В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА

Дойти до самой СУТИ!

Настольная книга для углубленного изучения физики в средней школе

Абитуриентам

Участникам олимпиад

Учителям физики

Всем, кто хочет понять физику и научиться решать стандартные и нестандартные задачи!

МЕХАНИКА

URSS

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА
ДОЙТИ ДО САМОЙ СУТИ!

Настольная книга
для углубленного изучения
физики в средней школе

Механика

Научные редакторы
кандидат физико-математических наук *Н. С. Алексеева*,
PhD *А. Е. Дементьев*

URSS
МОСКВА

ББК 22.21 22.3я73 22.31я73 22.3о

Дельцов Виктор Павлович, Дельцов Василий Викторович

Физика: дойти до самой сути! Настольная книга для углубленного изучения физики в средней школе. Механика: Учебное пособие / Науч. ред. Н. С. Алексеева, А. Е. Дементьев. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 272 с.

Настоящее издание представляет собой уникальное учебное пособие по основам современной физики для средней школы. Оно предназначено для школьников, углубленно изучающих физику, а также для абитуриентов. Пособие может использоваться в качестве настольной книги для учителей физики, ибо в нем есть всё — от определений физических величин и формулировок законов до математических выводов достаточно сложных вопросов; от несложных примеров до олимпиадных задач, многие из которых решены.

Настоящая книга — это плод 40-летнего преподавания физики в классах основного и физико-математического профилей. Многое в существовавших ранее и нынешних учебниках авторов не устраивает, поэтому они пытаются растолковать трудные и спорные моменты сами, исключить двойные и тройные толкования одного и того же. Впервые в школьном учебнике авторы разработали методику изложения фазы колебаний и циклической частоты методом векторных диаграмм, который широко применяется при изучении механических и электромагнитных колебаний в вузах и инженерной практике, но в школе до сих пор излагался чисто формально, что затрудняло понимание учащимися этих важных тем.

Теоретический материал изложен на глубоком научном уровне с единым подходом к формулировкам, конкретно и четко, что существенно сокращает расстояние от теории до практики (решения задач) и избавляет учащихся от необходимости впоследствии переучиваться в вузах.

По ходу изложения теоретического материала постоянно разбирается большое количество задач, это помогает еще глубже понять теорию. А это необходимо, чтобы еще успешнее решать другие стандартные и нестандартные задачи, и не только по физике, ибо развитый мозг в одной области знаний может легко переключаться на решение задач других областей.

Цель авторов — помочь учащимся усвоить правильно физические понятия и законы, иллюстрируя их проявление на примерах, и научиться переводить нестандартные задачи в стандартный вид и решать их уже как простые задачи.

Представленный курс уникален по глубине, полноте и систематичности изложения теоретического и практического материала. Книга написана практикующим учителем физики, подготовившим десятки призеров Всероссийской олимпиады, в соавторстве с его сыном, магистром МФТИ, который, будучи школьником, три года подряд становился призером и победителем заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике. Весь материал в пособии преподнесен так, чтобы раскрыть физическую сущность происходящих явлений и чтобы от теории до практики решения задач был всего один шаг.

Рецензенты: учитель высшей категории *С. Н. Калякина*;
заслуженный учитель Чувашской Республики *А. С. Чугунова*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 17. Зак. № 3351.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Печатное дело».
142300, МО, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

ISBN 978–5–9710–3272–4

Оглавление

Используемые обозначения

Обозначения, связанные с векторами:

$\vec{a}$ – вектор «a»,
a – модуль вектора «a»,
$\vec{a}_x$ – составляющая вектора «a» по оси X,
$|\vec{a}_x|$ – модуль составляющей вектора «a» по оси X,
a_x – проекция вектора «a» на ось X.

Обозначения физических величин:

$\vec{r}$ – радиус-вектор,
$\vec{S}$ – перемещение,
l – путь или длина дуги,
h – высота,
t – время,
τ – промежуток времени,
$\vec{\upsilon}$ – скорость (мгновенная скорость),
$\vec{\upsilon}_{\text{ср}}$ – средняя скорость перемещения,
$\upsilon_{\text{ср}}$ – средняя скорость пути,
$\vec{a}$ – ускорение,
$\vec{a}_\tau$ – касательная составляющая ускорения $\vec{a}$ (касательное, тангенциальное ускорение),
$\vec{a}_n$ – нормальная составляющая ускорения $\vec{a}$ (центростремительное ускорение),
Z – число колебаний или число оборотов,
T – период вращения или период колебаний,
n – частота вращения,
ν – частота колебаний,
φ – угол поворота или фаза колебаний,
$\Delta\vec{\varphi}$ – угловое перемещение,
$\vec{\omega}$ – угловая скорость,
ω – циклическая (круговая) частота колебаний,
$\vec{\beta}$ – угловое ускорение,
m – масса,
ρ – объемная плотность вещества,
$\vec{F}$ – сила,
$\vec{P}$ – вес тела,
μ – коэффициент трения,
k – жесткость,
σ – механическое напряжение,
Δl – абсолютное удлинение,
ε – относительное удлинение,
$\vec{p}$ – импульс тела,
p – давление,
$\vec{g}$ – ускорение свободного падения,
$\vec{j}$ – импульс силы,
$\vec{M}$ – момент силы,
d – плечо силы,
I – момент инерции,
$\vec{L}$ – момент импульса тела,
$\vec{\lambda}$ – импульс момента силы,
E – энергия,
w – объемная плотность энергии,
A – работа,
N – мощность,
η – коэффициент полезного действия,
η – динамическая вязкость,
Q – количество теплоты.

Посвящается памяти родителей:
Дельцовых Павла Васильевича и
Ксении Варфоломеевны

От каждого по способностям,
Каждому по потребностям.
Гуманистический принцип

Дорогой друг!

Перед Вами учебное пособие «Механика». Это – универсальное учебное пособие. Текст книги набран двумя шрифтами: крупным и мелким (петитом). Для овладения основными понятиями, законами и решения несложных задач, то есть для основного уровня, достаточно изучать только то, что набрано крупным шрифтом. При некоторой помощи учителя книгу можно использовать как учебное пособие для 10 класса общеобразовательной школы. Но в том же общеобразовательном классе есть ребята, которым физика нужна для профильного обучения, например, со сдачей ЕГЭ. В этом случае нужно ещё разбирать задачи из упражнений, многие из которых частично или полностью решены.

Если же хотите поступать в вузы на специальности с повышенными требованиями к знаниям по физике, то Вам полезно изучать и теоретические вопросы, набранные петитом, прорешать все задачи упражнений, а так же нестандартные задачи главы №10. Для работы над книгой по профильному и углубленному вариантам нужна достаточно хорошая математическая подготовка.

Всем полезно выполнить хотя бы часть экспериментальных заданий (лабораторных работ) главы №9, ибо физика – это экспериментальная наука. И без достаточно большого количества решённых экспериментальных задач полноценно изучить физику невозможно.

Наша книга – это плод 40-летнего преподавания физики в классах основного и физико-математического профилей. Многое в существовавших ранее и нынешних учебниках нас не устраивает, поэтому мы пытаемся растолковать трудные и спорные моменты сами, например, понятие инертности; исключить двойные и тройные толкования одного и того же, например понятие скорости, первой космической скорости и т.д. Мы пытались усовершенствовать методику изложения материала, особенно по разделу механические колебания. Впервые в школьном учебнике мы разработали методику изложения фазы колебаний и циклической частоты методом векторных диаграмм, который широко применяется при изучении механических и электромагнитных колебаний в вузах и инженерной практике, но в школе до сих пор методика его изложения проводилась чисто формально, что затрудняло понимание учащимися этих важных тем.

Современной физике всего 350 лет. Язык физических понятий развивается. Поэтому неудивительно, что Вы встретите непривычные толкования. Можно обратить внимание, что даже во время работы над этой книгой шёл процесс развития формулировок понятий. Так свойство инертность дано в двух вариантах. Причём второе толкование, которое появилось в процессе защиты первого, более адекватно отражает суть этого понятия.

Теоретический материал изложен на глубоком научном уровне с единым подходом к формулировкам, конкретно и чётко, что существенно сокращает расстояние от теории до практики (решения задач), к тому же в вузах не придётся переучиваться.

По ходу изложения теоретического материала решено 70 задач; это помогает ещё глубже понять теорию. А это необходимо, дорогой читатель, чтобы Вы ещё успешнее могли решать другие стандартные и нестандартные задачи и не только по физике, ибо развитый мозг в одной области знаний может легко переключаться на решение задач других областей.

