${}^m\boldsymbol{\mathcal{F}}: \qquad U \subset {}^k\mathcal{H}_t \to V \subset {}^m\mathcal{H}_t. \tag{1.10}$$

Определение 7.2. *Функционал (1.10) называют* *непрерывным* *в области $U \subset {}^k\mathcal{H}_t$, если для всякого процесса ${}^k\mathbf{T} \in U$ выполняется условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого процесса ${}^k\widetilde{\mathbf{T}}$, для которого $({}^k\mathbf{T} + {}^k\widetilde{\mathbf{T}}) \in U$ и*

$$\| {}^k\widetilde{\mathbf{T}} \|_t < \delta, \tag{1.11}$$

выполняется условие близости значений операторов в норме (1.8) пространства ${}^k\mathcal{H}_t$:

$$\| {}^m \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} \left({}^k\mathbf{T}(t) + {}^k\widetilde{\mathbf{T}}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau) + {}^k\widetilde{\mathbf{T}}^t(\tau)\right) - {}^m \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)) \|_t < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Функционал (1.10) называют *линейным*, если он удовлетворяет двум условиям:

$$\mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}_1(t) + {}^k\mathbf{T}_2(t), {}^k\mathbf{T}_1(\tau) + {}^k\mathbf{T}_2(\tau)) = \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}_1(t), {}^k\mathbf{T}_1(\tau)) + \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}_2(t), {}^k\mathbf{T}_2(\tau)), \tag{1.13}$$

$$\mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} (s{}^k\mathbf{T}(t), s{}^k\mathbf{T}(\tau)) = s \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t} ({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}(\tau)), \tag{1.14}$$

для любых процессов ${}^k\mathbf{T}_1(\tau)$ и ${}^k\mathbf{T}_2(\tau)$ из ${}^k\mathcal{H}_t$ и любого вещественного числа s.

В пространстве ${}^k\mathcal{H}_t$ имеет место *теорема Рисса* [23] о представимости всякого линейного функционала (1.9) в виде скалярного произведения фиксированного элемента из ${}^k\mathcal{H}_t$ и произвольного процесса ${}^k\mathbf{T}(\tau)$ из ${}^k\mathcal{H}_t$, так скалярный линейный функционал в ${}^2\mathcal{H}_t$ имеет вид

$$f(\mathbf{T}(t), \mathbf{T}^t(\tau)) = \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t,t) \cdot\cdot\, \mathbf{T}^{\mathrm{T}}(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t, t-\tau) \cdot\cdot\, \mathbf{T}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\gamma^2(\tau)d\tau, \quad (1.15\text{а})$$

где $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t, t-\tau)$ — предыстория и $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t,t)$ — мгновенное значение при $\tau = t$ фиксированного процесса $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t,\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, для данного функционала f (появление еще одного аргумента t у процесса $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(t,\tau)$ означает, что фиксированный процесс может меняться при изменении рассматриваемого промежутка времени).

Осуществляя замену переменных $t - \tau = y$ и обозначая $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}(t,y)\gamma^2(\tau) = \mathbf{\Gamma}(t,y)$, $\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}(t,t)$, после обратной замены букв $y \to \tau$, получаем еще одно представление линейного скалярного функционала:

$$f = \mathbf{\Gamma}_0 \cdot\cdot\, \mathbf{T}(t) + \int\limits_0^t \mathbf{\Gamma}(t,\tau) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(\tau)d\tau, \quad (1.15\text{б})$$

называемое *представлением Вольтерры*.

Для вязкоупругих сред удобно использовать *δ-функцию Дирака* $\delta(t)$, обладающую следующим основным свойством:

$$\int\limits_0^t \mathbf{B}(t,\tau)\delta(t_0 - \tau)d\tau = \begin{cases} \mathbf{B}(t,t_0), & t_0 \in [0,t], \\ 0, & t_0 \notin [0,t], \end{cases} \quad (1.16)$$

для любого непрерывного тензорного процесса $\mathbf{B}(t,\tau)$.

Используя (1.16), линейный функционал (1.15б) можно представить в виде

$$f = \int\limits_0^t \mathbf{A}(t,\tau) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(\tau)d\tau, \quad (1.15\text{в})$$

$$\mathbf{A}(t,\tau) = \mathbf{\Gamma}_0\delta(t-\tau) + \mathbf{\Gamma}(t,\tau). \quad (1.15\text{г})$$

Определение 7.3. *Функционал (1.9) называют дифференцируемым по Фреше в точке ${}^m\mathbf{T} \in U$ области $U \subset {}^m\mathcal{H}_t$, если существуют два функционала $\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}$ и $\delta\boldsymbol{\mathcal{F}}$, обладающие следующими свойствами:*

- *они определены на декартовом произведении пространства $\mathcal{H}_t$*

$$\partial^m\boldsymbol{\mathcal{F}}: \quad {}^k\mathcal{H}_t \times {}^k\mathcal{H}_t \to {}^m\mathcal{H}_t; \qquad \delta^m\boldsymbol{\mathcal{F}}: \quad {}^k\mathcal{H}_t \times {}^k\mathcal{H}_t \to {}^m\mathcal{H}_t, \quad (1.17)$$

- *могут быть записаны в виде, аналогичном (1.9):*

$${}^m\mathbf{P}_1 = \partial^m \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau) \big| {}^k\widetilde{\mathbf{T}}(t)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial^k\mathbf{T}(t)} \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)) \cdot \ldots \cdot {}^k\mathbf{T}^{(k\ldots1)}(t), \quad (1.18)$$

$$ {}^m\mathbf{P}_2 = \delta^m \overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)\big|{}^k\widetilde{\mathbf{T}}^t(\tau)), \tag{1.19} $$

(черта разделяет два различных аргумента процесса),

- *они линейны и непрерывны по второму аргументу,*
- *удовлетворяют условию:* $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta$ *такое, что для всякого процесса* $({}^k\widetilde{\mathbf{T}}(t), {}^k\widetilde{\mathbf{T}}^t(\tau))$, *для которого* $({}^k\mathbf{T}_1(t), {}^k\mathbf{T}_1^t(\tau)) \subset U$ *и*

$$ \parallel {}^k\mathbf{T} \parallel_t < \delta, \tag{1.20} $$

одновременно выполняется условие

$$ \parallel \Delta^m\boldsymbol{\mathcal{F}} \parallel_t \leqslant \varepsilon \parallel {}^k\widetilde{\mathbf{T}} \parallel_t, \tag{1.21} $$

где

$$ \begin{aligned} \Delta^m\boldsymbol{\mathcal{F}} = {}^m\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}_1(t), {}^k\mathbf{T}_1^t(\tau)) - {}^m\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)) - \\ - \partial^m\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)\big|{}^k\widetilde{\mathbf{T}}(t)) - \delta\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)\big|{}^k\widetilde{\mathbf{T}}^t(\tau)), \end{aligned} \tag{1.22} $$

$$ ({}^k\mathbf{T}_1(t), {}^k\mathbf{T}_1^t(\tau)) \equiv ({}^k\mathbf{T}(t) + {}^k\widetilde{\mathbf{T}}(t),\ {}^k\mathbf{T}^t(\tau)) + {}^k\widetilde{\mathbf{T}}^t(\tau)). \tag{1.23} $$

Оператор (1.19) называют *производной по Фреше*, а в правой части выражения (1.18) стоит частная производная от $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (рассматриваемого как тензорная функция от $\mathbf{T}(t)$) по тензорному аргументу $\mathbf{T}(t)$.

Дифференцируемый по Фреше функционал (1.9) является и непрерывным (см. упр. 7.1.2).

Обозначим $U_{t'}$ — множество процессов ${}^k\mathbf{T}(t) \in {}^k\mathcal{H}_{t'}$, имеющих непрерывные производные по t: ${}^k\dot{\mathbf{T}}(t)$ и ${}^k\ddot{\mathbf{T}}(t)$, принадлежащие ${}^k\mathcal{H}_{t'}$.

Теорема 7.1. *Пусть функционал (1.9) является дифференцируемым по Фреше в* ${}^k\mathcal{H}_{t'}$, *тогда существует такое* t: $t \in (0, t')$, *что для всех процессов* ${}^k\mathbf{T}(\tau) \in U_t$ *процесс* ${}^m\mathbf{S}(t)$ *дифференцируем по* t, *и имеет место следующее* *п р а в и л о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я* *функционала по времени:*

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\ {}^m\mathbf{S}(t) = \frac{\partial}{\partial\ {}^k\mathbf{T}(t)}\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)) \cdot \ldots \cdot \frac{d}{dt}\ {}^k\mathbf{T}^{(k\ldots1)}(t) + \\ + \delta\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}({}^k\mathbf{T}(t), {}^k\mathbf{T}^t(\tau)\big|{}^k\dot{\mathbf{T}}^t(\tau)). \end{aligned} \tag{1.24} $$

Здесь

$$ {}^k\dot{\mathbf{T}}^t = \frac{d}{d(t-\tau)}{}^k\mathbf{T}(t-\tau) = -\frac{d}{dt}{}^k\mathbf{T}^t(\tau). $$

▼ Доказательство этой теоремы можно найти в [22]. ▲

Замечание. Теорема открывает возможность вычислять производные по Фреше от операторов (1.9) посредством вычисления обычной производной по t от функций $\mathbf{S}(t)$ согласно формуле (1.24).

Пример 7.1. Вычислим производные по Фреше от линейного оператора (1.15б) для случая, когда $\mathbf{\Gamma}(t,\tau) = \mathbf{\Gamma}(t-\tau)$ и $\mathbf{\Gamma}(t,t) = \mathbf{\Gamma}(0)$. Используя формулу (1.24), вычисляем обычную производную по t по правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом:

$$\frac{d}{dt}\, f = \mathbf{\Gamma}_0 \cdot\cdot\, \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t) + \mathbf{\Gamma}(0) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(t) + \int\limits_0^t \mathbf{\Gamma}'(t-\tau) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(\tau)d\tau, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{\Gamma}'(y) = \partial\mathbf{\Gamma}(y)/\partial y$. Сравнивая (1.25) с (1.24), находим

$$\begin{gathered} \partial\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathbf{\Gamma}_0 \cdot\cdot\, \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t), \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}}{\partial\mathbf{T}} = \mathbf{\Gamma}_0, \\ \delta\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathbf{\Gamma}(0) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(t) + \int\limits_0^t \mathbf{\Gamma}'(t-\tau) \cdot\cdot\, \mathbf{T}(\tau)d\tau \end{gathered} \tag{1.26}$$

— частную производную и производную по Фреше.

7.1.4. Аксиома затухающей памяти. Для вязкоупругих сред максвелловского типа дополнительно принимают следующую аксиому.

Аксиома 18 (затухающей памяти). *Функционалы (1.1) в определяющих соотношениях вязкоупругих сред максвелловского типа являются дифференцируемыми по Фреше и тем самым удовлетворяют правилу дифференцирования по времени (1.24):*

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{\partial}{\partial\mathcal{R}(t)} \mathop{f}_{\tau=0}^{t} (\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau)) \frac{d}{dt}\mathcal{R}(t) + \delta \mathop{f}_{\tau=0}^{t} (\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau) \big| \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \tag{1.27}$$

Взаимосвязь дифференцируемости по Фреше и затухания памяти функционалов проясняет теорема о релаксации.

Пусть имеется некоторый процесс $\mathcal{R}(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, который до некоторого момента времени $t_0 < t$ произволен, а при $t_0 \geqslant \tau \geqslant t$ остается постоянным:

$$\mathcal{R}(\tau) = \mathcal{R}(t_0), \qquad t_0 \geqslant \tau \geqslant t. \tag{1.28}$$

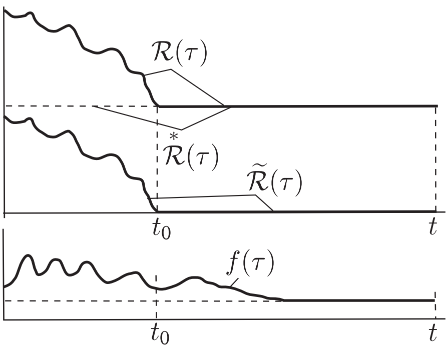

Рис. 7.1. К теореме 7.2

Назовем такой $\mathcal{R}(\tau)$ *процессом с постоянным продолжением* (рис. 7.1).

Кроме того рассмотрим *статический процесс*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}(\tau) = \mathcal{R}(t_0) = \text{const}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t. \tag{1.29}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7.2. *Пусть функционал f (1.1) дифференцируем по Фреше, тогда его частная производная ∂f и производная по Фреше δf, а также функция $\Lambda(t)$ для любого процесса $\mathcal{R}(\tau)$ с постоянным продолжением при фиксированном t_0 имеют предел при $t \to +\infty$, совпадающий со значениями* *производных $\overset{*}{\partial f}$, $\overset{*}{\delta f}$ и Λ^* на соответствующих статических процессах $\overset{*}{\mathcal{R}}(\tau)$:*

$$\lim_{t\to+\infty} \overset{t}{\underset{\tau=0}{f}} (\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau)) = \Lambda^* \equiv \overset{t_0}{\underset{\tau=0}{f}} (\overset{*}{\mathcal{R}}(t_0), \overset{*}{\mathcal{R}}{}^{t_0}(\tau)),$$

$$\lim_{t\to+\infty} \partial \overset{t}{\underset{\tau=0}{f}} (\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau) \big| \dot{\mathcal{R}}(t)) = \overset{*}{\partial f} \equiv \partial \overset{t_0}{\underset{\tau=0}{f}} (\overset{*}{\mathcal{R}}(t_0), \overset{*}{\mathcal{R}}{}^{t_0}(\tau) \big| 0), \tag{1.30}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \delta \overset{t}{\underset{\tau=0}{f}} (\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau) \big| \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)) = \overset{*}{\delta f} \equiv \delta \overset{t_0}{\underset{\tau=0}{f}} (\overset{*}{\mathcal{R}}(t_0), \overset{*}{\mathcal{R}}{}^{t_0}(\tau) \big| 0).$$

Упрощенно говоря, каков бы ни был процесс $\mathcal{R}(\tau)$, если он, начиная с некоторого момента t_0, выходит на постоянный уровень, то спустя определенное время вязкоупругая среда максвелловского типа «забывает» об этом процессе $\mathcal{R}(\tau)$ до момента t_0, так как реакция среды, выраженная функционалами f, ∂f и δf, при больших t мало отличается от ее реакции на статический процесс.

▼ Рассмотрим процесс

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\tau) = \mathcal{R}(\tau) - \overset{*}{\mathcal{R}}(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t. \tag{1.31}$$

Очевидно, что

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\tau) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad t_0 \geqslant \tau \geqslant t, \tag{1.32}$$

тогда

$$\| \widetilde{\mathcal{R}} \|_t^2 = \widetilde{\mathcal{R}}^2(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{R}}^2(t-\tau)\gamma^2(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{R}}^2(\tau)\gamma^2(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t_0} \widetilde{\mathcal{R}}^2(\tau)\gamma^2(t-\tau)d\tau \leqslant c \int\limits_{t-t_0}^{t} \gamma^2(\tau)d\tau. \tag{1.33}$$

В силу свойства (1.4) и монотонности убывания функции $\gamma(\tau)$, отсюда получаем, что $\| \widetilde{\mathcal{R}} \|_t \to 0$ при $t \to +\infty$.

Но тогда в силу того, что дифференцируемый по Фреше функционал f является и непрерывным вместе с ∂f и δf, из условия (1.12) следует, что имеет место следующее неравенство:

$$\| \overset{t}{\underset{\tau=0}{f}} (\overset{*}{\mathcal{R}}(t) + \widetilde{\mathcal{R}}(t), \overset{*}{\mathcal{R}}{}^t(\tau) + \widetilde{\mathcal{R}}^t(\tau)) - \overset{t}{\underset{\tau=0}{f}} (\overset{*}{\mathcal{R}}(t), \overset{*}{\mathcal{R}}{}^t(\tau)) \|_t < \varepsilon, \tag{1.34}$$

но это и означает существование первого предела (1.30). Аналогично доказываем существование второго и третьего пределов в (1.30). ▲

7.1.5. Модели A_n вязкоупругих сред. Если рассматриваются модели A_n вязкоупругих сред максвелловского типа, то свободная энергия ψ является функционалом вида (1.1), а в качестве реактивных переменных выбирают набор (3.4.1):

$$\psi = \mathop{\psi}_{\tau=0}^{t}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t(\tau), \theta^t(\tau)). \tag{1.35}$$

Применяя правило (1.24) дифференцирования функционала, получаем выражение для полной производной ψ по t:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} \cdot\cdot\, \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \delta\psi. \tag{1.36}$$

Подставляя это выражение в ОТТ (3.3.15), после приведения подобных получим

$$\Bigl(\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}} - \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Bigr) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} + \Bigl(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\Bigr)d\theta + \Bigl(\frac{w^*}{\rho} + \delta\psi\Bigr)dt = 0. \tag{1.37}$$

При фиксированных предысториях $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t$, θ^t и текущих значениях $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$, $\theta(t)$, приращения $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, $d\theta$ и dt могут изменяться произвольным образом, поэтому тождество (1.37) выполняется тогда и только тогда, когда коэффициенты при этих приращениях обращаются в нуль. В результате приходим к системе соотношений:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t(\tau), \theta^t(\tau)), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = -\rho\delta\psi. \end{cases} \tag{1.38}$$

представляющих вместе с (1.35) систему *определяющих соотношений для моделей A_n вязкоупругих сред* максвелловского типа.

Подобно идеальным сплошным средам, для вязкоупругих сред достаточно задать только функционал свободной энергии (1.35), тогда остальные соотношения вычисляют его дифференцированием по формулам (1.38).

Заметим, что хотя формально соотношения (1.38) похожи на соответствующие соотношения (3.5.4) для моделей A_n идеальных сред, однако они существенно отличаются тем, что в (1.38) применяется функциональная зависимость от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и θ. Кроме того, вязкоупругие среды являются диссипативными: для них функция рассеивания w^* тождественно не равна нулю.

7.1.6. Следствия из принципа материальной симметрии для моделей $\boldsymbol{A_n}$ вязкоупругих сред. Согласно общему принципу материальной симметрии (аксиома 14), для всякой вязкоупругой среды существует неискаженная отсчетная конфигурация $\widehat{\mathcal{K}}$. Будем далее, как и в п. 3.7.4, для простоты полагать начальную конфигурацию $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ неискаженной, тогда для $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ существует такая подгруппа $\overset{\circ}{G}_s \subset U$ унимодулярной группы U, что для всякого тензора преобразований $\mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s$ $(\mathbf{H} : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}})$ определяющие соотношения (1.38), записанные для $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, при переходе в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{t*}, \theta^t) = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*), \\ \psi = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\psi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*, \theta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{t*}, \theta^t) \equiv \psi^*, \\ \eta = -\partial\psi^*/\partial\theta, \\ (w^*)^* = -\rho(\delta\psi)^*, \qquad \forall \mathbf{H} \in \overset{\circ}{G}_s. \end{cases} \tag{1.39}$$

Для твердых максвелловских сред, в силу H-индифферентности всех тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t(\tau) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t-\tau)$ (см. п. 3.7.4), соотношения (1.39) принимают следующий вид:

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{\tau=0}{\overset{t}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\ \theta,\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t,\ \theta^t) \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}},\ \theta,\ \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}},\ \theta^t), \tag{1.40а}$$

$$\underset{\tau=0}{\overset{t}{\psi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}},\ \theta) = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\psi}}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}},\ \theta, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}},\ \theta^t)\ \ \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s, \tag{1.40б}$$

$$\delta\psi = \delta\psi^*. \tag{1.40в}$$

Теорема 7.3. *Необходимым и достаточным условием выполнимости принципа материальной симметрии в форме (1.40) для моделей A_n твердых максвелловских сред является выполнение условия (1.40б) для ψ.*

▼ Необходимость условия (1.40б) очевидна.

Докажем достаточность. Если выполнено соотношение (1.40б), то, поскольку функционал $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ — это тензорная функция от ψ по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$, методом, использованным при доказательстве теоремы 3.23, доказываем, что из (1.40б) следует (1.40а). Для доказательства (1.40в) используем формулу (1.36) для $\delta\psi$ и запишем ее в $\overset{*}{\mathcal{K}}$:

$$\delta\psi^* = \frac{d\psi^*}{dt} - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* \cdot\cdot \frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*}{dt} - \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\ \frac{d\theta}{dt}. \tag{1.41}$$

Поскольку $\psi = \psi^*$, а переход из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ не зависит от t, то и $d\psi/dt = d\psi^*/dt$. В силу H-индифферентности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, имеет место соотношение $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* \cdot\cdot\ (d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*/dt) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ (d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}/dt)$, а также выполнено $\partial\psi^*/\partial\theta = \partial\psi/\partial\theta$, т.е. правая часть соотношения (1.41) совпадает с $\delta\psi$, а значит $(\delta\psi)^* = \delta\psi$, т.е. соотношение (1.40в) выполняется. ▲

7.1.7. Общее представление функционала свободной энергии в моделях A_n. Скалярный функционал ψ (1.35), удовлетворяющий условию (1.40б), называют *функционально-индифферентным относительно группы*

$\overset{\circ}{G}_s$. Найдем общее представление такого функционала через инварианты тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ соответствующей группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Ранее было дано общее представление линейного скалярного функционала в форме (1.15г). По аналогии с (1.15г) определим *квадратичный скалярный функционал* как двукратный интеграл следующего вида:

$$\psi_2 = \int\limits_0^t \int\limits_0^t {}^4\mathbf{A}(t,\tau_1,\tau_2) \cdot\cdot\cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1) \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_2))^{(4321)} d\tau_1 d\tau_2, \tag{1.42}$$

где ${}^4\mathbf{A}(t,\tau_1,\tau_2)$ — фиксированный тензор четвертого ранга, называемый *ядром функционала*, а также определим *n-кратный скалярный функционал*:

$$\psi_m = \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \widetilde{\psi}_m(t,\tau_1,\ldots\tau_m) d\tau_1 \ldots d\tau_m, \tag{1.43}$$

где

$$\widetilde{\psi}_m(t,\tau_1,\ldots\tau_m) = {}^{2n}\mathbf{A}(t,\tau_1,\ldots\tau_m) \underbrace{\cdot\ldots\cdot}_{2m} (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1) \otimes \ldots \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))^{(m,m-1,\ldots,2,1)}. \tag{1.44}$$

Здесь ${}^{2n}\mathbf{A}(t,\tau_1,\ldots\tau_m)$ — ядро этого функционала — фиксированный тензор $(2n)$-го ранга, зависящий от $m+1$ аргумента.

Теорема 7.4 (Стоуна–Вейерштрасса). *Всякий непрерывный скалярный функционал (1.35) на пространстве $\mathcal{H}_t$ можно равномерно приблизить n-кратными скалярными функционалами (1.43):*

$$\psi = \mathop{\psi}\limits_{\tau=0}^{t} (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t(\tau), \theta^t(\tau)) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m, \tag{1.45}$$

где равенство означает равномерную сходимость частичной суммы в норме (1.8).

▼ Доказательство этой теоремы применительно к пространству $\mathcal{H}_t$ можно найти в [52]. ▲

Рассмотрим теперь подынтегральное выражение $\psi_n(t,\tau_1,\ldots\tau_n)$ n-кратного функционала (1.43). При любом фиксированном наборе значений $t,\tau_1,\ldots\tau_m$ оно представляет собой скалярную функцию (но не функционал!) n тензорных аргументов $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_i) \equiv \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_i$, $i=1,\ldots,m$:

$$\widetilde{\psi}_m(t,\tau_1,\ldots,\tau_m) = \widetilde{\psi}_m(t,\tau_1,\ldots,\tau_m,\mathbf{C}_1,\ldots,\mathbf{C}_m), \tag{1.46}$$

причем с переменой значений $t,\tau_1,\ldots,\tau_m$ число и вид тензорных аргументов этой функции не меняется.

Подставляя представление (1.45) в условие (1.40б) функциональной индифферентности ψ, находим, что функции $\widetilde{\psi}_m$ (1.44) при каждом фиксированном значении $t, \tau_1, \ldots, \tau_m$ должны удовлетворять условию

$$\widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots, \tau_m, \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m) = \\ = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots, \tau_m, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \ldots, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_m \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}), \quad (1.47)$$

т.е. должны быть H-индифферентными скалярными функциями относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Теорема 7.5. *Всякую скалярную функцию (1.46) m тензорных аргументов $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m$, индифферентную относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$, можно представить в виде функции от конечного числа z ($z \leqslant 6m$) совместных инвариантов:*

$$J_\gamma^{(s)} = J_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m), \qquad \gamma = 1, \ldots, z, \quad (1.48)$$

относительно этой группы $\overset{\circ}{G}_s$ в следующем виде:

$$\widetilde{\psi}_m = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots, \tau_m, J_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m)). \quad (1.49)$$

▼ По аналогии с совместными инвариантами двух тензоров, которые рассматривались в п. 6.1.4, введем *совместные инварианты m тензоров* относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ — скалярные функции J_γ (1.48), H-индифферентные относительно данной группы, т.е. удовлетворяющие соотношениям:

$$J_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m) = J_\gamma^{(s)}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \ldots, \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_m \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in G_s. \quad (1.50)$$

Функциональный базис совместных инвариантов состоит из конечного их числа z, причем z не может превышать общего числа компонент всех тензоров, т.е. $z \leqslant 6m$. Кроме того, в силу того, что $J_\gamma^{(s)}$ образуют базис, любая другая H-индифферентная скалярная функция относительно той же группы $\overset{\circ}{G}_s$ может быть выражена через этот базис. Но функция $\widetilde{\psi}$ (1.40) как раз является такой функцией в силу (1.47), поэтому действительно имеет место (1.49). ▲

Подставляя теперь выражение (1.49) в (1.43), а затем в (1.45), приходим к общему представлению непрерывного функционала (1.35) функционально-индифферентного относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \ldots \int_0^t \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1 \ldots \tau_m, J_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1), \ldots, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))) d\tau_1 \ldots d\tau_m. \quad (1.51)$$

При выводе этой формулы мы использовали представление (1.15в) линейных функционалов с помощью δ-функции. Совершим теперь обратную операцию — выделим из ядер $\widetilde{\psi}_m$ эту δ-образную составляющую, что позволит нам отделить мгновенное значение тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$ от его предыстории. Обобщением формулы (1.15г) для функций $m+1$ аргумента $t, \tau_1, \ldots, \tau_m$ является следующая формула:

$$\widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots, \tau_m, J_\gamma^{(s)}) = \sum_{k=0}^{m} \delta(t-\tau_1)\ldots\delta(t-\tau_k)\psi_{mk}(t, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m, J_\gamma^{(s)}), \tag{1.51а}$$

полагаем, что при $k=m$ аргумент $\tau_{k+1} = \tau_{m+1}$ у функции ψ_{mk} отсутствует: $\psi_{mm} = \psi_{mk}(t, J_\gamma^{(s)})$.

Подставляя (1.51а) в (1.51), получаем

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\int_0^t \underbrace{\ldots}_{m-k}\int_0^t \psi_{mk}(t, \tau_{k+1}, \ldots \tau_m, J_\gamma^{(s)}\Big(\underbrace{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)}_{k}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_{k+1}), \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))\Big) d\tau_{k+1}\ldots d\tau_m. \tag{1.52}$$

Перегруппировывая слагаемые в этой сумме и замечая, что совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$ от m тензоров, среди которых имеется k одинаковых тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$, всегда можно выразить через совместные инварианты $(m-k+1)$ тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_{k+1}), \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m)$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$, получаем окончательно

$$\psi = \varphi_0(t, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t))) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t \underbrace{\ldots}_{m}\int_0^t \varphi_m\Big(t, \tau_1, \ldots \tau_m, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1), \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))\Big) d\tau_1\ldots d\tau_m \tag{1.53}$$

— общий вид функционала (1.35) функционально-индифферентного относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$. Здесь обозначены φ_0 — мгновенно-упругая часть и φ_m — ядра функционала:

$$\begin{gathered}\varphi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{mm}(t, J_\gamma^{(s)}(\mathbf{C}(t))),\\ \varphi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{m+k,k}(t, \tau_1, \ldots \tau_m, J_\gamma^{(s)}(\underbrace{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)\ldots\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)}_{k}, \mathbf{C}(\tau_1), \ldots, \mathbf{C}(\tau_m))).\end{gathered} \tag{1.54}$$

Совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t))$ одного тензора представляют собой просто инварианты $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t))$ этого тензора относительно одной и той же группы $\overset{\circ}{G}_s$.

Представление (1.53) и есть искомое общее представление функционала (1.35) в моделях A_n.

7.1.8. Модель A_n стабильных вязкоупругих сред.

Определение 7.4. *Говорят, что рассматривается* модель A_n стабильной вязкоупругой среды, *если функционал ψ этой модели инвариантен относительно сдвига процесса деформирования и нагрева по времени, т.е. если имеется два процесса $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau), \theta(\tau))$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau), \widetilde{\theta}(\tau))$, $0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, отличающихся только сдвигом по времени:*

$$(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau), \widetilde{\theta}(\tau)) = \begin{cases} (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau - t_0), \theta(\tau - t_0)), & t_0 < \tau \leqslant t_1, \\ (\mathbf{0}, \theta_0), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_0, \end{cases} \tag{1.55}$$

то соответствующие им значения функционала ψ и $\widetilde{\psi}$ отличаются также только сдвигом по времени (рис. 7.2):

$$\widetilde{\psi} = \begin{cases} \psi(t - t_0), & t_0 < t \leqslant t_1, \\ \psi(0), & 0 \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Замечание. Поскольку функционал ψ для стабильных сред инвариантен относительно сдвига по времени, то и его частные производные по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)$ и $\theta(t)$, а также производная по Фреше $\delta\psi$ обладают этим свойством, следовательно, определяющие соотношения (1.38) также инвариантны относительно сдвига по времени. В силу свойства инвариантности, стабильные среды называют еще нестареющими, подчеркивая, что их определяющие соотношения не меняются с течением времени «сами по себе» при отсутствии деформаций и изменений температуры.

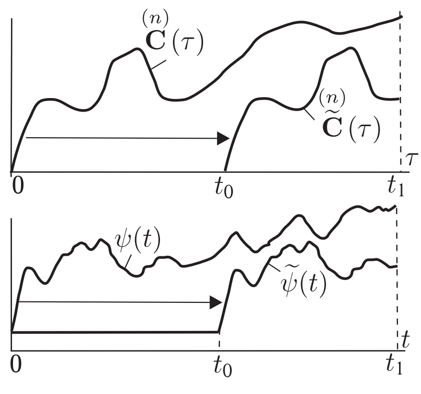

Рис. 7.2. К определению стабильной вязкоупругой среды

Рассмотрим две важнейшие модели стабильных сред.

7.1.9. Модель A_n вязкоупругой среды разностного типа.

Говорят, что рассматривается *модель A_n вязкоупругой среды разностного типа*, если в общем представлении функционала ψ (1.53) нет явной зависимости ядер φ_m от моментов времени t, τ_i, а есть только от их разности $t - \tau_i$ или от температуры $\theta(t)$, $\theta(\tau_i)$:

$$\varphi_m = \varphi_m(t - \tau_1, \ldots, t - \tau_m, \theta(t), \theta(\tau_1), \ldots, \theta(\tau_m), J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1), \ldots, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))), \tag{1.57}$$

и φ_0 не зависит явно от температуры:

$$\varphi_0 = \varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)), \theta(t)). \tag{1.58}$$

Функции φ_m полагают удовлетворяющими следующим условиям нормировки и симметрии относительно любых перестановок первых m аргументов:

$$\varphi_m(t-\tau_1,\ldots,t-\tau_m,\theta_0,\ldots,\theta_0,0,\ldots,0)=0, \tag{1.59}$$

$$\varphi_m(y_1,\ldots,y_n,\ldots,y_l,\ldots,y_m,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_m,J_\gamma^{(s)})= \\ =\varphi_m(y_1,\ldots,y_l,\ldots,y_n,\ldots,y_m,\theta,\theta_1,\ldots,\theta_m,J_\gamma^{(s)}),$$

где $\theta_0=\theta(0)$, $\theta_n=\theta(\tau_n)$, $y_n=t-\tau_n$, а $1\leqslant n,l\leqslant m$.

Совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$ также всегда можно выбрать удовлетворяющими условиям нормировки:

$$J_\gamma^{(s)}(0,\ldots,0)=0, \qquad \gamma=1,\ldots,z. \tag{1.60}$$

Для сред разностного типа функционал (1.53) имеет следующий вид:

$$\psi(t)=\varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)),\theta(t))+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\ldots\int_0^t\varphi_m d\tau_1\ldots d\tau_m, \tag{1.61}$$

где φ_m определяются формулой (1.57).

Теорема 7.6. *Модель A_n вязкоупругой среды разностного типа является стабильной.*

▼ Пусть первый процесс имеет вид $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, тогда соответствующий ему функционал $\psi(t)$ имеет вид (1.61). Поскольку второй процесс $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau)$ при $\tau\leqslant t_0$ является тождественно нулевым, то, в силу условий нормировки (1.59), (1.60), имеем $\varphi_m\equiv 0$ при $0\leqslant\tau_i\leqslant t_0$, $i=1,\ldots,m$, поэтому нижние пределы у интегралов в выражении (1.61) для функционала $\widetilde{\psi}(t)$ могут быть определены как t_0:

$$\widetilde{\psi}(t)=\varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(t)),\widetilde{\theta}(t))+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{t_0}^t\ldots\int_{t_0}^t\varphi_m\Big(t-\tau_1,\ldots,t-\tau_m, \\ \widetilde{\theta}(t),\widetilde{\theta}(\tau_1),\ldots\widetilde{\theta}(\tau_m),J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(t),\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau_1),\ldots,\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau_m))\Big)d\tau_1\ldots d\tau_m. \tag{1.62}$$

Заменим теперь $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau_i)$ на $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau_i-t_0)$ при $\tau_i>t_0$, тогда, осуществляя замены переменных $\tau_i-t_0=\widetilde{\tau}_i$, получаем при $t>t_0$:

$$\widetilde{\psi}(t)=\varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t-t_0)),\theta(t-t_0))+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{t-t_0}\ldots\int_0^{t-t_0}\varphi_m\Big(t-t_0-\widetilde{\tau}_1,\ldots,t-t_0- \\ -\widetilde{\tau}_m,\theta(t-t_0),\theta(\widetilde{\tau}_1),\ldots\theta(\widetilde{\tau}_m),J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t-t_0),\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\widetilde{\tau}_1),\ldots,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\widetilde{\tau}_m))\Big)d\widetilde{\tau}_1\ldots d\widetilde{\tau}_m. \tag{1.63}$$

Сравнивая (1.61) и (1.63), действительно убеждаемся, что $\widetilde{\psi}(t)$ и $\psi(t)$ связаны только сдвигом по времени $t \to (t - t_0)$, поскольку при $t = t_0$:

$$\widetilde{\psi}(t_0) = \varphi_0(0, \theta(0)) = \psi(0),$$

т.е. соотношение (1.56) имеет место. ▲

Подставляя функционал (1.61) в (1.38), получаем общий вид определяющих соотношений для стабильных сред:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho \sum_{\gamma=1}^{z} \Big(\frac{\partial \varphi_0}{\partial I_\gamma^{(s)}} \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)} + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \frac{\partial \varphi_m}{\partial J_\gamma^{(s)}} \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)} d\tau_1 \ldots d\tau_m \Big),$$

$$-\eta = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta(t)} d\tau_1 \ldots d\tau_m, \tag{1.64}$$

$$-w^* = \rho \varphi_1^0 + \rho \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \Big(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \varphi_{m+1}^0\Big) d\tau_1 \ldots d\tau_m.$$

Здесь ядра φ_m являются функциями вида (1.57), а $\partial\varphi_m/\partial t)$ означает частную производную от этой функции при переменных первых ее аргументах $(t - \tau_1), \ldots, \theta(\tau_m)$ и фиксированных аргументах $J_\gamma^{(s)}$ (т.е. по ним не идет дифференцирование). Введено также обозначение для значения функции φ_{m+1} (1.57) при $\tau_{m+1} = t$:

$$\varphi_{m+1}^0 = \varphi_{m+1}\Big(t - \tau_1, \ldots, t - \tau_m, 0, \theta(t), \theta(\tau_1), \ldots, \theta(\tau_m), \theta(t), \\ J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1), \ldots, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m)), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)\Big).$$

При выводе выражения для функции рассеивания использованы условия (1.59).

7.1.10. Модель A_n термовязкоупругой среды. Приведем наиболее широко распространенный способ учета зависимости ядер φ_m (1.57) от температуры θ.

В *модели A_n термовязкоупругой среды разностного типа* температура θ включена в совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$, т.е.

$$\varphi_m = \varphi_m(t - \tau_1, \ldots, t - \tau_m, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1), \ldots, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_m))), \tag{1.65}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \qquad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta(\tau)} \boldsymbol{\alpha}(\widetilde{\theta}) d\widetilde{\theta}. \tag{1.66}$$

Тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ называют тензором *тепловой деформации*, а $\boldsymbol{\alpha}$ — тензором *теплового расширения*, оба они симметричны и H-индифферентны относительно рассматриваемой группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\alpha} \quad \forall \overset{*}{\mathbf{Q}} \in \overset{\circ}{G}_s, \tag{1.67}$$

поэтому функции $J_\gamma^{(s)}$ от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta$ будут также H-индифферентными относительно $\overset{\circ}{G}_s$.

Способ учета температурной зависимости определяющих соотношений в виде разности тензора деформации и тензора тепловой деформации (1.66) называют *моделью Дюгамеля–Неймана*.

Подобным образом с помощью модели Дюгамеля–Неймана учитывают зависимость функции φ_0 от температуры:

$$\varphi_0 = \varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)), \theta(t)). \tag{1.68}$$

Так как $\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta / \partial\theta = -\boldsymbol{\alpha}$, то производные по $\theta(t)$ в (1.64) для этой модели имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} = -\sum_{\gamma=1}^{z} \frac{\partial\varphi_0}{\partial I_\gamma} \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial'\varphi_0}{\partial\theta(t)}, \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\theta(t)} = -\sum_{\gamma=1}^{z} \frac{\partial\varphi_m}{\partial J_\gamma} \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\alpha}(\theta(t)), \tag{1.68a}$$

где $\partial'/\partial\theta$ означает производную по второму аргументу в формуле (1.68).

В силу того, что $\partial I_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\partial J_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \partial J_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, после подстановки (1.68a) в (1.64) получаем для плотности энтропии следующее выражение:

$$\eta = -\frac{\partial'\varphi_0}{\partial\theta(t)} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}. \tag{1.69}$$

7.1.11. Модель A_n термореологически простой вязкоупругой среды. Говорят, что рассматривается *модель A_n термореологически простой вязкоупругой среды*, если ядра φ_m (1.57) в определяющих соотношениях (1.53) и (1.64) зависят от температуры θ функциональным образом, с помощью так называемого *приведенного времени*:

$$\varphi_m = \varphi_m\Big(t' - \tau_1', \ldots, t' - \tau_m', J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1), \ldots, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m))\Big) a_\theta(\theta(\tau_1)) \ldots a_\theta(\theta(\tau_m)), \tag{1.70}$$

где

$$t' = \int_0^t a_\theta(\theta(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau}, \qquad \tau_i' = \int_0^{\tau_i} a_\theta(\theta(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau} \tag{1.71}$$

— приведенное время — функционал от функции $a_\theta(\theta)$, называемой *функцией температурно-временного сдвига*.

Функции φ_m (1.70) и a_θ удовлетворяют условиям нормировки:

$$\varphi_m(0,\ldots,0,J_\gamma^{(s)})=0,\quad \varphi_m(t'-\tau_1',\ldots,t'-\tau_m',0)=0,\quad a_\theta(\theta_0)=1. \qquad (1.72)$$

Если процесс $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau)$ рассмотреть относительно приведенного времени:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}(\tau')=\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{\mathbf{C}}}\Bigl(\int\limits_0^\tau a_\theta d\widetilde{\tau}\Bigr)=\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau),$$

то, так как $d\tau_i'=a_\theta(\theta(\tau_i))d\tau_i$, функционал (1.53) с ядром (1.70) можно записать относительно приведенного времени:

$$\psi(t')=\varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t')),\theta(t'))+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{t'}\ldots\int\limits_0^{t'}\varphi_m\Bigl(t'-\tau_1',\ldots,t'-\tau_m',$$
$$J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t'),\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_1'),\ldots,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau_m'))\Bigr)d\tau_1'\ldots d\tau_m'. \qquad (1.73)$$

Подставляя функционал (1.73) в (1.38), с учетом правила дифференцирования (1.27) получаем определяющие соотношения для термореологически простой вязкоупругой среды:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}=\rho\sum_{\gamma=1}^{z}\Bigl(\frac{\partial\varphi_0}{\partial I_\gamma^{(s)}}\frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}}+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{t'}\ldots\int\limits_0^{t'}\frac{\partial\varphi_m}{\partial J_\gamma^{(s)}}\frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t')}d\tau_1'\ldots d\tau_m'\Bigr),$$
$$\eta=-(\partial'\varphi_0/\partial\theta)+(1/\rho)\boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad (1.74)$$
$$-w^*=\rho a_\theta\varphi_1^0+\rho a_\theta\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{t'}\ldots\int\limits_0^{t'}\Bigl(\frac{\partial\varphi_m}{\partial t'}+\varphi_{m+1}^0\Bigr)d\tau_1'\ldots d\tau_m'.$$

Здесь мы учли, что $\partial/\partial t=a_\theta(\partial/\partial t')$.

Заметим, что с помощью (1.38) и (1.74) функцию рассеивания w^* можно представить еще в одной эквивалентной форме:

$$w^*=\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}-\rho\frac{d\psi}{dt}+\Bigl(\rho\frac{\partial'\varphi_0}{\partial\theta}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\Bigr)\frac{d\theta}{dt}, \qquad (1.75)$$

которая оказывается полезной при циклическом нагружении.

Теорема 7.7. *Термореологически простая среда является стабильной.*

▼ Приведенное время (1.71) для смещенного процесса нагрева $\widetilde{\theta}(\tau)=$ $=\theta(\tau-t_0)$ с учетом условия нормировки (1.72) можно представить в виде

$$t'=\int\limits_0^{t_0}a_\theta d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}a_\theta(\widetilde{\theta}(\tau))d\tau=t_0+\int\limits_{t_0}^{t}a_\theta(\theta(\tau-t_0))d\tau=t_0+\int\limits_0^{t-t_0}a_\theta(\theta(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau},$$

$$\tau' = t_0 + \int\limits_0^{\tau - t_0} a_\theta(\theta(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau} \tag{1.76}$$

при $t_0 < \tau < t$. Дальнейший ход доказательства такой же, как в теореме 7.6, подробности оставляем в качестве упр. 7.1.1. ▲

Упражнения к 7.1

Упражнение 7.1.1. Провести полное доказательство теоремы 7.7.

Упражнение 7.1.2. Используя определения 7.2 и 7.3, доказать, что функционал, дифференцируемый по Фреше, является непрерывным.

7.2. Главные, квадратичные и линейные модели вязкоупругих сред

7.2.1. Главные модели A_n вязкоупругих сред. Определяющие соотношения с использованием многократных интегралов типа (1.53), (1.61) или (1.73) являются чрезвычайно громоздкими и их применение на практике связано со значительными трудностями. Поэтому широко используют частные модели вязкоупругих сред, в которых удерживают конечное число интегралов.

Для *главной модели A_n термовязкоупругой среды разностного типа* в сумме (1.61) удерживают только один интеграл ($m = 1$), т.е. ψ в этой модели имеет вид

$$\psi = \varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta), \theta) - \int\limits_0^t \varphi_1(t-\tau, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau, \tag{2.1}$$

где φ_0 и φ_1 — функции указанных аргументов, причем функцию φ_1 выбираем со знаком минус, что всегда можно сделать простым переобозначением функций.

Определяющие соотношения для такой среды имеют вид (1.64), где m следует положить равным 1:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{z}\Big(\varphi_{0\gamma} J_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} - \int\limits_0^t \varphi_{1\gamma} J_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} d\tau\Big), \tag{2.2}$$

здесь обозначены частные производные от φ_0 и φ_1:

$$\begin{gathered} \varphi_{0\gamma}(J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))) = \rho(\partial\varphi_0/\partial I_\gamma^{(s)}), \qquad \gamma = 1, \ldots r, \\ \varphi_{1\gamma}(t-\tau, J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))) = \rho(\partial\varphi_1/\partial J_\gamma^{(s)}), \qquad \gamma = 1, \ldots z, \end{gathered} \tag{2.3}$$

а также тензоры частной производной от $J_\gamma^{(s)}$ по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)$:

$$J_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} = \partial J_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) = \partial J_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t), \qquad \gamma = 1, \ldots z. \tag{2.4}$$

Совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))$ можно выбрать таким образом, чтобы первые r штук образовывали функциональный базис инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))$ в той же самой группе $\overset{\circ}{G}_s$. Будем далее всегда считать, что $J_\gamma^{(s)}$ построены таким образом, тогда имеют место следующие соотношения:

$$J_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} = \partial I_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \quad \gamma = 1, \ldots r; \qquad \varphi_{0\gamma} \equiv 0, \quad \gamma = r+1, \ldots z,$$

которые мы и использовали при записи соотношения (2.2).

Функции рассеивания w^* и плотности энтропии η для главных моделей A_n, согласно (1.64) и (1.69), имеют вид

$$w^* = \rho\varphi_1(0, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) + \rho\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t-\tau, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau \geqslant 0,$$

$$\eta = -\frac{\partial'\varphi_0}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{2.6}$$

где $\partial/\partial t$ означает частную производную от φ_1 по первому аргументу, а $\partial'/\partial\theta$ — частную производную от φ_0 по второму аргументу.

Совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$ от двух тензоров легко можно выписать, ранее мы их уже рассматривали для фойгтовских сред (см. п. 6.1.4).

7.2.2. Главная модель A_n изотропной термовязкоупругой среды. Для главной модели A_n изотропной термовязкоупругой среды разностного типа функциональный базис совместных инвариантов $J_\gamma^{(I)}$ состоит из девяти инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. (6.1.35)):

$$J_\alpha^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)), \quad J_{\alpha+3}^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{2.7}$$

$$J_7^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \qquad J_8^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(\tau) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \qquad J_9^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t),$$
$$r = 3 \quad \text{и} \quad z = 9.$$

Тензоры производной от этих инвариантов вычисляем с помощью следующих формул (см. [12]):

$$J_{1\mathbf{C}}^{(I)} = \mathbf{E}, \qquad J_{2\mathbf{C}}^{(I)} = \mathbf{E}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \qquad J_{3\mathbf{C}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t) - I_1\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + \mathbf{E}I_2,$$

$$J_{\gamma+3,\mathbf{C}}^{(I)} = \mathbf{0}, \quad \gamma = 1, 2, 3; \qquad J_{7\mathbf{C}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \qquad J_{8\mathbf{C}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(\tau), \tag{2.8}$$

$$J_{9\mathbf{C}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau).$$

Подставляя эти выражения в (2.1) и группируя по тензорным степеням, получим определяющие соотношения для главной модели A_n изотропной термовязкоупругой среды:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \breve{\varphi}_1\mathbf{E} + \breve{\varphi}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta + \breve{\varphi}_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta, \tag{2.9}$$

где обозначены следующие функционалы:

$$\breve{\varphi}_1 \equiv \varphi_{01} + \varphi_{02} I_1(t) + \varphi_{03} I_2(t) - \int\limits_0^t (\varphi_{11} + \varphi_{12} I_1(t) + \varphi_{13} I_2(t)) d\tau,$$

$$-\breve{\varphi}_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv (\varphi_{02} + \varphi_{03} I_1(t)) \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) - \int\limits_0^t ((\varphi_{12} + \varphi_{13} I_1(t)) \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) - \varphi_{17} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)) d\tau, \tag{2.10}$$

$$\breve{\varphi}_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta \equiv \varphi_{03} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t) - \int\limits_0^t \Big(\varphi_{13} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t) + \varphi_{18} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(\tau) + \\ + \varphi_{19} (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) \Big) d\tau.$$

Соотношение (2.9) по форме подобно аналогичному соотношению (3.8.46) для изотропной упругой среды, однако в (2.9) $\breve{\varphi}_1$, $\breve{\varphi}_2$ и $\breve{\varphi}_3$ — уже не функции инвариантов тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, а функционалы вида (2.10).

7.2.3. Главная модель A_n трансверсально-изотропной термовязкоупругой среды. Для главной модели A_n трансверсально-изотропной (относительно группы T_3) термовязкоупругой среды разностного типа функциональный базис совместных инвариантов $J_\gamma^{(3)}$ состоит из 11 инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. (6.1.36)):

$$J_\gamma^{(3)} = I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)),\ \gamma = 1,\ldots,5; \qquad J_{5+\gamma}^{(3)} = I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),\ \gamma = 1,\ldots,4;$$
$$J_{10}^{(3)} = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)), \tag{2.11}$$
$$J_{11}^{(3)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) - 2J_{10}^{(3)} - J_2^{(3)} J_7^{(3)},$$
$$r = 5, \qquad z = 11,$$

где инварианты $I_\gamma^{(3)}$ определяются формулами (3.8.21). Частные производные $J_{\gamma\mathbf{C}}^{(3)}$ от этих инвариантов имеют следующий вид (см. [12]):

$$J_{1\mathbf{C}}^{(3)} = \mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \quad J_{2\mathbf{C}}^{(3)} = \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \quad J_{3\mathbf{C}}^{(3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t),$$
$$J_{4\mathbf{C}}^{(3)} = 2\,{}^4\mathbf{O}_3 \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \quad {}^4\mathbf{O}_3 \equiv \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \tag{2.12}$$
$$J_{5\mathbf{C}}^{(3)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t) - I_1 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + \mathbf{E} I_2, \quad J_{6\mathbf{C}}^{(3)} = J_{7\mathbf{C}}^{(3)} = J_{8\mathbf{C}}^{(3)} = J_{9\mathbf{C}}^{(3)} = 0,$$
$$J_{10\mathbf{C}}^{(3)} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \qquad J_{11\mathbf{C}}^{(3)} = {}^4\mathbf{O}_3 \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau).$$

Подставляя эти выражения в (2.1), после перегруппировки слагаемых получаем определяющие соотношения для *главной модели A_n трансверсально-изотропной термовязкоупругой среды*:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \breve{\varphi}_1\mathbf{E} + \breve{\varphi}_2\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + (\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,\breve{\varphi}_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta + \breve{\varphi}_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta + \breve{\varphi}_5\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta, \quad (2.13)$$

где обозначены функционалы

$$\breve{\varphi}_1 \equiv \varphi_{01} + \varphi_{05}I_2 - \int_0^t(\varphi_{11} + \varphi_{15}I_2(t))d\tau,$$

$$\breve{\varphi}_2 \equiv \varphi_{02} - \varphi_{01} - 2\varphi_{04}I_2^{(3)} - \int_0^t(\varphi_{12} - \varphi_{11} - 2\varphi_{14}I_2^{(3)}(t) - 2\varphi_{1,11}I_2^{(3)}(\tau))d\tau,$$

$$\breve{\varphi}_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv \frac{1}{2}(\varphi_{03} - 2\varphi_{04})\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \frac{1}{2}\int_0^t\Big((\frac{\varphi_{13}}{2} - \varphi_{14})\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + (\frac{\varphi_{1,10}}{2} - \varphi_{1,11})\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)\Big)d\tau,$$

$$(2.14)$$

$$\breve{\varphi}_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv (2\varphi_{04} - \varphi_{05}I_1)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \int_0^t\Big((2\varphi_{14} - \varphi_{15}I_1(t))\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + \varphi_{1,11}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)\Big)d\tau,$$

$$\breve{\varphi}_5\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta \equiv \Big(\varphi_{05} - \int_0^t\varphi_{15}d\tau\Big)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta(t).$$

7.2.4. Главная модель A_n ортотропной термовязкоупругой среды. Для главной модели A_n ортотропной термовязкоупругой среды разностного типа функциональный базис совместных инвариантов состоит из 12 инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. (6.1.37)):

$$J_\gamma^{(O)} = I_\gamma^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)),\ \gamma = 1,\ldots,6; \qquad J_{\gamma+6}^{(O)} = I_\gamma^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),\ \gamma = 1,2,3,6;$$

$$J_{10}^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),\quad J_{11}^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),\ (2.15)$$

$$r = 6, \qquad z = 12.$$

К этому набору целесообразно присоединить еще два инварианта (являющихся зависимыми) с целью получения симметричных относительно векторов $\widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2$ соотношений:

$$J_{13}^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),$$

$$J_{14}^{(O)} = I_7^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)). \quad (2.16)$$

Тензоры частных производных от этих инвариантов имеют следующий вид (см. [12]):

$$\begin{gathered}
J^{(O)}_{\gamma\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma,\ \gamma=1,2,3; \quad J^{(O)}_{\gamma+3,\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t),\ \gamma=1,2;\\
J^{(O)}_{6\mathbf{C}} = 3\ {}^6\mathbf{O}_m\cdot\cdot\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \quad J^{(O)}_{\gamma+6,\mathbf{C}} = J^{(O)}_{12\mathbf{C}} = 0,\\
J^{(O)}_{10\mathbf{C}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad J^{(O)}_{11\mathbf{C}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),\\
J^{(O)}_{13\mathbf{C}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_3\otimes\mathbf{O}_3)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad J^{(O)}_{14\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_3\otimes\mathbf{O}_3)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t),
\end{gathered} \tag{2.17}$$

где тензор ${}^6\mathbf{O}_m$ определяется формулой (3.8.40).

Подставляя эти выражения в (2.1), после приведения подобных получаем определяющие соотношения для *главной модели A_n ортотропной термовязкоупругой среды*:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{3}(\breve{\varphi}_\gamma\widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma + \mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma\cdot\cdot\,\breve{\varphi}_{3+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) + \breve{\varphi}_7\ {}^6\mathbf{O}_m\cdot\cdot\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \tag{2.18}$$

где обозначены функционалы

$$\begin{gathered}
\breve{\varphi}_\gamma \equiv \varphi_{0\gamma} - \int_0^t \varphi_{1\gamma}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)d\tau, \quad \gamma=1,2,3,\\
\breve{\varphi}_{3+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv \frac{1}{2}\varphi_{0,3+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \frac{1}{2}\int_0^t\Big(\frac{1}{2}\varphi_{1,9+\gamma}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) +\\
+\varphi_{1,3+\gamma}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)\Big)d\tau, \quad \gamma=1,2,\\
\breve{\varphi}_7 \equiv 3\varphi_{06} - 3\int_0^t \varphi_{16}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)d\tau,\\
\breve{\varphi}_6\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv \frac{1}{2}\varphi_{0,14}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \frac{1}{2}\int_0^t\Big(\frac{1}{2}\varphi_{1,13}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) + \varphi_{1,14}(t-\tau, J^{(O)}_\alpha)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)\Big)d\tau.
\end{gathered} \tag{2.19}$$

7.2.5. Квадратичные модели A_n термовязкоупругих сред. В *квадратичной модели A_n термовязкоупругой среды разностного типа* в сумме (1.61) удерживают два интеграла, т.е. $m = 1, 2$. Вид определяющих соотношений для конкретных групп симметрии $\overset{\circ}{G}_s$ становится существенно более громоздким, так как при этом появляются двукратные интегралы и приходится рассматривать совместные инварианты $J^{(s)}_\gamma$ уже от трех тензоров. Поэтому обычно рассматривают частный случай квадратичной модели, в которой $m = 1$ и 2, но берутся совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$ только двух тензоров как в главной модели:

$$\psi = \varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)), \theta) - \int\limits_0^t \varphi_1(t-\tau, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^t \varphi_2(t-\tau_1, t-\tau_2, J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2, \quad (2.20)$$

где φ_0, φ_1 и φ_2 — функции указанных аргументов. Поскольку ядро φ_2 в этой модели не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)$, то $\partial\varphi_2/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) \equiv 0$, и определяющие соотношения оказываются совпадающими с (2.2), а, следовательно, и с (2.9), (2.13) и (2.18). Отличие между главной и квадратичной моделями заключается только в виде самого функционала ψ и функции диссипации w^*. Такая ситуация является характерной для вязкоупругих сред, когда различным функционалам свободной энергии ψ соответствуют одни и те же соотношения между тензорами напряжений и деформации. Сравнивая главную модель (2.1) с квадратичной (2.20), можно также заметить, что у первой имеется только одно ядро φ_1, которое входит и в соотношение (2.2), а у квадратичной модели — два ядра φ_1 и φ_2, одно из которых не входит в соотношение (2.2) между напряжениями и деформациями. Отсюда следует, что для главной модели можно восстановить функционал свободной энергии ψ по соотношениям (2.2), с точностью до энтропийной составляющей $\partial\varphi_0/\partial\theta$ и константы $\varphi_0(0, \theta_0) = \psi_0$.

Модели вязкоупругих сред, обладающие таким свойством, называют *механически детерминированными*.

Квадратичная модель не является механически детерминированной, так как из-за наличия ядра φ_2 нельзя восстановить вид ψ по соотношениям (2.2) между напряжениями и деформациями. Тем не менее, эту модель также используют в приложениях из-за ее квадратичной структуры, характерной для термодинамических потенциалов.

7.2.6. Линейные модели A_n вязкоупругих сред. Квадратичную модель A_n термовязкоупругой среды разностного типа (2.20), в которой функции φ_0, φ_1 и φ_2 линейно зависят от квадратичных инвариантов $J_\gamma^{(s)}$ и квадратичным образом от линейных инвариантов $J_\gamma^{(s)}$, называют *линейной* (кубичные инварианты не входят в эту модель):

$$\varphi_0 = \psi_0 + \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)}(t) I_\beta^{(s)}(t) + \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I_\gamma^{(s)}(t),$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} q_{\gamma\beta}(t-\tau) I_\gamma^{(s)}(t) I_\beta^{(s)}(\tau) + \frac{2}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} q_{\gamma\gamma}(t-\tau) J_\gamma^{(s)}(t,\tau), \quad (2.21)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} p_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2) I_\gamma^{(s)}(\tau_1) I_\beta^{(s)}(\tau_2) + \\ + \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} p_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2) J_\gamma^{(s)}(\tau_1, \tau_2),$$

где $l_{\gamma\beta}$, $l_{\gamma\gamma}$ — константы, а $q_{\gamma\beta}(t-\tau)$, $q_{\gamma\gamma}(t-\tau)$ — одномоментные ядра (функции одного аргумента, симметричные по γ и β), $p_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2)$ и $p_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2)$ — двухмоментные ядра (функции двух переменных, симметричные по γ и β, а также по $t-\tau_1$ и $t-\tau_2$). Введены также обозначения

$$I_\gamma^{(s)}(\tau) = I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)), \qquad J_\gamma^{(s)}(\tau_1, \tau_2) = J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)). \tag{2.22}$$

Здесь r_1 — число линейных инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))$ в группе $\overset{\circ}{G}_s$, $(r_1 \leqslant r)$, а $(r_2 - r_1)$ — число квадратичных совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)}(\tau_1, \tau_2)$ в этой группе, где $r_2 \leqslant z$.

Ввиду того, что не все совместные инварианты из полного базиса $J_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2))$ входят в выражение для функционала ψ линейных моделей, удобно перенумеровать эти инварианты по сравнению с базисами (2.7), (2.11), (2.15), перечисляя сначала линейные инварианты $I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t))$, а затем квадратичные совместные инварианты $J_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2))$.

Главная линейная модель A_n вязкоупругих сред получается после применения аналогичных соотношений для функций φ_0 и φ_1 главной модели (2.1), при этом $\varphi_2 = 0$.

Функции $\varphi_{0\gamma}$ и $\varphi_{1\gamma}$ (2.3) для главной линейной модели имеют следующий вид:

$$\varphi_{0\gamma} = J \sum_{\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I_\beta^{(s)}(t), \qquad \varphi_{1\gamma} = J \sum_{\beta=1}^{r_1} q_{\gamma\beta}(t-\tau) I_\beta^{(s)}(\tau), \qquad \gamma = 1, \ldots r_1,$$
$$\varphi_{0\gamma} = J l_{\gamma\gamma}, \qquad \varphi_{1\gamma} = J q_{\gamma\gamma}(t-\tau), \qquad \gamma = r_1+1, \ldots r_2, \tag{2.23}$$
$$J = \rho / \overset{\circ}{\rho}.$$

Определяющие соотношения (2.1) для обеих моделей, как отмечалось выше, совпадают и для линейных моделей имеют вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \breve{l}_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)} \mathbf{O}_\beta^{(s)} + J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \breve{l}_{\gamma\gamma} I_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)}, \tag{2.24}$$

где обозначены линейные функционалы

$$\breve{l}_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)} \equiv l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)}(t) - \int_0^t q_{\gamma\beta}(t-\tau) I_\gamma^{(s)}(\tau) d\tau, \qquad \gamma, \beta = 1, \ldots r_1,$$

$$\breve{l}_{\gamma\gamma} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}} \equiv l_{\gamma\gamma} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(t) - \int\limits_0^t q_{\gamma\gamma}(t-\tau) I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(\tau)d\tau, \qquad \gamma = r_1+1, \ldots r_2. \tag{2.25}$$

Здесь мы учли, что все линейные инварианты имеют вид $I^{(s)}_\gamma = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \cdot\cdot\, \mathbf{O}^{(s)}_\gamma$, где $\mathbf{O}^{(s)}_\gamma$ — образующие тензоры группы, а также приняли во внимание, что для квадратичных инвариантов:

$$J^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(\tau) = \frac{\partial J_\gamma(t,\tau)}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)} = \frac{1}{2}\frac{\partial I^{(s)}_\gamma(\tau,\tau)}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)} = \frac{1}{2} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(\tau), \quad \gamma = r_1+1, \ldots, r_2. \tag{2.26}$$

(Для изотропных сред, чтобы удовлетворить этому условию, в качестве инвариантов $I^{(I)}_\gamma$ следует выбирать $I_1(\mathbf{C}_\theta)$ и $I_1(\mathbf{C}^2_\theta)$.) Заметим, что если ядра $q_{\gamma\beta}(t)$, $q_{\gamma\gamma}(t)$ в (2.25) отсутствуют, то эти соотношения в точности совпадают с соотношениями (3.8.57) линейных моделей A_n идеальных сред, если в последних положить $\bar{m}_\gamma = 0$.

Функция рассеивания w^* (2.6) для главных линейных моделей A_n вязкоупругих сред имеет вид

$$\begin{aligned} w^* = J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \Big(q_{\gamma\beta}(0) I^{(s)}_\gamma(t) I^{(s)}_\beta(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} q_{\gamma\beta}(t-\tau) I^{(s)}_\gamma(t) I^{(s)}_\beta(\tau)d\tau \Big) + \\ + 2J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \Big(q_{\gamma\gamma}(0) J^{(s)}_\gamma(t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} q_{\gamma\gamma}(t-\tau) J^{(s)}_\gamma(t,\tau)d\tau \Big), \end{aligned} \tag{2.27а}$$

а для линейных моделей A_n вязкоупругих сред к этому выражению присоединяются слагаемые с двухмоментными ядрами:

$$\begin{aligned} w^* = J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \Big(q_{\gamma\beta}(0) I^{(s)}_\gamma(t) I^{(s)}_\beta(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} q_{\gamma\beta}(t-\tau) I^{(s)}_\gamma(t) I^{(s)}_\beta(\tau)d\tau - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} p_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2) I^{(s)}_\gamma(\tau_1) I^{(s)}_\beta(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \Big) + \\ + J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \Big(2q_{\gamma\gamma}(0) J^{(s)}_\gamma(t,t) + 2\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} q_{\gamma\gamma}(t-\tau) J^{(s)}_\gamma(t,\tau)d\tau - \\ - \int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} p_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2) J_\gamma(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \Big). \end{aligned} \tag{2.27б}$$

Плотность энтропии η, согласно (1.69) и (2.6), имеет в линейной модели A_n следующий вид:

$$\eta = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{2.28}$$

где $\psi_0(\theta)$ — функция только температуры. Функцию рассеивания с помощью формулы (1.75) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \rho\frac{d\psi}{dt} + \left(\rho\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\right)\frac{d\theta}{dt}. \tag{2.28a}$$

7.2.7. Представление линейных моделей A_n в форме Больцмана. Для линейных моделей A_n вязкоупругих сред представление свободной энергии ψ в виде (2.20), (2.21), определяющих соотношений в форме (2.24), (2.25) и функции рассеивания w^* в форме (2.27б) называют представлением модели A_n *в форме Вольтерры* (название связано с тем, что интегральные выражения вида (2.25), участвующие в этом представлении, были впервые рассмотрены Вольтеррой в 1909 г.).

