Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов

Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2010

УДК 539.3+620.22(075.8)
ББК 22.251+30.3
Д47

Рецензенты: *А. В. Плюснин*, *И. В. Станкевич*

Димитриенко Ю. И.

Д47 Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов : учеб. пособие / Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. — 66, [2] с. : ил.

Изложены основы метода асимптотического осреднения (метода Бахвалова — Победри) для задач теории упругости, а также основы метода конечных элементов для решения локальных задач теории упругости на «ячейке периодичности» и расчета эффективных упругих характеристик композитов. Даны вариационные формулировки задач теории упругости и задач на «ячейке периодичности». Представлены оригинальные результаты относительно метода решения локальных задач. Приведены примеры численного решения локальных задач и результаты моделирования полей микронапряжений для различных типов композиционных материалов: однонаправленно-армированных, 3D ортогонально-армированных, армированных по диагоналям куба и тканевых. Представлены результаты численного расчета полей концентрации микронапряжений в компонентах композитов.

Для студентов старших курсов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная механика», «Материаловедение», «Ракетостроение и космонавтика», изучающих дисциплины «Численные методы» и «Вычислительная механика».

УДК 539.3+620.22(075.8)
ББК 22.251+30.3

© МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010

Введение

Композиционными материалами (композитами) обычно называют неоднородные материалы, у которых имеется ярко выраженная внутренняя структура, обнаруживаемая даже человеческим глазом и близкая по форме к регулярной, т. е. самоповторяющаяся. Такие композиционные материалы известны человечеству очень давно, например древнейший строительный материал — древесина, обладающий самоповторяющейся внутренней структурой — годовыми кольцами. Композитом можно считать и кирпичную кладку, так как у нее периодическая структура, образованная сочетанием кирпичей и соединяющего их раствора. Природными композитами считают многие грунты, например глину, содержащую щебенку, и даже песок, поскольку у него также имеется внутренняя структура, образованная поверхностями отдельных песчинок. А вот металлы и сплавы обычно не считают композитами, так как человеческий глаз не обнаруживает их внутренней структуры — металлических зерен, и визуально металлы и сплавы кажутся однородными. Составные части композитов обычно называют компонентами, или фазами.

Приведенные примеры показывают, что данное выше определение композиционных материалов в значительной мере отражает сложившиеся традиции. Более точное математическое определение композитов было предложено Б. Е. Победрей [1], согласно которому композит — это материал, для описания свойств которого применяют математическую модель с разрывными функциями, характеризующими его неоднородную внутреннюю структуру. Согласно этому определению металлы и сплавы тоже можно полагать композитами, если ставится задача установить связь внутренней зернистой структуры с их свойствами.

С появлением нового направления в науке о материалах — наноматериалов и нанотехнологий — математическое определение композитов становится более предпочтительным, поскольку возникает необходимость исследовать «очень тонкую» внутреннюю структуру материалов, которая может быть установлена только специальной аппаратурой, например туннельными сканирующими микроскопами. В этом смысле даже традиционно считавшиеся однородными

материалы удобно рассматривать как композиты, с тем чтобы использовать математический аппарат, созданный для моделирования поведения композиционных материалов. Поэтому, не преувеличивая, можно сказать, что современная наука о материалах — это наука о композиционных материалах.

Одной из основных математических задач в современной науке о материалах является задача моделирования свойств материалов (их обычно называют эффективными, или макроскопическими, свойствами) по свойствам составляющих их компонентов. Этой проблеме посвящено значительное число работ; среди многих исследований отечественных ученых, внесших значительный вклад в решение проблемы моделирования свойств композитов, отметим исследования Победри Б. Е. [1], Бахвалова Н. С. [2], Ванина Г. А. [3], Малмейстера А. К., Тамужа В. П., Тетерса Г. А. [4], Тарнопольского Ю. М., Жигуна И. Г., Полякова В. А. [5], Васильева В. В. [6], Алфутова Н. А., Зиновьева П. А., Попова Б. Г. [7] и многих других. Среди известных зарубежных авторов в области механики композитов выделим Кристенсена Р. [8], Санчес-Паленсия Э. [9], Сендецки Дж. [10], Бенсуссаном А., Лионсом Дж., Папаниколау Г. [11] и других.

Классические методы расчета эффективных свойств композитов (см., например, [7, 8, 10, 12]) основаны на существенных предположениях о характере распределения физических полей в компонентах композита или на использовании вариационных принципов. Эти методы достаточно эффективны для композитов с простыми структурами — слоистыми, однонаправленными, но обычно не обеспечивают необходимой точности расчетов для более сложных — композитов с пространственными структурами.

Наиболее перспективным методом вычисления эффективных характеристик композитов в настоящее время, по-видимому, является метод асимптотического осреднения (МАО), предложенный Н. С. Бахваловым [12] в 1974 г. и развитый затем Б. Е. Победрей [1], Санчес-Паленсия Э. [9], Бенсуссаном А., Лионсом Дж., Папаниколау Г. [11] и другими авторами. Этот метод, который в отечественной литературе часто называют методом Бахвалова — Победри, а в зарубежной — Asymptotic Homogenization Method, позволяет

найти точные в математическом смысле эффективные характеристики с помощью решения так называемых локальных задач — «задач на ячейке периодичности». Однако они являются достаточно сложными даже для численных методов, так как имеют смешанный интегродифференциальный тип и неклассические граничные условия периодического типа. Именно поэтому до недавнего времени имелось лишь несколько примеров решения этих задач для сравнительно простых структур: слоистых, однонаправленных (1D) и двунаправленных (2D) композитов [7, 13].

В работе [14] был предложен новый метод решения локальных задач, основанный на сведении их к значительно более простым задачам на $1/8$ части «ячейки периодичности». Для их решения может быть применен высокоэффективный численный метод конечных элементов.

В дальнейшем на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н. Э. Баумана возникла научная группа, которая занимается применением этого метода для исследования локальных задач в механике материалов.

Целью настоящего издания является изложение основ метода асимптотического осредения, а также знакомство читателей с численным методом решения локальных задач теории композитов.

Глава 1

Метод асимптотического осреднения для расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов

1.1. Система уравнений линейной теории упругости для периодических структур

В методе асимптотического осреднения (МАО) вводят основное предположение о том, что рассматриваемый композиционный материал имеет периодически повторяющуюся структуру (рис. 1), образованную набором минимальных элементов, называемых «ячейками периодичности» (рис. 2, где ЯП — «ячейка периодичности»).

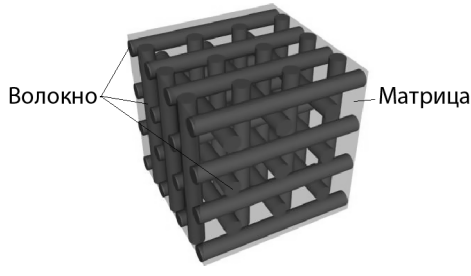


Рис. 1. Композиционный материал с периодической структурой

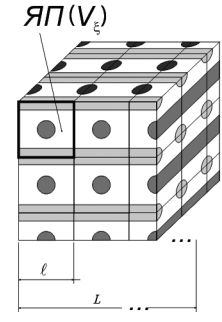


Рис. 2. «Ячейка периодичности» в композите периодической структуры

Введем L — характерный размер области, занятой композитом, и ℓ — характерный размер «ячейки периодичности». С учетом того, что $L^3 = \ell^3 N$, где N — количество ячеек периодичности, которое предполагается большим ($N \gg 1$), можно ввести малый параметр

$$\varkappa = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \ll 1. \tag{1.1}$$

Если «ячейка периодичности» представляет собой не куб, а параллелепипед с длиной сторон $\ell_1 = \ell$; ℓ_2; ℓ_3, и характерные раз-

меры всего композита по координатным направлениям составляют $L_1 = L$; L_2; L_3, то количество «ячеек периодичности» равно:

$$N = \frac{L^3}{\ell^3} K,$$

где $K = \dfrac{b_2 b_3}{a_2 a_3}$, $a_i = \dfrac{\ell_i}{\ell}$, $b_i = \dfrac{L_i}{L}$, $i = 2, 3$. Малый параметр $\varkappa$ в этом случае связан с числом N соотношением:

$$\varkappa = \frac{l}{L} = \sqrt[3]{\frac{K}{N}} \ll 1.$$

Пусть x_i — декартовы координаты, тогда для периодической структуры можно ввести два типа безразмерных координат: $\bar{x}_i$ — «медленные» (глобальные) и ξ_i — «быстрые» (локальные):

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}; \quad \xi_i = \frac{\bar{x}_i}{\varkappa} = \frac{x_i}{\ell}. \tag{1.2}$$

Рассмотрим систему уравнений линейной теории упругости, состоящую из уравнений равновесия, определяющих соотношений линейной теории упругости (обобщенный закон Гука) и соотношений Коши. В декартовой системе координат в безразмерном виде эти система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \bar{x}_j} = 0; \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \\ \varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial \bar{x}_k} \right), \end{cases} \tag{1.3}$$

где σ_{ij} — безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к характерной величине напряжений σ_0 (далее будем полагать $\sigma_0 = 1$ ГПа); C_{ijkl} — безразмерные компоненты тензора модулей упругости, отнесенные к σ_0; ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций; u_i — безразмерные компоненты вектора перемещений, отнесенные к L. По повторяющимся латинским индексам везде идет суммирование [15].

Композит представляет собой структурно-неоднородную среду, и в нем имеются границы раздела отдельных компонентов,

на которых будем полагать в дальнейшем выполненными условия идеального контакта:

$$[\sigma_{ij}]n_j = 0; \quad [u_i] = 0, \tag{1.4}$$

где n_i — компоненты вектора нормали к поверхности раздела; $[u_i]$ — скачок функций при переходе через границу раздела компонентов.

На внешней границе Σ всего композита полагаем заданными перемещения u_i^e или вектор поверхностных сил S_i^e:

$$\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_1} = S_i^e; \quad u_i\big|_{\Sigma_2} = u_i^e. \tag{1.5}$$

В МАО в силу периодичности структуры композита модули упругости C_{ijkl} рассматриваются как периодические функции координат x_m: $C_{ijkl}(x_m) = C_{ijkl}(x_m + \ell_m)$, принимающие различные значения в областях, соответствующих компонентам композита. С помощью локальных координат эти соотношения можно записать в виде

$$C_{ijkl}(\xi_m) = C_{ijkl}(\xi_m + a_m), \tag{1.6}$$

где $a_m = \dfrac{\ell_m}{\ell}$ — безразмерные длины сторон «ячейки периодичности», и компоненты тензора модулей упругости C_{ijkl} можно представить как периодические функции от «быстрых» координат.

Согласно общей концепции МАО функции $f = \{u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}\}$ для композита рассматриваются как квазипериодические, т. е. зависящие от «медленных» координат $\bar{x}_m$ и от «быстрых» координат ξ_m и являющиеся периодическими по ξ_k ($\bar{x}_m$ и ξ_k полагают независимыми):

$$f(\bar{x}_m, \xi_k) = f(\bar{x}_m, \xi_k + a_k), \quad \bar{x}_m \in \bar{V}, \quad \xi_k \in V_\xi, \tag{1.7}$$

где $\bar{V}$ — область изменения «медленных» координат, соответствующая с точностью до масштаба L исходной области композита V в координатах x_m; V_ξ — «ячейка периодичности», т. е. прямоугольный параллелепипед, центр симметрии которого удобно совместить с началом координат:

$$V_\xi = \left\{\xi_k\colon\ -\frac{a_1}{2} < \xi_1 < \frac{a_1}{2};\ -\frac{a_2}{2} < \xi_2 < \frac{a_2}{2};\ -\frac{a_3}{2} < \xi_3 < \frac{a_3}{2}\right\}. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) следует, что на границе «ячейки периодичности» выполняются следующие условия периодичности:

$$f\Big(\bar{x}_j,\, -\frac{a_1}{2},\, \xi_2,\, \xi_3\Big) = f\Big(\bar{x}_j,\, \frac{a_1}{2},\, \xi_2,\, \xi_3\Big); \quad j = 1,\, 2,\, 3; \tag{1.9}$$

$$f\Big(\bar{x}_j,\, \xi_1,\, -\frac{a_2}{2},\, \xi_3\Big) = f\Big(\bar{x}_j,\, \xi_1,\, \frac{a_2}{2},\, \xi_3\Big); \quad j = 1,\, 2,\, 3; \tag{1.10}$$

$$f\Big(\bar{x}_j,\, \xi_1,\, \xi_2,\, -\frac{a_3}{2}\Big) = f\Big(\bar{x}_j,\, \xi_1,\, \xi_2,\, \frac{a_3}{2}\Big); \quad j = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.11}$$

Далее будем обозначать каждое из этих условий периодичности по координате ξ_α так:

$$[\![f]\!]_\alpha = f\big|_{\xi_\alpha = 1/2} - f\big|_{\xi_\alpha = -1/2} = 0, \tag{1.12}$$

а совокупность всех условий периодичности — так: $[\![f]\!] = 0$.

Квазипериодические функции вида (1.7) дифференцируют по правилу дифференцирования сложной функции, причем после такого формального дифференцирования аргументы $\bar{x}^j$ и ξ^k полагают независимыми. В результате правило дифференцирования квазипериодических функций выглядит так:

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i} \to u_{j,i} + \frac{1}{\varkappa}\, u_{j/i}, \tag{1.13}$$

где производные по «быстрым» и «медленным» координатам обозначены соответственно: $u_{j,i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i}$, $u_{j/i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial \xi_i}$.

1.2. Асимптотическое разложение системы уравнений линейной теории упругости

Согласно методу Бахвалова — Победри решение системы уравнений теории упругости (1.3) для периодических структур ищем в виде асимптотических разложений по малому параметру $\varkappa$:

$$u_k(\bar{x}_i,\, \xi_j) = u_k^{(0)}(\bar{x}_i) + \varkappa u_k^{(1)}(\bar{x}_i,\, \xi_j) + \varkappa^2 u_k^{(2)}(\bar{x}_i,\, \xi_j) + \ldots = \\ = u_k^{(0)}(\bar{x}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n u_k^{(n)}(\bar{x}_i,\, \xi_j). \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в соотношения Коши и используя правило дифференцирования (1.13), получаем асимптотическое разложение для деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \varepsilon_{ij}^{(n)}, \tag{1.15}$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{(n+1)} + u_{j/i}^{(n+1)}\right), \quad \forall n \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Подставляя разложение (1.14) в определяющее второе соотношение системы (1.3), получаем асимптотическое разложение для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \sigma_{ij}^{(n)}, \tag{1.17}$$

где

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{kl}^{(n)}, \quad \forall n \geqslant 0. \tag{1.18}$$

Подставляя (1.18) в первое уравнение системы (1.3) с учетом правила (1.13), получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия:

$$\frac{1}{\varkappa}\sigma_{ij/j}^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \left(\sigma_{ij,j}^{(n)} + \sigma_{ij/j}^{(n+1)}\right) = 0. \tag{1.19}$$

Приравнивая нулю члены при одинаковых степенях малого параметра $\varkappa$, получаем рекуррентную систему уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij/j}^{(0)} = 0; \tag{1.20}$$

$$\sigma_{ij,j}^{(0)} + \sigma_{ij/j}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{ij,j}^{(n)} + \sigma_{ij/j}^{(n+1)} = 0; \quad n > 0. \tag{1.21}$$

Уравнения (1.20), (1.21) называют локальными уравнениями равновесия.

1.3. Осреднение по «ячейке периодичности»

Для квазипериодической функции $f(\bar{x}_i, \xi_j)$ вводят операцию осреднения по «ячейке периодичности»:

$$\langle f \rangle = \int\limits_{V_\xi} f\, dV = \int\limits_{-a_1/2}^{a_1/2} \int\limits_{-a_2/2}^{a_2/2} \int\limits_{-a_3/2}^{a_3/2} f(\bar{x}_i, \xi_j)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \langle f \rangle(\bar{x}_i), \tag{1.22}$$

где a_i — размеры «ячейки периодичности» по трем осям («ячейка периодичности» имеет вид параллелепипеда).

Применим операцию осреднения (1.22) для системы уравнений равновесия (1.21). Учитывая периодичность функций по «быстрым» координатам, получаем, что $\left\langle \sigma_{ij/j}^{(n)} \right\rangle = [\![\sigma_{ij}^{(n)}]\!]_j = 0$, и система уравнений (1.21) принимает вид

$$\left\langle \sigma_{ij}^{(n)} \right\rangle_{,j} = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.23}$$

Уравнения (1.23) называют осредненными уравнениями равновесия.

Таким образом, исходные уравнения равновесия (см. второе уравнение системы (1.3)) распадаются на две группы уравнений: локальные уравнения равновесия (1.21) и осредненные уравнения равновесия (1.23).

1.4. Локальная задача на «ячейке периодичности»

Присоединим к локальным уравнениям равновесия (1.21) соотношения Коши (1.16) и соотношения упругости (1.18), тогда в нулевом приближении получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sigma_{ij/j}^{(0)} = 0; \\ \varepsilon_{kl}^{(0)} = \bar{\varepsilon}_{kl} + \dfrac{1}{2}\left(u_{k/l}^{(1)} + u_{l/k}^{(1)}\right); \\ \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(0)}, \end{cases} \tag{1.24}$$

где через $\bar{\varepsilon}_{kl}$ обозначены средние деформации композита, определяемые как

$$2\bar{\varepsilon}_{ij} = u^{(0)}_{i,j} + u^{(0)}_{j,i}. \tag{1.25}$$

Присоединим к системе (1.24) граничные условия, приведенные ниже.