Наша цель – помочь Вам усвоить правильно физические понятия и законы, иллюстрируя их проявление на примерах, и научиться переводить нестандартные задачи в стандартный вид и решать их уже как простые задачи.

Известный учитель из Ноябрьска В. И. Ткачук, читая ранее изданную нами «Молекулярную физику. Термодинамику» сказал, что всё это здорово, но где он находит столько времени всё это написать? Отвечаем. В работе над книгой мне помогали замечательные помощники – сыновья. Они – сильные физики с компьютерным уклоном. К тому же наша фамилия по материнской линии Бурлаковы, а по отцовской – Дельцовы, поэтому наша судьба – ***тянуть лямку и делать дело;*** тем более мама из семьи староверов, у которых сама кровь не разрешает разгульную жизнь. Так что остаётся только работать дённо и нощно на ниве просвещения.

Дорогой Друг, не обязательно изучать всё, что изложено в этой книге, *изучайте по своим возможностям, но чтобы удовлетворить свои потребности*, например, поступить в интересующий вуз по желаемой специальности на бюджетной основе. Для этого физику надо изучить на достаточном теоретическом и практическом уровне. Знайте, что ***в нашей «Механике» достаточно теоретического и практического материала, чтобы не только поступить в самые престижные вузы, но и успешно участвовать во Всероссийских олимпиадах по физике.***

Физика – это легко, но лёгкий Аполлон (изображенный на фронтоне Большого театра) несётся на колеснице, запряжённой четвёркой взмыленных лошадей. *Работайте регулярно, понемногу и успех к Вам придёт.*

Хочется поблагодарить учителей физики, которые сделали полезные замечания и предложения за время работы над рукописью: А. С. Чугунову, И. И. Полбенникову, С. Н. Калякину, Л. Н. Турковскую, К. С. Филимоненко, а так же русоведа А. В. Исаеву, которая не только исправляла ошибки, но в некоторых местах так корректировала текст, что физический смысл стал проявляться лучше, чем у авторов; это неудивительно, поскольку в школе она закончила физмат класс.

Авторы. 7 ноября 2015 г.

Введение

Окружающий нас Мир состоит из огромного числа материальных объектов, которые разнообразно движутся и взаимодействуют. В пространственной структуре Мира различают три уровня.

1. *Мегамир*. Это мир огромных астрономических систем – галактик, включающих в себя сотни миллиардов звезд. Все вместе они образуют Вселенную.

2. *Макромир*. Это мир обычных, окружающих нас в повседневной жизни тел, начиная от песчинки и кончая планетными системами, подобными нашей Солнечной. Все эти тела называют макроскопическими.

3. *Микромир*. Это мир молекул, атомов и элементарных частиц (электронов, протонов и т. д.).

Физика – это одна из наук о материальном Мире (Природе). Она изучает наиболее общие формы движения и взаимодействие материй. В физике рассматриваются четыре вида взаимодействий: гравитационные, электромагнитные, ядерные и слабые, которые лежат в основе явлений: механических, тепловых, электромагнитных, оптических, ядерных.

> *В механике мы будем рассматривать в основном явления, которые происходят на уровне макромира, т.е. изучать движение и взаимодействие макроскопических тел.*

Под телом в физике понимается любая структура, образованная из вещества: автомобиль, капля воды, облако, пламя свечи, молекула, электрон и т. д.

В физике при решении многих задач используются реальные и мысленные модели, например, материальная точка.

Материальная точка *– мысленная модель тела, в которой пренебрегают формой, размерами и структурой тела, сохраняя лишь свойства инертности и гравитационности.*

Модели позволяют абстрагироваться от огромного количества свойств тела (механических, тепловых, электрических) и решать поставленный круг задач в тех случаях, когда учет этих свойств не влияет на результат решения задачи в пределах требуемой точности.

Основные разделы в механике – это кинематика, динамика и статика.

Глава 1. Кинематика

Есть только два способа прожить жизнь.
Первый – будто чудес не существует.
Второй – будто кругом одни чудеса.
Альберт Эйнштейн

Кинематика *– это раздел механики, в котором изучается движение макроскопических тел (kinema, род. п. kinematos – движение).*

В кинематике рассматриваются способы описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения.

§ 1. Механическое движение. Системы отсчёта

Под механическим движением понимается изменение положения тела или его частей в пространстве с течением времени относительно других тел.

Все механические движения можно разделить на два вида в зависимости от характера взаимодействия данного тела с другими телами – это *движение по инерции* и *неинерциальное движение* тела.

Если действия на данное тело других тел взаимно компенсируются, то говорят, что тело ***движется по инерции****.*
Если же тело испытывает некомпенсированное действие со стороны других тел, то оно ***движется неинерциально****.*

Системы отсчёта. Понятие системы отсчёта (СО) вводится для того, чтобы фиксировать положение тела в пространстве и времени.

Из каких элементов состоит система отсчёта?

Одним из элементов системы отсчёта является тело отсчёта. ***Телом отсчёта*** *(ТО) назовем реальное тело (точку на теле), относительно которого рассматривается движение других тел.* Траектория движения одного и того же тела может быть различна относительно разных тел отсчёта. При описании движения тела нужно удачно выбрать тело отсчёта, чтобы уравнения движения рассматриваемого тела были наиболее простыми.

Другим элементом системы отсчёта является ***система координат*** (СК), *которая служит для определения положения тела в пространстве.*

И третьим элементом системы отсчёта является *способ измерения времени –* ***часы*** (Ч). Этих трёх элементов достаточно для определения положения тела в пространстве и времени (рис. 1).

Система отсчёта представляет собой совокупность:

- тела отсчёта,
- системы координат,
- способа измерения времени (часов).

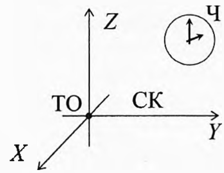


Рис. 1. *Система отсчёта*

Тело отсчёта обычно помещают в начале системы координат. С любым телом можно связать систему отсчёта. Все системы отсчёта можно разделить на: инерциальные, неинерциальные и квазиинерциальные.

***Система отсчёта называется инерциальной (ИСО)**, если её тело отсчёта движется по инерции, то есть когда действия на тело отсчёта других тел взаимно компенсируются.*

***Система отсчёта называется неинерциальной (НИСО)**, если её тело отсчёта движется не по инерции, то есть когда оно испытывает некомпенсированное действие со стороны других тел.*

Следует отметить, что полной взаимной компенсации внешних действий на данное тело, как правило, не бывает. Но во многих случаях неинерциальность системы отсчёта заметно не проявляется при протекании различных процессов. Такие системы отсчёта называются ***квазиинерциальными*** (почти инерциальными). Например, система отсчёта, связанная с поверхностью Земли, неинерциальна из-за вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца, но во многих механических опытах это не проявляется.

§ 2. Вектор. Проекция вектора на ось

***Вектор** (от лат. vector – несущий) представляет собой направленный отрезок, то есть отрезок определённой длины, у которого указаны начало и конец.*

Вектор обозначается буквой со стрелкой над ней, например, $\vec{a}$ или двумя буквами начала и конца вектора и стрелкой над ними, например, $\overrightarrow{AB}$. Модуль $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ равен (пропорционален) длине отрезка, соединяющего начало и конец вектора.

При помощи векторов изображаются перемещение, скорость, сила и др. векторные величины. Действия над векторными величинами в физике производятся по тем же правилам, что и в математике.

Векторы называются *равными*, если совпадают их модули и направления, то есть вектор, перенесенный параллельным переносом, равен исходному (рис. 2а):

$$\text{если } |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ и } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \text{ то } \vec{a} = \vec{b}.$$

Векторы равные по модулю, но противоположно направленные называются *противоположными* (рис. 2б), то есть

$$\text{если } |\vec{a}| = |\vec{c}| \text{ и } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}, \text{ то } \vec{c} = -\vec{a}.$$

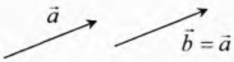


Рис. 2а. *Равные векторы*

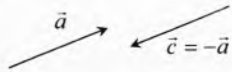


Рис. 2б. *Противоположные векторы*

Проекция вектора на ось. Для описания движения тел вводят понятие: проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\vec{a}$ расположен под некоторым углом к оси X (рис. 3) Модуль этого вектора обозначим буквой a без стрелки: $a = |\vec{a}|$. Спроецируем начальную и конечную точки вектора $\vec{a}$ на ось X, то есть из начальной «A» и конечной «B» точек вектора опустим перпендикуляры на ось X.