Дадим для этих моделей иное эквивалентное представление. Введем новые двухмоментные ядра $\bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,z)$ и $\bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,z)$, удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,z)}{\partial y \partial z} = p_{\gamma\beta}(y,z), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,0)}{\partial y} = -q_{\gamma\beta}(y), \quad \bar{\psi}_{\gamma\beta}(0,0) = l_{\gamma\beta},\\
\frac{\partial^2 \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,z)}{\partial y \partial z} = p_{\gamma\gamma}(y,z), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,0)}{\partial y} = -q_{\gamma\gamma}(y), \quad \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(0,0) = l_{\gamma\gamma},\\
y = t - \tau_1, \qquad z = t - \tau_2,
\end{gathered} \tag{2.29}$$

тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7.8. *Пусть двухмоментные ядра $\bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,z)$ и $\bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,z)$ являются*

- *1) симметричными функциями своих аргументов*

$$\bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,z) = \bar{\psi}_{\gamma\beta}(z,y), \qquad \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,z) = \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(z,y), \tag{2.29a}$$

- *2) являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями своих аргументов на $(0,t)$,*
- *3) удовлетворяют условиям (2.29),*

тогда от представления линейной модели A_n в форме Вольтерры (соотношения (2.20), (2.21), (2.24), (2.25), (2.27б)) можно перейти к эквивалентному представлению модели A_n в форме Больцмана:

$$\begin{aligned}
\psi = \psi_0 + \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \int_0^t\int_0^t \bar{\psi}_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2)\, dI_\gamma^{(s)}(\tau_1)\, dI_\beta^{(s)}(\tau_2) + \\
+ \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \int_0^t\int_0^t \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2)\, dJ_\gamma^{(s)}(\tau_1,\tau_2),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \mathbf{O}_\beta^{(s)} \int_0^t r_{\gamma\beta}(t-\tau_1) dI_\gamma^{(s)}(\tau) + J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \int_0^t r_{\gamma\gamma}(t-\tau) dI_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)}(\tau), \quad (2.31)$$

$$w^* = -\frac{1}{2} J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2) dI_\gamma^{(s)}(\tau_1) dI_\beta^{(s)}(\tau_2) -$$

$$- J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2) dJ_\gamma^{(s)}(\tau_1, \tau_2). \quad (2.32)$$

Здесь обозначены

$$r_{\gamma\beta}(y) = \bar{\psi}_{\gamma\beta}(y, 0), \qquad r_{\gamma\gamma}(y) = \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y, 0), \quad (2.33а)$$

$$dI_\gamma^{(s)}(\tau_1) = \dot{I}_1^{(s)}(\tau_1) d\tau_1, \qquad dJ_\gamma^{(s)}(\tau_1, \tau_2) = J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_\theta(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_\theta(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.33б)$$

▼ Для доказательства достаточно преобразовать интегралы в (2.30)–(2.32) следующим образом:

$$\int_0^t \Big(\int_0^t \bar{\psi}_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2) dI_\gamma^{(s)}(\tau_1) \Big) dI_\beta^{(s)}(\tau_2) = \int_0^t \big(\bar{\psi}_{\gamma\beta}(0, t-\tau_2) I_\gamma^{(s)}(t) -$$

$$- \int_0^t \frac{\partial \bar{\psi}_{\gamma\beta}}{\partial \tau_1}(t-\tau_1, t-\tau_2) I_\gamma^{(s)}(\tau_1) d\tau_1 \big) dI_\beta^{(s)}(\tau_2) = I_\gamma^{(s)}(t) \big(\bar{\psi}_{\gamma\beta}(0,0) I_\beta^{(s)}(t) -$$

$$- \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau_2} \bar{\psi}_{\gamma\beta}(0, t-\tau_2) I_\beta^{(s)}(\tau_2) d\tau_2 \big) - \int_0^t \frac{\partial \bar{\psi}_{\gamma\beta}}{\partial \tau_1}(t-\tau_1, 0) I_\gamma^{(s)}(\tau_1) d\tau_1 I_\beta^{(s)}(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{\gamma\beta}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}(t-\tau_1, t-\tau_2) I_\gamma^{(s)}(\tau_1) I_\beta^{(s)}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(s)}(t) I_\beta^{(s)}(t) - \int_0^t q_{\gamma\beta}(t-\tau) (I_\gamma^{(s)}(t) I_\beta^{(s)}(\tau) + I_\gamma^{(s)}(\tau) I_\beta^{(s)}(t)) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t p_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2) I_\gamma^{(s)}(\tau_1) I_\beta^{(s)}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.34)$$

Здесь мы учли, что $I_\gamma^{(s)}(0) = 0$, и сделали замену переменных вида

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \bar{\psi}_{\gamma\beta}(0, t-\tau_2) = -\frac{\partial}{\partial (t-\tau_2)} \bar{\psi}_{\gamma\beta}(0, t-\tau_2) = -\frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_{\gamma\beta}(0, y) = q_{\gamma\beta}(y).$$

Аналогично преобразуем интегралы от $\bar{\psi}_{\gamma\gamma}$, учитывая, что $J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_2))$ — линейная функция по каждому тензорному аргументу, поэтому имеют место соотношения:

$$dJ^{(s)}_{\gamma}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial}{\partial \tau_1} J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{\theta}(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \tau_2} J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{\theta}(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2 = \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2,$$

тогда

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^t \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2) dJ^{(s)}_{\gamma}(\tau_1, \tau_2) = l_{\gamma\gamma} J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(t)) - 2\int\limits_0^t q_{\gamma\gamma}(t-$$
$$-\tau) J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau))d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^t p_{\gamma\gamma}(t-\tau) J^{(s)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_1), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.35)$$

Подставляя теперь (2.34) и (2.35) в (2.30), действительно получаем выражения (2.20), (2.21) для ψ.

Представления (2.31) и (2.32) доказываем аналогично (см. также упр. 7.2.1). ▲

Замечание. Если рассмотреть определяющие соотношения в форме Вольтерры (2.20), (2.21), (2.24) и устремить $t \to 0$, то все интегральные слагаемые в этих выражениях, содержащие ядра $q_{\gamma\beta}$, $q_{\gamma\gamma}$, обращаются в нуль, в результате получаем *мгновенно-упругие соотношения*, формально в точности совпадающие с соответствующими соотношениями (3.8.55), (3.8.57), (3.8.58) моделей A_n упругих сред:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi_0 + \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I^{(s)}_{\gamma}(0) I^{(s)}_{\beta}(0) + \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I^{(s)}_{\gamma}(0), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(0) &= J \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta} I^{(s)}_{\gamma}(0) \mathbf{O}^{(s)}_{\beta} + J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для того, чтобы получить эти же соотношения из формы Больцмана (2.30), (2.31), следует представить тензоры деформации в виде: $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(0) h(\tau)$, где $h(\tau)$ — функция Хевисайда. Тогда получим, что $I^{(s)}_{\gamma}(\tau) = I^{(s)}_{\gamma}(0) h(\tau)$ и $J^{(s)}_{\gamma}(\tau_1, \tau_2) = I^{(s)}_{\gamma}(0) h(\tau_1) h(\tau_2)$. После подстановки этих выражений в (2.30) и (2.31), устремляя $t \to 0_+$ и учитывая (2.29), действительно получим соотношения (2.36).

7.2.8. Механически детерминированные линейные модели A_n вязкоупругих сред. Как отмечалось в п. 7.2.5, квадратичные модели A_n, в том числе и линейные модели (2.21), не являются механически детерминированными из-за наличия двухмоментных ядер $p_{\gamma\beta}(t-\tau_1, t-\tau_2)$, $p_{\gamma\gamma}(t-\tau_1, t-\tau_2)$.

Однако их можно сделать механически детерминированными после введения дополнительного допущения о виде двухмоментных ядер, положив, что они зависят от суммы аргументов

$$\bar{\psi}_{\gamma\beta}(y,z) = \bar{\psi}_{\gamma\beta}(y+z), \qquad \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y,z) = \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y+z). \tag{2.37}$$

В этом случае ядра $\bar{\psi}_{\gamma\beta}$ и $\bar{\psi}_{\gamma\gamma}$ становятся одномоментными и с помощью формулы (2.33а) могут быть однозначно выражены через ядра $r_{\gamma\beta}(y)$, $r_{\gamma\gamma}(y)$, входящие в определяющие соотношения (2.31):

$$\bar{\psi}_{\gamma\beta}(y) = r_{\gamma\beta}(y), \qquad \bar{\psi}_{\gamma\gamma}(y) = r_{\gamma\gamma}(y). \tag{2.38}$$

Функционал (2.30) свободной энергии принимает вид

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \int\limits_0^t \int\limits_0^t r_{\gamma\beta}(2t-\tau_1-\tau_2)\, dI_\gamma^{(s)}(\tau_1)\, dI_\beta^{(s)}(\tau_2) + \\ + \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t r_{\gamma\gamma}(2t-\tau_1-\tau_2)\, dJ_\gamma^{(s)}(\tau_1,\tau_2). \tag{2.39}$$

Функция рассеивания w^* (2.32) в этой модели тоже полностью определяется функционалом (2.31) определяющих соотношений:

$$w^* = -\frac{J}{2} \sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} r_{\gamma\beta}(2t-\tau_1-\tau_2)\, dI_\gamma^{(s)}(\tau_1)\, dI_\beta^{(s)}(\tau_2) - \\ - J \sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} r_{\gamma\gamma}(2t-\tau_1-\tau_2)\, dJ_\gamma^{(s)}(\tau_1,\tau_2). \tag{2.40}$$

Ядра $r_{\gamma\beta}(y)$ и $r_{\gamma\gamma}(y)$, согласно (2.38) и (2.29), связаны с ядрами $q_{\gamma\beta}(y)$ и $q_{\gamma\gamma}(y)$ следующими соотношениями:

$$\frac{\partial r_{\gamma\beta}(y)}{\partial y} = -q_{\gamma\beta}(y), \qquad \frac{\partial r_{\gamma\gamma}(y)}{\partial y} = -q_{\gamma\gamma}(y), \quad r_{\gamma\beta}(0) = l_{\gamma\beta}, \quad r_{\gamma\gamma}(0) = l_{\gamma\gamma}. \tag{2.41}$$

Ядра $q_{\gamma\beta}(y)$, $q_{\gamma\gamma}(y)$ называют *ядрами релаксации*, а ядра $r_{\gamma\beta}(y)$, $r_{\gamma\gamma}(y)$ — *функциями релаксации*.

7.2.9. Линейные модели A_n для изотропных вязкоупругих сред. Покажем теперь, как выглядят определяющие соотношения линейных моделей A_n вязкоупругих сред в форме Вольтерры (2.24) и Больцмана (2.31) для различных групп симметрии $\overset{\circ}{G}_s$.

Для линейных моделей A_n вязкоупругих изотропных сред, инварианты (2.22) и тензоры производной $I_{\gamma\mathbf{C}}^{(I)}$ (2.26) имеют вид:

$$r = 3, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2,$$

$$I_1^{(I)}(\tau) = I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)), \quad I_2^{(I)}(\tau) = J_2^{(I)}(\tau_1,\tau_2) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \tag{2.42}$$

$$\mathbf{O}_1^{(I)} = I_{1\mathbf{C}}^{(I)}(t) = \mathbf{E}, \quad I_{2\mathbf{C}}^{(I)}(t) = 2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t).$$

Тогда определяющие соотношения (2.24), (2.30) и (2.31) принимают вид

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t r_1(2t-\tau_1-\tau_2)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)) +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^t r_2(2t-\tau_1-\tau_2)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \quad (2.43)$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(\breve{l}_1 I_1\mathbf{E} + 2\breve{l}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta), \quad (2.44)$$

где обозначены следующие линейные функционалы:

$$\begin{gathered}\breve{l}_1 I_1 \equiv l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) - \int\limits_0^t q_1(t-\tau)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau = \int\limits_0^t r_1(t-\tau)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),\\ \breve{l}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) - \int\limits_0^t q_2(t-\tau)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau = \int\limits_0^t r_2(t-\tau)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),\end{gathered} \quad (2.45)$$

т.е. для изотропной среды имеются две независимые константы l_1, l_2 и два ядра $q_\gamma(t-\tau)$, связанные с ядрами $r_\gamma(y)$ соотношениями (2.41):

$$\frac{\partial r_\gamma(y)}{\partial y} = -q_\gamma(y), \quad r_\gamma(0) = l_\gamma, \quad \gamma = 1, 2. \quad (2.46)$$

Если ввести тензорный функционал четвертого ранга, аналогичный тензору ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ (3.8.61) для упругих сред:

$${}^4\breve{\mathbf{R}} = \mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\breve{l}_1 + 2\Delta\breve{l}_2, \quad (2.47)$$

то определяющие соотношения (2.44) можно представить в следующем символическом операторном виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\ {}^4\breve{\mathbf{R}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \quad (2.48)$$

который аналогичен соотношениям (3.8.62) для полулинейных изотропных упругих сред.

7.2.10. Линейные модели A_n для трансверсально-изотропных вязкоупругих сред. Для линейных моделей A_n вязкоупругих трансверсально-изотропных сред, используя (2.11) и (2.12), имеем

$$r = 5, \quad r_1 = 2, \quad r_2 - r_1 = 2,$$

$$I_1^{(3)}(\tau) = (\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad I_2^{(3)}(\tau) = \widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),$$

$$J_3^{(3)}(\tau_1,\tau_2) = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)),$$

$$I_\alpha^{(3)}(\tau) = J_\alpha^{(3)}(\tau,\tau), \quad \alpha = 3,4, \tag{2.49}$$

$$J_4^{(3)}(\tau_1,\tau_2) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2) - 2J_3^{(3)}(\tau_1,\tau_2) - I_2^{(3)}(\tau_1)I_2^{(3)}(\tau_2),$$

$$I_{3\mathbf{C}}^{(3)}(\tau) = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \qquad I_{4\mathbf{C}}^{(3)}(\tau) = 2\,{}^4\mathbf{O}_3\cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),$$

где ${}^4\mathbf{O}_3$ определяется по формуле (2.12), и соотношения (2.24) принимают следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big((\breve{l}_{11}I_1^{(3)} + \breve{l}_{12}I_2^{(3)})(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) + ((\breve{l}_{22} - 2\breve{l}_{44})I_2^{(3)} + \breve{l}_{12}I_1^{(3)})\widehat{\mathbf{c}}_3^2 +$$
$$+ (\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,\Big(\frac{\breve{l}_{33}}{2} - \breve{l}_{44}\Big)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta + 2\breve{l}_{44}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta\Big), \tag{2.50}$$

где линейные операторы $\breve{l}_{\gamma\beta}I_\beta^{(3)}$ и $\breve{l}_{\gamma\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ определяются выражениями (2.25), которые можно представить в форме Больцмана (2.31):

$$\breve{l}_{\gamma\beta}I_\beta^{(3)} = \int_0^t r_{\gamma\beta}(t-\tau)\,dI_\beta^{(3)}(\tau), \qquad \breve{l}_{\gamma\gamma}J_{\gamma\mathbf{C}}^{(3)} = \int_0^t r_{\gamma\gamma}(t-\tau)\,dJ_{\gamma\mathbf{C}}^{(3)}(\tau). \tag{2.51}$$

Для трансверсально-изотропной среды имеются пять независимых констант l_{11}, l_{22}, l_{12}, l_{33}, l_{44} и пять аналогичных ядер $q_{\gamma\beta}(t-\tau)$ или $r_{\gamma\beta}(t-\tau)$.

Если ввести тензорный функционал, аналогичный тензору модулей упругости (3.8.65):

$${}^4\breve{\mathbf{R}} = \mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\breve{l}_{11} + \widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2\breve{\breve{l}}_{22} + (\breve{l}_{12} - \breve{l}_{11})(\mathbf{E}\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\mathbf{E}) +$$
$$+ (\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,\Big(\frac{\breve{l}_{33}}{2} - \breve{l}_{44}\Big) + 2\Delta\breve{l}_{44}, \tag{2.52}$$
$$\breve{\breve{l}}_{22} = \breve{l}_{22} - 2\breve{l}_{44} - 2\breve{l}_{12} + \breve{l}_{11},$$

то определяющие соотношения (2.50) можно также представить в виде (2.48).

7.2.11. Линейные модели A_n для ортотропных вязкоупругих сред. Для линейных моделей A_n вязкоупругих ортотропных сред инварианты (2.22) и тензоры производной (2.26) с учетом (2.15)–(2.17) имеют следующий вид:

$$r = 6, \qquad r_1 = 3, \qquad r_2 = 6,$$

$$I_\alpha^{(O)}(\tau) = \widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2\cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$J_4^{(O)}(\tau_1,\tau_2) = (\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)),$$

$$J_5^{(O)}(\tau_1,\tau_2) = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)), \tag{2.53}$$

$$J_6^{(O)}(\tau_1,\tau_2) = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)),$$

$$I_\alpha^{(O)}(\tau) = J_\alpha^{(O)}(\tau,\tau),\quad \alpha=4,5,6;\qquad I_{4\mathbf{C}}^{(O)}(\tau)=\frac{1}{2}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),$$

$$I_{5\mathbf{C}}^{(O)}(\tau) = 2(\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),\qquad I_{6\mathbf{C}}^{(O)}(\tau)=\frac{1}{2}(\mathbf{O}_3\otimes\mathbf{O}_3)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),$$

и соотношения (2.24) принимают следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\sum_{\gamma,\beta=1}^{3}\breve{l}_{\gamma\beta}I_\beta^{(O)}\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + J\sum_{\gamma=1}^{3}\mathbf{O}_\gamma(\mathbf{O}_\gamma\cdot\cdot\ \breve{l}_{3+\gamma,3+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta), \tag{2.54}$$

т.е. имеются девять независимых констант l_{11}, l_{22}, l_{33}, l_{12}, l_{13}, l_{23}, l_{44}, l_{55}, l_{66} и девять ядер $q_{\gamma\beta}(t-\tau)$ или $r_{\gamma\beta}(t-\tau)$.

Если ввести тензорный функционал, аналогичный (3.8.68):

$${}^4\breve{\mathbf{R}} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{3}\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_\beta^2\breve{l}_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma=1}^{3}\mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma\breve{l}_{3+\gamma,3+\gamma}, \tag{2.55}$$

то определяющие соотношения (2.54) можно представить в символическом виде (2.48).

7.2.12. Тензор функций релаксации. Используя операторный вид (2.48) определяющих соотношений линейных моделей A_n вязкоупругих сред, можно ввести тензор четвертого ранга, называемый *тензором функций релаксации* ${}^4\mathbf{R}(t)$, по тем же формулам, что был введен тензор модулей упругости ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ для линейных моделей A_n упругих сред (см. п. 3.8.7), если в соответствующих формулах сделать замену упругих констант $l_{\alpha\beta}$ на функции релаксации $r_{\alpha\beta}(t)$.

Для изотропных сред этот тензор вводим следующим образом:

$${}^4\mathbf{R}(t) = r_1(t)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2r_2(t)\Delta, \tag{2.56}$$

для трансверсально-изотропных сред он имеет вид

$$\begin{aligned}{}^4\mathbf{R}(t) = r_{11}(t)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\breve{+}\widetilde{r}_{22}(t)\widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + (r_{12}(t)-r_{11}(t))(\mathbf{E}\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2+\widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\mathbf{E}) +\\ + (\frac{1}{2}r_{33}(t)-r_{44}(t))(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1+\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2) + 2r_{44}(t)\Delta,\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\widetilde{r}_{22}(t) = r_{11}(t)+r_{22}(t)-2r_{12}(t)-2r_{44}(t),$$

а для ортотропных сред:

$${}^4\mathbf{R}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}r_{\alpha\beta}(t)\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_\beta^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}r_{3+\alpha,3+\alpha}(t)\mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma. \tag{2.58}$$

Тогда символические функциональные соотношения (2.48) можно представить следующим образом:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\,{}^4\breve{\mathbf{R}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \tag{2.59}$$

где

$${}^4\breve{\mathbf{R}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \int\limits_0^t {}^4\mathbf{R}(t-\tau) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \tag{2.60}$$

— тензорный линейный функционал.

При мгновенном нагружении $(t \to 0_+)$ эти соотношения совпадают с (2.36) и соответствующими соотношениями (3.8.48а) моделей A_n линейно-упругих сред, так как

$${}^4\mathbf{R}(0) = {}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}. \tag{2.61}$$

Тензор

$${}^4\mathbf{K}(t) = -\frac{d\,{}^4\mathbf{R}}{dt}(t) \tag{2.62}$$

называют *тензором ядер релаксации*. Этот тензор для различных групп $\overset{\circ}{G}_s$ имеет точно такой же вид, как и (2.56)–(2.58), если в этих формулах сделать замену $r_{\alpha\beta}(t) \to q_{\alpha\beta}(t)$.

С учетом (2.61) и (2.62) определяющие соотношения (2.59) можно записать в форме Вольтерры:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J({}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \int\limits_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau), \tag{2.63}$$

которая очевидно эквивалентна форме (2.24). Оператор (2.39) свободной энергии ψ для механически детерминированной модели A_n с помощью тензора функций релаксации можно представить в следующем виде (см. упр. 7.2.3):

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1) \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{R}(2t-\tau_1-\tau_2) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \tag{2.64}$$

а функция диссипации (2.40) в виде

$$w^* = -\frac{J}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1) \cdot\cdot\, \frac{d}{dt}{}^4\mathbf{R}(2t-\tau_1-\tau_2) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2). \tag{2.65}$$

Из формулы (2.65) вытекает следующая важная теорема.

Теорема 7.9. *Для механически детерминированных линейных моделей A_n вязкоупругих сред тензоры ядер релаксации ${}^4\mathbf{K}(t)$ являются*

1) неотрицательно определенными

$$\mathbf{h} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{K}(t) \cdot\cdot\, \mathbf{h} \geqslant 0, \qquad \forall \mathbf{h} \neq 0,\ \forall t \geqslant 0, \tag{2.66}$$

2) симметричными по следующим комбинациям индексов:

$$^4\mathbf{K}(t) = {}^4\mathbf{K}^{(1243)}(t) = {}^4\mathbf{K}^{(2134)}(t) = {}^4\mathbf{K}^{(3412)}(t) \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2.67}$$

(т.е. обладают той же симметрией, что и тензор модулей упругости $^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ *для линейных моделей* A_n *упругих сред).*

▼ Действительно, поскольку функция рассеивания всегда неотрицательна ($w^* \geqslant 0$) и обращается в нуль для вязкоупругих сред, только если $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \equiv 0$, то, выбирая процесс деформирования в виде ступенчатой функции

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) = \mathbf{h}\ h(\tau), \qquad \tau \geqslant 0, \tag{2.68}$$

где $h(\tau)$ — функция Хевисайда, а $\mathbf{h}$ — симметричный ненулевой постоянный тензор, получаем, что

$$d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) = \mathbf{h}\ \delta(\tau)d\tau. \tag{2.68a}$$

Тогда, подставляя (2.68а) в (2.65) и учитывая свойство (1.16) δ-функции, находим с учетом (2.62):

$$w^* = \frac{J}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \mathbf{h}\cdot\cdot\ {}^4\mathbf{K}(2t-\tau_1-\tau_2)\cdot\cdot\ \mathbf{h}\delta(\tau_1)\delta(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \frac{J}{2}\ \mathbf{h}\cdot\cdot\ {}^4\mathbf{K}(2t)\cdot\cdot\ \mathbf{h} \geqslant 0, \quad \forall t > 0, \tag{2.69}$$

т.е. тензор $^4\mathbf{K}(t)$ действительно является неотрицательно определенным.

Из существования квадратичной формы (2.69) и симметрии тензора $\mathbf{h}$ следует симметрия $^4\mathbf{K}(t)$ по первому–второму, третьему–четвертому индексам и по парам индексов, т.е. (2.67) действительно имеет место. ▲

Из (2.66) и (2.62) следует, что тензор функций релаксации $^4\mathbf{R}(t)$ образует монотонно невозрастающую форму:

$$\mathbf{h}\cdot\cdot\ \frac{d\,{}^4\mathbf{R}}{dt}(t)\cdot\cdot\ \mathbf{h} \leqslant 0, \qquad \forall \mathbf{h} \neq 0, \ \ \forall t \geqslant 0, \tag{2.70}$$

а если тензор модулей упругости $\overset{\circ}{\mathbf{M}} = {}^4\mathbf{R}(0)$ обладает симметрией вида (2.67), то из (2.67) следует, что и $^4\mathbf{R}(t)$ обладает такой же симметрией $\forall t \geqslant 0$:

$$^4\mathbf{R}(t) = {}^4\mathbf{R}^{(1243)}(t) = {}^4\mathbf{R}^{(2134)}(t) = {}^4\mathbf{R}^{(3412)}(t) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.71}$$

7.2.13. Спектральное представление линейных моделей A_n вязкоупругих сред. Применим теперь теорию спектральных разложений симметричных тензоров 2-го ранга, которая была предложена Б.Е.Победрей [33] и получила дальнейшее развитие в [12]. В соответствии с этой теорией для любых симметричных тензоров, в частности для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(\tau)$, можно ввести их *спектральные разложения* относительно выбранной группы симметрии $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{\bar{n}} \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \sum_{\alpha=1}^{\bar{n}} \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{C})}, \quad 1 < \bar{n} \leqslant 6. \tag{2.72}$$

Здесь $\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}$ и $\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{C})}$, $\alpha = 1, \dots \bar{n}$, — *ортопроекторы* тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta$ (их число обозначено как $\bar{n}$) — симметричные тензоры 2-го ранга, обладающие следующими свойствами: а) взаимной ортогональностью, б) линейностью, в) индифферентностью относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$:

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})} \cdot\cdot\, \mathbf{P}_\beta^{(\mathbf{T})} = 0, \quad \text{если} \;\; \alpha \neq \beta; \tag{2.73}$$

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})} = \mathbf{P}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = {}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \alpha = 1 \dots \bar{n}; \tag{2.74}$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \overset{\circ}{G}_s. \tag{2.75}$$

Здесь ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$ — индифферентные относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ тензоры 4-го ранга, не зависящие от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и составленные только из образующих тензоров групп (см. п. 3.8.3). Среди ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$, $\alpha = 1 \dots \bar{n}$ имеется m штук *приводимых* тензоров, т.е. полученных тензорным произведением симметричного индифферентного относительно той же группы $\overset{\circ}{G}_s$ тензора второго ранга $\mathbf{a}_\alpha$:

$${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha = \frac{1}{a_\alpha^2}\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha, \quad a_\alpha^2 = \mathbf{a}_\alpha \cdot\cdot \mathbf{a}_\alpha, \;\; \alpha = 1 \dots m < \bar{n}. \tag{2.76}$$

Выражения для ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$ и $\mathbf{a}_\alpha$ имеют следующий вид [12]:
для группы изотропии $\overset{\circ}{G}_s = I$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{E}, \;\; {}^4\mathbf{\Gamma}_{(2)} = \mathbf{\Delta} - \frac{1}{3}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}, \quad m = 1, \;\; \bar{n} = 2; \tag{2.77}$$

для группы трансверсальной изотропии $\overset{\circ}{G}_s = T_3$

$$\mathbf{a}_1 = \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \;\; \mathbf{a}_2 = \mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \quad m = 2, \;\; \bar{n} = 4;$$

$${}^4\mathbf{\Gamma}_3 = \mathbf{\Delta} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) \otimes (\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) - \widehat{\mathbf{c}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{c}}_3^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2), \tag{2.78}$$

$${}^4\mathbf{\Gamma}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2);$$

для группы ортотропии $\overset{\circ}{G}_s = O$

$$\mathbf{a}_\alpha = \widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3; \qquad {}^4\mathbf{\Gamma}_{\alpha+3} = \frac{1}{2}\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha, \quad m = 3, \;\; \bar{n} = 6. \tag{2.79}$$

Введем с помощью ортопроекторов $\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}$ *спектральные инварианты* тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, обозначим их как $Y_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})$. Для тех $\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}$, у которых ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$ является приводимым, инвариант Y_α вводится как

$$Y_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = \frac{1}{a_\alpha}\mathbf{a}_{(\alpha)} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \quad \alpha = 1 \ldots m, \tag{2.80а}$$

и называется *спектральным линейным инвариантом*, а для остальных $\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}$, $\alpha = m+1 \ldots \bar{n}$ инварианты вводятся формулой

$$Y_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = (\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})} \cdot\cdot \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})})^{1/2} \tag{2.80б}$$

и называются *спектральными квадратичными инвариантами*. Из (2.74) и (2.76) следует, что

$$\mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})} = \frac{1}{a_\alpha} Y_\alpha \mathbf{a}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1 \ldots m. \tag{2.81}$$

Заметим, что для линейных инвариантов (2.80а) также справедлива формула (2.80б).

С учетом (2.81), спектральное разложение симметричного тензора второго ранга $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (2.72) может быть представлено в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\mathbf{a}_\alpha}{a_\alpha} Y_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})}. \tag{2.82}$$

Для всякого индифферентного относительно группы $\overset{\circ}{G}_s$ тензора 4-го ранга, в том числе для тензора функций релаксации ${}^4\mathbf{R}(t)$, можно также ввести спектральное представление:

$${}^4\mathbf{R}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} R_{\alpha\beta}(t) \frac{\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta}{a_\alpha a_\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}} R_{\alpha\alpha}(t) {}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha, \tag{2.83}$$

где $R_{\alpha\beta}(t)$ и $R_{\alpha\alpha}(t)$ — спектральные функции релаксации, однозначно выражаемые через $r_{\alpha\beta}(t)$ и $r_{\alpha\alpha}(t)$ (см. упр. 7.2.6).

С помощью спектральных разложений (2.72) и (2.83) определяющие соотношения (2.59) можно представить в виде соотношений между спектральными линейными инвариантами и ортопроекторами (см. упр. 7.2.9):

$$Y_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = J \sum_{\beta=1}^{m} \breve{R}_{\alpha\beta} Y_\beta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}), \;\; \alpha = 1, \ldots m; \quad \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{T})} = J \breve{R}_{\alpha\alpha} \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{C})}, \;\; \alpha = m+1, \ldots \bar{n}, \tag{2.84}$$

где

$$\breve{R}_{\alpha\beta} \mathbf{P}_\beta^{(C)} = \int\limits_0^t R_{\alpha\beta}(t-\tau) d\mathbf{P}_\beta^{(C)}(\tau). \tag{2.85}$$

Соотношения (2.84) называют *спектральным представлением линейных моделей A_n вязкоупругих сред*. Если ввести спектральное разложение (2.72) и для тензора $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^{\bar{n}} \mathbf{P}_\alpha^{(\mathbf{h})},$$

то неравенство (2.70) с учетом (2.83) примет вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{d}{dt} R_{\alpha\beta}(t) Y_\alpha(\mathbf{h}) Y_\beta(\mathbf{h}) + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}} \frac{d}{dt} R_{\alpha\alpha}(t) Y_\alpha^2(\mathbf{h}) \leqslant 0. \tag{2.86}$$

Можно положить значения спектральных линейных инвариантов $Y_\alpha(\mathbf{h})$ равными нулю, тогда, в силу независимости спектральных инвариантов между собой, из (2.86) получаем условие монотонного невозрастания спектральных функций релаксации:

$$\frac{dR_{\alpha\alpha}}{dt}(t) \leqslant 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, \bar{n}. \tag{2.87}$$

С помощью спектральных функций релаксации формулируют частные случаи линейных моделей A_n вязкоупругих сред. Так, для *простейшей линейной* модели A_n изотропных вязкоупругих сред полагают одно из двух спектральных ядер релаксации постоянным:

$$R_{11}(t) = R_{11}(0) = l_1 + \frac{2}{3} l_2 = \text{const}, \qquad \frac{\partial R_{11}}{\partial t} = 0. \tag{2.88}$$

С помощью результатов упр. 7.2.6 и формул (2.46) это условие можно записать в виде связи ядер $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$q_1(t) = -\frac{2}{3} q_2(t), \qquad \frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = -q_\alpha(t). \tag{2.89}$$

Определяющие соотношения (2.84) в этом случае принимают вид

$$\begin{cases} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = J R_{11}(0) I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta), \\ \operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J \int_0^t R_{22}(t-\tau) \operatorname{dev} \dfrac{\partial}{\partial \tau} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) d\tau, \end{cases} \tag{2.90}$$

где обозначены ортопроекторы тензоров относительно полной ортогональной группы I, называемые *девиаторами*:

$$\operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) \mathbf{E}, \qquad \operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \mathbf{E}. \tag{2.91}$$

Соотношения (2.90) и (2.91) можно записать также в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \frac{J}{3} R_{11}(0) I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) \mathbf{E} + J \int\limits_0^t R_{22}(t-\tau) \operatorname{dev} \frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{2.92}$$

7.2.14. Экспоненциальные функции релаксации и дифференциальная форма определяющих соотношений. При аналитическом и численном решении задач удобно иметь аналитический вид спектральных функций релаксации $R_{\alpha\beta}(t)$. В предыдущем разделе было установлено, что следствием неравенства диссипации $w^* \geqslant 0$ является свойство монотонного невозрастания спектральных функций $R_{\alpha\alpha}(t)$. Функции с таким свойством можно аппроксимировать суммой экспонент:

$$R_{\alpha\beta}(t) = R^{\infty}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)}_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{t}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\right), \tag{2.93}$$

где $B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ и $\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ — константы, называемые *спектрами значений релаксации* и *времен релаксации*, а $R^{\infty}_{\alpha\beta}$ — предельное значение функций релаксации:

$$\lim_{t\to\infty} R_{\alpha\beta}(t) = R^{\infty}_{\alpha\beta}, \tag{2.94}$$

которое может быть и равным нулю: $R^{\infty}_{\alpha\beta} = 0$.

Константы $R^{\infty}_{\alpha\beta}$ и $B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию нормировки при $t = 0$:

$$R^{\infty}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta}, \tag{2.95}$$

где $\overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(0)$ — спектральные (двухиндексные) модули упругости при мгновенном нагружении.

Существуют и другие способы аналитической аппроксимации функций релаксации, однако экспоненциальные функции обладают рядом преимуществ: 1) выбирая достаточно большое число N экспонент в (2.93), можно аппроксимировать практически любую функцию $R_{\alpha\beta}(t)$, 2) определяющие соотношения (2.84) и (2.85) с экспоненциальными ядрами допускают обращение (см. об этом далее в п. 7.2.15), причем ядра обратных функционалов тоже оказываются экспоненциальными, 3) ядра (2.93) позволяют представить определяющие соотношения (2.84), (2.85) или (2.59), (2.60) в виде дифференциальных соотношений.

В самом деле, осуществляя цепочку подстановок (2.93)→(2.83)→(2.62), найдем выражение для тензора ядер релаксации:

$${}^4\mathbf{K}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} K_{\alpha\beta}(t) \frac{\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta}{a_\alpha a_\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}} K_{\alpha\alpha}(t)\, {}^4\boldsymbol{\Gamma}_\alpha, \tag{2.96}$$

$$K_{\alpha\beta}(t) = -\frac{\partial R_{\alpha\beta}(t)}{\partial t} = \sum_{\gamma=1}^{N} \frac{B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{t}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\right). \tag{2.97}$$

Введем теперь группу новых тензоров второго ранга:

$$\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\right) \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)\, d\tau}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}, \quad \gamma = 1, \ldots N. \tag{2.98}$$

Дифференцируя $\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ по t и исключая интеграл, получим, что $\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{dt} + \frac{\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{\tau_{\alpha\beta}^{(\gamma)}} = \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(t)}{\tau_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}, \quad \gamma = 1, \ldots N. \tag{2.99}$$

Подставляя (2.96) в (2.63) и учитывая выражения (2.97), (2.98), получаем следующее представление определяющих соотношений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J({}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta} - \sum_{\gamma=1}^{N} \mathbf{W}^{(\gamma)}), \tag{2.100}$$

где обозначен *спектр вязких напряжений* $\mathbf{W}^{(\gamma)}$ — тензоры второго ранга, имеющие следующий вид:

$$\mathbf{W}^{(\gamma)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \cdot\cdot \frac{\mathbf{a}_{\alpha} \otimes \mathbf{a}_{\beta}}{a_{\alpha} a_{\beta}} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}} B_{\alpha\alpha}^{(\gamma)} \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^{(\gamma)} \cdot\cdot {}^4\mathbf{\Gamma}_{\alpha}. \tag{2.101}$$

Таким образом, действительно с помощью экспоненциальных ядер (2.93) определяющие соотношения механически детерминированной модели A_n вязкоупругих сред (2.63) можно представить в *дифференциальной форме* (2.99)–(2.101). В этой форме платой за переход от интегральных соотношений к дифференциальным является появление дополнительных неизвестных — $\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$, для которых формулируются уравнения (2.99).

При численных решениях задач дифференциальная форма (2.99)–(2.101), как правило, более удобна, чем интегральная форма (2.63).

Подставляя выражения (2.96), (2.62) в (2.65), получим для функции диссипации w^* следующую формулу:

$$\begin{aligned} w^* = \frac{J}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \int_0^t \int_0^t K_{\alpha\beta}(2t - \tau_1 - \tau_2) dY_{\alpha}^{(C)}(\tau_1) dY_{\beta}^{(C)}(\tau_2) + \\ + \frac{J}{2} \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}} \int_0^t \int_0^t K_{\alpha\alpha}(2t - \tau_1 - \tau_2) d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_1) \cdot\cdot {}^4\mathbf{\Gamma}_{\alpha} \cdot\cdot d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau_2). \end{aligned} \tag{2.102}$$

Здесь обозначены линейные спектральные инварианты тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau)$ (см. (2.80a)):

$$Y_{\alpha}^{(C)}(\tau) = Y_{\alpha}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau)) = \frac{1}{a_{\alpha}} \mathbf{a}_{\alpha} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{\theta}(\tau), \quad \alpha = 1, \ldots m. \tag{2.103}$$

Если теперь в формулу (2.102) подставить экспоненциальные ядра (2.97) и преобразовать двойные интегралы следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^t \exp\left(-\frac{2t-\tau_1-\tau_2}{\tau_{\alpha\beta}}\right)dY_\alpha^{(C)}(\tau_1)dY_\beta^{(C)}(\tau_2) =$$

$$= \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau_1}{\tau_{\alpha\beta}}\right)dY_\alpha^{(C)}(\tau_1)\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau_2}{\tau_{\alpha\beta}}\right)dY_\beta^{(C)}(\tau_2) =$$

$$= \Big(Y_\alpha^{(C)}(t) - \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau_1}{\tau_{\alpha\beta}}\right)dY_\alpha^{(C)}(\tau_1)d\tau_1\Big)\Big(Y_\beta^{(C)}(t) -$$

$$- \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau_2}{\tau_{\alpha\beta}}\right)dY_\beta^{(C)}(\tau_2)d\tau_2\Big), \quad (2.104)$$

то с учетом обозначений (2.98) формулу (2.102) можно представить в виде

$$w^* = \frac{J}{2}\sum_{\gamma=1}^{N}\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{B_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{a_\alpha a_\beta}\big(\mathbf{a}_\alpha\cdot\cdot\frac{d\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{dt}\big)\big(\mathbf{a}_\beta\cdot\cdot\frac{d\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{dt}\big)+$$

$$+\sum_{\alpha=m+1}^{\bar n} B_{\alpha\alpha}^{(\gamma)}\frac{d\mathbf{W}_{\alpha\alpha}^{(\gamma)}}{dt}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{\Gamma}\cdot\cdot\frac{d\mathbf{W}_{\alpha\alpha}^{(\gamma)}}{dt}\Big). \quad (2.105)$$

7.2.15. Обращение определяющих соотношений для линейных моделей вязкоупругих сред. В теории вязкоупругости часто используют обратные к (2.59) или (2.63) определяющие соотношения. Для этого соотношение (2.63) рассматривают как линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода относительно процесса $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Ядро этого уравнения $\mathbf{K}(t)$ полагают непрерывно-дифференцируемым, удовлетворяющим условиям (2.66), (2.67). Из теории интегральных уравнений известно (см. [23]), что уравнение (2.63) с таким ядром имеет решение всегда, и это решение формально записывают в такой же форме, как и исходное уравнение:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{J} + \int_0^t {}^4\mathbf{N}(t-\tau)\cdot\cdot\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{J}(\tau)d\tau, \quad (2.106)$$

где ${}^4\mathbf{\Pi}$ — тензор упругих податливостей, являющийся обратным к тензору модулей упругости ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$:

$${}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot\,{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} = \mathbf{\Delta}, \quad (2.107)$$

а ${}^4\mathbf{N}(t)$ — *тензор ядер ползучести*, имеющий такой же вид, как и тензор ${}^4\mathbf{K}(t)$ (2.96):

$${}^4\mathbf{N}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} N_{\alpha\beta}(t)\frac{\mathbf{a}_\alpha\otimes\mathbf{a}_\beta}{a_\alpha a_\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar n} N_{\alpha\alpha}\,{}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha. \quad (2.108)$$

Функции $N_{\alpha\beta}(t)$, $N_{\alpha\alpha}(t)$ называют *спектральными ядрами ползучести.*

Для того, чтобы найти связь ядер ${}^4\mathbf{N}(t)$ и ${}^4\mathbf{K}(t)$, следует подставить (2.63) в (2.106), в результате мы должны получить тождество

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot\int_0^t {}^4\mathbf{K}(t-\tau)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t {}^4\mathbf{N}(t-\tau)\cdot\cdot{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau - \int_0^t {}^4\mathbf{N}(t-y)\cdot\cdot\int_0^y {}^4\mathbf{K}(y-\tau)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau dy. \tag{2.109}$$

Изменяя в двойном интеграле порядок интегрирования:

$$(0 \leqslant \tau \leqslant y)\times(0\leqslant y\leqslant t) \to (\tau\leqslant y\leqslant t)\times(0\leqslant\tau\leqslant t)$$

(см. рис. 7.3, где область интегрирования — заштрихованный треугольник), получаем из (2.109):

$$\int_0^t \{{}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(t-\tau) - {}^4\mathbf{N}(t-\tau)\cdot\cdot{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} - \int_\tau^t {}^4\mathbf{N}(t-y)\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(y-\tau)dy\}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau = 0. \tag{2.110}$$

Это соотношение будет выполнено при любых $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)$ тогда и только тогда, когда выражение в фигурных скобках обращается в нуль. Делая замену переменных $x = t-\tau$ в этой скобке, получаем

$$ {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(x) = {}^4\mathbf{N}(x)\cdot\cdot{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} + \int_{t-x}^t {}^4\mathbf{\Gamma}(t-y)\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(y+x-t)dy,$$
$$0\leqslant x\leqslant t.$$

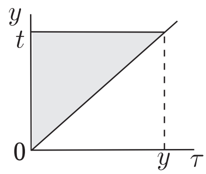

Рис. 7.3. Область интегрирования в двойном интеграле

Осуществляя еще раз замену переменных в интеграле $u = y+x-t$, где $(t-x\leqslant y\leqslant t)$ и $(0\leqslant u\leqslant x)$, получаем

$$ {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(x) = {}^4\mathbf{N}(x)\cdot\cdot{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} + \int_0^x {}^4\mathbf{N}(x-u)\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(u)du, \quad 0\leqslant u\leqslant x,$$

или, снова возвращаясь к стандартным обозначениям аргументов $x\to t$, $u\to\tau$:

$$ {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(t) = {}^4\mathbf{N}(t)\cdot\cdot{}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}} + \int_0^t {}^4\mathbf{N}(t-\tau)\cdot\cdot{}^4\mathbf{K}(\tau)d\tau, \tag{2.111}$$

получаем интегральное соотношение между тензором ядер релаксации ${}^4\mathbf{K}(t)$ и тензором ядер ползучести ${}^4\mathbf{N}(t)$. Если известно ядро ${}^4\mathbf{K}(t)$, то соотношение (2.111) представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода для вычисления ядра ${}^4\mathbf{N}(t)$, и наоборот.

Подставляя в (2.111) спектральные разложения (2.96), (2.108), тензоров ${}^4\mathbf{K}(t)$, ${}^4\mathbf{N}(t)$ и аналогичные разложения для тензоров ${}^4\mathbf{\Pi}$ и ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$, вследствие взаимной ортогональности тензоров ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$, $\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta$ (см. [12]), получаем

$$\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\Pi_{\alpha\beta}K_{\beta\varepsilon}(t) - N_{\alpha\beta}(t)C_{\beta\varepsilon} - \int\limits_0^t N_{\alpha\beta}(t-\tau)K_{\beta\varepsilon}(\tau)d\tau\Big) = 0, \quad \alpha,\varepsilon = 1,\ldots m, \tag{2.112а}$$

$$\Pi_{\alpha\alpha}K_{\alpha\alpha}(t) - N_{\alpha\alpha}(t)C_{\alpha\alpha} - \int\limits_0^t N_{\alpha\alpha}(t-\tau)K_{\alpha\alpha}(t)d\tau = 0, \quad \alpha = m+1,\ldots \bar{n}, \tag{2.112б}$$

— систему скалярных интегральных уравнений для нахождения ядер $N_{\alpha\beta}(t)$ через ядра $K_{\alpha\beta}(t)$ и наоборот.

Подобно тензору функций релаксации ${}^4\mathbf{R}(t)$, вводим тензор функций ползучести ${}^4\mathbf{\Pi}(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d}{dt}{}^4\mathbf{\Pi}(t) = {}^4\mathbf{N}(t), \qquad {}^4\mathbf{\Pi}(0) = {}^4\mathbf{\Pi}, \tag{2.113}$$

тогда обратное определяющее соотношение (2.106) можно представить в форме Больцмана:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = {}^4\breve{\mathbf{\Pi}}\cdot\cdot\,\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{J} \equiv \int\limits_0^t {}^4\mathbf{\Pi}(t-\tau)\cdot\cdot\,\frac{d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{J}(\tau). \tag{2.114}$$

Тензоры ядер и функций ползучести обладают теми же свойствами симметрии (2.67), (2.71), что и тензоры ${}^4\mathbf{K}$ и ${}^4\mathbf{R}$ (см. упр. 7.2.11):

$${}^4\mathbf{\Pi}(t) = {}^4\mathbf{\Pi}^{(1243)}(t) = {}^4\mathbf{\Pi}^{(2134)}(t) = {}^4\mathbf{\Pi}^{(3412)}(t), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.115}$$

Для тензора функций ползучести ${}^4\mathbf{\Pi}(t)$, как и для ${}^4\mathbf{R}(t)$, можно ввести спектральное представление по формуле (2.83):

$${}^4\mathbf{\Pi}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\Pi_{\alpha\beta}(t)\frac{\mathbf{a}_\alpha\otimes\mathbf{a}_\beta}{a_\alpha a_\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}}\Pi_{\alpha\alpha}(t){}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha, \tag{2.116}$$

где $\Pi_{\alpha\alpha}(t)$ и $\Pi_{\alpha\beta}(t)$ — спектральные функции ползучести.

Теорема 7.10. *Если спектральные ядра релаксации $K_{\alpha\beta}(t)$ являются экспоненциальными, т.е. имеют вид (2.97), то и спектральные ядра ползучести $N_{\alpha\beta}(t)$ являются экспоненциальными:*

$$N_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\gamma=1}^{N}\frac{A_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{t_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}\,\exp\Big(-\frac{t}{t_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}\Big), \tag{2.117}$$

и наоборот.

Константы $A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$, $t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ называют *спектрами значений ползучести* и *времен ползучести*, они, вообще говоря, не совпадают с $B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ и $\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$, однако число N в (2.116) и (2.97) — одно и то же.

▼ Покажем, что если ядра $K_{\alpha\beta}(t)$ имеют вид (2.97), то решением интегрального уравнения (2.112) являются ядра (2.117). Подставляя (2.97) и (2.117) в (2.112), получаем

$$\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{\gamma=1}^{N}\Big(\Pi_{\alpha\beta}\frac{B^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}}{\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}}\ \exp\,(-\frac{t}{\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}})-C_{\beta\varepsilon}\frac{A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\ \exp\,(-\frac{t}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}})\Big)-$$
$$-\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{\gamma'=1}^{N}\Big(\frac{A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}B^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}}\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{t-\tau}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}})\exp\,(-\frac{\tau}{\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}})d\tau\Big)\Big)=0. \quad (2.118)$$

Вычисляя интеграл в этом уравнении:

$$\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{t-\tau}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}-\frac{\tau}{\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}})d\tau=\frac{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}-\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}}\Big(\exp\,(-\frac{t}{\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}})-\exp\,(-\frac{t}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}})\Big) \quad (2.119)$$

и приравнивая коэффициенты в (2.118) при одинаковых экспонентах, получаем систему

$$\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\frac{\Pi_{\alpha\beta}}{\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}}-\sum_{\gamma'=1}^{N}\frac{A^{(\gamma')}_{\alpha\beta}}{\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}-t^{(\gamma')}_{\alpha\beta}}\Big)B^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}=0,\qquad \sum_{\beta=1}^{m}\Big(\frac{C_{\beta\varepsilon}}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}-\sum_{\gamma'=1}^{N}\frac{B^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}}{\tau^{(\gamma')}_{\beta\varepsilon}-t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\Big)A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}=0 \quad (2.120)$$

для вычисления констант $A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ и $t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ через константы $B^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$ и $\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$ (константы $\Pi_{\alpha\beta}$ всегда могут быть вычислены через $C_{\alpha\beta}$ и считаются известными).

При тех значениях $B^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$, $\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$, $\Pi_{\alpha\beta}$, при которых существует решение системы (2.120), существует и экспоненциальное представление ядер ползучести (2.117). ▲

Формулы (2.120) дают способ вычисления констант $A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ и $t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ через $B^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$, $\tau^{(\gamma)}_{\beta\varepsilon}$ и наоборот. Из (2.112б) получаем аналогичные несколько более простые формулы для вычисления констант $A^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}$ и $t^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}$, $\alpha=m+1,\dots n$:

$$\frac{\Pi_{\alpha\alpha}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}}=\sum_{\gamma'=1}^{N}\frac{A^{(\gamma')}_{\alpha\alpha}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}-t^{(\gamma')}_{\alpha\alpha}},\qquad \frac{C_{\alpha\alpha}}{t^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}}=\sum_{\gamma'=1}^{N}\frac{B^{(\gamma')}_{\alpha\alpha}}{\tau^{(\gamma')}_{\alpha\alpha}-t^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}}. \quad (2.121)$$

Подставляя (2.108) и (2.117) в (2.113), находим выражение для спектральных функций ползучести в случае экспоненциальных ядер:

$$\Pi_{\alpha\beta}(t)=\Pi_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma=1}^{N}A^{(\gamma)}_{\alpha\beta}\Big(1-\exp\,(-\frac{t}{t^{(\gamma)}_{\alpha\beta}})\Big), \quad (2.122)$$

причем

$$\lim_{t\to+\infty}\Pi_{\alpha\beta}(t)=\Pi_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma=1}^{N}A_{\alpha\beta}^{(\gamma)}\equiv\Pi_{\alpha\beta}^{\infty}. \tag{2.123}$$

Упражнения к 7.2

Упражнение 7.2.1. Используя правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом (см. формулы (1.15б), (1.25)), путем непосредственного вычисления производной по t от функционала (2.30) показать, что из ОТТ (3.3.15) действительно следуют формулы (2.31) и (2.32) для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и w^*.

Упражнение 7.2.2. Используя определение (1.70), показать, что для линейных моделей A_n термореологически простых вязкоупругих сред соотношения (2.30)–(2.32) имеют следующий вид:

$$\psi=\psi_0(\theta)+\frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\bar\psi_{\alpha\beta}(t'-\tau_1',t'-\tau_2')dI_\alpha^{(s)}(\tau_1)dI_\beta^{(s)}(\tau_2)+$$

$$+\frac{1}{\overset{\circ}{\rho}}\sum_{\alpha=r_1+1}^{r_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\bar\psi_{\alpha\alpha}(t'-\tau_1',t'-\tau_2')dJ_\alpha^{(s)}(\tau_1,\tau_2),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}=J\sum_{\alpha,\beta=1}^{r_1}\mathbf{O}_\beta^{(s)}\int\limits_0^t r_{\alpha\beta}(t'-\tau_1')dI_\alpha^{(s)}(\tau_1)+J\sum_{\alpha=r_1+1}^{r_2}\int\limits_0^t r_{\alpha\alpha}(t'-\tau_1')dI_{\alpha\mathbf{C}}^{(s)}(\tau_1),$$

$$w^*=-\frac{J}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\bar\psi_{\alpha\beta}(t'-\tau_1',t'-\tau_2')dI_\alpha^{(s)}(\tau_1)dI_\beta^{(s)}(\tau_2)-$$

$$-J\sum_{\alpha=r_1+1}^{r_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\bar\psi_{\alpha\alpha}(t'-\tau_1',t'-\tau_2')dJ_\alpha^{(s)}(\tau_1,\tau_2),$$

где t', τ_1' и τ_2' определяются по (1.71).

Учитывая, что

$$dI_\alpha(\tau)=\frac{d}{dt}I_\alpha(\tau)d\tau=\frac{d}{d\tau'}I_\alpha(\tau')d\tau'=dI_\alpha(\tau'),$$

показать, что эти соотношения можно представить как функции приведенного времени, в частности

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}=J\sum_{\alpha,\beta=1}^{r_1}\mathbf{O}_\beta^{(s)}\int\limits_0^{t'} r_{\alpha\beta}(t'-\tau_1')dI_\alpha^{(s)}(\tau_1')+J\sum_{\alpha=r_1+1}^{r_2}\int\limits_0^{t'} r_{\alpha\alpha}(t'-\tau_1')dI_{\alpha\mathbf{C}}^{(s)}(\tau_1').$$

Упражнение 7.2.3. Используя представления (2.56)–(2.58) для тензора функций релаксации ${}^4\mathbf{R}(t)$, показать, что представления (2.64) и (2.39) для ψ эквивалентны.

Упражнение 7.2.4. Подставляя в выражение (2.65) для w^* формулы (2.56)–(2.58) для тензора функций релаксации ${}^4\mathbf{R}(t)$, показать, что формулы (2.65) в точности совпадают с (2.40).

Упражнение 7.2.5. Показать, что из условия (2.70) следует монотонное невозрастание следующих функций релаксации:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{R}^{\alpha\alpha\alpha\alpha}(t) \leqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{R}^{\alpha\beta\alpha\beta}(t) \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta,$$

где $\widehat{R}^{ijkl}(t)$ — компоненты тензора ${}^4\mathbf{R}(t)$ в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_i$.

Упражнение 7.2.6. Используя представления (2.56)–(2.58) для тензора функций релаксации ${}^4\mathbf{R}(t)$ и его спектральное представление (2.83), а также учитывая вид тензоров $\mathbf{a}_\alpha$ и ${}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha$ (2.76)–(2.79), показать, что функции $r_{\alpha\beta}(t)$ и $R_{\alpha\beta}(t)$ связаны следующими соотношениями для *изотропных сред*:

$$R_{11}(t) = r_1(t) + (2/3)r_2(t), \qquad R_{22}(t) = 2r_2(t),$$

для *трансверсально-изотропных сред*:

$$R_{11}(t) = \widetilde{R}^{3333}(t) = \widetilde{r}_{22}(t), \qquad R_{22}(t) + R_{33}(t) = 2\widehat{R}^{1111}(t) = r_{11}(t) + 2r_{44}(t).$$

Упражнение 7.2.7. Показать, что для механически-детерминированных линейных моделей A_n термореологически простых сред определяющие соотношения, представленные в упр. 7.2.2, можно записать в форме (2.60), (2.64), (2.65):

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0(\theta) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\ {}^4\mathbf{R}(2t' - \tau_1' - \tau_2')\cdot\cdot\ d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\int\limits_0^t {}^4\mathbf{R}(t' - \tau')\cdot\cdot\ d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau),$$

$$w^* = -\frac{Ja_\theta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\ \frac{\partial}{\partial t'}{}^4\mathbf{R}(2t' - \tau_1' - \tau_2')\cdot\cdot\ d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2).$$

Показать, что определяющее соотношение в форме (2.63) для этой модели имеет вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J({}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) - \int\limits_0^t {}^4\mathbf{K}(t' - \tau')\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)a_\theta(\tau)d\tau), \quad {}^4\mathbf{K}(t') = -d\ {}^4\mathbf{R}(t)/dt'.$$

Упражнение 7.2.8. Показать, что для линейных моделей A_n термореологически простых сред с экспоненциальными ядрами определяющие соотношения из упр. 7.2.7 можно представить в форме (2.99)–(2.101), (2.105):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J({}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \sum_{\gamma=1}^N \mathbf{W}), \qquad \frac{d\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{dt} + \frac{a_\theta(t)}{\tau_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}(\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(t) - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) = 0,$$

$$w^* = \frac{Ja_\theta}{2}\sum_{\gamma=1}^{N}\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{B_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}{\tau_{\alpha\beta}^{(\gamma)}}\frac{\mathbf{a}_\alpha}{a_\alpha}\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)})\otimes(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)})\cdot\cdot\frac{\mathbf{a}_\beta}{a_\beta}+$$
$$+\sum_{\alpha=m+1}^{\bar{n}}\frac{B_{\alpha\alpha}^{(\gamma)}}{\tau_{\alpha\alpha}^{(\gamma)}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^{(\gamma)})\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{\Gamma}_\alpha\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^{(\gamma)})\Big).$$

Упражнение 7.2.9. Доказать, что из спектральных представлений (2.72) и (2.83) следует спектральное представление (2.74) для определяющих соотношений линейных моделей A_n (2.59).

Упражнение 7.2.10. Показать, что при гидростатическом сжатии, когда тензор напряжений Коши и градиент деформации шаровые:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = k\mathbf{E}, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(k^{n-\mathrm{III}}-1)\mathbf{E}, \quad \operatorname{dev}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = 0,$$

вязкоупругая среда, согласно простейшей модели (2.90), ведет себя как чисто упругая:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \frac{J}{3}R_{11}(0)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})\mathbf{E},$$

т.е. вязкоупругих деформаций при гидростатическом сжатии в такой модели нет. Многие твердые материалы вплоть до высоких давлений p действительно обладают такими свойствами, поэтому простейшую модель (2.90) достаточно широко применяют в механике.

Упражнение 7.2.11. Показать, что тензоры ядер и функций ползучести ${}^4\mathbf{N}(t)$ и ${}^4\mathbf{\Pi}(t)$ обладают теми же свойствами симметрии (2.67), (2.71), что и тензоры ядер и функций релаксации ${}^4\mathbf{K}(t)$ и ${}^4\mathbf{R}(t)$, и наоборот.

7.3. Модели несжимаемых вязкоупругих твердых сред и вязкоупругих жидкостей

7.3.1. Модели A_n несжимаемых вязкоупругих сред. Для несжимаемых вязкоупругих сред как всегда дополнительно существует условие несжимаемости, которое можно записать в любой из форм (3.9.1)–(3.9.6), а основное термодинамическое тождество принимает вид (3.9.9) для моделей A_n, аналогичен его вид и для моделей B_n. Подставляя функционал (1.35) в (3.9.9), с использованием правила (1.27), получаем определяющие соотношения для несжимаемых вязкоупругих сред:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\dfrac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t)), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta(t), \\ w^* = -\rho\delta\psi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку для несжимаемых сред число r независимых инвариантов $I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(t))$ уменьшается на единицу по сравнению со сжимаемыми средами, то в каждом представлении (1.53), (1.61), (1.73), (2.1), (2.20) функционала свободной энергии у функции $\varphi_0(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}),\theta)$ индекс γ пробегает значение $r-1$.

Так же согласованным образом уменьшается и число z совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)}$, участвующих в качестве аргументов ядер φ_m.

7.3.2. Главные модели A_n несжимаемых изотропных вязкоупругих сред. Для *главных моделей A_n несжимаемых изотропных вязкоупругих сред* функционал ψ (2.1) зависит только от пяти совместных инвариантов

$$J_\alpha^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)), \quad J_{3+\alpha}^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)), \quad \alpha = 1, 2; \quad J_7^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t), \tag{3.2}$$

а определяющие соотношения (3.1) принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \breve{\varphi}_1\mathbf{E} + \breve{\varphi}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered}
\breve{\varphi}_1\mathbf{E} \equiv \varphi_{01} + \varphi_{02}I_1(t) - \int_0^t(\varphi_{11} + \varphi_{12}I_1(t))d\tau, \\
-\breve{\varphi}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta \equiv \varphi_{02}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) - \int_0^t(\varphi_{12}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) + \varphi_{17}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau,
\end{gathered} \tag{3.4}$$

а $\varphi_{0\gamma}$ и $\varphi_{1\gamma}$ определяют по (2.3).

Для *главных линейных моделей A_n несжимаемых изотропных вязкоупругих сред* функционал ψ имеет следующий вид (сравните его с потенциалом для упругих несжимаемых сред (3.9.40)):

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\bar{\psi}^0 + \Big(\bar{m} + \frac{l_1 + 2l_2}{2}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) - \int_0^t q_1(t-\tau)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau\Big)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) - \\
- 2\Big(l_2I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) + \int_0^t q_2(t-\tau)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau\Big),
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где l_1, l_2, $\bar{m}$ — константы, а $q_1(t-\tau)$ и $q_2(t-\tau)$ — ядра.

Соответствующие определяющие соотношения (3.3) записывают следующим образом (сравните с (3.9.40) для упругих сред):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n - \mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (\bar{m} + \breve{l}_1I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta))\mathbf{E} + 2\breve{l}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \tag{3.6}$$

где обозначены два линейных функционала

$$\breve{l}_1I_1 = l_1I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) - \int_0^t q_1(t-\tau)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau = \int_0^t r_1(t-\tau)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)),$$

$$\breve{l}_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = l_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \int\limits_0^t q_2(t-\tau)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau = \int\limits_0^t r_2(t-\tau)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau). \tag{3.7}$$

Константы $\bar{\psi}^0$ и $p_0 = p(0)$ выбирают из условий нормировки (3.8.50), (3.8.51) по формулам (3.9.41), как и для упругих сред:

$$p_0 = p^e + \bar{m}, \qquad \bar{\psi}^0 = 0, \tag{3.8}$$

где p^e — константа, фигурирующая в начальном значении тензоров напряжений естественной конфигурации $\overset{\mathrm{e}}{\mathcal{K}}$: $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -p^e\mathbf{E}$.

7.3.3. Линейные модели A_n несжимаемых изотропных вязкоупругих сред. Для линейных моделей A_n несжимаемых изотропных вязкоупругих сред, образованных из квадратичных механически детерминированных моделей A_n (см. пп. 7.2.6–7.2.9), определяющие соотношения имеют вид аналогичный формулам (2.44) для сжимаемых сред, но в функционале ψ следует учесть линейные по инварианту I_1 слагаемые:

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\bar{\psi}^0 + \bar{m}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t r_1(2t-\tau_1-\tau_2)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)) + \\ + \int\limits_0^t\int\limits_0^t r_2(2t-\tau_1-\tau_2)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \tag{3.9}$$

где $\bar{\psi}^0$, $\bar{m}$ — константы, а $r_1(y)$ и $r_2(y)$ — функции релаксации.

Используя формулы (2.34) и (2.35), а также теорему 7.8, функционал ψ можно записать в форме Вольтерры:

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\bar{\psi}^0 + \bar{m}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) + \frac{l_1}{2}I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta) + l_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_\theta) - \int\limits_0^t q_1(t- \\ -\tau)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau))d\tau I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)) - 2\int\limits_0^t q_2(t-\tau)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(t)d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t p_1(2t-\tau_1-\tau_2)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1))I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t p_2(2t-\tau_1-\tau_2)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \tag{3.10}$$

где

$$\frac{\partial^2 r_\gamma(y)}{\partial y^2} = p_\gamma(y), \qquad \frac{\partial r_\gamma(y)}{\partial y} = -q_\gamma(y), \qquad r_\gamma(0) = l_\gamma. \tag{3.11}$$

По аналогии со сжимаемыми средами (см. п. 7.2.13) можно рассмотреть *простейшую модель A_n изотропных несжимаемых сред*, для которой функции ползучести $q_1(y)$ и $q_2(y)$ связаны между собой соотношением (2.89):

$$q_1(y) = -\frac{1}{3}q(y), \qquad q(y) = 2q_2(y), \tag{3.12}$$

т.е. в этой модели имеется только одно ядро $q(y)$.

Интегрируя соотношение (3.12) по y и учитывая начальное данное (3.11), находим соответствующую связь между $r_1(y)$ и $r_2(y)$:

$$r_1(y) = -\frac{1}{3}r_2(y) + l_1 + \frac{2}{3}l_2, \quad r(y) \equiv 2r_2(y). \tag{3.12a}$$

Подставляя (3.12) в (3.6), (3.7), после приведения подобных получаем следующее определяющее соотношение (сравните с (2.92)):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (\bar{m} + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta))\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \int\limits_0^t q(t-\tau)\ \mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau)d\tau, \tag{3.13}$$

где

$$\mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \frac{1}{3}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta)\mathbf{E} \tag{3.14}$$

— девиатор тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta$ (см. (2.91)).

Если $q(t) \equiv 0$, то соотношения (3.13) совпадают с соотношениями (3.9.40) для изотропных несжимаемых упругих сред.

7.3.4. Модели B_n вязкоупругих сред. В *моделях B_n вязкоупругих сред* свободная энергия ψ является функционалом вида

$$\psi = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\psi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^t(\tau), \theta^t(\tau)), \tag{3.15}$$

а соответствующие определяющие соотношения получаются с помощью правила (1.27) дифференцирования функционала по времени и имеют вид

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(t)) \equiv \overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^t(\tau), \theta^t(\tau)), \\ \eta = -\partial\psi/\partial\theta, \\ w^* = -\rho\delta\psi. \end{cases} \tag{3.16}$$

Все дальнейшие построения с функционалами $\overset{t}{\underset{\tau=0}{\psi}}$ и $\overset{t}{\underset{\tau=0}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}$ могут быть проделаны и для моделей B_n.

Конкретные модели B_n вязкоупругих сред можно получить непосредственно с помощью моделей A_n, в которых следует осуществить замену $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - (1/(n-\mathrm{III}))\mathbf{E}$.

В частности, для *линейных механически детерминированных моделей B_n изотропных несжимаемых сред*, учитывая, что $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$, из (3.6) и (3.9) получаем следующие определяющие соотношения:

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \overset{\circ}{\rho}\psi^0 + mI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t r_1(2t-\tau_1-\tau_2)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1))dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2)) + \int_0^t\int_0^t r_2(2t-\tau_1-\tau_2)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2), \quad (3.17)$$

$$w^* = \int_0^t\int_0^t q_1(2t-\tau_1-\tau_2)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1))dI_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2)) + 2\int_0^t\int_0^t q_2(2t-\tau_1-\tau_2)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2), \quad (3.18)$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (m + \int_0^t r_1(t-\tau)dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau)))\mathbf{E} + 2\int_0^t r_2(t-\tau)d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau). \quad (3.19)$$

Для простейших моделей B_n принимают допущение (3.12а) о функциях $r_\gamma(t)$, в результате приходим к следующим соотношениям:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (m + l_1I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}))\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - \int_0^t q(t-\tau)\ \mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau)d\tau, \quad (3.20)$$

$$w^* = \int_0^t\int_0^t q(2t-\tau_1-\tau_2)\ \mathrm{dev}\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1)}{\partial\tau_1}\cdot\cdot\ \mathrm{dev}\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2)}{\partial\tau_2}d\tau_1d\tau_2 \geqslant 0. \quad (3.21)$$

Из условия неотрицательности w^* получаем, что

$$q(y) = -\partial r(y)/\partial y \geqslant 0, \quad (3.22)$$

т.е. ядро релаксации $q(y)$ всегда неотрицательно.

Если перейти к пределу при $t \to 0$, то в естественной конфигурации $\overset{\mathrm{e}}{\mathcal{K}}$, в которой $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(0) = -p^e\mathbf{E}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{E}/(n-\mathrm{III})$, $p = p_0$ (см. п. 3.8.6), из (3.20) получаем следующие соотношения между константами ψ^0, m, l_1, l_2 и p_0 (см. (3.9.43)):

$$p_0 = p^e + m + \frac{3l_1+2l_2}{n-\mathrm{III}}, \qquad \psi^0 = -\frac{3(3l_1+2l_2)}{2\overset{\circ}{\rho}(n-\mathrm{III})^2} - \frac{3m}{(n-\mathrm{III})\overset{\circ}{\rho}}. \quad (3.23)$$

Заметим, что соотношения (3.17), (3.19) полностью эквивалентны соотношениям (3.9), (3.6), а (3.20) — соотношениям (3.13) (константы l_1 и l_2 в этих соотношениях различны) и фактически являются просто иной формой их представления. Новые же модели класса B_n получаем, если принимаем дополнительные допущения о константах m, l_1 и l_2. Например, полагая, как и в соответствующих упругих моделях B_n (см. (3.9.44)):

$$l_1 + 2l_2 = 0, \qquad l_2 = -\frac{\mu}{2}(1-\beta)(n-\mathrm{III})^2, \qquad m = \mu(1+\beta)(n-\mathrm{III}), \tag{3.24}$$

где μ и β — две новые независимые константы, из (3.20) получаем следующие определяющие соотношения:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\big)\mathbf{E} - \\ - (1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big) - \int\limits_0^t q(t-\tau)\,\mathrm{dev}\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau)d\tau, \tag{3.25}$$

которые уже не являются эквивалентными соответствующим соотношениям (3.13) моделей A_n.