Условие периодичности (1.12) для перемещений $u^{(1)}_i$ и вектора напряжений $\sigma^{(0)}_{ij} n_j$:

$$[\![u^{(1)}_i]\!] = 0; \quad [\![\sigma^{(0)}_{ij}]\!] n_j = 0. \tag{1.26}$$

Условия идеального контакта на границе раздела компонентов:

$$[\sigma^{(0)}_{ij}] n_j = 0; \quad [u^{(1)}_i] = 0. \tag{1.27}$$

Условия нормировки:

$$\langle u^{(1)}_i \rangle = 0. \tag{1.28}$$

В результате получим локальную задачу теории упругости (1.24)–(1.28), называемую также задачей на «ячейке периодичности». В этой задаче неизвестными являются функции 1-го уровня $u^{(1)}_i(\bar{x}_j, \xi_k)$, а функции нулевого уровня $u^{(0)}_i(\bar{x}_j)$, так же, как и $\bar{\varepsilon}_{ij}$, рассматриваются в качестве известных входных данных задачи, для их определения служит осредненная система уравнений.

В работе [1] было установлено, что система уравнений имеет единственное решение в классе периодических функций, если к системе (1.24)–(1.27) присоединяются также условия нормировки (1.28).

1.5. Осредненные уравнения теории упругости

Пусть задача (1.24)–(1.28) решена, т. е. найдены функции $u^{(1)}_i(\bar{x}_j, \xi_k)$, зависящие параметрическим образом от $u^{(0)}_i(\bar{x}_j)$.

Для нахождения функций $u^{(0)}_i(\bar{x}_j)$ имеем осредненную систему уравнений, которая состоит из осредненных уравнений равновесия (1.21) при $n = 0$, осредненных определяющих соотноше-

ний (1.18) при $n = 0$ и соотношений Коши (1.16) при $n = 0$:

$$\begin{gathered}\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle_{,j} = 0; \quad \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(0)} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{kl}^{(0)} \rangle = \bar{\varepsilon}_{kl}; \quad 2\bar{\varepsilon}_{ij} = u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}.\end{gathered} \tag{1.29}$$

К системе (1.29) присоединяются осредненные граничные условия (1.5):

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle n_j \big|_{\Sigma_\sigma} = S_i^e; \quad u_i^{(0)} \big|_{\Sigma_u} = u_i^e. \tag{1.30}$$

Функции u_i^e и S_i^e полагают зависящими только от $\bar{x}_j$.

Глава 2

Разработка метода решения локальных задач на «ячейке периодичности»

2.1. Преобразование задачи на «ячейке периодичности» к задачам для псевдоперемещений

Несмотря на то, что задача (1.24)–(1.28) является линейной, непосредственное численное решение представляет значительные трудности в силу следующих причин.

1. Задача является интегродифференциальной и некорректно поставленной, поскольку условие нормировки (1.27) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

2. Задача содержит нестандартные периодические граничные условия, что усложняет численное решение методом конечных элементов (МКЭ), поскольку при этом значительно ухудшается обусловленность матрицы жесткости системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающей в МКЭ.

Далее изложен метод сведения задачи на «ячейке периодичности» к последовательности задач классического типа без условий периодичности и интегральных уравнений. Метод был предложен в работах [14, 26].

Запишем постановку задачи на «ячейке периодичности» (1.24)–(1.28) в ином виде, вводя специальное обозначение индексом α функций, принадлежащих областям $\tilde{V}_{\xi_\alpha}$ — различным компонентам композита:

$$\begin{cases} \sigma^\alpha_{ij/j} = 0, \;\; \varepsilon^\alpha_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \dfrac{1}{2}\,(u^\alpha_{i/j} + u^\alpha_{j/i}); & x_i \in \tilde{V}_{\xi_\alpha}; \\ \sigma^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha \varepsilon^\alpha_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^\alpha \varepsilon^\alpha_{ij}; & x_i \in \tilde{V}_{\xi_\alpha}; \\ u^\alpha_i = u^N_i, \;\; (\sigma^\alpha_{ij} - \sigma^N_{ij})n_j = 0; & x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi_\alpha N}; \\ \langle u^\alpha_i \rangle = 0, \;\; [\![u^\alpha_i]\!] = 0, \;\; [\![\sigma^\alpha_{ij}]\!] n_j = 0; & x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi_\alpha N}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Компоненты композита далее для простоты полагаем изотропными, где λ^α, μ^α — упругие постоянные Ламе компонентов компо-

зита, а также введены обозначения:

$$u_i^\alpha = u_i^{(1)}(\bar{x}_j,\, \xi_k); \quad \sigma_{ij}^\alpha = \sigma_{ij}^{(0)}(\bar{x}_j,\, \xi_k); \quad \varepsilon_{ij}^\alpha = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\bar{x}_j,\, \xi_k), \tag{2.2}$$

где $\xi_k \in \tilde{V}_{\xi_\alpha}$.

Поверхности раздела компонентов композита в «ячейке периодичности» обозначим $\tilde{\Sigma}_{\xi_{\alpha\beta}}$.

Задача (2.1) содержит шесть функций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ — входных данных. Функции $\bar{\varepsilon}_{ij}$ (средние деформации) задаются произвольно и фиксируются. Будем искать решение задачи (2.1) в виде сумм по этим шести функциям:

$$u_i^\alpha = \sum_{p,q=1}^{3} u_{i(pq)}^\alpha, \tag{2.3}$$

где функции $u_{i(pq)}^\alpha$ имеют следующий вид:

$$u_{i(pq)}^\alpha = -\frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}\xi_q + \delta_{iq}\xi_p) + U_{i(pq)}^\alpha(\xi_m), \tag{2.4}$$

где δ_{ip} — символ Кронекера.

Функции $U_{i(pq)}^\alpha$ назовем псевдоперемещениями, они представляют собой решение краевых задач линейной теории упругости классического типа. Установим эти задачи.

Вычислим деформации ε_{ij}^α через перемещения (2.4):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^\alpha &= \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\,(u_{i/j}^\alpha + u_{j/i}^\alpha) = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{3}(u_{i(pq)/j}^\alpha + u_{j(pq)/i}^\alpha) = \\
&= \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{4}\sum_{p,q=1}^{3}\bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{jp}\delta_{iq} + \delta_{jq}\delta_{ip}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{3}(U_{i(pq)/j}^\alpha + U_{j(pq)/i}^\alpha) = \\
&= \bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{3}(U_{i(pq)/j}^\alpha + U_{j(pq)/i}^\alpha).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда получим, что деформации $\varepsilon^{\alpha}_{ij}$, подобно перемещениям, представимы в виде сумм (2.3):

$$\varepsilon^{\alpha}_{ij} = \sum_{p,q=1}^{3} \varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}, \tag{2.6}$$

где $\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}$ — функции, называемые псевдодеформациями, они имеют вид

$$\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)} = \frac{1}{2}\,(U^{\alpha}_{i(pq)/j} + U^{\alpha}_{j(pq)/i}). \tag{2.7}$$

Напряжения σ^{α}_{ij} также можно представить в виде сумм:

$$\sigma^{\alpha}_{ij} = \sum_{p,q=1}^{3} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)}, \tag{2.8}$$

где псевдонапряжения $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ связаны с псевдодеформациями линейно-упругими соотношениями:

$$\sigma^{\alpha}_{ij(pq)} = \lambda^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}_{kk(pq)}\delta_{ij} + 2\mu^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}. \tag{2.9}$$

Очевидно, что псевдонапряжения будут удовлетворять уравнениям равновесия: $\sum\limits_{p,q=1}^{3} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)/j} = 0$, $x_i \in \tilde{V}_{\xi_\alpha}$. В силу линейности задачи эти уравнения эквивалентны системе уравнений равновесия:

$$\sigma^{\alpha}_{ij(pq)/j} = 0; \qquad x_i \in \tilde{V}_{\xi_\alpha}. \tag{2.10}$$

Установим теперь граничные условия для функций $U^{\alpha}_{i(pq)}$. Подставив (2.3) и (2.8) в условия на границе раздела компонентов композита в системе (1.26), получим, что эти функции удовлетворяют тем же самым условиям идеального контакта:

$$U^{\alpha}_{i(pq)} = U^{N}_{i(pq)}; \qquad (\sigma^{\alpha}_{ij(pq)} - \sigma^{N}_{ij(pq)})n_j = 0; \qquad x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi_\alpha N}. \tag{2.11}$$

Подставим теперь (2.3) в условие нормировки (1.28):

$$\langle u_i^\alpha \rangle = \sum_{p,q=1}^{3} \langle u_{i(pq)}^\alpha \rangle =$$
$$= -\sum_{p,q=1}^{3} \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}\langle \xi_q \rangle + \delta_{iq}\langle \xi_p \rangle) + \sum_{p,q=1}^{3} \langle U_{i(pq)}^\alpha \rangle = 0, \quad (2.12)$$

где треугольными скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначена операция осреднения по «ячейке периодичности», введенная ранее (см. формулу (1.22)).

Вычислив $\langle \xi_p \rangle$, получим $\langle \xi_p \rangle = 0$. Тогда из (2.12) следует, что функции $U_{i(pq)}^\alpha$ также должны удовлетворять условиям нормировки:

$$\langle U_{i(pq)}^\alpha \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Подставим, наконец, (2.3) в условие периодичности (1.26):

$$[\![u_i^\alpha]\!] = \sum_{p,q=1}^{3} [\![u_{i(pq)}^\alpha]\!] =$$
$$= -\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}[\![\xi_q]\!] + \delta_{iq}[\![\xi_p]\!]) + \sum_{p,q=1}^{3} [\![U_{i(pq)}^\alpha]\!] = 0. \quad (2.14)$$

Отсюда получим

$$[\![U_{i(pq)}^\alpha]\!] = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}[\![\xi_q]\!] + \delta_{iq}[\![\xi_p]\!]). \quad (2.15)$$

Вычислим $[\![\xi_p]\!]$, используя (1.12).

Если $p = \alpha$, то

$$[\![\xi_\alpha]\!]_\alpha = \xi_\alpha \Big|_{\xi_\alpha = a_p/2} - \xi_\alpha \Big|_{\xi_\alpha = -a_p/2} = \frac{a_p}{2} - \left(-\frac{a_p}{2}\right) = a_p.$$

Если $p \neq \alpha$, то

$$[\![\xi_p]\!]_\alpha = \xi_p \Big|_{\xi_\alpha = a_p/2} - \xi_p \Big|_{\xi_\alpha = -a_p/2} = \frac{a_p}{2} - \frac{a_p}{2} = 0.$$

Объединив эти соотношения в одно, получим $[\![\xi_p]\!]_\alpha = a_p\delta_{p\alpha}$. Тогда условия (2.15) для функции $U^\alpha_{i(pq)}$ примут вид

$$[\![U^\alpha_{i(pq)}]\!]_\beta = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(a_q\delta_{ip}\delta_{q\beta} + a_p\delta_{iq}\delta_{p\beta}), \tag{2.16}$$

т. е. псевдоперемещения $U^\alpha_{i(pq)}$ уже не являются периодическими функциями.

Из уравнений (2.7), (2.9), (2.10), (2.13), (2.15) и (2.16) следует, что функции $U^\alpha_{i(pq)}$ являются решением следующих задач на «ячейке периодичности»:

$$\begin{cases} \sigma^\alpha_{ij(pq)/j} = 0; \\ \sigma^\alpha_{ij(pq)} = \lambda^\alpha\varepsilon^\alpha_{kk(pq)}\delta_{ij} + 2\mu^\alpha\varepsilon^\alpha_{ij(pq)}; \\ \varepsilon^\alpha_{ij} = \dfrac{1}{2}\,(U^\alpha_{i(pq)/j} + U^\alpha_{j(pq)/i}); \\ U^\alpha_{i(pq)} = U^{(N)}_{i(pq)}; \\ (\sigma^\alpha_{ij(pq)} - \sigma^{(N)}_{ij(pq)})n_j = 0; \\ \langle U^\alpha_{i(pq)}\rangle = 0; \\ [\![U^\alpha_{i(pq)}]\!]_j = \dfrac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(a_q\delta_{ip}\delta_{qj} + a_p\delta_{iq}\delta_{pj}); \\ [\![\sigma^\alpha_{ij(pq)}]\!]n_j = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

2.2. Формулировка задач на $1/8$ «ячейки периодичности»

Задачи (2.17) в отличие от задачи (1.24)–(1.28) не содержат входных данных в уравнениях равновесия, а имеют входные данные — функции $\bar{\varepsilon}_{pq}$, заданные на поверхности «ячейки периодичности», но они по-прежнему содержат интегральное условие нормировки и граничные условия периодического типа. Однако для случая композитов с симметричной геометрической структурой задачи (2.17) на полной «ячейке периодичности» могут быть сведены к задачам на $1/8$ «ячейки периодичности», свободным от указанных недостатков.

Положим далее, что «ячейка периодичности» композита V_ξ (1.8) имеет геометрическую симметрию расположения компонентов

композита (областей V_{ξ_α}) относительно трехкоординатных плоскостей $(\xi_i = 0)$; кроме того, положим, что имеется и физическая симметрия, т. е. геометрически симметричные компоненты имеют и одинаковые упругие характеристики. Тогда задаче (2.17) можно поставить в соответствие задачу на $1/8$ «ячейки периодичности» (в первом координатном октанте, составляющем подобласть $\tilde{V}_\xi$: $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geqslant 0)$):

$$\begin{cases} \sigma^\alpha_{ij(pq)/j} = 0; \\ \varepsilon^\alpha_{ij(pq)} = \dfrac{1}{2}\,(U^\alpha_{i(pq)/j} + U^\alpha_{j(pq)/i}); \quad x_i \in \tilde{V}_\xi; \\ \sigma^\alpha_{ij(pq)} = C^\alpha_{ijkl}\varepsilon^\alpha_{kl(pq)} = \\ \quad = \lambda^\alpha \varepsilon^\alpha_{kk(pq)}\delta_{ij} + 2\mu^\alpha \varepsilon^\alpha_{ij(pq)}; \qquad x_i \in (\tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s); \\ U^\alpha_{i(pq)} = U^N_{i(pq)}; \\ \quad (\sigma^\alpha_{ij(pq)} - \sigma^N_{ij(pq)})n_j = 0; \qquad x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi_\alpha N}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Здесь и далее поверхности контакта компонентов внутри подобласти $\tilde{V}_\xi$ обозначены $\tilde{\Sigma}_{\xi_{\alpha\beta}} = \Sigma_{\xi_{\alpha\beta}} \cap \tilde{V}_\xi$, координатные плоскости — $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$, а торцевые поверхности «ячейки периодичности» — $\Sigma'_s = \{\xi_s = a_s/2\}$, $s = 1,\ 2,\ 3$.

Для задачи (2.18) необходимы условия на торцевых поверхностях и на плоскостях симметрии, которые различны для разных p и q. Рассмотрим эти условия.

Потребуем от функций $U^\alpha_{i(pq)}(\xi_j)$, $\xi_j \in \tilde{V}_\xi$ удовлетворения следующим граничным условиям на торцевых поверхностях Σ'_s:

$$\begin{cases} U^\alpha_{i(pq)} = \dfrac{a_p}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip}; \;\; S^\alpha_{j(pq)i} = 0; \\ \quad S^\alpha_{k(pq)i} = 0; \;\; \xi_m \in \Sigma'_i; \qquad i \neq j \neq k \neq i; \;\; p = q; \\ U^\alpha_{i(pq)} = \dfrac{a_p}{4}\,\bar{\varepsilon}_{ip}\delta_{ip}; \;\; S^\alpha_{j(pq)j} = 0; \\ \quad U^\alpha_{k(pq)} = 0; \;\; \xi_m \in \Sigma'_j; \qquad i \neq j \neq k \neq i; \;\; p \neq q. \end{cases} \tag{2.19}$$

В то же время на плоскостях симметрии Σ_s потребуем от функций $U^\alpha_{i(pq)}(\xi_j)$, $\xi_j \in \tilde{V}_\xi$ удовлетворения аналогичным условиям,

но с нулевой правой частью:

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{i(pq)} = 0; \;\; S^{\alpha}_{j(pq)i} = 0; \\ \quad S^{\alpha}_{k(pq)i} = 0; \;\; \xi_m \in \Sigma_s; \quad i \neq j \neq k \neq i; \;\; p = q; \\ U^{\alpha}_{i(pq)} = 0; \;\; S^{\alpha}_{j(pq)j} = 0; \\ \quad U^{\alpha}_{k(pq)} = 0; \;\; \xi_m \in \Sigma_s; \quad i \neq j \neq k \neq i; \;\; p \neq q. \end{cases} \tag{2.20}$$

Здесь введены следующие обозначения для векторов поверхностных сил $S_{i(pq)}$:

$$S_{i(pq)j} \equiv S_{i(pq)}\big|_{\Sigma_j} = \sum_{l=1}^{3} (\sigma^{\alpha}_{il(pq)} n_l)\Big|_{\Sigma_j}. \tag{2.21}$$

Подставляя (2.21) во второе и третье соотношения из (2.17), получаем

$$S_{i(pq)j} = (\sigma_{il(pq)} n_l)\big|_{\Sigma_j} = \mu^{\alpha}(U^{\alpha}_{i(pq)/j} + U^{\alpha}_{j(pq)/i}) = \mu^{\alpha} U^{\alpha}_{i(pq)/j}; \quad i \neq j; \tag{2.22}$$

$$S_{i(pq)i} = \lambda^{\alpha}(U^{\alpha}_{1(pq)/1} + U^{\alpha}_{2(pq)/2} + U^{\alpha}_{3(pq)/3}) + \mu^{\alpha} U^{\alpha}_{i(pq)/i}. \tag{2.23}$$

Здесь нет суммирования по индексу i, так как $n_i = 1$, $n_j = 0$, $\xi_m \in \Sigma'_i$ и $n_i = -1$, $n_j = 0$, $U^{\alpha}_{i(pq)/j} = 0$, где $\xi_m \in \Sigma_i$ и $i \neq j$.