Вектор $\vec{a}_x$, соединяющий проекции (A_1 и B_1) концов вектора $\vec{a}$, расположенный параллельно оси X и направленный в сторону проекции конечной точки, называется составляющей вектора $\vec{a}$ по оси X.

Таким образом, вектор $\vec{a}_x$ является составляющей вектора $\vec{a}$ или вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси X.

Если составляющая вектора на ось направлена по оси, то проекция вектора на эту ось положительна $a_x>0$ (рис. 3а). Если же составляющая вектора направлена противоположно положительному направлению оси, то проекция этого вектора на ось отрицательна $b_x<0$ (рис. 3б). Если же вектор перпендикулярен оси, то его проекция равна нулю. Таким образом, проекция вектора на ось – это действительное число.

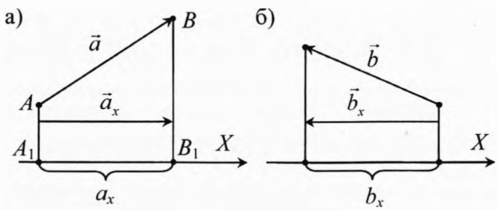


Рис. 3. *Составляющая и проекция вектора*

***Проекция вектора на ось** – это действительное число, равное длине составляющей вектора по этой оси, взятое со знаком плюс, если составляющая вектора направлена по оси, и со знаком минус, если составляющая вектора направлена против оси.*

В наших примерах $a_x = |\vec{a}_x|$, $b_x = -|\vec{b}_x|$.

В общем виде для проекции вектора $\vec{c}$ на ось X можно записать:

$$\boxed{c_x = \pm|\vec{c}_x|}.$$

§ 3. Радиус-вектор. Перемещение

В соответствии с методикой преподавания физики для количественного описания движения и взаимодействия тел необходимо вводить физические величины*. Определение любой физической величины должно состоять из трёх основных частей, отражающих:

1) ближайший родовой признак – какая величина: векторная, скалярная, тензорная.

2) ближайший видовой признак – что характеризует эта величина: физический смысл величины на качественном уровне?

3) способ измерения – чему равна эта величина: формула по определению, выявляющая количественно смысл величины и единицы измерения?

Радиус-вектор. Механическое движение – это изменение положения тела относительно других тел. А чем определяется положение тела? Его можно задать координатами, например, в прямоугольной системе координат. Положение тела можно также задать и с помощью радиус-вектора.

Пусть тело *M* (материальная точка) находится на некотором расстоянии от тела отсчёта (ТО). Соединим тело отсчёта с материальной точкой *M* (рис. 4). Направленный отрезок, соединяющий тело отсчёта с материальной точкой, назовем радиус-вектором $\vec{r}$.

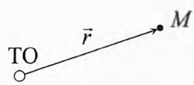


Рис. 4. *Радиус-вектор*

Если известно, где находится тело отсчёта, и задан радиус-вектор тела *M*, то положение тела *M* однозначно определено.

***Радиус-вектор** – это векторная величина, определяющая положение тела в пространстве. Радиус-вектор направлен от тела отсчёта в сторону данного тела, а его модуль равен длине отрезка, соединяющего тело отсчёта с данным телом.*

Путь, перемещение. При движении положение тела изменяется в данной системе отсчёта.

*Геометрическое место точек, в которых побывало тело, называется **траекторией тела**.*

Траектория может быть любой по форме: прямолинейной или криволинейной (плоской или трёхмерной).

***Путь** – это расстояние, пройденное телом по траектории (длина траектории).*

* Мелким шрифтом изложен неосновной материал.

Путь обозначается буквой l и измеряется в метрах, километрах и других единицах длины.

Пусть тело перешло по некоторой траектории из точки A в точку B (рис. 5). Как при этом изменилось его положение?

Из рисунка видно, что новое положение B отстоит от первоначального положения A на расстоянии S под углом α к оси X. Очевидно, что отрезок AB, направленный от A к B, отвечает на вопрос: как изменилось положение тела в пространстве (в выбранной системе координат) при переходе тела от A к B. Вектор $\overrightarrow{AB}$ называется перемещением $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$. Из рисунка также видно, что перемещение равно разности между конечным и начальным значениями радиус-вектора

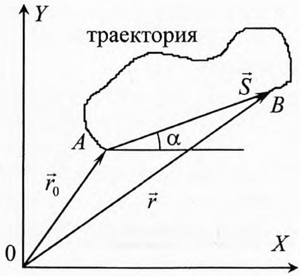


Рис. 5. *Траектория*

$$\boxed{\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0} \qquad (1)$$

Справка из математики: если от последующего значения какой-либо величины x отнять предыдущее, то получим изменение величины x:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Таким образом, перемещение $\vec{S}$ равно изменению радиус-вектора:

$$\boxed{\vec{S} = \Delta\vec{r}} \qquad (1')$$

***Перемещение** – это векторная физическая величина, показывающая, как изменяется положение тела в пространстве. Перемещение равно изменению радиус-вектора при переходе тела из одной точки в другую.*

Модуль перемещения обозначается буквой S без стрелки. Перемещение измеряется в м, км и других единицах длины.

Между путём и модулем перемещения (за одно и то же время) существует очевидное соотношение:

$$\boxed{l \geq S}.$$

Путь l равен модулю перемещения S только при прямолинейном движении и неизменном направлении.

✍ **Пример 1.** Чему равны пути и модули перемещений конца минутной стрелки за 0,5 часа и за 1 час (рис. 6).

➥**Решение.** За 0,5 часа конец минутной стрелки пройдет путь $l_1=\pi R$, где R – длина минутной стрелки и совершит перемещение $S_1=2R$. За 1 час путь равен $l_2=2\pi R$, а модуль перемещения $S_2=0$, так как стрелка вернулась в исходную точку.↩

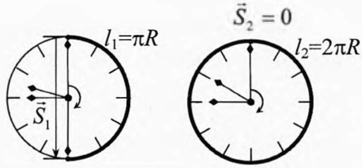


Рис. 6. *Минутная стрелка*

✍ **Пример 2.** В начале января Земля подходит наиболее близко к Солнцу (перигелий) $r_п=147{,}117\cdot 10^6$ км, а в начале июля – максимально удаляется от Солнца (афелий). Большая ось земной орбиты $S=299{,}20\cdot 10^6$ км. Чему равно максимальное (афелийное) расстояние от Земли до Солнца и разность между афелийным и перигелийным расстоянием (рис. 7)?

➥**Решение.** Согласно формуле (1) перемещение $\vec{S}$ при переходе от перигелийного до афелийного расстояния $\vec{S}=\vec{r}_а-\vec{r}_п$ или в скалярном виде:

$$S=r_а+r_п \Rightarrow r_а=S-r_п;$$

$$r_а=(299{,}20-147{,}117)\cdot 10^6 \text{ км} \approx 152{,}1\cdot 10^6 \text{ км};$$

$$r_а-r_п=(152{,}1-147{,}1)\cdot 10^6 \text{ км}=5{,}0\cdot 10^6 \text{ км}.$$↩

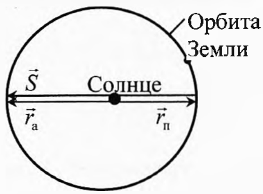


Рис. 7. *Орбита Земли*

✓ **Ответ.** Максимальное расстояние от Земли до Солнца равно 152,1 млн км, а разность между максимальным и минимальным расстояниями равна 5 млн. км, поэтому в январе Земля получает больше энергии от Солнца, чем в июле (на 7%).

§ 4. «Теоремка» о проекции перемещения

Пусть тело перешло из положения M_0 в положение M и совершило при этом перемещение $\vec{S}$ (рис. 8). Вычислим его проекции S_x и S_y на оси координат. Согласно определению проекции, в нашем случае $S_x=-|\vec{S}_x|$, так как составляющая перемещения направлена против оси X. Выразим проекцию S_x через начальное и конечное значения координат. Поскольку в нашем примере проекция S_x отрицательна, нужно от меньшей координаты отнять большую:

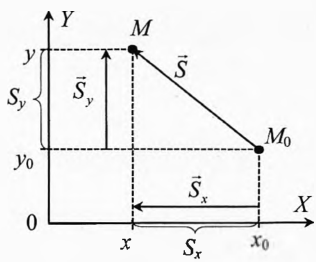


Рис. 8. *Проекция перемещения*

$$\boxed{S_x=x-x_0}. \quad (2)$$

Проекция перемещения по оси Y, как видно из рисунка, имеет положительное значение, так как направление $\vec{S}_y$ совпадает с положительным направлением оси Y: $S_y = |\vec{S}_y|$. Чтобы S_y получилась положительной, нужно от большей координаты отнять меньшую:

$$\boxed{S_y = y - y_0}. \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3) видим, что во всех случаях проекция перемещения тела равна изменению соответствующей координаты тела.