Соотношения (3.23) с учетом (3.24) принимают вид

$$p_0 = p^e + \mu(3-\beta)(n-\mathrm{III})^2, \qquad \psi^0 = -6\mu/\overset{\circ}{\rho}. \tag{3.23a}$$

7.3.5. Модели A_n и B_n вязкоупругих жидкостей. Соотношения (3.15), (3.16), так же как и (1.35), (1.38), верны и для твердых, и для жидких вязкоупругих сред. Однако для жидкостей, согласно принципу материальной симметрии, должны выполняться соотношения (1.39) (и аналогичные им соотношения для моделей B_n):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^* = \mathop{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\tau=0}^{t}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^*(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{t*}(\tau), \theta^t(\tau)) = \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^*), \tag{3.26}$$

$$\psi = \mathop{\psi}_{\tau=0}^{t}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^*(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{t*}(\tau), \theta^t(\tau)) \equiv \psi^* \quad \forall H \in U, \tag{3.27}$$

для любых H-преобразований из унимодулярной группы U.

Теорема 7.11. *Для моделей A_n и B_n, $n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}$, жидких вязкоупругих сред определяющие соотношения (3.15), (3.16) и (1.35), (1.38), удовлетворяющие принципу материальной симметрии и представляющие собой непрерывные функционалы в пространстве H_t, можно представить в следующем виде:*

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1}, \tag{3.28а}$$

$$p = \rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho(t)} = \mathop{p}_{\tau=0}^{t}(\rho(\tau), \theta(\tau)) = \rho^2\Big(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho} + \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi_m}{\partial\rho(t)}d\tau_1\ldots d\tau_m\Big), \tag{3.28б}$$

$$\psi = \mathop{\psi}_{\tau=0}^{t}(\rho(t), \theta(t), \rho^t(\tau), \theta^t(\tau)) = \varphi_0(\rho(t), \theta(t)) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t \ldots \int_0^t \varphi_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, \rho(t), \rho(\tau_1), \ldots \rho(\tau_m)) d\tau_1 \ldots \tau_m, \quad (3.28\text{в})$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E}. \quad (3.28г)$$

▼ Поскольку ψ полагаем непрерывным функционалом, то к нему можно применить теорему 7.4 Стоуна–Вейерштрасса и представить ψ в виде ряда по n-кратным скалярным функционалам:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t \ldots \int_0^t \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m) d\tau_1 \ldots d\tau_m, \quad (3.29)$$

ядра которых являются скалярными функциями от m тензорных аргументов:

$$\widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m) = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1), \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_m)). \quad (3.30)$$

Подставляя представление (3.29) в (3.27), получаем, что функции $\widetilde{\psi}_m$ должны удовлетворять соотношению

$$\widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_1, \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_m) = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_1^*, \ldots \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_m^*) \quad \forall H \in U, \quad (3.31)$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_i \equiv \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_i)$, т.е. быть H-индифферентными относительно унимодулярной группы U.

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.31, показываем, что единственные функции, которые обеспечивают выполнимость условия (3.31) — это функции от третьего инварианта тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_i$, или, что то же самое, от значений плотности $\rho_i = \rho(\tau_i)$ в различные моменты времени τ_i:

$$\widetilde{\psi}_m = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_1), \ldots, I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_m)) = \widetilde{\psi}_m(t, \tau_1, \ldots \tau_m, \rho_1, \ldots, \rho_m).$$

Выделяя у ядер в этом выражении δ-образные составляющие по аналогии с (1.51а), от (3.29) приходим к представлению (3.28в), где ядра φ_m связаны с $\widetilde{\psi}_m$ соотношениями (1.54).

Подставляя теперь функционал (3.28в) в (3.16) и дифференцируя ψ по $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(t)$, в силу (3.8.172)–(3.8.177) действительно получаем формулы (3.28а), (3.28б).

Наконец, используя преобразования (3.8.179), (3.8.180), из (3.28а) аналогичным образом получаем, что все соотношения (3.28а) для моделей A_n и B_n эквивалентны одному соотношению (3.28г). ▲

Обратим внимание на то, что хотя формально соотношение (3.28г) для тензора истинных напряжений Коши получилось таким же, как и в идеальной жидкости, вязкоупругая жидкость не идеальна (диссипативна), так как давление p является уже функционалом от плотности ρ, а функция диссипации w^* для нее отлична от нуля, согласно (1.64):

$$w^* = -\rho\delta\psi = -\rho\varphi_1^0 - \rho\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t \ldots \int_0^t \Big(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \varphi_{m+1}^0\Big) d\tau_1 \ldots d\tau_m \geqslant 0. \qquad (3.32)$$

7.3.6. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей A_n и B_n вязкоупругих сред. Поскольку все энергетические тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ являются S-инвариантными при жестких движениях, то все определяющие соотношения, представленные в этом разделе, для твердых сред и жидкостей, а также несжимаемых сред, одинаковы в актуальных конфигурациях $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, поэтому принцип материальной индифферентности для моделей A_n и B_n вязкоупругих сред выполняется тождественно.

Упражнения к 7.3

Упражнение 7.3.1. Используя ступенчатое нагружение (2.68) и переходя к пределу при $t \to 0_+$, показать, что мгновенно-упругие соотношения, получаемые из (3.25), совпадают с определяющими соотношениями (3.9.46) модели B_n упругой изотропной несжимаемой среды.

Упражнение 7.3.2. Используя метод, примененный в п. 7.2.14, показать, что для простейшей модели A_n изотропных несжимаемых вязкоупругих сред с экспоненциальным ядром

$$q(t) = \sum_{\gamma=1}^{N} \frac{B^{(\gamma)}}{\tau^{(\gamma)}} \exp\Big(-\frac{t}{\tau^{(\gamma)}}\Big)$$

определяющее соотношение (3.13) можно представить в следующем виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + (\bar{m} + l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta))\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \sum_{\gamma=1}^{N}\mathbf{W}^{(\gamma)}B^{(\gamma)},$$

$$\frac{d\mathbf{W}^{(\gamma)}}{dt} = \frac{1}{\tau^{(\gamma)}}(\mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}).$$

а для простейшей модели B_n изотропных несжимаемых вязкоупругих сред с тем же экспоненциальным ядром определяющее соотношение (3.25) можно представить в виде:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\Big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\Big)\mathbf{E} - (1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big) - \sum_{\gamma=1}^{N}\mathbf{W}^{(\gamma)}B^{(\gamma)},$$

$$\frac{d\mathbf{W}^{(\gamma)}}{dt} = \frac{1}{\tau^{(\gamma)}}(\mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} - \mathbf{W}^{(\gamma)}).$$

Упражнение 7.3.3. Используя результаты упр. 7.2.7 и соотношения (3.21) и (3.25), показать, что для простейших линейных моделей B_n изотропных несжимаемых термореологически простых сред имеют место следующие определяющие соотношения:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\mathrm{III})^2\Big(\big(\frac{1+\beta}{n-\mathrm{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}})\big)\mathbf{E} - \\ - (1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}\Big) - \int\limits_0^t q(t'-\tau')\ \mathrm{dev}\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau)a_\theta(\tau)d\tau,$$

$$w^* = a_\theta\int\limits_0^t\int\limits_0^t q(2t'-\tau_1'-\tau_2')\ \mathrm{dev}\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_1)}{\partial\tau_1}\cdot\cdot\ \mathrm{dev}\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau_2)}{\partial\tau_2}d\tau_1 d\tau_2,$$

где t', τ_1' и τ_2' определяются по (1.71).

7.4. Постановки задач в теории вязкоупругости с конечными деформациями

7.4.1. Постановки динамических задач в пространственном описании. Формально постановки задач в теории вязкоупругости с конечными деформациями могут быть получены из соответствующих постановок задач теории упругости с конечными деформациями (см. разд. 5.1), если заменить в последних обобщенные определяющие соотношения упругости $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta, \theta)$ на соотношения вязкоупругости, в рамках предварительно выбранной модели вязкоупругости из числа рассмотренных выше в разд. 7.1–7.3. Выбирая наиболее общие представления (1.38) и (3.16) для моделей A_n и B_n вязкоупругости, указанным способом на основе постановки динамической $\theta RUVF$-задачи теории упругости (см. пп. 5.1.1 и 5.3.3) получаем постановку *динамической $\theta RUVF$-задачи теории термовязкоупругости в пространственном описании*, состоящую из системы уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v} = 0, \tag{4.1а}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{f}, \tag{4.1б}$$

$$\frac{\partial\rho\eta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\eta = -\frac{1}{\theta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{\rho q_m + w^*}{\theta}. \tag{4.1в}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho(\mathbf{v}\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}\otimes\mathbf{v}) = 0, \tag{4.1г}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) = \rho\mathbf{v} \tag{4.1д}$$

в области $V\times(0,t_{\max})$, а также определяющих соотношений в области $\bar{V}\times(0,t_{\max})$:

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{4.2а}$$

$$\mathbf{T} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G, \tag{4.2б}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\boldsymbol{\mathcal{F}}}}_G(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t_G(\tau), \theta^t(\tau)) \equiv \rho(\partial\psi/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t)), \qquad (4.2\text{в})$$

$$\eta = -\partial\psi/\partial\theta(t), \qquad w^* = -\rho\delta\psi, \qquad (4.2\text{г})$$

$$\psi = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\psi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t_G(\tau), \theta^t(\tau)), \quad G = A, B, \qquad (4.2\text{д})$$

которые должны быть дополнены выражениями (3.8.113) и (3.8.115в) для тензоров ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_G$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha - \bar{h}_G \mathbf{E}),$$

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} E_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad (4.3)$$

$$\lambda_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \ \parallel \ \mathbf{F},$$

и граничных условий (5.3.1)–(5.3.9), которые в случае отсутствия фазовых превращений имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = \widetilde{q}_{ne} \quad \text{на } \Sigma_1, \ldots \Sigma_4, \Sigma_7, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \theta = \theta_e \quad \text{на } \Sigma_5, \Sigma_6, \\ \partial\rho/\partial\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \quad \text{на } \Sigma_8, \end{gathered} \qquad (4.4)$$

а также начальных условий

$$t = 0: \quad \rho = \overset{\circ}{\rho}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0. \qquad (4.5)$$

После подстановки определяющих соотношений (4.2) и (4.3) в (4.1) получаем систему из 17 скалярных уравнений относительно 17 неизвестных функций — компонент следующих векторов и тензоров:

$$\theta, \rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F} \ \parallel \ \mathbf{x}, t. \qquad (4.6)$$

Поскольку область $V(t)$ в пространственном описании является неизвестной, то для ее определения к указанной системе следует присоединить либо соотношение (5.3.22), либо уравнение (5.3.18) для функции $f(\mathbf{x}, t)$, задающей форму поверхности $\Sigma(t)$ области $V(t)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = 0, \\ t = 0: \qquad f = f^0(\mathbf{x}). \end{gathered} \qquad (4.7)$$

Во втором случае функция $f(\mathbf{x}, t)$ включается в число неизвестных (4.6).

Замечание 1. В теории вязкоупругости вместо уравнения энергии часто удобнее использовать уравнение баланса энтропии (2.5.13а), в которое явным образом входит функция рассеивания w^*, что и было проделано при записи системы (4.1). В недивергентной форме уравнение баланса энтропии записывается в виде (2.5.13):

$$\rho\theta\frac{d\eta}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \rho q_m + w^*. \tag{4.8}$$

Если рассматривают модель A_n термовязкоупругой среды разностного типа, то η вычисляют по формуле (1.69). Полагая в этой формуле, что $\partial'\varphi/\partial\theta$ зависит только от θ, после подстановки (1.69) и (4.2а) в (4.8), получаем уравнение теплопроводности для вязкоупругой среды в пространственном описании:

$$\rho c_\varepsilon\Big(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta\Big) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\theta) - \rho\theta\Big(\frac{\partial}{\partial t}\big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\,\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\big) + \mathbf{v}\cdot\nabla\big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\,\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\big)\Big) + \rho q_m + w^*, \tag{4.9}$$

где

$$c_\varepsilon = -\theta(\partial'^2\varphi_0/\partial\theta^2) \tag{4.10}$$

— теплоемкость при фиксированных деформациях.

Замечание 2. Если, например, рассматривают постановку динамической $\theta RUVF$-задачи для механически-детерминированных линейных моделей A_n термореологически простых вязкоупругих сред с экспоненциальными ядрами, то определяющие соотношения (4.2) имеют вид, представленный в упр. 7.2.8:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big({}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \sum_{\gamma=1}^{N}\mathbf{W}^{(\gamma)}\Big),$$

$$\mathbf{W}^{(\gamma)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}\cdot\cdot\,\frac{\mathbf{a}_{(\alpha)}\otimes\mathbf{a}_{(\beta)}}{a_\alpha a_\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{\bar n} B^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}\cdot\cdot\,{}^4\boldsymbol{\Gamma}_\alpha,$$

$$\frac{\partial\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\otimes\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = a_\theta\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}, \tag{4.11}$$

$$w^* = \frac{Ja_\theta}{2}\sum_{\gamma=1}^{N}\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{B^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\beta}}\frac{\mathbf{a}_\alpha}{a_\alpha}\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta})\otimes(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta})\cdot\cdot\frac{\mathbf{a}_\beta}{a_\beta} +$$
$$+\sum_{\alpha=m+1}^{\bar n}\frac{B^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}}{\tau^{(\gamma)}_{\alpha\alpha}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\alpha})\cdot\cdot\,{}^4\boldsymbol{\Gamma}_\alpha\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta - \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\alpha})\Big).$$

В этом случае к начальным условиям (4.5) присоединяются дополнительные условия

$$t = 0: \qquad \mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.12}$$

а число неизвестных функций (4.6) расширяется за счет включения в него функций

$$\mathbf{W}^{(\gamma)}_{\alpha\beta} \;\|\; \mathbf{x}, t, \qquad \alpha,\beta = 1,\ldots,\bar n, \quad \gamma = 1,\ldots N, \tag{4.13}$$

(при этом всегда $\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \equiv 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\alpha, \beta > m$).

Аналогично с использованием постановок динамических θRUV-, θRV- и θU-задач термоупругости (см. п. 5.3.3) формулируются и *динамическая θRUV-задача теории вязкоупругости*, в которой градиент деформации $\mathbf{F}$ исключается из числа неизвестных, а также *θUV-задача вязкоупругости*, в которой кроме того исключается и плотность ρ, и *динамическая θU-задача вязкоупругости*, в которой неизвестными являются только $\mathbf{u}$ и θ.

Замечание 3. Как и постановки задач термоупругости в пространственном описании (см. п. 5.3.3), представленные выше постановки задач термовязкоупругости являются *сильно связанными*, поскольку они не могут быть разделены на постановки задач теплопроводности и задачи вязкоупругости, даже если пренебречь «энтропийным фактором» связанности (т.е. членом $(\boldsymbol{\alpha}/\rho)\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в уравнении теплопроводности (4.9)).

К перечисленным в замечании 4 к п. 5.3.3 шести факторам связанности в задачах термовязкоупругости присоединяется еще один: наличие функции рассеивания w^* в уравнении баланса энтропии (4.1в) или в уравнении теплопроводности (4.9), которое является следствием неидеальности вязкоупругих сред. Вклад функции рассеивания w^* в уравнение теплопроводности (4.9) во многих задачах оказывается весьма существенным, и пренебрегать им при неизотермических процессах нельзя.

Эффект повышения температуры в вязкоупругих средах без подвода тепла к телу извне, а только за счет внутреннего тепловыделения при деформировании (обусловленного наличием функции рассеивания w^*), называют *диссипативным разогревом* или *саморазогревом тел* (см. разд. 7.6). □

Обратим внимание также на шестой фактор связанности по классификации из замечания 4 к п. 5.3.3: для вязкоупругих сред зависимость определяющих соотношений (4.2в) от температуры можно разделить на три составляющие;

1) зависимость от тепловой деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}$ (1.66), когда применяется модель Дюгамеля–Неймана,
2) зависимость упругих свойств от температуры $\theta(t)$,
3) зависимость «вязких» свойств, т.е. интегральной части соотношений (4.2в), от предыстории температуры $\theta^t(\tau)$.

Экспериментально установлено, что для большинства вязкоупругих сред вязкие свойства значительно более существенным образом зависят от температуры, чем упругие. Поскольку функция рассеивания w^* зависит именно от вязких свойств, то она тоже явным образом зависит от температуры (в модели A_n с экспоненциальными ядрами (4.11) эта зависимость проявляется в виде функции $a_\theta(\theta(t))$). Температурная зависимость $w^*(\theta)$ приводит к интенсификации саморазогрева вязкоупругих сред и может вызывать при определенных условиях эффект типа *теплового взрыва* (см. п. 7.6.9).

7.4.2. Постановки динамических задач в материальном описании. Если использовать постановку динамической θUVF-задачи термоупругости в материальном описании (см. пп. 5.2.1 и 5.3.4) и заменить участвующие в ней определяющие соотношения (5.2.3) на соотношения вязкоупругости в форме

(1.38), (3.16), то для моделей A_n и B_n получаем постановку *динамической θUVF-задачи теории термовязкоупругости в материальном описании*, которая состоит из системы уравнений

$$
\begin{gathered}
\rho = \overset{\circ}{\rho} \det \mathbf{F}^{-1}, \\
\overset{\circ}{\rho}(\partial \mathbf{v}/\partial t) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f}, \\
\overset{\circ}{\rho}\theta(\partial \eta/\partial t) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) + \overset{\circ}{\rho} q_m + \overset{\circ}{w}{}^*, \\
\partial \mathbf{F}^{\mathrm{T}}/\partial t = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}, \\
\partial \mathbf{u}/\partial t = \mathbf{v}
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

в области $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$, а также определяющих соотношений в $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$:

$$
\mathbf{P} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0_G \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G, \tag{4.15а}
$$

$$
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_G = \rho(\partial \psi/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t)) \equiv \underset{\tau=0}{\overset{t}{\boldsymbol{\mathcal{F}}_G}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t_G(\tau), \theta^t(\tau)), \tag{4.15б}
$$

$$
\eta = -\partial \psi/\partial \theta, \qquad \overset{\circ}{w}{}^* = -\overset{\circ}{\rho}\delta\psi, \qquad G = A, B, \tag{4.15в}
$$

$$
\psi = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\psi}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(t), \theta(t), \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^t_G(\tau), \theta^t(\tau)), \tag{4.15г}
$$

которые дополняются выражениями для тензоров ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$:

$$
\begin{gathered}
{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1^3} (\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha - \bar{h}_G \mathbf{E}),
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

$$
\lambda_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \;\; \| \;\; \mathbf{F},
$$

граничными условиями (5.3.10)–(5.3.17), которые при отсутствии фазовых превращений имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{q}} = \overset{\circ}{q}_{ne} \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_1, \ldots \overset{\circ}{\Sigma}_4, \overset{\circ}{\Sigma}_7, \\
\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \theta = \theta_e \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_5, \overset{\circ}{\Sigma}_6, \\
\mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{q}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \quad \text{на } \overset{\circ}{\Sigma}_8,
\end{gathered}
\tag{4.17}
$$

и начальными условиями

$$
t = 0: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \theta = \theta_0. \tag{4.18}
$$

После подстановки определяющих соотношений (4.15) и (4.16) в (4.14), получаем систему для 16 неизвестных функций — компонент следующих векторов и тензоров:

$$\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F} \ \parallel \ X^i, t.$$

Плотность ρ, в силу уравнения неразрывности, обычно исключают из числа неизвестных функций.

Как и для задач термоупругости в материальном описании, задача (4.14)–(4.19) формулируется для известной области $\overset{\circ}{V}$, что значительно облегчает ее решение.

Для конкретных моделей вязкоупругих сред формулы (4.15б)–(4.15г) заменяются на какие-либо из соотношений, представленных в разд. 7.1–7.3.

Если рассматриваются модели A_n вязкоупругих сред с разностными ядрами и моделью Дюгамеля–Неймана (1.66), то плотность энтропии η выражается по формуле (1.69). Полагая $\partial'\varphi_0/\partial\theta$ зависящей только от температуры, уравнение баланса энтропии в системе (4.14) в этом случае можно переписать в форме уравнения теплопроводности вязкоупругой среды в материальном описании:

$$\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \theta) - \overset{\circ}{\rho} \theta \frac{\partial}{\partial t} \Big(\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \ \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho} \Big) + \overset{\circ}{\rho} q_m + \overset{\circ}{w}{}^*, \qquad (4.19)$$

причем вторым «энтропийным» членом в правой части уравнения, как правило, можно пренебречь по сравнению с $\overset{\circ}{w}{}^*$.

В отличие от постановки задачи термоупругости в материальном описании, сформулированной в п. 5.3.4, задача термовязкоупругости (4.14)–(4.18) является сильно связанной даже при отсутствии фазовых превращений — из-за наличия функции рассеивания $\overset{\circ}{w}{}^*$. Как отмечалось выше в п. 7.4.1, в общем случае неизотермических процессов вклад этой функции $\overset{\circ}{w}{}^*$ в уравнение теплопроводности может быть весьма существенным и пренебрегать им нельзя.

Используя постановки динамических θUV-, $T\theta UVF$- и θU-задач термоупругости в материальном описании (см. п. 5.3.4), можно сформулировать соответствующие динамические задачи термовязкоупругости. Так постановка *динамической θU-задачи термовязкоупругости в материальном описании* состоит из системы уравнений (5.2.19):

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\rho} (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f}, \\ \overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon (\partial \theta / \partial t) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \theta) + \overset{\circ}{\rho} q_m + \overset{\circ}{w}{}^* \end{gathered} \qquad (4.20)$$

в области $\overset{\circ}{V} \times (0, t_{\max})$, в которые подставляют определяющие соотношения (4.15), выражения для тензоров ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G$ (4.16), а также кинематическое соотношение

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \qquad (4.20\text{а})$$

граничные условия (4.17) и начальные данные (4.18). Эту задачу рассматривают относительно четырех скалярных функций — компонент вектора перемещений $\mathbf{u}$ и температуры θ.

7.4.3. Постановки квазистатических задач теории вязкоупругости в пространственном описании. Формально постановки квазистатических задач теории вязкоупругости могут быть образованы из соответствующих постановок квазистатических задач теории упругости при конечных деформациях (см. п. 5.3.5), заменяя входящие в них определяющие соотношения упругости на какие-либо соотношения вязкоупругости из представленных в разд. 7.1–7.3 моделей. Так постановка связанной *квазистатической задачи термовязкоупругости в пространственном описании* для линейных механически-детерминированных моделей A_n термореологически простых сред имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}+\rho\mathbf{f}=0, \\ \rho c_\varepsilon(\partial\theta/\partial t)=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)+\rho q_m+w^*, \quad \text{в } V, \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}=J\int_0^t {}^4\mathbf{R}(t'-\tau')\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad \text{в } V\cup\Sigma, \\ w^*=-J(a_\theta/2)\int_0^t\int_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1)\cdot\cdot\,\dfrac{\partial}{\partial t'}{}^4\mathbf{R}(2t'-\tau_1'-\tau_2')\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta=\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}-\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\int_{\theta_0}^{\theta}\boldsymbol{\alpha}(\widetilde{\theta})d\widetilde{\theta}, \quad (t',\tau')=\int_0^{(t,\tau)}a_\theta(\theta(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau}, \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}={}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}=\dfrac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}E_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ \lambda_\alpha,\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,\mathbf{p}_\alpha \parallel \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}=\mathbf{E}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \quad \text{в } V\cup\Sigma, \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{\Sigma_\sigma}=\mathbf{t}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u}=\mathbf{u}_e, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\big|_{\Sigma_q}=q_e, \quad \theta\big|_{\Sigma_\theta}=\theta_e, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha=0 \ \text{ на } \Sigma_8, \\ t=0: \quad \theta=\theta_0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Здесь (4.21) — система уравнений равновесия и теплопроводности, (4.22) — определяющие соотношения, (4.23) — система кинематических соотношений и соотношений энергетической эевивалентности, (4.24) — граничные и начальное условия, где $\Sigma_\sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4\cup\Sigma_7$, $\Sigma_u=\Sigma_5\cup\Sigma_6$, $\Sigma_q=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4\cup\Sigma_6$, $\Sigma_\theta=\Sigma_5\cup\Sigma_7$.

После подстановки соотношений (4.22) и (4.23) в (4.21) получаем систему четырех скалярных уравнений относительно четырех скалярных неизвестных — компонент вектора перемещений и температуры:

$$\mathbf{u},\theta \ \parallel \ \mathbf{x},t. \tag{4.25}$$

Если рассматривается модель A_n с экспоненциальными ядрами, то определяющие соотношения (4.22) заменяют на соотношения (4.11).

В частном случае могут рассматриваться *изотермические процессы*, при которых поле температуры в теле V не изменяется: $\theta(\mathbf{x},t) = \theta_0 = \mathrm{const}$, тогда уравнение теплопроводности исключается из системы (4.21), и получаем следующую *постановку квазистатической задачи вязкоупругости в пространственном описании для линейных моделей A_n*:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{f} = 0 \;\text{ в } V; \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\int\limits_0^t {}^4\mathbf{R}(t-\tau)\cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau),$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = (1/(n-\mathrm{III}))\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 E_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ \lambda_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \;\parallel\; \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \nabla\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{\Sigma_\sigma} = \mathbf{t}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \;\text{ на } \Sigma_8, \end{cases}$$

относительно трех компонент вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$.

Если рассматриваются линейные модели A_n и B_n несжимаемых изотропных сред (3.6) и (3.19), то квазистатическую постановку задачи вязкоупругости в пространственном описании записывают следующим образом:

$$\nabla\cdot\mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} = 0, \quad \det\mathbf{F}^{-1} = 1,$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \Big(m + \int\limits_0^t r_1(t-\tau)\,dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\tau))\Big)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} + {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\cdot 2\int\limits_0^t r_2(t-\tau)\,d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G(\tau),$$

$$G = A, B, \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_G = (1/(n-\mathrm{III}))\sum_{\alpha=1}^3(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - \bar{h}_G)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 E_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha\otimes\mathbf{p}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta\otimes\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ \lambda_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \;\parallel\; \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E} - \nabla\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{\Sigma_\sigma} = \mathbf{t}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \\ \mathbf{u}\big|_{\Sigma_8}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{\Sigma_8}\cdot\boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \end{cases}$$

Напомним, что согласно (5.1.4а): $\bar{h}_G = 1$, если $G = A$, и $\bar{h}_G = 0$, если $G = B$. Здесь также обозначен тензор: $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\mathbf{E}$.

Поскольку область V в пространственном описании является неизвестной, то для ее определения к системам (4.21)–(4.24), а также (4.26) и (4.27) следует присоединить соотношение (5.3.22) для вычисления неизвестной геометрии области V.

7.4.4. Постановки квазистатических задач для моделей вязкоупругих сред в материальном описании. Аналогичным образом получаем постановки квазистатических задач в материальном описании. Так постановка *связанной квазистатической задачи термовязкоупругости в материальном описании* для линейных механически детерминированных моделей A_n термореологически простых сред имеет вид

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \mathring{\rho}\mathbf{f} = 0, \\
\mathring{\rho} c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \theta) + \mathring{\rho} q_m + \mathring{w}^* \quad \text{в } V,
\end{gathered}
\tag{4.28}
$$

$$
\begin{cases}
\mathbf{P} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \int_0^t {}^4\mathbf{R}(t' - \tau') \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau), \quad \text{в } \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma}, \\
\mathring{w}^* = -(a_\theta/2) \int_0^t \int_0^t d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_1) \cdot\cdot \dfrac{\partial}{\partial t'} {}^4\mathbf{R}(2t' - \tau_1' - \tau_2') \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta(\tau_2), \\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \mathring{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathring{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \boldsymbol{\alpha}(\widetilde{\theta}) d\widetilde{\theta}, \quad (t', \tau') = \int_0^{(t,\tau)} a_\theta(\theta(\tau)) d\tau,
\end{cases}
\tag{4.29}
$$

$$
\begin{cases}
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \dfrac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} \mathring{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{p}}_\alpha, \\
{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \dfrac{E_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha} \mathring{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathring{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathring{\mathbf{p}}_\alpha, \\
\lambda_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, \mathring{\mathbf{p}}_\alpha \parallel \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \quad \text{в } \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma},
\end{cases}
\tag{4.30}
$$

$$
\begin{cases}
\mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\mathring{\Sigma}_\sigma} = \mathring{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\mathring{\Sigma}_u} = \mathbf{u}_e, \quad -\mathring{\mathbf{n}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \theta\big|_{\mathring{\Sigma}_q} = \mathring{q}_e, \quad \theta\big|_{\mathring{\Sigma}_\theta} = \theta_e, \\
\mathbf{u}\big|_{\mathring{\Sigma}_8} \cdot \mathring{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\mathring{\Sigma}_8} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \\
t = 0: \quad \theta = \theta_0.
\end{cases}
\tag{4.31}
$$

После подстановки определяющих соотношений (4.29) и кинематических соотношений (4.30) в (4.28) получаем систему четырех скалярных уравнений равновесия и теплопроводности с граничными и начальным условиями (4.31) относительно четырех скалярных неизвестных — компонент вектора перемещений и температуры:

$$
\mathbf{u}, \theta \ \parallel \ X^i, t. \tag{4.32}
$$

Если рассматривают изотермические процессы, при которых $\theta(X^i, t) = \mathrm{const}$, то, в силу (4.28)–(4.31), получаем *постановку квазистатической задачи вязкоупругости в материальном описании для линейных моделей A_n*:

$$
\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \mathring{\rho}\mathbf{f} = 0, \qquad \mathbf{P} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \int\limits_0^t {}^4\mathbf{R}(t - \tau) \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}(\tau),
$$

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \dfrac{1}{n-\mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} (E_{\alpha\beta}/\lambda_\alpha) \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \\ \lambda_\alpha, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \ \parallel \ \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_\sigma} = \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \quad \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_u} = \mathbf{u}_e, \\ \mathbf{u}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{n}} = 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\big|_{\overset{\circ}{\Sigma}_8} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \end{cases}$$

относительно трех компонент вектора перемещений $\mathbf{u}(X^i, t)$.

Если рассматривают модели B_n несжимаемых изотропных сред (3.19), то определяющие соотношения в (4.33) заменяют на следующие:

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-1} + (m + \int_0^t r_1(t-\tau) dI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau))) \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 + 2\,{}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \int_0^t r_2(t-\tau) d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}(\tau),$$

$$\det \mathbf{F} = 1, \tag{4.34}$$

а задачу (4.33), (4.34) рассматривают относительно четырех неизвестных функций: $\mathbf{u}, p \ \parallel \ X^i, t$.

7.5. Задача об одноосном деформировании вязкоупругого бруса

7.5.1. Деформация вязкоупругого бруса при одноосном растяжении. В качестве примера рассмотрим классическую задачу об одноосном растяжении бруса, которая подробно изучалась нами ранее (см. разд. 5.5). Брус полагаем вязкоупругим, изотропным и несжимаемым, а определяющие соотношения его соответствуют простейшим линейным моделями A_n или B_n с экспоненциальными ядрами (см. (3.13) и (3.25) и упр. 7.3.2). Общая постановка квазистатической задачи в пространственном описании имеет вид (4.27).

Закон движения бруса при растяжении не зависит от особенностей его механических свойств, он одинаков как для упругих, так и вязкоупругих сред, и определяется формулой (5.4.1). Следовательно, и все кинематические характеристики: тензоры $\mathbf{F}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ — таковы же, как и для упругих сред, и определяются в соответствии с результатами упр. 1.2.1, 1.3.2 и 3.2.13:

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{4} k_\alpha(t) \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \lambda_\alpha = k_\alpha, \tag{5.1}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} (k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1) \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \operatorname{dev} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha(k_1) \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2,$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{n-\mathrm{III}}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{-1} = (n-\mathrm{III})\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{\mathrm{III}-n}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{5.2}$$

где обозначены функции от k_1:

$$\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1) = \frac{2}{3(n-\mathrm{III})}(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_2 = \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_3 = -\frac{1}{2}\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1, \tag{5.3}$$

а $k_\alpha(t)$ — коэффициенты кратности удлинения бруса по соответствующим координатным направлениям, причем из условия несжимаемости: $k_2 = k_3 = 1/\sqrt{k_1}$.

7.5.2. Спектр вязких напряжений при одноосном растяжении. Подставляя выражения (5.2) в дифференциальное уравнение определяющих соотношений для $\mathbf{W}^{(\gamma)}$ (см. упр. 7.3.2), находим, что тензоры $\mathbf{W}^{(\gamma)}$ тоже имеют диагональный вид:

$$\mathbf{W}^{(\gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{3} W_\alpha^{(\gamma)}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{5.4}$$

Функции $W_\alpha^{(\gamma)}$ одинаковы для моделей A_n и B_n, они удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\, W_\alpha^{(\gamma)}}{dt} = \frac{1}{\tau^{(\gamma)}}(\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha - W_\alpha^{(\gamma)}), \tag{5.5а}$$

которые имеют решение

$$W_\alpha^{(\gamma)} = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau^{(\gamma)}}\right)\frac{\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha(k_1(\tau))d\tau}{\tau^{(\gamma)}}, \quad \gamma = 1,\ldots N. \tag{5.5б}$$

7.5.3. Напряжения в вязкоупругом брусе при растяжении. Подставляя выражения (5.2) и (5.4) в определяющие соотношения из упр. 7.3.2, получаем, что энергетические тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ имеют диагональный вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{5.5}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{\alpha\alpha} = -pk_\alpha^{\mathrm{III}-n} + \bar{m} + \frac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 3) + \\ + \frac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1) - \sum_{\gamma=1}^{N} W_\alpha^{(\gamma)}B^{(\gamma)} \tag{5.6}$$

— для моделей A_n и

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha} = -pk_\alpha^{\mathrm{III}-n} + \mu(n-\mathrm{III})(1+\beta+(1-\beta)(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - \\ - k_\alpha^{n-\mathrm{III}}) - \sum_{\gamma=1}^{N} W_\alpha^{(\gamma)} B^{(\gamma)} \quad (5.7)$$

— для моделей B_n. Как было показано в п. 5.4.3, тензоры $\mathbf{T}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в данной задаче связаны следующими соотношениями:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha^{\mathrm{III}-n} \sigma_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \qquad \mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad (5.8)$$

$$\sigma_\alpha = k_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{T}_{\alpha\alpha}. \quad (5.8\text{а})$$

Там же было показано, что при одноосном растяжении бруса $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Тогда, подставляя (5.5)–(5.7) в (5.8а), получаем следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -p + \Big(\bar{m} + \dfrac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 3) + \\ \qquad + \dfrac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - \sum_{\gamma=1}^{N} W_1^{(\gamma)} B^{(\gamma)}\Big) k_1^{n-\mathrm{III}}, \\ 0 = -p + \Big(\bar{m} + \dfrac{l_1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 3) + \\ \quad + \dfrac{2l_2}{n-\mathrm{III}}(k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 1) - \sum_{\gamma=1}^{N} W_2^{(\gamma)} B^{(\gamma)}\Big) k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} \end{cases} \quad (5.9\text{а})$$

— для моделей A_n,

$$\begin{cases} \sigma_1 = -p + \Big(\mu(n-\mathrm{III})(1+\beta+2(1-\beta)k_1^{n-\mathrm{III}}) - \\ \qquad - \sum_{\gamma=1}^{N} W_1^{(\gamma)} B^{(\gamma)}\Big) k_1^{n-\mathrm{III}}, \\ 0 = -p + \Big(\mu(n-\mathrm{III})(1+\beta+(1-\beta)(k_1^{n-\mathrm{III}} + k_1^{(\mathrm{III}-n)/2})) - \\ \qquad - \sum_{\gamma=1}^{N} W_2^{(\gamma)} B^{(\gamma)}\Big) k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} \end{cases} \quad (5.9\text{б})$$

— для моделей B_n.

7.5.4. Разрешающее соотношение $\boldsymbol{\sigma_1(k_1)}$ для вязкоупругого бруса. Исключая из этих систем p, получаем следующие соотношения между σ_1 и k_1:

$$\sigma_1 = \bar{m}\overset{(\mathrm{n})}{Q}(k_1) + l_1\overset{(\mathrm{n})}{M}(k_1) + l_2\overset{(\mathrm{n})}{N}(k_1) - \overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1)\sum_{\gamma=1}^{N} W_1^{(\gamma)} B^{(\gamma)} \quad (5.10\text{а})$$

— для моделей A_n,

$$\sigma_1 = \mu(1+\beta)\overset{(\mathrm{n})}{Z}(k_1) + \mu(1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{H}(k_1) - \overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1)\sum_{\gamma=1}^{N} W_1^{(\gamma)} B^{(\gamma)} \quad (5.10\text{б})$$

— для моделей B_n, где обозначены функции от k_1:

$$\overset{(\mathrm{n})}{Q} = k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2},$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{M} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} + 2k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 3)(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{N} = \frac{2}{n-\mathrm{III}}((k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)k_1^{n-\mathrm{III}} - (k_1^{(\mathrm{III}-n)/2} - 1)k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}), \tag{5.11}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{L} = k_1^{n-\mathrm{III}} + (1/2)k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{Z} = (n-\mathrm{III})(k_1^{n-\mathrm{III}} - k_1^{(\mathrm{III}-n)/2}),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{H} = (n-\mathrm{III})(k_1^{(n-\mathrm{III})/2} - k_1^{\mathrm{III}-n}).$$

Здесь мы учли, что, согласно (5.3) и (5.7): $W_2^{(\gamma)} = -(1/2)\, W_1^{(\gamma)}$.

При $W_1^{(\gamma)} \equiv 0$ из (5.10б) следуют упругие соотношения (5.5.10).

7.5.5. Методика вычисления констант $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$. Рассмотрим ступенчатое деформирование бруса, при котором коэффициент кратности удлинения $k_1(t)$ задается в виде

$$k_1(t) = k_1^0 h(t). \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.5б), получаем

$$W_1^{(\gamma)}(t) = \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1^0)(1 - \exp\,(-t/\tau^{(\gamma)})). \tag{5.13}$$

Принимая во внимание (5.13), из (5.10) находим следующее выражение для $\Delta\sigma(t)$ — *напряжения релаксации*:

$$\Delta\sigma(t) = \sigma_1(0) - \sigma_1(t) = \overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1^0)\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1^0)(r(0) - r(t)) \tag{5.14}$$

— для всех моделей A_n и B_n, где $r(t)$ — функция релаксации, которая в соответствии с (2.93) имеет экспоненциальный вид:

$$r(t) = r^\infty + \sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)} \exp\,(-t/\tau^{(\gamma)}), \qquad r(0) = r^\infty + \sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)} = 2l_2. \tag{5.15}$$

Уравнение (5.14), переписанное в форме

$$\frac{\Delta\sigma(t)}{\overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1^0) f_1(k_1^0)} = \sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)}(1 - \exp\,(-t/\tau^{(\gamma)})), \tag{5.16}$$

можно использовать для вычисления констант $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$. Если известна экспериментальная кривая релаксации $\Delta\sigma^{\text{э}}(t)$, полученная при некотором фиксированном значении k_1^0, то с помощью соотношения (5.16) эту кривую можно аппроксимировать, выбирая параметры $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$ из условия минимального отклонения функций $\Delta\sigma(t)$ и $\Delta\sigma^{\text{э}}(t)$ в K точках t_i, $i = 1, \ldots K$:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{K} \left(1 - \frac{\Delta\sigma(t_i)}{\Delta\sigma^{\text{э}}(t_i)}\right)^2 \to \min. \tag{5.17}$$

Функции $\overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1^0)$ и $\overset{(\mathrm{n})}{f}_1(k_1^0)$, согласно (5.3) и (5.11), не содержат никаких материальных констант, поэтому при заданных k_1^0 их значения известны. Параметры $\tau^{(\gamma)}$ иногда для улучшения сходимости итерационной процедуры поиска минимума функционала (5.17) задают априорно, например, в виде $\tau^{(\gamma)} = t_{(\gamma)}$, где $t_{(\gamma)}$ — некоторые моменты времени. Тогда, подставляя в уравнение (5.16) экспериментальные значения напряжений релаксации $\Delta\sigma^{\text{э}}(t_\gamma)$ в моменты времени t_γ, получаем для нахождения констант $B^{(\gamma)}$ систему линейных алгебраических уравнений, которую можно легко решить численно, например, методом Холецкого.

Далее осуществляется поиск значений параметров t_γ, при которых значение функционала Δ (5.17) достигает минимума. Значения $B^{(\gamma)}$ при таких t_γ и являются искомыми.

В табл. 7.1 приведены значения параметров $\tau^{(\gamma)}$ и $B^{(\gamma)}$, полученные указанным способом для резины и полиуретанового эластомера. Эти значения $\tau^{(\gamma)}$ и $B^{(\gamma)}$ одинаковы для моделей A_n и B_n, но различаются для моделей с разными номерами n.

Для полиуретана при аппроксимации моделями B_{IV} и B_{V} использовалась кривая релаксации при более высоких значениях деформации растяжения $\delta_1 = 80$ %, чем для моделей B_{I} и B_{II} (деформация $\delta_1 = 8,3$ %), что улучшало качество дальнейшего моделирования вязкоупругих свойств этими моделями.

Таблица 7.1. Значения констант $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$ для резины и полиуретана

Резина				
B_n	I	II	IV	V
$B^{(\gamma)}$, МПа	2,765	2,598	2,253	2,078
	16,475	15,486	15,424	12,385
	4,920	4,626	4,009	3,698
$\tau^{(\gamma)}$, с	0,2	0,2	0,2	0,2
	5,0	5,0	5,0	5,0
	30	30	30	30
Δ, %	1	1	1	1

Полиуретан				
B_n	I	II	IV	V
$B^{(\gamma)}$, МПа	5,083	4,819	2,047	0,993
	3,568	3,384	1,827	0,886
	2,437	2,311	0,816	0,396
	0,312	0,296	0,140	0,068
	3,068	2,909	0,939	0,456
$\tau^{(\gamma)}$, с	0,2	0,2	1,2	1,2
	5,4	5,4	24	24
	66	66	300	300
	300	300	7500	7500
	7500	7500	14700	14700
Δ, %	0,3	0,3	0,7	0,7

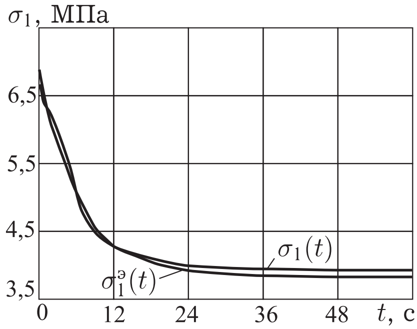

Рис. 7.4. График релаксации напряжений резины при деформации 10 % и его аппроксимация с помощью экспоненциальных ядер (5.16)

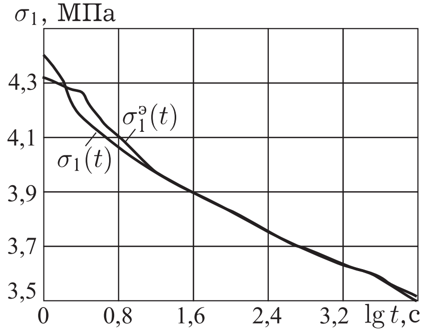

Рис. 7.5. График релаксации напряжений полиуретана при деформации 8.3 % и его аппроксимация с помощью экспоненциальных ядер (5.16)

На рис. 7.4 и 7.5 приведены графики кривых релаксации $\sigma_1(t) = \sigma_1(0) - \Delta\sigma(t)$, где значение $\Delta\sigma(t)$ вычислено по (5.16) с оптимальными константами $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$ для резины и полиуретана, а также соответствующие им экспериментальные кривые релаксации $\sigma_1^э(t) = \sigma_1(0) - \Delta\sigma^э(t)$. Точность аппроксимации экспериментальных кривых с помощью экспоненциальных ядер (5.16) очень высока: среднеквадратическое отклонение обычно не превышает 1 %. Отметим, что чем больше рассматриваемый интервал времени релаксации, тем обычно требуется большее число N экспонент в релаксационном спектре для достижения хорошей точности аппроксимации.

Для резины кривая релаксации аппроксимировалась на интервале от 0 до 1 мин, для этого потребовалось три экспоненты, а для аппроксимации кривой релаксации полиуретана на интервале до 1 часа потребовалось пять констант.

7.5.6. Методика вычисления констант $\bar{m}$, l_1, l_2 и β, m. После того, как установлены значения материальных констант $B^{(\gamma)}$, $\tau^{(\gamma)}$, можно вычислить константы $\bar{m}$, l_1, l_2 или β, m, используя для этого уравнение (5.10) и экспериментальные диаграммы деформирования $\sigma_1 = \sigma_1^э(k_1)$, полученные, например, при деформировании бруса с постоянной скоростью b («скоростное» деформирование):

$$k_1(t) = 1 + bt, \qquad b = \text{const}. \tag{5.18}$$

Функция $W_1(t)$ в этих расчетах является известной и определяется согласно (5.5а):

$$W_1 = \sum_{\gamma=1}^{N} W_1^{(\gamma)} B^{(\gamma)}, \qquad \frac{\partial W_1^{(\gamma)}}{\partial t} + \frac{W_1^{(\gamma)}}{\tau^{(\gamma)}} = \frac{\overset{(\mathrm{n})}{f}_1(k_1(t))}{\tau^{(\gamma)}}. \tag{5.19}$$

Константы l_1, l_2, $\bar{m}$ или m, β были найдены из условия наилучшего совпадения функций $\sigma_1^э(k_1)$ и $\sigma_1(k_1)$, вычисленных по (5.10), путем минимизации функционала среднеквадратической ошибки:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\sigma_1(k_{1(i)})}{\sigma_1^э(k_{1(i)})}\right)^2 \to \min.$$

Таблица 7.2. Значения констант μ и β в моделях B_n вязкоупругих сред для резины и полиуретана

Резина				
n	I	II	IV	V
μ, МПа	5,145	21,31	23,52	5,88
β	−0,556	−1	1	1
Δ, %	9	10	19,4	23,8

Полиуретан				
n	I	II	IV	V
μ, МПа	3,68	13,662	12,61	2,627
β	0,515	−0,46	1	0,778
Δ, %	11,8	14,3	16,8	23,2

Для моделей B_n пространство параметров оптимизации μ и β является двумерным, а для моделей A_n пространство параметров l_1, l_2, $\bar{m}$ — трехмерное. Для ускорения процедуры решения задачи оптимизации применялся метод градиентного спуска с различным перебором начальной точки поиска минимума. Значения полученных констант μ и β для резины и полиуретана приведены в табл. 7.2, а l_1, l_2 и $\bar{m}$ — в табл. 7.3.

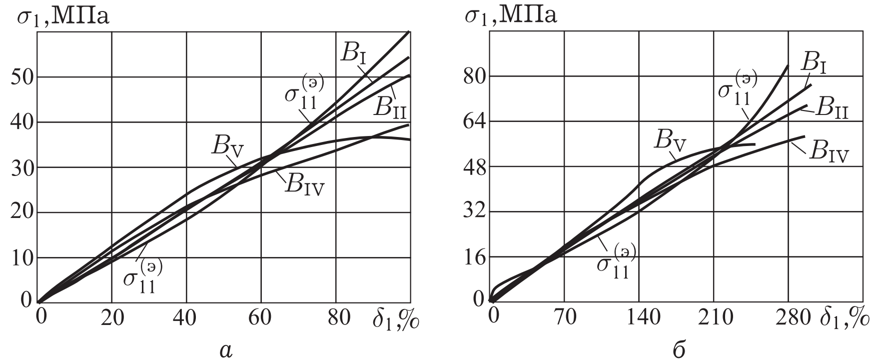

Рис. 7.6. Аппроксимация диаграмм деформирования резины (*а*) и полиуретана (*б*) при растяжении с помощью линейных моделей B_n вязкоупругих сред

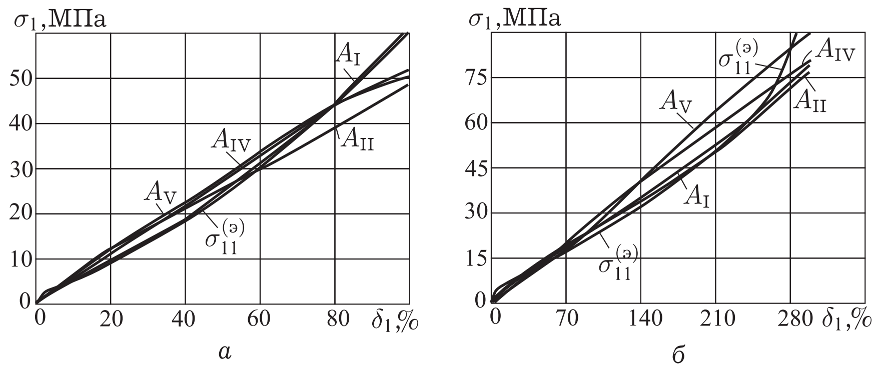

Рис. 7.7. Аппроксимация диаграмм деформирования резины (*а*) и полиуретана (*б*) при растяжении с помощью линейных моделей A_n несжимаемых вязкоупругих сред

На рис. 7.6 и 7.7 показаны экспериментальные диаграммы деформирования $\sigma_1^э(\delta_1)$ резины и полиуретана при растяжении, а также аппроксимация

Таблица 7.3. Значения констант l_1, l_2 и $\bar{m}$ в моделях A_n вязкоупругих сред для резины и полиуретана

Резина				
n	I	II	IV	V
l_1, МПа	1,2	39,8	0,2	2,8
l_2, МПа	40	37,2	11,2	1,8
$\bar{m}$, МПа	11	20	19,8	19
Δ, %	6,1	10	14,1	14,9

Полиуретан				
n	I	II	IV	V
l_1, МПа	−12,2	0,2	0,2	0,2
l_2, МПа	17,8	29,2	1,6	0,2
$\bar{m}$, МПа	−2,6	19,6	20	8,2
Δ, %	13,6	13,5	25	35,8

этих диаграмм с помощью моделей A_n и B_n несжимаемых вязкоупругих сред. Для рассмотренных материалов наилучшего качества аппроксимации удается добиться с помощью моделей A_{I} и B_{I}, для резины модель A_{I} достаточно точно аппроксимирует диаграмму $\sigma_1^{э}(\delta_1)$ на всем интервале деформирования, включая область максимальных деформаций (более 100 %), в то время как остальные модели в этой области дают достаточно ощутимую погрешность.

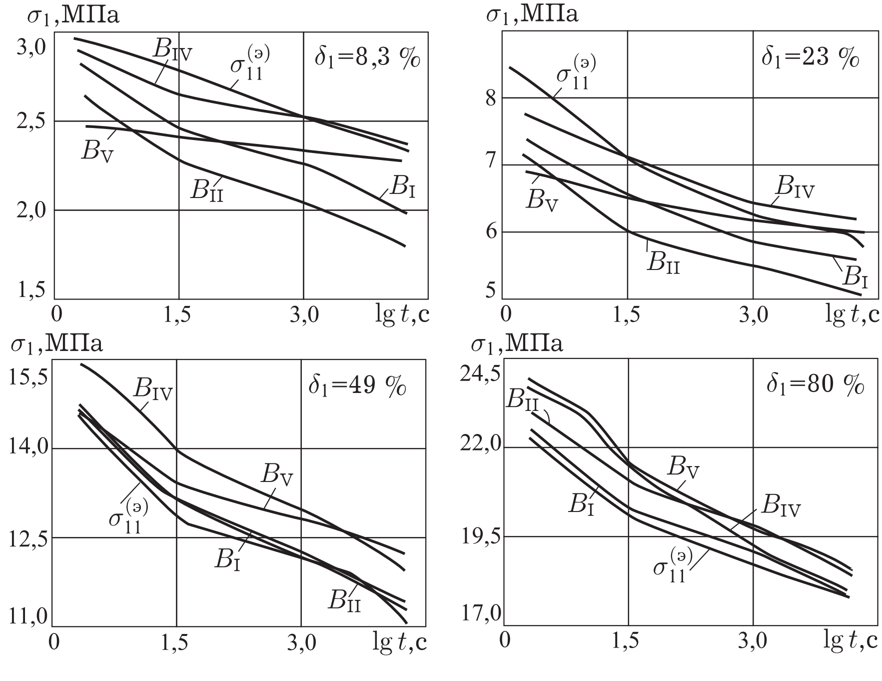

Рис. 7.8. Расчетные и экспериментальные кривые релаксации полиуретана при различных значениях деформации растяжении. Расчеты для различных моделей B_n вязкоупругих сред

7.5.7. Расчет кривых релаксации. После того, как все константы $B^{(\gamma)}$, $\tau^{(\gamma)}$ и l_1, l_2, $\bar{m}$ или m, β установлены, можно провести процедуру верификации (т.е. проверки адекватности) моделей A_n и B_n, например, осуществляя расчеты кривых релаксации при различных значениях параметра k_1^0, используя при этом уравнение (5.10) для ступенчатого процесса (5.12):

$$\sigma_1(t) = \bar{m}\overset{(\mathrm{n})}{Q}(k_1^0) + l_1\overset{(\mathrm{n})}{M}(k_1^0) + l_2\overset{(\mathrm{n})}{N}(k_1^0) - \\ - \overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1^0)\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1^0)\sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)}(1 - \exp(-t/\tau^{(\gamma)})) \quad (5.20\text{а})$$

— для моделей A_n, или

$$\sigma_1(t) = m(1+\beta)\overset{(\mathrm{n})}{Z}(k_1) + m(1-\beta)\overset{(\mathrm{n})}{H}(k_1) - \\ - \overset{(\mathrm{n})}{L}(k_1^0)\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1^0)\sum_{\gamma=1}^{N} B^{(\gamma)}(1 - \exp(-t/\tau^{(\gamma)})) \quad (5.20\text{б})$$

— для моделей B_n.

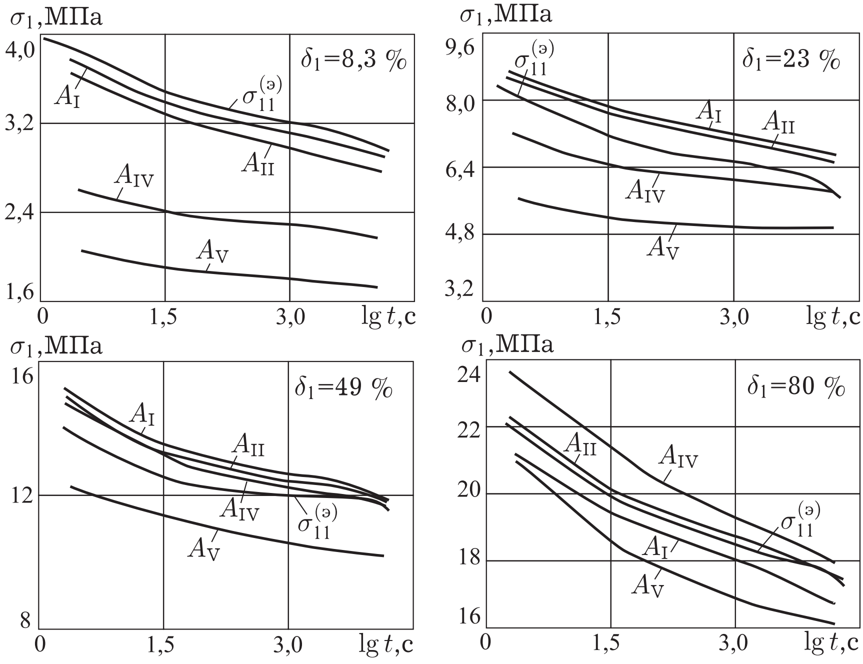

Рис. 7.9. Расчетные и экспериментальные кривые релаксации полиуретана при различных значениях деформации растяжении. Расчеты для различных моделей A_n вязкоупругих сред

На рис. 7.8 и 7.9 приведены кривые релаксации $\sigma_1(t)$ для полиуретанового эластомера, полученные экспериментально и расчетным путем указанным выше методом.

Для верификации моделей A_n и B_n использовались кривые релаксации при значениях $k_1^0 = 1,23$ ($\delta_1 = 23\,\%$), $k_1^0 = 1,49$ ($\delta_1 = 49\,\%$) и $k_1^0 = 1,8$ ($\delta_1 = 80\,\%$). Приведенные расчеты показывают, что для рассмотренного типа материала модели A_{I} и A_{II} обладают наилучшей точностью, в то время как модель A_{V} дает худшие результаты описания кривых релаксации.

7.5.8. Циклическое деформирование бруса. Будем полагать теперь, что все материальные константы для моделей A_n или B_n вязкоупругих сред уже известны, например, вычислены указанным выше способом. Рассмотрим широко встречающийся на практике циклический режим деформирования, при котором функция $k(t)$ сначала возрастает с постоянной скоростью b, потом убывает с такой же скоростью, затем снова возрастает и т.д. («пилообразный режим», рис. 7.10). Аналитически такую функцию $k(t)$ можно записать с помощью функций Хевисайда:

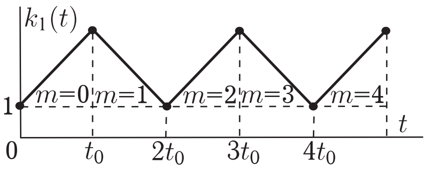

Рис. 7.10. Циклический процесс деформирования с постоянной скоростью

$$k_1(t) = 1 + b\sum_{m=0}^{M} a_m(t - mt_0)h(t - mt_0), \tag{5.21}$$

где b — скорость деформирования, $h(t)$ — функция Хевисайда, $a_0 = 1$, $a_m = 2(-1)^m$, $m \geqslant 1$ — числа, t_0 — временной интервал монотонности функции (полупериод цикла).

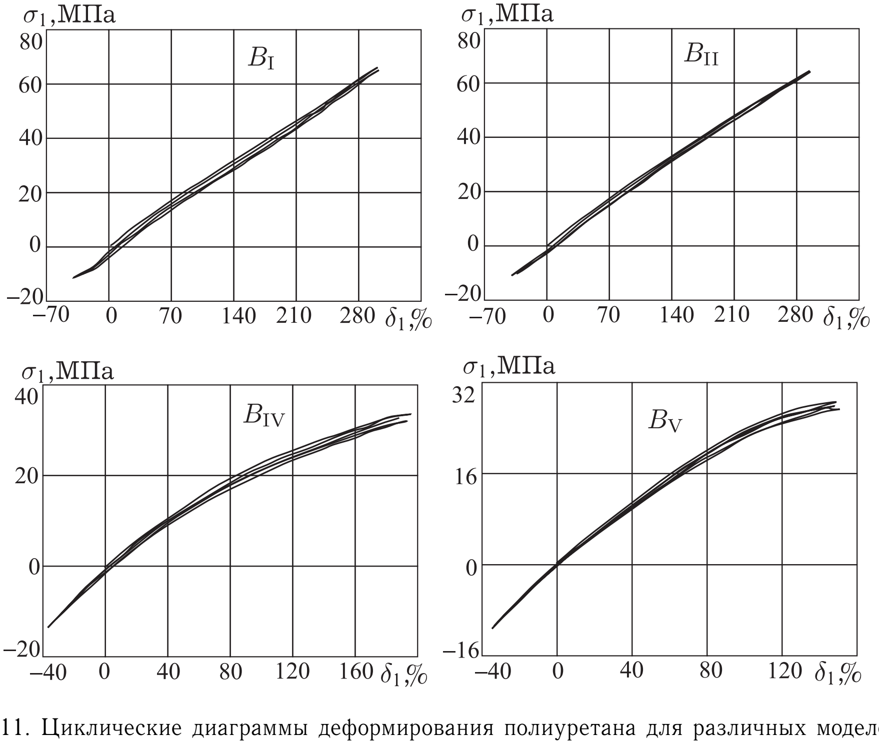

Рис. 7.11. Циклические диаграммы деформирования полиуретана для различных моделей B_n вязкоупругих сред

Подставляя (5.21) в уравнение (5.19) и решая эти уравнение численно, например, с помощью неявной разностной схемы

$$W^{(\gamma)}_{1,j+1} - W^{(\gamma)}_{1,j} + \frac{\Delta t}{\tau^{(\gamma)}} W^{(\gamma)}_{1,j+1} = \overset{(\mathrm{n})}{f}_1(k_1(t_j)), \quad j = 0, \ldots, N, \tag{5.22}$$

можно найти численное значение функциийй $W_1^{(\gamma)}(t)$ для циклического процесса деформирования. Здесь обозначены: t_j — моменты времени (узлы), $W^{(\gamma)}_{1,j} = W_1^{(\gamma)}(t_j)$ — значения функций в узлах, Δt — шаг по времени.

Напряжения σ_1 при циклическом деформировании вычисляем по общей формуле (5.10а) для моделей A_n или по (5.10б) — для моделей B_n.

Если известны все материальные константы моделей, то по этим формулам можно вычислить графики циклически изменяющихся напряжений $\sigma_1(t)$, а также можно построить циклические диаграммы деформирования $(\sigma_1(t), \delta_1(t))$, где $\delta_1(t) = k_1(t) - 1$ — относительное удлинение.

На рис. 7.11 показаны циклические диаграммы деформирования полиуретана, построенные для моделей B_n вязкоупругих сред указанным выше способом. Для вязкоупругих сред, в отличие от идеальных упругих сред, циклические диаграммы деформирования не совпадают на этапах нагрузки $(m = 0, 2, 4, \ldots)$ и разгрузки $(m = 1, 3, 5, \ldots)$, образуя характерные петли.

7.6. Диссипативный саморазогрев вязкоупругих сред при циклическом деформировании

7.6.1. Формулировка задачи о диссипативном саморазогреве бруса при циклическом деформировании. Вспомним, что вязкоупругие среды — неидеальные, и для них функция рассеивания w^* отлична от тождественного нуля. Поэтому, вообще говоря, при любом режиме деформирования вязкоупругих сред, даже при постоянных нагрузках, в них будет происходить внутреннее тепловыделение — диссипативный саморазогрев — за счет наличия функции рассеивания w^* в уравнении теплопроводности. Однако при таких «малоинтенсивных» режимах, саморазогрев весьма невелик — температура изменяется за счет w^* на доли градуса Цельсия, и им обычно пренебрегают (хотя для некоторых специальных задач и эти значения могут оказаться существенными). Иначе обстоит дело при циклических режимах нагружения, когда число циклов M весьма велико. Температура саморазогрева при таких режимах может достигать 100 °C и выше и даже стать причиной теплового разрушения материала.

Изложим далее метод расчета диссипативного саморазогрева бруса при его продольном квазистатическом циклическом растяжении по произвольному периодическому закону

$$k_1(t) = k_1(t + t_0), \tag{6.1}$$

где $k_1(t)$ — коэффициент пропорциональности растяжения (см. разд. 5.5 и п. 7.5.1), t_0 — как и

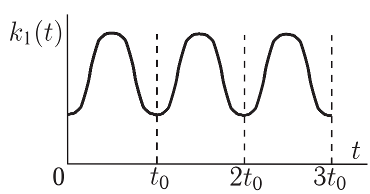

Рис. 7.12. Циклический режим деформирования

ранее, период цикла, а число циклов будем считать большим: $M \gg 1$. В этом случае говорят, что рассматривается многоцикловой режим деформирования.

Тогда для вычисления функций $W_1^{(\gamma)}(t)$ снова можно воспользоваться формулой (5.19) и разностной схемой (5.22), а для нахождения напряжения $\sigma_1(t)$ — формулой (5.10).

7.6.2. Быстрое и медленное время при многоцикловом деформировании. Для многоциклового режима деформирования можно ввести малый параметр $\varkappa = 1/M \ll 1$, а также новую безразмерную переменную $\xi = t/t_0$, имеющую смысл «счетчика» числа циклов колебаний и называемую *быстрым временем*, и *медленное время* $\bar{t} = t/t_1$, где $t_1 = Mt_0$, которое принимает значения $0 \leqslant \bar{t} \leqslant 1$ на всем интервале циклического деформирования.

Периодические функции вида (6.1) можно рассматривать как функции быстрого времени с периодом, равным 1:

$$k_1(t) = k_1(\xi) = k_1(\xi + 1). \tag{6.2}$$

Например, для гармонических колебаний имеем

$$k_1(t) = \bar{k}_1 + k_1^0 \sin \omega t = \bar{k}_1 + k_1^0 \sin 2\pi\xi \equiv k_1(\xi), \tag{6.3}$$

так как период колебаний в данном случае равен $t_0 = 2\pi/\omega$, здесь $\bar{k}_1$ — среднее значение функции k_1, а k_1^0 — амплитуда колебаний — обе константы.

Ядро релаксации $q(t)$, наоборот, рассматривают как функцию медленного времени, так как полагают, что в течение одного периода колебаний ее изменения пренебрежимо малы:

$$q(t) = q(\bar{t}), \tag{6.4}$$

например, для экспоненциального ядра релаксации (5.15)

$$q(t) = -\frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{t_1} \sum_{\gamma=1}^{N} \frac{B^{(\gamma)}}{\bar{\tau}^{(\gamma)}} \exp\left(-\frac{\bar{t}}{\bar{\tau}^{(\gamma)}}\right), \quad \bar{\tau}^{(\gamma)} = \tau^{(\gamma)}/t_1. \tag{6.5}$$

Температуру θ вязкоупругой среды можно рассматривать как *квазипериодическую функцию*, которая зависит как от быстрого, так и от медленного времени:

$$\theta(t) = \theta(\xi, \bar{t}) = \theta(\xi + 1, \bar{t}), \tag{6.6}$$

и является 1-периодической по ξ. Аргументы ξ и $\bar{t}$ для такой функции полагают независимыми.

7.6.3. Дифференцирование и интегрирование квазипериодических функций. Дифференцирование квазипериодических функций осуществляется по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{t_1}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right). \tag{6.7}$$

Интегрирование квазипериодических функций $b(\tau)=b(\bar{\tau},\xi)$, где $\bar{\tau}=\tau/t_1$ осуществляется следующим образом:

$$\int_0^t b(\tau)d\tau=\int_0^t b(\bar{\tau},\xi)d\tau=t_1\int_0^{\bar{t}}(\int_0^1 b(\bar{\tau},\xi)d\xi)d\bar{\tau}+\varkappa O(1)=t_1\int_0^{\bar{t}}\langle b\rangle(\bar{\tau})d\bar{\tau}+\varkappa O(1), \tag{6.8}$$

где обозначено среднее значение по циклу колебаний от квазипериодической функции, которое является функцией только медленного времени $\bar{\tau}$:

$$\langle b\rangle(\bar{t})=\int_0^1 b(\bar{t},\xi)d\xi, \tag{6.9}$$

а величина $O(1)$ содержит члены, сравнимые по порядку величин с первым членом $t_1\int_0^{\bar{t}}\langle b\rangle d\bar{\tau}$ в формуле (6.8).