Подставив (2.22), (2.23) в (2.19), (2.20), эти граничные условия можно записать через псевдоперемещения и их производные:

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{i(pq)} = \dfrac{a_p}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip}; \;\; U^{\alpha}_{j(pq)/i} = 0; & \\ \quad U^{\alpha}_{k(pq)/i} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_i; \\ & i \neq j \neq k \neq i; \\ & p = q; \\ U^{\alpha}_{i(pq)} = \dfrac{a_p}{4}\,\bar{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip}; & \\ \quad U^{\alpha}_{j(pq)/j} = 0; \;\; U^{\alpha}_{k(pq)} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_j; \\ & i \neq j \neq k \neq i; \\ & p \neq q, \end{cases} \tag{2.24}$$

а также

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{i(pq)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{j(pq)/i} = 0; \\ \quad U^{\alpha}_{k(pq)/i} = 0; & \xi_m \in \Sigma_s; \;\; i \neq j \neq k \neq i; \;\; p = q; \\ U^{\alpha}_{i(pq)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{j(pq)/j} = 0; \\ \quad U^{\alpha}_{k(pq)} = 0; & \xi_m \in \Sigma_s; \;\; i \neq j \neq k \neq i; \;\; p \neq q. \end{cases} \tag{2.25}$$

Задачи (2.18) на $1/8$ «ячейки периодичности» с граничными условиями (2.24), (2.25) (или условиями (2.20)) будем далее называть задачами L_{pq}.

2.3. Явный вид граничных условий для задач L_{pq}

Запишем явным образом условия (2.24). Рассмотрим вначале задачи L_{pq}, когда $p = q$. Граничные условия (2.24), (2.25) для задачи $L_{11}(p = q = 1)$ заданы в следующем виде:

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{1(11)} = \dfrac{a_1 \bar{\varepsilon}_{11}}{2}; \;\; U^{\alpha}_{2(11)/1} = 0; \;\; U^{\alpha}_{3(11)/1} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_1; \\ U^{\alpha}_{2(11)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(11)/2} = 0; \;\; U^{\alpha}_{3(11)/2} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_2; \\ U^{\alpha}_{3(11)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(11)/3} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(11)/3} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_3; \\ U^{\alpha}_{1(11)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(11)/1} = 0; \;\; U^{\alpha}_{3(11)/1} = 0; & \xi_m \in \Sigma_1; \\ U^{\alpha}_{2(11)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(11)/2} = 0; \;\; U^{\alpha}_{3(11)/2} = 0; & \xi_m \in \Sigma_2; \\ U^{\alpha}_{3(11)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(11)/3} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(11)/3} = 0; & \xi_m \in \Sigma_2. \end{cases} \tag{2.26}$$

Для задач L_{22} и L_{33} граничные условия имеют вид, аналогичный (2.26), но ненулевыми являются только псевдоперемещения $U^{\alpha}_{2(22)}(\xi_m) = \dfrac{a_2}{2}\,\bar{\varepsilon}_{22}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_2}$ для задачи L_{22} и $U^{\alpha}_{3(33)}(\xi_m) = \dfrac{a_3}{2}\,\bar{\varepsilon}_{33}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_3}$ для задачи L_{33}. На рис. 3 показаны граничные условия для задачи L_{33}.

Рассмотрим теперь задачи L_{pq}, когда $p \neq q$. В этом случае граничные условия (2.24), (2.25) для задачи L_{11} примут следующий вид:

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{1(13)} = \dfrac{a_1 \bar{\varepsilon}_{13}}{4}; \;\; U^{\alpha}_{3(13)/3} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_3; \\ U^{\alpha}_{3(13)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(13)/1} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_1; \\ U^{\alpha}_{3(13)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)/2} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma'_2; \\ U^{\alpha}_{1(13)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{3(13)/3} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma_3; \\ U^{\alpha}_{3(13)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(13)/1} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma_1; \\ U^{\alpha}_{3(13)} = 0; \;\; U^{\alpha}_{2(13)/2} = 0; \;\; U^{\alpha}_{1(13)} = 0; & \xi_m \in \Sigma_2. \end{cases} \tag{2.27}$$

Для задач $L_{pq} = L_{12}$ и $L_{pq} = L_{23}$ решение строится аналогично. Для L_{12} зададим ненулевые граничные условия: $U^{\alpha}_{1(12)}(\xi_m) = \dfrac{a_1}{4}\,\bar{\varepsilon}_{12}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_2}$, а для задачи $L_{23} - U^{\alpha}_{2(23)}(\xi_m) = \dfrac{a_2}{4}\,\bar{\varepsilon}_{23}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_3}$. Остальные граничные условия все нулевые. На рис. 4 и 5 показаны граничные условия для задач L_{13} и L_{31} соответственно.

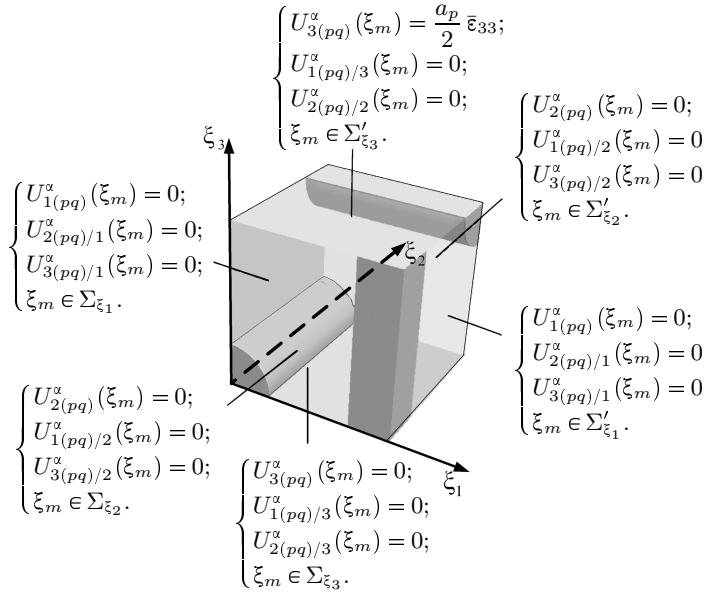


Рис. 3. Граничные условия для задачи L_{33}, где $\alpha \in \{1,\, 2\}$, $(pq) = (33)$

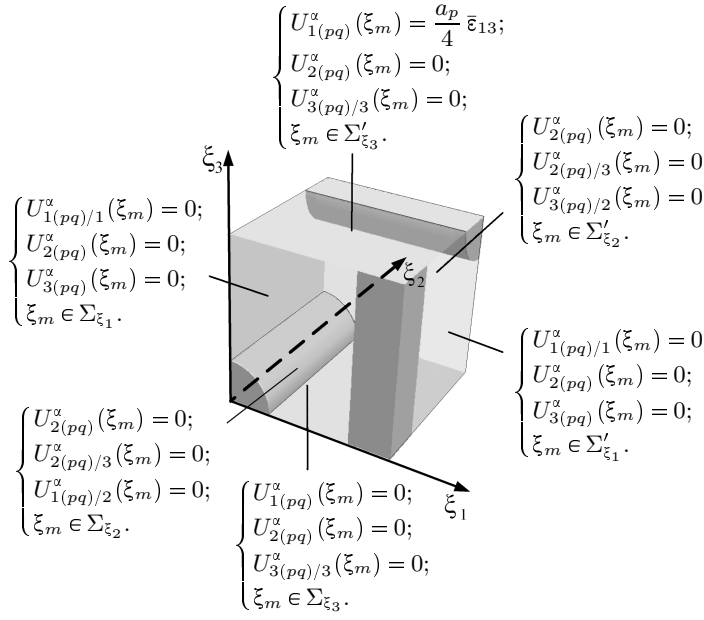


Рис. 4. Граничные условия для задачи L_{13}, где $\alpha \in \{1,\ 2\}$, $(pq) = (13)$

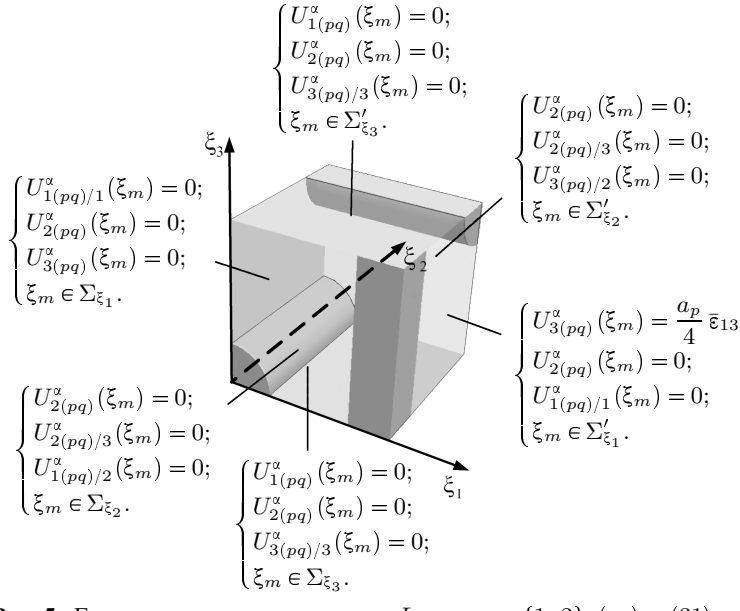


Рис. 5. Граничные условия для задачи L_{31}, где $\alpha \in \{1,\ 2\}$, $(pq) = (31)$

Для задач L_{21} и L_{32} соответственно задаются ненулевые граничные условия: $U^{\alpha}_{1(21)}(\xi_m) = \dfrac{a_1}{4}\,\bar{\varepsilon}_{12}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_1}$ и $U^{\alpha}_{3(32)}(\xi_m) = \dfrac{a_3}{4}\,\bar{\varepsilon}_{23}$, $\xi_m \in \Sigma'_{\xi_2}$, тогда как остальные все граничные условия нулевые.

2.4. Теорема о продолжении решения задачи L_{pq} на всю «ячейку периодичности»

Теорема 1. Пусть функции $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ являются решением шести задач L_{pq} (2.18), (2.24), (2.25) в $1/8$ «ячейки периодичности» $\tilde{V}_{\xi}$, тогда решением задачи (2.17) во всей «ячейке периодичности» V_{ξ} являются функции $\bar{U}^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$, которые определяются симметричным или антисимметричным продолжением функций $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ в подобластях $\bar{V}_{\xi} \subset V_{\xi}$, которые могут быть получены симметричным отражением подобласти $\tilde{V}_{\xi}$ относительно одной, двух или трех координатных плоскостей Σ_s:

$$\begin{cases} p = q\colon \bar{U}^{\alpha}_{s(pp)}(\xi_i) = \begin{cases} \mathrm{asim}[U^{\alpha}_{s(pp)}(\xi_i)], & i = s,\ \ \xi_i \in \tilde{V}_{\xi}; \\ \mathrm{sim}[U^{\alpha}_{s(pp)}(\xi_i)], & i \neq s,\ \ \xi_i \in \tilde{V}_{\xi}; \end{cases} \\ p \neq q\colon \bar{U}^{\alpha}_{j(pq)}(\xi_i) = \begin{cases} \mathrm{asim}[U^{\alpha}_{j(pq)}(\xi_i)], & \xi_i \in \tilde{V}_{\xi}, \\ & (i,\, j) = (p,\, q), \\ & i \neq j; \\ \mathrm{sim}[U^{\alpha}_{j(pq)}(\xi_i)], & \xi_i \in \tilde{V}_{\xi} \\ & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{cases} \tag{2.28}$$

где $\mathrm{asim}[\cdot]$ и $\mathrm{sim}[\cdot]$ — антисимметричное и симметричное продолжение функции $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ в подобласти $\tilde{V}_{\xi}$ соответственно.

Доказательство. Функции $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$ удовлетворяют первым пяти уравненям (2.17) в любой подобласти $\bar{V}_{\xi} \subset V_{\xi}$, полученной симметричным отражением подобласти $\tilde{V}_{\xi}$ относительно одной, двух или трех координатных плоскостей Σ_s. Действительно, несложно убедиться непосредственной проверкой, что при любой замене координат, например, $\bar{\xi}_i = -\xi_i$, $\bar{\xi}_j = \xi_j$, $\bar{\xi}_k = \xi_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, и замене функций $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_j) \to \bar{U}^{\alpha}_{i(pq)}(\bar{\xi}_j)$, $\xi_j \in V_{\xi}$, $\bar{\xi}_j \in \bar{V}$, согласно (2.28), дифференциальный оператор $L^{\alpha}_{(pq)i}U \equiv (\lambda^{\alpha} + \mu^{\alpha})U^{\alpha}_{k(pq)/ki} + \mu^{\alpha}U^{\alpha}_{i(pq)/kk}$,

соответствующий уравнениям равновесия в (2.17) для изотропных компонент, и оператор контактных условий $M^{\alpha}_{(pq)i}U \equiv \lambda^{\alpha} U^{\alpha}_{k(pq)/k} n_i + \mu^{\alpha}(U^{\alpha}_{i(pq)/k} n_k + U^{\alpha}_{k(pq)/i} n_k)$ при каждом значении индекса i могут изменять только знак:

$$\begin{cases} p = q\colon & \begin{cases} \bar{L}^{\alpha}_{(pq)i}\bar{U} = -L^{\alpha}_{(pq)i}U, & \bar{\xi}_i = -\xi_i,\ \bar{\xi}_j = \xi_j, \\ \bar{L}^{\alpha}_{(pq)j}\bar{U} = L^{\alpha}_{(pq)j}U, & \bar{\xi}_k = \xi_k,\ i \neq j \neq k \neq i; \\ \bar{L}^{\alpha}_{(pq)k}\bar{U} = L^{\alpha}_{(pq)k}U; \end{cases} \\ p \neq q\colon & \begin{cases} \bar{L}^{\alpha}_{(pq)j}\bar{U} = -L^{\alpha}_{(pq)j}U, & \bar{\xi}_i = -\xi_i,\ \bar{\xi}_j = \xi_j, \\ \bar{L}^{\alpha}_{(pq)i}\bar{U} = L^{\alpha}_{(pq)i}U, & \bar{\xi}_k = \xi_k,\ \bar{\xi}_k = -\xi_k, \\ \bar{L}^{\alpha}_{(pq)k}\bar{U} = -L^{\alpha}_{(pq)k}U, & \bar{\xi}_j = \xi_j,\ \bar{\xi}_k = \xi_k, \\ & (i,\, j) = \{p,\, q\}, \\ & i \neq j \neq k \neq i, \end{cases} \end{cases} \tag{2.29}$$

где $\bar{L}^{\alpha}_{(pq)i}\bar{U}$ — дифференциальный оператор по $\bar{\xi}_i$. Аналогично преобразуется оператор $M^{\alpha}_{(pq)i}U$. Поэтому из уравнений равновесия и контактных условий в (2.18), а также из выражений $L^{\alpha}_{(pq)i}U = 0$, и $[M^{\alpha}_{(pq)i}U] = 0$ следуют уравнения равновесия и контактные условия в области $\bar{V}_{\xi} \subset V_{\xi}$, т. е. $\bar{L}^{\alpha}_{(pq)i}\bar{U} = 0$, $[\bar{M}^{\alpha}_{(pq)i}\bar{U}] = 0$. Таким образом, функции $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_i)$, полученные по правилам (2.28), являются решением задачи (2.20), всей «ячейки периодичности».

Проверим выполнимость условий нормировки в (2.17). Так как, согласно (2.28), каждая из функций $U^{\alpha}_{i(pq)}$ антисимметрична хотя бы по одной из координат ξ_i, то при интегрировании по всей «ячейке периодичности» действительно всегда получим нуль:

$$\langle U^{\alpha}_{i(pq)} \rangle = \int\limits_{-a_1/2}^{a_1/2} \int\limits_{-a_2/2}^{a_2/2} \int\limits_{-a_3/2}^{a_3/2} U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_j)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = 0. \tag{2.30}$$

Наконец, подставив решение $U^{\alpha}_{i(pq)}$ задачи L_{pq} с учетом (2.28) в условие периодичности в системе (2.17), получим, что должно

выполняться условие

$$[\![U^{\alpha}_{i(pq)}]\!]_j = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pq}(a_q\delta_{ip}\delta_{qj} + a_p\delta_{iq}\delta_{pj}). \tag{2.31}$$

Легко убедиться непосредственно, что это условие всегда выполняется в силу (2.28), например, при $p = q$:

$$\begin{cases} [\![U^{\alpha}_{i(pq)}]\!]_s = U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_s\big|_{a_s/2}, \xi_k) - U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_s\big|_{-a_s/2}, \xi_k) = 0, \quad i \neq s; \\ [\![U^{\alpha}_{s(pq)}]\!]_s = 2U^{\alpha}_{s(pq)}(\xi_s\big|_{a_s/2}, \xi_k) = a_s\bar{\varepsilon}_{pp}\delta_{sp}, \quad i = s, \end{cases} \tag{2.32}$$

что совпадает с (2.31).