Это и есть ***«теоремка» о проекции перемещения***.

Проекция перемещения тела на любую ось равна изменению его координаты вдоль этой оси.

Из (2) и (3) следует:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + S_x; \\ y = y_0 + S_y. \end{cases}} \qquad (4)$$

Уравнения (4) называются *уравнениями движения для координат тела.* Из них видно, что для определения координат тела нужно знать его начальные координаты и проекции перемещения на координатные оси.

✍ **Пример 3.** Начальные координаты тела: x_0=7 м, y_0=3,5 м; конечные: x=3 м, y=6,5 м. Найти модуль перемещения S тела и его проекции S_x и S_y на координатные оси X и Y.

➥**Решение.** Согласно «теоремке» о проекции перемещения:

$$S_x = x - x_0,\ S_x = 3\text{ м} - 7\text{ м} = -4\text{ м};\quad S_y = y - y_0,\ S_y = 6{,}5\text{ м} - 3{,}5\text{ м} = 3\text{ м}.$$

Модуль перемещения по теореме Пифагора: $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ =5 м.↩

✓ **Ответ.** S=5 м; S_x=–4 м; S_y=3 м.

§ 5. Сложение перемещений

Пусть тело совершило за время t сначала перемещение $\vec{S}_1$, затем $\vec{S}_2$ (рис. 9). Чему равно полное перемещение тела за это время?

Из определения перемещения следует, что суммарным перемещением $\vec{S}$ будет направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, т. е. перемещение $\vec{S}$ равно векторной сумме перемещений $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$:

$$\boxed{\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2}.$$

Действительно, тело, совершив перемещение $\vec{S}_1$, а затем – $\vec{S}_2$, попало из точки A в точку C. Если же тело напрямую перейдет из точки A в точку C, совершив перемещение $\vec{S}$, то *в обоих случаях изменение положения тела в пространстве окажется одинаковым*, а именно, на расстояние S под углом α к горизонтали, т. е. геометрическая сумма $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}$ приобретает физический смысл.

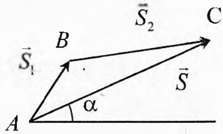


Рис. 9. *Сложение перемещений*

Если перемещение $\vec{S}$ состоит из нескольких перемещений (рис. 10), то:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + ...$$

Тогда, результирующие проекции перемещения на оси координат равны алгебраической сумме проекций перемещений на эти оси:

$$\begin{cases} S_x = S_1 + S_{2x} + S_{3x} + ... \\ S_y = S_1 + S_{2y} + S_{3y} + ... \end{cases}$$

Из рис. 8 и 10 видно, что результирующее перемещение равно векторной сумме перемещений по осям, а его модуль вычисляется по теореме Пифагора:

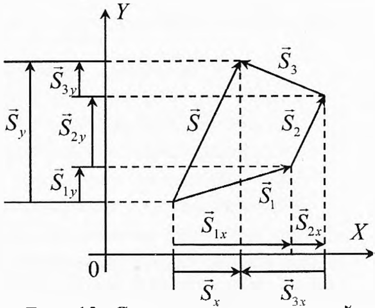


Рис. 10. *Сложение перемещений*

$$\boxed{\vec{S} = \vec{S}_x + \vec{S}_y};\quad \boxed{S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}}.$$

Пример 4. Группа школьников прошла сначала S_1=0,40 км на северо-запад, затем S_2=0,50 км на восток и ещё S_3=0,30 км на север. Найти модуль и направление перемещения группы.

Решение. Направим ось Y на север, а ось X – на восток (рис. 11). Построим все 3 перемещения в соответствии с условием задачи.

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} = -S_1\cos45° + S_2 + 0;\ S_x = 217 \text{ м}.$$

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} = S_1\sin45° + 0 + S_3;\ S_y = 583 \text{ м}.$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{217^2 + 583^2};\ S = 622 \text{ м}.$$

$$\text{tg}\alpha = S_x/S_y,\ \text{tg}\alpha = 0{,}372,\ \alpha = 20{,}4° \approx 20°.$$

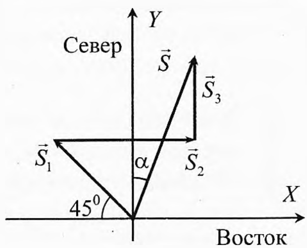


Рис. 11. *Перемещение школьников*

✓ **Ответ.** Перемещение школьников равно S=0,62 км, с азимутом α=20°.

§ 6. Скорость

Перемещение характеризует изменение положения тела в пространстве. Но, зная только перемещение, мы ничего не можем сказать о том, как двигалось тело в разные моменты времени. Если известна траектория движения, то можно указать направления движения в различных точках. Но как быстро двигалось тело на разных участках траектории, остаётся неизвестным.

Для того чтобы описывать изменение положения тела в пространстве с течением времени (в каждый момент времени) вводится пространственно-временная характеристика движения – *скорость*. Синонимом скорости является слово *быстрота*. Скорость обозначается буквой υ по первой букве латинского слова *velokitas* (скорость).

Под ***моментом времени*** в физике понимается промежуток времени столь малый, что в течение него используемые приборы не могут обнаружить изменений измеряемых величин.

Длительность момента времени определяется качеством измерительного прибора. Мгновение ока длится 0,4 с. Для человека 0,01 с уже является моментом времени. Кадры в кинофильме меняются с периодом 0,04 с и мы этого не замечаем. А на электронном осциллографе можно запечатлеть процессы, длящиеся на несколько порядков меньше. Существуют приборы, которые могут фиксировать процессы за миллиардные доли секунды.

Скорость – векторная величина, т. к. скорость характеризует движение в пространстве и времени, а в любой момент времени тело движется в определенном направлении. Скорость является мгновенной характеристикой движения, ведь быстрота движения с течением времени может меняться.

Скорость – непрерывная величина. Это значит, что при изменении от одного значения до другого она принимает все промежуточные значения и не может измениться на конечную величину за бесконечно малый промежуток времени. Скорость больше у того тела, положение которого от точки к точке изменяется быстрее, чем у другого.

Формулу для измерения скорости получим на примере простейшего равномерного прямолинейного движения (РПД).

> ***Прямолинейным равномерным движением*** *называется такое движение, при котором за любые равные промежутки времени тело совершает одинаковые перемещения.*

Таким образом, при РПД быстрота движения (скорость) одинакова в любой момент времени.

Пусть шарик равномерно катится по столу и за каждые 0,2 с проходит 0,3 м. Составим таблицу зависимости S от t:

S, м	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2

Перемещение, как видно из таблицы, растёт с течением времени, но скорость при этом постоянна. Какое же соотношение величин удовлетворяет понятию скорость: будет векторным, непрерывным, одинаковым в любой момент времени и большим для того тела, которое движется быстрее?

Оказывается, всем этим условиям удовлетворяет отношение малого перемещения ΔS к малому промежутку времени Δt, за который оно произошло. Например,

$$\frac{\Delta S_{01}}{\Delta t_{01}} = \frac{\Delta S_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{\Delta S_{23}}{\Delta t_{23}} = \ldots;$$

$$\frac{\Delta S_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{0{,}6\text{ м} - 0{,}3\text{ м}}{0{,}4\text{ с} - 0{,}2\text{ с}} = 1{,}5\text{ м/с}; \quad \frac{\Delta S_{34}}{\Delta t_{34}} = \frac{1{,}2\text{ м} - 0{,}9\text{ м}}{0{,}8\text{ с} - 0{,}6\text{ с}} = 1{,}5\text{ м/с}\ldots$$

Поэтому, естественно, скорость определить как отношение малого перемещения (точнее, бесконечно малого) к малому промежутку времени, за который оно произошло:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}.$$

Из этой формулы следует, что скорость направлена так же, как малое перемещение в окрестности данной точки, то есть по касательной к траектории (рис. 12).

Рис. 12. *Скорость всегда направлена по касательной к траектории*

Скорость равна 1,5 м/с. Что это значит?

> *Измерить какую-либо величину – значит сравнить её с однородной величиной, принятой за единицу измерения этой величины.*

Например, длина комнаты 5 м, это значит, что длина комнаты в пять раз больше, чем эталон длины – метр.