7.6.4. Уравнение теплопроводности для тонкого вязкоупругого бруса. Рассмотрим простейшие линейные модели B_n изотропных несжимаемых термореологически простых сред, определяющие соотношения для которых приведены в упр. 7.3.3. Постановка связанной квазистатической задачи термовязкоупругости в материальном описании имеет вид (4.28), (4.30), (4.31), а уравнение теплопроводности в этой системе записываем следующим образом:

$$\overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)+\overset{\circ}{w}{}^*, \tag{6.10}$$

здесь и далее для простоты полагаем $q_m=0$.

Интегрируя это уравнение по $\overset{\circ}{V}$, с учетом формулы Гаусса–Остроградского и граничных условий (4.31) получаем

$$\overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\int_{\overset{\circ}{V}}\theta d\overset{\circ}{V}=-\int_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{q}_e d\overset{\circ}{\Sigma}+\int_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{w}{}^* d\overset{\circ}{V}. \tag{6.11}$$

Будем далее полагать, что рассматриваемое тело — брус — является тонким, т.е. его ширина и высота h_2^0, h_3^0 много меньше длины h_1^0, так что изменением температуры θ по координатам $\overset{\circ}{x}{}^2$ и $\overset{\circ}{x}{}^3$ можно пренебречь. Торцы бруса $\overset{\circ}{x}{}^1=0$ и $\overset{\circ}{x}{}^1=h_1^0$ будем полагать теплоизолированными (для них $\overset{\circ}{q}_e=0$), а на боковой поверхности бруса будем считать заданными условия конвективного теплообмена:

$$\overset{\circ}{q}_e=\alpha_T(\theta-\theta_e), \tag{6.12}$$

где α_T — удельный *коэффициент теплообмена*, а θ_e — температура окружающей среды (константа). Тогда, поскольку при циклическом растяжении бруса $\overset{\circ}{w}{}^*$ не зависит от координат, уравнение (6.11) можно записать в виде

$$\overset{\circ}{\rho}c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\bar{\alpha}_T(\theta-\theta_e)+\overset{\circ}{w}{}^*, \tag{6.13}$$

где

$$\bar{\alpha}_T = \alpha_T \frac{|\overset{\circ}{\Sigma}|}{|\overset{\circ}{V}|} = \frac{2\alpha_T}{h_2^0 h_3^0}(h_2^0 + h_3^0) \tag{6.14}$$

— интегральный коэффициент теплообмена.

7.6.5. Функция рассеивания вязкоупругого бруса. Функция рассеивания $\overset{\circ}{w}{}^*$ для бруса имеет вид (см. упр. 7.3.3)

$$\overset{\circ}{w}{}^* = a_\theta \sum_{\alpha=1}^{3} \int_0^t \int_0^t q(2t - \tau_1' - \tau_2') \frac{d}{d\tau_1} \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\tau_1)) \frac{d}{d\tau_2} \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2. \tag{6.15}$$

Интегрируя по частям, преобразуем это выражение к виду

$$\overset{\circ}{w}{}^* = a_\theta q(0) \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{f}{}^2_\alpha(k_1(t)) - 2a_\theta \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(t)) \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau_1} q(t' - \tau_1') \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\tau_1)) d\tau_1 +$$
$$+ a_\theta \sum_{\alpha=1}^{3} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} q(t' - \tau_1' - \tau_2') \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\tau_1)) \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2. \tag{6.16}$$

7.6.6. Асимптотические разложения по малому параметру. Поскольку функция $k_1(t)$ — периодическая, то любая алгебраическая функция от k_1, в частности, функции $\overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1)$, определенные по (5.3), будут также периодическими: $\overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha = \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\xi))$. Тогда температура θ, являющаяся решением уравнения (6.13), будет, вообще говоря, квазипериодической функцией. Будем искать решение уравнения (6.13) в виде асимптотического разложения (ряда) по малому параметру $\varkappa$:

$$\theta = \bar{\theta}(\bar{t}) + \varkappa \theta^{(1)}(\bar{t}, \xi) + \varkappa^2 O(1). \tag{6.17}$$

Первый член этого ряда $\bar{\theta}$ зависит только от медленного времени $\bar{t}$. Согласно правилу (6.7), производную $\partial\theta/\partial t$ от ряда (6.17) вычисляем следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{t_1}\Big(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi}\Big) + \varkappa O(1). \tag{6.18}$$

Функцию $a_\theta(\theta)$ и приведенное время t' и τ' после подстановки в них ряда (6.17) также можно представить в виде асимптотического разложения:

$$a_\theta(\theta) = a_\theta(\bar{\theta}) + \varkappa a_\theta^{(1)} + \varkappa^2 O(1), \quad t' = \bar{t}' + \varkappa t'^{(1)} + \varkappa^2 O(1). \tag{6.19}$$

Здесь, как и ранее, $O(1)$ означает члены, сравнимые по порядку величины с первыми членами ряда. Функции $\bar{a}_\theta = a_\theta(\bar{\theta})$ и $\bar{t}'$ выражают по тем же формулам, что и исходные функции a_θ и t', если в них сделать замену $\theta \to \bar{\theta}$:

$$\bar{a}_\theta(\bar{\theta}) = a_\theta(\bar{\theta}), \qquad \bar{t}' = \int\limits_0^{\bar{t}} a_\theta(\bar{\theta})d\bar{t}. \tag{6.20}$$

Подставляя в формулу (6.16) разложения (6.17) и (6.19), а также учитывая правило (6.8) интегрирования квазипериодических функций, находим асимптотическое разложение для функции рассеивания $\overset{\circ}{w}{}^*$:

$$\overset{\circ}{w}{}^* = \overset{\circ}{w}{}^{*(0)} + \varkappa \overset{\circ}{w}{}^{*(1)} + \varkappa^2 O(1), \tag{6.21}$$

где

$$\overset{\circ}{w}{}^{*(0)} = \bar{a}_\theta \sum_{\alpha=1}^{3} \Big(q(0) \overset{(\mathrm{n})}{f}{}^2_\alpha(k_1(\xi)) - 2\overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\xi)) \langle \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1) \rangle (q(0) - q(\bar{t}')) +$$
$$+ \langle \overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1) \rangle^2 (q(0) - 2q(\bar{t}') + q(2\bar{t}')) \Big). \tag{6.22}$$

При выводе этого выражения мы учли, что подынтегральные функции представляют собой произведения функций быстрого времени $\overset{(\mathrm{n})}{f}_\alpha(k_1(\xi))$ и медленного времени $\dfrac{\partial}{\partial \tau_1} q(\bar{t}' - \tau_1')$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} q(2\bar{t}' - \tau_1' - \tau_2')$, следовательно, интегралы по ξ и $\bar{t}$ в формуле (6.16) можно вычислить независимо.

Подставляя (6.17) и (6.21) в (6.13), получим асимптотические разложения уравнения теплопроводности:

$$\frac{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}{t_1} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi} \right) = -\bar{\alpha}_T(\bar{\theta} - \theta_e) + \overset{\circ}{w}{}^{*(0)} + \varkappa O(1). \tag{6.23}$$

7.6.7. Осредненное уравнение теплопроводности. Осредняя уравнение (6.23) по периоду колебаний согласно (6.9) и учитывая периодичность функции $\theta^{(1)}$ (т.е. $\langle \partial\theta^{(1)}/\partial\xi \rangle = \theta^{(1)}(1) - \theta^{(1)}(0) = 0$), приходим к окончательному виду уравнения теплопроводности для температуры $\bar{\theta}$:

$$\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\bar{\alpha}_T(\bar{\theta} - \theta_e) + \bar{w}^*, \qquad t = 0: \;\; \bar{\theta} = \theta_0, \tag{6.24}$$

где $\langle \overset{\circ}{w}{}^{*(0)} \rangle \equiv \bar{w}^*$ — осредненная функция рассеивания. При выводе (6.24) сделана обратная замена безразмерного времени на размерное: $t = \bar{t} t_1$. Если собрать в уравнении (6.23) члены при более высоких степенях $\varkappa$ (при $\varkappa$, $\varkappa^2$ и т.д.), то получим уравнение для вычисления функций $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ и т.д., однако вклад этих членов в значение истинной температуры θ мал, согласно формуле (6.17), поэтому для рассматриваемых задач достаточно ограничиться только нулевым приближением для нахождения температуры $\bar{\theta}$.

Осредняя (6.22), находим выражение для $\bar{w}^*$ — функции рассеивания, средней за цикл колебаний:

$$\bar{w}^* \equiv \langle \overset{\circ}{w}{}^{*(0)} \rangle = \bar{a}_\theta \sum_{\alpha=1}^{3} \Big(q(0) \langle \overset{(\mathrm{n})}{f}{}^2_\alpha(k_1) \rangle - \langle \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha(k_1) \rangle^2 (q(0) - q(2\bar{t}')) \Big). \qquad (6.25)$$

Если брус упругий, то $q(\bar{t}) \equiv 0$ и $\bar{w}^* \equiv 0$, и задача теплопроводности при $\theta_0 = \theta_e$ имеет элементарное решение: $\theta(t) = \theta_0 = \theta_e = \mathrm{const}$, т.е. упругий брус при циклическом деформировании не изменяет свою температуру. Для вязкоупругого бруса $\bar{w}^* \geqslant 0$, и в уравнении (6.24) появляется тепловой источник, поэтому $\partial\bar{\theta}/\partial\bar{t} \geqslant 0$, т.е. теплоизолированный брус всегда будет разогреваться (при $\theta_0 = \theta_e$ и $\bar{\alpha}_T = 0$). Этот разогрев обусловлен только рассеиванием (диссипацией) энергии, поэтому его называют *диссипативным разогревом* или *саморазогревом*.

7.6.8. Температура саморазогрева при симметричном цикле. Процесс деформирования называют *симметричным циклом*, если среднее значение функции $\overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1)$ за цикл колебаний равно нулю: $\langle \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_1(k_1) \rangle = 0$.

Из (5.3) следует, что для симметричного цикла одновременно выполняются условия $\langle \overset{(\mathrm{n})}{f}{}_\alpha(k_1) \rangle = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, а из (6.25) вытекает, что функция рассеивания зависит только от температуры $\bar{\theta}$:

$$\bar{w}^*(\bar{\theta}) = a_\theta(\bar{\theta}) q(0) \bar{f}^2, \qquad \bar{f}^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} \langle \overset{(\mathrm{n})}{f}{}^2_\alpha(k_1) \rangle. \qquad (6.26)$$

Тогда задача теплопроводности (6.24) принимает вид

$$\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} = -\bar{\alpha}_T(\bar{\theta} - \theta_0) + a_\theta(\bar{\theta}) q(0) \bar{f}^2, \qquad t = 0: \quad \bar{\theta} = \theta_0. \qquad (6.27)$$

Ее решение можно представить в виде

$$t = H(\bar{\theta}), \qquad H(\bar{\theta}) \equiv \int_{\theta_0}^{\bar{\theta}} \frac{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon d\widetilde{\theta}}{a_\theta(\bar{\theta}) q(0) \bar{f}^2 - \bar{\alpha}_T(\bar{\theta} - \theta_e)}. \qquad (6.28)$$

7.6.9. Режимы саморазогрева при отсутствии теплоотвода. Если теплоотвод от бруса отсутствует ($\bar{\alpha}_T = 0$), то в зависимости от вида функции $a_\theta(\bar{\theta})$ возможны два принципиально различных режима саморазогрева.

1) Если $a_\theta(\bar{\theta})$ такова, что интеграл

$$H(\bar{\theta}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon d\theta}{(a_\theta(\bar{\theta}) q(0) \bar{f}^2} \qquad (6.29)$$

на бесконечности имеет бесконечный предел (т.е. $H(\bar{\theta}) \to +\infty$ при $\bar{\theta} \to \infty$), то в брусе происходит постепенное неограниченное возрастание температуры саморазогрева (рис. 7.13, кривая *1*).

Для многих реальных вязкоупругих сред в качестве функции $a_\theta(\theta)$ часто используют зависимость Вильямса, Ланделла и Ферри:

$$a_\theta(\theta) = \exp\frac{a_1(\theta-\theta_0)}{a_2+\theta-\theta_0}, \qquad a_1, a_2 - \mathrm{const}, \tag{6.30}$$

для которой действительно выполняется условие $H(\bar{\theta}) \to +\infty$ при $\bar{\theta} \to +\infty$.

2) Если зависимость $a_\theta(\theta)$ такова, что функция $H(\bar{\theta})$ ограничена на бесконечности (т.е. $H(+\infty) < +\infty$), то из (6.29) следует, что температура $\bar{\theta}(t)$ диссипативного разогрева достигает бесконечных значений за конечное время $t_* = H(+\infty)$, иначе говоря, функция $\bar{\theta}(t)$ имеет вертикальную асимптоту при $t \to t_*$ (рис. 7.13, кривая *2*). Явление резкого возрастания температуры в определенный момент времени t_* называют *тепловым взрывом*.

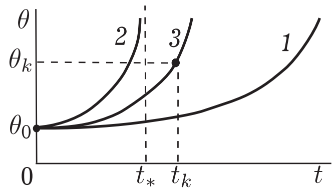

Рис. 7.13. Различные режимы диссипативного разогрева теплоизолированного вязкоупругого бруса: *1* — неограниченное возрастание температуры, *2* — тепловой взрыв, *3* — тепловой псевдовзрыв

Если, например, функция $a_\theta(\theta)$ является экспоненциальной (что характерно для некоторых типов эластомерных материалов):

$$a_\theta = \mathrm{e}^{a_1(\theta-\theta_0)}, \qquad a_1 > 0, \tag{6.31}$$

то, вычисляя интеграл в (6.29), получаем для температуры саморазогрева следующее выражение:

$$\bar{\theta}(t) = \theta_0 - \frac{1}{a_1}\ln\left(1 - \frac{q(0)\bar{f}^2 a_1 t}{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}\right), \quad t_* = \frac{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}{q(0)\bar{f}^2 a_1}, \tag{6.32}$$

из которого действительно следует, что $\bar{\theta} \to +\infty$ при $t \to t_*$.

3) На практике иногда встречается промежуточная ситуация, когда выполняется условие $H(\bar{\theta}) \to +\infty$ при $\bar{\theta} \to +\infty$, но рост температуры $\bar{\theta}(t)$ со временем оказывается настолько резким, что он «внешне» становится похож на эффект теплового взрыва: предельная температура θ_k, при которой происходит тепловое разрушение материала достигается за сравнительно короткое время t_k (рис. 7.13, кривая *3*). Такие режимы иногда называют *тепловым псевдовзрывом*.

7.6.10. Режимы саморазогрева при наличии теплоотвода. При наличии теплоотвода ($\alpha_T > 0$) характер саморазогрева тела меняется. Так как обе функции $\alpha_\theta(\bar{\theta})$ и $\alpha_T(\bar{\theta}-\theta_0)$ неотрицательны, то знаменатель подынтегрального выражения в (6.28) при некотором конечном значении $\bar{\theta} = \theta_\infty < +\infty$ может обращаться в нуль, в этом случае функция $H(\bar{\theta}) = t$ стремится к бесконечности: $\bar{\theta} \to \theta_\infty$ при $t \to +\infty$. Таким образом, при наличии теплоотвода режимы *1*, *2* и *3* невозможны, так как температура всегда остается ограниченной, в этом случае реализуются другие четыре характерных режима *4*, *5*, *6* и *7* (рис. 7.14).

4) Режим *4* реализуется, когда функция рассеивания $\bar{w}^*$ не зависит от

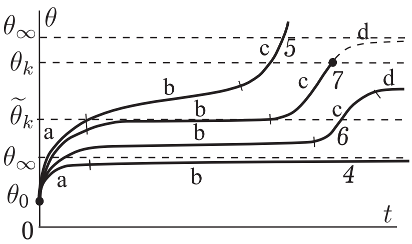

Рис. 7.14. Характерные режимы саморазогрева вязкоупругого бруса при колебаниях с теплоотводом

температуры ($a_\theta = 1$). В этом случае из уравнения теплопроводности (6.27) следует, что $d^2\bar{\theta}/dt^2 \leqslant 0$ (упр. 7.6.1), т.е. кривая саморазогрева будет выпуклой вверх — это наиболее распространенный вид кривой саморазогрева для реальных практических задач.

На этой кривой выделяют два характерных участка: участок 'a' — быстрого уменьшения скорости нагрева от максимального значения $\dot{\bar{\theta}}(0)$ до практически нулевого значения $\dot{\bar{\theta}} \approx 0$ и стационарный участок 'b', на котором $\dot{\bar{\theta}} \approx 0$.

Если $a_\theta(\bar{\theta}) = 1$, то задача теплопроводности (6.27) допускает явный вид решения (упр. 7.6.1):

$$\bar{\theta} = \theta_0 + \frac{q(0)\bar{f}^2 \overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}{\bar{\alpha}_T}\left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}_T t}{\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}\right)\right). \tag{6.33}$$

5) Если $a_\theta(\bar{\theta})$ неограничена при $\bar{\theta} \to +\infty$ (такова экспоненциальная функция (6.31)), то реализуется температурный режим *5*, при котором кривая саморазогрева имеет три участка: 'a' — начальный, 'b' — установившийся, где $\dot{\theta} \approx \mathrm{const}$, и 'c' — неустановившийся, где функция $\bar{\theta}(\bar{t})$ выпукла вниз (рис. 7.14) и является неограниченной при $t \to +\infty$.

6) Если $a_\theta(\bar{\theta})$ зависит от температуры, но является ограниченной при $\bar{\theta} \to +\infty$ и при $\bar{\theta} = \widetilde{\theta}_k$ имеет точку перегиба (такова функция (6.30)), то реализуется температурный режим *6* саморазогрева (рис. 7.14), который характеризуется наличием четырех участков: начального — 'a', установившегося — 'b', неустановившегося — 'c', за которым снова следует установившийся участок — 'd'. Температура $\bar{\theta}(t)$ остается ограниченной при $t \to +\infty$.

7) Режим *7* реализуется при тех же условиях, что и режим *6*, но на неустановившемся участке 'c' температура саморазогрева $\bar{\theta}(t)$ достигает такого критического значения θ_k, когда происходит тепловое разрушение материала (по аналогии с режимом *3*), и участок 'd' не успевает реализоваться.

7.6.11. Экспериментальные и расчетные данные о саморазогреве вязкоупругих тел. На рис. 7.15 показаны расчетные и экспериментальные кривые саморазогрева полиуретанового бруса при циклическом деформировании по гармоническому закону (6.3). Расчетное изменение температуры $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ найдено путем конечно-разностного решения задачи (6.24), (6.25) по неявной разностной схеме:

$$\Delta\theta^{i+1} = \frac{\Delta\theta^i + \bar{w}^* \Delta t/\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}{1 + \bar{\alpha}^{\mathrm{T}}/\overset{\circ}{\rho} c_\varepsilon}, \tag{6.34}$$

где $\theta^i = \theta(t_i)$ — значение температуры в i-м узле в момент времени t_i, а Δt — шаг по времени. Значения ядра релаксации $q(2t')$ и $q(0)$, входящие в выражение (6.25) для функции рассеивания, определяли по (6.5), а $B^{(\gamma)}$ и

$\tau^{(\gamma)}$ в этой формуле — по кривым релаксации методом, изложенным в п. 7.5.5. Значения констант $B^{(\gamma)}$ и $\tau^{(\gamma)}$ для полиуретана приведены в табл. 7.1. Функция $a_\theta(\theta)$ была аппроксимирована выражением (6.30), а значения констант в этой формуле приняты равными a_1 =21, a_2 = 208 K. Значения остальных констант в (6.24) были следующими: $\overset{\circ}{\rho} = 10^3$ кг/м^3, $c_\varepsilon = 0.8$ кДж/(кг $\cdot$ K), $\bar{\alpha}^{\mathrm{T}} = 10$ кВт/(м$^3 \cdot$ K). Среднее значение $\bar{k}_1$ и амплитуда колебаний k_1^0 выражались через минимальное и максимальное значения деформации в цикле $\delta_{\max}$ и $\delta_{\min}$:

$$\bar{k}_1 = 1 + \frac{1}{2}(\delta_{\max} + \delta_{\min}), \quad \bar{k}_1 = \frac{1}{2}(\delta_{\max} - \delta_{\min}). \tag{6.35}$$

На рис. 7.15 показаны температуры саморазогрева, полученные указанным расчетным методом для различных моделей B_n при $\delta_{\max}$ =50 % и $\delta_{\min}$ =34 %. Модель B_I при рассмотренных условиях задачи обеспечивала наилучшее совпадение с экспериментальными данными. Различие же между разными моделями B_n велико: модели B_{IV} и B_V приводят к стационарному режиму саморазогрева по типу 4), а модели B_I и B_{II} предсказывают режим 5) с наличием неустановившегося участка.

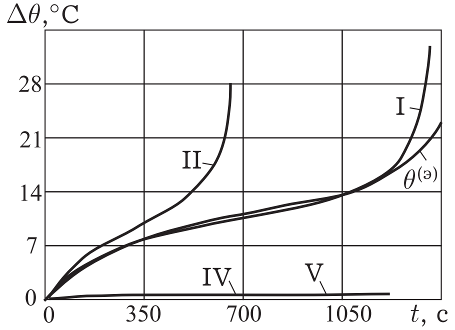

Рис. 7.15. Кривые саморазогрева полиуретана, рассчитанные по моделям B_n, и экспериментальная кривая саморазогрева $\theta^{(э)}$

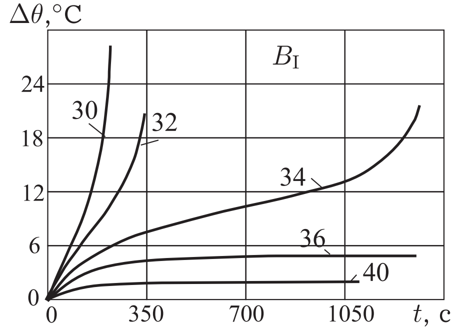

Рис. 7.16. Кривые саморазогрева полиуретана, рассчитанные по модели B_I при различных амплитудах колебаний

На рис. 7.16 показаны кривые саморазогрева полиуретана, рассчитанные по модели B_I при различных значениях $\delta_{\min}$ (значения этого параметра указаны на рис. 7.16 цифрами у кривых), значение $\delta_{\max}$ =50 % было фиксировано. С возрастанием амплитуды колебаний (т.е. в данном случае с уменьшением значений $\delta_{\min}$) интенсивность саморазогрева резко увеличивается. Отметим, что явление саморазогрева вязкоупругих сред часто играет существенную роль в снижении долговечности деталей конструкций при циклическом деформировании.

Упражнения к 7.6

Упражнение 7.6.1. Показать, что в случае $a_\theta(\bar{\theta}) = \mathrm{const}$ решением задачи (6.27) является выпуклая вверх функция, т.е. $d^2\bar{\theta}/dt^2 \leqslant 0$. Доказать формулу (6.33).

Глава 8

ПЛАСТИЧЕСКИЕ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

8.1. Модели A_n пластических сред с конечными деформациями

8.1.1. Основные допущения моделей. Если модели вязкоупругих сред наиболее адекватно описывают поведение «мягких» материалов — резин, полимеров, биоматериалов, то для моделирования механических неупругих свойств «жестких» материалов: металлов и сплавов — чаще применяют модели пластических сред.

Существуют различные модели пластических сред, рассмотрим только относящиеся к наиболее широко распространенному в приложениях классу *моделей пластического течения*. Эти модели удобнее рассматривать в формах A_n^ζ, B_n^ζ, C_n^ζ или D_n^ζ, в которых вместо ψ используют свободную энергию Гиббса $\overset{(n)}{\zeta}_A \equiv \zeta$ (3.3.20), а ОТТ выбирают в виде (3.3.27).

Определение 8.1. *Говорят, что рассматривается модель A_n^ζ пластической среды, если для этой среды*

1) *операторные определяющие соотношения (3.4.9) представляют собой функционалы по времени t от реактивных переменных $\mathcal{R}$ и их производных $\dot{\mathcal{R}}$:*

$$\Lambda(t) = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\mathbf{f}}}(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \tag{1.1}$$

2) *в состав реактивных переменных $\mathcal{R}$ дополнительно входит некоторый симметричный тензор второго ранга $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$, называемый тензором пластической деформации, а в состав активных переменных Λ — симметричный тензор второго ранга $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$, называемый тензором упругой деформации:*

$$\Lambda = \{\zeta, \eta, \overset{(n)}{\mathbf{C}}, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_e, w^*\}, \qquad \mathcal{R} = \{\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p, \theta\}, \tag{1.2}$$

3) *тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ связаны с $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ аддитивным соотношением*

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}}_e + \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p. \tag{1.3}$$

Если бы не наличие тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ в числе переменных $\mathcal{R}$ и Λ, то соотношение (1.1) можно рассматривать как объединенную модель фойгтовских и максвелловских (вязкоупругих) сред. Однако именно появление тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ приводит к новым эффектам, не свойственным указанным типам сред.

Как и для фойгтовских сред, зависимости (1.1) от $\mathcal{R}(t)$ и $\dot{\mathcal{R}}(t)$ будем полагать дифференцируемыми функциями, а функционалы от предыстории $\mathcal{R}^t(\tau)$, $\dot{\mathcal{R}}^t(\tau)$ будем полагать непрерывными, дифференцируемыми по Фреше.

Тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ могут быть введены просто аксиоматически, однако для обоснования «физичности» этих тензоров обычно рассматривают следующую модель.

Введем как обычно отсчетную конфигурацию $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, которую будем полагать ненапряженной (т.е. $\mathbf{T}(0) = 0$ в $\overset{\circ}{V}$), и актуальную конфигурацию $\mathcal{K}$, в которой поле тензора напряжений $\mathbf{T}(t)$, вообще говоря, отлично от тождественного нуля. Введем дополнительно еще одну конфигурацию — $\overset{p}{\mathcal{K}}$ (возможно не реализующуюся физически), в которой находилась бы среда, если бы в момент времени $t_p > t$ поле напряжений снова стало нулевым: $\mathbf{T}(t_p) = 0$. Кроме того, на $\overset{p}{\mathcal{K}}$ наложим требование, что если преобразования $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \mathcal{K} \to \overset{p}{\mathcal{K}}$ происходят без пластических деформаций (т.е.по модели идеальной среды), то конфигурация $\overset{p}{\mathcal{K}}$ должна совпадать с $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$. Такую конфигурацию $\overset{p}{\mathcal{K}}$ будем называть *разгруженной*.

Введем в каждой из этих конфигураций $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ и $\overset{p}{\mathcal{K}}$ локальные векторы базиса $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{r}_i$ и $\overset{p}{\mathbf{r}}_i$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\partial X^i}, \quad \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i}, \quad \overset{p}{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \overset{p}{\mathbf{x}}}{\partial X^i}, \tag{1.4}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ и $\overset{p}{\mathbf{x}}$ — радиусы-векторы материальной точки $\mathcal{M}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ и $\overset{p}{\mathcal{K}}$ (рис. 8.1).

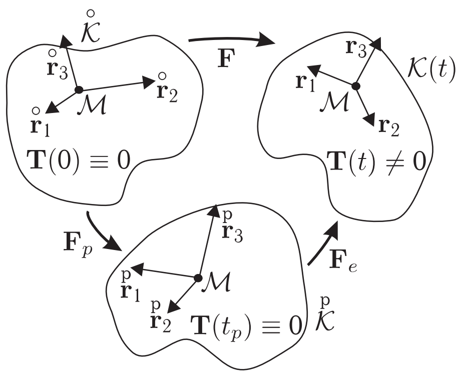

Рис. 8.1. Схема преобразования конфигураций

Построим обычным образом метрические матрицы в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ и $\overset{p}{\mathcal{K}}$:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \qquad \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{p}{g}_{ij} = \overset{p}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{p}{\mathbf{r}}_j, \tag{1.5а}$$

и обратные к ним матрицы g^{ij}, $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ и $\overset{p}{g}{}^{ij}$, с помощью которых введем векторы взаимных базисов:

$$\mathbf{r}^i = g^{ij}\mathbf{r}_j, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{\circ}{g}{}^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \overset{p}{\mathbf{r}}_i = \overset{p}{g}{}^{ij}\overset{p}{\mathbf{r}}_j. \tag{1.5б}$$

Образуем тензоры преобразований локальной окрестности точки $\mathcal{M}$ из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\overset{p}{\mathcal{K}}$, из $\overset{p}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$ и из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{F}_p = \overset{p}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \mathbf{F}_e = \mathbf{r}_i \otimes \overset{p}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i. \tag{1.6}$$

Назовем $\mathbf{F}_p$ и $\mathbf{F}_e$ *градиентами пластической* и *упругой деформаций* соответственно.

Очевидно, что между этими тензорами имеется следующее соотношение:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p. \tag{1.7}$$

Введем также три правых тензора деформации Коши–Грина:

$$\mathbf{C} = \varepsilon_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j, \qquad \mathbf{C}_p = \varepsilon^p_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j, \qquad \mathbf{C}_e = \varepsilon^e_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^j, \tag{1.8}$$

где обозначены компоненты тензора деформации ε_{ij} и компоненты тензоров пластической деформации ε^p_{ij} и упругой деформации ε^e_{ij}:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}), \qquad \varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\mathrm{p}}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}), \qquad \varepsilon^e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\mathrm{p}}{g}_{ij}). \tag{1.9}$$

Введем аналогичным образом три правых тензора деформации Альманзи:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \varepsilon^{ij}\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_e = \varepsilon^{ij}_e\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_p = \varepsilon^{ij}_p\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j, \tag{1.10}$$

где обозначены контравариантные компоненты тензора деформации ε^{ij}, тензора пластической деформации ε^{ij}_p и тензора упругой деформации ε^{ij}_e:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij}), \qquad \varepsilon^{ij}_p = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - \overset{\mathrm{p}}{g}{}^{ij}), \qquad \varepsilon^{ij}_e = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij} - g^{ij}). \tag{1.11}$$

Из (1.8)–(1.11) очевидно следует, что три правых тензора Коши–Грина и три правых тензора Альманзи связаны аддитивными соотношениями:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_p, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_e + \boldsymbol{\Lambda}_p, \tag{1.12}$$

из которых следует, что соотношение аддитивности (1.3) имеет место для энергетических тензоров деформации $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}$, если положить как обычно

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}_e = \boldsymbol{\Lambda}_e, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}_e = \mathbf{C}, \qquad \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}_p = \boldsymbol{\Lambda}_p, \qquad \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p. \tag{1.13}$$

Для того, чтобы обосновать аддитивное соотношение (1.3), для $n = \mathrm{II}, \mathrm{IV}$ введем полярное разложение для градиентов деформации (1.6):

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}, \qquad \mathbf{F}_p = \mathbf{O}_p \cdot \mathbf{U}_p, \qquad \mathbf{F}_e = \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{U}_e, \tag{1.14}$$

и представим симметричные тензоры искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}_e$ в своих собственных базисах

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \mathbf{U}_e = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{e}}{\lambda}_\alpha \overset{\mathrm{e}}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\mathrm{e}}{\mathbf{p}}_\alpha, \tag{1.15}$$

где λ_α, $\overset{\mathrm{e}}{\lambda}_\alpha$ — собственные значения тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}_e$.

Тогда можно ввести следующие тензоры:

$$\overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{C}} = \mathbf{U} - \mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^{3} (\lambda_\alpha - 1)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

$$\overset{\text{IV}}{\mathbf{C}}_p = \sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha - \overset{\text{e}}{\lambda}_\alpha)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \overset{\text{IV}}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\alpha=1}^{3}(\overset{\text{e}}{\lambda}_\alpha - 1)\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

$$\overset{\text{II}}{\mathbf{C}} = \mathbf{E} - \mathbf{U}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3}(1 - \lambda_\alpha^{-1})\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \tag{1.16}$$

$$\overset{\text{II}}{\mathbf{C}}_p = \sum_{\alpha=1}^{3}(\overset{\text{e}}{\lambda}{}_\alpha^{-1} - \lambda_\alpha^{-1})\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \qquad \overset{\text{II}}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\alpha=1}^{3}(1 - \overset{\text{e}}{\lambda}{}_\alpha^{-1})\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha,$$

для которых, очевидно, также справедливы аддитивные соотношения (1.3).

Таким образом, мы показали как могут быть введены тензоры упругой и пластической деформаций, удовлетворяющие соотношению (1.3).

8.1.2. Общее представление определяющих соотношений модели A_n^ζ пластических сред. Рассмотрим ОТТ в форме A_n (3.3.15):

$$\rho d\psi + \rho\eta\, d\theta - \overset{(\text{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}} + w^* dt = 0. \tag{1.17}$$

Используя аддитивное соотношение (1.3), это тождество можно представить следующим образом:

$$\rho d\psi + \rho\eta\, d\theta - \overset{(\text{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_e - \overset{(\text{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_p + w^* dt = 0. \tag{1.18}$$

Введем свободную энергию Гиббса ζ по аналогии с (3.3.20):

$$\zeta = \psi - \frac{\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}}{\rho} \cdot\cdot\, \overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_e, \tag{1.19}$$

тогда для ζ получаем следующее тождество (ОТТ в форме A_n^ζ):

$$\rho d\zeta + \rho\eta\, d\theta + \rho\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_e \cdot\cdot\, d(\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}/\rho) - \overset{(\text{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_p + w^* dt = 0. \tag{1.20}$$

В соответствии с моделью A_n^ζ свободная энергия Гиббса ζ является функционалом вида (1.1):

$$\zeta = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\zeta}}\big(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)\big), \quad \mathcal{R} = \{\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta\}. \tag{1.21}$$

Вычислим полный дифференциал от этого функционала, используя правило дифференцирования функционалов (7.1.24) по времени:

$$d\zeta = \dot{\zeta}dt = \frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}/\rho} \cdot\cdot\, d\Big(\frac{\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big) + \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_p} \cdot\cdot d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}_p +$$
$$+ \frac{\partial\zeta}{\partial(\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet} \cdot\cdot\, d\Big(\frac{\overset{(\text{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^\bullet + \frac{\partial\zeta}{\partial\dot{\theta}}d\dot{\theta} + \frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet} \cdot\cdot\, d\overset{(\text{n})}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet + \delta\zeta\, dt, \tag{1.22}$$

где $\delta\zeta$ — производная по Фреше.

Функционалом такого же вида (1.1) является тензор упругой деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e = \mathop{\overset{t}{\mathbf{C}_e}}_{\tau=0}\big(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)\big), \quad \mathcal{R} = \{\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p, \theta\}. \tag{1.23}$$

Введем подобно тому, как это было сделано для фойгтовских сред (см. п. 6.1.1), два новых тензорных функционала:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^0 = \mathop{\overset{t}{\mathbf{C}_e}}_{\tau=0}\big(\mathcal{R}(t), \mathbf{0}, \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)\big), \tag{1.24}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^1 = \overset{(n)}{\mathbf{C}}_e - \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^0. \tag{1.25}$$

В (1.24) аргументы, соответствующие скоростям изменения функций $\dot{\mathcal{R}}$, полагают равными нулю. Тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^0$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^1$ называют соответственно тензорами *равновесной упругой деформации* и *неравновесной упругой деформации.*

Подставим теперь (1.22), (1.24) и (1.25) в (1.20) и, приводя подобные, получаем следующее тождество;

$$\rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho} + \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^0\Big)\cdot\cdot\, d\frac{\overset{(n)}{\mathbf{T}}}{\rho} + \rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} + \eta\Big)d\theta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet}\cdot\cdot\, d\Big(\frac{\overset{(n)}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^\bullet + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\theta^\bullet}d\theta^\bullet +$$
$$+ \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet}\cdot\cdot\, d\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet + \Big(w^* - (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - \overset{(n)}{\mathbf{H}}_p)\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet + \rho\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^1\cdot\cdot\,\Big(\frac{\overset{(n)}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^\bullet + \rho\delta\zeta\Big)dt = 0, \tag{1.26}$$

где обозначены

$$\overset{(n)}{\mathbf{H}}_p = \rho(\partial\zeta/\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \qquad \overset{(n)}{\mathbf{T}}_H = \overset{(n)}{\mathbf{T}} - \overset{(n)}{\mathbf{H}}_p \tag{1.27}$$

— *тензоры упрочнения* и *приведенные тензоры напряжений.*

В силу независимости дифференциалов $d(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho)$, $d\theta$, $(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet$, $d\theta^\bullet$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet$ и dt, тождество (1.26) имеет место тогда и только тогда, когда коэффициенты при этих дифференциалах обращаются в нуль, т.е. имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^0 = -\partial\zeta/\partial(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho), & \text{(1.28а)} \\ \eta = -\partial\zeta/\partial\theta, & \text{(1.28б)} \\ \partial\zeta/\partial(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot\theta = 0, \quad \partial\zeta/\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet = 0, & \text{(1.28в)} \\ w^* = (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - \overset{(n)}{\mathbf{H}}_p)\cdot\cdot\,\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^\bullet - \rho\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_e^1\cdot\cdot\,\big(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho\big)^\bullet - \rho\delta\zeta & \text{(1.28г)} \end{cases}$$

— образующие определяющие соотношения для моделей A_n^ζ пластических сред, из которых следует, что

1) пластические среды являются диссипативными — для них $w^* \neq 0$,
2) тензор равновесной деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^0_e$ (а не $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$) обладает потенциалом ζ,
3) сам потенциал ζ, а, следовательно, и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$, и η не зависят от скоростей $(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet$, $\dot\theta$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p$:

$$\zeta = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\zeta}}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \qquad \mathcal{R} = \{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta\}, \tag{1.29}$$

однако зависимость от $\dot{\mathcal{R}}(t)$ имеется у функции диссипации w^* и у тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^1_e$.

Таким образом, модель A_n^ζ пластических сред задается тремя функционалами: свободной энергией Гиббса (1.29), тензором неравновесной упругой деформации

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^1_e = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\mathbf{C}^1_e}}\big(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)\big), \tag{1.30}$$

и тензором пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$.

8.1.3. Следствие из принципа Онзагера для моделей A_n^ζ пластических сред. Для построения функционала (1.30) и тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ воспользуемся принципом Онзагера (см. п. 3.12.1, аксиома 16) и составим плотность внутреннего производства энтропии (3.12.1) с учетом (1.28г):

$$\rho q^* = w^* - \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p - \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^1_e \cdot\cdot \Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^\bullet - \rho\delta\zeta - \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta \geqslant 0. \tag{1.31}$$

Для обеспечения неотрицательности этой функции, согласно принципу Онзагера, ее можно представить в виде обобщенной квадратичной формы, для чего вводим термодинамические силы X_β:

$$X_1 = \nabla\theta, \qquad X_2 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H, \qquad X_3 = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet \tag{1.32}$$

и термодинамические потоки

$$Q_1 = -\mathbf{q}/\theta, \qquad Q_2 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p, \qquad Q_3 = \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^1_e. \tag{1.33}$$

Тогда, согласно принципу Онзагера, термодинамические потоки Q_β должны быть линейными (или тензорно-линейными) функциями от X_β:

$$\begin{cases} -\mathbf{q}/\theta = L_{11}\cdot\nabla\theta + L_{12}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H + L_{13}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p = L_{12}\cdot\nabla\theta + L_{22}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H + L_{23}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet, \\ \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^1_e = L_{13}\cdot\nabla\theta + L_{23}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H + L_{33}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^\bullet. \end{cases} \tag{1.34}$$

Здесь L_{11} — тензор второго ранга, L_{12} и L_{13} — тензоры третьего ранга, а L_{22}, L_{23} и L_{33} — тензоры четвертого ранга, представляющие собой, согласно принципу равноприсутствия, тензорные функционалы того же вида, что применяются в общих определяющих соотношениях (1.1) модели A_n^ζ:

$$L_{\alpha\beta} = \underset{\tau=0}{\overset{t}{L}}{}_{\alpha\beta}(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \tag{1.35}$$

Соотношения (1.34) являются дополнительными определяющими соотношениями к системе (1.28) для модели A_n^ζ пластических сред. Первое из этих соотношений — это обобщенный *закон Фурье*, второе — это *закон изменения пластических деформаций*, а третье — закон изменения неравновесных упругих деформаций.

8.1.4. Модели A_n^ζ пластического течения. Многие частные модели пластических сред вытекают из закона изменения пластических деформаций (1.34б) после введения каких-либо предположений о виде функционалов (1.29) и (1.35).

В приложениях часто используют модели A_n^ζ *пластического течения*, в которой функционалы (1.29) и (1.35) являются только функциями указанных аргументов $\mathcal{R}$ и $\dot{\mathcal{R}}$ и одного скалярного функционала w_p:

$$\zeta = \zeta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta, w_p), \tag{1.36а}$$

$$L_{22} \equiv {}^4\mathbf{L}_p(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^\bullet, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p, w_p), \tag{1.36б}$$

$$L_{11}\theta = \lambda(\theta),\quad L_{12}=0,\quad L_{13}=0,\quad L_{23}=0,\quad L_{33}=0. \tag{1.36в}$$

Зависимостью от $\dot\theta$ и ρ в этих моделях пренебрегают, поэтому вместо аргумента $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho$ у функции L_{22} всегда можно использовать аргумент $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ (так как $\rho = \rho(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})$ и $\dot\rho$ всегда можно выразить через $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^\bullet$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p$). Перекрестные эффекты в соотношениях (1.34) данные модели не рассматривают, и тензор $\mathbf{C}^1_e$ тождественно равен нулю:

$$\mathbf{C}^1_e \equiv 0. \tag{1.37}$$

В качестве скалярного функционала w_p обычно выбирают

$$w_p = \int\limits_0^t \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(\tau)\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p(\tau)d\tau \tag{1.38}$$

— *параметр Тейлора* (удельную работу пластических деформаций), или

$$w_p = \int\limits_0^t \bigl(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p(\tau)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p(\tau)\bigr)^{1/2}d\tau \tag{1.39}$$

— *параметр Одквиста.*

Общий вид соотношений (1.34) и (1.28г) в этом случае таков:

$$-\mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{1.40а}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = {}^4\mathbf{L}_p\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H. \tag{1.40б}$$

$$w^* = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H - \rho\frac{\partial\zeta}{\partial w_p}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p. \tag{1.40в}$$

Из неравенства (1.31) следует, что тензор теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}$ является симметричным и положительно определенным, а тензор ${}^4\mathbf{L}_p$ — симметричным по парам индексов $(1,2)\leftrightarrow(3,4)$ (симметрия по индексам $1\leftrightarrow 2$ и $3\leftrightarrow 4$ у них следует из симметрии тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p$), т.е. он обладает симметрией вида (6.1.21), имеет не более 21 независимой компоненты и также положительно определен.

8.1.5. Ассоциированная модель пластичности A_n^{ζ}. Наиболее широко в настоящее время в приложениях применяют так называемую *ассоциированную модель пластичности*, в которой закон пластического течения (1.40б) связан (говорят, ассоциирован) с понятием поверхности пластичности. Рассмотрим эту модель.

Пусть в 6-мерном пространстве компонент $\overset{(\mathrm{n})}{T}{}^{ij}$ тензора напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ в каком-либо базисе, например, в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i$, имеется поверхность, уравнение которой задается системой скалярных уравнений

$$f_\beta = 0, \qquad \beta = 1,\ldots,k, \tag{1.41}$$

где f_β — функции вида (1.36а):

$$f_\beta = f_\beta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta, w_p), \tag{1.42}$$

зависящие параметрически от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, θ и w_p и называаемые *пластическими потенциалами.*

Обозначим

$$\frac{d' f_\beta}{dt} = \frac{\partial f_\beta}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}\cdot\cdot\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^{\bullet} \tag{1.43}$$

— частичную производную по времени от функций (1.42), которая совпадает с полной производной $f^{\bullet}_{\beta} = df_{\beta}/dt$, только если f_{β} не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, θ, и w_p:

$$f_{\beta} = f_{\beta}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}). \tag{1.44}$$

В этом случае говорят, что рассматривается *модель идеально-пластической среды*. Ассоциированную модель (1.42), в которой такая зависимость учитывается, называют моделью *упрочняющейся пластической среды*.

Аксиоматически полагаем, что

1) во внутренней области, ограниченной поверхностью пластичности (1.41), пластические деформации не изменяются, т.е.

$$\text{если все} \quad f_{\beta} < 0, \quad \text{то} \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = 0, \tag{1.45}$$

причем, если хотя бы для одного β выполняется условие $df_{\beta}/dt > 0$, то говорят, что осуществляется *активное нагружение*, если же все $d'f_{\beta}/dt \leqslant 0$, то — *пассивное нагружение* или *разгрузка*;

2) на поверхности пластичности, если $d'f_{\beta}/dt = 0$, пластические деформации также не изменяются (такое нагружение называют *нейтральным*), если же $d'f_{\beta}/dt > 0$, то $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ изменяются (говорят, что происходит *пластическое нагружение*), т.е.

$$\text{если} \quad f_{\beta} = 0, \quad d'f_{\beta}/dt = 0, \ \text{то} \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = 0, \tag{1.46}$$

$$\text{если} \quad f_{\beta} = 0, \quad d'f_{\beta}/dt > 0, \ \text{то} \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p \neq 0. \tag{1.47}$$

Заметим, что состояние среды, при котором ее тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ находится вне поверхности пластичности, невозможно, поскольку аксиоматически полагают, что поверхность пластичности движется вместе с изменением тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, если $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p \neq 0$, т.е. условие $f > 0$ не реализуется.

Конкретное выражение для скорости пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p$ в случае (1.47) пластического нагружения дает *модель Драккера* (или *закон градиентальности*), согласно которой тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p$ выбирается пропорциональным градиенту к поверхности пластичности:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = \sum_{\alpha=1}^{k} \dot{\varkappa}_{\alpha}(\partial f_{\alpha}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \tag{1.48}$$

где $\dot{\varkappa}_{\alpha}$ — коэффициенты пропорциональности, которые удобно записывать в виде производных по времени и которые сами являются скалярными функциями вида

$$\dot{\varkappa}_{\alpha} = \dot{\varkappa}_{\alpha}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p, \theta, w_p), \qquad \alpha = 1, \ldots k. \tag{1.49}$$

Если $k \leqslant 6$, то эти функции находят из самого уравнения градиентальности, взамен присоединяя к тензорному уравнению (1.48) k уравнений (1.41) поверхности пластичности. Таким образом, имеем $6+k$ скалярных уравнений (1.48) и (1.41) для нахождения шести компонент тензора $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$ и k функций $\varkappa_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots k$.

Заметим, что закон градиентальности (1.48) записан только для пластического нагружения. Для того, чтобы получить выражение для $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$ при произвольном нагружении, следует объединить соотношения (1.45)–(1.47). Это можно сделать с помощью функций Хевисайда $h_+(x)$ и $h_-(x)$:

$$h_+(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad h_-(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.50}$$

и их комбинаций

$$h = 1 - \prod_{\beta=1}^{k} \Big(1 - h_+(f_\beta) h_-\big(\frac{d' f_\beta}{dt}\big)\Big), \tag{1.51}$$

где $\prod\limits_{\beta=1}^{k}$ — произведение множителей. Несложно проверить, что если выполняются условия (1.45) или (1.46), то $h = 0$, а если условие (1.47), то $h = 1$. Тогда для $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$ при произвольном нагружении получаем

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = h \sum_{\alpha=1}^{k} \dot{\varkappa}_\alpha (\partial f_\alpha / \partial \overset{(n)}{\mathbf{T}}). \tag{1.52}$$

Это соотношение должно удовлетворять следствию из принципа Онзагера (1.40б) для моделей пластического течения, т.е. должно выполняться соотношение

$$h \sum_{\alpha=1}^{k} \dot{\varkappa}_\alpha (\partial f_\beta / \partial \overset{(n)}{\mathbf{T}}) = {}^4\mathbf{L}_p \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}_H, \tag{1.53}$$

где ${}^4\mathbf{L}_p$ — некоторый неопределенный симметричный тензор четвертого ранга. Соотношение (1.53) означает, что функции f_β, называемые *пластическими потенциалами*, должны быть квазилинейными функциями от $\overset{(n)}{\mathbf{T}} - \overset{(n)}{\mathbf{H}}_p$.

Замечание. Для ассоциированной модели пластичности часть определяющих соотношений для $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$ дается уравнениями (1.41), представляющими неявное задание компонент тензора $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$. Эти соотношения также можно представить в виде выражения (1.40б), но только записанного в неявной форме:

$$\Phi_\beta \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} - \varphi_\beta = 0, \tag{1.54}$$

где Φ_β — некоторые симметричные тензоры второго ранга, а

$$\varphi_\beta = \Phi_\beta \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{L}_p \cdot\cdot\, (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p). \tag{1.55}$$

Действительно, дифференцируя (1.41) по t, получаем, что

$$\Phi_\beta = \partial f / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \qquad \varphi_\beta = \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^\bullet + \frac{\partial f_\beta}{\partial \theta}\dot{\theta}. \tag{1.56}$$

Поскольку соотношения (1.44) — скалярные, то следствие (1.54) из принципа Онзагера не накладывает никаких ограничений на вид пластических потенциалов f_β, а соотношение

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^\bullet + \frac{\partial f_\beta}{\partial \theta}\dot{\theta} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{L}_p \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p, \tag{1.57}$$

являющееся следствием (1.55) и (1.56) и представляющее собой аналог формулы (1.53), всегда может быть удовлетворено путем надлежащего выбора неопределенного тензора ${}^4\mathbf{L}_p$.

Для упругих деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ из (1.28а) и (1.37) в ассоциированной модели имеем соотношение

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \mathbf{K}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta, w_p) = -\frac{\partial \zeta}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}. \tag{1.58}$$

Модель пластической среды, в которой потенциал ζ не зависит явно от тензора пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, называют *моделью A_n^ζ упругопластической среды*, для нее

$$\zeta = \zeta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \theta, w_p), \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p \equiv 0, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \mathbf{K}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \theta, w_p) = -\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}. \tag{1.59}$$

Эту модель чаще всего применяют в приложениях. Модель же с явной зависимостью ζ от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ обычно привлекают в тех случаях, когда требуется учесть так называемый эффект деформационной анизотропии, т.е. изменение группы симметрии среды в процессе изменения пластических деформаций.

Модель, в которой пренебрегают зависимостью ζ и от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ и от w_p называют *моделью идеально-упругопластической среды* (не путать с упруго-идеально-пластической средой, в которой, согласно данным выше определениям (1.44), пластические потенциалы f_β не зависят от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ и w_p).

Наконец, если ζ не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ и w_p, а от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho$ зависит только квадратичным образом, то говорят, что рассматривается *модель A_n^ζ пластической среды с линейной упругостью*.

8.1.6. Следствие из принципа материальной симметрии для ассоциированной модели A_n^{ζ} пластичности. Применим для определяющих соотношений (1.53), (1.58) принцип материальной симметрии. Поскольку все тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ являются H-индифферентными относительно ортогональных H-преобразований, следствием принципа материальной симметрии является утверждение о том, что упругий потенциал ζ (1.36а) должен быть функцией от $J_\gamma^{(s)}$ совместных инвариантов тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ относительно некоторой группы $\overset{\circ}{G}_s$ в неискаженной начальной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$:

$$\zeta = \zeta(J_\gamma^{(s)}, \theta, w_\beta^p), \tag{1.60}$$

где

$$J_\gamma^{(s)} = J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \qquad \gamma = 1, \dots z. \tag{1.61}$$

Доказательство этого утверждения такое же, как и для фойгтовских сред (см. п. 6.1.4). Полагая, для простоты начальную конфигурацию $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ неискаженной, как и ранее (см. пп. 3.7.3, 7.1.6) будем рассматривать только группы $\overset{\circ}{G}_s$ в этой конфигурации.

Вместо одного скалярного функционала (1.38) w_p в число аргументов функции ζ (1.60) в общем случае может входить набор таких функционалов w_β^p, представляющих собой интеграл от тех совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)}$, которые содержат оба тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$:

$$w_\beta^p = \int_0^t J_\beta^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}(\tau),\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}(\tau))d\tau, \qquad \beta = 1, \dots, z. \tag{1.62}$$

Тогда определяющие соотношения (1.58) можно представить в тензорном базисе по аналогии с идеальными средами:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{z} \varphi_\gamma J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}, \tag{1.63}$$

где φ_γ — скалярные функции вида (1.60), а $J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}$ — тензоры производной:

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(J_\alpha^{(s)}, \theta, w_\beta^p) = -\partial\zeta/\partial J_\gamma^{(s)}, \qquad J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)} = \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}, \qquad \gamma = 1, \dots, z. \tag{1.64}$$

Из принципа материальной симметрии также следует, что функции пластичности f_β (1.42) также являются функциями от совместных инвариантов $J_\alpha^{(s)p}$:

$$f_\beta = f_\beta(J_\alpha^{(s)p}, \theta, w_\beta^p), \qquad \beta = 1, \dots k. \tag{1.65}$$

Однако, согласно следствию (1.53) из принципа Онзагера, производные $\partial f_\beta/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ должны быть квазилинейными функциями тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$, поэтому в (1.65) $J_\alpha^{(s)p}$ должны быть совместными инвариантами от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, причем только линейными и квадратичными:

$$J_\alpha^{(s)p} = J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \qquad \alpha = 1, \ldots z_1 \leqslant z. \tag{1.66}$$

Тогда определяющие соотношения (1.52) в тензорном базисе примут вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)p}, \tag{1.67}$$

где

$$\psi_\alpha = h \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial J_\alpha^{(s)p}}, \qquad J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)p} = \partial J_\alpha^{(s)p}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}. \tag{1.68}$$

Соотношения (1.60)–(1.68) называют *представлением ассоциированной модели пластичности в тензорном базисе*.

Тензоры производной $J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)p}$ и $J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)}$ связаны друг с другом следующим образом:

$$J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)p} = \frac{\partial J_\alpha^{(s)p}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_H} \cdot\cdot \frac{\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p)}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}} = J_{\alpha\mathbf{T}_H}^{(s)p} \cdot\cdot (\boldsymbol{\Delta} - {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_{p\mathbf{T}}). \tag{1.69}$$

С учетом (1.27) и (1.59) находим выражение для тензора четвертого ранга;

$$\begin{aligned} {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_{p\mathbf{T}} \equiv \frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}} &= \sum_{\gamma=1}^{z} \frac{\partial}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}} \Big(\frac{\partial \zeta}{\partial J_\gamma^{(s)}} \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p} \Big) = \\ &= \sum_{\gamma,\beta=1}^{z} \Big(\frac{\varphi_{\gamma\beta}}{2} (J_{\beta\mathbf{T}}^{(s)} \otimes J_{\gamma\mathbf{C}_p}^{(s)} + J_{\gamma\mathbf{C}_p}^{(s)} \otimes J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}) + \delta_{\gamma\beta} \varphi_\gamma J_{\gamma\mathbf{T}\mathbf{C}_p}^{(s)} \Big), \end{aligned} \tag{1.70}$$

где обозначены

$$\varphi_{\gamma\beta} = \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial J_\beta^{(s)}} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial J_\beta^{(s)} J_\gamma^{(s)}}, \qquad J_{\gamma\mathbf{T}\mathbf{C}_p}^{(s)} = \frac{J_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p}. \tag{1.71}$$

Подставляя (1.68) в (1.67), получаем окончательно

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}_H}^{(s)p} \cdot\cdot (\boldsymbol{\Delta} - {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_{p\mathbf{T}}). \tag{1.72}$$

Для ассоциированной модели упругопластической среды ζ не зависит от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, поэтому

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p \equiv 0, \qquad 4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_{p\mathbf{T}} \equiv 0, \tag{1.73}$$

$$J_\gamma^{(s)p} = J_\gamma^{(s)}, \quad J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)p} = J_{\gamma\mathbf{T}_H}^{(s)p} = J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}, \qquad J_{\gamma\mathbf{C}_p}^{(s)} = 0, \quad J_{\gamma\mathbf{T}\mathbf{C}_p}^{(s)} = 0,$$

т.е. инварианты $J_\gamma^{(s)p}$ и $J_\gamma^{(s)}$ совпадают, а определяющие соотношения (1.60), (1.63), (1.65) и (1.72) принимают вид

$$\zeta = \zeta(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta, w_\beta^p), \quad \gamma = 1, \ldots r, \tag{1.74а}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \tag{1.74б}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \tag{1.74в}$$

$$f_\beta = f_\beta(J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \theta, w_\beta^p), \tag{1.74г}$$

$$\varphi_\gamma = -\frac{\partial\zeta}{\partial I_\gamma^{(s)}}, \qquad I_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)} = \frac{\partial I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}, \qquad \psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial J_\alpha^{(s)}}. \tag{1.74д}$$

8.1.7. Ассоциированные модели пластичности A_n^ζ для изотропных сред. Запишем представления (1.74) для трех основных групп симметрии G_s: O, T_3 и I, выбирая совместные инварианты $J_\gamma^{(s)}$ таким же образом, как и для фойгтовских сред и вязкоупругих сред.

Для изотропной среды функциональный базис совместных инвариантов $J_\gamma^{(I)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)$ состоит из 9 инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. (6.1.35) и (7.2.7)):

$$\begin{gathered} J_\alpha^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \qquad J_{\alpha+3}^{(I)} = I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \\ J_7^{(I)} = \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \qquad J_8^{(I)} = \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^2, \qquad J_9^{(I)} = \frac{1}{\rho^2}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2 \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \end{gathered} \tag{1.75}$$

Тогда тензоры производной $J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}$ (1.64) имеют следующий вид (см. (7.2.8)):

$$\begin{gathered} J_{1\mathbf{T}}^{(I)} = \mathbf{E}, \quad J_{2\mathbf{T}}^{(I)} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \qquad J_{3\mathbf{T}}^{(I)} = \frac{1}{\rho^2}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2 - I_1\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \mathbf{E}I_2), \\ J_{\alpha+3,\mathbf{T}}^{(I)} = \mathbf{0}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad J_{7\mathbf{T}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p. \quad J_{8\mathbf{T}}^{(I)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^2, \\ J_{9\mathbf{T}}^{(I)} = \frac{1}{\rho}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}). \end{gathered} \tag{1.76}$$

Подставляя эти выражения в (1.63) и группируя по тензорным степеням, получим следующее представление определяющих соотношений (1.63) в тензорном базисе:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + \frac{\widetilde{\varphi}_2}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \frac{\varphi_3}{\rho^2}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2 + \widetilde{\varphi}_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p + \widetilde{\varphi}_5\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2 + \frac{\widetilde{\varphi}_6}{\rho}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \quad (1.77)$$

где обозначены скалярные функции (сравните с (3.8.46а)):

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1 + \varphi_3 I_2, \qquad -\widetilde{\varphi}_2 = \varphi_2 + \varphi_3 I_1, \quad \widetilde{\varphi}_{3+\gamma} = \varphi_{6+\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, 3. \quad (1.78)$$

Для модели упруго-пластической среды (1.59) функции $\widetilde{\varphi}_4$, $\widetilde{\varphi}_5$ и $\widetilde{\varphi}_6$, согласно (1.64), являются нулевыми, и мы получаем соотношение

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + (\widetilde{\varphi}_2/\rho)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + (\varphi_3/\rho^2)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2, \quad (1.79)$$

аналогичное определяющему соотношению идеально-упругой изотропной среды (3.8.46), но записанное в обратном виде. Здесь

$$\varphi_\gamma = -\frac{\partial\zeta}{\partial I_\gamma}, \qquad \zeta = \zeta(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta, w_p), \quad (1.80)$$

а параметр Тейлора w_p только один.

Для упруго-пластической среды, согласно принципу Онзагера, в число аргументов функций пластичности f_β входят только линейные и квадратичные инварианты, т.е. только $J_\gamma^{(I)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)$, $\gamma = 1, 2, 4, 5, 7$, $(z_1 = 5)$, среди которых совместный инвариант только один — $J_7^{(I)}$. Подставляя тензоры производной (1.76) в (1.74в), получаем следующее выражение для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = \widetilde{\psi}_1\mathbf{E} - \psi_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \psi_7\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \quad (1.81)$$

где ψ_1, ψ_2 и ψ_7 определяются формулами (1.68):

$$\psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{k}\varkappa_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial J_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})}, \qquad \psi_7 = h\sum_{\beta=1}^{k}\varkappa_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial J_7^{(I)}}, \quad \widetilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \quad (1.82)$$

$$f_\beta = f_\gamma(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), J_7^{(I)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \theta, w_p). \quad (1.83)$$

Формулы (1.78)–(1.82) дают общий вид определяющих соотношений ассоциированной модели изотропной упруго-пластической среды.

8.1.8. Модели Губера–Мизеса для изотропных пластических сред. Для частных моделей изотропных упруго-пластических сред обычно принимают дополнительные допущения о виде упругого и пластических потенциалов ζ и f_β. Экспериментально установлено, что достаточно адекватное описание поведения многих упруго-пластических сред может быть получено с помощью *модели Губера–Мизеса*, в которой пластический потенциал f

только один и зависит явным образом только от одного совместного инварианта Y_H:

$$f = f(Y_H, \theta, w_p), \tag{1.84}$$

где инвариант Y_H вводится как свертка тензора $\mathbf{P}_H$ — девиатора тензора $\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ (см. определение девиатора (7.2.91)):

$$Y_H^2 = \frac{3}{2}\mathbf{P}_H \cdot\cdot\, \mathbf{P}_H, \qquad \mathbf{P}_H = (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p) - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)\mathbf{E}, \tag{1.85}$$

а H — *параметр упрочнения* — представляет собой скалярную функцию вида

$$H = H_0 Y_p^{2n_0}, \tag{1.86}$$

где H_0 и n_0 — константы, а Y_p — в свою очередь, инвариант девиатора тензора $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$, определяемый аналогично (1.85):

$$Y_p^2 = \frac{3}{2}\mathbf{P}_p \cdot\cdot\, \mathbf{P}_p, \qquad \mathbf{P}_p = \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)\mathbf{E}. \tag{1.87}$$

Инварианты Y_H и Y_p называют *интенсивностями тензоров* $\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ соответственно.

Девиатор можно построить для любого тензора, например, для тензора $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{P}_T = \overset{(n)}{\mathbf{T}} - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}})\mathbf{E}, \qquad Y_T^2 = \frac{3}{2}\mathbf{P}_T \cdot\cdot\, \mathbf{P}_T, \tag{1.88}$$

где Y_T — интенсивность тензора $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$. Любой девиатор тензора является ортогональным к метрическому тензору (подробнее о свойствах девиаторов см. в [12]):

$$\mathbf{P}_H \cdot\cdot\, \mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{P}_p \cdot\cdot\, \mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{P}_T \cdot\cdot\, \mathbf{E} = 0. \tag{1.89}$$

Инварианты Y_T и Y_p легко можно выразить через главные инварианты соответствующих тензоров (см. упр. 8.1.2):

$$Y_T^2 = I_1^2(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) - 3I_2(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), \qquad Y_p^2 = I_1^2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p) - 3I_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p). \tag{1.90}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что инвариант Y_H^2 можно выразить через инварианты $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{T}})$, $I_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)$ и совместный инвариант $J_7^{(I)}$:

$$Y_H^2 = Y_T^2 + H^2 Y_p^2 - 3HJ_7^{(I)} + HI_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}})I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p). \tag{1.91}$$

Вычисляя теперь производные $\partial f/\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})$ от функции (1.84):

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial I_\alpha}=\frac{\partial f}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial Y_H}{\partial I_\alpha}=f_Y\frac{\partial Y_H^2}{\partial I_\alpha},\qquad f_Y\equiv\frac{1}{2Y_H}\frac{\partial f}{\partial Y_H},\\ \frac{\partial f}{\partial I_1}=f_Y(2I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})+HI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)),\quad \frac{\partial f}{\partial I_2}=-3f_Y,\quad \frac{\partial f}{\partial I_7^{(I)}}=-3Hf_Y,\end{gathered}\tag{1.91а}$$

и подставляя их в (1.82), получаем, что

$$\psi_1=\dot{\varkappa}hf_Y(2I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})+HI_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)),\quad \psi_2=-3\dot{\varkappa}hf_Y,\quad \psi_7=-3\dot{\varkappa}hf_YH.\tag{1.91б}$$

Тогда определяющие соотношения (1.81) принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}=3\dot{\varkappa}hf_Y\mathbf{P}_H.\tag{1.92}$$

В силу свойства (1.89) девиаторов, из (1.92) следует, что модель Губера–Мизеса является *пластически-несжимаемой*, т.е.

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}\cdot\cdot\,\mathbf{E}=0\qquad\text{или}\qquad I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)=0,\tag{1.93}$$

поэтому с учетом (1.87) соотношение (1.92) можно записать в виде квазилинейного соотношения между девиаторами:

$$\dot{\mathbf{P}}_p=3\dot{\varkappa}hf_Y\mathbf{P}_H.\tag{1.94}$$

Умножая соотношение (1.94) скалярно само на себя, находим выражение для $\dot{\varkappa}$ при пластическом нагружении:

$$\dot{\varkappa}=\pm\frac{\sqrt{\dot{\mathbf{P}}_p\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{P}}_p}}{\sqrt{6}\,f_YY_H}.\tag{1.95}$$

Если выражение (1.95) подставить в (1.94), то число независимых уравнений в нем сократится до четырех, и полная система определяющих соотношений образуется формулами (1.84), (1.93) и (1.94) (в них шесть независимых соотношений).

Если пластический потенциал выбран в форме Мизеса:

$$f=\frac{1}{3}(Y_H/\sigma_s)^2-1,\tag{1.96}$$

где $\sigma_s=\sigma_s(\theta,w_p)$ — заданная функция от θ и w_p, называемая *пределом текучести*, то $f_Y=1/(3\sigma_s^2)$, и итоговые соотношения пластичности (1.84), (1.92) и (1.93) принимают вид

$$\begin{gathered}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}=\frac{\dot{\varkappa}h}{\sigma_s^2}(\mathbf{P}_T-H\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p),\quad I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)=0,\\ f=\frac{1}{3}(Y_H/\sigma_s)^2-1=0,\quad \mathbf{P}_T=\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}-\frac{1}{3}I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})\mathbf{E},\quad H=H_0Y_p^{2n_0}.\end{gathered}\tag{1.97}$$

Параметр Тейлора (1.38) с учетом пластической несжимаемости (1.93) можно записать через девиаторы

$$w_p = \int\limits_0^t \mathbf{P}_T \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{P}}_p \, d\tau. \tag{1.98}$$

Говорят, что рассматривается *модель изотропной пластической среды с линейным упрочнением*, если параметр упрочнения H (1.86) является константой, т.е $H = H_0$, $n_0 = 0$.