Теорема доказана.

Задачи L_{pq} в отличие от задач (1.3) имеют классический вид относительно функций $U^{\alpha}_{i(pq)}$, т. е. это «контактные» задачи линейной теории упругости с граничными условиями на поверхности области $\tilde{V}_{\xi}$.

Глава 3

Расчет эффективных характеристик композиционных материалов

3.1. Эффективные определяющие соотношения композиционного материала

После решения серии задач L_{pq} для всех значений (pq) и нахождения псевдоперемещений $U^{\alpha}_{i(pq)}$ и псевдонапряжений $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ в компонентах композиционного материала, используя интегрирование псевдонапряжений по областям, занятым компонентами композиционного материала, можно вычислить средние напряжения в композиционном материале:

$$\langle \sigma^{(0)}_{ij} \rangle = \sum_{p,q}^{3} \bar{\sigma}_{ij(pq)}, \tag{3.1}$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma^{\alpha}_{ij(pq)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{V^{(\alpha)}} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)}\, dV. \tag{3.2}$$

В силу линейности задач L_{pq} их решения $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ (псевдонапряжения) линейно зависят от входных данных, т. е. от функций $\bar{\varepsilon}_{pq}$. Тогда существуют некоторые тензоры 4-го ранга $C^{(0)}_{ijpq}(\xi_l)$, связывающие $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ и $\bar{\varepsilon}_{pq}$:

$$\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_l) = C^{(0)}_{ijpq}(\xi_l)\bar{\varepsilon}_{pq}, \tag{3.3}$$

где по p и q суммирования нет.

Если псевдонапряжения $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ известны, то тензоры $C^{(0)}_{ijpq}(\xi_l)$ могут быть вычислены по формуле

$$C^{(0)}_{ijpq}(\xi_l) = \frac{\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_l)}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \tag{3.4}$$

где по p и q суммирования нет.

Тогда, подставив (3.3) в (3.2), получим соотношения между средними напряжениями $\langle \sigma^{(0)}_{ij} \rangle$ и средними деформациями композиционного материала $\bar{\varepsilon}_{pq}$, которые называются эффективными

определяющими соотношениями композиционного материала:

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \overline{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}; \tag{3.5}$$

$$\overline{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq}^{(0)} \rangle, \tag{3.6}$$

где $\overline{C}_{ijpq}$ — компоненты тензора эффективных модулей упругости композиционного материала.

Подставив (3.4) в (3.6), найдем окончательную формулу для вычисления эффективных модулей упругости композиционного материала

$$\overline{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \tag{3.7}$$

где по p и q суммирования нет.

3.2. Эффективные технические константы композиционного материала

После вычисления тензора модулей упругости $\overline{C}_{ijpq}$ рассчитывают эффективный тензор упругих податливостей $\overline{\Pi}_{ijpq}$, являющийся обратным к $\overline{C}_{ijpq}$:

$$\overline{\Pi}_{ijpq} \overline{C}_{pqkl} = \Delta_{ijkl}, \tag{3.8}$$

где Δ_{ijkl} — единичный тензор 4-го ранга [15].

С помощью тензора $\overline{\Pi}_{ijpq}$ можно записать эффективные определяющие соотношения композиционного материала, связывающие $\bar{\varepsilon}_{pq}$ и $\bar{\sigma}_{ij}$:

$$\bar{\varepsilon}_{pq} = \sum_{p,q}^{3} \overline{\Pi}_{ijpq} \bar{\sigma}_{pq}. \tag{3.9}$$

В силу предположения о симметричности структуры композиционного материала относительно трех координатных плоскостей осредненный композиционный материал будет обладать свойством ортотропии [15]. Тогда по компонентам $\overline{\Pi}_{ijpq}$ можно рассчитать девять технических констант композиционного материала по формулам:

$$E_\alpha = \frac{1}{\overline{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}$$

— эффективные модули Юнга;

$$\nu_{\alpha\beta} = -\frac{\overline{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta}}{E_\alpha}$$

— эффективные коэффициенты Пуассона;

$$G_{\alpha\beta} = \overline{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}$$

— эффективные модули сдвига.

Если «ячейка периодичности» композиционного материала, кроме того, обладает геометрической и физической симметрией относительно поворота на $\pi/2$ вокруг всех трех координатных осей, то тензор эффективных модулей упругости $\overline{C}_{ijpq}$ будет индифферентным относительно этих же видов преобразований, соответствующих группе преобразований кубической симметрии [15]. Тогда, как следует из [15], такой тензор $\overline{C}_{ijpq}$ и такой тензор $\overline{\Pi}_{ijpq}$ будут обладать тремя независимыми компонентами — константами, в качестве которых можно выбрать константы E_1, G_{12}, ν_{12}.

3.3. Тензоры концентрации напряжений в компонентах композиционного материала

Тензор концентрации напряжений $B_{ijmn}(\xi_l)$, связывающий напряжения в компонентах композиционного материала $\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_l)$ (микронапряжения) и осредненные напряжения $\langle\sigma_{kl}^{(0)}\rangle$ в композиционном материале (макронапряжения), определим с помощью следующих соотношений:

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = B_{ijkl}(\xi_m)\langle\sigma_{kl}^{(0)}\rangle. \tag{3.10}$$

Найдем формулы для вычисления этого тензора $B_{ijmn}(\xi_l)$, использовав формулу (3.3):

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = \sigma_{ij}^{\alpha}(\xi_m) = \sum_{p,q} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} = \sum_{p,q} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m)\bar{\varepsilon}_{pq}. \tag{3.11}$$

Подставив в (3.11) соотношения (3.9), получим

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\xi_m) = \sum_{p,q} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m)\bar{\varepsilon}_{pq} =$$
$$= \sum_{p,q,s,n} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m)\overline{\Pi}_{pqsn}\langle\sigma_{sn}^{(0)}\rangle = B_{ijsn}(\xi_m)\langle\sigma_{sn}^{(0)}\rangle, \quad (3.12)$$

откуда для тензоров концентрации напряжений найдем

$$B_{ijsn}(\xi_m) = \sum_{p,q} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m)\overline{\Pi}_{pqsn}. \quad (3.13)$$

Формулы (3.4) и (3.13) позволяют вычислять $B_{ijsn}(\xi_m)$ по напряжениям $\sigma_{ij(pq)}^{\alpha}$.

Глава 4

Метод конечных элементов для решения задач L_{pq}

4.1. Вариационная формулировка локальной задачи L_{pq}

Подробные теоретические сведения о МКЭ можно найти в работах [23, 24]. Далее изложены краткие сведения о МКЭ применительно к решению локальных задач L_{pq}.

Для произвольного конечного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ может быть сформулирована вариационная формулировка задачи L_{pq} (2.18), (2.20). Вместо поля псевдоперемещений $U^\alpha_{i(pq)}(\xi_k)$, являющегося решением задачи L_{pq}, рассматривают некоторое другое поле, называемое кинематически допустимым полем $U^\alpha_{i(pq)}(\xi_k,\, q_s)$, которое зависит от некоторых новых переменных q_s, $s = 1 \ldots z$, и удовлетворяет только части граничных условий (2.19), (2.20) (только граничным условиям 1-го рода):

$$\begin{cases} U^\alpha_{i(pp)} = 0, & \xi_k \in \Sigma'_i; \\ U^\alpha_{i(pq)} = 0,\ U^\alpha_{k(pq)} = 0, & i \neq j \neq k \neq i,\ \ p \neq q,\ \ \xi_k \in \Sigma'_j; \\ U^\alpha_{i(pp)} = \dfrac{a_p}{2}\,\bar{\varepsilon}_{pp}\delta_{ip}, & \xi_k \in \Sigma_i; \\ U^\alpha_{i(pq)} = \dfrac{a_p}{4}\,\bar{\varepsilon}_{ip}\delta_{ip}, & \\ \quad U^\alpha_{k(pq)} = 0, & i \neq j \neq k \neq i,\ \ p \neq q,\ \ \xi_k \in \Sigma_j. \end{cases} \tag{4.1}$$

Затем вводят вариацию кинематически допустимого поля в виде

$$\delta U^\alpha_{i(pq)} = \sum_{t=1}^{z} \frac{\partial}{\partial q_t} U^\alpha_{i(pq)}(\xi_k,\, q_s)\, dq_t,$$

которое представляет собой дифференциал поля по новым переменным (отметим, что существуют и другие определения вариации функции). Тогда можно ввести скаляр, называемый лагранжианом

от кинематически допустимого поля:

$$
\begin{aligned}
&L(q_s) = W + A_e;\\
&W(q_s) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tilde{V}_\xi} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_k,\, q_s)\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_k,\, q_s)\, dV;\\
&A_e = -\sum_{\gamma=1}^{3}\int\limits_{\Sigma_{\gamma'}} (U^{\alpha}_{\gamma(pq)} S^{\alpha}_{\gamma(pq)\gamma}(1-\delta_{pq}) +\\
&\quad + U^{\alpha}_{\beta(pq)} S^{\alpha}_{\beta(pq)\gamma} + U^{\alpha}_{\rho(pq)} S^{\alpha}_{\rho(pq)\gamma}\delta_{pq})\, d\Sigma;\\
&\gamma \neq \beta \neq \rho \neq \gamma, \quad \gamma,\, \beta,\, \rho = 1,\, 2,\, 3,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где A_e — работа внешних поверхностных сил (ее выражение зависит от задачи L_{pq}, но в силу граничных условий (2.19) и (2.20) значение работы равно нулю: $A_e = 0$); W — потенциальная энергия; $\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_k,\, q_s)$ и $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}(\xi_k,\, q_s)$ — кинематически допустимые поля деформаций и напряжений, вычисляемые формально по тем же правилам, что и псевдодеформации и псевдонапряжения, являющиеся решением задач (2.18)–(2.20). Приведем следующую теорему.

Теорема 2. Из всех кинематически допустимых полей $U^{\alpha}_{i(pq)}(\xi_k,\, q_s)$ является решением задачи L_{pq} только то поле, которое является решением вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta L = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство (необходимость). Пусть поле $U^{\alpha}_{i(pq)}$ является решением задачи L_{pq}, тогда, составив лагранжиан по указанным правилам, вычислим его вариацию:

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \int\limits_{\tilde{V}_\xi} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)}\delta\varepsilon^{\alpha}_{ij(pq)}\, dV = \int\limits_{\tilde{V}_\xi} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)}\delta U^{\alpha}_{i(pq)/j}\, dV =\\
&= \int\limits_{\tilde{V}_\xi} \left((\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}\delta U^{\alpha}_{i(pq)})_{/j} - \sigma^{\alpha}_{ij(pq)/j}\delta U^{\alpha}_{i(pq)}\right) dV.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Используя первое уравнение в системе (2.18), получаем, что второе слагаемое под интегралом обращается в нуль, а первое слагаемое с помощью формулы Гаусса — Остроградского и граничных условий (2.19), (2.20), преобразуется к виду

$$\delta W = \sum_{\gamma=1}^{3} \int\limits_{\Sigma_{\gamma'}} S^{\alpha}_{i(pq)\gamma} \delta U^{\alpha}_{i(pq)}\, d\Sigma = -\delta A_e. \tag{4.5}$$

В истинности равенства (4.5) убеждаемся, варьируя работу внешних поверхностных сил и учитывая граничные условия (2.20). Таким образом, имеем $\delta L = \delta W + \delta A_e = 0$. Что и требовалось доказать.

Доказательство (достаточность). Пусть кинематически допустимое поле $U^{\alpha}_{i(pq)}$ удовлетворяет уравнению $\delta L = 0$, тогда, используя преобразование (4.4) для δW, получаем

$$-\int\limits_{\tilde{V}_\xi} \sigma^{\alpha}_{ij(pq)/j} \delta U^{\alpha}_{i(pq)}\, dV + \\ + \sum_{\gamma=1}^{3} \int\limits_{\Sigma'_\gamma} \big((\sigma^{\alpha}_{\gamma j(pq)} n_j - S^{\alpha}_{\gamma(pq)\gamma}(1-\delta_{pq})) \delta U^{\alpha}_{\gamma(pq)} - \\ - (\delta U^{\alpha}_{\beta(pq)} S^{\alpha}_{\beta(pq)\gamma} + \delta U^{\alpha}_{\rho(pq)} S^{\alpha}_{\rho(pq)\gamma}) \delta_{pq} \big)\, d\Sigma = 0.$$

Отсюда в силу произвольности вариации $\delta U^{\alpha}_{i(pq)}$ следует, что подынтегральные выражения обоих интегралов обращаются в нуль. Из первого интеграла следует, что выполняется уравнение равновесия системы (2.18), а из второго — что выполняются все граничные условия (2.20). Что и требовалось доказать.

Вариационное уравнение $\delta L = 0$ можно переписать без индексов в следующем виде:

$$\int\limits_{V} \delta\varepsilon^{\mathrm{T}} \sigma\, dV = \int\limits_{\Sigma} \delta U^{\mathrm{T}} S\, d\Sigma, \tag{4.6}$$

где введены обозначения:

$$\begin{cases} U = \{U^{\alpha}_{1(pq)}, U^{\alpha}_{2(pq)}, U^{\alpha}_{3(pq)}\}^{\mathrm{T}}; \\ \sigma = \{\sigma^{\alpha}_{11(pq)}, \sigma^{\alpha}_{22(pq)}, \sigma^{\alpha}_{33(pq)}, \sigma^{\alpha}_{23(pq)}, \sigma^{\alpha}_{13(pq)}, \sigma^{\alpha}_{12(pq)}\}^{\mathrm{T}}; \\ S = \{S^{\alpha}_{1(pq)1}, S^{\alpha}_{2(pq)2}, S^{\alpha}_{3(pq)3}\}^{\mathrm{T}}(1-\delta_{pq}) + \\ \quad + \{S^{\alpha}_{1(pq)2} + S^{\alpha}_{1(pq)3}, S^{\alpha}_{2(pq)1} + S^{\alpha}_{3(pq)2}, S^{\alpha}_{3(pq)1} + S^{\alpha}_{3(pq)2}\}^{\mathrm{T}}\delta_{pq}; \\ \varepsilon = \{\varepsilon^{\alpha}_{11(pq)}, \varepsilon^{\alpha}_{22(pq)}, \varepsilon^{\alpha}_{33(pq)}, 2\varepsilon^{\alpha}_{23(pq)}, 2\varepsilon^{\alpha}_{13(pq)}, 2\varepsilon^{\alpha}_{12(pq)}\}^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Здесь определены координатные столбцы кинематически допустимых полей; U — псевдоперемещений, σ — пседонапряжений, ε — деформаций и S — поверхностных сил.

Отметим, что поскольку все векторы поверхностных сил $S^{\alpha}_{i(pq)j}$ в силу (2.19), (2.20) равны нулю, то вся работа внешних сил (правая часть в (4.6)) равна нулю. Однако если уравнение (4.6) записано не для всей области $\tilde{V}_{\xi}$, а для ее подобласти $V \subset \tilde{V}_{\xi}$, то правая часть уравнения (4.6) уже может отличаться от нуля, поскольку вектор поверхностных сил $S = [S_1, S_2, S_3]^{\mathrm{T}}$ уже не будет иметь специального вида (4.7), как на поверхности области $\tilde{V}_{\xi}$, и может быть ненулевым. Поэтому далее уравнение (4.6) будем рассматривать для произвольной подобласти $V \subset \tilde{V}_{\xi}$.

Определяющие соотношения в системе уравнений (2.18) и соотношения Коши (второе уравнение в (2.18)) с использованием координатных столбцов записывают следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma = C\varepsilon; \\ \varepsilon = DU, \end{cases} \tag{4.8}$$

где C — матрица модулей упругости с размерами 6×6, составленная из компонентов тензора C^{α}_{ijkl} стандартным образом [15]; D — матрица линейных дифференциальных операторов дифференциро-

вания ($/_k = \partial/\partial\xi_k$);

$$C = \begin{pmatrix} C^{\alpha}_{1111} & C^{\alpha}_{1122} & C^{\alpha}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C^{\alpha}_{2211} & C^{\alpha}_{2222} & C^{\alpha}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C^{\alpha}_{3311} & C^{\alpha}_{3322} & C^{\alpha}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{\alpha}_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{\alpha}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{\alpha}_{1212} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} /_1 & 0 & 0 \\ 0 & /_2 & 0 \\ 0 & 0 & /_3 \\ 0 & /_3 & /_2 \\ /_3 & 0 & /_1 \\ /_2 & /_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

С учётом отношений (4.8) вариационное уравнение (4.6) можно представить в виде

$$\int\limits_V (D\,\delta U)^{\mathrm{T}} CDU\, dV = \int\limits_{\Sigma} \delta U^{\mathrm{T}} S\, d\Sigma. \quad (4.10)$$

4.2. Метод конечных элементов для задач L_{pq}

Аппроксимируем область $\tilde{V}_\xi$ с помощью объединения конечного, но достаточно большого числа подобластей стандартного вида V_e, например, в форме тетраэдров: $\tilde{V}_\xi = \bigcup\limits_{e=1} V_e$. Эти области называют конечными элементами, а вершины конечных элементов — узлами. Аппроксимируем кинематически допустимое поле U в каждом конечном элементе некоторыми стандартными функциями координат, в качестве которых чаще всего применяют полиномы:

$$\underset{3}{U}(\xi_k,\, q_s) = \underset{3\times z}{\Phi}(\xi_k)\, \underset{z}{q}. \quad (4.11)$$

Здесь $\underset{3\times z}{\Phi}(\xi_k)$ — матрица функций формы; $\underset{z}{q} = [q_1\ \ldots\ q_z]^{\mathrm{T}}$ — координатный столбец неизвестных коэффициентов; z — число степеней свободы конечного элемента.