Скорость шарика 1,5 м/с означает, что шарик движется (изменяет свое положение от одного к другому) в 1,5 раза быстрее, чем тело со скоростью 1 м/с. То есть, *скорость показывает во сколько раз данное тело движется быстрее, чем тело, движущееся со скоростью* 1 м/с.

Но у скорости есть и второй смысл. Из таблицы видно, что за 1,0 с тело прошло 1,5 м, то есть *скорость тела равна перемещению, которое совершит тело за единицу времени, если будет двигаться равномерно и прямо-*

линейно. Троллейбус движется со скоростью 40 км/ч. Это значит, что его положение изменяется в 40 раз быстрее, чем у тела со скоростью 1 км/ч, и если он будет двигаться равномерно, то в течение часа пройдет 40 км вдоль траектории.

***Скорость** – это векторная величина*, показывающая, как с течением времени изменяется положение тела в пространстве. Скорость равна отношению малого перемещения к малому промежутку времени, за который оно совершено.*

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t}}. \tag{5}$$

Для вычисления скорости при РПД не обязательно пользоваться формулой (5). Из таблицы видно, что, разделив модуль перемещения на соответствующее время движения, получим тот же результат. Значит, при равномерном прямолинейном движении можно вычислять модуль скорости и по формуле

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t}}, \quad \text{или в векторной форме} \quad \boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{S}}{t}}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\vec{S} = \vec{\upsilon} \cdot t$ или в проекциях на оси координат:

$$\boxed{\begin{cases} S_x = \upsilon_x \cdot t; \\ S_y = \upsilon_y \cdot t. \end{cases}} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), получим:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_x \cdot t; \\ y = y_0 + \upsilon_y \cdot t. \end{cases}} \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) называются уравнениями равномерного прямолинейного движения для проекций перемещения и координат тела соответственно.

✍ **Пример 5.** Начальные координаты тела x_0=0, y_0=3 м. Проекции скорости υ_x=2 м/с, υ_y=–1,5 м/с. Записать уравнения движения и уравнения траектории. Построить графики движения и траектории.

➥**Решение.** Запишем уравнения движения тела:

* Все величины, которые мы будем вводить, являются физическими, т. е. характеризуют какое-то движение и/или взаимодействие материи, но писать в определении «физическая» не будем для краткости.

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_x \cdot t; \\ y = y_0 + \upsilon_y \cdot t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot t; \\ y = 3 - 1{,}5 \cdot t. \end{cases}$$

Выразим время из первого уравнения: $t = \dfrac{x}{2}$. Подставив его во второе, получим уравнение траектории: y=3–0,75x.

✓**Ответ.** x=2t, y=3–1,5t, y=3–0,75x (рис. 13–15).

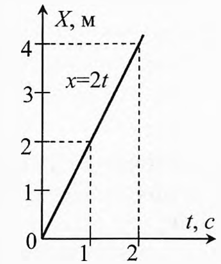


Рис. 13. *Координата тела по X*

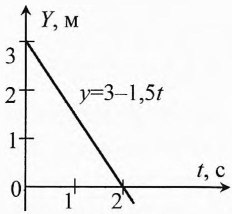


Рис. 14. *Координата тела по Y*

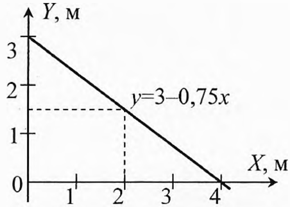


Рис. 15. *Траектория тела*

> ✍ **Пример 6.** Найти проекции перемещения, модуль перемещения и пройденный путь за первые 2 секунды движения тела из предыдущей задачи.

➥**Решение.** Представим графически зависимость проекции скорости υ_x, υ_y и модуля скорости υ от времени (рис. 16–18).

$$S_x=\upsilon_x \cdot t=2\cdot 2=4 \text{ м}; \quad S_y=\upsilon_y \cdot t=-1{,}5\cdot 2=-3 \text{ м};$$

$$l=S=\sqrt{S_x^2+S_y^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5 \text{ м}.$$

Перемещение можно вычислить и через полную скорость:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{4+2{,}25}=2{,}5 \text{ м/с}. \quad S=\upsilon t=2{,}5\cdot 2=5 \text{ м}.$$

✓**Ответ.** S_x=4 м; S_y=$\upsilon_y \cdot t$=–1,5·2=–3 м; l=S=5 м.

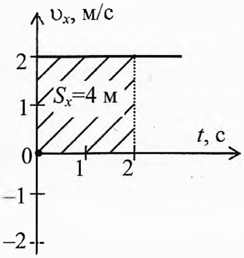


Рис. 16. *Скорость по X*

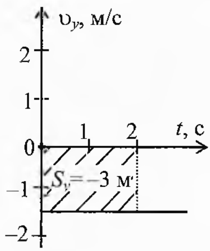


Рис. 17. *Скорость по Y*

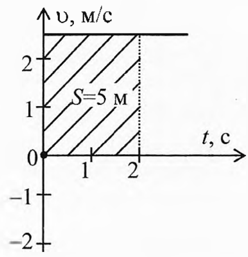


Рис. 18. *Модуль скорости*

Примечание. Из графиков (рис. 16–18) можно сделать следующие выводы.

Проекция перемещения равна (в определенном масштабе) площади под графиком зависимости проекции скорости от времени.
Модуль перемещения равен (в определенном масштабе) площади под графиком зависимости модуля скорости от времени.

§ 7. Принцип относительности. Относительность движения

Принцип относительности. Ещё китайский астроном Лося Хун, живший во II–I вв. до н.э., писал, что «команда на закрытом судне, когда оно перемещается, этого не замечает». Не заметить этого можно только в том случае, если все явления в этом судне происходят точно так же, как и на земле.


Галилео Галилей (1564–1642)

Впоследствии этот важный опытный факт был детально исследован Г. Галилеем. «Уединитесь, – писал Галилей, – с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой с плавающими в нём маленькими рыбками; подвесьте далее наверх ведерко, из которого вода будет капать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придётся бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте всё это, хотя у вас не возникает никакого сомнения в том, что, пока корабль стоит неподвижно, всё должно происходить именно так. Заставьте корабль двигаться с какой угодно быстротой, и тогда (если движение будет только равномерным и без качки в ту и другую стороны) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется корабль или стоит неподвижно».

Если начальные условия в разных инерциальных системах отсчёта отличаются, то и результаты в них, возможно, будут отличаться. Например, если с полки равномерно движущегося вагона начнет падать тело без начальной скорости, то его траектория относительно вагона будет прямой, а относительно земли в форме параболы, из-за того, что начальные скорости тела относительно вагона и земли различны.

На основании описанного Галилеем опыта с кораблем следует вывод.

Во всех инерциальных системах отсчёта все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях.

Это утверждение называется ***принципом относительности Галилея*** и является одним из самых фундаментальных законов природы.

Относительность движения. Траектория, скорость и перемещение различны для одного и того же тела в системах отсчёта, которые движутся друг относительно друга. Как связаны между собой величины, описывающие движение в разных системах отсчёта за одно и то же время?

Пусть по реке плывет плот со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, а человек идёт со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ по плоту из точки A в точку B. За это время плот совершит относительно системы отсчёта связанной с берегом перемещение $\vec{S}_1$, а человек относительно плота – перемещение $\vec{S}_2$. Из рис. 19 видно, что перемещение $\vec{S}$ человека относительно берега равно перемещению человека $\vec{S}_2$ относительно плота и перемещению плота $\vec{S}_1$ относительно берега.

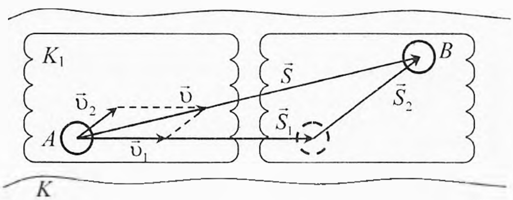


Рис. 19. *Относительность движения*

$$\boxed{\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2} \quad (9)$$

Уравнение (9) называется законом сложения перемещений. Систему отсчёта, связанную с берегом, назовем условно *неподвижной*, а систему отсчёта, связанную с плотом, – *подвижной* системой отсчёта. Тогда закон сложения перемещений (9) можно сформулировать следующим образом:

Перемещение тела $\vec{S}$ относительно неподвижной системы отсчёта равно сумме перемещения $\vec{S}_2$ тела относительно подвижной системы отсчёта и перемещения $\vec{S}_1$ подвижной системы отсчёта относительно неподвижной за одно и то же время.