8.1.9. Ассоциированные модели пластичности A_n^ζ для трансверсально-изотропных сред. Для *трансверсально-изотропной* среды функциональный базис совместных инвариантов $J_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)$ состоит из 11 инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. (6.1.36) и (7.2.11)):

$$\begin{gathered} J_\gamma^{(3)} = I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \quad \gamma = 1, \ldots 5; \quad J_{5+\gamma}^{(3)} = I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad \gamma = 1, \ldots 4; \\ J_{10}^{(3)} = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, (\widehat{\mathbf{c}}_3^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad J_{11}^{(3)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p - 2J_{10}^{(3)} - J_2^{(3)} J_8^{(3)}. \end{gathered} \tag{1.99}$$

Тензоры производной $J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}$ (1.64) в этом случае имеют следующий вид (см. (7.2.12)):

$$\begin{gathered} J_{1\mathbf{T}}^{(3)} = \mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \qquad J_{2\mathbf{T}}^{(3)} = \widehat{\mathbf{c}}_3^2, \qquad J_{3\mathbf{T}}^{(3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \\ J_{4\mathbf{T}}^{(3)} = 2\, {}^4\mathbf{O}_3 \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \quad J_{5\mathbf{T}}^{(3)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2 - I_1 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \mathbf{E} I_2, \\ J_{6\mathbf{T}}^{(3)} = J_{7\mathbf{T}}^{(3)} = J_{8\mathbf{T}}^{(3)} = J_{9\mathbf{T}}^{(3)} = 0, \\ J_{10\mathbf{T}}^{(3)} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \qquad J_{11\mathbf{T}}^{(3)} = {}^4\mathbf{O}_3 \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p. \end{gathered} \tag{1.100}$$

Подставляя эти выражения в (1.63) и группируя их по тензорным степеням, получим представление определяющих соотношений (1.63) трансверсально-изотропной пластической среды в тензорном базисе:

$$\begin{gathered} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \widetilde{\varphi}_1 \mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2 \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot\, (\widetilde{\varphi}_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \\ + \widetilde{\varphi}_{10} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) + \widetilde{\varphi}_4 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \varphi_5 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2 + \varphi_{11} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \end{gathered} \tag{1.101}$$

где обозначены скалярные функции

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \varphi_5 I_2^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \quad \widetilde{\varphi}_2 = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 I_2^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) - \varphi_{11} I_2^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \\ \widetilde{\varphi}_3 = \frac{\varphi_3}{2} - \varphi_4, \quad \widetilde{\varphi}_{10} = \frac{\varphi_{10}}{4} - \frac{\varphi_{11}}{2}, \qquad \widetilde{\varphi}_4 = 2\varphi_4 - \varphi_5 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}). \end{gathered} \tag{1.102}$$

Для модели упруго-пластической среды (1.58) имеем $\varphi_{10} = \varphi_{11} = 0$, и соотношение (1.101) принимает вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widetilde{\varphi}_3(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \widetilde{\varphi}_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \varphi_5\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2, \quad (1.103)$$

где

$$\zeta = \zeta(I_1^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}),\ldots,I_5^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}),\theta,w_1^p,\ldots,w_3^p), \qquad \varphi_\gamma = -\rho(\partial\zeta/\partial I_\gamma^{(3)}), \quad (1.104)$$

а w_β^p — параметры Тейлора (1.62) для трансверсально-изотропной среды, число которых в данном случае равно трем:

$$w_1^p = \int\limits_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet})d\tau = \int\limits_0^t\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}_{33}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{33}d\tau, \quad w_3^p = \int\limits_0^t\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} - w_2^p - w_1^p,$$

$$w_2^p = \int\limits_0^t((\mathbf{E}-\widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet})d\tau = \int\limits_0^t(\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}_{13}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{13} + \widehat{\overset{(\mathrm{n})}{T}}_{23}\widehat{\overset{(\mathrm{n})}{C}}{}^{\bullet}_{23})d\tau. \quad (1.105)$$

Для упруго-пластической среды, согласно принципу Онзагера, в число аргументов функций пластичности f_β не входит только кубический инвариант $J_3^{(3)} = I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})$:

$$f_\beta = f_\beta(J_1^{(3)},J_2^{(3)},J_4^{(3)},\ldots,J_{11}^{(3)},\theta,w_1^p,\ldots,w_3^p). \quad (1.106)$$

Совместных инвариантов в наборе (1.99) — два: $J_{10}^{(3)}$ и $J_{11}^{(3)}$. Тогда, подставляя тензоры производной (1.100) в (1.74в), получаем следующее выражение для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = \psi_1\mathbf{E} + (\psi_2-\psi_1)\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot(\psi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} +$$
$$+ \frac{\psi_{10}}{2}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) + {}^4\mathbf{O}_3\cdot\cdot(2\psi_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \psi_{11}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad (1.107)$$

$$\psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{k}\dot{\varkappa}_\beta(\partial f_\beta/\partial J_\alpha^{(3)}). \quad (1.108)$$

8.1.10. Двухпотенциальная модель пластичности для трансверсально-изотропных сред. Для частных моделей трансверсально-изотропных упруго-пластических сред принимают дополнительное допущение о виде потенциалов ζ и f_β. В *двухпотенциальной* модели полагают, что имеется два пластических потенциала, один из которых — f_2 — зависит только от тех инвариантов $J_\gamma^{(3)}$, которые в базисе $\widehat{\mathbf{c}}_\gamma$ содержат компоненты с индексом 3, т.е. $\overset{(n)}{T}_{\alpha 3}$ и $\overset{(n)}{C}_{p\alpha 3}$, а f_1 зависит от оставшихся инвариантов:

$$\begin{gathered} f_1 = f_1(I_1^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), I_4^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), I_1^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), I_4^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), J_{10}^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \theta, w_1^p, w_2^p), \\ f_2 = f_2(I_2^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), I_3^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}), I_2^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), I_3^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), J_{11}^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \theta, w_3^p). \end{gathered} \tag{1.109}$$

В *трансверсально-изотропной двухпотенциальной модели Губера–Мизеса* полагают, что каждый потенциал f_1 и f_2 является функцией от совместных инвариантов Губера–Мизеса для трансверсально-изотропной среды $Y_\alpha^{(3)}$:

$$f_2 = f_2(Y_2^{(3)}, Y_3^{(3)}, \theta, w_1^p, w_2^p), \qquad f_1 = f_1(Y_1^{(3)}, Y_4^{(3)}, \theta, w_3^p), \tag{1.110}$$

где

$$Y_\alpha^{(3)} = I_\alpha^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_\alpha \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \qquad \alpha = 1, \ldots 4; \qquad H_\alpha = H_\alpha^0 (I_\alpha^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p))^{n_\alpha^0}, \tag{1.111}$$

— совместные инварианты, которые однозначно выражаются через инварианты (1.99) (см. упр. 8.1.5):

$$\begin{aligned} Y_\alpha^{(3)} &= I_\alpha^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) - H_\alpha I_\alpha^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \qquad \alpha = 1, 2, \\ Y_3^{(3)} &= I_3^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) + H_2 I_3^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p) - 2H_3 J_{10}^{(3)}, \\ Y_4^{(3)} &= I_4^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) + H_2 I_4^{(3)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p) - 2H_4 J_{11}^{(3)}, \end{aligned} \tag{1.112}$$

а H_α^0, n_α^0 — константы.

Вычисляя производные $\partial f / \partial J_\alpha^{(3)}$ от функций (1.110) (только те, которые входят в выражение (1.67)):

$$\partial f_1/\partial I_1^{(3)} = f_{11}, \quad \partial f_1/\partial I_4^{(3)} = f_{14}, \quad \partial f_1/\partial J_{11}^{(3)} = -2f_{14}H_4, \tag{1.113}$$

$$\partial f_2/\partial I_2^{(3)} = f_{22}, \quad \partial f_2/\partial I_3^{(3)} = f_{23}, \quad \partial f_2/\partial J_{10}^{(3)} = -2H_3 f_{23}, \quad f_{\beta\gamma} \equiv \partial f_\beta / \partial Y_\gamma^{(3)},$$

и подставляя их в (1.108), получаем

$$\begin{gathered} \psi_1 = \dot{\varkappa}_1 f_{11} h, \quad \psi_2 = \dot{\varkappa}_2 f_{22} h, \quad \psi_3 = \dot{\varkappa}_2 f_{23} h, \quad \psi_4 = \dot{\varkappa}_1 f_{14} h, \\ \psi_{10} = -2\dot{\varkappa}_2 f_{23} H_3 h, \qquad \psi_{11} = -2\dot{\varkappa}_1 f_{14} H_4 h. \end{gathered} \tag{1.114}$$

Определяющие соотношения (1.107) для пластических деформаций принимают вид

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = \dot{\varkappa}_1 h (f_{11}(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) + 2f_{14}\, {}^4\mathbf{O}_3 \cdot\cdot (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_3 \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)) + \\ + \dot{\varkappa}_2 h (f_{22} \widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \frac{f_{23}}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_4 \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)). \end{aligned} \tag{1.115}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться (см. упр. 8.1.4), что тензоры

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{1H} &\equiv f_{11}(\mathbf{E}-\widehat{\mathbf{c}}_3^2)+2f_{14}\ {}^4\mathbf{O}_3\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}-H_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p),\\ \mathbf{P}_{1H} &\equiv f_{22}\widehat{\mathbf{c}}_3^2+\frac{f_{23}}{2}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1+\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}-H_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)\end{aligned}\tag{1.116}$$

взаимно-ортогональны:

$$\mathbf{P}_{1H}\cdot\cdot\mathbf{P}_{2H}=0,\tag{1.117}$$

поэтому, переписывая соотношение (1.115) с учетом обозначений (1.116) в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}=\dot{\varkappa}_1 h\mathbf{P}_{1H}+\dot{\varkappa}_2 h\mathbf{P}_{2H}\tag{1.118}$$

(это аналог соотношения (1.94)) и умножая его скалярно на $\mathbf{P}_{1H}$ и $\mathbf{P}_{2H}$, получаем

$$\dot{\varkappa}_1=\pm\sqrt{\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}\cdot\cdot\,\mathbf{P}_{1H}}{\mathbf{P}_{1H}\cdot\cdot\,\mathbf{P}_{1H}}},\qquad \dot{\varkappa}_2=\pm\sqrt{\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}\cdot\cdot\,\mathbf{P}_{2H}}{\mathbf{P}_{2H}\cdot\cdot\,\mathbf{P}_{2H}}}\tag{1.119}$$

— выражения для $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, аналогичные выражению (1.95).

Если подставить (1.119) в (1.118), то для нахождения всех компонент тензора пластической деформации к соотношению (1.118) следует присоединить еще два скалярных уравнения

$$f_1=0,\qquad f_2=0,$$

где f_β выражаются по формулам (1.110).

Эти функции обычно выбирают в квадратичном виде, подобном модели Мизеса (1.96):

$$\begin{aligned}2f_1&=\left(\frac{Y_{4H}}{\sigma_{4s}}\right)^2+\left(\frac{|Y_{1H}|+Y_{1H}}{2\sigma_{1s}^+}\right)^2+\left(\frac{|Y_{1H}|-Y_{1H}}{2\sigma_{1s}^-}\right)^2-1,\\ 2f_2&=\left(\frac{|Y_{2H}|+Y_{2H}}{2\sigma_{2s}^+}\right)^2+\left(\frac{|Y_{2H}|-Y_{2H}}{2\sigma_{2s}^-}\right)^2+\left(\frac{Y_{3H}}{\sigma_{3s}}\right)^2-1.\end{aligned}\tag{1.120}$$

Функции $\sigma_{1s}^{\pm}(\theta,w_3^p)$ называют *пределами текучести* при продольном растяжении и сжатии соответственно, а $\sigma_{4s}(\theta,w_3^p)$ — пределами текучести при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии. Функции $\sigma_{2s}^{\pm}(\theta,w_1^p,w_2^p)$ называют пределами текучести при поперечном растяжении и сжатии, а $\sigma_{3s}(\theta,w_1^p,w_2^p)$ — пределом текучести при межслойном сдвиге. Эти функции обычно определяют экспериментально. Для анизотропных сред различие пределов текучести при растяжении и сжатии обычно достаточно существенно, поэтому функции $\sigma_{\alpha s}^+$ и $\sigma_{\alpha s}^-$ могут значительно различаться. Заметим, что хотя функции f_β зависят от знака инвариантов Y_{1H} и Y_{2H}, но они являются дифференцируемыми всюду, в том числе и при $Y_{1H}=0$, $Y_{2H}=0$, а их производные (1.113) имеют следующие значения:

$$f_{\alpha\alpha}=\frac{|Y_{\alpha H}|+Y_{\alpha H}}{2\sigma_{\alpha s}^+}+\frac{|Y_{\alpha H}|-Y_{\alpha H}}{2\sigma_{\alpha s}^-},\ \ \alpha=1,2;\qquad f_{14}=Y_{4H}/\sigma_{4s},\quad f_{23}=Y_{3H}/\sigma_{3s}.\tag{1.121}$$

8.1.11. Ассоциированные модели пластичности A^{ζ}_{n} для ортотропных сред. Для *ортотропной среды* функциональный базис совместных инвариантов $J^{(O)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)$ состоит из двенадцати инвариантов, к которому присоединяют еще два, вообще говоря, зависимых инварианта для получения набора инвариантов, симметричного относительно всех векторов базиса $\widehat{\mathbf{c}}_{\alpha}$ (см. (6.1.37) и (7.2.15), (7.2.16)):

$$\begin{gathered} J^{(O)}_{\gamma} = I^{(O)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}),\ \gamma = 1, \cdots 6; \quad J^{(O)}_{\gamma+6} = I^{(O)}_{\gamma}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad \gamma = 1,2,3,6; \\ J^{(O)}_{10} = (\widehat{\mathbf{c}}^2_2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}^2_3 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \qquad J^{(O)}_{11} = (\widehat{\mathbf{c}}^2_1 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}^2_3 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \\ J^{(O)}_{13} = (\widehat{\mathbf{c}}^2_1 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}^2_2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \qquad J^{(O)}_{14} = (\widehat{\mathbf{c}}^2_1 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot (\widehat{\mathbf{c}}^2_2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = I^{(O)}_7(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}). \end{gathered} \tag{1.122}$$

Тензоры производной в этом случае имеют следующий вид (см. (7.2.17)):

$$\begin{gathered} J^{(O)}_{\gamma\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{c}}^2_{\gamma}, \quad \gamma = 1,2,3; \quad J^{(O)}_{\gamma+3,\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_{\gamma} \otimes \mathbf{O}_{\gamma}) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \quad \gamma = 1,2; \\ J^{(O)}_{6\mathbf{T}} = 3\ {}^6\mathbf{O}_m \cdot\cdot\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \quad J^{(O)}_{\gamma+6,\mathbf{T}} = 0, \quad \gamma = 1,2,3,6; \\ J^{(O)}_{10\mathbf{T}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \quad J^{(O)}_{11\mathbf{T}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \\ J^{(O)}_{13\mathbf{T}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_3 \otimes \mathbf{O}_3) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \qquad J^{(O)}_{14\mathbf{T}} = \frac{1}{4}(\mathbf{O}_3 \otimes \mathbf{O}_3) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \end{gathered} \tag{1.123}$$

где тензор ${}^6\mathbf{O}_m$ определяется по (3.8.40).

Подставляя эти выражения в (1.63), получаем представление определяющих соотношений (1.63) для ортотропной пластической среды в тензорном базисе:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{3} (\varphi_{\gamma}\widehat{\mathbf{c}}^2_{\gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{O}_{\gamma} \otimes \mathbf{O}_{\gamma} \cdot\cdot (\widetilde{\varphi}_{3+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_{6+\gamma}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)) + 3\varphi_6\ {}^6\mathbf{O}_m \cdot\cdot\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{1.124}$$

где обозначены скалярные функции

$$\widetilde{\varphi}_4 = \varphi_4, \quad \widetilde{\varphi}_5 = \varphi_5, \quad \widetilde{\varphi}_6 = \varphi_{14}, \quad \widetilde{\varphi}_7 = \varphi_{10}, \quad \widetilde{\varphi}_8 = \varphi_{11}, \quad \widetilde{\varphi}_9 = \varphi_{13}. \tag{1.125}$$

Для модели упруго-пластической среды (1.59): $\widetilde{\varphi}_7 = \widetilde{\varphi}_8 = \widetilde{\varphi}_9$, и соотношения (1.124) принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{3} (\varphi_{\gamma}\widehat{\mathbf{c}}^2_{\gamma} + \frac{\widetilde{\varphi}_{3+\gamma}}{2}(\mathbf{O}_{\gamma} \otimes \mathbf{O}_{\gamma}) \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) + 3\varphi_6\ {}^6\mathbf{O}_m \cdot\cdot\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{1.126}$$

где

$$\varphi_{\gamma} = -\rho(\partial\zeta/\partial I^{(O)}_{\gamma}), \qquad \zeta = \zeta(I^{(O)}_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \ldots, I^{(O)}_7(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), \theta, w^p_1, \ldots, w^p_6). \tag{1.127}$$

Число параметров Тейлора (1.62) для ортотропной среды равно шести:

$$w^p_\gamma = \int\limits_0^t (\widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})(\widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p)d\tau, \quad w^p_{3+\gamma} = \int\limits_0^t (\widehat{\mathbf{c}}^2_\alpha \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) \cdot\cdot (\widehat{\mathbf{c}}^2_\beta \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p)d\tau, \quad (1.128)$$

$$\gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Для ортотропной упруго-пластической среды пластические потенциалы f_β (1.65) зависят от всех совместных инвариантов (1.122), кроме кубического инварианта $J^{(O)}_6 = I^{(O)}_6(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})$:

$$f_\beta = f_\beta(J^{(O)}_\gamma, \theta, w^p_1, \ldots, w^p_6), \quad \gamma = 1, \ldots, 14 \text{ и } \gamma \neq 6. \quad (1.129)$$

Совместных инвариантов в наборе (1.122) три: $J^{(O)}_{10}$, $J^{(O)}_{12}$ и $J^{(O)}_{13}$, тогда, подставляя тензоры производной (1.123) в (1.74в), получаем следующее определяющее соотношение для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^\bullet_p = \sum_{\gamma=1}^{3} (\psi_\gamma \widehat{\mathbf{c}}^2_\gamma + \frac{1}{2}\mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma \cdot\cdot (\widetilde{\psi}_{3+\gamma} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \frac{1}{2}\widetilde{\psi}_{6+\gamma} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)), \quad (1.130)$$

где

$$\widetilde{\psi}_4 = \psi_4, \quad \widetilde{\psi}_5 = \psi_5, \quad \widetilde{\psi}_6 = \psi_{14}, \quad \widetilde{\psi}_7 = \psi_{10}, \quad \widetilde{\psi}_8 = \psi_{11}, \quad \widetilde{\psi}_9 = \psi_{13},$$

$$\psi_\gamma = h \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial J^{(O)}_\gamma}. \quad (1.131)$$

8.1.12. Ортотропная однопотенциальная модель Губера–Мизеса для пластических сред. Для частных моделей ортотропных упруго-пластических сред принимают дополнительное допущение о виде потенциалов f_β. Адекватность той или иной модели проверяется экспериментально. В *ортотропной однопотенциальной модели Губера–Мизеса* полагают, что имеется только один потенциал f, зависящий от шести совместных ортотропных инвариантов Губера–Мизеса $Y^{(O)}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 6$:

$$f = f(Y^{(O)}_1, \ldots, Y^{(O)}_6, \theta, w^p_1, \ldots w^p_6), \quad (1.132)$$

где

$$Y^{(O)}_\alpha = I^{(O)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_\alpha \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad \alpha = 1, \ldots, 5, \quad Y^{(O)}_6 = I^{(O)}_7(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_6 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p),$$
$$H_\alpha = H^0_\alpha(I^{(O)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p))^{n^0_\alpha}, \quad H_6 = H^0_6(I^{(O)}_7(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p))^{n^0_6}, \quad (1.133)$$

— совместные инварианты, которые однозначно выражаются через инварианты (1.122) (см. упр. 8.1.6):

$$Y^{(O)}_\alpha = I^{(O)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) - H_\alpha I^{(O)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$Y_{3+\alpha}^{(O)} = I_{3+\alpha}^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) + H_{3+\alpha}^2 I_{3+\alpha}^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) - 2H_{3+\alpha}J_{9+\alpha}^{(O)}, \quad \alpha = 1, 2; \tag{1.134}$$

$$Y_6^{(O)} = I_7^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) + H_6^2 I_7^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) - 2H_6 J_{13}^{(O)}.$$

Вычисляя производные $\partial f/\partial J_\alpha^{(O)}$ от функции (1.132):

$$\partial f/\partial I_\alpha^{(O)} = f_\alpha, \ \ \alpha = 1, \ldots 5; \quad \partial f/\partial J_{14}^{(O)} = f_6, \quad \partial f/\partial J_{10}^{(O)} = -2H_4 f_4,$$
$$\partial f/\partial J_{11}^{(O)} = -2H_5 f_5, \quad \partial f/\partial J_{13}^{(O)} = -2H_6 f_6, \quad f_\alpha \equiv \partial f/\partial Y_\alpha^{(O)} \tag{1.135}$$

и подставляя их в (1.131), получаем ненулевые функции ψ_γ:

$$\begin{gathered} \psi_\gamma = \dot{\varkappa} h f_\gamma, \gamma = 1, \ldots 5, \quad \psi_{10} = -2\dot{\varkappa} h H_4 f_4, \\ \psi_{11} = -2\dot{\varkappa} h H_5 f_5, \quad \psi_{13} = -2\dot{\varkappa} h H_6 f_6, \quad \psi_{14} = \dot{\varkappa} h f_6. \end{gathered} \tag{1.136}$$

Тогда определяющее соотношение (1.130) принимает вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = \dot{\varkappa} h \sum_{\gamma=1}^{3} \Big(f_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \frac{f_{3+\gamma}}{2} \mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_{3+\gamma} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) \Big). \tag{1.137}$$

Скалярно умножая это соотношение само на себя, находим выражение для параметра $\dot{\varkappa}$:

$$\dot{\varkappa} = \sqrt{\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}}{\mathbf{P}_H^{(O)} \cdot\cdot \mathbf{P}_H^{(O)}}}, \tag{1.138}$$

где

$$\mathbf{P}_H^{(O)} \equiv \sum_{\gamma_1}^{3} \Big(f_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \frac{f_{3+\gamma}}{2} \mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_{3+\gamma} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) \Big). \tag{1.139}$$

Полная система соотношений для пластических деформаций состоит из соотношений (1.137), (1.138), к которым следует присоединить одно скалярное уравнение поверхности пластичности

$$f = 0, \tag{1.140}$$

где f выражается по формуле (1.132).

В квадратичной модели потенциал (1.132) выбирают в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2f = \sum_{\gamma=1}^{3} \Big(\frac{|Y_\gamma^{(O)}| + Y_\gamma^{(O)}}{2\sigma_{\gamma s}^+} \Big)^2 + \Big(\frac{|Y_\gamma^{(O)}| - Y_\gamma^{(O)}}{2\sigma_{\gamma s}^-} \Big)^2 + \Big(\frac{Y_{3+\gamma}^{(O)}}{2\sigma_{3+\gamma,s}^+} \Big)^2 - \\ - \frac{Y_1^{(O)} Y_2^{(O)}}{\sigma_{12s}} - \frac{Y_1^{(O)} Y_3^{(O)}}{\sigma_{13s}} - \frac{Y_2^{(O)} Y_3^{(O)}}{\sigma_{23s}} - 1. \end{aligned} \tag{1.141}$$

Функции $\sigma_{\gamma s}^{\pm}(\theta, w_\gamma^p)$ называют *пределами текучести при растяжении* (или сжатии) *по направлению* γ, $\sigma_{3+\gamma,s}(\theta, w_{3+\gamma}^p)$ — пределами текучести при сдвиге в плоскости (α, β), а $\sigma_{\alpha\beta,s}(\theta, w_1^p, \ldots w_3^p)$ — смешанными пределами текучести. Все эти функции находят экспериментально.

Производные от функции (1.141) имеют вид

$$f_\gamma = \frac{|Y_\gamma^{(O)}| + Y_\gamma^{(O)}}{2\sigma_{\gamma s}^+} + \frac{|Y_\gamma^{(O)}| - Y_\gamma^{(O)}}{2\sigma_{\gamma s}^-}, \quad f_{\gamma+3} = Y_{3+\gamma}^{(O)}/\sigma_{3+\gamma,s}, \quad \gamma = 1,2,3. \quad (1.142)$$

8.1.13. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей A_n^ζ пластических сред. Поскольку все энергетические тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, а также $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$, определяемые на основе $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, являются S-инвариантными, то все определяющие соотношения моделей A_n^ζ пластических сред, представленные в пп. 8.1.2–8.1.6, автоматически удовлетворяют принципу материальной индифферентности, так как не изменяются при замене актуальной конфигурации $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ жестким движением.

Упражнения к 8.1

Упражнение 8.1.1. Показать, что скалярный инвариант тензора $\mathbf{T}$ — его интенсивность $Y(\mathbf{T})$, определяемая по (1.88), имеет в любом базисе следующий компонентный вид:

$$Y^2(\mathbf{T}) = \frac{3}{2}\mathbf{P}\cdot\cdot\,\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}I_1(\mathbf{T})\mathbf{E},$$

$$Y^2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}((T_{11}-T_{22})^2 + (T_{22}-T_{33})^2 + (T_{33}-T_{11})^2 + 6(T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2)).$$

Упражнение 8.1.2. Доказать, что инвариант Y, определенный в упр. 8.1.1, всегда можно представить через главные инварианты следующим образом:

$$Y^2(\mathbf{T}) = I_1^2(\mathbf{T}) - 3I_2(\mathbf{T}).$$

Упражнение 8.1.3. Показать, что для модели изотропной упруго-пластической среды без упрочнения, когда параметр $H \equiv 0$ (т.е. $H_0 = 0$), соотношение (1.97) принимает вид

$$\dot{\mathbf{P}}_p = (\dot{\varkappa}h/\sigma_s^2)\mathbf{P}_T.$$

Это уравнение называют *соотношением Прандтля–Рейсса.*

Упражнение 8.1.4. Показать, что имеет место соотношение ортогональности (1.117) для тензоров (1.116).

Упражнение 8.1.5. Доказать истинность соотношений (1.112) между совместными инвариантами $Y_\alpha^{(3)}$ (1.111) и $J_\gamma^{(3)}$ (1.99).

Упражнение 8.1.6. Доказать истинность соотношений (1.134).

Упражнение 8.1.7. Рассмотреть *пластически сжимаемую модель A_n^ζ Губера–Мизеса* изотропной среды, для которой имеют место определяющие соотношения (1.81)–(1.83), а пластический потенциал f только один, но, в отличие от (1.84), зависит еще и от первого инварианта Y_{1H}:

$$f = f(Y_H, Y_{1H}, \theta, w_p),$$

где

$$Y_{1H} = (\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_1\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p)\cdot\cdot\,\mathbf{E}, \qquad H_1 = H_1^0 Y_{1p}^{2n_1}, \qquad Y_{1p} = I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \qquad f_{1Y} \equiv \partial f/\partial Y_{1H},$$

а H_1^0, n_1 — константы.

Такая модель описывает пластические свойства пористых сред, некоторых грунтов, а также сред, чувствительных к виду нагружения — объемному растяжению или сжатию (см. разд. 8.6).

Показать, что для этой модели определяющие соотношения вместо (1.92) принимают следующий вид:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = 3\dot{\varkappa}h(f_Y\mathbf{P}_H + \frac{1}{3}f_{1Y}\mathbf{E}).$$

Показать, что эти соотношения, записанные для девиаторов и шаровых частей тензоров пластических деформации и напряжений, имеют такой вид (сравните их с (1.94) и (1.95)):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}} = 3\dot{\varkappa}hf_Y\mathbf{P}_H, \\ \dot{I}_1(\mathbf{C}_p) = \dot{\varkappa}hf_{1Y}, \\ \dot{\varkappa} = \pm\sqrt{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}}\Big/\sqrt{f_Y^2Y_H^2 + 3f_{1Y}^2}, \quad f = 0. \end{cases}$$

Показать также, что если пластический потенциал f имеет следующий вид:

$$f = \frac{1}{3}\Big(\frac{Y_H}{\sigma_S}\Big)^2 + \frac{{Y_+}^2}{\sigma_T'^2} + \frac{{Y_-}^2}{\sigma_C'^2} - 1, \qquad \frac{1}{\sigma_T'^2} = \frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2}, \qquad \frac{1}{\sigma_C'^2} = \frac{1}{\sigma_C^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2},$$

где σ_S, σ_T, σ_C — пределы текучести при сдвиге, растяжении и сжатии соответственно (зависят от θ и w_p), а Y_+ и Y_- — знакопостоянные инварианты

$$Y_\pm = \frac{1}{2}(|Y_{1H}| \pm Y_{1H}),$$

то

$$f_Y = \frac{1}{3\sigma_S^2} \qquad \text{и} \qquad f_{1Y} = \frac{2Y_+}{\sigma_T'^2} + \frac{2Y_-}{\sigma_C'^2},$$

и определяющие соотношения принимают вид

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{P}}{}_p^{\bullet} = (\dot{\varkappa}h/\sigma_S^2)\mathbf{P}_H, \\ \dot{I}_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p) = 2\dot{\varkappa}h((Y_+/\sigma_T'^2) + (Y_-/\sigma_C'^2)). \end{cases}$$

Упражнение 8.1.8. Рассмотреть *ассоциированную модель пластичности* A_n^ζ (1.74) с *квазилинейной упругостью*, для которой упругий потенциал ζ (1.74а) зависит только от линейных и квадратичных инвариантов $I_\gamma^{(s)}$ тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho$ (по аналогии с квазилинейными моделями A_n упругих сред (см. п. 3.8.7)). Вводя для функций $\varphi_\gamma(I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta, w_\beta^p)$ представление:

$$\varphi_\gamma = \overset{\circ}{\rho}\sum_{\beta=1}^{r_1} l'_{\gamma\beta}I_\gamma^{(s)}, \quad \gamma = 1, \dots, r_1; \qquad \varphi_\gamma = \overset{\circ}{\rho}l'_{\gamma\gamma}, \qquad \gamma = r_1 + 1, \dots r_2,$$

где $l'_{\gamma\beta}$ и $l'_{\gamma\gamma}$ — некоторые функции вида:

$$l'_{\gamma\beta} = l'_{\gamma\beta}(I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta, w_\alpha^p), \qquad l'_{\gamma\beta} = l'_{\beta\gamma},$$

показать, что в этом случае соотношения (1.74б) можно представить в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_e = {}^4\mathbf{N} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad J = \rho/\overset{\circ}{\rho},$$

где тензор ${}^4\mathbf{N}$ имеет следующую структуру:

$$ {}^4\mathbf{N} = \frac{1}{J}(l_1'\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2l_2'\boldsymbol{\Delta}), \qquad l_1' = l_{11}' + 2l_{22}', \quad l_{22}' = -2l_2', $$

— для изотропных сред ($r_1 = 1, r_2 = 2$);

$$ {}^4\mathbf{N} = \frac{1}{J}\Big(l_{11}'\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + \widetilde{l}_{22}'\widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + (l_{12}' - l_{11}')(\mathbf{E}\otimes\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widehat{\mathbf{c}}_3^2\otimes\mathbf{E}) + \\ + \Big(\frac{l_{11}'}{2} - l_{44}'\Big)(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2) + 2l_{44}'\boldsymbol{\Delta}\Big), $$

$$ \widetilde{l}_{22}' = l_{22}' - 2(l_{44}' + l_{12}') - l_{11}', $$

— для трансверсально-изотропных сред ($r_1 = 2, r_2 = 4$);

$$ {}^4\mathbf{N} = \frac{1}{J}\Big(\sum_{\gamma,\beta=1}^{3} l_{\gamma\beta}'\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\otimes\widehat{\mathbf{c}}_\beta^2 + \sum_{\gamma=1}^{2} l_{3+\gamma,3+\gamma}'\mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma\Big) $$

— для ортотропных сред ($r_1 = 3, r_2 = 6$).

Показать, что существуют обратные соотношения

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e, $$

где тензоры ${}^4\mathbf{M}$ являются обратными к ${}^4\mathbf{N}$:

$$ {}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{N} = \boldsymbol{\Delta}, $$

и имеют формально ту же структуру, что и тензор ${}^4\mathbf{N}$, но коэффициенты $l_{\gamma\beta}$ у этого тензора ${}^4\mathbf{M}$ являются уже функциями вида

$$ l_{\gamma\beta} = l_{\gamma\beta}(I_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e), \theta, w_\alpha^p). $$

Упражнение 8.1.9. Для *моделей* A_n^ζ *упруго-пластической среды* (1.79), (1.80) *с линейной упругостью*, для которой потенциал ζ (1.80) имеет квадратичный вид

$$ \zeta = \zeta_0 - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{2}\sum_{\gamma,\beta=1}^{r_1} l_{\gamma\beta}' I_\gamma^{(s)} I_\beta^{(s)} - \overset{\circ}{\rho}\sum_{\gamma=r_1+1}^{r_2} l_{\gamma\gamma} I_\gamma^{(s)}, $$

где $l_{\gamma\beta}'$ — константы, $I_\gamma^{(s)} = I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)$, показать, используя результаты упр. 8.1.8, что тензоры ${}^4\mathbf{N}$ с точностью до множителя J являются тензорами-константами, а определяющие соотношения (1.74б) между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ можно представить в виде

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e), \qquad l_1 = -\frac{l_1'}{2l_2'(3l_1' + 2l_2')}, \quad l_2 = \frac{1}{4l_2'}, $$

— для изотропных сред;

$$ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big((l_{11}I_1^{(3)} + l_{12}I_2^{(3)})(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2) + ((l_{22} - 2l_{44})I_2^{(3)} + l_{12}I_1^{(3)})\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \\ + \Big(\frac{l_{33}}{2} - l_{44}\Big)(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e + 2l_{44}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e\Big), $$

— для трансверсально-изотропных сред (здесь $I_\gamma^{(3)} = I_\gamma^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)$);

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J\Big(\sum_{\gamma,\beta=1}^{3} l_{\gamma\beta} I_\gamma^{(O)} \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + \sum_{\gamma=1}^{3} l_{3+\gamma,3+\gamma} \mathbf{O}_\gamma (\mathbf{O}_\gamma \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)\Big)$$

— для ортотропных сред ($I_\gamma^{(O)} = I_\gamma^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)$).

Показать, что для моделей A_n^ζ упруго-пластических изотропных сред с линейной упругостью, потенциал ζ которых имеет вид

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{2} l_1' I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho) - \overset{\circ}{\rho} l_2' I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2/\rho^2),$$

определяющие соотношения (1.74б) можно представить в виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \frac{1}{J}(l_1' I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})\mathbf{E} + 2l_2' \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}),$$

$$l_1' = -\frac{l_1}{2l_2(3l_1 + 2l_2)}, \qquad l_1 = -\frac{l_1'}{2l_2'(3l_1' + 2l_2')}, \qquad 2l_2 = \frac{1}{2l_2'}.$$

Упражнение 8.1.10. Используя формулы (1.19), (1.28б), показать, что плотность внутренней энергии e для моделей A_n^ζ пластических сред выражается формулой

$$e = \zeta + \frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e - \theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}.$$

Используя результаты упр. 8.1.9, показать, что для моделей A_n^ζ изотропной упруго-пластической среды с линейной упругостью имеет место следующее выражение:

$$e = e_0 + \frac{\overset{\circ}{\rho}}{2} l_1' I_1^2\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big) + \overset{\circ}{\rho} l_2' I_1\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2}{\rho^2}\Big) = e_0 + \frac{l_1}{2\overset{\circ}{\rho}} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e) + \frac{l_2}{\overset{\circ}{\rho}} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_e^2),$$

$$e_0 = \zeta_0 - \theta(\partial\zeta_0/\partial\theta).$$

Упражнение 8.1.11. Показать, что соотношения (1.52) можно представить в виде, не зависящем явно от времени:

$$\frac{d}{d\varkappa}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p = h\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{d\varkappa_\alpha}{d\varkappa}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}},$$

где $\varkappa = \varkappa_1$.

8.2. Модели B_n пластических сред

8.2.1. Представление для мощности напряжений в случае мультипликативных моделей B_n пластических сред. Перейдем теперь к рассмотрению моделей B_n пластических сред. Построение этих моделей существенно отличается от моделей A_n, поскольку основное аддитивное соотношение (1.3) для энергетических мер $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ отсутствует. Его заменяет другое соотношение

(1.7), которое аксиоматически принимается в моделях B_n и обоснование которому дано в п. 8.1.1. Поскольку соотношение (1.7) представляет собой произведение градиентов $\mathbf{F}_p$ и $\mathbf{F}_e$, то модели B_n пластических сред называют *мультипликативными*, в отличие от моделей A_n, которые в этом случае называют *аддитивными*.

Рассмотрим ОТТ в форме B_n (3.3.16):

$$\rho d\psi + \rho\eta d\theta - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}} + w^* dt = 0. \tag{2.1}$$

Покажем, что для моделей B_n аналогом аддитивного соотношения (1.3) является аддитивное соотношение для мощности напряжений.

Теорема 8.1. *Мощность напряжений $w_{(i)}$ (3.2.1) всегда можно представить в следующем аддитивном виде:*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}_e + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p, \tag{2.2}$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$ — симметричные тензоры упругих напряжений и напряжений течения, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$ — симметричные меры упругой деформации, а $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p$ — симметричные энергетические меры скоростей пластической деформации, их выражения для различных $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$ приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Выражения для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p$ при различных $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$

n	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p$
I	$\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e$	$-\frac{1}{2}\mathbf{U}_e^{-2}$	$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e$	$\frac{1}{2}(\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-2} + \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}})$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e + \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e)$	$-\mathbf{U}_e^{-1}$	$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e$	$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p$
III	$\mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e$	$\mathbf{B}_e$	$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_e$	$\frac{1}{2}(\mathbf{U}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-1} + {}$ $+ \mathbf{U}_e^{-1} \cdot \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e)$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e + \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}})$	$\mathbf{U}_e$	$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_e$	$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{D}}_p$
V	$\mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}}$	$\frac{1}{2}\mathbf{U}_e^2$	$\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_e$	$\frac{1}{2}(\mathbf{U}_e^2 \cdot \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e^2)$

Нетрудно заметить, что тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$ полностью аналогичны тензорам $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}$ и отличаются от них только заменой $\mathbf{F} \to \mathbf{F}_e$ и $\mathbf{U} \to \mathbf{U}_e$. Тензор $\mathbf{B}_e$, как и тензор $\mathbf{B}$, определяется своей производной и начальным значением $\mathbf{B}_e^0$ (при отсутствии начальных пластических деформаций $\mathbf{B}_e^0 = \mathbf{E}$):

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-1} + \mathbf{U}_e^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}_e), \qquad \mathbf{B}_e(0) = \mathbf{B}_e^0. \tag{2.3}$$

Мера скорости пластической деформации $\mathbf{D}_p$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{D}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \tag{2.4}$$

и является несимметричным тензором. Из табл. 8.1 следует, что

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_p = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{T}}_p = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e, \qquad \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_p = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_e, \qquad \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{T}}_p = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_p = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_e,$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p = \overset{\mathrm{II}}{\mathbf{D}}_p, \qquad \overset{\mathrm{IV}}{\mathbf{D}}_p = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{D}}_p.$$

▼ 1) Используя определение меры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ и вводя меру $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e$ по аналогичной формуле: $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}}$, с учетом мультипликативного разложения (1.7) имеем

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}} = -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}, \qquad (2.5)$$

тогда

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \left(\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} + \dot{\mathbf{F}}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} + \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p^{-1\mathrm{T}}\right). \qquad (2.6)$$

Используя правило перестановок тензоров в тройном скалярном произведении (3.2.3), получаем

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \left(\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right) \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} + \left(\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p \cdot \dot{\mathbf{F}}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e\right) +$$
$$+ \left(\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\right) \cdot\cdot\ \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p^{-1\mathrm{T}}\big) \cdot \mathbf{F}_p^{\mathrm{T}}. \qquad (2.7)$$

Поскольку $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e = -(1/2)\mathbf{U}_e^{-2}$, а $\mathbf{F}_p \cdot \dot{\mathbf{F}}_p^{-1} = -\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = -\mathbf{D}_p$ и

$$\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e, \qquad (2.8)$$

то действительно имеет место представление (2.2) при $n = \mathrm{I}$:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \left(\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right) \cdot\cdot \left(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} + \frac{1}{2}\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-2} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}}\right) =$$
$$= \left(\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e\right) \cdot\cdot \left(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} + \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p\right). \qquad (2.9)$$

2) Поскольку тензоры $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e$ отличаются от $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}$ только заменой $\mathbf{F} \to \mathbf{F}_e$ и $\mathbf{U} \to \mathbf{U}_e$, то из первой пары $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{G}}_e)$ можно получить все остальные пары $\overset{(n)}{\mathbf{T}}_e, \overset{(n)}{\mathbf{G}}_e$ таким же путем, каким это было сделано для энергетических пар $(\overset{(n)}{\mathbf{T}}, \overset{(n)}{\mathbf{G}})$ (тензоры $\mathbf{F}_p$ в эти соотношения вообще не входят).

3) Остается лишь показать, что из первой пары следует третья и пятая:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{D}}_p = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot\ \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{D}}_p \qquad (2.10)$$

(вторая и четвертая совпадают с первой и пятой).

Действительно, используя определения $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e$ и $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p$, имеем

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p = (\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e) \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p =$$
$$= (\mathbf{U}_e \cdot \mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{U}_e) \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-2} + \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{D}_e^{\mathrm{T}}) =$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e \cdot\cdot (\mathbf{U}_e \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-1} + \mathbf{U}_e^{-1} \cdot \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e) = \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{D}}_p \quad (2.11)$$

и

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-1}) \cdot\cdot \mathbf{U}_e^2 \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\mathbf{U}_e^{-1} \cdot \mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-1}) \cdot\cdot \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}}) \cdot\cdot (\mathbf{U}_e^2 \cdot\cdot \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e^2) = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{D}}_p. \ \blacktriangle \quad (2.12)$$

Теорема 8.2. *Мощность напряжений течения $w_{(p)}$ всегда можно представить в виде суммы мощностей, обусловленных пластическими искажениями и пластическими вращениями:*

$$w_{(p)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p = \mathbf{T}_U \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{T}_o \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{T}_U$ — симметричный тензор напряжений пластического искажения, а $\mathbf{T}_o$ — кососимметричный тензор напряжений пластического вращения, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{T}_U = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}_p + \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}), \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{T}_o = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}}), \quad (2.14б)$$

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e, \quad (2.15)$$

а $\boldsymbol{\Omega}_p$ — кососимметричный тензор спина пластического вращения:

$$\boldsymbol{\Omega}_p = \dot{\mathbf{O}}_p \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}. \quad (2.16)$$

▼ Преобразуем меру скорости пластической деформации $\mathbf{D}_p$ (2.4) следующим образом:

$$\mathbf{D}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = (\dot{\mathbf{O}}_p \cdot \mathbf{U}_p + \mathbf{O}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p) \cdot \mathbf{U}_p^{-1} \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} =$$
$$= \dot{\mathbf{O}}_p \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} + \mathbf{O}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{-1} \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}_p + \mathbf{D}_v, \quad (2.17)$$

где обозначена мера скорости пластического искажения:

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{O}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{-1} \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}. \quad (2.18)$$

Тогда первую пару в (2.10) можно представить в виде

$$w_{(p)} = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2}\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot (\boldsymbol{\Omega}_p \cdot \mathbf{U}_e^{-2} + \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \boldsymbol{\Omega}_p^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{U}_e^{-2} + \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{D}_v^{\mathrm{T}}). \quad (2.19)$$

Используя правило перестановки тензоров в тройном скалярном произведении, получаем

$$w_{(p)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_e^{-2} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e - \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-2}) \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p + \frac{1}{2}((\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}_p) \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p + \\ + (\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}) \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p) = \mathbf{T}_o \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p + \mathbf{T}_U \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p. \quad (2.20)$$

Здесь мы учли кососимметричность спина $\boldsymbol{\Omega}_p$, а также приняли во внимание, что

$$\mathbf{U}_e^{-2} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e - \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-2} = \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-2} = \\ = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{T}_e - \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{T}_0,$$

$$\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}_p + \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \\ = \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{O}_p + \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \\ = \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}_p + \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} = 2\mathbf{T}_U,$$

так как $\mathbf{U}_e^{-2} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_e^{-1}$.

То, что другие пары $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{D}}_p$ приводят к такому же самому результату (2.13), следует из эквивалентности сверток этих пар (2.10). ▲

Подставляя выражение (2.13) в (2.2), приходим к следующим представлениям для мощности напряжений:

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} + \mathbf{T}_U \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{T}_0 \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p. \quad (2.21)$$

8.2.2. Общее представление определяющих соотношений для моделей B_n пластических сред. Если теперь подставить это выражение в ОТТ (2.1), то получим

$$\rho\dot{\psi} + \rho\eta\dot{\theta} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} - \mathbf{T}_U \cdot\cdot \mathbf{U}_p^{\bullet} - \mathbf{T}_o \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p + w^* = 0. \quad (2.22)$$

Введем свободную энергию Гиббса следующим образом:

$$\zeta = \psi - \frac{1}{\rho} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e, \quad (2.23)$$

тогда для ζ получаем ОТТ в форме B_n^{ζ}:

$$\rho\dot{\zeta} + \rho\eta\dot{\theta} + \rho \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_v \cdot\cdot \mathbf{U}_p^{\bullet} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_o \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p + w^* = 0, \quad (2.24)$$

т.е. изменение свободной энергии ζ определяется только изменением следующих функций: θ, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho$, $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{O}_p$, поэтому в модели B_n^{ζ} пластической среды свободная энергия Гиббса рассматривается как функционал в следующем виде (подобном (1.21)):

$$\zeta = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\zeta}}(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \qquad \mathcal{R} = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho,\ \mathbf{U}_p,\ \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}},\ \theta). \tag{2.25}$$

Согласно принципу равноприсутствия, функционалом (только тензорным) такого же вида является мера $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\mathbf{G}_e}}(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \tag{2.26}$$

Далее по аналогии с (1.24), (1.25) вводим *меру равновесной упругой деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^0$ и меру неравновесной упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^0 = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\mathbf{G}_e}}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^0. \tag{2.27}$$

Подставляя теперь функционалы (2.25)–(2.27) в ОТТ (2.24), после приведения подобных получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned}\rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)} + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^0\Big)\cdot\cdot\, d\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e}{\rho} + \rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\Big)d\theta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^\bullet}\cdot\cdot\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e}{\rho}\Big)^\bullet +&\\ + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\dot{\mathbf{O}}_p^{\mathrm{T}}}\cdot\cdot\, d\dot{\mathbf{O}}_p + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\theta^\bullet}d\theta^\bullet + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\mathbf{U}_p^\bullet}\cdot\cdot\, d\mathbf{U}_p^\bullet + (w^* - \widetilde{\mathbf{T}}_U\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p +&\\ + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^\bullet + \rho\delta\zeta - \widetilde{\mathbf{T}}_o\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p)dt = 0,&\end{aligned} \tag{2.28}$$

где обозначены

$$\widetilde{\mathbf{T}}_U = \mathbf{T}_U - \mathbf{N}_p, \quad \mathbf{N}_p = \rho(\partial\zeta/\partial\mathbf{U}_p), \quad \widetilde{\mathbf{T}}_o = \mathbf{T}_o - \mathbf{N}_o, \quad \mathbf{N}_o = \rho\mathbf{O}_p\cdot(\partial\zeta/\partial\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}).$$

В силу независимости дифференциалов $d(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)$, $d\theta$, $d(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^\bullet$, $d\theta^\bullet$, $d\mathbf{U}_p^\bullet$, $d\mathbf{O}_p^\bullet$ и dt, тождество (2.28) эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^0 = -\partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho), \tag{2.29}$$

$$\eta = -\partial\zeta/\partial\theta, \tag{2.30}$$

$$\partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^\bullet = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot{\theta} = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot{\mathbf{U}}_p = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot{\mathbf{O}}_p^{\mathrm{T}} = 0, \tag{2.31}$$

$$w^* = \widetilde{\mathbf{T}}_U + \widetilde{\mathbf{T}}_o\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p - \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1\cdot\cdot\,(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^\bullet - \rho\delta\zeta, \tag{2.32}$$

которые образуют определяющие соотношения для моделей B_n^ζ пластических сред.

Из соотношений (2.31) следует, что свободная энергия ζ не зависит от скоростей реактивных переменных $\dot{\mathcal{R}}$:

$$\zeta = \mathop{\zeta}_{\tau=0}^{t}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \qquad \mathcal{R} = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho,\ \mathbf{U}_p,\ \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}},\ \theta). \tag{2.33}$$

Однако эта зависимость имеется у функции диссипации w^* и у функционала $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e{}^1 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e{}^1(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \tag{2.34}$$

Таким образом, модель B_n^ζ пластических сред задается четырьмя функционалами: скалярным функционалом (2.33) для ζ, тензорным функционалом (2.34) и еще двумя тензорными функционалами для нахождения $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}$.

8.2.3. Следствия из принципа Онзагера для моделей B_n^ζ пластических сред. Как и для моделей A_n^ζ, воспользуемся принципом Онзагера, чтобы построить функционалы для тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1$, $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{O}_p$. Составим плотность внутреннего производства энтропии (3.12.1) с учетом выражения (2.32):

$$\rho q^* = w^* - \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \widetilde{\mathbf{T}}_U\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p + \widetilde{\mathbf{T}}_o\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p - \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1\cdot\cdot\left(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e}{\rho}\right)^{\bullet} - \rho\delta\zeta - \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \geqslant 0 \tag{2.35}$$

и введем термодинамические силы X_β и потоки Q_β следующим образом:

$$\begin{gathered} X_1 = \boldsymbol{\nabla}\theta, \quad X_2 = \widetilde{\mathbf{T}}_U, \quad X_3 = \widetilde{\mathbf{T}}_o, \quad X_4 = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet}, \\ Q_1 = -\mathbf{q}/\theta, \quad Q_2 = \dot{\mathbf{U}}_p, \quad Q_3 = \boldsymbol{\Omega}_p, \quad Q_4 = \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^1. \end{gathered} \tag{2.36}$$

Тогда, согласно принципу Онзагера, имеют место тензорно-линейные соотношения между Q_β и X_β:

$$\begin{aligned} -\mathbf{q}/\theta &= L_{11}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + L_{12}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_U + L_{13}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_o + L_{14}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet}, \\ \dot{\mathbf{U}}_p &= L_{12}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + L_{22}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_U + L_{23}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_o + L_{24}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet}, \\ \boldsymbol{\Omega}_p &= L_{13}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + L_{23}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_U + L_{33}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_o + L_{34}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet}, \\ \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e &= L_{14}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + L_{24}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_U + L_{34}\cdot\cdot\widetilde{\mathbf{T}}_o + L_{44}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e/\rho)^{\bullet}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

где тензоры $L_{\alpha\beta}$ являются функционалами общего вида (2.34) от реактивных переменных $\mathcal{R} = \{\mathbf{T}_e/\rho, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \theta\}$, конкретный их вид задается той или иной моделью пластической среды.

В *моделях* B_n^ζ *пластического течения* все $L_{\alpha\beta}$ и ζ являются только функциями от $\mathcal{R}$ и $\dot{\mathcal{R}}$ и от параметров Тейлора w_β^p:

$$\zeta = \zeta(\overset{(n)}{\mathbf{T}}_e, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \theta, w_\beta^p), \tag{2.38а}$$

$$L_{22} = {}^4\mathbf{L}_U(\overset{(n)}{\mathbf{T}}_e, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \theta, \overset{(n)}{\mathbf{T}}{}_e^\bullet, \dot{\mathbf{U}}_p, \dot{\mathbf{O}}_p, w_\beta^p), \tag{2.38б}$$

$$L_{33} = {}^4\mathbf{L}_o(\overset{(n)}{\mathbf{T}}_e, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \theta, \overset{(n)}{\mathbf{T}}{}_e^\bullet, \dot{\mathbf{U}}_p, \dot{\mathbf{O}}_p, w_\beta^p), \tag{2.38в}$$

$$L_{11}\theta = \boldsymbol{\lambda}(\theta), \qquad \text{остальные} \quad L_{\beta\gamma} = 0.$$

В этой модели перекрестные эффекты не учитываются и определяющие соотношения (2.37) принимают вид

$$-\mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{2.39а}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_p = {}^4\mathbf{L}_U \cdot\cdot\, \widetilde{\mathbf{T}}_U, \tag{2.39б}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_p = {}^4\mathbf{L}_o \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{T}}_o, \tag{2.39в}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}_e^1 \equiv 0. \tag{2.39г}$$

Тензор ${}^4\mathbf{L}_U$ является обычным симметричным тензором четвертого ранга, а тензор ${}^4\mathbf{L}_o$ кососимметричен по индексам 1, 2 и 3, 4, и симметричен по парам индексов $(1,2) \leftrightarrow (3,4)$.

8.2.4. Ассоциированные модели B_n^ζ пластических сред. В *ассоциированной модели пластичности* B_n^ζ соотношения пластического течения (2.39б) и (2.39в) связаны с поверхностью пластичности по закону градиентальности:

$$\dot{\mathbf{U}}_p = h\sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{T}_U}, \tag{2.40а}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_p = h\sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{T}_o}, \tag{2.40б}$$

где f_β — пластические потенциалы, полагающиеся функциями вида (2.38а), которые можно рассматривать и как функции от T_U, T_o и $\mathbf{U}_p$, $\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}$:

$$f_\beta = f_\beta(T_U, T_o, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \theta, w_\alpha^p). \tag{2.41}$$

Уравнение поверхности пластичности, как и в модели A_n^ζ задается системой скалярных уравнений (1.41)

$$f_\beta = 0, \qquad \beta = 1, \ldots k. \tag{2.42}$$

Функция h, имеющая значение 0 или 1, и определяющая область пластического нагружения, вычисляется по формуле (1.51), где в качестве частичной производной $d'f_\beta/dt$ применяется аналог формулы (1.43):

$$\frac{d'f_\beta}{dt} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{T}_U} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{T}}_U + \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{T}_o} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{T}}_o. \tag{2.43}$$

Система из $(9+k)$ скалярных уравнений (2.40) и (2.41) (уравнение (2.40а) эквивалентно шести скалярным уравнениям, (2.40б) — трем скалярным уравнениям из-за кососимметрии тензоров $\mathbf{\Omega}_p$ и $\mathbf{T}_o$) позволяет в принципе найти $9+k$ скалярных неизвестных: шесть компонент тензора $\mathbf{U}_p$, три компоненты тензора $\mathbf{O}_p$ и k скалярных функций $\dot{\varkappa}_\beta$, $\beta = 1,\ldots k$, которые находят из самих же уравнений (2.40). Эти параметры $\dot{\varkappa}_\beta$ являются функциями вида (2.38б):

$$\dot{\varkappa}_\beta = \dot{\varkappa}_\beta(T_U, T_o, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{U}}_p, \mathbf{\Omega}, \theta, w_\beta^p). \tag{2.44}$$

В модели B_n^ζ *упруго-пластической среды* упругий потенциал ζ явно не зависит от пластических деформаций, поэтому для нее определяющие соотношения (2.38а), (2.29) имеют вид

$$\zeta = \zeta(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \theta, w_\beta^p), \quad \mathbf{N}_1 \equiv 0, \quad \mathbf{N}_0 \equiv 0, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \mathbf{K}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \theta, w_\beta^p) = -\rho(\partial\zeta/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e). \tag{2.45}$$

8.2.5. Следствие из принципа материальной симметрии для ассоциированной модели B_n^ζ пластичности. Применим для определяющих соотношений (2.40), (2.42) принцип материальной симметрии. Для этого предварительно выясним как преобразуются введенные тензоры с индексами p и e при ортогональном преобразовании отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$.

Теорема 8.3. *Тензоры $\mathbf{O}_e$, $\mathbf{U}_e$, $\mathbf{V}_e$ являются H-инвариантными при ортогональных H-преобразованиях: $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, а все тензоры $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{O}_p$, $\mathbf{U}_p$, $\dot{\mathbf{U}}_p$, $\mathbf{V}_p$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$, $\mathbf{T}_U$, $\mathbf{T}_o$ и $\mathbf{\Omega}$ являются H-индифферентными.*

▼ Разгруженная конфигурация $\overset{\mathrm{p}}{\mathcal{K}}$, введенная в п. 8.1.1, согласуется с отсчетной конфигурацией $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, она должна совпадать с ней (по определению), если нагружение не является пластическим — для ассоциированной модели это означает, что нагружение не выходит за поверхность пластичности. Поэтому конфигурация $\overset{\mathrm{p}}{\mathcal{K}}$ должна преобразовываться так же, как и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ — локальные векторы базиса $\overset{\mathrm{p}}{\mathbf{r}}_i$ должны быть H-индифферентны, а градиент упругой деформации $\mathbf{F}_e$ (1.6) должен преобразовываться при переходе $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ так же, как и $\mathbf{F}$ (см. (3.6.9)):

$$\mathbf{F}_e = \overset{*}{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{H}, \tag{2.46}$$

где

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_e = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\mathrm{p}*}{\mathbf{r}}{}^i, \quad \overset{\mathrm{p}*}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{H}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{r}}{}^i, \quad \overset{\mathrm{p}*}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{r}}_i. \tag{2.47}$$

Следовательно, тензоры $\mathbf{O}_e$, $\mathbf{U}_e$ и $\mathbf{V}_e$ преобразуются так же, как и $\mathbf{O}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ (см. (3.7.45), (3.7.46)) при ортогональных преобразованиях с тензором $\mathbf{H} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}}$:

$$\overset{*}{\mathbf{O}}_e = \mathbf{O}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \qquad \overset{*}{\mathbf{V}}_e = \mathbf{V}_e, \qquad \overset{*}{\mathbf{U}}_e = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \tag{2.48}$$

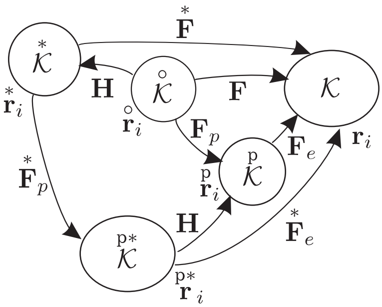

Рис. 8.2. H-преобразования отсчетной и разгруженной конфигураций

На рис. 8.2 показана схема преобразований различных конфигураций при изменении отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$.

Градиент пластической деформации $\mathbf{F}_p$ (1.6), в силу (2.47) и (3.6.15), при переходе $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ преобразуется следующим образом:

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_p = \overset{\mathrm{p}*}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{*}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{H} \cdot \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i \cdot \mathbf{H}^{-1} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{2.49}$$

т.е. является H-индифферентным при ортогональных преобразованиях. Используя полярное разложение для $\overset{*}{\mathbf{F}}_p$ и $\mathbf{F}_p$, получаем

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_p = \overset{*}{\mathbf{Q}}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{U}}_p = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p \cdot \mathbf{U}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = (\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) \cdot (\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}).$$

В силу того, что тензор $(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}})$ — ортогонален, а $(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}})$ — симметричен, и, в силу единственности полярного разложения, получаем формулы преобразования $\mathbf{O}_p$ и $\mathbf{U}_p$:

$$\overset{*}{\mathbf{Q}}_p = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \qquad \overset{*}{\mathbf{U}}_p = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \tag{2.50}$$

Так как $\overset{*}{\mathbf{V}}_p$ преобразуется следующим образом

$$\overset{*}{\mathbf{V}}_p = \overset{*}{\mathbf{F}}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{O}}{}_p^{\mathrm{T}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{2.51}$$

то все тензоры $\mathbf{T}_p$, $\mathbf{O}_p$, $\mathbf{U}_p$, $\dot{\mathbf{U}}_p$ и $\mathbf{V}_p$ являются H-индифферентными при ортогональных преобразованиях.

В силу H-инвариантности тензора $\mathbf{T}$, тензоры упругой и пластической деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$, определенные табл. 8.1, будут H-индифферентны при ортогональных преобразованиях подобно тензорам $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, аналогично H-индифферентными будут и тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e$.

Тензор спина $\boldsymbol{\Omega}_p$ (2.16) является H-индифферентным так же, как и тензоры $\mathbf{T}_U$ и $\mathbf{T}_o$ (2.14), (2.15), поскольку

$$\overset{*}{\mathbf{T}}_e = \overset{*}{\mathbf{F}}{}_e^{-1} \cdot \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{F}}_e = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}, \tag{2.52}$$

$$\overset{*}{\mathbf{T}}_U = \frac{1}{2}(\overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} + \\ + \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_p \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}) = \overset{*}{\mathbf{Q}}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}_U \cdot \overset{*}{\mathbf{Q}}. \ \blacktriangle$$

Применяя принцип материальной симметрии к соотношению (2.40), в силу H-индифферентности тензоров $\dot{\mathbf{U}}_p$, $\mathbf{\Omega}_p$ и $\mathbf{T}_U$, $\mathbf{T}_o$, $\mathbf{U}_p$, $\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}$, получаем, что соотношения пластического течения (2.40) должны представлять собой H-индифферентные тензорные функции относительно той или иной ортогональной подгруппы $\overset{\circ}{G}_s$, а пластические потенциалы f_β (2.41) должны быть скалярными H-индифферентными функциями относительно $\overset{\circ}{G}_s$, и, следовательно, должны зависеть от совместных инвариантов $J_\gamma^{(s)p}$ в этой группе $\overset{\circ}{G}_s$:

$$f_\beta = f_\beta(J_\gamma^{(s)p}, \theta, w_\alpha^p), \qquad J_\gamma^{(s)p} = J_\gamma^{(s)}(\mathbf{T}_U, \mathbf{T}_o, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}), \quad \gamma = 1, \ldots, z. \quad (2.53)$$

Скалярные функционалы w_α^p представляют собой интегралы от квадратичных совместных инвариантов тензоров $\mathbf{T}_U$, $\dot{\mathbf{U}}_p$ и $\mathbf{T}_o$, $\mathbf{\Omega}_p$:

$$\begin{aligned} w_\alpha^p &= \int_0^t J_\alpha^{(s)}(\mathbf{T}_U(\tau), \dot{\mathbf{U}}_p(\tau))d\tau, \quad \alpha = 1, \ldots, r_1, \\ w_\alpha^p &= \int_0^t J_\alpha^{(s)}(\mathbf{T}_o(\tau), \mathbf{\Omega}(\tau))d\tau, \quad \alpha = r_1 + 1, \ldots, r. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Аналогично H-индифферентной скалярной функцией является и упругий потенциал ζ (2.42а), поэтому его тоже можно представить в виде

$$\zeta = \zeta(J_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \mathbf{U}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}), \theta, w_\alpha^p). \quad (2.55)$$

Тогда определяющие соотношения (2.29), (2.40) можно представить в тензорном базисе:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \sum_{\gamma=1}^{z} \varphi_\gamma J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)}, \quad (2.56\text{а})$$

$$\varphi_\gamma = -\rho(\partial\zeta/\partial J_\gamma^{(s)}), \qquad J_{\gamma\mathbf{T}}^{(s)} = \partial J_\gamma^{(s)}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \quad (2.56\text{б})$$

$$\dot{\mathbf{U}}_p = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}_U}^{(s)}, \quad (2.56\text{в})$$

$$\mathbf{\Omega}_p = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}_o}^{(s)}, \quad (2.56\text{г})$$

$$\psi_\alpha = h \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta(\partial f_\beta/\partial J_\alpha^{(s)}), \quad J_{\alpha\mathbf{T}_U}^{(s)} = \partial J_\alpha^{(s)}/\partial \mathbf{T}_U, \quad J_{\alpha\mathbf{T}_o}^{(s)} = \partial J_\alpha^{(s)}/\partial \mathbf{T}_o. \quad (2.56\text{д})$$

8.2.6. Ассоциированные модели пластичности $B_{\boldsymbol{n}}^{\zeta}$ с собственным упрочнением. Ограничим далее рассмотрение только случаем *ассоциированных моделей* B_n^{ζ} *пластичности с собственным упрочнением*, в которых совместные инварианты $J_{\gamma}^{(s)p}$ (2.53) зависят только от тензоров $\mathbf{T}_U$ и $\mathbf{T}_o$ и не зависят явно от $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}$:

$$J_{\gamma}^{(s)p} = J_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}_U, \mathbf{T}_o). \tag{2.57}$$

Поскольку тензоры $\mathbf{T}_U$ и $\mathbf{T}_o$, определенные формулами (2.14) и (2.16), представляют собой комбинации тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\mathbf{U}_e$, $\mathbf{O}_e$, $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{O}_p$, то модель (2.57) позволяет учитывать пластическое упрочнение среды (повышение предела текучести после появления пластической деформации), но специальным образом — через тензоры $\mathbf{T}_U$ и $\mathbf{T}_o$.

Заметим, что поскольку тензор $\mathbf{T}_o$ является кососимметричным, то он имеет только три независимые компоненты, и с ним однозначно можно связать вектор вихря (см. (1.4.47)):

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\, \mathbf{T}_o, \tag{2.58}$$

тогда совместные инварианты (2.57) являются скалярными H-индифферентными функциями от симметричного тензора $\mathbf{T}_U$ и вектора $\boldsymbol{\omega}_0$:

$$J_{\gamma}^{(s)p} = J_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}_U, \boldsymbol{\omega}_0). \tag{2.59}$$

8.2.7. Ассоциированные модели пластичности $B_{\boldsymbol{n}}^{\zeta}$ для изотропных сред. Запишем определяющие соотношения (2.56) для трех основных групп симметрии $\overset{\circ}{G}_s$: O, T_3 и I, при этом рассмотрим только случай упруго-пластических сред, т.е. когда совместные инварианты $J_{\gamma}^{(s)}$ в (2.55) совпадают с инвариантами тензора $I_{\gamma}^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e)$.