В качестве неизвестных коэффициентов удобно выбрать поле перемещений в узлах конечного элемента:

$$q = [U^{(1)}_{1(pq)},\, U^{(1)}_{2(pq)},\, U^{(1)}_{3(pq)},\, \ldots,\, U^{(m)}_{1(pq)},\, U^{(m)}_{2(pq)},\, U^{(m)}_{3(pq)}]^{\mathrm{T}},$$

где $U^{(k)}_{1(pq)} = U^{\alpha}_{1(pq)}(\xi_{j(k)},\, q_s)$ — псевдоперемещения в k-м узле конечного элемента с координатами $\xi_{j(k)}$; m — число узлов конечного

элемента, причем $z = 3m$ (для трехмерного случая). По определению функции формы $\underset{3\times z}{\Phi}(\xi_{j(k)})$ в узлах конечного элемента имеют значения, равные единице: $\underset{3\times z}{\Phi}(\xi_{j(k)}) = 1$.

Наиболее широко в настоящее время применяют конечные элементы в виде тетраэдра (рис. 6) с четырьмя узлами ($m = 4$, $z = 12$) только в вершинах. Этот конечный элемент обеспечивает линейную аппроксимацию псевдоперемещений U и приводит к постоянным напряжениям σ в каждом конечном элементе. Десятиузловой конечный элемент ($m = 10$, $z = 30$), в котором узлы располагаются в вершинах и в серединах ребер тетраэдра, обеспечивает квадратичную аппроксимацию псевдоперемещений и линейную аппроксимацию напряжений для каждого конечного элемента.

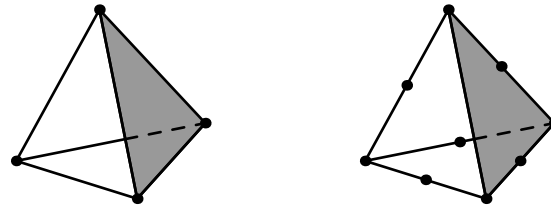


Рис. 6. Четырех- и десятиузловой конечные элементы

Матрица функций формы $\underset{3\times m}{\Phi}(\xi_j)$ имеет вид

$$\underset{3\times m}{\Phi} = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} \Phi_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \Phi_m & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Phi_m & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \Phi_m \end{array}\right]. \qquad (4.12)$$

Для четырехузлового конечного элемента функции формы выглядят так:

$$\Phi_i(\xi_j) = L_i(\xi_j), \qquad (4.13)$$

где $L_i(\xi_j) = \dfrac{1}{6V}(a_i + b_i\xi_1 + c_i\xi_2 + d_i\xi_3) = \dfrac{1}{6V}\, a_{ij}\xi_j$, $j = \{0, 1, 2, 3\}$,

$\xi_0 \equiv 1;$

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \xi_{1(1)} & \xi_{2(1)} & \xi_{3(1)} \\ 1 & \xi_{1(2)} & \xi_{2(2)} & \xi_{3(2)} \\ 1 & \xi_{1(3)} & \xi_{2(3)} & \xi_{3(3)} \\ 1 & \xi_{1(4)} & \xi_{2(4)} & \xi_{3(4)} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{6}\,|W|; \\ a_{ij} = |W_{ij}|, \end{cases} \tag{4.14}$$

$|W_{ij}|$ — соответствующие миноры матрицы W.

Для десятиузлового конечного элемента функции формы имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = L_1(2L_1 - 1); \quad \Phi_2 = L_2(2L_2 - 1); \\ \Phi_3 = L_3(2L_3 - 1); \quad \Phi_4 = L_4(2L_4 - 1); \\ \Phi_5 = 4L_1L_2; \quad \Phi_6 = 4L_2L_3; \quad \Phi_7 = 4L_3L_4; \\ \Phi_8 = 4L_1L_4; \quad \Phi_9 = 4L_2L_4; \quad \Phi_{10} = 4L_3L_4. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Функции $L_i(\xi_j)$ называют барицентрическими координатами, они представляют собой отношение $L_i(\xi_j) = r_i(\xi_j)/h_i(\xi_j)$, где $r_i(\xi_j)$ — расстояние от точки с координатами ξ_j, до i-й стороны тетраэдра; $h_i(\xi_j)$ — расстояние от противолежащей вершины тетраэдра до этой стороны, причем выполняется соотношение:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1.$$

Подставляя выражение (4.6) в (4.3), получаем следующее представление для деформаций:

$$\varepsilon = Bq, \tag{4.16}$$

где введена матрица деформаций $B = D\Phi$, имеющая вид

$$B = \begin{bmatrix} \Phi_{1/1} & 0 & 0 & \dots & \Phi_{m/1} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{1/2} & 0 & \dots & 0 & \Phi_{m/2} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{1/3} & \dots & 0 & 0 & \Phi_{m/3} \\ 0 & \Phi_{1/3} & \Phi_{1/2} & \dots & 0 & \Phi_{m/3} & \Phi_{m/2} \\ \Phi_{1/3} & 0 & \Phi_{1/1} & \dots & \Phi_{m/3} & 0 & \Phi_{m/1} \\ \Phi_{1/2} & \Phi_{1/1} & 0 & \dots & \Phi_{m/2} & \Phi_{m/1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Для четырехузлового конечного элемента ($m = 4$) эта матрица с учетом (4.12) выглядит так:

$$B = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & \dots & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & d_1 & c_1 & \dots & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & \dots & d_4 & 0 & b_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & \dots & c_4 & b_4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Подставляя (4.11) в (4.10), получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для одного конечного элемента:

$$K_e q = f_e, \tag{4.19}$$

где

$$\begin{cases} K_e = \int\limits_V B^{\mathrm{T}} C B \, dV; \\ f_e = \int\limits_\Sigma \Phi^{\mathrm{T}} S \, d\Sigma, \end{cases} \tag{4.20}$$

где K_e — матрица жесткости конечного элемента; f_e — столбец нагрузок конечного элемента.

Для четырехузлового конечного элемента компоненты матрицы $B^{\mathrm{T}} C B$ не зависят от координат, поэтому

$$K = \int\limits_V B^{\mathrm{T}} C B \, dV = V B^{\mathrm{T}} C B.$$

Таким образом, если «просуммировать» СЛАУ (4.19) для всех конечных элементов, то получим глобальную СЛАУ для всей рассматриваемой области $\tilde{V}_\xi$:

$$K q = f, \tag{4.21}$$

где K — глобальная матрица жесткости задачи, она составляется из локальных матриц жесткости конечных элементов K_e; f — глобальный столбец нагрузок, составленный из локальных столбцов нагрузок конечных элементов f_e, которые определяются с учетом

граничных условий (2.19), (2.20). Граничные условия идеального контакта (четвертое уравнение в (2.18)) не требуют специального учета, так как при данном варианте МКЭ они удовлетворяются автоматически.

4.3. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений

Для решения СЛАУ (4.21) могут быть применены различные численные методы, предназначенные для СЛАУ большой размерности. Одним из наиболее эффективных в настоящее время является метод сопряженных градиентов [17].

Решая СЛАУ (4.21), находим перемещения q в узлах, по которым вычисляем псевдоперемещения $U = \Phi q$, деформации $\varepsilon = Bq$ и напряжения $\sigma = CBq$ в конечных элементах.

Глава 5

Численное моделирование микронапряжений и эффективных упругих характеристик композиционных материалов

5.1. Однонаправленно-армированные композиционные материалы

Рассмотрим решение локальной задачи L_{pq} с применением МКЭ для композиционного материала со сравнительно простой структурой армирования.

Пусть волокна имеют форму кругового цилиндра и ориентированы в одном направлении, например $O\xi_3$. Такой композиционный материал называют однонаправленно-армированным, или 1D-композитом. Для него имеется только два компонента ($N = 2$): $\alpha = 1$ — волокно; $\alpha = 2$ — матрица (рис. 7). Для 1D-композита известно точное аналитическое решение задач L_{pq} в рядах, полученное Б. Е. Победрей и В. А. Мольковым [13]. Для такого 1D-композита могут быть вычислены эффективные упругие характеристики методом сечений [2].

В этом разделе приведены результаты расчета характеристик 1D-композита, представленные в работах [18–22]. В расчетах были приняты следующие значения характеристик компонентов: $\mu_2 = 0{,}36$ ГПа; $\lambda_2 = 1{,}28$ ГПа; $\mu_1 = 2{,}16$ ГПа; $\lambda_1 = 1{,}44$ ГПа; коэффициент армирования $\varphi_1 = |V_{\xi_1}| = 0{,}4$.

Для решения задач L_{pq} с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов был разработан специальный программный комплекс на языке C++ с возможностью 3D-визиуализации результатов расчета. Кроме того, дополнительно, для проведения сравнительного анализа, для решения задач L_{pq} с использованием десятиузловых конечных элементов применялся коммерческий программный комплекс ANSYS, используемый как решатель СЛАУ.

Для 1D-композита число четырехузловых конечных элементов было равно 5760, а число неизвестных (число степеней свободы) — 3795. Сетка с десятиузловыми конечными элементами имела 2574

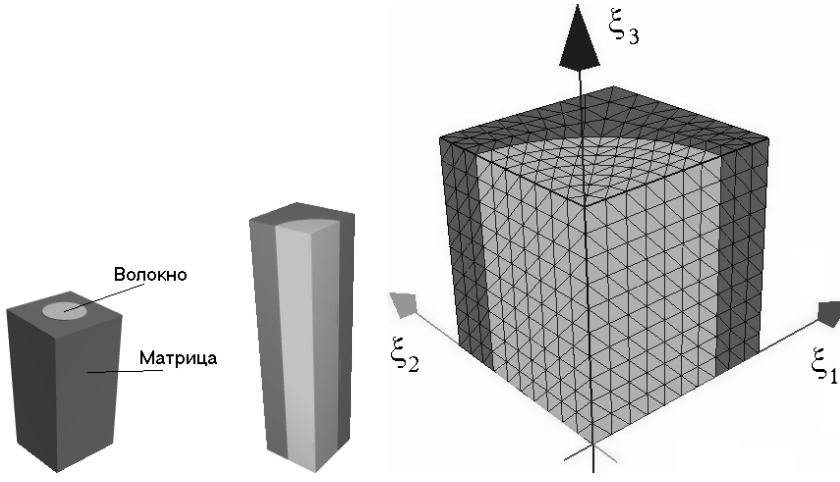


Рис. 7. Однонаправленно-армированный композит и конечно-элементная сетка для решения задач L_{pq}

элементов и 12 486 степеней свободы. На рис. 8–11 представлены некоторые результаты расчетов задач L_{pq}: цветом выделены распределения напряжений $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ в $1/8$ «ячейки периодичности» для задач L_{33}, $L_{13}+L_{31}$, L_{11}, L_{12}. На рис. 12 и 13 показаны распределения компонент тензора концентрации напряжений $B_{ijmn}(\xi_l)$, вычисленных по формуле (3.13), для 1D-композита.

После вычисления напряжений $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ в $1/8$ «ячейки периодичности» для всех локальных задач были рассчитаны эффективные упругие характеристики композита $\overline{C}_{ijpq}$. В табл. 1 представлены сравнительные результаты расчетов компонент $\overline{C}_{ijpq}$, полученных разными методами.

Полученные результаты расчетов позволяют говорить о достаточно высокой точности вычислений, проведенных с помощью предложенного численного метода, тогда как метод сечений дает удовлетворительные результаты только модулей упругости в направлении армирования. Для поперечных же модулей упругости и модулей сдвига точность этого метода существенно ниже.

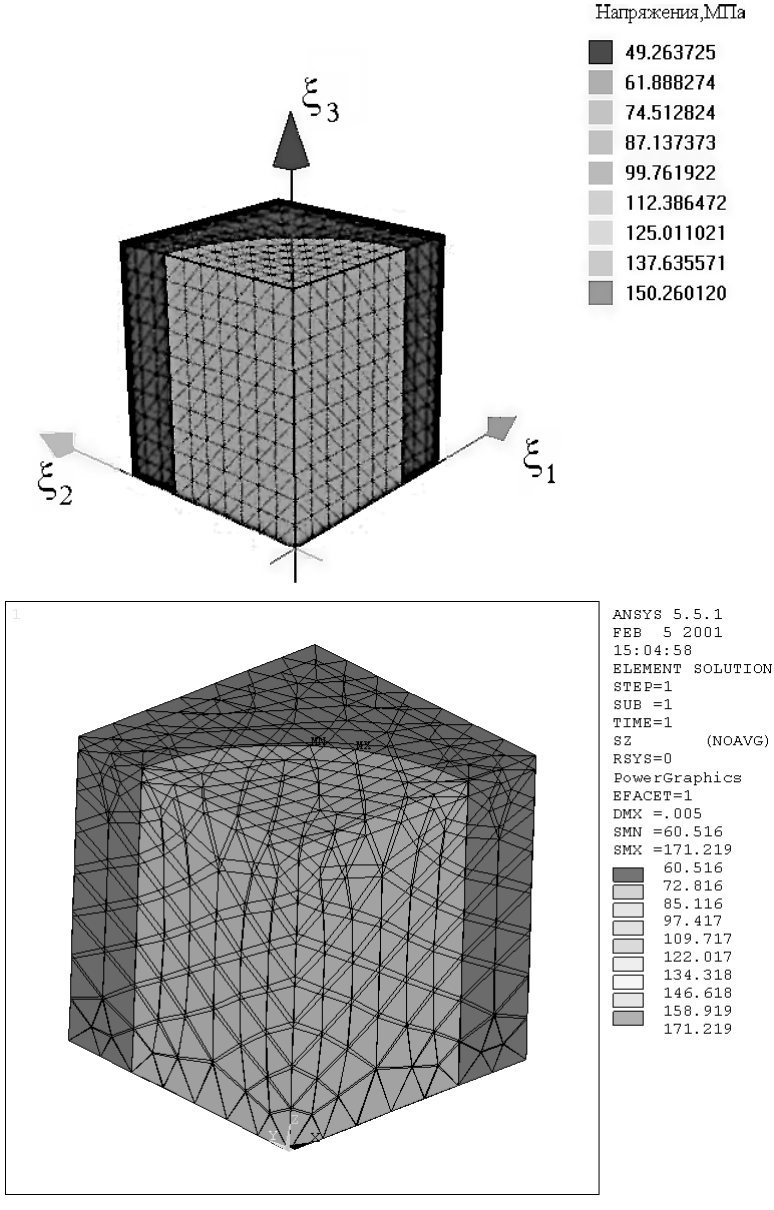


Рис. 8. Задача L_{33}. Распределение напряжений σ_{33} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

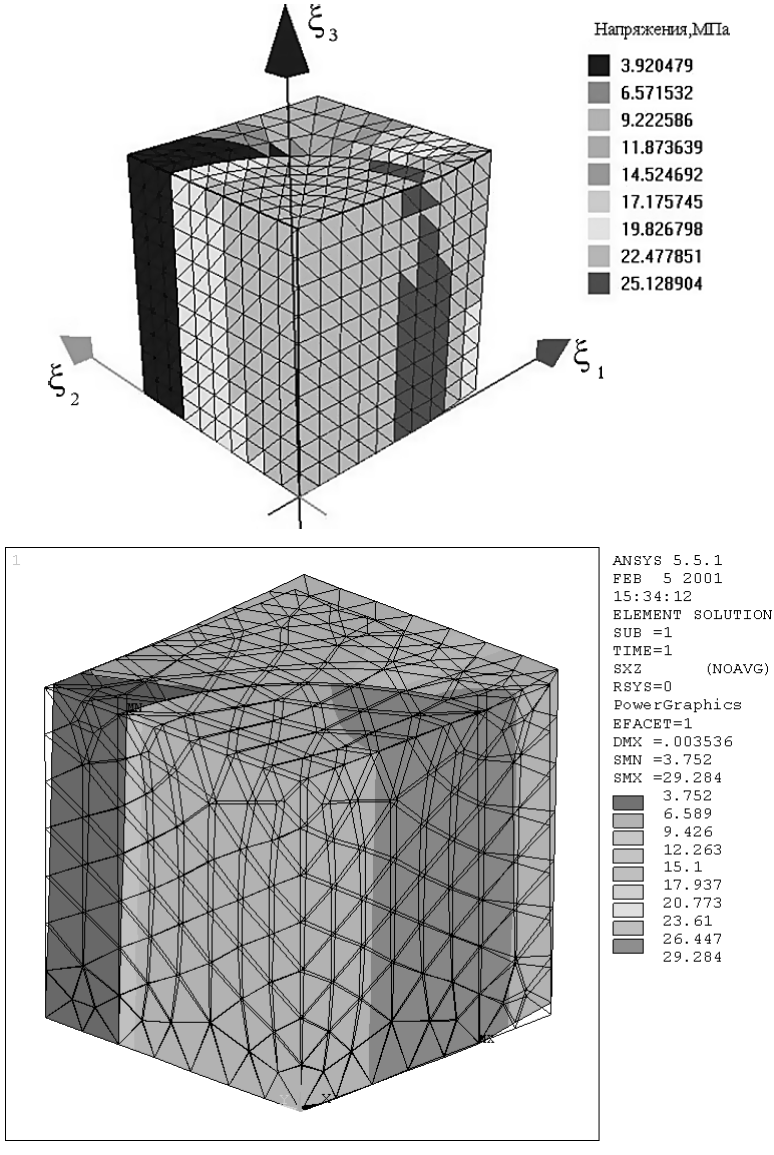


Рис. 9. Задача L_{13} для 1D-композита. Распределение напряжений σ_{13} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