Закон сложения можно записать и для проекций перемещений на оси координат:

$$\begin{cases} S_x = S_{1x} + S_{2x}, \\ S_y = S_{1y} + S_{2y}. \end{cases} \quad (9')$$

Если уравнение (9) разделить на время движения, то получим закон сложения скоростей:

$$\frac{\vec{S}}{t} = \frac{\vec{S}_1}{t} + \frac{\vec{S}_2}{t}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2}, \quad (10)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость тела в неподвижной системе отсчёта K, $\vec{\upsilon}_1$ – скорость подвижной системы отсчёта K_1 относительно неподвижной K, $\vec{\upsilon}_2$ – скорость тела относительно подвижной системы отсчёта K_1.

Или в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{1x} + \upsilon_{2x}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{1y} + \upsilon_{2y}. \end{cases} \quad (10')$$

Скорость тела $\vec{\upsilon}$ в неподвижной системе отсчёта равна сумме скорости $\vec{\upsilon}_1$ подвижной системы отсчёта относительно неподвижной и скорости тела $\vec{\upsilon}_2$ в подвижной системе отсчёта.

Полезно заметить, что закон сложения скоростей $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ справедлив и при неравномерном движении.

✍ **Пример 7.** Путь между двумя пристанями l=160 км теплоход проходит по течению за t_1=10 ч, а против течения за t_2=16 ч. Вычислить модуль скорости корабля относительно воды (скорость корабля в стоячей воде) υ_c и модуль скорости течения $\upsilon_т$ воды в реке.

➥**Решение.** Найдём сначала скорость корабля υ_1 по течению и υ_2 против течения относительно берега.

$$\upsilon_1 = \frac{l}{t_1}, \ \upsilon_1 = 16 \text{ км/ч}; \quad \upsilon_2 = \frac{l}{t_2}, \ \upsilon_2 = 10 \text{ км/ч}.$$

Согласно закону сложения скоростей:

$$\upsilon_1 = \upsilon_c + \upsilon_т, \qquad \upsilon_2 = \upsilon_c - \upsilon_т.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = 2\upsilon_c \Rightarrow \boxed{\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}}; \quad \upsilon_c = \frac{16+10}{2} = 13 \text{ км/ч}.$$

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = 2\upsilon_т \Rightarrow \boxed{\upsilon_т = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2}}; \quad \upsilon_т = \frac{6}{2} = 3 \text{ км/ч}.$$ ↩

✓**Ответ.** υ_c=13 км/ч, $\upsilon_т$=3 км/ч.

Пример 8. Один поезд движется со скоростью υ_1=72 км/ч, а второй в том же направлении со скоростью υ_2=90 км/ч. Через какой промежуток времени второй поезд догонит первый, если расстояние между ними в начальный момент S=9 км?

Решение. Второй поезд приближается к первому со скоростью

$$\upsilon_{21} = \upsilon_2 - \upsilon_1.$$

Действительно, если с первым поездом связать неподвижную систему отсчёта, то это равносильно тому, что дорога движется в обратную сторону со скоростью $\vec{\upsilon}_д = -\vec{\upsilon}_1$.

Согласно закону сложения скоростей скорость второго поезда относительно первого «неподвижного» поезда равна сумме скорости второго поезда и относительно «подвижной» дороги и скорости самой догори относительного первого «неподвижного» поезда:

$$\vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_д \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1.$$

В проекции на направление движения поездов:

$$\upsilon_{21}=\upsilon_2-\upsilon_1; \quad \upsilon_{21}=90-72=18 \text{ км/ч}.$$

Промежуток времени, за который второй поезд догонит первый

$$t = \frac{S}{\upsilon_{21}} = \frac{S}{\upsilon_2 - \upsilon_1}, \quad t=0,5 \text{ ч}.$$

✓ **Ответ.** $\upsilon_{21}=\upsilon_2+\upsilon_1$=18 км/ч =5 м/с. $t=S/\upsilon_{21}$=0,5 ч=1800 с.

Пример 9. Через какой промежуток времени поезда из предыдущего примера встретятся, если они будут двигаться навстречу друг другу?

✓ **Ответ.** $\upsilon_{21}=\upsilon_2+\upsilon_1$=162 км/ч=45 м/с. $t=S/\upsilon_{21}$=200 с.

Пример 10. Человек борется с течением реки, направляя лодку под углом α=45° к берегу. Найти модуль υ_2 скорости лодки относительно воды, если ширина реки l=100 м. Скорость течения υ_1=3,0 м/с. Лодку снесло по течению за время переправы на расстояние S=125 м вниз по течению.

Решение. Рассмотрим движение лодки относительно берега. Начало отсчёта возьмем в точке старта, ось X направим вдоль течения, а Y – поперек (рис. 20). Уравнения движения лодки относительно берега:

$$\begin{cases} x = \upsilon_x t, \\ y = \upsilon_y t. \end{cases} \tag{11}$$

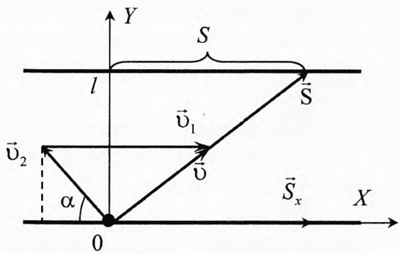


Рис. 20. *Плыть против течения*

По закону сложения скоростей (10'), по осям координат:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_1 - \upsilon_2 \cos\alpha, \\ \upsilon_y = \upsilon_2 \sin\alpha. \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и учитывая, что к моменту, когда лодка переплывет реку, $x_п = S$, $y_п = l$, получим:

$S = (\upsilon_1 - \upsilon_2\cos\alpha)\cdot t$, $l = \upsilon_2 \sin\alpha \cdot t$; $\Rightarrow$ $\upsilon_2 = \dfrac{\upsilon_1 \cdot l}{S\cdot\sin\alpha + l\cos\alpha} \approx 1{,}9$ м/с. ↵

✓**Ответ.** Скорость лодки относительно воды 1,9 м/с.

Упражнения. Равномерное движение

1 Сравнить время и длину пути обгона при скорости движения обгоняемого автомобиля υ_1=40 км/ч и обгоняющего u_1=60 км/ч и при скорости движения обгоняемого автомобиля υ_2=70 км/ч и обгоняющего u_2=90 км/ч?

2 Определить скорости движения тел 1, 2, 3 (рис. 21). Написать уравнения движений $x(t)$. Когда и где встретились тела?

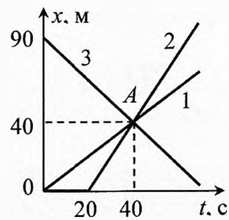


Рис. 21. *Место встречи*

3 Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз человека за 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

4 Рыболов, двигаясь на лодке против течения реки, уронил удочку. Через t=1 мин он заметил потерю и сразу же повернул обратно. Через сколько времени после потери он догонит удочку? На каком расстоянии от места потери (относительно земли) это произойдет? Скорость течения реки u=2 м/с.

5 Моторная лодка движется относительно воды со скоростью υ=5 м/с. Ширина реки l=100 м. Один раз лодка переплывает поперек реку туда и обратно, а затем вдоль берега на такое же расстояние по течению и против течения. Как отличается время движения лодки в обоих случаях, если скорость течения равна u=3 м/с?

6 Ширина реки l=100 м. Во сколько раз время переплывания по кратчайшему пути больше минимального времени? На какое расстояние при этом несет лодку вниз по течению, если скорость лодки υ=5 м/с, скорость течения реки u=3 м/с?

7 Скорость лодки относительно воды равна $\upsilon_л$=1,5 м/с, а скорости течения воды u=3,0 м/с. Под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы её снесло как можно меньше? На сколько её снесет, если ширина реки равна l=100 м?

8 Между пунктами A и B, находящимися на разных берегах реки, по прямой линии курсирует катер. Расстояние между пунктами S=1200 м, скорость течения реки u=1,9 м/с. Прямая AB составляет с направлением течения реки угол α=60°.

С какой скоростью относительно воды и под какими углами β_1 и β_2 к прямой *AB* должен двигаться катер, чтобы пройти от *A* к *B* и обратно за время t=5 мин?

9 В пункте Л находится лодка и движется относительно воды со скоростью $\upsilon_л$=10 м/с, направленной под углом α=30° к линии ЛК (рис. 22). В пункте К находится катер и движется со скоростью $\upsilon_к$=15 м/с, направленной по углом β=60° к линии КЛ. Расстояние между К и Л равно l=100 м. Определить графически, каким будет минимальное расстояние между лодкой и катером. Вычислить это расстояние и определить, через какое время это произойдет.