Для *изотропной среды* функциональный базис инвариантов (2.59) состоит из шести элементов, в качестве которых можно выбрать следующие:

$$\begin{gathered} J_{\gamma}^{(I)} = J_{\gamma}(\mathbf{T}_U), \quad \gamma = 1, 2, 3, \qquad J_4^{(I)} = |\boldsymbol{\omega}_0|^2, \\ J_5^{(I)} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{T}_U \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \qquad J_6^{(I)} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{T}_U^2 \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \end{gathered} \tag{2.60}$$

Тензоры производной $J_{\gamma\mathbf{T}_U}^{(s)}$ и $J_{\gamma\mathbf{T}_o}^{(s)}$ в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered} J_{1\mathbf{T}_U}^{(I)} = \mathbf{E}, \quad J_{2\mathbf{T}_U}^{(I)} = \mathbf{E} I_1(\mathbf{T}_U) - \mathbf{T}_U, \quad J_{3\mathbf{T}_U}^{(I)} = \mathbf{T}_U^2 - I_1 \mathbf{T}_U + I_2 \mathbf{E}, \quad J_{4\mathbf{T}_U}^{(I)} = 0, \\ J_{5\mathbf{T}_U}^{(I)} = \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \boldsymbol{\omega}_0, \quad J_{6\mathbf{T}_U}^{(I)} = \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{T}_U \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{T}_U \otimes \boldsymbol{\omega}_0, \\ J_{4\mathbf{T}_o}^{(I)} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad J_{5\mathbf{T}_o}^{(I)} = (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{T}_U + \mathbf{T}_U \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \\ J_{6\mathbf{T}_o}^{(I)} = (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{T}_U^2 + \mathbf{T}_U^2 \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad J_{\gamma\mathbf{T}_o}^{(I)} = 0, \quad \gamma = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{2.61}$$

Здесь учтено, что

$$d\boldsymbol{\omega}_0 / d\mathbf{T}_o = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\epsilon}. \tag{2.62}$$

Тензоры $J^{(I)}_{\gamma\mathbf{T}_o}$ очевидно кососимметричны.

Согласно принципу Онзагера, соотношения (2.56в) и (2.56г) должны быть квазилинейными по $\mathbf{T}_U$ и $\mathbf{T}_o$, т.е. должны иметь вид (2.39б) и (2.39в), поэтому инварианты $J_3^{(I)}$, $J_5^{(I)}$ и $J_6^{(I)}$ должны быть исключены из аргументов потенциала f_β (2.53). Таким образом, f_β зависит только от трех инвариантов $J_\gamma^{(I)}$, $\gamma = 1, 2, 4$.

Подставляя выражения (2.60), (2.61) в (2.56), получаем определяющие соотношения *ассоциированной модели B_n^ζ изотропной упруго-пластической среды с собственным упрочнением*:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e + \varphi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2_e, \\ \dot{\mathbf{U}}_p = \widetilde{\psi}_1\mathbf{E} - \psi_2\mathbf{T}_U, \\ \boldsymbol{\Omega}_p = \psi_4\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}, \end{cases} \tag{2.63}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \varphi_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e) + \varphi_3 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e),\quad \widetilde{\varphi}_2 = -\varphi_2 - \varphi_3 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e),\quad \widetilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_2 I_1(\mathbf{T}_U),$$

$$\varphi_\alpha = -\rho\frac{\partial\zeta}{\partial I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e)},\qquad \psi_\gamma = h\sum_{\beta=1}^{k}\dot{\varkappa}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial J_\gamma^{(I)}}, \tag{2.64}$$

$$\zeta = \zeta(I_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \theta, w_\delta^p),\qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$f_\beta = f_\beta(J_\gamma^{(I)}(\mathbf{T}_U, \boldsymbol{\omega}_0), \theta, w_\delta^p),\qquad \gamma = 1, 2, 4.$$

Параметры Тейлора w_δ^p для изотропной среды (2.54) имеют следующий вид:

$$w_1^p = \int_0^t \mathbf{T}_U(\tau)\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p(\tau)d\tau,\qquad w_2^p = \int_0^t \mathbf{T}_o(\tau)\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau. \tag{2.65}$$

Пластические потенциалы можно выбрать в квадратичном виде (1.84).

8.2.8. Ассоциированные модели пластичности B_n^ζ для трансверсально-изотропных сред. Для *трансверсально-изотропных сред* функциональный базис $J_\gamma^{(s)}(\mathbf{T}_U, \boldsymbol{\omega}_0)$ состоит из восьми совместных инвариантов, однако, согласно принципу Онзагера, пластические потенциалы f_β должны зависеть только от линейных и квадратичных по $\mathbf{T}_U$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие:

$$J_1^{(3)} = (\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\cdot\,\mathbf{T}_U,\quad J_2^{(3)} = \mathbf{T}_U\cdot\cdot\,\widehat{\mathbf{c}}_3^2,\quad J_3^{(3)} = ((\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\mathbf{T}_U)\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\mathbf{T}_U),$$
$$J_4^{(3)} = \mathbf{T}_U^2\cdot\cdot\,\mathbf{E} - J_2^{(3)2} - 2J_3^{(3)},\quad J_5^{(3)} = |\boldsymbol{\omega}_0|^2,\quad J_6^{(3)} = (\boldsymbol{\omega}_0\cdot\widehat{\mathbf{c}}_3)^2. \tag{2.66}$$

Ненулевые тензоры производной для них имеют вид

$$J_{1\mathbf{T}_U}^{(3)} = \mathbf{E} - \widehat{\mathbf{c}}_3^2,\quad J_{2\mathbf{T}_U}^{(3)} = \widehat{\mathbf{c}}_3^2,\quad J_{3\mathbf{T}_U}^{(3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\,\mathbf{T}_U,$$
$$J_{4\mathbf{T}_U}^{(3)} = 2\,{}^4\mathbf{O}_3\cdot\cdot\mathbf{T}_U,\quad J_{5\mathbf{T}_o}^{(3)} = \boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon},\quad J_{6\mathbf{T}_o}^{(3)} = \boldsymbol{\omega}_0\cdot\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\boldsymbol{\epsilon}. \tag{2.67}$$

Тогда определяющие соотношения (2.56) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widetilde{\varphi}_3(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e + \\ \qquad\qquad\qquad + \widetilde{\varphi}_4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e + \varphi_5\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2, \\ \dot{\mathbf{U}}_p = \psi_1\mathbf{E} + \widetilde{\psi}_2\widehat{\mathbf{c}}_3^2 + \widetilde{\psi}_3(\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2)\cdot\cdot\mathbf{T}_U + 2\psi_4\mathbf{T}_U, \\ \boldsymbol{\Omega}_p = (\psi_5\boldsymbol{\omega}_0 + \psi_6\boldsymbol{\omega}_0\cdot\widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}, \end{cases} \tag{2.68}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + \varphi_5 I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \quad \widetilde{\varphi}_2 = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 I_2^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \quad \widetilde{\varphi}_3 = \frac{\varphi_3}{2} - \varphi_4,$$

$$\widetilde{\varphi}_4 = 2\varphi_4 - \varphi_5 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \quad \widetilde{\psi}_2 = \psi_2 - \psi_1 - 2\psi_4 I_2^{(3)}(\mathbf{T}_U), \quad \widetilde{\psi}_3 = \frac{\psi_3}{2} - \psi_4,$$

$$\varphi_\alpha = -\rho\frac{\partial\zeta}{\partial I_\alpha^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e)}, \quad \psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{k}\dot{\varkappa}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial J_\alpha^{(3)}}, \tag{2.69}$$

$$\zeta = \zeta(I_1^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e),\ldots I_5^{(3)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e),\theta,w_1^p,\ldots,w_5^p), \quad f_\beta = f_\beta(J_1^{(3)},\ldots J_6^{(3)},\theta,w_1^p,\ldots,w_5^p).$$

Параметры Тейлора w_β^p (2.54) в данной модели таковы

$$w_1^p = \int_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\,\mathbf{T}_U)(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p)d\tau, \quad w_2^p = \int_0^t((\mathbf{E}-\widehat{\mathbf{c}}_3^2)\cdot\mathbf{T}_U)\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\dot{\mathbf{U}}_p)d\tau, \tag{2.70}$$

$$w_3^p = \int_0^t\mathbf{T}_U\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p d\tau - 2w_2^p - w_1^p, \quad w_4^p = \int_0^t\boldsymbol{\Omega}\cdot\cdot\,\mathbf{T}_o d\tau, \quad w_5^p = \int_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_3\cdot\boldsymbol{\omega}_0)(\widehat{\mathbf{c}}_3\cdot\boldsymbol{\omega}_\Omega)d\tau,$$

где $\boldsymbol{\omega}_\Omega$ — вектор вихря, сопутствующий тензору $\boldsymbol{\Omega}_p$:

$$\boldsymbol{\omega}_\Omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p. \tag{2.71}$$

8.2.9. Ассоциированные модели пластичности B_n^ζ для орторопных сред. Для *ортотропных сред* функциональный базис $J_\gamma^{(O)}(\mathbf{T}_U,\boldsymbol{\omega}_0)$ состоит из девяти совместных инвариантов. Согласно принципу Онзагера, набор этих инвариантов мы должны выбрать таким образом, чтобы в него входили только линейные и квадратичные инварианты по $\mathbf{T}_U$ и $\boldsymbol{\omega}_0$. Этому требованию удовлетворяет следующий набор:

$$J_\gamma^{(O)} = \mathbf{T}_U\cdot\cdot\,\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2, \quad J_4^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot\mathbf{T}_U)\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\mathbf{T}_U), \quad J_5^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot\mathbf{T}_U)\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_3^2\cdot\mathbf{T}_U),$$
$$J_6^{(O)} = (\widehat{\mathbf{c}}_1^2\cdot\mathbf{T}_U)\cdot\cdot\,(\widehat{\mathbf{c}}_2^2\cdot\mathbf{T}_U), \quad J_{6+\gamma}^{(O)} = (\boldsymbol{\omega}_0\cdot\widehat{\mathbf{c}}_\gamma)^2, \quad \gamma = 1,2,3. \tag{2.72}$$

Ненулевые тензоры производной имеют вид

$$J_{\gamma\mathbf{T}_U}^{(O)} = \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2, \quad J_{3+\gamma,\mathbf{T}_U}^{(O)} = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_\gamma\otimes\mathbf{O}_\gamma)\cdot\cdot\,\mathbf{T}_U, \quad J_{6+\gamma,\mathbf{T}_o}^{(O)} = 2\boldsymbol{\omega}_0\cdot\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\cdot\boldsymbol{\epsilon}, \quad \gamma = 1,2,3. \tag{2.73}$$

Определяющие соотношения (2.56) в этом случае принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}_e = \sum_{\gamma=1}^{3}(\varphi_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + (\widetilde{\varphi}_{3+\gamma}/2)(\mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma)\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e) + \\ \qquad\qquad + 3\varphi_6\ {}^6\mathbf{O}_m \cdot\cdot\cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e, \\ \dot{\mathbf{U}}_p = \sum_{\gamma=1}^{3}(\psi_\gamma \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 + (\psi_{3+\gamma}/2)(\mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\gamma)\cdot\cdot\ \mathbf{T}_U), \\ \boldsymbol{\Omega}_p = 2\sum_{\gamma=1}^{3}\psi_{6+\gamma}\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \end{cases} \tag{2.74}$$

где

$$\varphi_\gamma = -\rho\frac{\partial\zeta}{\partial I_\gamma^{(O)}}, \qquad \psi_\gamma = h\sum_{\beta=1}^{k}\dot{\varkappa}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial J_\gamma^{(O)}},$$

$$\zeta = \zeta(I_1^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \ldots, I_7^{(O)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e), \theta, w_1^p, \ldots, w_9^p), \tag{2.75}$$

$$f_\beta = f_\beta(J_1^{(O)}, \ldots, J_9^{(O)}, \theta, w_1^p, \ldots, w_9^p).$$

Параметры Тейлора имеют вид

$$w_\gamma^p = \int_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\cdot\cdot\ \mathbf{T}_U)(\widehat{\mathbf{c}}_\gamma^2\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p)d\tau, \qquad w_{3+\gamma}^p = \int_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_\alpha^2\cdot\mathbf{T}_U)\cdot\cdot(\widehat{\mathbf{c}}_\beta^2\cdot\dot{\mathbf{U}}_p)d\tau,$$

$$w_{6+\gamma}^p = \int_0^t(\widehat{\mathbf{c}}_\gamma\cdot\boldsymbol{\omega}_\Omega)(\widehat{\mathbf{c}}_\gamma\cdot\boldsymbol{\omega}_0)d\tau, \quad \gamma=1,2,3, \quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha. \tag{2.76}$$

8.2.10. Соблюдение принципа материальной индифферентности для моделей B_n^ζ пластических сред.

Теорема 8.4. *Тензоры* $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{O}_p$, $\mathbf{U}_p$, $\dot{\mathbf{U}}_p$, $\mathbf{V}_p$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$, $\mathbf{T}_U$, $\mathbf{T}_o$, $\mathbf{T}_e$, $\boldsymbol{\Omega}_p$ *и* $\mathbf{U}_e$ *являются* S*-инвариантными, а тензор* $\mathbf{V}_e$ *—* S*-индифферентен при жестких движениях актуальной конфигурации* $\mathcal{K}\to\mathcal{K}'$.

▼ Введем как всегда с помощью жесткого движения (3.10.3) еще одну актуальную конфигурацию $\mathcal{K}'$ и определим градиенты деформации из $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}'$ и из $\overset{\mathrm{p}}{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{K}'$ по обычным правилам образования градиентов деформации:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{r}'_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \mathbf{F}'_e = \mathbf{r}'_i \otimes \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{r}}{}^i, \qquad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{r}'_i \otimes \mathbf{r}^i, \tag{2.77}$$

Очевидно, что имеют место следующие соотношения (см. также (3.10.15)):

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}, \qquad \mathbf{F}'_e = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}_e, \tag{2.78}$$

т.е. градиент $\mathbf{F}_e$ преобразуется так же, как и $\mathbf{F}$ при $\mathcal{K}\to\mathcal{K}'$, поэтому $\mathbf{O}_e$, $\mathbf{U}_e$ и $\mathbf{V}_e$ преобразуются так же, как и $\mathbf{O}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ (см. п. 3.10.4):

$$\mathbf{O}'_e = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}_e, \quad \mathbf{U}'_e = \mathbf{U}_e, \qquad \mathbf{V}'_e = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{Q}. \tag{2.79}$$

Градиент пластической деформации $\mathbf{F}_p$ по определению связывает две отсчетные конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ и $\overset{\mathrm{p}}{\mathcal{K}}$ (рис. 8.3), и поэтому действительно при жестких движениях $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ не изменяется, т.е. он S-инвариантен. Тогда и его полярное разложение не изменяется при преобразованиях $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, т.е. тензоры $\mathbf{O}_p$, $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{V}_p$ также являются S-инвариантными.

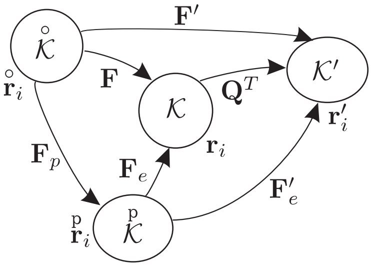

Рис. 8.3. S-преобразование актуальной конфигурации $\mathcal{K}$ для пластических сред

В силу S-индифферентности тензора $\mathbf{T}$, из (2.78), (2.79) и определения тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ (см. табл. 8.1) очевидно следует, что эти тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$ преобразуются так же, как и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ при $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, т.е. все они S-инвариантны. Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_p$ совпадают с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$, поэтому они тоже являются S-инвариантными.

Используя определения (2.14)–(2.16) тензоров $\mathbf{T}_U$, $\mathbf{T}_o$ и $\mathbf{\Omega}_p$, в силу S-инвариантности тензоров $\mathbf{F}_p$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e$, $\mathbf{U}_e$ и $\mathbf{O}_p$, заключаем, что и $\mathbf{T}_U$, $\mathbf{T}_o$ и $\mathbf{\Omega}_p$ тоже являются S-инвариантными. ▲

Из этой теоремы следует, что все определяющие соотношения моделей B_n^ζ пластических сред, приведенные в пп. 8.2.1–8.2.4, не изменяются при жестких движениях, т.е. полностью удовлетворяют принципу материальной индифферентности.

Упражнения к 8.2

Упражнение 8.2.1. Рассмотреть *модель B_n^ζ бесповоротной пластичности*, для которой пластические потенциалы f_β (2.41) не зависят от $\mathbf{T}_0$. Показать, что в этом случае из (2.40б) следует, что $\mathbf{O}_p = \mathbf{E}$, и определяющие соотношения пластичности (2.40)–(2.45) не зависят от $\mathbf{O}_p$.

Упражнение 8.2.2. Доказать, что для изотропных сред тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p$ коммутирует с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$.

8.3. Модели C_n и D_n пластических сред

8.3.1. Общее представление определяющих соотношений для моделей C_n пластических сред. Рассмотрим модели C_n^ζ пластических сред. Способ построения этих моделей несколько отличается от аналогичного построения моделей A_n^ζ.

С помощью полярных разложений градиентов деформации $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}_e$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}, \qquad \mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{O}_e, \qquad \mathbf{F}_p = \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{O}_p, \tag{3.1}$$

и представления тензоров искажений $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_p$ в своих собственных базисах:

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} \varkappa_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad \mathbf{V}_p = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\mathrm{p}}{\lambda}_\alpha \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{p}}_\alpha, \tag{3.2}$$

можно ввести тензоры упругой и пластической деформаций $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(\mathbf{V}^{n-\mathrm{III}} - \mathbf{E}) = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha,$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}} - \overset{\mathrm{p}}{\lambda}_\alpha{}^{n-\mathrm{III}})\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \tag{3.2a}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e = \frac{1}{n-\mathrm{III}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\overset{\mathrm{p}}{\lambda}{}_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \qquad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V},$$

очевидно, удовлетворяющие соотношению аддитивности тензоров упругой и пластической деформаций:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p. \tag{3.3}$$

Дальнейшее построение моделей B_n^ζ пластических сред методом формальной замены тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} \to \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \to \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ в моделях A_n^ζ, как мы знаем из опыта построения моделей фойгтовских сред (см. п. 6.3.1), приведет к некорректным определяющим соотношениям, не удовлетворяющим принципу материальной индифферентности, поскольку тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^\bullet$ не являются S-индифферентными (тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$ — S-индифферентны, как и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$). Способ преодоления этой проблемы такой же, как и для фойгтовских сред, — это использование коротационных производных.

Рассмотрим ОТТ в форме C_n (3.3.17) и запишем его с учетом (3.3) в следующем виде:

$$\rho d\psi + \rho\eta d\theta - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p - \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + w^* dt = 0. \tag{3.4}$$

Вводя свободную энергию Гиббса ζ следующим образом:

$$\zeta = \psi - (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho) \cdot\cdot\, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e, \tag{3.5}$$

получаем ОТТ в форме C_n^ζ:

$$\rho d\zeta + \rho\eta d\theta + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e \cdot\cdot\, d(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho) - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p - \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot\, d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + w^* dt = 0. \tag{3.6}$$

Очевидно, что формулы (3.5) и (2.23) определяют различные функции ζ, для которых мы, тем не менее, используем одно и то же обозначение. В модели C_n^ζ свободная энергия ζ и тензор упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e$ рассматриваются как функционалы вида, подобного (1.1), но частные производные по времени у которых заменены на коротационные:

$$\zeta = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\zeta}}\,(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^h(t), \mathcal{R}^t(\tau), \mathcal{R}^{ht}(\tau)), \tag{3.7a}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\mathbf{A}}}_e(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^h(t), \mathcal{R}^t(\tau), \mathcal{R}^{ht}(\tau)), \tag{3.7б}$$

$$\mathcal{R} = \{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p, \mathbf{O}, \theta\}, \qquad h = \{V, S, J\}.$$

Тензоры равновесной упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^0$ и неравновесной упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^1$ вводим следующим образом:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^0 = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\mathbf{A}}}_e(\mathcal{R}(t), 0, \mathcal{R}^t(\tau), \mathcal{R}^{ht}(\tau)), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^1 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^0. \tag{3.8}$$

Подставляя функционалы (3.7а) (3.7б) и (3.8) в ОТТ (3.6), получаем следующее тождество:

$$\rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho} + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^0\Big)\cdot\cdot\, d\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}}{\rho}\Big) + \rho\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} + \eta\Big)d\theta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)^h}\cdot\cdot d\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}}{\rho}\Big)^h +$$
$$+ \Big(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\mathbf{O}} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}\Big)\cdot\cdot d\mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\mathbf{O}^h}\cdot\cdot d\mathbf{O}^{hT} + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h}\cdot\cdot d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h +$$
$$+ \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\theta^h}d\theta^h + (w^* - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_H\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^{\bullet} + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^1\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)^{\bullet} + \rho\delta\zeta)dt = 0, \tag{3.9}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_H = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{H}}_p = \rho(\partial\zeta/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p) \tag{3.9а}$$

— приведенные квазиэнергетические тензоры напряжений.

В силу независимости дифференциалов $d(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)$, $d\theta$, $d\theta^h$, $d(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)^h$, $d\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, $d\mathbf{O}^{hT}$, $d\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h$ и dt, тождество (3.9) эквивалентно следующей системе определяющих соотношений:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^0 = -\partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho), \qquad \overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho(\partial\zeta/\partial\mathbf{O}), \qquad \eta = -\partial\zeta/\partial\theta,$$
$$\partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)^h = 0, \quad \partial\zeta/\partial\theta^h = 0, \quad \partial\zeta/\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h = 0, \quad \partial\zeta/\partial\mathbf{O}^h = 0, \tag{3.10}$$
$$w^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_H\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^{\bullet} - \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_e^1\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}/\rho)^{\bullet} - \rho\delta\zeta.$$

Следствием этих соотношений является факт независимости потенциала ζ от коротационных производных в момент времени t:

$$\zeta = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\zeta}}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \mathcal{R}^{ht}(\tau)), \tag{3.11}$$

Модель C_n^ζ пластических сред задается тремя функционалами: (3.7б), (3.11) и функциональным соотношением для тензора пластической деформации $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_p$.

8.3.2. Определяющие соотношения для моделей C_n^ζ изотропных пластических сред.

Теорема 8.5. *Для моделей C_n^ζ изотропных пластических сред потенциал ζ и тензор $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1$ не зависят от тензора $\mathbf{O}$, а функцию рассеивания можно представить в виде*

$$w^* = \overset{(n)}{\mathbf{S}}_H \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_p^h - \rho \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1 \cdot\cdot (\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho)^h - \rho\delta\zeta, \qquad h = \{V, S, J\}. \tag{3.12}$$

▼ Поскольку $\zeta(t)$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1(t)$ в общем случае являются функциями от $\mathbf{O}(t)$, то методом, использованным в п. 6.3.3. для фойгтовских сред, получаем, что для изотропных сред

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \rho(\partial\zeta/\partial\mathbf{O}) = \mathbf{0}, \qquad \partial\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1/\partial\mathbf{O} = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

т.е. ζ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1$ действительно не зависит от $\mathbf{O}$. Тогда, согласно теореме 3.9 (п. 3.2.18), тензор $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ коммутирует с $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, т.е. эти тензоры соосны. Используя же теорему 3.12, ОТТ (3.7) в этом случае для изотропных сред можно представить через коротационные производные:

$$\rho\zeta^h + \rho\eta\theta^h + \rho\overset{(n)}{\mathbf{A}}_e \cdot\cdot (\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho)^h - \overset{(n)}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_p^h + w^* = 0. \tag{3.14}$$

Поскольку $\zeta^h = \dot{\zeta}$, то, выбирая функционалы ζ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1$ в виде (3.7а), где реактивные переменные $\mathcal{R}$ уже не содержат $\mathbf{O}$, и проделывая еще раз выкладки (3.9), снова получаем определяющие соотношения (3.10), но функция рассеивания в них уже будет выражена через коротационные производные, т.е. формула (3.12) действительно имеет место. ▲

Применим теперь принцип Онзагера для моделей C_n^ζ, составляя плотность внутреннего производства энтропии (3.12.1) с учетом (3.12). В результате получим следующие дополнительные к (3.10) определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} -\mathbf{q}/\theta &= L_{11}\cdot\nabla\theta + L_{12}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{S}}_H + L_{13}\cdot\cdot(\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho)^h, \\ \overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_p^h &= L_{12}\cdot\nabla\theta + L_{22}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{S}}_H + L_{23}\cdot\cdot(\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho)^h, \\ \rho\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_e^1 &= L_{13}\cdot\nabla\theta + L_{23}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{S}}_H + L_{33}\cdot\cdot(\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho)^h, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $L_{\alpha\beta}$ — функционалы виды (3.7б), а $\mathcal{R} = \{\overset{(n)}{\mathbf{S}}/\rho, \overset{(n)}{\mathbf{A}}_p, \theta\}$.

Дальнейшее уточнение вида соотношений (3.15) осуществляем таким же образом, что и для моделей A_n^ζ, заменяя формально $\mathbf{T} \to \mathbf{S}$, $\mathbf{C} \to \mathbf{A}$ и $(\cdot) \to (h)$ (см. пп. 8.1.3–8.1.12). В частности, *ассоциированная модель* C_n^ζ *изотропной пластической среды* имеет вид, подобный соотношениям (1.75)–(1.83):

$$\zeta = \zeta(J_\gamma^{(I)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p), \theta, w_p), \quad f_\beta = f_\beta(J_1^{(I)}, J_2^{(I)}, J_4^{(I)}, J_5^{(I)}, J_7^{(I)}, \theta, w_p),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e = \widetilde{\varphi}_1 \mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} + \widetilde{\varphi}_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^2 + \widetilde{\varphi}_4 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p + \varphi_5 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^2 + \varphi_6 (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}),$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h = \widetilde{\psi}_1 \mathbf{E} - \psi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} + \psi_7 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h, \tag{3.16}$$

$$\varphi_\gamma = -\rho(\partial\zeta/\partial J_\gamma^{(I)}), \quad \psi_\alpha = h \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta (\partial f_\beta / \partial J_\alpha^{(I)}), \quad w_p = \int_0^t \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p d\tau.$$

Функции $\widetilde{\varphi}_\alpha$ и $\widetilde{\psi}_\alpha$ вычисляют по (1.78) и (1.82), а совместные инварианты $J_\gamma^{(I)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p)$ — по формулам (1.75).

В модели C_n^ζ *Губера–Мизеса* соотношение для пластического течения имеет вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{P}}{}_p^h = 3\dot{\varkappa} h f_Y \mathbf{P}_H, \tag{3.17а}$$

где обозначены девиаторы тензоров

$$\mathbf{P}_p = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p)\mathbf{E}, \quad \mathbf{P}_H = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - H\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} - H\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p)\mathbf{E}, \tag{3.17б}$$

и

$$f_Y = \frac{1}{2Y_H} \frac{\partial f}{\partial Y_H}, \quad f = f(Y_H, \theta, w_p), \quad Y_H^2 = \frac{3}{2} \mathbf{P}_H \cdot\cdot \mathbf{P}_H. \tag{3.17в}$$

Замечание 1. Несмотря на формальное сходство моделей C_n^ζ и A_n^ζ изотропных пластических сред, очевидно, что определяющие соотношения этих моделей не эквивалентны друг другу.

Замечание 2. Соотношения (3.13) представляют собой дополнительное требование, которому должны удовлетворять определяющие соотношения (3.16). Как было показано в п. 3.2.18 (см. теорему 3.9), соотношение $\overset{\circ}{\mathbf{S}} = 0$ эквивалентно требованию соосности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}$ или их коммутативности:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = 0. \tag{3.18а}$$

С учетом соотношения аддитивности (3.3) это требование заменим на более сильное:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = 0, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = 0. \tag{3.18б}$$

Из (3.18б) всегда следует (3.18а), но не наоборот.

Для того чтобы проверить, удовлетворяют ли соотношения (3.16) условиям (3.18б), выразим их относительно тензора $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} = \bar{\psi}_1 \mathbf{E} - \bar{\psi}_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h + \bar{\psi}_3 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p, \tag{3.19}$$
$$\bar{\psi}_1 = \widetilde{\psi}_1/\psi_2, \quad \bar{\psi}_2 = 1/\psi_2, \quad \bar{\psi}_3 = \psi_7/\psi_2.$$

Подставляя (3.19) во второе условие (3.18б), получаем, что это условие сводится к требованию коммутативности тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p = 0. \tag{3.20а}$$

Подставляя соотношение (3.16) для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e$ в первое условие (3.18б) и учитывая (3.19), находим, что кроме того должны выполняться еще два условия коммутативности:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^2 = 0, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p \cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h)^2 - (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^h)^2 \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p = 0. \tag{3.20б}$$

Условия (3.20) являются весьма ограничительными. Из всех коротационных производных, рассмотренных в этом разделе: $h \in \{V, s, J\}$, только коротационная производная $h = V$ в базисе левого тензора искажений удовлетворяет всем этим условиям, так как из определения (3.3а) тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$ следует, что только производная $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^V$ имеет собственный базис, совпадающий с $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}{}_p^V = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \sum_{\alpha=1}^{3} (\overset{\mathrm{p}}{\lambda}{}_\alpha^{n-\mathrm{III}} - \lambda_\alpha^{n-\mathrm{III}})^{\bullet} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha.$$

Поэтому для данной производной все соотношения коммутативности (3.20) тождественно выполняются.

С учетом вышесказанного, из всех рассмотренных коротационных производных использование производной в собственном базисе левого тензора искажений $h = V$ для моделей C_n^ζ пластических сред является корректным.

8.3.3. Общее представление определяющих соотношений для моделей D_n^ζ пластических сред. Модели D_n^ζ пластических сред являются мультипликативными — соотношение аддитивности упругих и пластических деформаций для них не выполняется, и определяющие соотношения в этих моделях строятся тем же методом, что и в моделях B_n^ζ.

В основе моделей D_n^ζ лежит следующее представление мощности напряжений.

Теорема 8.6. *Мощность напряжений $w_{(i)}$ всегда можно представить в следующем аддитивном виде:*

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}_e^{\mathrm{T}} + \mathbf{S}_v \cdot\cdot \dot{\mathbf{V}}_p + \mathbf{S}_0 \cdot\cdot \mathbf{\Omega}_p, \tag{3.21}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_p$ *— тензор спина пластического вращения (2.16),* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$ *— квазиэнергетические симметричные тензоры упругих напряжений, а и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ *— квазиэнергетические меры упругой деформации, определяемые аналогично тензорам* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ *и* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}$*, с заменой* $\mathbf{V} \to \mathbf{V}_e$ *(см. табл. 8.2),* $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e$ *— поворотный тензор упругих напряжений,* $\mathbf{S}_v$ *— симметричный квазиэнергетический тензор напряжений пластического искажения,* $\mathbf{S}_0$ *— кососимметричный тензор напряжений пластического вращения, определяемые следующим образом:*

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e^{-1} - \mathbf{V}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e) \cdot \mathbf{O}_e,$$

$$\mathbf{S}_v = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_p^{-1}), \qquad (3.21a)$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_p^{-1} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{T}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_p^{-1}),$$

где $\mathbf{T}_e$ *определяется по (2.15).*

Таблица 8.2. Выражения для $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ при $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}$

n	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$	$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$
I	$\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e$	$-\frac{1}{2}\mathbf{V}_e^{-2}$
II	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e)$	$-\mathbf{V}_e^{-1}$
III	$\mathbf{T}$	$\mathbf{Y}_e$
IV	$\frac{1}{2}(\mathbf{V}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e^{-1})$	$\mathbf{V}_e$
V	$\mathbf{V}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_e^{-1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{V}_e^2$

Тензор $\mathbf{Y}_e$, как и $\mathbf{Y}$, определяется своей производной и начальным значением $\mathbf{Y}_e^0$ (при отсутствии начальных пластических деформаций $\mathbf{Y}_e^0 = \mathbf{E}$):

$$\dot{\mathbf{Y}}_e = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}_e \cdot \mathbf{V}_e^{-1} + \mathbf{V}_e^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}_e), \qquad \mathbf{Y}_e(0) = \mathbf{Y}_e^0. \qquad (3.22)$$

▼ Для доказательства воспользуемся формулой (3.21). Первое слагаемое в правой части этой формулы отличается от полной мощности напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}^{\bullet}$ только появлением индекса e, тогда к этому слагаемому $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet}$ можно применить теорему 3.5, гарантирующую существование квазиэнергетических пар — в данном случае с индексами e:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{G}}{}_e^{\bullet} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e \cdot\cdot \dot{\mathbf{O}}_e^{\mathrm{T}}. \qquad (3.23)$$

Второе слагаемое в (2.21) преобразуем с учетом определения (2.14) тензора $\mathbf{T}_U$ и очевидного соотношения

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{O}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{O}_p. \qquad (3.24)$$

Тогда

$$\mathbf{T}_U \cdot\cdot \dot{\mathbf{U}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{T}_e\cdot\mathbf{O}_p + \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}_e\cdot\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}})\cdot\cdot(\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}_p\cdot\mathbf{O}_p)^{\bullet} = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{O}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1}\cdot\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e\cdot\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}})\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{V}}_p + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{O}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{T}_e\cdot\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_p\cdot\mathbf{O}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e\cdot\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}_p - \\ - \mathbf{V}_p\cdot\mathbf{T}_e\cdot\mathbf{F}_p^{-1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}})\cdot\cdot(\dot{\mathbf{O}}_p\cdot\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}). \quad (3.25)$$

Здесь мы использовали правило перестановки тензоров в тройном скалярном произведении, а также учли, что $\mathbf{O}_p\cdot\dot{\mathbf{O}}_p^{\mathrm{T}} = -\dot{\mathbf{O}}_p\cdot\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}$. Учитывая, что $\mathbf{O}_p \times \times \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{V}_p^{-1}$, получаем, что

$$\mathbf{T}_U\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{S}_v\cdot\cdot\dot{\mathbf{V}}_p + (\mathbf{S}_v\cdot\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_p\cdot\mathbf{S}_v)\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p. \quad (3.26)$$

Подставляя теперь формулы (3.23) и (3.26) в (2.21), получаем

$$w_{(i)} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^{\bullet} + \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\dot{\mathbf{O}}_e^{\mathrm{T}} + \mathbf{S}_v\cdot\cdot\dot{\mathbf{V}}_p + (\mathbf{S}_v\cdot\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_p\cdot\mathbf{S}_v + \mathbf{T}_o)\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p. \quad (3.27)$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_v\cdot\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_p\cdot\mathbf{S}_v + \mathbf{T}_o, \quad (3.28)$$

где $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_v$ определены по формуле (3.21а), а $\mathbf{T}_o$ по (2.15). Тогда из (3.27) действительно следует представление (3.21). ▲

Подставляя представление (3.21) для мощности напряжений в ОТТ (3.3.18), получаем

$$\rho\dot{\psi} + \rho\eta\dot{\theta} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^{\bullet} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\dot{\mathbf{O}}_e^{\mathrm{T}} - \mathbf{S}_v\cdot\cdot\dot{\mathbf{V}}_p - \mathbf{S}_0\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p = 0. \quad (3.29)$$

Вводя свободную энергию Гиббса

$$\zeta = \psi - \frac{1}{\rho}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e, \quad (3.30)$$

получаем ОТТ в форме D_n^{ζ}:

$$\rho\dot{\zeta} + \rho\eta\dot{\theta} + \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e\cdot\cdot\left(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e}{\rho}\right)^{\bullet} - \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e\cdot\cdot\dot{\mathbf{O}}_e^{\mathrm{T}} - \mathbf{S}_v\cdot\cdot\dot{\mathbf{V}}_p - \mathbf{S}_0\cdot\cdot\boldsymbol{\Omega}_p + w^* = 0. \quad (3.31)$$

К активным и реактивным переменным можно отнести следующие функции:

$$\Lambda = \{\zeta, \eta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e, \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e, \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_0, w^*\}, \quad \mathcal{R} = \{\theta, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e/\rho, \mathbf{O}_e, \mathbf{V}_p, \mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}\}. \quad (3.32)$$

В моделях D_n^{ζ} пластических сред активные и реактивные переменные связаны функциональным соотношением вида (2.25):

$$\Lambda = \mathop{\Lambda}_{\tau=0}^{t}(\mathcal{R}(t), \dot{\mathcal{R}}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \quad (3.33)$$

Разделяя меры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e$ на *меры равновесной упругой деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^0$ и меры неравновесной упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^1$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^0 = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\mathbf{g}}}(\mathcal{R}(t), 0, \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)), \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^1 = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^0, \tag{3.34}$$

и подставляя функционалы (3.33), (3.34) в ОТТ (3.31), приводим его к виду, аналогичному (3.9), из которого получаем определяющие соотношения:

$$\begin{cases} \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^0 = -\partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho), \quad \overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = \rho(\partial\zeta/\partial\mathbf{O}_e), \quad \eta = -\partial\zeta/\partial\theta, \\ \partial\zeta/\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet = 0, \quad \partial\zeta/\partial\theta^\bullet = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot{\mathbf{V}}_p = 0, \\ \partial\zeta/\partial\dot{\mathbf{O}}_p = 0, \quad \partial\zeta/\partial\dot{\mathbf{O}}_e = 0, \\ w^* = \widetilde{\mathbf{S}}_v \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{V}}_p + \widetilde{\mathbf{S}}_0 \cdot\cdot\, \mathbf{\Omega}_p - \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^1 \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet - \rho\delta\zeta, \end{cases} \tag{3.35}$$

где обозначены

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{S}}_v = \mathbf{S}_v - \mathbf{N}_p, \quad \mathbf{N}_p = \rho(\partial\zeta/\partial\mathbf{V}_p), \\ \widetilde{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{S}_0 - \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{N}_0 = \rho\mathbf{O}_p \cdot (\partial\zeta/\partial\mathbf{O}_p^{\mathrm{T}}). \end{gathered} \tag{3.36}$$

Из этих соотношений следует, что, как и для моделей C_n^ζ, потенциал ζ не зависит от производных в текущий момент времени t, т.е.

$$\zeta = \underset{\tau=0}{\overset{t}{\zeta}}(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^t(\tau), \dot{\mathcal{R}}^t(\tau)). \tag{3.37}$$

Применим принцип Онзагера для моделей D_n^ζ, составляя плотность внутреннего производства энтропии (3.12.1) с учетом выражения (3.35) для w^*. В результате получим дополнительные к (3.35) определяющие соотношения;

$$\begin{cases} -\mathbf{q}/\theta = L_{11} \cdot \nabla\theta + L_{12} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_v + L_{13} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_0 + L_{14} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet, \\ \dot{\mathbf{V}}_p = L_{12} \cdot \nabla\theta + L_{22} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_v + L_{23} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_0 + L_{24} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet, \\ \mathbf{\Omega}_p = L_{13} \cdot \nabla\theta + L_{23} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_v + L_{33} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_0 + L_{34} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet, \\ \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}_e^1 = L_{14} \cdot \nabla\theta + L_{24} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_v + L_{34} \cdot\cdot \widetilde{\mathbf{S}}_0 + L_{44} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}_e/\rho)^\bullet, \end{cases} \tag{3.38}$$

В *моделях D_n^ζ теории течения* все функционалы в (3.38) полагаются только функциями своих аргументов и перекрестными эффектами пренебрегают, в результате соотношения (3.38) имеют более простой вид

$$\begin{cases} -\mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla\theta, \\ \dot{\mathbf{V}}_p = {}^4\mathbf{L}_v \cdot\cdot\, \widetilde{\mathbf{S}}_v, \\ \mathbf{\Omega}_p = {}^4\mathbf{L}_0 \cdot\cdot\, \widetilde{\mathbf{S}}_0, \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}^1 = 0, \end{cases} \tag{3.39}$$

где ζ и L_{22}, L_{23}, L_{33} являются функциями вида

$$\zeta = \zeta(\mathcal{R}, w^p_\beta), \tag{3.40а}$$

$$^4\mathbf{L}_v = {}^4\mathbf{L}_v(\mathcal{R}, \dot{\mathcal{R}}, w^p_\beta), \quad {}^4\mathbf{L}_0 = {}^4\mathbf{L}_0(\mathcal{R}, \dot{\mathcal{R}}, w^p_\beta), \quad \mathcal{R} = \{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e/\rho, \mathbf{O}_e, \theta, \mathbf{V}_p, \mathbf{O}^{\mathrm{T}}_p\}. \tag{3.40б}$$

8.3.4. Определяющие соотношения для моделей D^ζ_n изотропных пластических сред. Рассмотрим изотропные пластические среды. Методом, предложенным в п. 8.3.2, несложно показать, что потенциал ζ в этом случае не зависит от $\mathbf{O}_e$, т.е. $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e = 0$, и, следовательно, тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ должны быть соосны.

Удовлетворяющее этому условию определяющее соотношение (3.35) между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$ имеет обычный вид (см.(2.63)):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e = \widetilde{\varphi}_1\mathbf{E} + \widetilde{\varphi}_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e + \varphi_3\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}^2_e, \tag{3.41}$$

$$\varphi_\gamma = -\rho(\partial\zeta/\partial I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e)), \qquad \zeta = \zeta(I_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e), J^{(I)}_\gamma(\mathbf{V}_p, \mathbf{O}^{\mathrm{T}}_p), \theta, w_p),$$

$$w_p = \int\limits_0^t (\mathbf{S}_v \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{V}}_p + \mathbf{S}_0 \cdot\cdot \boldsymbol{\Omega}_p)d\tau.$$

В ассоциированной модели D^ζ_n пластических сред соотношения (3.39) пластического течения связаны с поверхностью пластичности по закону градиентальности:

$$\dot{\mathbf{V}}_p = h\sum_{\beta=1}^k \dot{\varkappa}_\beta(\partial f_\beta/\partial\widetilde{\mathbf{S}}_v), \qquad \boldsymbol{\Omega}_p = h\sum_{\beta=1}^k \dot{\varkappa}_\beta(\partial f_\beta/\partial\widetilde{\mathbf{S}}_0), \tag{3.42}$$

где f_β — пластические потенциалы — функции вида (3.40а), которые можно рассматривать зависящими от следующих аргументов:

$$f_\beta = f_\beta(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_0, \mathbf{V}_p, \mathbf{O}^{\mathrm{T}}_p, \theta, w_p). \tag{3.43}$$

Для модели B^ζ_n пластической среды с собственным упрочнением f_β не зависят явно от $\mathbf{V}_p$, а являются функциями совместных инвариантов тензоров $\mathbf{S}_v$ и $\mathbf{S}_0$:

$$f_\beta = f_\beta(J^{(I)}_\gamma(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_0), \theta, w_p). \tag{3.44}$$

Поскольку тензоры $\mathbf{S}_v$ и $\mathbf{S}_0$ представляют собой комбинацию тензоров $\mathbf{T}_e$ и $\mathbf{V}_e$, то модель (3.44) описывает пластическое упрочнение, но специальным образом.

Так как тензор $\mathbf{S}_0$ — кососимметричен, то с ним можно связать вектор вихря

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\, \mathbf{S}_0 \tag{3.45}$$

и рассматривать совместные инварианты $J_\gamma^{(I)}$ как скалярные функции от симметричного тензора $\mathbf{S}_v$ и вектора $\boldsymbol{\omega}_0$:

$$f_\beta = f_\beta(J_1^{(I)}, J_2^{(I)}, J_4^{(I)}, \theta, w_p), \qquad J_\gamma^{(I)} = J_\gamma^{(I)}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\omega}_0). \tag{3.46}$$

Совместные инварианты $J_\gamma^{(I)}$ для изотропной среды определяют по формулам (2.60). Тогда, принимая во внимание выражение (2.61), определяющие соотношения (3.42) можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{V}}_p = \widetilde{\psi}_1 \mathbf{E} - \psi_2 \mathbf{S}_v, \qquad \boldsymbol{\Omega}_p = \psi_4 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \tag{3.47}$$

$$\widetilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_2 I_1(\mathbf{S}_v), \qquad \psi_\gamma = h \sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial J_\gamma^{(I)}}.$$

Функция h определяется формулой (1.51), в которой частичная производная по времени имеет следующий вид:

$$\frac{d' f_\beta}{dt} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{S}_v} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{S}}_v + \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{S}_0} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{S}}_0. \tag{3.48}$$

Система из $(9+k)$ скалярных уравнений (3.42) и

$$f_\beta = 0, \qquad \beta = 1, \ldots k, \tag{3.49}$$

рассматривается относительно $(9+k)$ скалярных неизвестных: шести независимых компонент тензора $\mathbf{V}_p$, трех компонент тензора $\mathbf{O}_p$ и k скалярных функций $\dot{\varkappa}_\beta$.

8.3.5. Соблюдение принципов материальной симметрии и материальной индифферентности для моделей C_n^ζ и D_n^ζ.

1) Тензор $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$ является H-инвариантным, поэтому и тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_p$ в моделях C_n^ζ также H-инвариантны. Коротационные производные $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_p^h$, как было показано в п. 3.7.5, также будут H-инвариантными. Тогда, поскольку тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$ являются H-инвариантными, определяющие соотношения (3.16) для моделей C_n^ζ изотропных пластических сред не будут изменяться при замене отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \overset{*}{\mathcal{K}}$, и, следовательно, принцип материальной симметрии для этих моделей C_n^ζ соблюдается.

В то же время тензоры $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_p$, как и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, являются S-индифферентными. Все коротационные производные $\overset{(n)}{\mathbf{A}}{}_p^h$, $h = \{V, S, J\}$, как было показано в п. 3.7.5, также будут S-индифферентными. Следовательно, в силу S-индифферентности тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{S}}$, определяющие соотношения (3.16) при переходе $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ жестким движением будут изменяться согласованно: т.е. соотношения между $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_e{}'$, $\overset{(n)}{\mathbf{A}}_p{}'$ и $\overset{(n)}{\mathbf{S}}{}'$ в $\mathcal{K}'$ будут в точности те же самые, что и соотношения между тензорами $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_e$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{A}}_p$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}$ в $\mathcal{K}$. Это и означает, что принцип материальной индифферентности для моделей C_n^ζ также соблюдается.

2) В силу H-индифферентности тензоров $\mathbf{T}_e$ и $\mathbf{V}_p$ (см. п. 8.2.5), тензоры $\mathbf{S}_v$ и $\mathbf{S}_0$ (3.21) являются также H-индифферентными, а тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$, $\overset{\circ}{\mathbf{S}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ являются H-инвариантными, поскольку, в силу теоремы 8.4 (п. 8.2.5), все образующие их тензоры $\mathbf{T}$, $\mathbf{V}_e$ и $\mathbf{O}_e$ также H-инвариантны.

Тогда определяющие соотношения (3.41) при H-преобразованиях $H : \overset{\circ}{\mathcal{K}} \to \to \overset{*}{\mathcal{K}}$ не изменяются, а соотношения (3.47) для пластических деформаций меняются согласованно: соотношения между $\overset{*}{\mathbf{V}}{}_p^{\bullet}$, $\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}_p$ и $\overset{*}{\mathbf{S}}_V$, $\overset{*}{\mathbf{S}}_0$ в $\overset{*}{\mathcal{K}}$ остаются точно такими же, как и для $\mathbf{V}_p$, $\boldsymbol{\Omega}_p$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_0$ в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$, т.е. принцип материальной симметрии для изотропных моделей D_n^ζ соблюдается.

При жестких движениях $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, наоборот, тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ являются S-индифферентными в силу S-индифферентности образующих их тензоров $\mathbf{T}$, $\mathbf{V}_e$ (см. теорему из пп. 3.10.4 и 3.10.5), а тензоры $\mathbf{S}_V$ и $\mathbf{S}_0$ являются S-инвариантными в силу S-инвариантности образующих их тензоров $\mathbf{T}_e$ и $\mathbf{V}_p$ (см. теорему 8.4 из п. 8.2.5). Тогда при жестких движениях соотношения (3.41) будут изменяться согласованным образом: соотношения между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}{}'_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}{}'_e$ в $\mathcal{K}'$ будут точно такими же, как и соотношения между $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{g}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{S}}_e$ в $\mathcal{K}$. Кроме того, в силу S-инвариантности тензоров $\dot{\mathbf{V}}_p$ и $\boldsymbol{\Omega}_p$, согласованным образом преобразуются и соотношения (3.47), что свидетельствует о соблюдении принципа материальной индифферентности для изотропных моделей D_n^ζ пластических сред.

Таким образом, все представленные в данном разделе модели пластических сред A_n^ζ, B_n^ζ, C_n^ζ и D_n^ζ являются корректными, поскольку удовлетворяют всем основополагающим принципам МСС.

8.4. Определяющие соотношения теории пластичности «в скоростях»

8.4.1. Представление моделей A_n пластических сред «в скоростях». Для решения многих задач теории пластичности, особенно динамических задач, удобно использовать представление определяющих соотношений «в скоростях» (см. п. 3.8.12) подобно тому, как это было проделано для упругих сред (см. п. 5.1.3).

Рассмотрим вначале соотношения моделей A_n^ζ пластических сред, для наглядности ограничиваясь ассоциированными моделями A_n^ζ пластичности (1.74). Продифференцируем по t соотношение (1.74б) для тензора упругой деформации:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{e} = \sum_{\gamma=1}^{r}\Big(\sum_{\beta=1}^{r}\Big(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial I_\beta^{(s)}} I^{(s)}_{\beta\mathbf{T}} \cdot\cdot \Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^{\bullet} + \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial w_\beta^p} J_\beta^{(s)}\Big) + \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta}\dot\theta\Big) I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}} + \\ + \sum_{\gamma=1}^{r}\varphi_\gamma \frac{\partial I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho} \cdot\cdot \Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^{\bullet}. \quad (4.1)$$

Вводя теперь тензоры ${}^4\widetilde{\mathbf{N}}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta$ по формулам, аналогичным (3.8.147):

$$\begin{gathered} {}^4\widetilde{\mathbf{N}} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{r}(\varphi_{\gamma\beta} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}} \otimes I^{(s)}_{\beta\mathbf{T}} + \varphi_\gamma\delta_{\gamma\beta}{}^4\mathbf{I}_\gamma), \\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta = \sum_{\gamma=1}^{r}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\theta} I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{r}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial w_\beta^p} J^{(s)}_\beta I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}, \end{gathered} \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_{\gamma\beta} = \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial I_\beta^{(s)}} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial I_\gamma^{(s)}\partial I_\beta^{(s)}}, \quad I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}} = \frac{\partial I_\gamma^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)}{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}, \quad {}^4\mathbf{I}_\gamma^{(s)} = \frac{\partial I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}}{\partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)}, \quad (4.3)$$

и используя соотношения (3.2.102) между скоростями энергетических тензоров деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}$ и тензором скоростей деформации $\mathbf{D}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot \mathbf{D} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{e} + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{p}, \quad (4.4)$$

(тензоры ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}$ определяют по формулам (3.2.101)), переписываем соотношение (4.1) в следующем виде:

$${}^4\widetilde{\mathbf{N}} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho)^{\bullet} = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot \mathbf{D} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{p} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta\dot\theta - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp}. \quad (4.5)$$

Обозначим ${}^4\mathbf{P}$ — тензор, обратный к ${}^4\widetilde{\mathbf{N}}$:

$${}^4\mathbf{P} \cdot\cdot {}^4\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{\Delta}, \quad (4.6)$$

тогда соотношение (4.5) можно переписать в следующей форме:

$$\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^{\bullet} = {}^4\mathbf{P} \cdot\cdot ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot \mathbf{D} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{p} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_\theta\dot\theta). \quad (4.7)$$

Присоединяя соотношения (1.74в) и (1.74г) для скоростей пластической деформации:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{p} = \sum_{\alpha=1}^{z_1}\varphi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}, \quad f_\beta = 0, \quad (4.8)$$

получим искомые определяющие соотношения в скоростях.

Заметим, что, согласно (4.2) и (1.74), тензоры, входящие в соотношения (4.7) и (4.8), являются функциями тех же аргументов, что и сами исходные соотношения (1.74):

$$\begin{gathered}{}^4\mathbf{P} = {}^4\mathbf{P}\Big(I_\gamma^{(s)}\big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\big), \theta, w_\beta^p\Big), \qquad f_\beta = f_\beta(J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \theta, w_\beta^p),\\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp}\Big(I_\gamma^{(s)}\big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\big), \theta, w_\beta^p, J_\alpha^{(s)}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p)\Big).\end{gathered} \tag{4.9}$$

Если рассматривать ассоциированные модели A_n^ζ упруго-пластической среды с линейной упругостью (см. п. 8.1.5), то тензор ${}^4\mathbf{P}$ представляет собой не что иное, как

$${}^4\mathbf{P} = \frac{1}{\rho}\ {}^4\mathbf{M} = \frac{1}{\overset{\circ}{\rho}}\ {}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}, \tag{4.10}$$

где ${}^4\overset{\circ}{\mathbf{M}}$ — тензор модулей упругости (5.1.8а), не зависящий от $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$, w_β^p или $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$, а, возможно, только от θ (см. упр. 8.4.1).

Заметим также, что с помощью уравнения неразрывности (2.1.15) и формул (2.1.20) левую часть соотношений (4.7) и (4.8) можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})\Big) = \Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\rho}\Big)^{\bullet}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) = \rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet}, \tag{4.12}$$

тогда соотношениям (4.7) и (4.8) можно придать «дивергентный» вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = \rho\ {}^4\mathbf{P}\cdot\cdot\ ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}\cdot\cdot\ \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{z_1}\varphi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)} - \\ \qquad\qquad\qquad - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp} - \mathbf{C}_\theta\dot\theta),\\ \dfrac{\partial\rho\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) = \sum_{\alpha=1}^{z_1}\rho\varphi_\alpha J_{\alpha\mathbf{T}}^{(s)}, \quad f_\beta = 0.\end{cases} \tag{4.13}$$

Упражнения к 8.4

Упражнение 8.4.1. Показать, что для ассоциированных моделей A_n^ζ упруго-пластической среды с линейной упругостью (см. п. 8.1.5) тензор ${}^4\mathbf{P}$ может быть представлен в виде (4.10).

8.5. Постановки задач теории пластичности

8.5.1. Постановка динамических задач моделей A_n^ζ пластичности. Общая система законов сохранения для пластических сред такова же, как и для других сплошных сред, и может быть записана в пространственном описании в виде (2.9.5). К этой системе следует присоединить определяющие соотношения пластических сред «в скоростях» (для моделей A_n^ζ ассоциированной пластичности это соотношения (4.13)) и дифференциальное уравнение движения границы области $V(t)$ (4.4.43). В результате имеем следующую систему (в случае отсутствия фазовых превращений):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \\
\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) + \rho \mathbf{f}, \\
\frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \eta = -(1/\theta) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + (1/\theta)(\rho q_m + w^*), \\
\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{v}, \\
\frac{\partial \rho \mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v}) = 0, \qquad (5.1) \\
\frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = J\ {}^4\widetilde{\mathbf{M}} \cdot\cdot ({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{z_1} \varphi_\alpha J^{(s)}_{\alpha \mathbf{T}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp} - \mathbf{C}_\theta \theta), \\
\frac{\partial \rho \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) = \rho \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J^{(s)}_{\alpha \mathbf{T}}, \\
f_\beta = 0, \qquad \beta = 1, \ldots, k; \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = 0,
\end{gathered}
$$

которая состоит из $30 + k$ скалярных уравнений относительно следующих неизвестных функций:

$$
\rho, \theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \varkappa_\beta, f \parallel \mathbf{x}, t, \qquad \beta = 1, \ldots, k,
$$

которые при переходе к компонентам образуют систему из $30 + k$ скалярных функций. В системе (5.1), как и в системе уравнений вязкоупругости (7.4.1), уравнение энергии заменено на уравнение баланса энтропии. К (5.1) следует присоединить выражения (3.8.113) или (3.2.37) для тензоров энергетической эквивалентности ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}_A = {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$, выражения (1.28б) для η и (1.40в) для w^*, выражения (3.2.101) для ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}$, а также выражения (1.65),(1.68),(4.2) для ψ_α, $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp}$, $\mathbf{C}_\theta$, f_β и выражения для совместных инвариантов $J^{(s)}_\alpha$.

Согласно введенной в п. 5.1.3 классификации, уравнения (5.1) называют $\mathrm{T}\theta$RUVF-*системой уравнений модели A_n^ζ ассоциированной пластичности.*

Граничные условия к системе (5.1) на поверхности Σ твердой среды формально записывают аналогично соответствующим граничным условиям для упругой твердой среды с конечными деформациями (см. п. 5.3.1), и при отсутствии фазовых превращений они имеют вид

$$\begin{gathered}\Sigma_2: \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{t}_{ne}, \qquad -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta=q_{ne},\\ \Sigma_3: \qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_e, \qquad \theta=\theta_e,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $\mathbf{t}_{ne}, \mathbf{v}_e, q_{ne}$ и θ_e — заданные значения.

На плоскостях симметрии Π_Σ граничные условия имеют вид (5.3.9), а на контактной поверхности граничные условия таковы (см. (5.3.2)):

$$\Sigma_1: \quad \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}]=0, \quad [\mathbf{v}]=0, \quad \mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta]=0, \quad [\theta]=0, \quad [\rho\mathbf{F}]=0. \tag{5.3}$$

К системе (5.1) также присоединяют начальные условия

$$\begin{gathered}t=0: \qquad \rho=\overset{\circ}{\rho}, \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u}=\mathbf{0}, \quad \theta=\theta_0, \quad \mathbf{F}=\mathbf{E},\\ \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p=\mathbf{C}_{p0}, \quad \mathbf{T}=\mathbf{T}_0, \quad \varkappa_\beta=\varkappa_{\beta 0}, \quad \beta=1,\ldots,k,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\overset{\circ}{\rho}, \mathbf{v}_0, \theta_0, \mathbf{C}_{p0}, \mathbf{T}_0, \varkappa_{\beta 0}$ — заданные начальные значения величин.

Постановка *динамической* TθRUVF-*задачи теории термопластичности* A_n^ζ *в пространственном описании* состоит из системы уравнений (5.1), с граничными условиями (5.2), (5.3) и начальными условиями (5.4).

Соответствующая постановка *динамической* TθUVF-*задачи теории термопластичности* A_n^ζ *в материальном описании* состоит из TθUVF-системы (законы сохранения (2.9.8) и определяющие соотношения (4.7)–(4.9)):

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{P}+\overset{\circ}{\rho}\mathbf{f},\\ \overset{\circ}{\rho}\theta\frac{\partial\eta}{\partial t}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta+\overset{\circ}{\rho}q_m+\overset{\circ}{w}{}^*,\\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\mathbf{v}, \qquad \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}},\\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho}{\partial t}={}^4\mathbf{P}\cdot\cdot\Big({}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}\cdot\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\mathbf{v}-\sum_{\alpha=1}^{z_1}\psi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}-\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_{wp}-\mathbf{C}_\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big),\\ \frac{\partial\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{z_1}\psi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}, \qquad \mathbf{P}=\sqrt{g/\overset{\circ}{g}}\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}{}_A^{-1}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}},\\ f_\beta=0, \qquad \beta=1,\ldots,k,\end{gathered} \tag{5.5}$$

граничных условий

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\Sigma}_1: \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\mathbf{P}]=0, \quad [\mathbf{v}]=0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta]=0, \quad [\theta]=0,\\ \overset{\circ}{\Sigma}_2: \qquad \overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}=\overset{\circ}{\mathbf{t}}_{ne}, \qquad -\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\theta=\overset{\circ}{q}_{ne},\\ \overset{\circ}{\Sigma}_3: \qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_e, \qquad \theta=\theta_e,\end{gathered} \tag{5.6}$$

и начальных условий

$$t=0: \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u}=0, \quad \theta=\theta_0, \quad \mathbf{F}=\mathbf{E}, \quad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p=\mathbf{C}_{p0}, \quad \mathbf{P}=\mathbf{T}_0, \quad \varkappa_\beta=\varkappa_{\beta 0}. \tag{5.7}$$

Неизвестными в данной задаче являются следующие функции:

$$\mathbf{v}, \mathbf{u}, \theta, \mathbf{F}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \varkappa_\beta \ \| \ X^i, t, \qquad X^i \in \overset{\circ}{V}, \qquad t \in [0, t_{\max}]. \tag{5.8}$$

В этой постановке, как и для в теории вязкоупругости (см. (7.4.14)), вместо уравнения энергии использовано уравнение баланса энтропии.

Для многих задач влиянием температуры на «механические» параметры задачи (скорость, перемещения, напряжения) можно пренебречь, тогда из системы уравнений (5.1)–(5.4) или (5.5)–(5.7) исключают уравнение баланса энтропии и температуру θ из числа неизвестных, в результате получают *постановки динамических задач теории пластичности* A_n^ζ для изотермических процессов (температуру при этом полагают постоянной $\theta=\theta_0$).

8.5.2. Постановки квазистатических задач для моделей A_n^ζ пластичности. Для пластических сред, как и для идеальных упругих сред, часто используют модели квазистатических процессов (см. п. 5.1.5) и постановки квазистатических задач.

Постановка *квазистатической задачи теории пластичности* A_n^ζ *в пространственном описании* состоит из уравнений равновесия (5.1.35), соотношений (3.2.36) между тензором напряжений Коши $\mathbf{T}$ и энергетическими тензорами напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, кинематических соотношений (1.2.10) и определяющих соотношений (1.74) ассоциированной модели A_n^ζ пластических сред с квазилинейной упругостью (см. упр. 8.1.8):

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}+\rho\mathbf{f}=0,\\
\mathbf{T}={}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}\cdot\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}={}^4\mathbf{M}\cdot\cdot(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}-\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p),\\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}=\frac{1}{n-\mathrm{III}}((\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F})^{(n-\mathrm{III})/2}-\mathbf{E}),\\
\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{E}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p=\sum_{\alpha=1}^{z_1}\psi_\alpha J^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}},\\
f_\beta=0, \qquad \beta=1,\ldots,k,
\end{gathered} \tag{5.9}$$

и граничных условий

$$\Sigma_1: \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{t}_{ne}; \qquad \Sigma_2: \quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_e; \qquad \Sigma_3: \quad \mathbf{n}\cdot[\mathbf{T}]=0, \quad [\mathbf{u}]=0, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{t}_{ne}, \mathbf{u}_e$ — заданные векторы относительно следующих неизвестных (их $3+6+k$ штук, если считать по числу независимых компонент):

$$\mathbf{u}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \varkappa_\beta \ \| \ \mathbf{x}, t, \qquad \beta=1,\ldots,k. \tag{5.11}$$

Здесь выражения для ${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}}$ определяют по формулам (3.2.37), выражения для ${}^4\mathbf{M}$ даны в упр. 8.1.8, а ψ_α, $J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}$ и f_β определяют по формулам из п. 8.1.6.

К системе (5.9)–(5.11) необходимо присоединить соотношения (5.3.22), которые позволяют найти неизвестную геометрию области V в актуальной конфигурации.

Соответствующая постановка квазистатической задачи термопластичности A_n^ζ в материальном описании имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} + \overset{\circ}{\rho}\mathbf{f} = 0,\\
\mathbf{P} = (\overset{\circ}{\rho}/\rho)\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{E}} \cdot \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = {}^4\mathbf{M} \cdot\cdot (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p),\\
\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}((\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F})^{(n-\mathrm{III})/2} - \mathbf{E}),\\
\mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}},\\
f_\beta = 0, \qquad \beta = 1, \ldots, k,\\
\overset{\circ}{\Sigma}_1: \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{t}_{ne}, \qquad \overset{\circ}{\Sigma}_2: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \qquad \overset{\circ}{\Sigma}_3: \quad \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0,
\end{gathered}
\tag{5.12}
$$

относительно следующих неизвестных ($3 + 6 + k$ независимых компонент):

$$
\mathbf{u}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \varkappa_\beta \ \parallel X^i, t, \qquad \beta = 1, \ldots, k. \tag{5.13}
$$

Область решения задачи (5.12)–(5.13) $\overset{\circ}{V}$ является известной.

8.6. Задача о всестороннем растяжении–сжатии пластических сред

8.6.1. Деформация всестороннего растяжения–сжатия. Для того, чтобы проанализировать особенности моделей пластических сред, рассмотрим задачу о всестороннем растяжении–сжатии куба — области $V = \{x^\alpha : \ -h^\alpha/2 < x^\alpha < h^\alpha/2\}$ (рис. 8.4). Закон движения куба ищем в таком же виде, как и для бруса (см. (5.4.1)), но с равными коэффициентами кратности удлинений

$$
k_1 = k_2 = k_3 = k, \tag{6.1}
$$

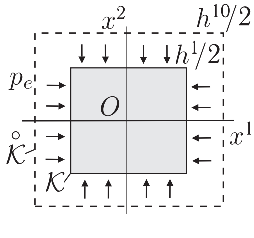

Рис. 8.4. Всестороннее сжатие куба

т.е.

$$
x^\alpha = k(t)X^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{6.2}
$$

Градиент деформации $\mathbf{F}$ и энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ имеют такой же вид, как и в случае задачи о растяжении бруса (см. упр. 1.2.1 и 3.2.13), а с учетом (6.1) получаем, что все они — шаровые тензоры:

$$\mathbf{F} = k\mathbf{E}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-\mathrm{III}}(k^{n-\mathrm{III}} - 1)\mathbf{E}. \tag{6.3}$$

Изменение плотности в данной задаче имеет вид

$$J = \rho/\overset{\circ}{\rho} = \det\,\mathbf{F}^{-1} = 1/k^3. \tag{6.4}$$

8.6.2. Напряжения при всестороннем растяжении–сжатии. Положим далее, что рассматриваемой твердой среде соответствует модель A_n^ζ Губера–Мизеса изотропной упруго-пластической среды, описываемая соотношениями (1.84)–(1.87), (1.92). Кроме того, модель будем считать обладающей линейной упругостью, соотношения (1.79) для упругой деформации можно записать в виде (см. упр. 8.1.9)

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J(l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)\mathbf{E} + 2l_2\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e). \tag{6.5}$$

Из (6.5) следует соотношение между первыми инвариантами:

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}) = J(3l_1 + 2l_2)I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e). \tag{6.6}$$

Как и в задаче о растяжении упругого бруса (см. разд. 5.4), тензор $\mathbf{T}$ связан с $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ соотношениями (5.4.7), но поскольку тензор $\mathbf{F}$ — шаровой, то эти формулы в данной задаче принимают вид

$$\mathbf{T} = k^{n-\mathrm{III}}\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}. \tag{6.7}$$

Будем искать выражения для тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ в данной задаче не зависящими от координат $\mathbf{x}$, тогда из (6.5) и (6.7) следует, что $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}$ тоже не зависят от $\mathbf{x}$, т.е. компоненты $\bar{T}^{ij}$ тензора $\mathbf{T} = \bar{T}^{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j$ одинаковы во всем кубе, следовательно, уравнения равновесия в системе (5.9) при отсутствии массовых сил ($\mathbf{f} = 0$) тождественно удовлетворяются.