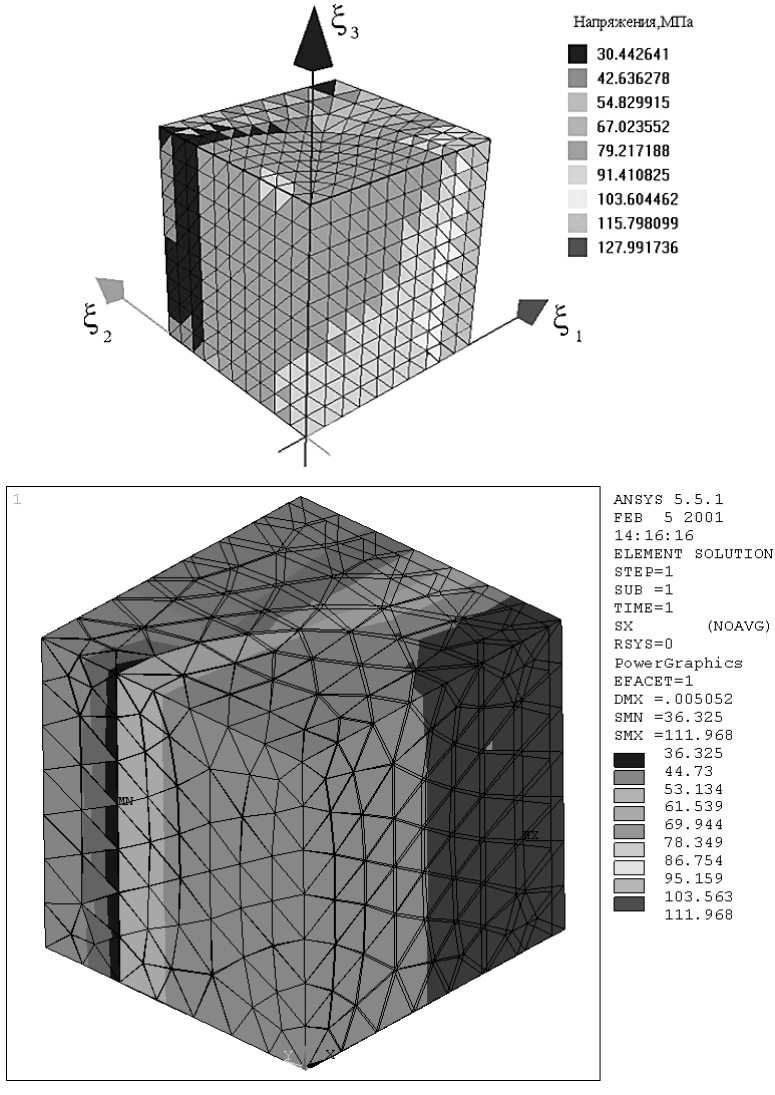


Рис. 10. Задача L_{11} для 1D-композита. Распределение напряжений σ_{11} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

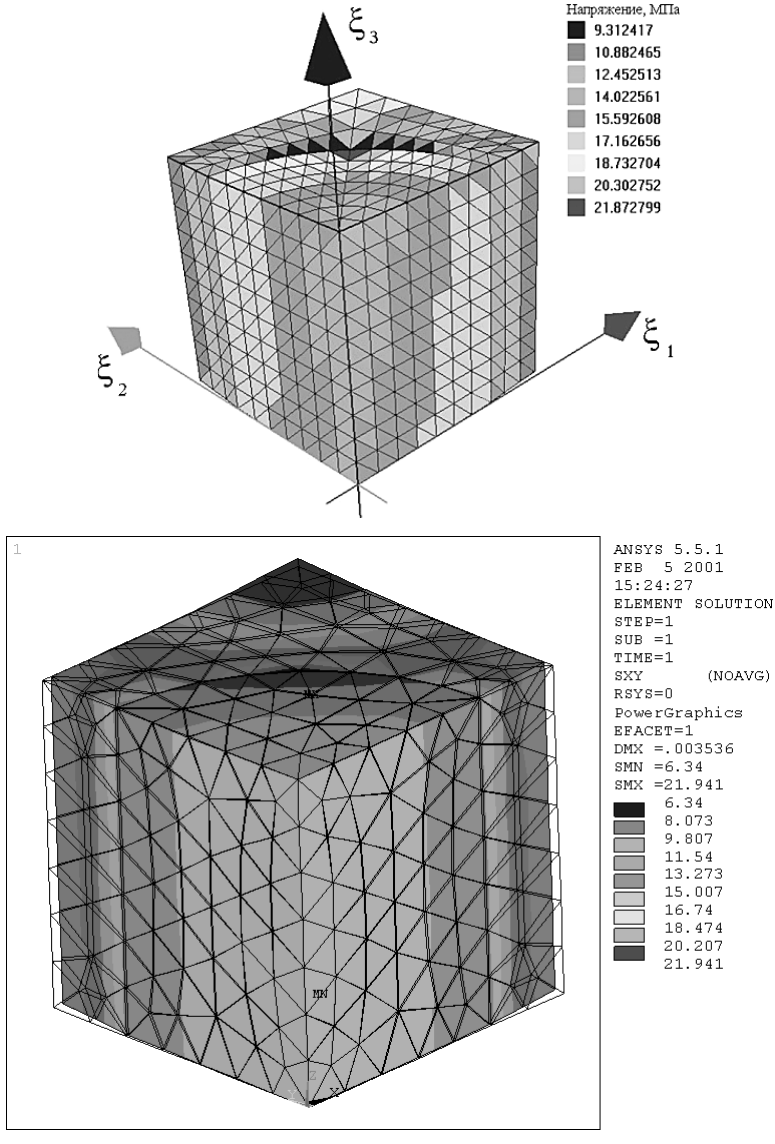


Рис. 11. Задача L_{12} для 1D-композита. Распределение напряжений σ_{12} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

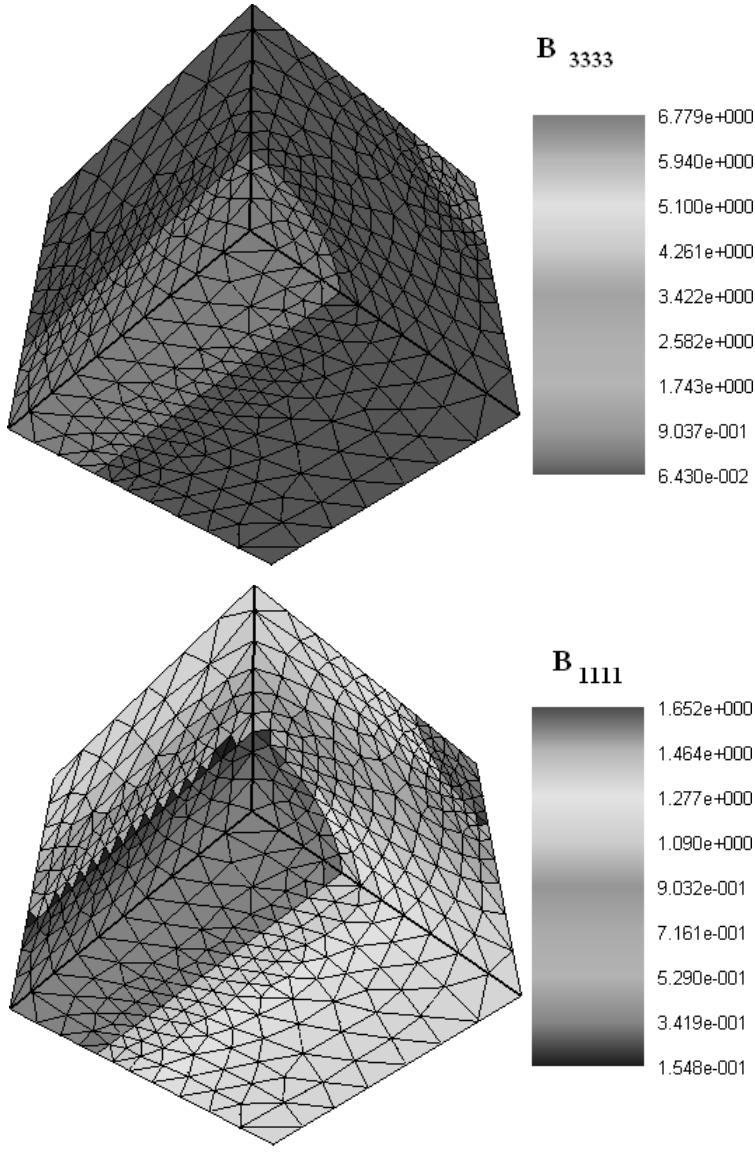


Рис. 12. Коэффициенты концентрации напряжений B_{3333} и B_{1111} для 1D-композита

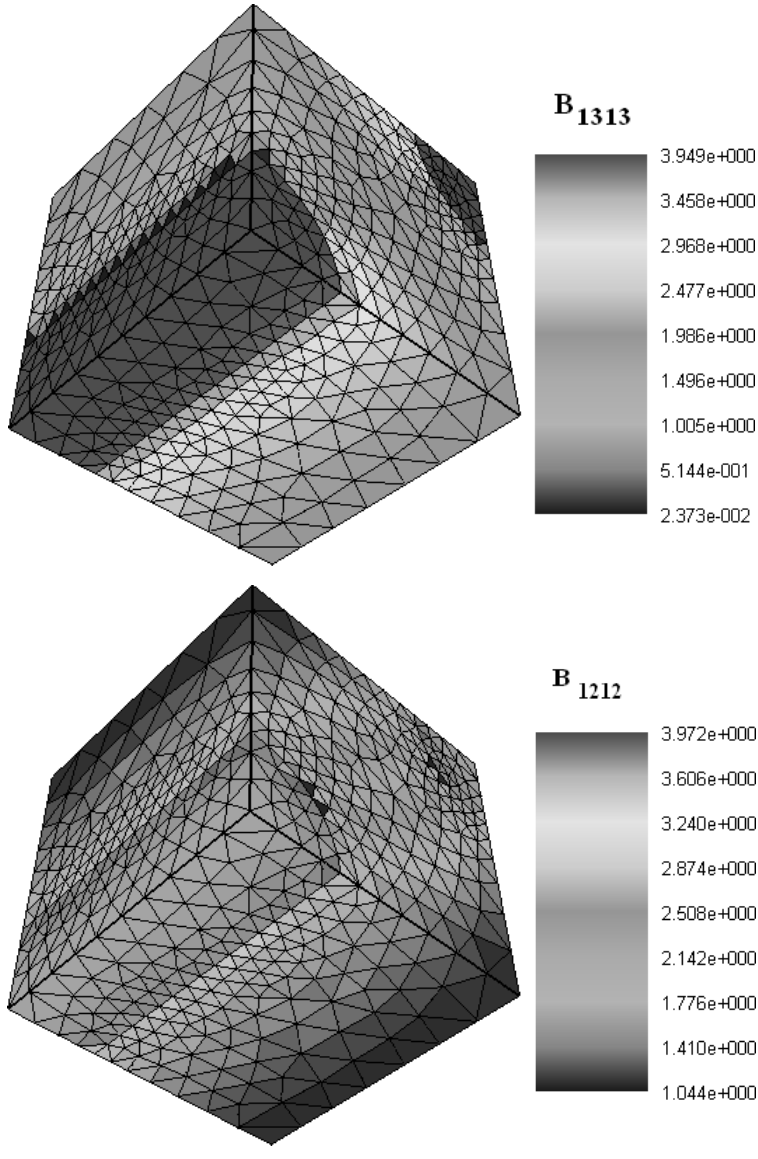


Рис. 13. Коэффициенты концентрации напряжений B_{1313} и B_{1212} для 1D-композита

Таблица 1

Значения эффективных модулей упругости 1D-композита

Параметр	$\dfrac{\overline{C}_{1111}}{\lambda_2+2\mu_2}$	$\dfrac{\overline{C}_{1122}}{\lambda_2}$	$\dfrac{\overline{C}_{1133}}{\lambda_2}$	$\dfrac{\overline{C}_{3333}}{\lambda_2+2\mu_2}$	$\dfrac{\overline{C}_{1313}}{\mu_2}$	$\dfrac{\overline{C}_{1212}}{\mu_2}$
Точное значение	1,42	1,11	1,03	1,75	1,804	1,58
Четырехузловые КЭ*	1,419	1,098	1,026	1,748	1,806	1,59
Десятиузловые КЭ*	1,422	1,115	1,032	1,753	1,805	1,583

* КЭ — конечные элементы.

5.2. Ортогонально-армированные композиты (3D-композиты)

С помощью разработанного метода и программного комплекса были проведены расчеты задач L_{pq} для ортогонально-армированного композита (число $N = 4$; $\alpha = 1,\ 2,\ 3$ — волокна; $\alpha = 4$ — матрица). $1/8$ «Ячейки периодичности» и конечно-элементная разбивка для этого композита показаны на рис. 14. Число четырехузловых конечных элементов при решении задач L_{pq} составляло 5376, число степеней свободы — 3645. Число десятиузловых конечных элементов составляло 19 919, число степеней свободы при этом было равно 85 971. При численной реализации армирующие в трех направлениях волокна считались одинаковыми, их характеристики и свойства матрицы были такими же, как и для 1D-композита. На рис. 15, 16 представлены некоторые результаты расчетов: показаны распределения напряжений $\sigma^{\alpha}_{ij(pq)}$ в $1/8$ «ячейки периодичности» для задач L_{33} и $L_{13} + L_{31}$.

Далее по формуле (3.7) были рассчитаны эффективные упругие характеристики $\overline{C}_{ijpq}$ 3D-композита.

В табл. 2 представлены сравнительные результаты расчетов технических упругих констант композита: модуля Юнга E, модуля сдвига G и коэффициента Пуассона ν, полученных с помощью разработанного модифицированного МКЭ и методом сечений.

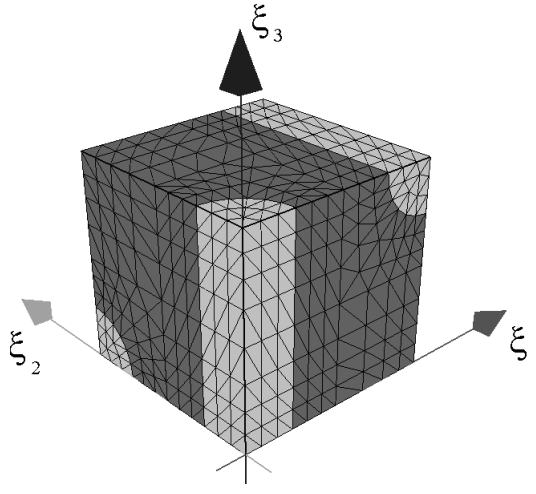


Рис. 14. Композит 3D и конечно-элементная сетка для него

Таблица 2

Упругие константы 3D-композита, полученные различными методами

Метод	Модуль Юнга E, ГПа	Коэффициент Пуассона, ν	Модуль сдвига G, ГПа
Метод сечений	4,23	0,355	1,425
Четырехузловой КЭ*	4,21	0,358	1,328
Десятиузловой КЭ*	4,17	0,359	1,328

* КЭ — конечные элементы.

На рис. 17 показаны распределения компонент тензора концентрации напряжений $B_{ijmn}(\xi_l)$, вычисленных по формуле (3.13), для 3D-композита.