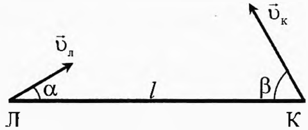


Рис. 22. *Лодка и катер*

10 Корабль выходит из пункта К и идёт со скоростью $\upsilon_к$ под углом β к линии КТ. Под каким углом α к линии ТК нужно выпустить торпеду из точки Т, чтобы она поразила корабль, если её скорость равна $\upsilon_т$? Торпеду выпускают в момент выхода корабля из пункта К.

11 К грузу, который может перемещаться по полу, прикреплен шнур, продетый через кольцо на высоте *h* над полом (рис. 23). Шнур вытаскивают со скоростью υ. С какой скоростью *u* движется груз в момент, когда шнур составляет с плоскостью пола угол α?

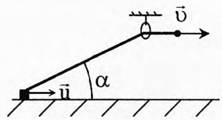


Рис. 23. *Шнур и кольцо*

12 Стержень длиной l=1 м шарнирно соединен с муфтами *A* и *B*, которые перемещаются по двум взаимно перпендикулярным рейкам (рис. 24). Муфта *A* движется с постоянной скоростью υ_A=30 см/с. Найти скорость υ_B муфты *B* в момент, когда угол $\angle OAB$=60°. Приняв за начала отсчёта момент, когда муфта *A* находилась в точке О, определить расстояние *OB* и скорость муфты *B* в зависимости от времени.

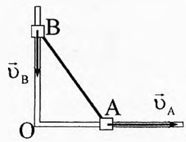


Рис. 24. *Шарниры*

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Время обгона в обоих случая будет одинаково, т.к. относительная скорость автомобилей одинакова: $t_1 = \dfrac{S}{u_1 - \upsilon_1}$, $t_2 = \dfrac{S}{u_2 - \upsilon_2}$; $\Rightarrow t_1 = t_2$, где S – расстояние, которое должен пройти обгоняющий автомобиль относительно обгоняемого. Однако во втором случае путь, который проедет обгоняющий автомобиль по дороге, значительно больше: $S_1 = u_1 \cdot t_1$; $S_2 = u_2 \cdot t_2$; $\Rightarrow \dfrac{S_2}{S_2} = \dfrac{u_2}{u_1} = 1{,}5$. Поэтому обгон на большой скорости значительно опаснее, и важно убедиться, что дорога свободна на достаточном для обгона расстоянии.

2 Из графика видно, что все тела движутся равномерно. Запишем уравнение движения $x=x_0+\upsilon_x t$ для первого тела:

$$x_{10}=0; \quad \upsilon_{1x}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{40\text{ м}}{40\text{ с}}=1\text{ м/с}. \quad \text{Значит, } x_1=0+1\cdot t\text{ (м) или } x_1=t\text{ (м)}.$$

Начальная координата второго тела равна нулю: $x_{20}=0$. Второе тело начало двигаться только с момента $t_{2н}=20$ с, и за $\Delta t_2=20$ с его координата изменилась на $\Delta x_2=40$ м; скорость его движения равна $\upsilon_{2x}=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\dfrac{40\text{ м}}{20\text{ с}}=2$ м/с. Тогда уравнение движения второго тела примет вид:

$$x_2=x_{20}+\upsilon_{2x}(t-t_{2н}) \quad\Rightarrow\quad x_2=0+2(t-20)\text{ (м)} \quad \text{или} \quad x_2=-40+2\cdot t\text{ (м)}.$$

Второе тело как бы в начальный момент имело координату -40 м. Так было бы, если бы оно также двигалось с начала отсчёта времени. На самом же деле, в первые 20 с второе тело находилось в начале координат неподвижно (то есть $x_2=0$ при $t<20$ с), и уравнение $x_2=-40+2t$ (м) можно использовать начиная с $t_{2н}=20$ с.

Начальная координата третьего тела равна $x_{30}=90$ м, оно двигалось в отрицательном направлении и за время $\Delta t_3=40$ с переместилось на $\Delta x_3=40-90=-50$ м.

Скорость третьего тела равна $\upsilon_{3x}=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta t_3}=\dfrac{-50\text{ м}}{40\text{ с}}=-1{,}25$ м/с.

Уравнение его движения: $x_3=90-1{,}25\cdot t$ (м).

Точка пересечения графиков соответствует времени и месту встречи тел:

$$t_в=40\text{ с},\ x_в=40\text{ м}.$$

3 Относительно земли во всех трёх случаях человек перемещается на одинаковое расстояние l, равное длине эскалатора. Для первого случая $l=(\upsilon_э+\upsilon_ч)t_1$, во втором: $l=(\upsilon_э+2\upsilon_ч)t_2$, в третьем: $l=\upsilon_э t_3$. Решая совместно все три уравнения, получим ответ: $t_3=\dfrac{t_1t_2}{2t_2-t_1}=1{,}5$ (мин).

4 Скорость лодки относительно воды одинакова в любом направлении (собственная скорость). Поскольку относительно воды он проплывет туда и обратно одинаковое расстояние (удочка неподвижна относительно воды), то он догонит удочку через время $\tau=2\cdot t=2$ (мин). За это время удочка (вместе с течением) пройдет относительно берега расстояние $l=u\cdot\tau$, $l=2$ м/с$\cdot$120 с$=240$ м.

5 В первом случае скорость лодки относительно воды должна быть направлена под углом α к берегу так, чтобы её составляющая вдоль берега была полностью компенсирована скоростью течения воды (рис. 25), то есть $\upsilon\cdot\cos\alpha=u$. Тогда в системе отсчёта, связанной с землей, лодка будет плыть перпендикулярно берегу. Её скорость найдём из теоремы Пифагора: $\upsilon_\perp=\sqrt{\upsilon^2-u^2}$. Значит, лодка переплывёт реку туда и обратно за время, равное $t_1=2\cdot\dfrac{l}{\upsilon_\perp}=\dfrac{2l}{\sqrt{\upsilon^2-u^2}}$.

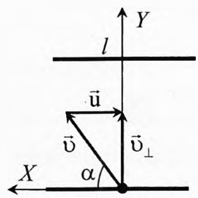


Рис. 25. *Борьба с течением*

При движении лодки вдоль берега туда и обратно:

$$t_2=\frac{l}{\upsilon+u}+\frac{l}{\upsilon-u}=\frac{2l\upsilon}{\upsilon^2-u^2}.\ \text{Отсюда}\ \frac{t_1}{t_2}=\sqrt{1-\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^2}=0{,}8.$$

Видно, что при любой скорости течения (при $\upsilon>u$) переплывание поперек берега туда и обратно занимает меньше времени, чем по течению и против течения.

6 Время минимально, если собственная скорость лодки направлена перпендикулярно к берегу (рис. 26а). В этом случае время движения $t_1 = \frac{l}{\upsilon}$=20 с. За это время лодка сместится вдоль берега на $S_1=u\cdot t_1$=60 м.

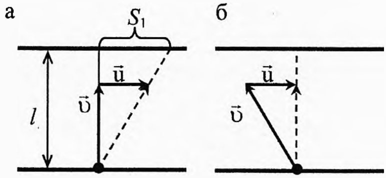


Рис. 26. *Либо быстрее, либо ближе*

Время переплывания по кратчайшему пути (рис. 26б): $t_2 = \frac{l}{\sqrt{\upsilon^2 - u^2}}$=25 с. Это на четверть больше, чем минимальное время.

7 Скорость лодки относительно берега равна $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_л + \vec{u}$. Так как скорость течения $\vec{u}$ однозначно ориентирована, то направление скорости $\vec{\upsilon}$ лодки относительно берега зависит от направления $\vec{\upsilon}_л$. Изобразим (рис. 27) веер возможных направлений скорости лодки $\vec{\upsilon}_л$ (учтем, что $\upsilon_л<u$). Снос лодки будет минимальным, когда вектор скорости $\vec{\upsilon}$ лодки относительно берега будет составлять максимальный угол с линией берега. Поскольку во всех случаях $\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{\upsilon}_л$, то угол α максимален, когда вектор $\vec{\upsilon}$ касается веера возможных направлений вектора $\vec{\upsilon}_л$. При этом $\vec{\upsilon}_л \perp \vec{\upsilon}$. sinα=$\upsilon_л/u$, α=30°. То есть скорость лодки $\vec{\upsilon}_л$ относительно воды нужно направлять против течения под углом 60° к линии берега. Вдоль берега лодку снесет на расстояние $S=l\cdot$ctgα=173 м.