Из граничных условий на поверхности кубика ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -p_e\mathbf{n}$) получаем, что

$$X^\alpha = h^\alpha/2: \qquad \bar{T}^{\alpha i} = -p_e\delta^{\alpha i}, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{6.8}$$

Но поскольку компоненты $\bar{T}^{ij}$ одинаковы во всем кубе, то такое же выражение (6.8) имеет место и во всей рассматриваемой области V, т.е. тензор $\mathbf{T}$ — шаровой, а, следовательно, и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ — тоже шаровой:

$$\mathbf{T} = -p_e\mathbf{E}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = -\widetilde{p}_e\mathbf{E}, \qquad \widetilde{p}_e = p_e k^{\mathrm{III}-n}. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) в (6.5) и (6.6), находим выражения для упругих деформаций:

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e) = -\frac{3p_e k^{\mathrm{III}-n}}{J(3l_1+2l_2)}, \tag{6.10}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = -\frac{p_e k^{\mathrm{III}-n}}{J(3l_1+2l_2)}\mathbf{E}, \tag{6.11}$$

т.е. тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ в данной задаче тоже является шаровым.

8.6.3. Случай пластически-несжимаемой среды. Пусть рассматриваемая среда является пластически-несжимаемой, т.е. для скоростей пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_p$ имеют место соотношения (1.94). Так как в данной задаче тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ — шаровые, то девиаторы $\mathbf{P}_T$ этих тензоров, в силу определения, очевидно будут нулевыми: $\mathbf{P}_T \equiv 0$, тогда девиаторы $\mathbf{P}_H$ (1.85) совпадают с девиаторами $\mathbf{P}_p$ тензоров пластической деформации (1.87), и соотношения (1.94) для пластической деформации принимают вид

$$\dot{\mathbf{P}}_p = 3\dot{\varkappa} h f_Y \mathbf{P}_p. \tag{6.12}$$

Эти соотношения имеют очевидное решение: $\mathbf{P}_p \equiv 0$, и с учетом пластической несжимаемости среды (1.93) получаем, что в задаче о всестороннем сжатии у пластически-несжимаемой среды пластических деформаций нет:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p \equiv 0, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e. \tag{6.13}$$

Из (6.13) и (6.3) имеем

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e) = I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}) = \frac{3}{n-\mathrm{III}}(k^{n-\mathrm{III}}-1). \tag{6.14}$$

Подставляя выражения (6.14) и (6.4) в (6.10) находим соотношения между k и p_e:

$$p_e = \frac{3l_1+2l_2}{n-\mathrm{III}}(1-k^{n-\mathrm{III}})k^{n-\mathrm{III}-3}. \tag{6.15}$$

Часто вместо (6.15) используют соотношение между p_e и $J = \rho/\overset{\circ}{\rho}$, которое легко следует из (6.4) и (6.15):

$$p_e = \frac{3K}{n-\mathrm{III}}(1-J^{(\mathrm{III}-n)/3})J^{1+\frac{\mathrm{III}-n}{3}}, \tag{6.16}$$

где

$$K = l_1 + \frac{2}{3}l_2,$$

называют *модулем объемного сжатия*.

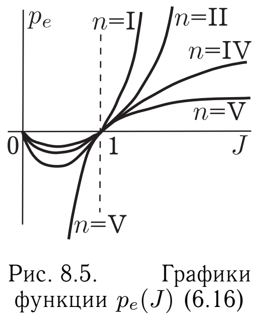

Рис. 8.5. Графики функции $p_e(J)$ (6.16)

Графики функций (6.16) представлены на рис. 8.5.

Значения $J > 1$ соответствуют всестороннему сжатию ($p_e > 0$), а $J < 1$ — всестороннему растяжению ($p_e < 0$). При $J > 1$ для всех n функция $p_e(J)$ монотонно возрастает, но для $n = \mathrm{I}$ и II она является выпуклой вниз, а для $n = \mathrm{IV}$ и V — выпуклой вверх.

При $0 < J < 1$ функция $p_e(J)$ имеет экстремум для $n = \text{I, II}$ и IV и $p_e(0) = 0$, а для $n = \text{V}$: $p_e \to -\infty$ при $J \to 0$.

Таким образом, различные модели A_n приводят к качественно различным диаграммам $p_e(J)$.

8.6.4. Случай пластически-сжимаемой среды. Рассмотрим теперь пластически-сжимаемую модель A_n^ζ Губера–Мизеса (см. упр. 8.1.7). Так как в данной задаче $\mathbf{P}_T = 0$ и $\mathbf{P}_H = \mathbf{P}_p$, то из результатов упр. 8.1.7 следует:

$$\dot{\mathbf{P}}_p = 3\dot{\varkappa} h f_Y \mathbf{P}_p, \tag{6.17}$$

$$\dot{I}_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) = \dot{\varkappa} h f_{1Y}, \qquad f = 0. \tag{6.18}$$

Первое соотношение, очевидно, имеет нулевое решение $\mathbf{P}_p = 0$, а второе допускает нетривиальное решение, следовательно, тензор $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ в данном случае является шаровым:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p = \frac{1}{3} Y_{1p} \mathbf{E}, \qquad Y_{1p} \equiv I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p). \tag{6.19}$$

Совместный инвариант Y_{1H} в этом случае с учетом (6.9) и (6.19) принимает вид

$$Y_{1H} = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_1 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p) \cdot\cdot\, \mathbf{E} = -(3\widetilde{p}_e + H_1 Y_{1p}), \qquad Y_H \equiv 0, \tag{6.20}$$

$$H_1 = H_1^0 Y_{1p}^{2n_1}, \qquad Y_\pm = \frac{1}{2}(|Y_{1H}| \pm Y_{1H}). \tag{6.21}$$

Уравнение (6.18) служит для определения $\dot{\varkappa}$, а первый инвариант тензора пластической деформации Y_{1p} находим из условия пластичности $f = 0$. Если для f выбирается квадратичная форма (см. упр. 8.1.7), то имеем

$$f = \frac{{Y_+}^2}{\sigma_T'^2} + \frac{{Y_-}^2}{\sigma_C'^2} - 1 = 0. \tag{6.22}$$

Подставляя в (6.22) выражения (6.20) и (6.21), находим из этого уравнения $H_1 Y_{1p}$:

$$H_1 Y_{1p} = \begin{cases} \sigma_C' - 3\widetilde{p}_e, & \text{если } Y_{1H} < 0, \\ -(\sigma_T' + 3\widetilde{p}_e), & \text{если } Y_{1H} > 0, \end{cases} \tag{6.23}$$

где пределы текучести σ_C' и σ_T', по определению, полагают положительными: $\sigma_C' > 0$, $\sigma_T' > 0$, что и обусловливает выбор знаков в (6.22) перед σ_C' и σ_T': если $Y_{1p} = 0$, то при сжатии должно быть $\widetilde{p}_e = \sigma_C'/3 > 0$, а при растяжении $\widetilde{p}_e = -\sigma_T'/3 < 0$.

Напомним, что уравнение $f = 0$ имеет место только в том случае, когда приращение пластической деформации отлично от нуля, если же $f < 0$ (в данном случае это происходит, когда $Y_{1H} \geqslant -\sigma_C'$ или $Y_{1H} \leqslant \sigma_T'$), то $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = 0$, или что тоже самое: $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p(t) = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^* = \mathrm{const}$, где $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^* = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p(t^*)$ — значение, достигнутое на предыдущем цикле пластического нагружения к моменту t^* начала разгрузки.

При первоначальном нагружении при $t=0$ обычно полагают пластические деформации отсутствующими, поэтому $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^*_p(0)=0$ (рис. 8.6).

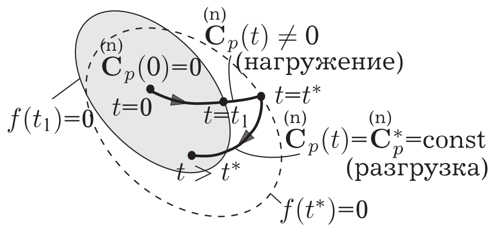

Рис. 8.6. Цикл пластического нагружения и разгрузки

Следовательно, соотношения (6.23) имеют место только при пластическом нагружении. При $f<0$, т.е. при разгрузке или при нагружении в упругой области эти соотношения заменяют на $Y_{1p}(t)=Y^*_{1p}$, где Y^*_{1p} — значение, достигнутое на предшествующем цикле пластического нагружения.

Подставляя в (6.23) выражение (6.20) для H_1, находим Y_{1p}:

$$Y_{1p}=\begin{cases}\mathrm{sign}\,(\sigma'_C-3\widetilde{p}_e)\Big(\dfrac{|\sigma'_C-3\widetilde{p}_e|}{H_1^0}\Big)^{\frac{1}{2n_1+1}}, & \text{если } Y_{1H}\leqslant-\sigma'_C,\\ -\mathrm{sign}\,(\sigma'_T+3\widetilde{p}_e)\Big(\dfrac{|\sigma'_T+3p_e|}{H_1^0}\Big)^{\frac{1}{2n_1+1}}, & \text{если } Y_{1H}\geqslant\sigma'_T,\\ Y^*_{1p}, & \text{если } -\sigma'_C<Y_{1H}<\sigma'_T,\end{cases}\tag{6.24}$$

где

$$-Y_{1H}=3\widetilde{p}_e+H_1^0|Y_{1p}|^{2n_1+1}\mathrm{sign}\;Y_{1p}.$$

Поскольку соотношения (6.10), (6.11) для упругих деформаций также имеют место и для пластически-сжимаемой среды, то, объединяя их с (6.19) и (6.24), получаем

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}=\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e+\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p=-\frac{1}{3}\Big(\frac{p_ek^{\mathrm{III}-n+3}}{K}-Y_{1p}\Big)\mathbf{E}.\tag{6.25}$$

Принимая во внимание формулу (6.3), отсюда получаем

$$\frac{3}{n-\mathrm{III}}(1-k^{n-\mathrm{III}})=\frac{p_e}{K}k^{\mathrm{III}-n+3}-Y_{1p},$$

или

$$p_e=K\Big(\frac{3(1-k^{n-\mathrm{III}})}{n-\mathrm{III}}+Y_{1p}\Big)k^{n-\mathrm{III}-3}.\tag{6.26}$$

Присоединяя к (6.26) выражение (6.24), приходим к нелинейному соотношению между p_e и k. Данные соотношения зависят от пути нагружения пластической среды. Проиллюстрируем это на следующем примере.

8.6.5. Циклическое нагружение пластически-сжимаемой среды. Пусть функция $\widetilde{p}_e\equiv p_ek^{\mathrm{III}-n}$ задана в виде немонотонной зависимости от t (рис. 8.7), причем $\widetilde{p}_e(0)=0$ и $Y_{1p}=0$, а $H_1\geqslant 0$. Тогда из выражения (6.24) для различных участков функции $\widetilde{p}_e(t)$ получаем

$$\mathrm{OA}:\quad 0<\widetilde{p}_e\leqslant\sigma'_C/3,\quad Y_{1H}=-3\widetilde{p}_e>-\sigma'_C,\quad Y_{1p}=0$$

— упругое сжатие,

$$\mathrm{AB}:\quad \widetilde{p}_e>\sigma'_C/3,\quad Y_{1H}=-(3\widetilde{p}_e+Y_{1p}H_1)=-\sigma'_C,\quad Y_{1p}=(\sigma'_C-3\widetilde{p}_e)/H_1<0$$

— пластическое сжатие,

$$\mathrm{BC}: \quad -\sigma_T^{*\prime}/3 \leqslant \widetilde{p}_e \leqslant \sigma_C^{*\prime}/3, \quad Y_{1H} = -(3\widetilde{p}_e + Y_{1p}^* H_1^*) > -\sigma_C', \quad Y_{1p} = Y_{1p}^* < 0$$

— разгрузка–упругое нагружение,

$$\mathrm{CD}: \quad -\sigma_T'/3 < \widetilde{p}_e < -\sigma_T^{*\prime}/3, \quad Y_{1H} = -(3\widetilde{p}_e + Y_{1p}H_1) = \sigma_T',$$

$$Y_{1p} = -(\sigma_T' + 3\widetilde{p}_e) < 0 \qquad (6.27)$$

— пластическое растяжение,

$$\mathrm{DE}: \quad \widetilde{p}_e \leqslant -\sigma_T'/3, \quad Y_{1H} = \sigma_T', \quad Y_{1p} = -(\sigma_T' + 3\widetilde{p}_e) \geqslant 0$$

— пластическое растяжение,

$$\mathrm{EF}: \quad \widetilde{p}_e > -\sigma_T'/3, \quad Y_{1H} = -(3\widetilde{p}_e + Y_{1p}^{**} H_1^{**}) < \sigma_T', \quad Y_{1p} = Y_{1p}^{**} > 0$$

— разгрузка.

Из приведенных соотношений следует: после появления пластической деформации в точках, имеющих равные значения $\widetilde{p}_e$, например, A и A', значения Y_{1p} и k различаются. Иначе говоря, в области пластичности диаграммы $p_e(k)$ при нагружении и разгрузке не совпадают.

Замечание. Если после предварительного пластического сжатия (участки AB и BC') (рис. 8.7) происходит растяжение (участок $C'C$), то предел текучести при растяжении изменяется до значения $\sigma_T^{*\prime}/3$ по сравнению со значением $\sigma_T'/3$ при отсутствии предварительного пластического сжатия. Этот эффект действительно имеет место для многих пластических сред и называется *эффектом Баушингера*.

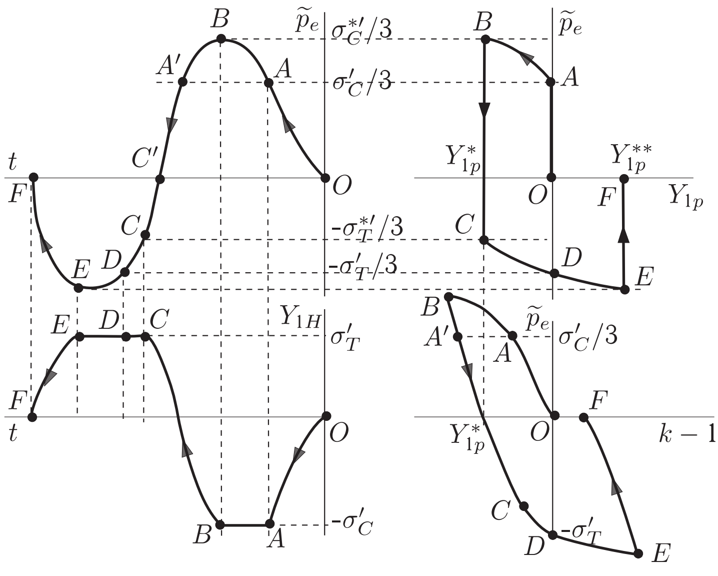

Рис. 8.7. К решению задачи о всестороннем сжатии пластически-сжимаемого куба

В рассматриваемой модели $\sigma_T^{*\prime}$ можно найти из соотношения (6.27) в точке C:

$$Y_{1H} = -3\widetilde{p}_e\big|_C + Y_{1p}^* H_1^* = \sigma_T'. \tag{6.28}$$

Так как $Y_{1p}^* H_1^*$ можно вычислить из условий (6.27) в точке B:

$$Y_{1p}^* H_1^* = \sigma_C' - 3\widetilde{p}_e\big|_B, \tag{6.29}$$

то из (6.28) и (6.29) получаем

$$\sigma_T^{*\prime} \equiv -3\widetilde{p}_e\big|_C = \sigma_T' - \sigma_C' + 3\widetilde{p}_e\big|_B, \tag{6.30}$$

т.е. пределы текучести на растяжение σ_T' и $\sigma_T^{*\prime}$ отличаются на величину $(\sigma_C - 3\widetilde{p}_e)$ — превышения нагрузкой $3\widetilde{p}_e$ предела текучести на сжатие. Этот результат является характерным свойством рассмотренной модели Губера–Мизеса.

8.7. Задача о растяжении пластического бруса

8.7.1. Деформация бруса при одноосном растяжении. Рассмотрим уже изучавшуюся нами ранее классическую задачу о растяжении бруса (см. пример 1.1 и упр. 1.1.1, 1.3.2 и 3.2.13), но для случая, когда брусу соответствует модель A_n^ζ Губера–Мизеса изотропной упруго-пластической среды, которой отвечают соотношения (6.5) и (1.92).

Закон движения для данной задачи не зависит от типа сплошной среды и ищется как всегда в виде (5.4.1):

$$x^\alpha = k_\alpha(t) X^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7.1}$$

Градиент деформации $\mathbf{F}$ и энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ в задаче о растяжении бруса (см. упр. 1.2.1 и 3.2.13) имеют диагональный вид

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{7.2}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{\bar{C}}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{7.3}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\bar{C}}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}\left(k_\alpha^{n-\mathrm{III}} - 1\right). \tag{7.4}$$

Изменение плотности в данной задаче имеет вид

$$J = \rho/\overset{\circ}{\rho} = \det\, \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}. \tag{7.5}$$

Будем искать тензоры упругой и пластической деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$ также в диагональном виде:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{C}{}^{e}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{7.6}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{}{}^{p}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{7.7}$$

В силу соотношения аддитивности (1.3), имеем

$$\overset{(n)}{C}_{\alpha\alpha} = \overset{(n)}{C}{}^{e}_{\alpha\alpha} + \overset{(n)}{C}{}^{p}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7.8}$$

8.7.2. Напряжения в пластическом брусе. Соотношения (6.5) и (6.6) в данной задаче также имеют место.

Переходя к декартовым компонентам $\overset{(n)}{T}_{\alpha\beta}$ тензора $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, из (6.5), (6.6) и (7.6) получаем, что отличны от нуля только диагональные компоненты этого тензора:

$$\overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} = J(l_1 I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e) + 2l_2 \overset{(n)}{C}{}^{e}_{\alpha\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7.9}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{7.10}$$

Соотношение между $\mathbf{T}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ имеет вид (5.4.8):

$$\sigma_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{n-\mathrm{III}} \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \qquad \mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{7.11}$$

Уравнения равновесия (5.9) при $\mathbf{f} = 0$ удовлетворяются тождественно.

Поскольку боковая поверхность бруса $X^\alpha = \pm h_\alpha^0/2$, $\alpha = 2, 3$, является свободной от нагружения, то из граничных условий на этой поверхности ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$), как и для идеально-упругого тела, получаем, что

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} = 0, \quad \alpha = 2, 3. \tag{7.12}$$

Подставляя значения (7.12) в (7.9) и суммируя все эти три соотношения (7.9), находим, что

$$I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e) = \frac{\overset{(n)}{T}_{11}}{J(3l_1 + 2l_2)}. \tag{7.13}$$

Если подставить выражение (7.13) для первого инварианта снова в (7.9) при $\alpha = 1$, то найдем соотношение между $\overset{(n)}{T}_{11}$ и $\overset{(n)}{C}{}^{e}_{11}$, а из формулы (7.9) при

$\alpha = 2, 3$ находим соотношение между $\overset{(n)}{C}{}^{e}_{22}$, $\overset{(n)}{C}{}^{e}_{33}$ и $\overset{(n)}{C}{}^{e}_{11}$:

$$\overset{(n)}{T}_{11} = JE\overset{(n)}{C}{}^{e}_{11}, \tag{7.14}$$

$$\overset{(n)}{C}{}^{e}_{22} = \overset{(n)}{C}{}^{e}_{33} = -\nu\overset{(n)}{C}{}^{e}_{11}, \tag{7.15}$$

где, как всегда, обозначены модуль упругости и коэффициент Пуассона при конечных деформациях:

$$E = \frac{(3l_1 + 2l_2)l_2}{l_1 + l_2}, \qquad \nu = \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)}. \tag{7.16}$$

8.7.3. Пластические деформации бруса. Рассмотрим теперь определяющие соотношения (1.92), (1.93) для пластических деформаций, полагая изотропную среду пластически несжимаемой. В силу предположения (7.7) о диагональности $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p$, из (1.92) имеем

$$\frac{d}{dt}\overset{(n)}{C}{}^{p}_{\alpha\alpha} = \frac{\dot{\varkappa}h}{3\sigma_s^2}\Big(\big(\overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3}\overset{(n)}{T}_{11}\big) - H\big(\overset{(n)}{C}{}^{p}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3}Y_{1p}\big)\Big), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7.17}$$

Здесь параметр упрочнения H и первый инвариант Y_{1p} имеют следующий вид:

$$H = H_0 Y_p^{2n_0}, \qquad Y_{1p} = I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \tag{7.18}$$

$$Y_p^2 = \frac{1}{2}\big((\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11} - \overset{(n)}{C}{}^{p}_{22})^2 + (\overset{(n)}{C}{}^{p}_{22} - \overset{(n)}{C}{}^{p}_{33})^2 + (\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11} - \overset{(n)}{C}{}^{p}_{33})^2\big).$$

Несложно заметить, что соотношения (7.17) и (7.18) симметричны относительно индексов $\alpha = 2, 3$, поэтому $\overset{(n)}{C}{}^{p}_{22} = \overset{(n)}{C}{}^{p}_{33}$, причем из условия пластической несжимаемости (1.93) ($Y_{1p} = 0$) имеем

$$\overset{(n)}{C}{}^{p}_{33} = \overset{(n)}{C}{}^{p}_{22} = -\frac{1}{2}\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11}. \tag{7.19}$$

Тогда система (7.17) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11} = \frac{\dot{\varkappa}h}{3\sigma_s^2}\big(\frac{2}{3}\overset{(n)}{T}_{11} - H\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11}\big), \tag{7.20}$$

$$\frac{d}{dt}\overset{(n)}{C}{}^{p}_{\alpha\alpha} = \frac{\dot{\varkappa}h}{3\sigma_s^2}\big(-\frac{1}{3}\overset{(n)}{T}_{11} - H\overset{(n)}{C}{}^{p}_{\alpha\alpha}\big), \quad \alpha = 2, 3. \tag{7.21}$$

Очевидно, что уравнения (7.21) являются следствием (7.20) и (7.19), поэтому в системе (7.20), (7.21) независимое уравнение только одно — (7.20). Это уравнение позволяет вычислить параметр нагружения $\dot{\varkappa}$, если известны $\overset{(n)}{T}_{11}$ и $\overset{(n)}{C}{}^{p}_{11}$.

Для вычисления $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$ используем уравнение поверхности пластичности (1.96), которое в данной задаче принимает вид (здесь мы учли выражение для Y_H из упр. 8.1.1):

$$\frac{1}{6\sigma_s^2}\Big((\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - H(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22}))^2 + (\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - H(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{33}))^2 + {}$$
$$+ H^2(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{33})^2\Big) = 1. \quad (7.22)$$

С учетом (7.19) это соотношение упрощается:

$$|\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - \frac{3}{2}H\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}| = \sqrt{3}\,\sigma_s, \quad (7.23)$$

а так как

$$H = H_0 Y_p^{2n_0} = H_0(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22})^{2n_0} = H_0\Big(\frac{3}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}\Big)^{2n_0}, \quad (7.24)$$

то соотношение (7.23) принимает окончательный вид

$$\Big|\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - H_0\Big(\frac{3}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}\Big)^{2n_0+1}\Big| = \sqrt{3}\,\sigma_s. \quad (7.25)$$

Для того, чтобы найти из (7.25) выражение для $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$, по аналогии с формулами (6.22)–(6.24) следует рассмотреть отдельно случаи пластического растяжения, пластического сжатия и схода с поверхности пластичности, тогда из (7.25) находим

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mathrm{sign}\,(\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - \sqrt{3}\,\sigma_s)\Big(\dfrac{|\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - \sqrt{3}\,\sigma_s|}{H_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } Y_{1H} \geqslant \sqrt{3}\,\sigma_s, \\ \dfrac{2}{3}\mathrm{sign}\,(\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} + \sqrt{3}\,\sigma_s)\Big(\dfrac{|\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} + \sqrt{3}\,\sigma_s|}{H_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } Y_{1H} \leqslant -\sqrt{3}\,\sigma_s, \\ \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11}, \ \text{если } -\sqrt{3}\,\sigma_s < Y_{1H} < \sqrt{3}\,\sigma_s, \end{cases} \quad (7.26)$$

где

$$Y_{1H} = \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - H_0\Big|\frac{3}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}\Big|^{2n_0+1}\ \mathrm{sign}\,(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}).$$

Здесь учтено, что $\sigma_s > 0$, а $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}_{11}{}^{p*}$ представляет собой значение $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$, достигнутое к моменту t^* схода с поверхности пластичности (при $t = 0$: $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11} = 0$).

8.7.4. Изменение плотности. Воспользуемся теперь соотношениями (7.8), (7.15) и (7.19) и выразим $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{22}$ через $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}$: $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{e}_{22} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{22} = -\nu \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{e}_{11} - \frac{1}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}$, т.е.

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{22} = -\Big(\nu \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} + (\frac{1}{2} - \nu)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}\Big). \tag{7.27}$$

С помощью соотношений (7.4) выразим k_2 через $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{22}$, а $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ через k_1:

$$k_2 = (1 + (n - \mathrm{III})\overset{(\mathrm{n})}{C}_{22})^{1/(n-\mathrm{III})} = \Big(1 - (n - \mathrm{III})(\nu \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} + \\ + (\frac{1}{2} - \nu)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11})\Big)^{1/(n-\mathrm{III})} = \Big(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})(\frac{1}{2} - \nu)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}\Big)^{1/(n-\mathrm{III})}, \tag{7.28}$$

— в итоге получим выражение k_2 через k_1 и $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}$.

Так как $k_2 = k_3$, то, подставляя (7.28) в (7.5), получаем выражение для изменения плотности J:

$$J = \frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}} = \frac{1}{k_1}\Big(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})(\frac{1}{2} - \nu)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}\Big)^{-2/(n-\mathrm{III})}. \tag{7.29}$$

Обратим внимание на то, что хотя рассматриваемая среда пластически-несжимаема, но, в отличие от задачи о всестороннем сжатии, в данном случае плотность зависит от пластических деформаций.

8.7.5. Разрешающее уравнение задачи. Из (7.14) и (7.8) находим соотношение между $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}$, $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11} + \frac{\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}}{EJ}. \tag{7.30}$$

1) Рассмотрим первоначальное пластическое растяжение, когда выполняются условия $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11} = 0$ и $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} \geqslant \sqrt{3}\,\sigma_s$. Тогда для пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}$ из первой строки формул (7.26) следует выражение

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11} = \Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} - \sqrt{3}\,\sigma_s}{\widetilde{H}_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}, \qquad \text{где} \quad \widetilde{H}_0 = H_0(3/2)^{2n_0+1}. \tag{7.31}$$

Подставляя (7.31) в (7.30) и заменяя $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ на k_1 согласно формуле (7.4), а $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}$ на σ_{11} согласно (7.11), получим

$$\frac{k_1^{n-\mathrm{III}} - 1}{n - \mathrm{III}} = \frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11}}{EJ} + \frac{2}{3}\Big(\frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} - \sqrt{3}\,\sigma_s}{\widetilde{H}_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}. \tag{7.32}$$

Присоединяя к этому соотношению выражение (7.29) для J, в которое подставлена формула (7.31):

$$J = \frac{1}{k_1}\Big(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})(\frac{1}{2} - \nu)\big(\frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} - \sqrt{3}\,\sigma_s}{\widetilde{H}_0}\big)^{\frac{1}{2n_0+1}}\Big)^{-\frac{2}{n-\mathrm{III}}}, \qquad (7.32\mathrm{a})$$

получаем основное *разрешающее уравнение* данной задачи при первоначальном пластическом растяжении. Это уравнение имеет вид неявного соотношения $\Phi(\sigma_{11}, k_1) = 0$ между σ_{11} и k_1.

2) При *первоначальном нагружении в упругой области* пластической деформации нет ($\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11} = 0$), и формулы (7.32), (7.32а) совпадают с разрешающим соотношением моделей A_n упругих сред (5.4.18):

$$\sigma_{11} = E\frac{k_1^{n-\mathrm{III}-1}}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1))^{2/(\mathrm{III}-n)}. \qquad (7.33)$$

3) Если происходит *первоначальное пластическое нагружение в области сжатия*, когда выполняются условия $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11} = 0$ и $\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} \leqslant -\sqrt{3}\,\sigma_s$, тогда в формуле (7.26) выбираем второе условие, в результате для пластической деформации имеем

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}_{11}{}^{p} = -\Big(\frac{|k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} + \sqrt{3}\,\sigma_s|}{\widetilde{H}_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}, \qquad (7.34)$$

а вместо (7.32) и (7.32а) получаем следующее разрешающее соотношение:

$$\frac{k_1^{n-\mathrm{III}} - 1}{n-\mathrm{III}} = \frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11}}{EJ} - \Big(\frac{|k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} + \sqrt{3}\,\sigma_s|}{\widetilde{H}_0}\Big)^{1/(2n_0+1)}, \qquad (7.35)$$

$$J = \frac{1}{k_1}\Big(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})(\frac{1}{2} - -\nu)\big(\frac{|k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} + \sqrt{3}\,\sigma_s|}{\widetilde{H}_0}\big)^{\frac{1}{2n_0+1}}\Big)^{\frac{2}{\mathrm{III}-n}}. \qquad (7.35\mathrm{a})$$

.

4) Наконец, если происходит *разгрузка* после пластического нагружения в области растяжения или сжатия, то из уравнений (7.29) и (7.30) получаем следующее соотношение между σ_{11} и k_1:

$$\frac{k_1^{n-\mathrm{III}} - 1}{n-\mathrm{III}} = \frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11}}{EJ} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11}, \qquad (7.36)$$

$$J = \frac{1}{k_1}\Big(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})(\frac{1}{2} - \nu)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11}\Big)^{-1/(n-\mathrm{III})}, \qquad (7.36\mathrm{a})$$

где $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11}$ — максимальное значение пластических деформаций, достигнутых в момент времени t_* начала разгрузки, это значение вычисляется по формуле (7.31) для предварительного пластического растяжения и (7.34) — для сжатия.

8.7.6. Численный метод решения разрешающего уравнения. Перенесем в правую часть первое слагаемое из левой части уравнения (7.32), а затем возведем получившееся выражение в степень $1+2n_0$, в результате получим следующее уравнение

$$A\Big(\frac{k_1^{n-\mathrm{III}}-1}{n-\mathrm{III}}-\frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11}}{EJ}\Big)=\frac{k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11}-\sqrt{3}\,\sigma_s}{\widetilde{H}_0},\tag{7.37}$$

где обозначено

$$A(k_1,\sigma_{11})\equiv\Big(\frac{k_1^{n-\mathrm{III}}-1}{n-\mathrm{III}}-\frac{k^{\mathrm{III}-n}}{J(k,\sigma_{11})}\sigma_{11}\Big)^{2n_0}.\tag{7.38}$$

Для численного решения уравнения (7.37) можно использовать метод последовательных приближений, в котором по заданным значениям k_1 и значениям $\sigma_{11}^{\{m-1\}}$ на $(m-1)$-й итерации находим значение $\sigma_{11}^{\{m\}}$ на m-й итерации:

$$\widetilde{\sigma}^{\{m\}}=\frac{1}{1+\widetilde{H}_0A^{\{m-1\}}/J^{\{m-1\}}}\Big(\sqrt{3}\,\sigma_s+\frac{\widetilde{H}_0A^{\{m-1\}}k^{n-\mathrm{III}}}{n-\mathrm{III}}k^{n-\mathrm{III}}\Big),\tag{7.39}$$

где $J^{\{m-1\}}=J(k,\sigma_{11}^{\{m-1\}})$ и $A^{\{m-1\}}=A(k_1,\sigma_{11}^{\{m-1\}})$ — значения функций на предыдущей $(m-1)$-й итерации $(m=1,2,\ldots)$. За начальное значение $\sigma_{11}^{\{0\}}$ можно принять значение $\sigma_{11}^{\{m\}}$, полученное на предыдущем цикле итераций для предшествующего значения k_1. Метод является сходящимся при значениях n_0 из интервала $-0,5<n_0<1$.

Решение разрешающего уравнения (7.35) в области сжатия осуществляется аналогичным способом. В области упругого нагружения и разгрузки напряжение σ_{11} вычисляем явным образом из уравнений (7.33) и (7.36).

На рис. 8.8 приведены функции $\sigma_{11}(k_1)$, полученные указанным численным методом для различных моделей A_n и при различных значениях параметра $\widetilde{H}_0$. Для моделей A_{I} и A_{II} функции $\sigma_{11}(k_1)$ являются выпуклыми вверх как для чисто упругой среды, так и для случая упруго-пластических моделей, в то же время для моделей A_{IV} и A_{V} в пластической области (при $k\geqslant k_s$, где k_s — удлинение начала текучести: $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}(k_s)=\sqrt{3}\,\sigma_s$) функции $\sigma_{11}(k_1)$ выпуклы вниз. Для всех моделей A_n появление пластических деформаций может приводить к значительному уменьшению значений напряжений σ_{11} по сравнению с упругой средой.

На рис. 8.9 для разных моделей A_n приведены диаграммы деформирования $\sigma_{11}(k_1)$ упруго-пластической среды при пластическом нагружении до некоторых предельных значений k_* и последующей разгрузке, рассчитанные по уравнениям (7.32) и (7.33). Отметим некоторые важные эффекты, обусловленные конечными значениями пластических деформаций:

1) при значениях $\sigma_s/E\leqslant 0,01$ диаграммы деформирования в упругой области при $k<k_s$ и при разгрузке для значений k_*, близких к 1 ($k_*\lesssim 1,1$), практически линейны и имеют одинаковый наклон, однако при больших значениях k_* ($k_*\gtrsim 1,2$) эти диаграммы существенно различаются — диаграммы разгрузки становятся существенно нелинейными для всех моделей A_n;

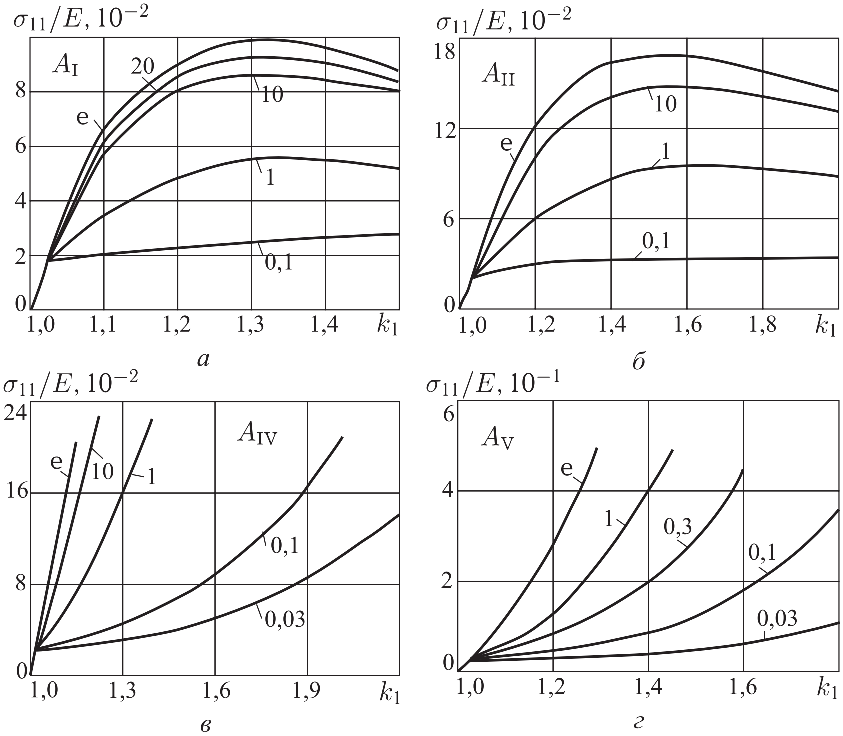

Рис. 8.8. Диаграммы деформирования $\sigma_{11}(k_1)$ для моделей A_n упруго-пластической среды при одноосном растяжении (е — модель упругой среды, цифры у кривых — различные значения параметра $\widetilde{H}_0/E$, $n_0 = 0,1$): *а* — модель A_{I}, *б* — модель A_{II}, *в* — модель A_{IV} и *г* — модель A_{V}

2) для моделей A_{I} и A_{II} тангенс угла наклона касательной к функции $\sigma_{11}(k_1)$ при разгрузке уменьшается с возрастанием k_*, а для моделей A_{IV} и A_{V} — наоборот увеличивается.

8.7.7. Методика вычисления констант $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{n_0}$ и $\boldsymbol{\sigma_s}$. Модель A_n^{ζ} изотропной пластически-несжимаемой среды с потенциалом Мизеса (6.5), (1.97) содержит 5 констант: E, ν, H_0, n_0, σ_s. Если имеется экспериментальная зависимость $\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$ (диаграмма деформирования) при активном нагружении и соответствующие кривые разгрузки, то константу σ_s определяют по формуле $\sigma_s = k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11s}/\sqrt{3}$, где σ_{11s} — значение напряжения σ_{11} на диаграмме деформирования, после разгрузки от которого остаточное удлинение δ_1^p при $\sigma_{11} = 0$ достигает заданного априори значения. Обычно для металлов и сплавов, а также грунтов и горных пород, полагают $\delta_1^p = 0,2\,\%$, а соответствующее ему значение σ_{11s} обозначают как $\sigma_{0,2}$ (рис. 8.10), эту величину обычно называют *пределом текучести*. Поскольку $\delta_1^p = 0,002 \ll 1$, то, следовательно, область упругости для таких сред относится к малым деформациям и $\sigma_s = \sigma_{11s}/\sqrt{3}$, а модуль упругости E можно вычислить как тангенс угла наклона касательной к начальному участку экспериментальной диаграммы $\sigma_{11}^{(\text{э})}(\delta_1)$. Коэффициент Пуассона ν обычно находят, как и для

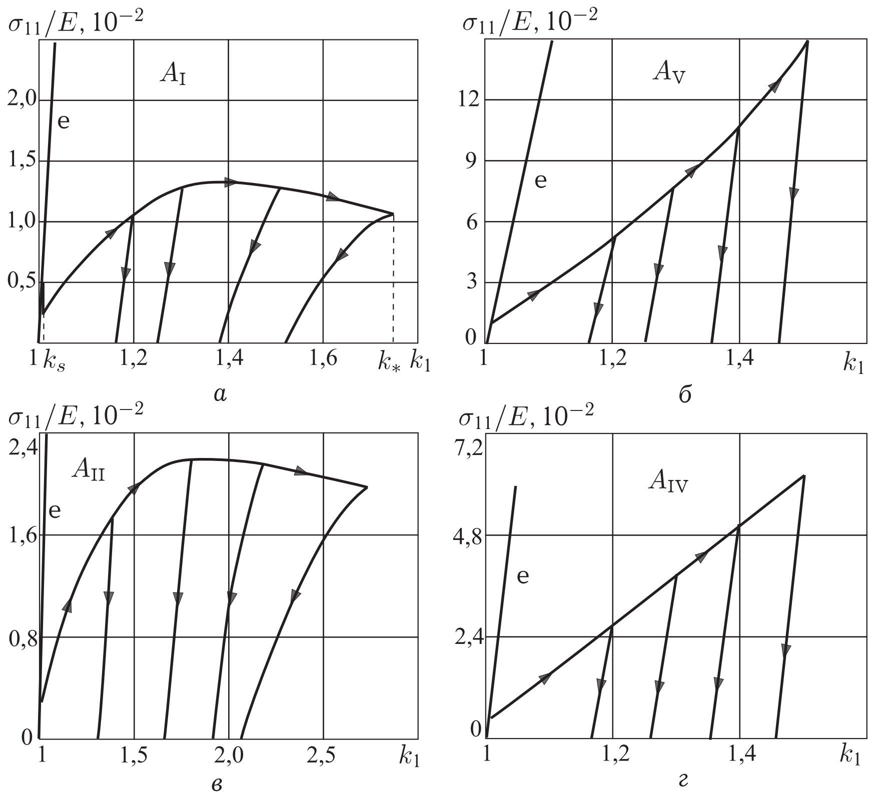

Рис. 8.9. Диаграммы деформирования $\sigma_{11}(k_1)$ для моделей A_n упруго-пластической среды при одноосном растяжении и последующей разгрузке (е — модель упругой среды, $\nu = 0,3$): *а* — модель $A_{\rm I}$ ($\widetilde{H}_0/E = 0,2$, $n_0 = 0,1$, $\sigma_s/E = 0,001$), *б* — модель $A_{\rm V}$ ($\widetilde{H}_0/E = 0,05$, $n_0 = 0,1$, $\sigma_s/E = 0,002$), *в* — модель $A_{\rm II}$ ($\widetilde{H}_0/E = 0,15$, $n_0 = 0,1$, $\sigma_s/E = 0,002$) и *г* — модель $A_{\rm IV}$ ($\widetilde{H}_0/E = 0,05$, $n_0 = 0,1$, $\sigma_s/E = 0,002$)

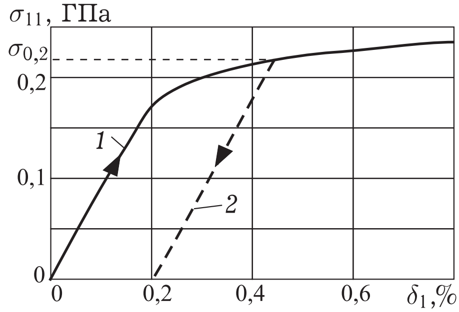

Рис. 8.10. Диаграмма деформирования алюминиевого сплава и метод определения предела текучести $\sigma_{0,2}$: *1* — активное нагружение, *2* — разгрузка

упругих сред, с помощью формулы (5.4.17) как отношение поперечного удлинения бруса к его продольному удлинению в области малых деформаций.

Константы $\widetilde{H}_0$ и n_0 могут быть вычислены путем аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования $\sigma_{11}^{(э)}(\delta_1)$ при активном пластическом нагружении с помощью теоретического соотношения $\sigma_{11}(\delta_1)$ (7.32). Для этой цели решается задача минимизации функционала среднеквадратического отклонения экспериментальной и теоретической кривых в N точках:

$$\Delta = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|1 - \frac{\sigma_{11}(\delta_{1(i)})}{\sigma_{11}^{(э)}(\delta_{1(i)})}\right|^2\right)^{1/2} \to \min. \tag{8.39}$$

8.7.8. Сравнение с экспериментальными данными для сплавов. На рис. 8.11*а* представлены экспериментальные диаграммы деформирования жаростойкого сплава ХН78Т при температурах 20 °С и 800 °С, а также их аппроксимации указанным в п. 8.7.6 методом с помощью различных моделей A_n^ζ по формуле (7.32). В табл. 8.3 приведены вычисленные значения констант E, $\widetilde{H}_0$, n_0 и σ_s, при этом коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$.

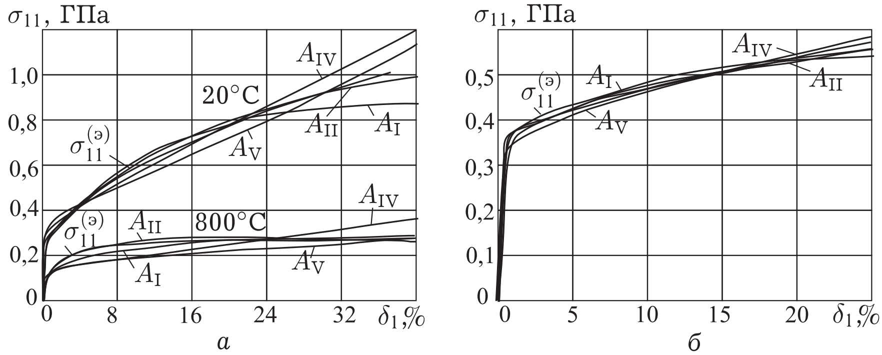

Рис. 8.11. Диаграммы деформирования: *а* — для сплава ХН78Т при температурах 20 °С и 800 °С и *б* — для алюминиевого сплава Д16 при растяжении

Таблица 8.3. Значения E, $\widetilde{H}_0$, n_0, σ_s, Δ в разных моделях A_n^ζ для стальных и алюминиевых сплавов

Сталь ХН78Т при 20 °С и 800 °С				
n	I	II	IV	V
E, ГПа	$\frac{200}{60}$	$\frac{200}{60}$	$\frac{200}{60}$	$\frac{200}{60}$
$\widetilde{H}_0$, ГПа	$\frac{4,8}{0,72}$	$\frac{3}{0,54}$	$\frac{1,2}{0,18}$	$\frac{0,6}{0,18}$
$-n_0$	$\frac{0,02}{0,26}$	$\frac{0,08}{0,26}$	$\frac{0,18}{0,38}$	$\frac{0,3}{0,36}$
σ_s, МПа	$\frac{145}{46,3}$	$\frac{145}{46,3}$	$\frac{145}{46,3}$	$\frac{145}{46,3}$
Δ, %	$\frac{6,4}{3,7}$	$\frac{2,5}{5,4}$	$\frac{5,4}{14}$	$\frac{5,3}{15,2}$

Алюминиевые сплавы Д16 и АК4				
n	I	II	IV	V
E, ГПа	$\frac{70}{67,7}$	$\frac{70}{67,7}$	$\frac{70}{67,7}$	$\frac{70}{67,7}$
$\widetilde{H}_0$, ГПа	$\frac{0,63}{1,42}$	$\frac{0,63}{0,81}$	$\frac{0,42}{0,4}$	$\frac{0,42}{0,61}$
$-n_0$	$\frac{0,3}{0,08}$	$\frac{0,28}{0,16}$	$\frac{0,32}{0,24}$	$\frac{0,3}{0,08}$
σ_s, МПа	$\frac{130}{197}$	$\frac{130}{197}$	$\frac{130}{197}$	$\frac{130}{197}$
Δ, %	$\frac{2,4}{1,7}$	$\frac{3}{1,3}$	$\frac{4}{1,9}$	$\frac{6,5}{7,6}$

Точность аппроксимации оказывается высокой для всех моделей A_n^ζ, наименьшее значение отклонения Δ удается достичь с помощью модели A_I^ζ. Отметим, что значение коэффицента n_0 отрицательно, что обеспечивает выпуклость вверх диаграммы деформирования в окрестности предела текучести σ_s. На рис. 8.11*б* и 8.12*а* представлены экспериментальные диаграммы деформирования алюминиевых сплавов Д16 и АК4 при растяжении и их аппроксимации моделями A_n^ζ с помощью той же формулы (7.32), а в табл. 8.3 приведены значения оптимальных констант E, $\widetilde{H}_0$, n_0 и σ_s. Точность аппроксимации также достаточно высокая для всех моделей A_n^ζ.

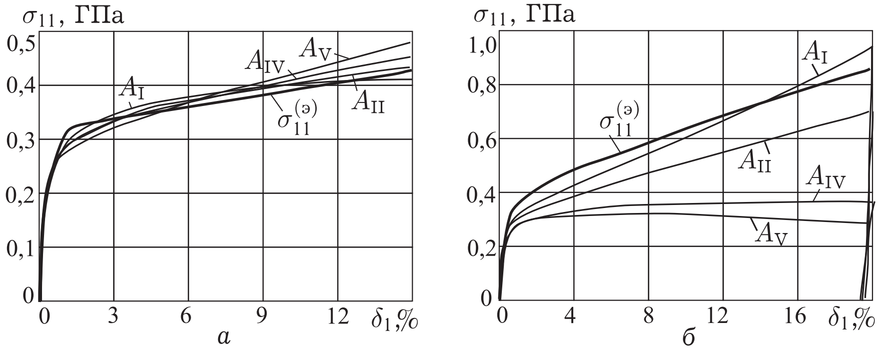

Рис. 8.12. Диаграммы деформирования для алюминиевого сплава АК4: *а* — при растяжении и *б* — при сжатии

На рис. 8.12*б* приведены экспериментальная и расчетные диаграммы деформирования сплава АК4 при сжатии. Расчет велся по формуле (7.34), причем константы E, $\widetilde{H}_0$, n_0 и σ_s были предварительно определены по кривой деформирования при растяжении. В этом случае наилучшую точность обеспечивала модель A_I^ζ, остальные модели приводили к значительной погрешности аппроксимации.

8.7.9. Сравнение с экспериментальными данными для грунтов. На рис. 8.13 и 8.14 приведены экспериментальные диаграммы деформирования при сжатии для песчаных грунтов (сухих и влажных песков), а также их аппроксимации с помощью соотношения (7.35). Эти диаграммы отличаются от соответствующих диаграмм сжатия для сплавов (см. рис. 8.12*б*) тем, что они имеют ярко выраженную выпуклость вверх (в абсолютных значениях координат), причем при разгрузке кривая деформирования идет резко вниз, почти вертикально (рис. 8.15).

Для влажных песков точность аппроксимации с помощью всех моделей A_n^ζ достаточно хорошая, для сухих песков — точность несколько ниже. Лучшие результаты аппроксимации дают модели A_{II}^ζ и A_{IV}^ζ. В отличие от металлических сплавов, константа n_0 имеет положительные значения для грунтов, а отношение предела текучести к максимальному абсолютному значению напряжений Коши $\alpha_s = \sigma_s/\sigma_{max}$ значительно меньше, чем для сталей: $\alpha_s \approx 0,001$ и $\alpha_s \approx 0,1$ соответственно. Значение σ_s для грунтов обычно настолько мало, что визуально на диаграмме деформирования не видно на-

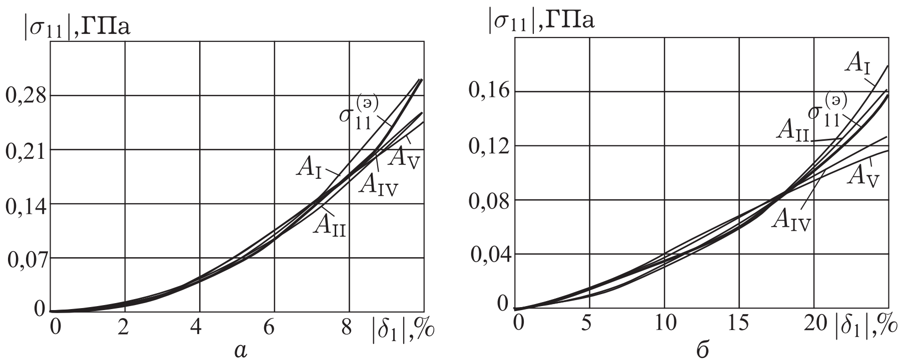

Рис. 8.13. Диаграммы деформирования при сжатии для песчаных грунтов: *а* — влажный песок и *б* — сухой песок

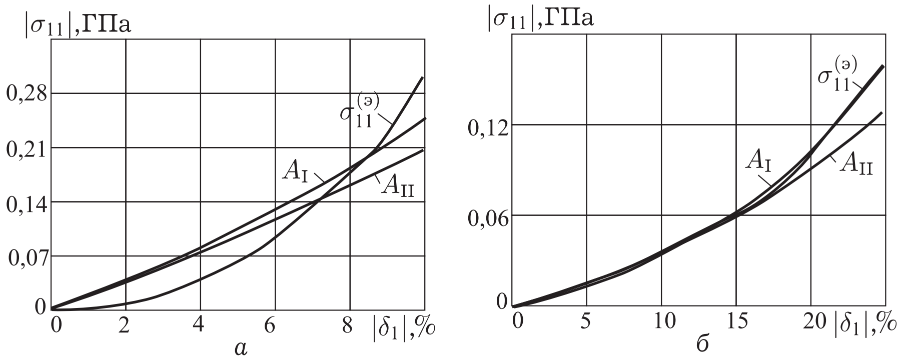

Рис. 8.14. Аппроксимация диаграмм деформирования при сжатии для песчаных грунтов с помощью моделей с линейным упрочнением: *а* — влажный песок и *б* — сухой песок

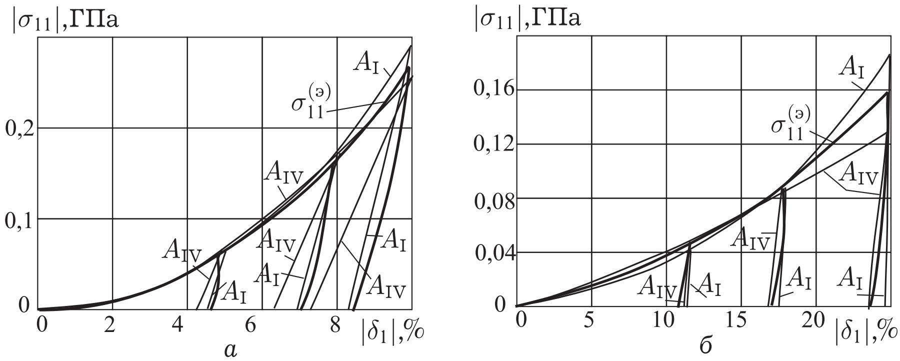

Рис. 8.15. Диаграммы деформирования при нагрузке и разгрузке (экспериментальные и расчетные по моделям A_{I} и A_{IV} для песчаных грунтов: *а* — влажный песок и *б* — сухой песок

чального упругого участка деформирования (рис. 8.13 и 8.15), хотя значения модуля упругости E при нагрузке и разгрузке в эксперименте оказываются близкими (в рассматриваемых моделях A_n^{ζ} они совпадают). Значения констант E, $\widetilde{H}_0$, n_0 и σ_s для рассмотренных типов грунтов приведены в табл. 8.4.

На рис. 8.14 представлены результаты аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования песчаных грунтов с помощью моделей пластических сред с линейным упрочнением (см. п. 8.1.8), для которых априори полагают $n_0 = 0$. Константу H_0 в этих моделях можно найти путем минимизации среднеквадратического отклонения (8.39). Этим методом были получены следующие значения: для влажных песков $H_0 = 2$ ГПа для моделей A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ}, для сухих песков $H_0 = 0,24$ ГПа для модели A_{I}^{ζ} и $H_0 = 0,3$ ГПа для модели A_{II}^{ζ}. Качество аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования с помощью моделей с линейным упрочнением хуже, чем для моделей со степенным упрочнением (1.86), особенно для влажных песчаных грунтов, однако в ряде случаев эта модель оказывается более удобной при решении частных задач (см. разд. 8.8).

Таблица 8.4. Значения констант E, $\widetilde{H}_0$, n_0, σ_s, Δ в моделях A_n^{ζ} для различных грунтов

Песок сухой				
n	I	II	IV	V
E, ГПа	10	10	10	10
$\widetilde{H}_0$, ГПа	0,324	0,56	1,6	3,1
n_0	0,09	0,15	0,27	0,34
σ_s, МПа	0,23	0,23	0,23	0,23
Δ, %	21,4	17,2	12,2	14

Песок влажный				
n	I	II	IV	V
E, ГПа	10	10	10	10
$\widetilde{H}_0$, ГПа	42	45	260	600
n_0	0,6	0,6	0,8	0,9
σ_s, МПа	0,29	0,29	0,29	0,29
Δ, %	55	56	55	56

8.8. Плоские волны в пластических средах

8.8.1. Формулировка задачи. Перейдем теперь к исследованию динамической задачи теории пластичности A_n^{ζ} (5.5)–(5.7) в материальном описании и рассмотрим задачу о *плоской волне* в пластине, вызванной быстрым (не квазистатическим) приложением нагрузки на одной из ее поверхностей $X^1 = 0$ (рис. 8.16).

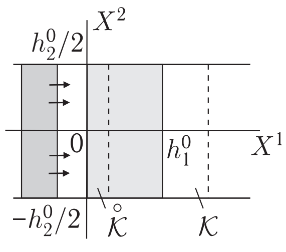

Рис. 8.16. Распространение плоской волны в пластине

Тыльную поверхность пластины $X^1 = h_1^0$ полагаем свободной от усилий, а на боковых поверхностях $X^\alpha = \pm h_\alpha^0/2$, $\alpha = 2, 3$, задано условие свободного скольжения (условие симметрии). Таким образом, граничные условия в данной задаче имеют вид

$$\begin{aligned} X^1 = 0: &\quad P_{11} = -\frac{p_e(t)}{J}(F^{-1})_{11}, \quad P_{12} = P_{13} = 0, \\ X^1 = h_1^0: &\quad P_{\alpha 1} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \\ X^\alpha = \pm h_\alpha^0/2: &\quad x^\alpha = X^\alpha, \quad P_{\alpha 1} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где P_{ij} — декартовы компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа, а $(F^{-1})_{11}$ — обратного градиента деформации $\mathbf{F}^{-1} = (F^{-1})_{ij}\bar{\mathbf{e}}^i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j$. Приближенно такие граничные условия моделируют процесс удара массивной абсолютно твердой плиты по исследуемой пластине из пластического материала, свободно скользящей по прямоугольной абсолютно твердой трубе.

8.8.2. Закон движения и деформация пластины. Закон движения пластины в данной задаче ищем в виде

$$\begin{cases} x^1 = x^1(X^1, t), \\ x^2 = X^2, \\ x^3 = X^3, \end{cases} \tag{8.2}$$

где $x^1(X^1, 0) = X^1$.

Вектор скорости $\mathbf{v}$ имеет только одну ненулевую компоненту

$$\mathbf{v} = \frac{\partial x^i}{\partial t}\bar{\mathbf{e}}_i = v^1\bar{\mathbf{e}}_1, \qquad v^1 = \partial x^1/\partial t.$$

Градиент деформации $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}^j = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{8.3}$$

$$k_1 = k_1(X^1, t) = \partial x^1/\partial X^1, \qquad k^\alpha = \partial x^\alpha/\partial X^\alpha = 1, \quad \alpha = 2, 3,$$

и, в отличие от квазистатического растяжения бруса (см. (7.2)), коэффициент пропорциональности $k_1(X^1, t)$ здесь зависит от X^1 уже нелинейным образом.

Энергетические тензоры деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ также содержат только одну ненулевую компоненту:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}\bar{\mathbf{e}}_1^2, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1), \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{C}_{33} = 0, \tag{8.4}$$

а изменение плотности определяется функцией k_1:

$$J = \rho/\overset{\circ}{\rho} = \det\,\mathbf{F}^{-1} = 1/k_1. \tag{8.5}$$

Тензоры $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$ и $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ ищем в диагональном виде

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{8.6}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{11} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{22} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22} = 0, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{33} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{33} = 0,$$

причем все компоненты $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{\alpha\alpha}$, $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{\alpha\alpha}$ зависят только от X^1 и t.

Из условия пластической несжимаемости имеем

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{33} = -\frac{1}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}, \tag{8.7}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{33} = \frac{1}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}, \tag{8.8}$$

т.е. поперечные деформации $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{e}_{22}$, $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{e}_{33}$ отличны от нуля только в пластической области.

8.8.3. Напряжения в пластине. Тензор напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$, согласно (7.9), в данной задаче тоже имеет диагональный вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}^2_{\alpha}, \tag{8.9}$$

где

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} = J(l_1 + 2l_2)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}_{11} - 2Jl_2 \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}, \tag{8.10}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{33} = J(l_1 \overset{(\mathrm{n})}{C}{}_{11} + l_2 \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}), \tag{8.11}$$

— все зависят только от X^1 и t.

Согласно (8.9) и (8.3), тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ имеют также диагональный вид

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}^2_{\alpha}, \qquad \mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^{3} P_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{e}}^2_{\alpha} = \frac{1}{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \tag{8.12}$$

$$\sigma_{11} = k_1^{n-\mathrm{III}} \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11}, \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{33},$$

$$P_{11} = \sigma_{11}, \qquad P_{22} = P_{33} = \frac{1}{k_1}\sigma_{22}.$$

8.8.4. Вывод системы динамических уравнений для плоской задачи. Так как

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial P_{\alpha\alpha}}{\partial X^{\alpha}} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha} = \frac{\partial P_{11}}{\partial X^1} \bar{\mathbf{e}}_1,$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial v^1}{\partial X^1} \bar{\mathbf{e}}^2_1, \qquad \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v} = \frac{1}{k_1}\, \frac{\partial v^1}{\partial X^1} \bar{\mathbf{e}}^2_1, \tag{8.13}$$

$${}^4\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \otimes \mathbf{v} = k_1^{n-\mathrm{III}-1} \frac{\partial v^1}{\partial X^1} \bar{\mathbf{e}}^2_1$$

(здесь мы использовали результат упр. 3.2.16 для тензоров $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{X}}$), то первое, третье, четвертое и пятое уравнения системы (5.5) в данной задаче принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial v^1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X^1}, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial t} = v^1, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial v^1}{\partial X^1}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11}}{\rho}\Big) = \frac{l_1 + 2l_2}{\overset{\circ}{\rho}} k_1^{n-\mathrm{III}-1} \frac{\partial v^1}{\partial X^1} - \frac{2l_2}{\overset{\circ}{\rho}}\, \frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11}}{\partial t}. \end{gathered} \tag{8.14}$$

Заметим, что последние уравнения системы (8.14) можно получить непосредственным дифференцированием соотношения (8.10).

Обратим внимание также на тот факт, что пятое уравнение системы (5.5) дает еще два скалярных выражения для $\partial \overset{(\mathrm{n})}{T}_{22}/\partial t$ и $\partial \overset{(\mathrm{n})}{T}_{33}/\partial t$, однако это именно выражения, а не уравнения, и поэтому они не включены в общую систему (8.14).

Учитывая выражение (8.5) для ρ и выражение (8.12) для σ_{11}, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}}{\rho}\Big) = \frac{k_1^{\mathrm{III}-n+1}}{\overset{\circ}{\rho}}\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \frac{\mathrm{III}-n+1}{\overset{\circ}{\rho}}\sigma_{11}k_1^{\mathrm{III}-n}\frac{\partial k_1}{\partial t}. \tag{8.15}$$

Подставляя это выражение в последнее уравнение системы (8.14), преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \big((l_1+2l_2)k_1^{2(n-\mathrm{III}-1)} - \frac{(\mathrm{III}-n+1)\sigma_{11}}{k_1}\big)\frac{\partial v^1}{\partial X^1} - 2l_2k_1^{n-\mathrm{III}-1}\frac{\partial \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}}{\partial t}. \tag{8.16}$$

Для вычисления $\partial \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}/\partial t$, как и в других рассмотренных выше одномерных задачах, используем уравнение поверхности пластичности $f=0$ (см. (1.96)), которое с учетом результатов упр. 8.1.1 в данной задаче имеет вид

$$\frac{1}{3\sigma_s^2}(\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{T}_{22} - H(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22}))^2 = 1. \tag{8.17}$$

Подставляя сюда выражение (8.11) для $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{22}$, (8.7) для $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{22}$, (8.4) для $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ и (7.24) для H, преобразуем его к виду

$$|\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{22} - \widetilde{H}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}| = \sqrt{3}\ \sigma_s, \tag{8.18}$$

где

$$\widetilde{H} = \frac{3}{2}H + \frac{l_2}{k_1}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{22} = \frac{l_1}{k_1}\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} = \frac{l_1(k_1^{n-\mathrm{III}}-1)}{(n-\mathrm{III})k_1}. \tag{8.19}$$

Для модели пластичности с линейным упрочнением, для которой $n_0=0$ и $H=H_0$, имеем $\widetilde{H} = \dfrac{3}{2}H_0 + \dfrac{l_2}{k_1}$, и уравнение (8.18) имеет аналитическое решение относительно $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \frac{\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}_{22}}{\widetilde{H}}\widetilde{h}_+ - \frac{\sqrt{3}\ \sigma_s}{\widetilde{H}}\widetilde{h}_- + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11}(1-\widetilde{h}_+), \tag{8.20}$$

где h_+ и h_- — функции Хевисайда:

$$\widetilde{h}_+ \equiv h_+ + h_-, \quad \widetilde{h}_- = h_+ - h_-,$$
$$h_+ = \begin{cases}1, & Y_{1H} \geqslant \sqrt{3}\ \sigma_s,\\ 0, & Y_{1H} < \sqrt{3}\ \sigma_s,\end{cases} \qquad h_- = \begin{cases}1, & Y_{1H} < -\sqrt{3}\ \sigma_s,\\ 0, & Y_{1H} > -\sqrt{3}\ \sigma_s,\end{cases} \tag{8.21}$$
$$Y_{1H} = \overset{(\mathrm{n})}{T}_{11} - \widetilde{T}_{22} - \widetilde{H}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11},$$

а $\overset{(n)}{C}{}^{p*}_{11}$ — значение пластической деформации, достигнутое к моменту t^* схода с поверхности пластичности.

Подставляя в (8.20) выражения (8.12) и (8.19) для $\overset{(n)}{T}_{11}$ и $\overset{(n)}{\widetilde{T}}_{22}$, а затем дифференцируя (8.20) по t на отрезках дифференцируемости, получаем

$$\frac{\partial \overset{(n)}{C}{}^{p}_{11}}{\partial t} = b_0\widetilde{h}_+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t} + ((b_1\sigma_{11} - b_2)\widetilde{h}_+ - \sqrt{3}\ \sigma_s b_3\widetilde{h}_-)\frac{\partial k_1}{\partial t}, \tag{8.22}$$

где обозначены функции от k_1:

$$b_0 = \frac{2k_1^{\mathrm{III}-n+1}}{3H_0k_1 + 2l_2}, \qquad b_1 = \frac{2k_1^{\mathrm{III}-n}}{3H_0k_1 + 2l_2}\Big(\mathrm{III} - n + \frac{2l_2}{3H_0k_1 + 2l_2}\Big), \tag{8.23}$$

$$b_3 = \frac{4l_2}{(3H_0k_1 + 2l_2)^2}, \quad b_2 = \frac{2l_1}{(3H_0k_1 + 2l_2)k_1}\Big(k_1^{n-\mathrm{III}} - \frac{3H_0k_1(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1)}{(3H_0k_1 + 2l_2)(n - \mathrm{III})}\Big).$$

Если теперь подставить выражение (8.22) в (8.16) и привести подобные, то придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t} = (c_1 - \sigma_{11}c_2)\frac{\partial v^1}{\partial x^1}, \tag{8.24}$$

где введены следующие обозначения функций от k_1:

$$c_0 = 1 + \frac{4l_2\widetilde{h}_+}{3H_0k_1 + 2l_2}, \quad c_1 = \frac{l_1 + 2l_2}{c_0}k_1^{2(n-\mathrm{III}-1)} + \frac{2l_2}{c_0}k_1^{n-\mathrm{III}-1}(b_2\widetilde{h}_+ + \sqrt{3}\ \sigma_s b_3\widetilde{h}_-),$$

$$c_2 = \frac{1}{c_0k_1}\Big(1 + \mathrm{III} - n + \frac{4l_2\widetilde{h}_+}{3H_0k_1 + 2l_2}\Big(\mathrm{III} - n + \frac{2l_2}{3H_0k_1 + 2l_2}\Big)\Big). \tag{8.25}$$

Заметим, что для большинства встречающихся на практике пластических сред выполняется условие

$$\sigma_{11}c_2/c_1 \ll 1, \tag{8.26}$$

поэтому вкладом слагаемого $\sigma_{11}c_2$ в уравнении (8.24) можно пренебречь и рассматривать следующее более простое уравнение:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t} = c_1^2\frac{\partial v^1}{\partial X^1}. \tag{8.27}$$

8.8.5. Постановка задачи о плоских волнах в пластических средах. Подставляя соотношение (8.27) вместо последнего уравнения в системе (8.14) и исключая второе уравнение в (8.14) (так как коэффициенты в этой системе явным образом не зависят от X^1), получаем окончательно:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\rho}(\partial v/\partial t) = \partial T/\partial X, \\ \partial k/\partial t = \partial v/\partial X, \\ \partial T/\partial t = c_1(\partial v/\partial X), \end{cases} \tag{8.28}$$

— систему трех уравнений первого порядка относительно трех функций $v, k, T \parallel X, t$, заданных в области $0 < X < h_1^0$, $0 < t < t_{\max}$, где обозначены: $T \equiv \sigma_{11}$, $X \equiv X^1$, $v \equiv v^1$, $k \equiv k_1$.