Значения, полученные разными методами (см. табл. 2), численно близки (относительное отклонение не превышает 8 %), в то же время, исходя из результатов для 1D-композита, более близкими к истинным следует считать значения, полученные МКЭ. Отметим,

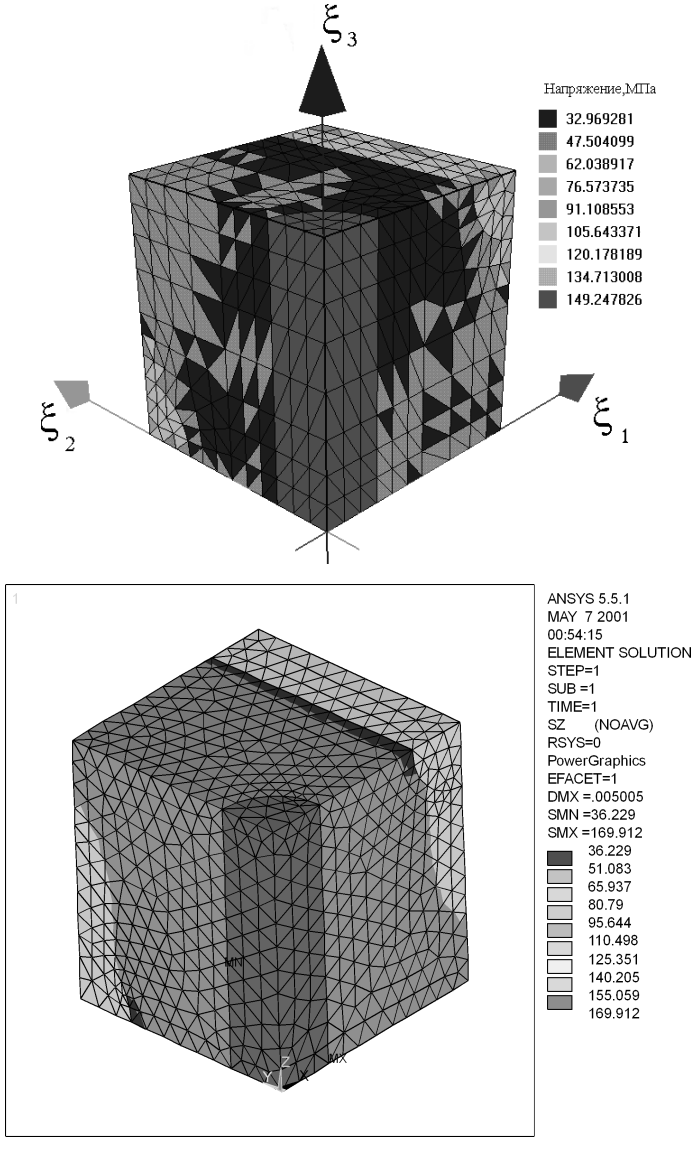


Рис. 15. Задача L_{33} для 3D-композита. Распределение напряжений σ_{33} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

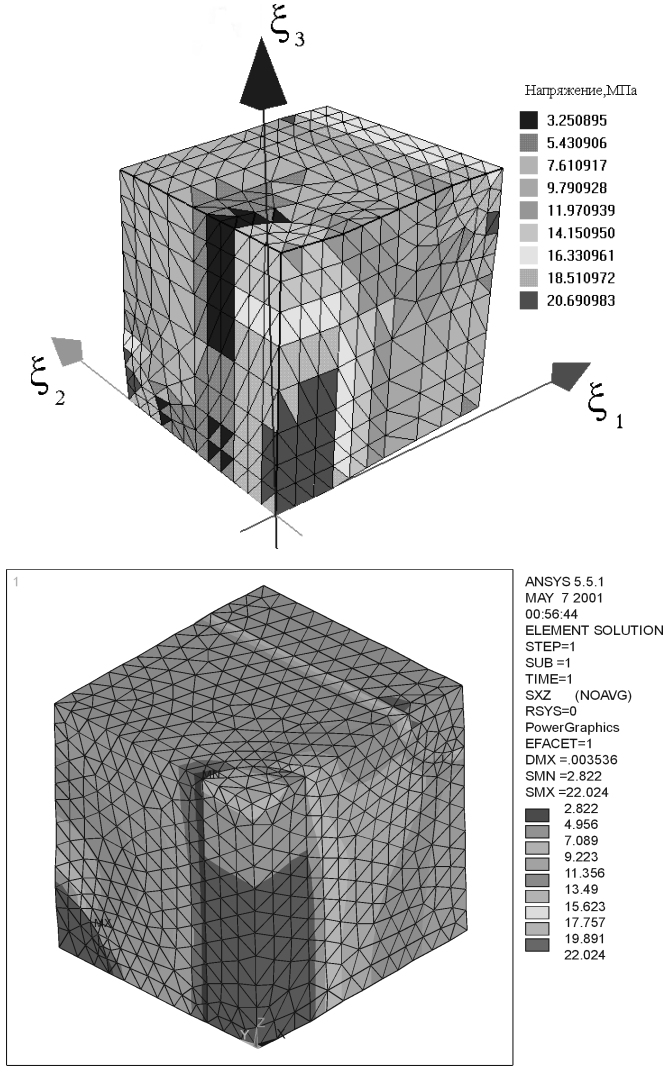


Рис. 16. Задача L_{13} для 3D-композита. Распределение напряжений σ_{13} в $1/8$ «ячейки периодичности», полученное с помощью четырех- и десятиузловых конечных элементов

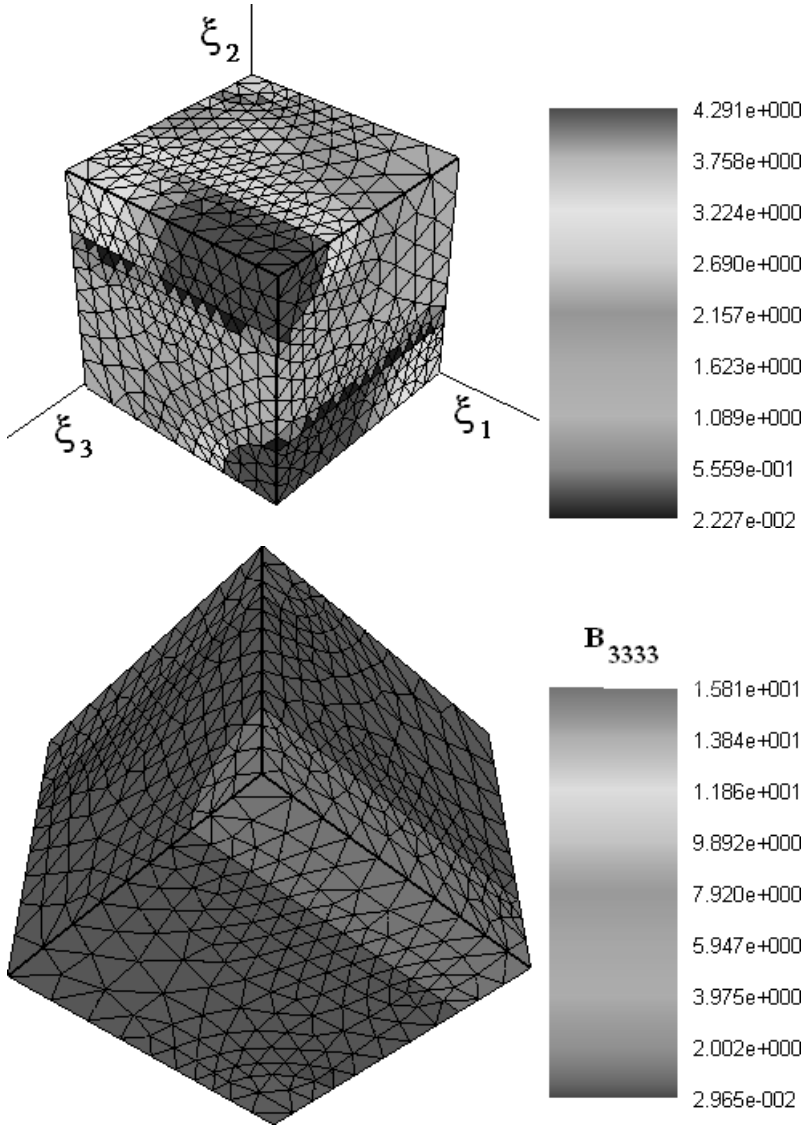


Рис. 17. Коэффициенты концентрации напряжений B_{1313} и B_{1212} для 3D-композита

что рассмотренный 3D-композит обладает кубической симметрией (квазиизотропный класс по классификации [15]) и имеет три независимые упругие константы E, G и ν. Соотношение $G = E/2(1+\nu)$ для этого класса материалов не имеет места.

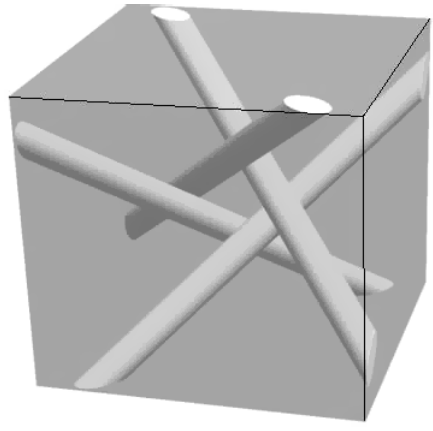
5.3. Композиты, армированные по диагоналям куба

На практике применяются композиты с более сложными структурами армирования. На рис. 18, *а* показаны композиты, армированные системой четырех нитей (4D-композиты), ориентированных по четырем главным диагоналям куба, на рис. 18, *б* — результаты решения задачи L_{13} для этих композитов, на рис. 19 и 20 — распределения компонент тензора концентрации напряжений в волокнах композита. В табл. 3 приведены результаты расчета эффективных технических констант для этих композитов.

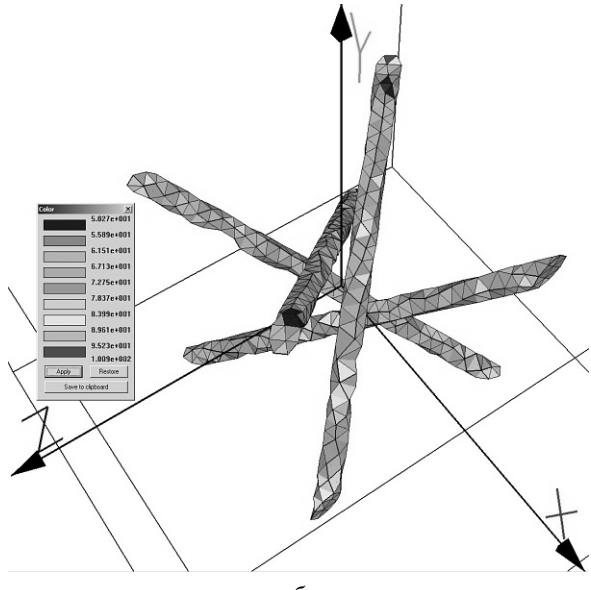
Таблица 3

Эффективные упругие характеристики композитов с различной структурой армирования

Параметр	3D КМ $\varphi_f = 0{,}45$	4D КМ $\varphi_f = 0{,}04$	Тканевый КМ $\varphi_f = 0{,}11$
Модули Юнга, E (ГПа)			
E_1	39,758	2,406	6,417
E_2	39,758	2,407	6,645
E_3	39,758	2,381	3,448
Модули сдвига, G (ГПа)			
G_{13}	2,227	1,283	1,296
G_{12}	2,227	1,278	1,094
G_{23}	2,227	1,283	1,296
Коэффициенты Пуассона, ν			
ν_{13}	0,073	0,365	0,451
ν_{12}	0,073	0,358	0,202
ν_{23}	0,073	0,364	0,498

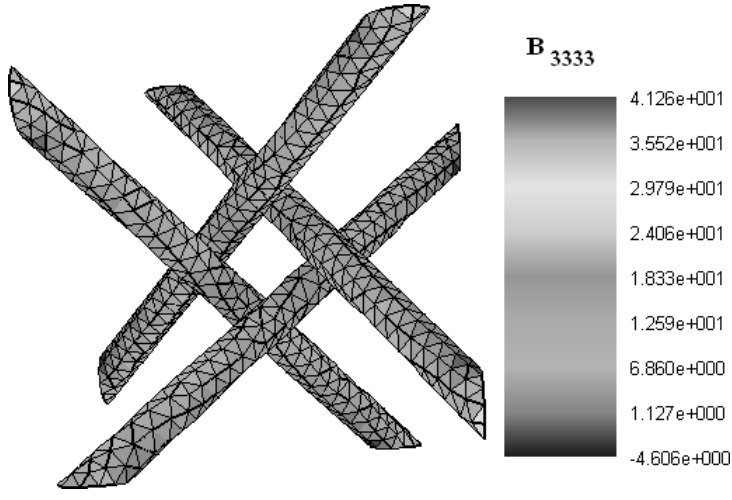


а

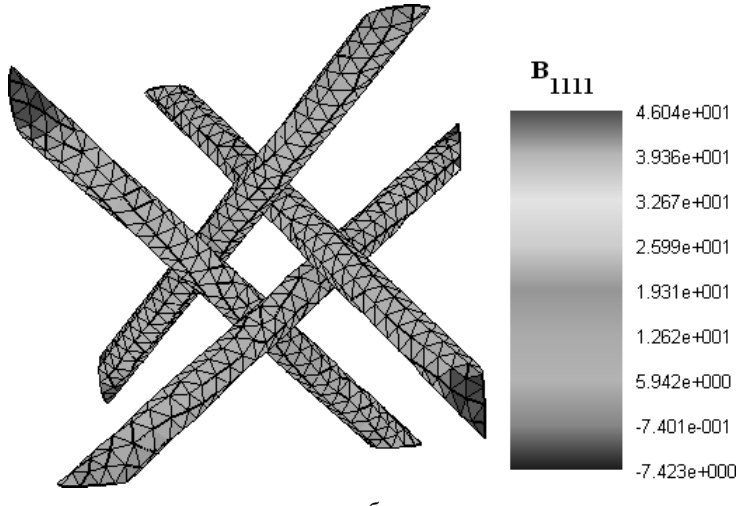


б

Рис. 18. Композит 4D, армированный по диагоналям куба. Распределение напряжений σ_{13} в волокнах композита в $1/8$ «ячейки периодичности» для него

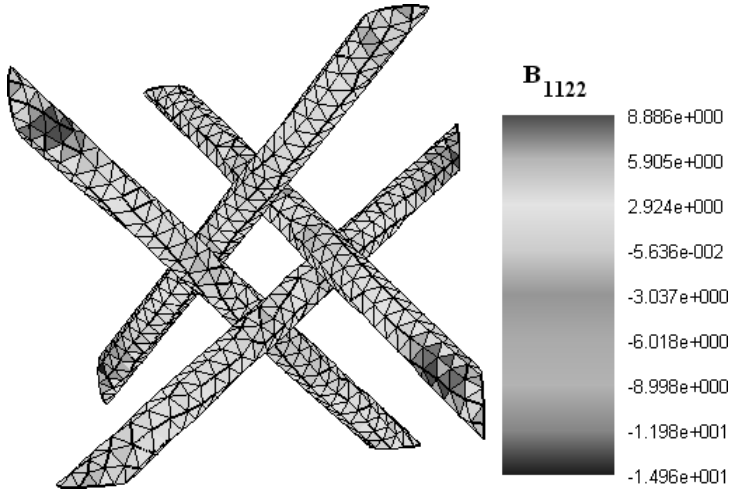


а

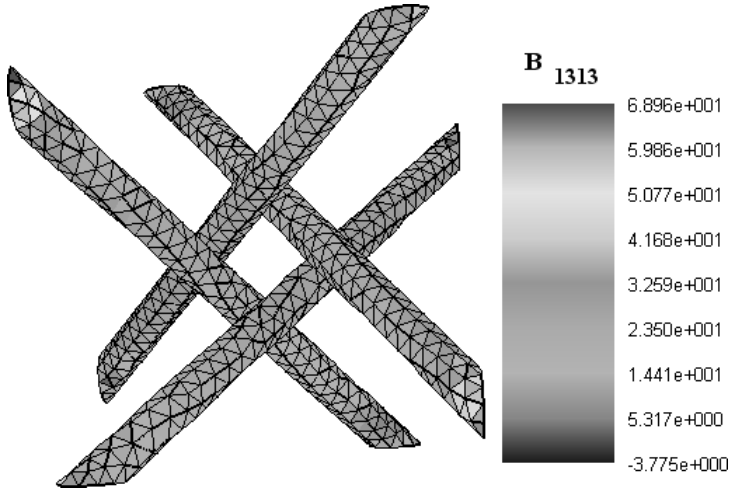


б

Рис. 19. Коэффициенты концентрации напряжений B_{3333} и B_{1111} для 4D-композита



а

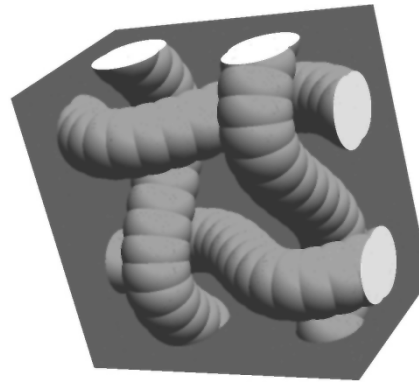


б

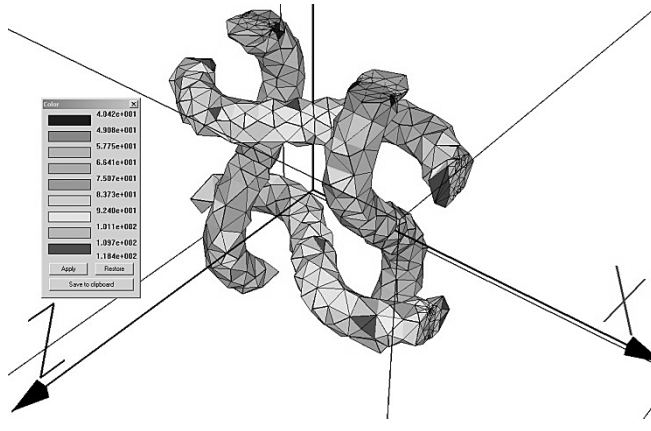
Рис. 20. Коэффициенты концентрации напряжений B_{1122} и B_{1313} для 4D-композита

5.4. Тканевые композиты

На практике широко применяются тканевые композиты, образованные системой двух нитей, каждая из которых искривлена периодическим образом в одной из координатных плоскостей (рис. 21, *а*). На рис. 21, *б* показаны результаты решения задачи L_{13} для этих композитов; на рис. 22–23 — распределения компонент тензора концентрации напряжений в волокнах композита. В табл. 3 приведены

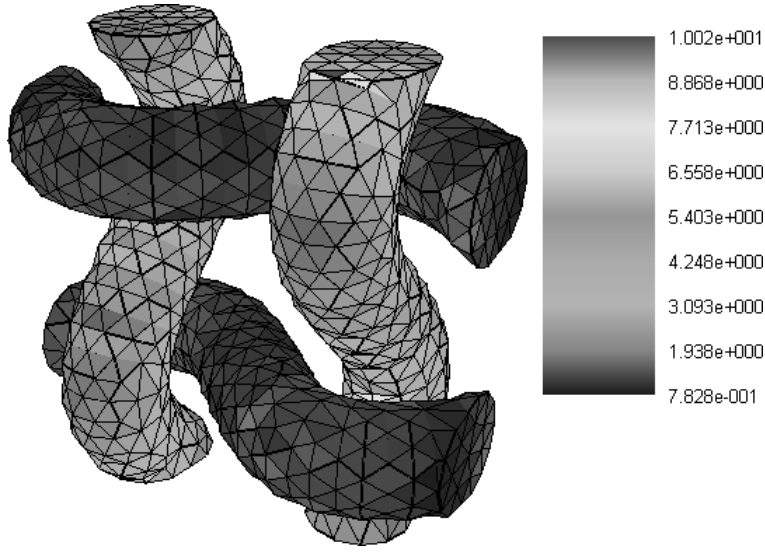


а

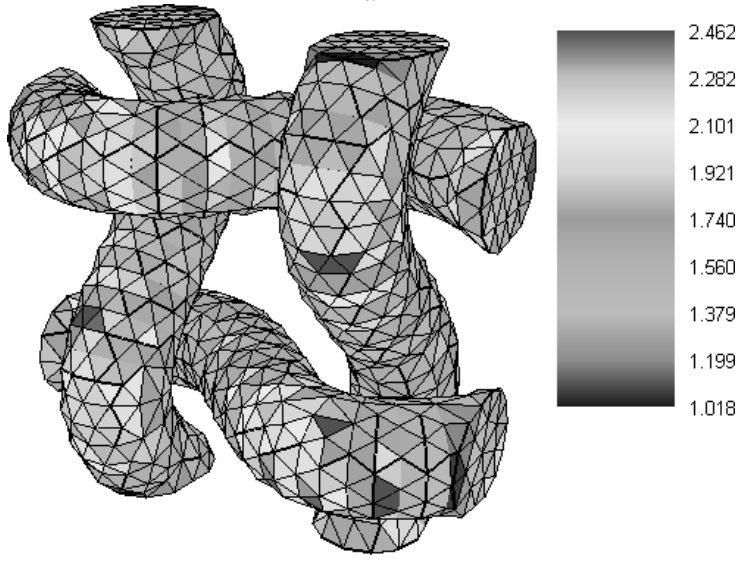


б

Рис. 21. Геометрия тканевого композита и результаты решения задачи L_{13}. Распределение напряжений σ_{13} в волокнах композита в $1/8$ «ячейки периодичности»

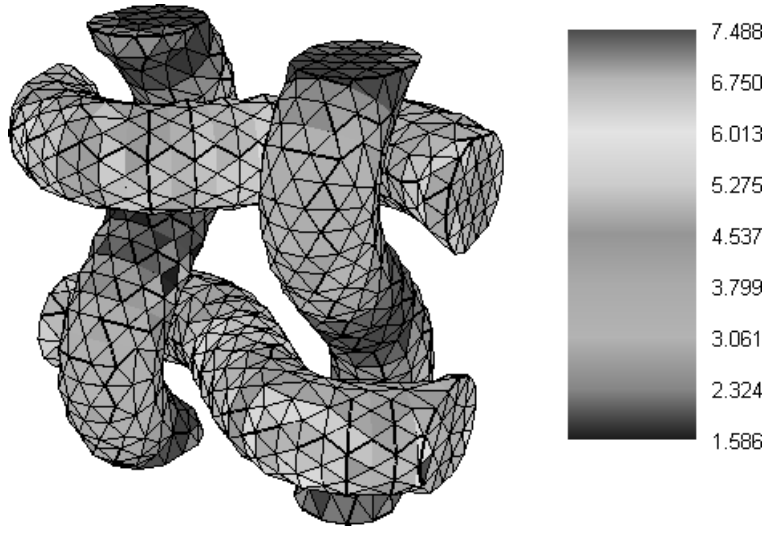


а

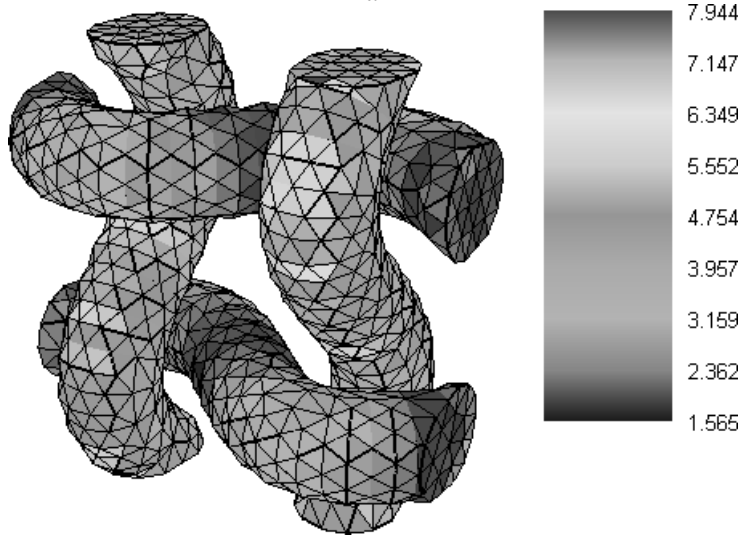


б

Рис. 22. Коэффициенты концентрации напряжений B_{2222} (*а*) и B_{3333} (*б*) для тканевого композита



а



б

Рис. 23. Коэффициенты концентрации напряжений B_{1313} (*а*) и B_{1212} (*б*) для тканевого композита

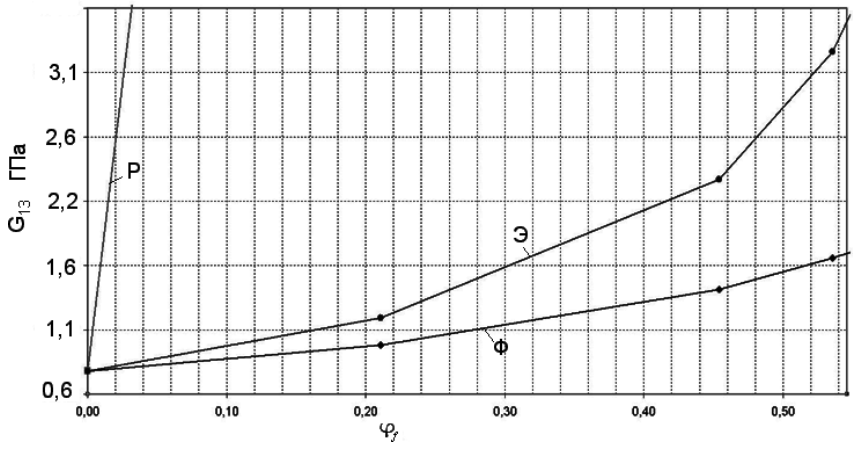


Рис. 24. Модуль сдвига $G_{13} = G_{12} = G_{23}$ (материал обладает кубической симметрией) 3D-композита, вычисленный по Фойгту (Ф), Рейссу (Р), и эффективный модуль сдвига (Э), вычисленный по методу асимптотического осреднения

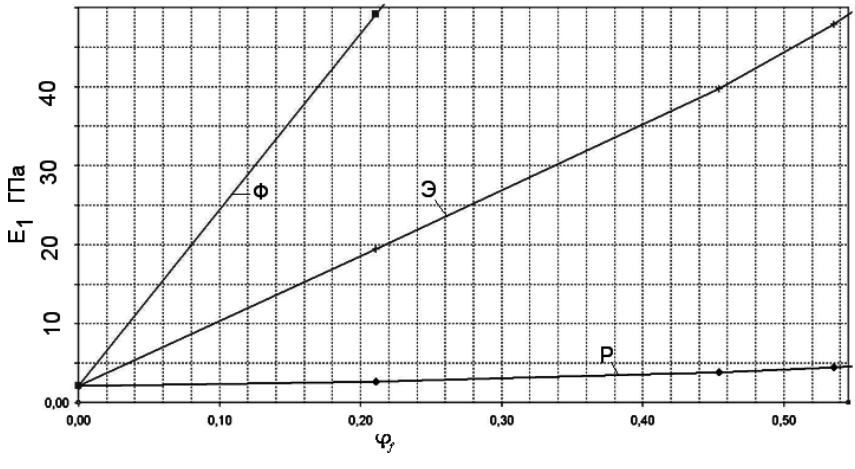


Рис. 25. Модуль Юнга $E_1 = E_2 = E_3$ (материал обладает кубической симметрией) 3D-композита, вычисленный по Фойгту (Ф), Рейссу (Р), и эффективный модуль Юнга (Э), вычисленный по методу асимптотического осреднения

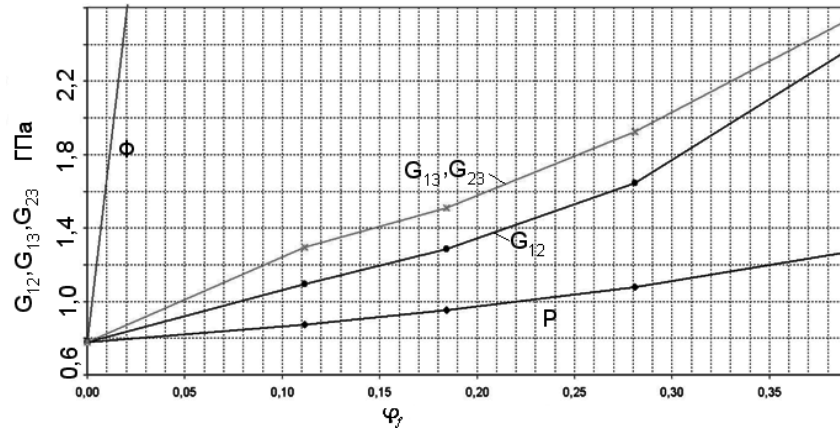


Рис. 26. Модули сдвига тканевого композита (выражена ортотропия свойств), вычисленные по Фойгту (Ф), Рейссу (Р), и эффективные модули сдвига G_{12}, G_{13}, G_{23}, вычисленные по методу асимптотического осреднения

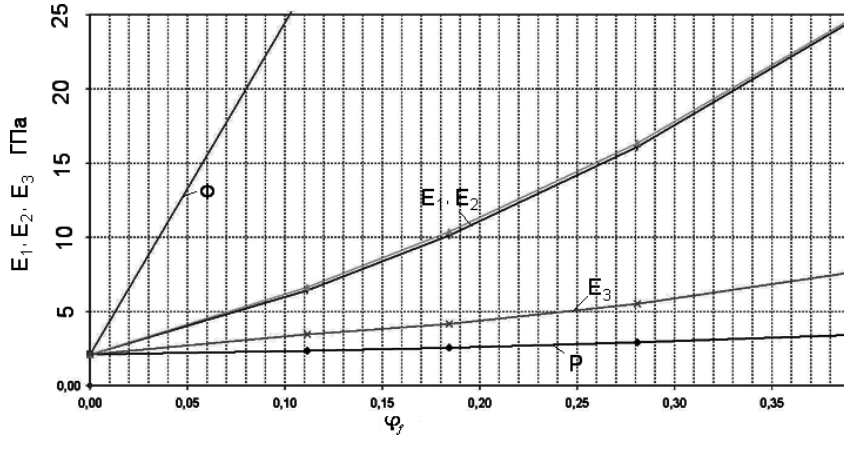


Рис. 27. Модули Юнга тканевого композита (выражена ортотропия свойств), вычисленные по Фойгту (Ф), Рейссу (Р), и эффективные модули Юнга E_{12}, E_{13}, E_{23}, вычисленные по методу асимптотического осреднения

результаты расчета эффективных технических констант для тканевых композитов.

На рис. 24–27 показаны графики зависимости эффективных характеристик композитов от концентрации в них волокон для различных типов структур армирования. На этих же графиках приведены для сравнения «вилки Фойгта — Рейсса» — зависимости эффективных характеристик композитов, рассчитанные по методам Фойгта и Рейсса [1, 25] (приближенные аналитические зависимости).

Эффективные характеристики композитов всегда лежат внутри «вилки Фойгта — Рейсса», что наглядно демонстрируют рис. 24–27. Однако значения эффективных характеристик существенно отличаются от значений по Фойгту и Рейссу, поэтому встречающееся в инженерной практике применение значений по Фойгту и (или) по Рейссу в качестве приближенных значений эффективных характеристик приводит к существенным погрешностям.

Литература

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

2. *Бахвалов Н. С.*, *Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

3. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 300 с.

4. *Малмейстер А. К.*, *Тамуж В. П.*, *Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

5. *Тарнопольский Ю. М.*, *Жигун И. Г.*, *Поляков В. А.* Пространственно-армированные композиционные материалы. М.: Машиностроение, 1987. 225 с.

6. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

7. *Алфутов Н. А.*, *Зиновьев П. А.*, *Попов Б. Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.

8. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 334 с.

9. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с фр. М.: Мир, 1984, 472 с.

10. Композиционные материалы: Пер. с англ.: В 2 т. Т. 2: Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. М.: Мир, 1978. 564 с.

11. *Bensoussan A.*, *Lions J.-L.*, *Papanicolaou G.* Asimptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North Holland, 1978. 500 p.

12. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1040–1048.

13. *Мольков В. А.*, *Победря Б. Е.* Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1985. № 2. С. 119–130.

14. *Димитриенко Ю. И.*, *Кашкаров А. И.* Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2.

15. *Димитриенко Ю. И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.

16. *Димитриенко Ю. И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1998. 368 с.

17. *Баландин М. Ю.*, *Шурина Э. П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.

18. *Димитриенко Ю. И.*, *Кашкаров А. И.*, *Макашов А. А.* Разработка конечно-элементного метода решения локальных задач теории упругости «на ячейке периодичности» для композитов с периодической пространственной структурой // Математика в современном мире. Калуга, 2004. С. 177–191.

19. *Димитриенко Ю. И.*, *Кашкаров А. И.*, *Макашов А. А.* Конечно-элементное моделирование процесса разрушения пространственно-армированных композитов с периодической структурой // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. М., 2004. С. 485–497.

20. *Димитриенко Ю. И.*, *Кашкаров А. И.*, *Харченко А. В.* Эффективные методы расчета характеристик пространственно-армированных композитов // Вопр. оборонной техники. 2002. № 1. С. 41–47.

21. *Димитриенко Ю. И.*, *Кашкаров А. И.*, *Харченко А. В.* Численные методы расчета упругих характеристик композиционных материалов со сложными структурами армирования // Аэрокосмические технологии. М., 2002. С. 90–97.

22. *Димитриенко Ю. И.*, *Соколов А. П.*, *Кашкаров А. И.* Разработка конечно-элементного метода решения задач расчета эффективных характеристик композиционных материалов на многопроцессорных вычислительных системах // Аэрокосмические технологии. М., 2004. С. 113–114.

23. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 544 с.

24. *Попов Б. Г.* Расчет конструкций вариационно-матричными методами. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993.

25. *Hashin Z.*, *Shtrikman S.* A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials // J. Mech. a. Phys. Solids. 1963. Vol. 11, N. 2. P. 127–142.

26. *Dimitrienko Yu.* I Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. 1. Method of Asymptotic Averaging // European Journal of Mechanics. A — Solids. 1998. Vol. 17, Iss. 2. P. 305–319.

27. *Димитриенко Ю. И.*, *Соколов А. П.* Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31–38.

28. *Димитриенко Ю. И.*, *Соколов А. П.* Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 4. С. 96–110.

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Метод асимптотического осреднения для расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов 6

1.1. Система уравнений линейной теории упругости для периодических структур 6

1.2. Асимптотическое разложение системы уравнений линейной теории упругости 9

1.3. Осреднение по «ячейке периодичности» 11

1.4. Локальная задача на «ячейке периодичности» 11

1.5. Осредненные уравнения теории упругости 12

Глава 2. Разработка метода решения локальных задач на «ячейке периодичности» 14

2.1. Преобразование задачи на «ячейке периодичности» к задачам для псевдоперемещений 14

2.2. Формулировка задач на $1/8$ «ячейки периодичности» . . . 18

2.3. Явный вид граничных условий для задач L_{pq} 21

2.4. Теорема о продолжении решения задачи L_{pq} на всю «ячейку периодичности» 24

Глава 3. Расчет эффективных характеристик композиционных материалов 27

3.1. Эффективные определяющие соотношения композиционного материала 27

3.2. Эффективные технические константы композиционного материала 28

3.3. Тензоры концентрации напряжений в компонентах композиционного материала 29

Глава 4. Метод конечных элементов для решения задач L_{pq} . . 31

4.1. Вариационная формулировка локальной задачи L_{pq} 31

4.2. Метод конечных элементов для задач L_{pq} 35

4.3. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений 39

Глава 5. Численное моделирование микронапряжений и эффективных упругих характеристик композиционных материалов 40

5.1. Однонаправленно-армированные композиционные материалы 40
5.2. Ортогонально-армированные композиты (3D-композиты) 48
5.3. Композиты, армированные по диагоналям куба 53
5.4. Тканевые композиты 57

Литература 63

Учебное издание

Димитриенко Юрий Иванович
Соколов Александр Павлович

Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов

Редактор *О. М. Королева*
Корректор *Л. Н. Петрова*
Компьютерная верстка *М. А. Голуба*

Подписано в печать 25.12.2009. Усл. печ. л. 3,95.
Формат $60 \times 84/16$. Тираж 300 экз. Изд. № 8.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.