К этой системе следует присоединить граничные условия (8.1), которые с учетом (8.3) и (8.12) имеют вид

$$X = 0: \qquad T = -p_e(t), \tag{8.29а}$$

$$X = h_1^0: \qquad T = 0, \tag{8.29б}$$

а также начальные условия

$$t = 0: \quad v = 0, \quad k = 1, \quad T = 0, \quad 0 < X < h_1^0, \tag{8.30}$$

В результате получим *постановку динамической задачи о распространении плоских волн в пластических средах*.

8.8.6. Решение задачи методом характеристик. Для решения сформулированной задачи применим метод характеристик, который широко используется для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Ограничимся случаем активного нагружения, когда $dp_e/dt \geqslant 0$.

Согласно методу характеристик, рассмотрим дифференциалы искомых неизвестных функций:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial X}dX, \qquad dk = \frac{\partial k}{\partial t}dt + \frac{\partial k}{\partial X}dX, \qquad dT = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial X}dX. \tag{8.31}$$

Система (8.28) и (8.31) представляет собой шесть уравнений, линейных относительно шести неизвестных функций: $v_t = \partial v/\partial t$, $v_X = \partial v/\partial X$, $T_t = \partial T/\partial t$, $T_X = \partial T/\partial X$, $k_t = \partial k/\partial t$ и $k_X = \partial k/\partial X$. В матричных обозначениях систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\rho} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ dt & dX & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dX \\ 0 & 0 & dt & dX & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ v_X \\ T_t \\ T_X \\ k_t \\ k_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dv \\ dk \\ dT \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

Однозначное решение этой системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Однако на плоскости (X, t) существуют характеристики — кривые, на которых нарушается однозначность решения, этот случай реализуется, когда обращается в нуль определитель системы (8.32):

$$\det\,(\ ) = -\overset{\circ}{\rho} dX^3 + c_1 dt^2 dX = 0. \tag{8.33}$$

Из (8.33) находим уравнения двух семейств характеристик:

$$dX = \pm a dt, \tag{8.34}$$

где

$$a^2(k) \equiv c_1(k)/\overset{\circ}{\rho} \tag{8.35}$$

— скорость звука в пластической среде.

Подставляя (8.34) в первое и второе уравнения системы (8.28), получаем условия на характеристиках:

$$\overset{\circ}{\rho} dv = dT\frac{dt}{dX} = \pm\frac{dT}{a}, \qquad dk = dv\frac{dt}{dX} = \pm\frac{dv}{a},$$

или

$$\overset{\circ}{\rho} a\ dv \mp dT = 0, \qquad a\ dk \mp dv = 0. \tag{8.36}$$

Введем теперь функции

$$\xi(k) = \int\limits_1^k c_1(k')\ dk', \qquad \varphi(k) = \int\limits_1^k a(k')\ dk', \tag{8.37}$$

для которых $d\xi = c_1\ dk$, $d\varphi = a\ dk$, тогда уравнения (8.36) можно проинтегрировать:

$$\xi(k) - T = \text{const}, \qquad \varphi(k) \mp v = \text{const}. \tag{8.38}$$

Таким образом, имеем два семейства характеристик и по два условия на каждой из них:

$$\begin{cases} dX - a(k)dt = 0, \\ v - \varphi(k) = {\varphi_+}^0 = \text{const}, \\ T - \xi(k) = {\xi_+}^0 = \text{const}, \end{cases} \tag{8.39}$$

$$\begin{cases} dX + a(k)dt = 0, \\ v + \varphi(k) = {\varphi_-}^0 = \text{const}, \\ T - \xi(k) = {\xi_-}^0 = \text{const}, \end{cases} \tag{8.40}$$

Выберем теперь точку $\mathcal{M}$ на фазовой плоскости (X, t). Для нее всегда существуют две характеристики, причем для одной — касательная является положительной ($dt/dX = 1/a > 0$), а для другой — отрицательной ($dt/dX = -1/a < 0$).

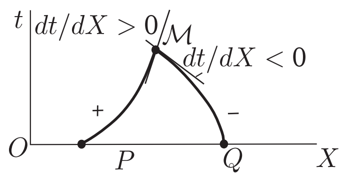

Рис. 8.17. Характеристики для точки $\mathcal{M}$

Рассмотрим такую точку $\mathcal{M}$, для которой обе характеристики пересекаются с осью OX (рис. 8.17) в некоторых точках P и Q. Так как точки P и Q принадлежат области задания начальных условий (8.30), то в них $v = 0$, $k = 1$ и $T = 0$, но тогда из условий (8.39) и (8.40) следует, что вдоль характеристик $P\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}Q$ константы являются нулевыми: ${\varphi_\pm}^0 = 0$ и ${\xi_\pm}^0 = 0$ (так как $\xi(1) = 0$ и $\varphi(1) = 0$). Следовательно, в точке $\mathcal{M}$, где пересекаются обе характеристики, одновременно выполняются условия

$$v = \varphi(k) \qquad \text{и} \qquad v = -\varphi(k), \tag{8.41}$$

что возможно, только если $k = 1$ и $v = 0$. Следовательно, в этой точке $\mathcal{M}$: $T = \xi(1) = 0$.

Таким образом, во всех точках $\mathcal{M}$, обе характеристики которых пересекаются с осью OX, нет возмущений при любых нагружениях, т.е. это область покоя.

Кроме того, поскольку в области покоя $k = 1$, то $a(k) = a(1) = a_0 = \text{const}$, где a_0 — скорость звука в покоящейся среде, для которой, согласно (8.35) и (8.25), имеем

$$a_0 = c_1(1)/\overset{\circ}{\rho} = (l_1 + 2l_2)/\overset{\circ}{\rho}, \tag{8.42}$$

так как в области покоя пластические деформации отсутствуют и $\widetilde{h}_+ = \widetilde{h}_- = 0$, $Y_{1H} = 0$.

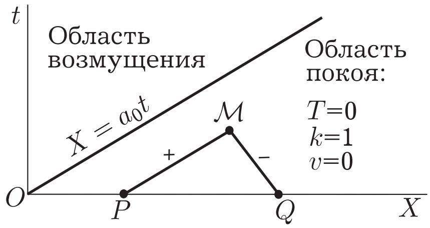

Рис. 8.18. Характеристики в точке $\mathcal{M}$ в области покоя

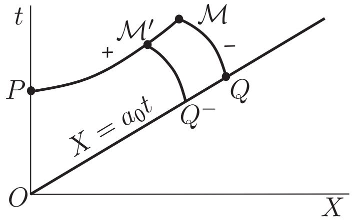

Рис. 8.19. Характеристики в точке $\mathcal{M}$ в области возмущения

Следовательно, все характеристики $\mathcal{M}P$ и $\mathcal{M}Q$, пересекающиеся с осью OX, — это прямые с уравнениями (рис. 8.18)

$$P\mathcal{M}: \quad t - \frac{X}{a_0} = c_+, \qquad \mathcal{M}Q: \quad t + \frac{X}{a_0} = c_-, \tag{8.43}$$

где $c_\pm$ — константы, индивидуальные для каждой характеристики.

Характеристика, которой принадлежит точка O начала координат ($t = 0, X = 0$), разделяет область покоя и область возмущения и называется *головной волной*. Из (8.43) следует уравнение головной волны: $X = a_0 t$.

Выберем теперь точку $\mathcal{M}$, располагающуюся в области возмущения, и рассмотрим ее характеристики. В силу построения, «+»-характеристика пересекает ось Ot в точке P, а «−»-характеристика пересекает в точке Q головную волну (рис. 8.19). Поскольку точка Q принадлежит области покоя, то в ней $v = 0$, $k = 1$, $T = 0$, и, следовательно, из (8.40) следует, что для «−»-характеристики ${\varphi_-}^0 = 0$, ${\xi_-}^0 = 0$, поэтому для рассматриваемой точки $\mathcal{M}$ вдоль характеристик $\mathcal{M}P$ и $\mathcal{M}Q$ имеем из (8.39) и (8.40) следующие соотношения:

$$\mathcal{M}P: \qquad v = \varphi(k) + {\varphi_+}^0, \quad T = \xi(k) + {\xi_+}^0, \tag{8.44а}$$

$$\mathcal{M}Q: \qquad v = -\varphi(k), \quad T = \xi(k). \tag{8.44б}$$

Из этих уравнений находим соотношения в точке $\mathcal{M}$:

$$v = {\varphi_+}^0/2 = \text{const}, \qquad {\xi_+}^0 = 0,$$
$$k = k^0 = \text{const}, \qquad T = \xi(k^0) = T^0 = \text{const}. \tag{8.45}$$

Если мы выберем произвольную точку $\mathcal{M}'$ на «+»-характеристике $\mathcal{M}P$ и построим ее «−»-характеристику $\mathcal{M}'Q'$, то для точки $\mathcal{M}'$ получим те же самые соотношения (8.44) и (8.45), причем с теми же константами ${\varphi_+}^0$ и k^0, поскольку ${\varphi_+}^0$ — одна и та же вдоль всей $P\mathcal{M}$. Следовательно, значения функций v, k и T, хотя уже и отличаются от значений покоя, но остаются постоянными вдоль всей «+»-характеристики. Это означает, что скорость звука $a(k) = a(k^0) = \mathrm{const}$ — также постоянна, и характеристика $\mathcal{M}P$ является прямой линией, ее уравнение: $t - (X/a(k^0)) = C$, $C = \mathrm{const}$. Поскольку k^0 и T^0 — это значения функций $k(X,t)$ и $T(X,t)$ вдоль характеристики $\mathcal{M}P$, то для различных значений X и t, удовлетворяющих уравнению $t - (X/a(k^0)) = C$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &k^0 = k(C) = k\big(t - \frac{X}{a(k^0)}\big) = \mathrm{const}, \\ \mathcal{M}P: \qquad &T^0 = \xi(k^0) = \xi(k(C)) = \xi\Big(k\big(t - \frac{X}{a(k^0)}\big)\Big) = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Если применить эти соотношения для точки P, для которой $X = 0$ и для которой кроме соотношений (8.45) имеет место граничное условие (8.29а), то из (8.46) и (8.29а) получим:

$$P: \qquad \xi(k(t)) = -p_e(t). \tag{8.47}$$

Из этого соотношения находим функцию $k(t)$:

$$k(t) = \xi^{-1}(-p_e(t)), \tag{8.48}$$

полагая, что существует обратная функция $k = \xi^{-1}(T^0)$.

Подставляя теперь (8.48) в (8.46) и (8.44б), находим значения k и T для точки $\mathcal{M}$ с координатами X и t:

$$\begin{aligned} k^0 = k(X,t) = k(t - \frac{X}{a^0}) = \xi^{-1}\Big(-p_e\big(t - \frac{X}{a^0}\big)\Big), \\ T^0 = T(X,t) = \xi\Big(k(t - \frac{X}{a^0})\Big) = -p_e\big(t - \frac{X}{a^0}\big), \\ v(X,t) = -\varphi(k(X,t)) = -\varphi\Big(\xi^{-1}\Big(-p_e\big(t - \frac{X}{a^0}\big)\Big)\Big). \end{aligned} \tag{8.49}$$

В силу произвольности точки $\mathcal{M}$, полученные соотношения (8.49) представляют собой искомое решение в возмущенной области для тех значений t, при которых аргумент функций (8.49) неотрицателен, т.е. при $t > X/a$. Для моментов времени $t \leqslant X/a$ возмущение не доходит до рассматриваемой точки $\mathcal{M}$ и вместо (8.49) имеем решение, соответствующее состоянию покоя:

$$k = 1, \qquad T = 0, \qquad v = 0, \qquad t < X/a. \tag{8.50}$$

Построенное решение (8.49), (8.50) имеет место только до тех значений t, при которых головная волна не доходит до тыльной поверхности пластины $X = h_1^0$, т.е. при $t < h_1^0/a_0$.

8.8.7. Сравнительный анализ решения для разных моделей A_n^ζ. Проанализируем теперь полученное решение (8.49). При активном нагружении, когда $dp_e/dt \geqslant 0$, имеем $\overset{(n)}{C}{}^{p*}_{11} = 0$. Тогда для $t > X/a$ из (8.49) следует, что $d\sigma_{11}/dt = dT/dt \leqslant 0$, поэтому нагружение пластины происходит в области сжатия. Следовательно, соотношения (8.20), (8.21) и (8.25) в упругой области принимают вид

$$
\begin{gathered}
h_+ = 0, \quad h_- = 0, \quad \widetilde{h}_+ = \widetilde{h}_- = 0,\\
\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11} = 0, \qquad c_0 = 1, \qquad c_1 = (l_1 + 2l_2)k_1^{2(n-\mathrm{III}-1)},\\
a = a_0 k^{n-\mathrm{III}-1}, \qquad a_0 = \sqrt{(l_1 + 2l_2)/\overset{\circ}{\rho}}\,,\\
\xi(k) = \frac{l_1 + 2l_2}{2(n - \mathrm{III} - 1}(k^{2(n-\mathrm{III})-1} - 1), \qquad \varphi(k) = \frac{a_0}{n - \mathrm{III}}(k^{n-\mathrm{III}} - 1),
\end{gathered}
\tag{8.51}
$$

если $\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}{}_{22} > -\sqrt{3}\,\sigma_s$.

Подставляя в формулу (8.18) выражение (8.19) для $\overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}{}_{22}$, а вместо $\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11}$ его выражения через k, согласно (8.12), (8.38) и (8.49): $\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} = k^{\mathrm{III}-n}T = k^{\mathrm{III}-n}\xi(k)$, находим предельное значение $k = k_s < 1$, при котором начинается пластичность при сжатии:

$$
\frac{k_s^{\mathrm{III}-n}}{2(n - \mathrm{III}) - 1}(k_s^{2(n-\mathrm{III})-1} - 1) - \frac{\nu(k_s^{n-\mathrm{III}} - 1)}{(1 - \nu)(n - \mathrm{III})k_s} = -\frac{\sqrt{3}\ \sigma_s}{l_1 + 2l_2}. \tag{8.52}
$$

Здесь, как и ранее, $\nu = l_1/(2(l_1 + l_2))$ — коэффициент Пуассона.

В области пластических деформаций (сжатия) при $k \leqslant k_s < 1$ соотношения (8.20), (8.21) и (8.25) принимают вид

$$
\begin{gathered}
h_+ = 0, \qquad h_- = 1, \qquad \widetilde{h}_+ = 1, \qquad \widetilde{h}_- = -1,\\
\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p}_{11} = \frac{1}{\widetilde{H}}(\overset{(\mathrm{n})}{T}{}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{\widetilde{T}}{}_{22} + \sqrt{3}\ \sigma_s) = \\
= \frac{l_1 + 2l_2}{\widetilde{H}}\Big(k^{\mathrm{III}-n}\xi(k) - \frac{\nu(k^{n-\mathrm{III}} - 1)}{(1 - \nu)(n - \mathrm{III})k} + \frac{\sqrt{3}\,\sigma_s}{l_1 + 2l_2}\Big),\\
c_0 = 1 + \frac{4l_2}{3H_0k + 2l_2}, \qquad c_1 = (l_1 + 2l_2)\frac{\widetilde{c}_1(k)}{c_0(k)},\\
\widetilde{c}_1(k) = k^{2(n-\mathrm{III}-1)} + \big(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\big)k^{n-\mathrm{III}-1}\big(b_2 - \frac{\sqrt{3}\ \sigma_s b_3}{l_1 + 2l_2}\big),\\
a = a_0\sqrt{\widetilde{c}_1(k)/c_0(k)}\,, \qquad a_0 = \sqrt{(l_1 + 2l_2)/\overset{\circ}{\rho}}\,,\\
\xi(k) = (l_1 + 2l_2)\int\limits_1^k \frac{\widetilde{c}_1(k')\,dk'}{c_0(k')}, \qquad \varphi(k) = a_0\int\limits_1^k \sqrt{\frac{\widetilde{c}_1(k')}{c_0(k')}}\ dk'.
\end{gathered}
\tag{8.53}
$$

Типичные графики зависимости безразмерной скорости звука a/a_0 от k, описываемые функциями (8.53), для различных моделей A_n^{ζ} приведены на рис. 8.20 (здесь $\nu = 0.3$, $\sigma_s/m = 1.5 \cdot 10^{-3}$, $H/m = 10^{-2}$, где $m = l_1 + 2l_2$). Из этих графиков следует, что между моделями A_{I}^{ζ}, A_{II}^{ζ} и A_{IV}^{ζ}, A_{V}^{ζ} имеется

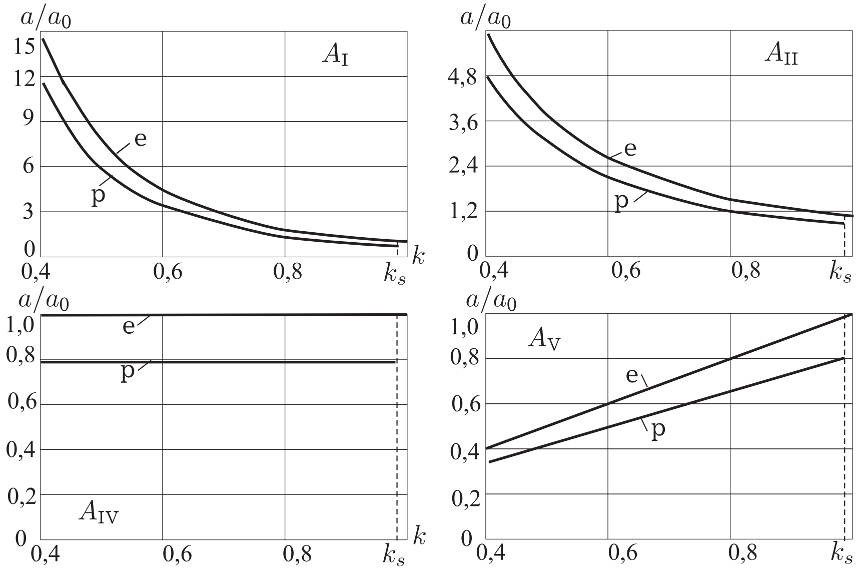

Рис. 8.20. Скорость звука (безразмерная a/a_0) в зависимости от коэффициента пропорциональности сжатия k для различных моделей A_n^ζ упругих сред (e) и пластических сред (p)

принципиальное различие: для моделей $A_{\rm I}^\zeta$ и $A_{\rm II}^\zeta$ скорость звука возрастает с уменьшением k (в области сжатия $k<1$), а для моделей $A_{\rm IV}^\zeta$ и $A_{\rm V}^\zeta$ — не возрастает (для $A_{\rm IV}^\zeta$ остается постоянной, а для $A_{\rm V}^\zeta$ — убывает). Для всех моделей A_n^ζ функция $a(k)$ в рассматриваемом случае имеет разрыв при $k=k_s$, поскольку было сделано допущение о линейном упрочнении среды (см. формулу (8.20)).

8.8.8. Плоские волны в моделях $A_{\rm IV}^\zeta$ и $A_{\rm V}^\zeta$. В силу того, что $\xi(k)$ является отрицательной при $k<1$ и монотонно убывает в диапазоне значений k от 1 до 0 для всех моделей A_n^ζ, функция $k(t)=\xi^{-1}(-p_e(t))$ является монотонно убывающей ($k(0)=\xi^{-1}(-p_e(0))=1$) (здесь мы учли, что $p'(t)\geqslant 0$ по предположению). Следовательно, на лицевой поверхности пластины $X=0$ функция $k(t)$ монотонно убывает, а функция $a(k)$ возрастает для моделей $A_{\rm I}^\zeta$, $A_{\rm II}^\zeta$ и убывает для моделей $A_{\rm IV}^\zeta$, $A_{\rm V}^\zeta$.

Но тогда на фазовой плоскости (t,X) «+»-характеристики в области возмущения (как было показано выше, они являются прямыми) увеличивают тангенс угла наклона к оси OX с увеличением t для моделей $A_{\rm IV}^\zeta$, $A_{\rm V}^\zeta$ и уменьшают — для моделей $A_{\rm I}^\zeta$, $A_{\rm II}^\zeta$ (рис. 8.21). Уменьшение же тангенса угла наклона характеристик $t=X/a(k)$ означает, что характеристики с разными значениями k могут пересекаться на головной волне (рис. 8.21) — в результате возникает неоднозначность решения, что недопустимо в рамках сделанных нами допущений об отсутствии у исследуемого решения скачков самих функций k, T и v (допустимы только скачки у первых производных). Таким образом, для моделей $A_{\rm I}^\zeta$ и $A_{\rm II}^\zeta$ полученное решение неприменимо, и оно будет построено иначе (см. п. 8.8.9.).

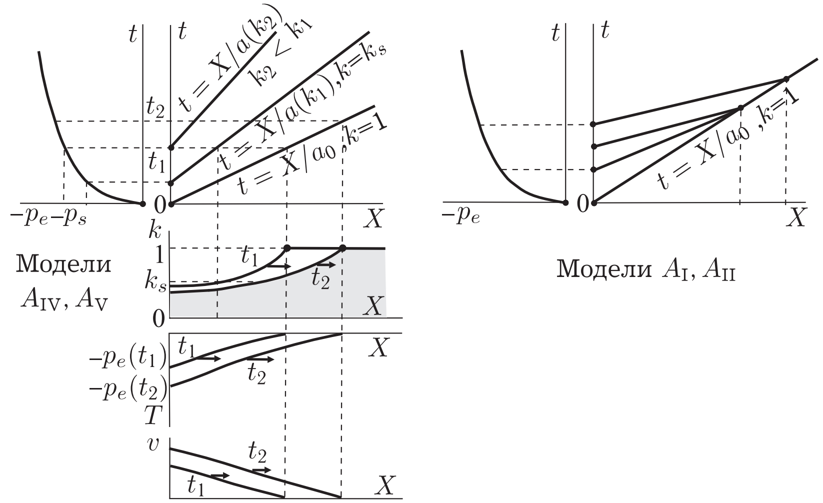

Рис. 8.21. Графический способ построения решения (8.49)

Для моделей A_{IV}^{ζ} и A_{V}^{ζ} характеристики не пересекаются, и полученное решение (8.49) действительно имеет место. На рис. 8.21 показан графический способ построения решения (8.49) по заданным значениям функции $p_e(t)$.

Рассмотрим частный случай нагружения, когда нагрузка p_e имеет скачкообразный вид

$$p_e = p_e^0\, h(t), \tag{8.54}$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда, тогда T и k на лицевой поверхности пластины меняются от значений 0 и 1 соответственно, до конечных значений T^0 и $k^0 < 1$, а затем остаются постоянными для всех $t > 0$. Следовательно, на фазовой плоскости (t, X) образуется угол, ограниченный характеристиками $X = a_0 t$ и $X = a(k^0)t$, который «заполнен» характеристиками $X = a(k)t$, $k^0 < k < 1$ («веер» характеристик). Волны, соответствующие этим характеристикам, называют *волнами Римана (центрированными волнами)* по аналогии с газовой динамикой [16]. Эти волны характеризуются тем, что движутся без изменения амплитуды значений T и v (рис. 8.22).

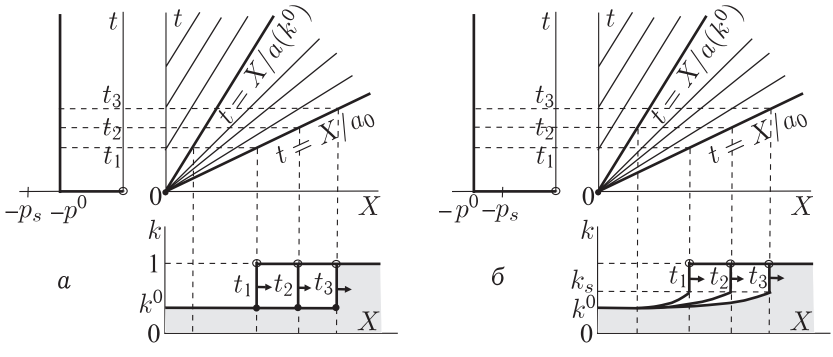

Рис. 8.22. Волны Римана для моделей A_{IV}^{ζ} и A_{V}^{ζ} пластических сред: *а* — $p^0 < p_s$, *б* — $p^0 > p_s$

Если значение $p^0 < p_s$, где p_s — давление начала пластичности при сжатии ($-p_s = \xi(k_s)$, где k_s определяется из (8.52)), то форма волны (ступенька) сохраняется (рис. 8.22), если же $p^0 > p_s$, то форма волны «размазывается», значения k меняются от k^0 до k_s, но максимальное значение k_s все равно остается постоянным.

8.8.9. Ударные волны в моделях A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ}. Вернемся теперь к моделям A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ} и рассмотрим только случай ступенчатого нагружения пластины (8.54). В этом случае система (8.28) и (8.30) допускает тривиальное решение

$$T = -p = \mathrm{const}, \qquad k = \mathrm{const}, \qquad v = \mathrm{const}. \tag{8.55а}$$

Однако удовлетворить граничному условию (8.29б) удается, только если допустить существование скачка функций, за которым снова имеет место тривиальное решение

$$T = 0, \qquad k = 1, \qquad v = 0. \tag{8.55б}$$

Иначе говоря, для моделей A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ} реализуется решение в виде *ударной волны*. Функция $X = X_D(t)$, разделяющая на фазовой плоскости (t, X) два решения (8.55) представляет собой уравнение фронта ударной волны. Для нахождения этой функции, а также для вычисления значений k и v (соотношения на характеристиках здесь уже не имеют места) необходимо привлечь соотношения (4.3.17) на поверхности сильного разрыва в материальном описании. Для рассматриваемой задачи эти соотношения сводятся к следующим:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{M}v - p = 0, & (8.56\text{а}) \\ \overset{\circ}{M}(k-1) + \overset{\circ}{\rho} v = 0, & (8.56\text{б}) \\ \overset{\circ}{M}\left(\dfrac{v^2}{2} + [e]\right) - pv = 0. & (8.56\text{в}) \end{cases}$$

Здесь учтено, что $[v] = v$, $[P] = P_{11} = \sigma_{11}$, $[F] = F_{11} - 1 = k - 1$, так как по одну сторону поверхности разрыва, согласно (8.55б), среда является невозмущенной. Массовая скорость $\overset{\circ}{M}$ определяется по (4.3.4) и (4.1.12):

$$\overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{D}\overset{\circ}{\rho}, \qquad \overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{c} = \partial \overset{\circ}{x}_{\Sigma}/\partial t = dX_D/dt. \tag{8.57}$$

Положим, что на ударной волне скачок температуры равен нулю $[\theta] = 0$, тогда, используя результат упр. 8.1.10, для скачка внутренней энергии $[e]$ имеем следующее выражение:

$$[e] = e - e_0 = \frac{l_1}{2\overset{\circ}{\rho}} I_1^2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e) + \frac{l_2}{\overset{\circ}{\rho}} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_e^2). \tag{8.58}$$

Здесь мы учли, что в невозмущенной области, согласно (8.55б), $e = e_0$.

Из (8.6)–(8.8) получаем следующие выражения для инвариантов $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e)$ и $I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_e^2)$:

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e) = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{11} + 2\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{22} = \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{11} + \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11},$$

$$I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^2_e) = (\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{11})^2 + 2(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^e_{22})^2 = (\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})^2 + \frac{1}{2}(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})^2. \tag{8.59}$$

Подставляя (8.59) в (8.58), находим выражение для скачка внутренней энергии через деформации $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$ и $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$:

$$[e] = \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}}(l_1 \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^2_{11} + 2l_2((\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})^2 + \frac{1}{2}(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})^2)) =$$

$$= \frac{1}{2\overset{\circ}{\rho}}((l_1 + 2l_2)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^2_{11} - 4l_2 \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} + 3l_2(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})^2). \tag{8.60}$$

При первоначальном пластическом нагружении сжатия, когда $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^{p*}_{11} = 0$, подставляя в (8.20) формулу (8.10) для $\overset{(\mathrm{n})}{T}_{11}$, получаем следующее уравнение для $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \frac{1}{\widetilde{H}k}\big((l_1 + 2l_2)\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} - 2l_2 \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} - l_1 \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} + \sqrt{3}\ \sigma_s k\big), \tag{8.61}$$

из которого легко выражаем пластическую деформацию $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$:

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \frac{\sqrt{3}\ \sigma_s k + b\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}}{3(b + H_0 k/2)}, \quad b = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}. \tag{8.62}$$

Если теперь подставить в (8.60) формулу (8.62) для $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}$ и (8.4) для $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$, то получим скачок внутренней энергии $[e]$ как функцию от k:

$$[e] = [e](k). \tag{8.63}$$

Если нагружение происходит только в упругой области, где $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p = 0$, то

$$[e](k) = \frac{l_1 + 2l_2}{2\overset{\circ}{\rho}(n - \mathrm{III})^2}(k^{n-\mathrm{III}} - 1)^2. \tag{8.64}$$

С учетом выражения (8.63) три соотношения (8.56) позволяют вычислить три неизвестные функции: k, v и $\overset{\circ}{M}$ через p. Для этой цели выразим v из (8.56б):

$$v = \overset{\circ}{M}(1 - k)/\overset{\circ}{\rho}, \tag{8.65}$$

подставим (8.65) в (8.56а) и выразим $\overset{\circ}{M}$:

$$\overset{\circ}{M} = \sqrt{\overset{\circ}{\rho}p/(1 - k)}\,. \tag{8.66}$$

Перед корнем выбран знак «+», исходя из физического смысла решения: движение ударной волны должно осуществляться в положительном направлении оси OX пластины.

Подставляя теперь (8.66) в (8.65), получаем выражение для v:

$$v = \sqrt{p(1-k)/\overset{\circ}{\rho}}, \tag{8.67}$$

а, подставляя (8.63), (8.66) и (8.67) в (8.56в), приходим к уравнению для k:

$$[e](k) = \frac{p}{2\overset{\circ}{\rho}}(1-k). \tag{8.68}$$

Полученное соотношение (8.68) совместно с выражением (8.60) для скачка внутренней энергии позволяет найти k в зависимости от p: $k = k(p)$.

Поскольку по условию задачи p известно, то, вычислив k из уравнения (8.68), далее с помощью формул (8.65) и (8.66) находим $\overset{\circ}{M}$ и v, а затем из первой формулы (8.57) находим скорость $\overset{\circ}{D}$

$$\overset{\circ}{D} = \frac{\overset{\circ}{M}}{\overset{\circ}{\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\overset{\circ}{\rho}(1-k)}}, \tag{8.69}$$

тем самым решение задачи полностью найдено.

8.8.10. Ударные адиабаты для моделей A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ}. Зависимость $k = k(p)$ или $p = p(k)$, выражаемую формулой (8.68), называют *ударной адиабатой для упруго-пластической среды*. Поскольку $k = \overset{\circ}{\rho}/\rho$ есть отношение плотностей, то можно ввести удельный объем $V = 1/\rho = k/\overset{\circ}{\rho}$, который будет функцией от p, т.е. имеем соотношение вида $p = p(V)$ или $V = V(p)$, которое хорошо известно в газовой динамике (см. [16]), и также для подобных задач называется ударной адиабатой.

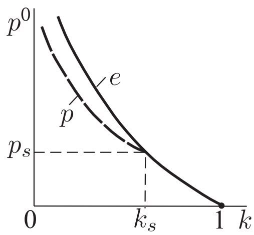

Рис. 8.23. График ударной адиабаты

Если нагружение происходит только в упругой области, то, подставляя (8.64) в (8.68), получаем следующее уравнение для ударной адиабаты $p = p(k)$:

$$\frac{p}{l_1 + 2l_2} = \frac{1}{1-k}\left(\frac{k^{n-\mathrm{III}} - 1}{n - \mathrm{III}}\right)^2. \tag{8.70}$$

График этой функции приведен на рис. 8.23.

Уравнение ударной адиабаты с учетом пластических деформаций получаем, подставляя (8.60), (8.64) и (8.4) в (8.68):

$$\frac{p}{l_1 + 2l_2} = \frac{1}{1-k_1}\left(\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^2_{11} - b\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11}(4\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11})\right), \tag{8.71}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^p_{11} = \frac{\sqrt{3}\ \sigma_s k + b\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}}{3(b + H_0 k/2)}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} = \frac{1}{n - \mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1). \tag{8.72}$$

Схематический график этой ударной адиабаты $p(k)$ также приведен на рис. 8.23. На рис. 8.24 приведены ударные адиабаты для сухих и влажных песчаных грунтов, рассчитанные по формуле (8.71). Константы E, ν, σ_s и H_0 для грунтов были взяты из результатов обработки экспериментальных данных

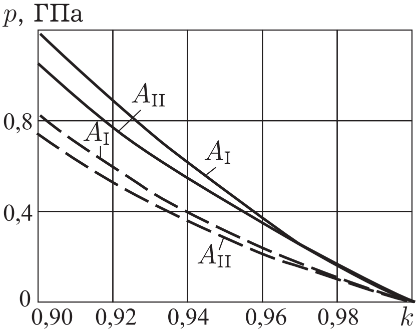

Рис. 8.24. Ударная адиабата для песчаных грунтов: сплошные кривые — влажный песок, прерывистые — сухой

по одноосному сжатию образцов в форме бруса, которые были получены при высокоскоростных испытаниях. Методика вычисления и значения этих констант приведены в п. 8.7.9, для аппроксимации использовалась модель пластичности с линейным упрочнением.

Зададимся вопросом: какова же скорость $\overset{\circ}{D}$ распространения ударной волны по сравнению со скоростью звука a_0 в невозмущенной среде. Для ответа найдем значение k при малых значениях давления $p/(l_1+2l_2) \ll 1$. Линеаризуя левую часть уравнения (8.70) в окрестности значения $k=1$, получаем

$$p = -(l_1+2l_2)\delta, \tag{8.73}$$

где $k = 1+\delta$, $|\delta| \ll 1$, $\delta \leqslant 0$ для обеих моделей A_{I} и A_{II}. Тогда из (8.69) находим

$$\overset{\circ}{D} = \sqrt{-\frac{p}{\overset{\circ}{\rho}\delta}} = \sqrt{\frac{\delta(l_1+2l_2)}{\overset{\circ}{\rho}\delta}} = \sqrt{\frac{l_1+2l_2}{\overset{\circ}{\rho}}} = a_0, \tag{8.74}$$

т.е. малые возмущения в моделях A_{I} и A_{II} упруго-пластических сред распространяются со звуковой скоростью.

При конечных значениях величины $p/(l_1+2l_2)$ скорость движения ударной волны $\overset{\circ}{D}$, как следует из уравнения (8.69), становится сверхзвуковой (рис. 8.25).

8.8.11. Ударные адиабаты при заданной скорости удара. Полученное в п. 8.8.10 решение остается справедливым и для другого случая граничных условий, когда на поверхности $X^1=0$ пластины вместо компоненты напряжения P_{11} задана постоянная скорость удара v:

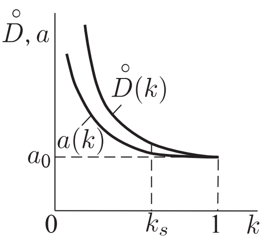

Рис. 8.25. Зависимость скорости распространения ударной волны и скорости звука от коэффициента сжатия k_1 в пластической среде

$$X^1 = 0: \quad v = v_0 = \mathrm{const}, \quad P_{12} = P_{13} = 0, \tag{8.75}$$

остальные условия в (8.1) остаются без изменения. В этом случае ударную адиабату удобно представить как функцию $p = p(v)$. Для этого следует подставить функцию $p(k)$, выражаемую формулами (8.71) и (8.72), в уравнение (8.67), в результате получим уравнение

$$p(k) = \frac{v^2}{\overset{\circ}{\rho}(1-k)}, \tag{8.76}$$

которое при заданном v можно решить относительно k. Вычислив корень этого уравнения (на промежутке $0 < k \leqslant 1$ этот корень единственный), например, методом деления отрезка пополам, найдем функцию $k = k(v)$.

После подстановки этой функции в уравнение (8.71) в итоге получим ударную адиабату $p = p(k) = p(k(v)) = p(v)$ в координатах (p, v) — (давление, скорость). На рис. 8.26 представлены графики ударной адиабаты $p = p(v)$ для песчаных грунтов, рассчитанные для моделей A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ} пластических сред с линейным упрочнением. Константы E, ν, σ_s и H_0 в этих расчетах также были взяты из результатов обработки экспериментальных данных при одноосном растяжении (см. п. 8.7.9). На этом же рисунке приведены экспериментальные ударные адиабаты $p^{(\text{э})}(k)$ для сухих и влажных песчаных грунтов. Совпадение экспериментальных и расчетных данных по обеим моделям A_{I}^{ζ} и A_{II}^{ζ} достаточно хорошее.

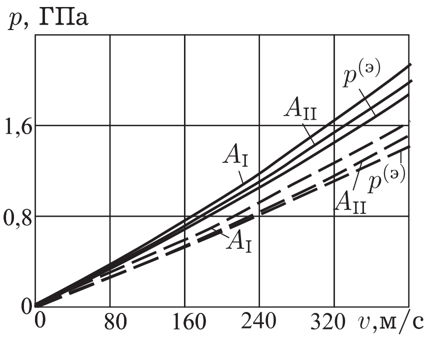

Рис. 8.26. Расчетные и экспериментальные ударные адиабаты в координатах (p, v) для песчаных грунтов: сплошные кривые — влажный песок, прерывистые — сухой

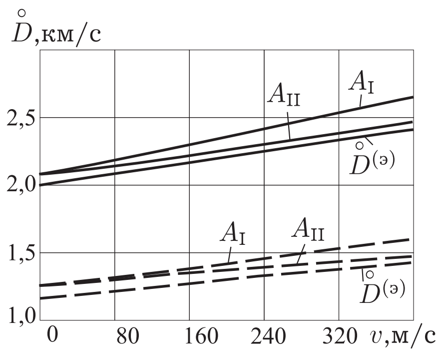

Рис. 8.27. Ударные адиабаты в координатах (D^o, v) для песчаных грунтов: сплошные кривые — влажный песок, прерывистые — сухой

Часто ударную адиабату представляют еще в одной форме — в виде зависимости скорости $\overset{\circ}{D}$ от скорости удара v. Для того, чтобы получить такую функцию $\overset{\circ}{D}(v)$, следует воспользоваться формулами (8.56а) и (8.57) и подставить в них найденную выше зависимость $p = p(k) = p(k(v)) = p(v)$, в результате получим

$$\overset{\circ}{D} = \frac{p(v)}{\overset{\circ}{\rho} v} \tag{8.76}$$

— искомую форму ударной адиабаты. На рис. 8.27 представлены расчетные ударные адиабаты $\overset{\circ}{D}(v)$ для песчаных грунтов, вычисленные по формуле (8.76), а также экспериментальные ударные адиабаты $\overset{\circ}{D}{}^{(\text{э})}(v)$. Совпадение расчетных и экспериментальных данных также достаточно хорошее.

8.9. Модели вязкопластических сред

8.9.1. Понятие о вязкопластических средах. Ранее в гл. 6 были рассмотрены модели фойгтовских сред скоростного типа, а в п. 6.4.4 было показано, что эти модели могут применяться для описания эффекта ползучести некоторых твердых сред. Недостаток фойгтовских моделей состоит в том, что они не содержат упругих деформаций, поэтому с их помощью не удается описать мгновенно-упругие деформации при нагружении и разгрузке (см. рис. 6.2 и 6.3). В тех случаях, когда мгновенно-упругими деформациями нельзя пренебречь по сравнению с деформациями ползучести, следует применять более сложные модели, например, модели вязкопластических сред, о которых пойдет речь в этом разделе.

Как правило, *вязкопластическими* называют среды, у которых пластические свойства (появление остаточных деформаций) зависят от времени. Рассмотренные выше в пп. 8.1.5–8.1.13 модели ассоциированных пластических сред описывают «чистые» пластические свойства, не зависящие от времени. Действительно, хотя формально время входит в определяющие соотношения (1.52) ассоциированных моделей, но от него легко избавиться, заменив дифференцирование по времени на дифференцирование по параметру нагружения (см. упр. 8.1.11).

С экспериментальной точки зрения это означает, что если мы осуществляем эксперименты на одноосное растяжение (см. разд. 8.7) с постоянной скоростью удлинения: $k_1(t) = bt$, то диаграммы деформирования в упругой и пластической областях не зависят от скорости удлинения b. Для вязкопластических сред такая зависимость имеется.

8.9.2. Модель A_n максвелловской среды скоростного типа. Рассмотрим простейшую из вязкопластических моделей — *модель A_n максвелловской среды скоростного типа*, которая формально может быть получена из соотношений (1.52), если положить, что выражение для пластической деформации имеет место для всех моментов времени, как при нагружении, так и при разгрузке. Параметр h в этом случае следует положить равным 1:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v{}^{\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{k} \varkappa_\alpha (\partial f_{v\alpha}/\partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}). \tag{9.1}$$

В этой формуле осуществлена замена обозначения пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ на $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v$, которую далее будем называть *вязкой деформацией*, а функции $\dot{\varkappa}_\alpha$ заменены на $\varkappa_\alpha$. Такую замену всегда можно сделать, поскольку функции $\dot{\varkappa}_\alpha$ в (1.48) вводились как коэффициенты пропорциональности пластических деформаций градиенту поверхности пластичности. Если для ассоциированных моделей пластических деформаций функции $\dot{\varkappa}_\alpha$ находят из самих уравнений (1.52), взамен присоединяя уравнения (1.41) поверхности пластичности, то для максвелловской среды скоростного типа уравнения (1.41) отсутствуют, а выражения для $\varkappa_\alpha$ и $f_{v\alpha}$ задают с помощью дополнительных соотношений

$$\varkappa_\alpha = \varkappa_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta), \quad f_{v\alpha} = f_{v\alpha}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p, \theta) \quad \alpha = 1, \ldots k. \tag{9.2}$$

Функции $f_{v\alpha}$ будем называть далее *вязкими потенциалами*.

Замечание 1. Если для фойгтовских сред скоростного типа тензор напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ представляет собой сумму равновесных и вязких напряжений (см.

(6.1.6)), то для максвелловских сред скоростного типа тензор деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ состоит из упругих и вязких деформаций по аналогии с (1.3):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v. \tag{9.3}$$

В *однопотенциальной модели* A_n *максвелловской среды скоростного типа* полагают, что $k = 1$, $\varkappa_1 = 1$ и $f_{v1} = f_v$, поэтому для нее

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v{}^{\bullet} = \partial f_v / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad f_v = f_v(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v, \theta). \tag{9.4}$$

К этим соотношениям следует присоединить соотношения для тензора упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$, например (1.59).

Эту систему соотношений можно также записать с помощью инвариантов:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_v = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \pi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}, \qquad \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{z} \varphi_\gamma I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}, \tag{9.5}$$

где π_α и φ_γ — скалярные функции, представляющие собой производные от пластического и упругого потенциалов f_v и ζ по инвариантам:

$$\pi_\alpha = \partial f_v / \partial J^{(s)v}_\alpha, \quad f_v = f_v(J^{(s)}_\alpha, \theta), \quad J^{(s)}_\gamma = J^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v), \quad J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}} = \partial J^{(s)}_\alpha / \partial \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \tag{9.6}$$

$$\varphi_\gamma = -\partial \zeta / \partial I^{(s)}_\gamma, \quad \zeta = \zeta(I^{(s)}_\gamma, \theta), \quad I^{(s)}_\gamma = I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \quad I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}} = \partial I^{(s)}_\gamma / \partial(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho). \tag{9.7}$$

В силу принципа Онзагера, пластический потенциал f_v является квадратичной функцией от линейных инвариантов $J^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v)$ и линейной функцией от квадратичных инвариантов $J^{(s)}_\gamma$.

8.9.3. Модель изотропных максвелловских сред скоростного типа. Для изотропных максвелловских сред скоростного типа совместные инварианты $J^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v)$ могут быть выбраны в виде (1.75), тогда соотношения (9.5) принимают вид

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_v = \widetilde{\pi}_1 \mathbf{E} - \pi_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + \pi_7 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v, \tag{9.8}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \widetilde{\varphi}_1 \mathbf{E} + (\widetilde{\varphi}_2/\rho) \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} + (\varphi_3/\rho^2) \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^2, \tag{9.9}$$

где $\widetilde{\pi}_1 = \pi_1 + \psi_2 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}})$, а потенциалы зависят от следующих инвариантов:

$$f_v = f_v(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}), I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v), J^{(I)}_7(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v), \theta), \tag{9.10}$$

$$\zeta = \zeta(I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), I_2(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), I_3(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta) \tag{9.11}$$

Если пластический потенциал выбран в форме Губера–Мизеса (1.96):

$$f_v = \frac{Y_H^2}{3\mu}, \quad Y_H^2 = \frac{3}{2}\mathbf{P}_H \cdot\cdot\, \mathbf{P}_H,$$

$$\mathbf{P}_H = (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_v \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v) - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} - H_v \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v)\mathbf{E}, \quad H_v = H_{v0} Y_v^{2n_{v0}}, \tag{9.12}$$

$$Y_v^2 = \frac{3}{2}\mathbf{P}_v \cdot\cdot\, \mathbf{P}_v, \quad \mathbf{P}_v = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v - \frac{1}{3} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v)\mathbf{E},$$

где H_{v0}, n_{v0} и μ — константы, то, повторяя выкладки из п. 8.1.8, соотношения (9.7) можно привести к следующему виду:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_v^{\bullet} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{P}_T - H_v \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v), \quad I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v) = 0. \tag{9.13}$$

Для изотропных сред с линейной упругостью соотношения (9.9) с учетом аддитивного соотношения (1.3) можно записать следующим образом (см. упр. 8.1.9):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}} = J l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2 J l_2 (\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} - \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v). \tag{9.14}$$

Система уравнений (9.13), (9.14) представляет собой модель A_n изотропной максвелловской среды скоростного типа с потенциалом Губера–Мизеса.

8.9.4. Модель A_n вязкопластических сред. Будем говорить, что рассматривается общая *модель* A_n *вязкопластических сред*, если аддитивное соотношение (1.3) заменяется на следующее:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}} = \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p + \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v, \tag{9.15}$$

т.е. тензор деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}$ в этой модели представляет собой сумму трех слагаемых: упругой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e$, пластической деформации $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p$ и *вязкой деформации* $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_v$. Для упругой и пластической деформаций полагаем выполненными те же соотношения, что и для «чистых» пластических сред (см. разд. 8.1), например, для *ассоциированной модели* A_n *вязкопластических сред* имеют место соотношения (1.74):

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_e = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \tag{9.16а}$$

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}_p^{\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \psi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \tag{9.16б}$$

$$\zeta = \zeta(I^{(s)}_\gamma(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}/\rho), \theta, w^p_\beta), \quad \gamma = 1, \ldots r, \tag{9.16в}$$

$$f_\beta = f_\beta(J^{(s)}_\alpha(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}_p), \theta, w^p_\beta), \tag{9.16г}$$

$$\varphi_\gamma = -\frac{\partial\zeta}{\partial I^{(s)}_\gamma}, \qquad I^{(s)}_{\gamma\mathbf{T}} = \frac{\partial I^{(s)}_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho)}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{T}}/\rho}, \qquad \psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{k} \dot{\varkappa}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial J^{(s)}_\alpha}, \tag{9.16д}$$

а для вязкой деформации полагаем, что имеют место те же соотношения (9.5), (9.6), что и для максвелловских сред скоростного типа:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{v} = \sum_{\alpha=1}^{z_1} \pi_\alpha J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}}, \tag{9.17}$$

$$\pi_\alpha = \partial f_v/\partial J^{(s)}_\alpha, \quad f_v = f_v(J^{(s)}_\alpha, \theta), \quad J^{(s)}_\gamma = J^{(s)}_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{T}}, \overset{(n)}{\mathbf{C}}_v), \quad J^{(s)}_{\alpha\mathbf{T}} = \partial J^{(s)}_\alpha/\partial\overset{(n)}{\mathbf{T}}. \tag{9.18}$$

8.9.5. Модель A_n изотропных вязкопластических сред. Используя результаты п. 8.1.7 и разд. 8.9, из (9.17), (9.18) получаем, что для изотропных вязкопластических сред имеет место система соотношений (1.81)–(1.83), (9.8)–(9.11). Если для пластических и вязкого потенциалов выбирается модель Губера–Мизеса (1.96) и (9.12), а для упругой деформации применяется модель с линейной упругостью, то из (9.17) и (9.18) получаем следующую систему соотношений:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = Jl_1 I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2Jl_2(\overset{(n)}{\mathbf{C}} - \overset{(n)}{\mathbf{C}}_p - \overset{(n)}{\mathbf{C}}_v), \tag{9.19}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{p} = \frac{\dot{\varkappa} h}{\sigma_s^2}(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}})\mathbf{E} - H\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p), \quad I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_p) = 0, \tag{9.20}$$

$$f = \frac{1}{3}(Y_H/\sigma_s)^2 - 1 = 0, \qquad H = H_0 Y_p^{2n_0},$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}_{v} = \frac{1}{\mu}(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - \frac{1}{3}I_1(\overset{(n)}{\mathbf{T}}) - H_v\overset{(n)}{\mathbf{C}}_v), \quad I_1(\overset{(n)}{\mathbf{C}}_v) = 0, \quad H_v = H_{v0}Y_v^{2n_{v0}}, \tag{9.21}$$

где инварианты Y_H, Y_p и Y_v выражаются по формулам (1.85), (1.87) и (9.12).

8.9.6. Задача о растяжении бруса из максвелловской среды скоростного типа. Рассмотрим в качестве примера задачу об одноосном растяжении бруса из максвелловской среды скоростного типа, которое описывает закон движения (7.1). Градиент деформации $\mathbf{F}$, тензоры деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_e$ определяем по формулам (7.2)–(7.6), (7.15). Для вязких деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}}_v$ имеем формулы, аналогичные формулам (7.8), (7.19) для пластических деформаций:

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}_v = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{}{}^{v}_{\alpha\alpha}\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{9.22}$$

$$\overset{(n)}{C}_{\alpha\alpha} = \overset{(n)}{C}{}^{e}_{\alpha\alpha} + \overset{(n)}{C}{}^{v}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{9.23}$$

$$\overset{(n)}{C}{}^{v}_{33} = \overset{(n)}{C}{}^{v}_{22} = -\frac{1}{2}\overset{(n)}{C}{}^{v}_{11}. \tag{9.24}$$

Тензоры напряжений $\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}$ являются диагональными, для них выполняются соотношения (7.9)–(7.15), в частности, для компоненты σ_{11} имеет место следующее выражение:

$$\sigma_{11} = k_1^{n-\mathrm{III}} JE(\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11} - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}). \tag{9.25}$$

Подставляя (9.22) в (9.13), получаем следующее уравнение для вязкой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}$:

$$\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11} = \frac{1}{\mu}\Bigl(\frac{2}{3}k_1^{\mathrm{III}-n}\sigma_{11} - H\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\Bigr), \tag{9.26}$$

$$H_v = H_{v0}Y_p^{2n_{v0}}, \quad Y_p^2 = \Bigl(\frac{3}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\Bigr)^2. \tag{9.27}$$

Изменение плотности определяется тем же соотношением (7.29):

$$J = \frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}} = \frac{1}{k_1}\Bigl(1 - \nu(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - (n - \mathrm{III})\bigl(\frac{1}{2} - \nu\bigr)\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\Bigr)^{-2/(n-\mathrm{III})}. \tag{9.28}$$

Если подставить формулу (9.25) в (9.26) и учесть выражение (7.4) для $\overset{(\mathrm{n})}{C}_{11}$, то получим окончательное уравнение для вязкой деформации $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}$:

$$\frac{d}{dt}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11} = \frac{1}{\mu}\Bigl(\frac{2}{3}JE\Bigl(\frac{1}{n-\mathrm{III}}(k_1^{n-\mathrm{III}} - 1) - \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\Bigr) - H_{v0}\bigl(\frac{3}{2}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\bigr)^{2n_{v0}}\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}\Bigr). \tag{9.29}$$

Если задана функция удлинения бруса $k_1(t)$, то после решения этого уравнения напряжение σ_{11} находим из уравнения (9.25).

Если же, как в задаче ползучести (см. п. 6.4.4), задано напряжение $\sigma_{11}(t)$, то из уравнения (9.25) численным образом находим зависимость $k_1 = k_1(\sigma_{11}, \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11})$, а затем, воспользовавшись уравнением (9.26), вычисляем вязкую деформацию $\overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11}$. Окончательное выражение для удлинения $k_1(t)$ находим, еще раз воспользовавшись зависимостью $k_1(\sigma_{11}, \overset{(\mathrm{n})}{C}{}^v_{11})$.

Рассмотренная модель изотропной максвелловской среды скоростного типа содержит 5 материальных констант: E, ν, μ, H_{v0}, n_{v0}. Модуль упругости находим по начальному участку диаграммы деформирования $\sigma_{11}(k_1)$ при заданном удлинении $k_1(t)$, когда влиянием вязких деформаций можно пренебречь. Коэффициент Пуассона, как и для упругих сред, находим с помощью соотношения (7.15) также при «малых» временах, когда вязкие деформации малы. Оставшиеся 3 константы: μ, H_{v0} и n_{v0} — можно найти, используя экспериментальные кривые ползучести при заданном напряжении $\sigma_{11}(t)$, изменяющемся по ступенчатому закону (6.4.10).

На рис. 8.28 представлены результаты аппроксимации экспериментальной кривой ползучести никелевого сплава $|\delta_1^{(\ )}(t)|$ при температуре 1100 °C с помощью уравнений (9.25), (9.26) для разных моделей A_n. Константы H_{v0} и

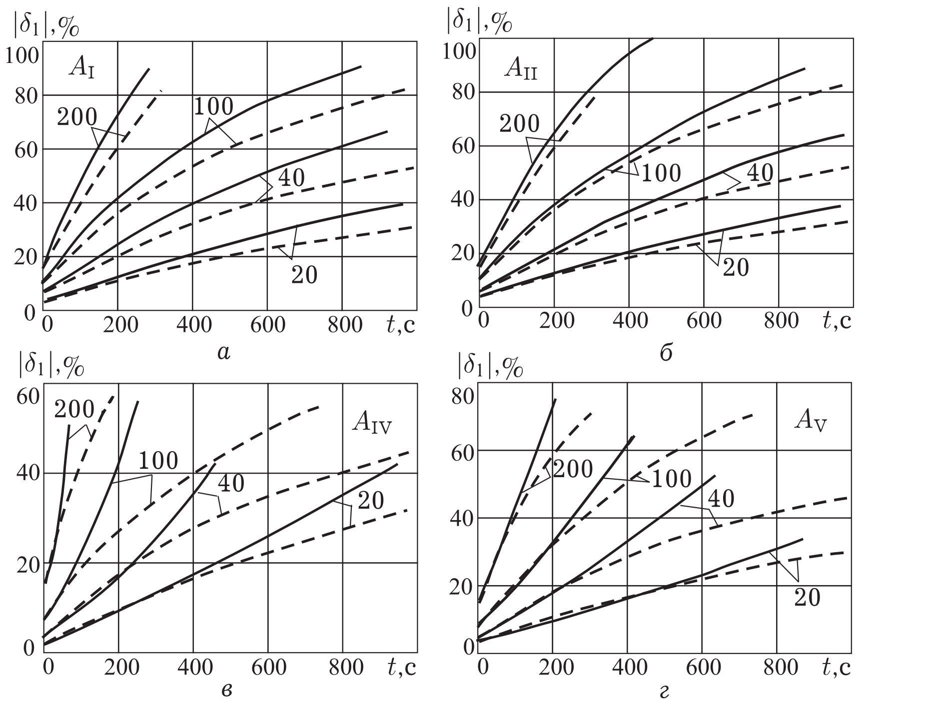

Рис. 8.28. Кривые ползучести для никелевого сплава при температуре 1100 °C и различных значениях сжимающего напряжения σ^o: прерывистые кривые — экспериментальные данные, сплошные — расчет по разным моделям A_n максвелловских сред скоростного типа (*а* — модель A_{I}, *б* — A_{II}, *в* — A_{IV}, *г* — A_{V})

n_{v0} в этих расчетах были выбраны равными нулю, а коэффициент вязкости μ определялся путем минимизации среднеквадратического отклонения расчетной $|\delta_1(t)| = |k_1(t) - 1|$ и экспериментальной $|\delta_1^{(\ )}(t)|$ кривых ползучести при $\sigma^o = -20$ МПа и для нескольких моментов времени (см. п. 6.4.3). Были получены следующие значения констант: $E = 2$ ГПа для всех моделей A_n, $\mu = 40$ ГПа/с для $n = \mathrm{I}$, $\mu = 42$ ГПа/с для $n = \mathrm{II}$, $\mu = 55$ ГПа/с для $n = \mathrm{IV}$ и $\mu = 60$ ГПа/с для $n = \mathrm{V}$. На том же рис. 8.28 представлены расчетные и экспериментальные кривые ползучести при различных значениях напряжения σ^o. Наилучшее качество аппроксимации кривых обеспечивала модель A_{II} (рис. 8.28*б*).

Упражнения к 8.9

Упражнение 8.9.1. Показать, что модель изотропной вязкопластической среды (9.12), (9.13) для случая $H_0 = 0$ можно представить в виде следующего дифференциального соотношения:

$$\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}{}^{\bullet} = J(l_1 I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet}) + \frac{2l_2}{3\mu} I_1(\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}))\mathbf{E} + 2Jl_2 \overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{C}}{}^{\bullet} - \Big(\frac{2Jl_2}{\mu} - \frac{\dot J}{J}\Big)\overset{(\mathrm{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \frac{\dot J}{J} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}.$$

Список литературы

1. *Бабкин А.В., Селиванов В.В.* Прикладная механика сплошной среды. В 3-х тт. Т.1. Основы механики сплошных сред/ Под ред. В.В.Селиванова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1998. 368 с.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2008. 312 с.
3. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
4. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
5. Введение в механику сплошной среды / Под.ред. *Черных К.Ф.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 278 с.
6. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
8. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А.* Механика сплошной среды. Ч. 1. М.: Наука, Физматлит, 2000. 256 с.
9. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. М.: Наука, 2000. 216 с.
10. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965, 455 с.
11. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
12. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
13. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 400 с.
14. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
15. *Зарубин В.С., Селиванов В.В.* Вариационные и численные методы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1993. 360 с.
16. *Зверев И.Н., Смирнов Н.Н.* Газодинамика горения. М.: Изд-во МГУ, 1987. 308 с.
17. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
18. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
19. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П.* Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1979. 200 с.
20. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наукова думка, 1984. 320 с.
21. *Коларов Л., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 304 с.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
23. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1954. 260 с.
25. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
26. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошной среды. М.: Мир, 1974. 318 с.
27. Механика сплошных сред в задачах / Под ред. *Эглит М.Э.* М.: Московский лицей, 1996. Т. 1, 2. 394 с.
28. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
29. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука СО, 1979. 271 с.

30. *Овсянников Л.В.* Введение в механику сплошных сред. Ч. 1. Общее введение. Ч. 2. Классические модели механики сплошных сред. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 70 с.
31. *Петкевич В.В.* Основы механики сплошных сред. УРСС, 2001. 400 с.
32. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 286 с.
33. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1984. 366 с.
34. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
35. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
36. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр.лит-ры, 1965. 312 с.
37. Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород /Под ред. *Евлева Д.Д., Морозова Н.Ф.* М.: Физматлит, 2006. 864 с.
38. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965. 386 с.
39. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
40. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с. Т. 2. 576 с.
41. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975. 592 с.
42. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
43. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
44. *Шемякин Е.И.* Введение в теорию упругости. М.: Изд-во МГУ, 1993. 93 с.
45. *Batra R.C.* Elements of Continuum Mechanics. AIAA (American Institute of Aeronautics & Ast, 2005. 325 p.
46. *Basar Y., Weichert D.* Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Springer, 2000. 193 p.
47. *Bonet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press, 1997. 246 p.
48. *Borg S.F.* Matrix Tensor Methods in Continuum Mechanics. World Scientific Pub. Co. Inc, 1990. 320 p.
49. *Bowen R.M.* Introduction to Continuum Mechanics for Engineers. Plenum Press, 1989. 298 p.
50. *Calcote L.R.* Introduction to Continuum Mechanics. D.Van Nostrand, 1968. 228 p.
51. *Chadwick P.* Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems. Dover Publications, 1999. 200 p.
52. *Coleman B.D.* Thermodynamics of materials with memory // Arch. rat. Mech. Anal. 1964. V. 17, № 1. P. 1–46.
53. *Cotter B.A., Rivlin R.S.* Tensors associated with time-dependent stress // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13, № 2. P. 177–182.
54. *Dimitrienko Yu.I.* Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions. Kluwer Academic Publishers, 2002. 662 p.
55. *Ericksen J.L., Rivlin R.S.* Large elastic deformations of homogeneous anisotropic elastic materials // Journ. Rational Mech. and Anal. 1954. V. 3, № 3. P. 281-—301.
56. *Eringen A.C.* Nonlinear Theory of Continuous Media. New York: McGraw-Hill, Book Co., 1962.
57. *Eringen A.C.* Mechanics of continuum. New York: Wiley, 1967. 397 p.
58. *Ferrarese G., Bini D.* Introduction to Relativistic Continuum Mechanics (Lecture Notes in Physics). Springer, 2007.
59. *Fung Y.C.* A First Course in Continuum Mechanics. Prentice Hall, 1977. 340 p.
60. *Green A.E., Zerna W.* Theoretical elasticity. Oxford Univ. Press, 1954.
61. *Godunov S.K., Romenskii E.I.* Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws. Springer, 2003. 266 p.
62. *Goldstein R.V., Entov V.M.* Qualitative Methods in Continuum Mechanics. Longman Publishing Group, 1994. 296 p.
63. *Gonzalez O., Stuart A.M.* A First Course in Continuum Mechanics (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge University Press, 2007. 400 p.

64. *Gurtin M.E.* Introduction to Continuum Mechanics (Mathematics in Science and Engineering). Academic Press, 1981. 265 p.
65. *Gurtin M.E.* Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics. Springer, 1999. 272 p.
66. *Heinbockel J.H.* Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics. Trafford Publishing, 2001. 432 p.
67. *Hill R.* Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain // Proc.Roy.Soc., London, 1970. A314. P.1519.
68. *Holzapfel G.A.* Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley, 2000. 455 p.
69. *Jaumann G.* Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig, 1905.
70. *Jaunzemis W.* Continuum Mechanics. The Macmillan Company, 1967. 800 p.
71. *Jog C.S.* Continuum Mechanics. Alpha Science Int. Ltd, 2007. 268 p.
72. *Lai W.M., Rubin D., Krempl E.* Introduction to Continuum Mechanics. Butterworth-Heinemann, 1995. 570 p.
73. *Leigh D.C.* Nonlinear Continuum Mechanics. New York: McGrawHill Book Co., 1968.
74. *Liu I-Shih.* Continuum Mechanics. Springer, 2002. 297 p.
75. *Malvern L.E.* An introduction to the mechanics of a continuous media. Inglewood Cliff: Prentice-Hall, 1970.
76. *Mase G.E.* Continuum Mechanics for Engineers. CRC, 1999. 377 p.
77. *McDonald P.H.* Continuum Mechanics (PWS Series in Engineering). PWS Pub. Co., 1995. 640 p.
78. *Murnaghan F.D.* Finite deformation of an elastic solid. New York: John Wiley, Chapman, 1951.
79. *Nemat-Nasser S.* On nonequilibrium thermodynamics of continua // Mechanics tooday. New York, 1975. V. 2. P. 94–158.
80. *Noll W.* The foundations of Mechanics and Thermodynamics. (Selected papers). Berlin: Springer-Verlag, 1974.
81. *Oldroyd J.G.* On the formulation of rheological equations of State // Proc. Roy Soc. 1950. V. 200, № 1063. P. 523-—541.
82. *Onsager Lars.* Reciprocal relations in irreversible processes, ch.1 // Phys. Rev. 1931. V. 37, № 2. P. 405-—426.
83. *Onsager Lars.* Reciprocal relations in irreversible process, ch.2 // Phys. Rev., Second series. 1931. V. 38, № 12. P. 2265-—2279.
84. *Reddy J.N.* An Introduction to Continuum Mechanics. Cambridge University Press, 2007.
85. *Roberts A.J.* A One-Dimensional Introduction to Continuum Mechanics. World Scientific Publishing Company, 1994. 162 p.
86. *Roy M.* Mecanique des millieux continus et deformables. Gauthier—-Villars, 1950. T. 1, 2.
87. *Smith D.R.* An Introduction to Continuum Mechanics (Solid Mechanics and Its Applications). Springer, 1999. 368 p.
88. *Spencer A.J.M.* Continuum Mechanics. Dover Publications, 2004. 192 p.
89. *Talpaert Y.R.* Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer, 2003. 612 p.
90. *Temam R., Miranville A.* Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. Cambridge University Press, 2005. 354 p.
91. *Truesdell C.A.* The Elements of Continuum Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1965.
92. *Truesdell C.A.* Rational Thermodynamic. New York: McGrawHill Book Co., 1969.
93. *Truesdell C.A., Noll W.* The Nonlinear-Field Theories of Mechanics. Springer, 2003. 602 p.
94. *Valanis K.S.* Irreversible thermodynamics of continuous media. New York: Springer, 1971. 172 p.
95. *Vardoulakis I., Eftaxiopoulos D.* Engineering Continuum Mechanics: With Applications from Fluid Mechanics, Solid Mechanics and Traffic Flow. Springer, 2007. 250 p.
96. *Wu Han-Chin.* Continuum Mechanics and Plasticity (CRC Series-Modern Mechanics and Mathematics). Chapman & Hall/CRC, 2004. 704 p.
97. *Ziegler H.* An introduction to thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1977. 308 p.

Предметный указатель

Учебное издание

ДИМИТРИЕНКО Юрий Иванович

НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Редактор *О.В. Салецкая*
Оригинал-макет: *Автор*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 19.05.09. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 50,7. Уч.-изд. л. 51. Тираж 700 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени
типографии им. Скворцова-Степанова ФГУП Издательство «Известия»
Управления делами Президента Российской Федерации.
Генеральный директор Э.А. Галумов
127994, ГСП-4, г. Москва, К-6, Пушкинская пл., д. 5.
Контактные телефоны: 694-30-20, 694-36-36. e-mail: izd.izv@ru.net
Заказ №

ISBN 978-5-9221-1110-2

9 785922 111102