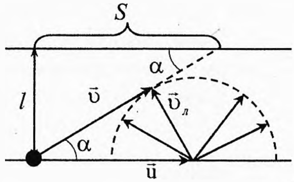


Рис. 27. *Веер возможностей*

8 Для треугольника $\Delta A\upsilon u$ по теореме синусов получим (рис. 28):

$$\frac{u}{\sin\beta_1} = \frac{\upsilon}{\sin\alpha}. \tag{13}$$

Аналогично для треугольника $\Delta B\upsilon' u$, получим:

$$\frac{u}{\sin\beta_2} = \frac{\upsilon}{\sin(180° - \alpha)}.$$

Поскольку sin(180°–α)=sinα, то из последнего уравнения следует:

$$\frac{u}{\sin\beta_2} = \frac{\upsilon}{\sin\alpha}. \tag{14}$$

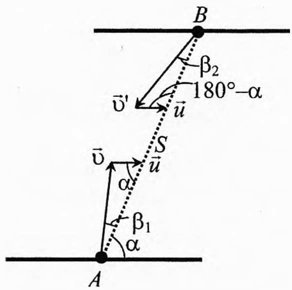


Рис. 28. *Туда и обратно*

Решая совместно (13) и (14), получим: $\beta_1=\beta_2=\beta$, $\upsilon = \frac{u\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Время движения из A в B равно: $t_1 = \frac{S}{\upsilon\cos\beta + u\cos\alpha}$.

Время движения на обратном пути: $t_2 = \frac{S}{\upsilon\cos\beta - u\cos\alpha}$.

Общее время движения $t=t_1+t_2$; $t = \frac{S}{u}\left(\frac{1}{\sin\alpha\cdot\text{ctg}\beta + \cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\cdot\text{ctg}\beta - \cos\alpha}\right)$.

$$\Rightarrow\quad \frac{ut}{S}\cdot\sin^2\alpha\cdot(\mathrm{ctg}\beta)^2-2\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-\frac{ut}{S}\cos^2\alpha=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно ctgβ, получим:

$$\mathrm{ctg}\beta=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{S}{ut}+\sqrt{\left(\frac{S}{ut}\right)^2+\cos^2\alpha}\right),\ \beta=11{,}5°\approx12°.\ \upsilon=\frac{u\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=8{,}3\ \text{м/с}.$$

9 Рассмотрим движение катера относительно лодки (рис. 29). В этом случае вода движется относительно лодки со скоростью $\vec{\upsilon}_в=-\vec{\upsilon}_л$. Согласно закону сложения скоростей, скорость катера относительно лодки $\vec{\upsilon}_{кл}=\vec{\upsilon}_к+\vec{\upsilon}_в$ или $\vec{\upsilon}_{кл}=\vec{\upsilon}_к-\vec{\upsilon}_л$. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра ЛA, опущенного из точки Л на линию движения катера относительно лодки. По условию α+β=90°, значит, треугольник, образованный векторами $\vec{\upsilon}_{кл}$, $\vec{\upsilon}_к$ и $-\vec{\upsilon}_л$ – прямоугольный. Поэтому $\mathrm{tg}\gamma=\upsilon_л/\upsilon_к$, γ=33,7°; ⇒ φ=β–γ=26,3°;

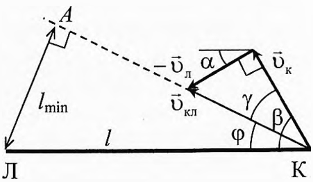


Рис. 29. *Лодка и катер*

$l_{min}=l\cdot\sin\varphi\approx44$ м; $t=\dfrac{KA}{\upsilon_{кл}}=\dfrac{l\cos\varphi}{\upsilon_{кл}}=\dfrac{l\cos\varphi}{\sqrt{\upsilon_л^2+\upsilon_к^2}}\approx5$ с.

10 **I способ.** Торпеду нужно направить под таким углом, чтобы скорость торпеды относительно корабля $\vec{\upsilon}_{тк}$ была направлена прямо на корабль по линии ТК (рис. 30а). В соответствии с законом сложения скоростей: $\vec{\upsilon}_{тк}=\vec{\upsilon}_т+\vec{\upsilon}_в=\vec{\upsilon}_т-\vec{\upsilon}_к$. Значит векторы $\vec{\upsilon}_т$, $\vec{\upsilon}_{тк}$, и $-\vec{\upsilon}_к$ составляю треугольник. Для этого треугольника по теореме синусов: $\dfrac{\upsilon_к}{\sin\alpha}=\dfrac{\upsilon_т}{\sin\beta}$, $\sin\alpha=\dfrac{\upsilon_к}{\upsilon_т}\cdot\sin\beta$.

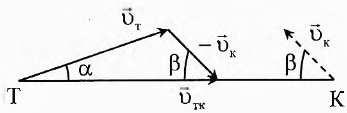


Рис. 30а. *Движение торпеды относительно корабля*

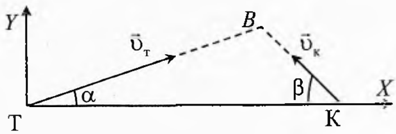


Рис. 30б. *Скорости по оси Y одинаковы*

II способ. В точке выхода торпеды возьмем начало отсчёта. Оси X и Y направим так, как показано на рис. 30б. По оси X они должны пройти совместно расстояние ТК, а по оси Y одинаковые расстояние:

$$y_т=y_к,\ y_т=\upsilon_т\sin\alpha\cdot t;\ \ y_к=\upsilon_к\sin\beta\cdot t;\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{\upsilon_к}{\upsilon_т}\cdot\sin\beta.$$

Отметим, что если бы корабль уплывал под тем же углом (а не плыл навстречу), то ответ был бы таким же. Проверьте.

Лирическое отступление. *Решать одну и ту же задачу разными способами полезно, ибо существенно уменьшается вероятность ошибки в окончательном ответе. Хотя и при разных методах решения можно получить одинаковый неправильный ответ! Будьте внимательны!*

11 Скорость равна отношению малого перемещения к малому промежутку времени, за который оно произошло. За один и тот же малый промежуток времени груз (рис. 31) передвигается на расстояние $AB = u \cdot \Delta t$, а нить вытягивается на длину $AC = \upsilon \cdot \Delta t$.

Тогда: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\upsilon \cdot \Delta t}{u \cdot \Delta t}$. Значит, $u = \dfrac{\upsilon}{\cos\alpha}$.

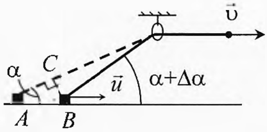


Рис. 31. *Шнур и кольцо*

12 Поскольку стержень нерастяжим, то проекции скоростей концов A и B стержня на его ось должны быть одинаковы в любой момент времени (рис. 32): $\vec{\upsilon}_{Al} = \vec{\upsilon}_{Bl}$, или $\upsilon_A \cdot \cos\alpha = \upsilon_B \cdot \sin\alpha$, откуда $\upsilon_B = \upsilon_A \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, в момент когда $\alpha = \angle OAB = 60°$: $\upsilon_B = 17{,}3$ см/с.

$$OB = y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - \upsilon_A^2 t^2}\,,\quad OB = \sqrt{1 - 0{,}09t^2}\ (\text{м});$$

$$\Rightarrow \upsilon_B = \upsilon_A \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \upsilon_A \cdot \frac{x}{y} = \upsilon_A \cdot \frac{\upsilon_A t}{\sqrt{l^2 - \upsilon_A^2 t^2}} = \frac{\upsilon_A^2 t}{\sqrt{l^2 - \upsilon_A^2 t^2}},$$

$$\upsilon_B \frac{0{,}09t}{\sqrt{1 - 0{,}09t^2}}\ (\text{м/с}).$$

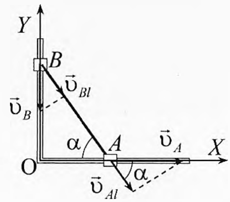


Рис. 32. *Шарниры*

§ 8. Неравномерное движение. Средняя скорость

Движение, при котором скорость тела изменяется по модулю с течением времени, называется ***неравномерным движением****.*

Если скорость изменяется только по модулю, то такое движение называется *прямолинейным неравномерным*. Если скорость изменяется по модулю и направлению, то такое движение называется *криволинейным неравномерным*. Если скорость изменяется только по направлению, такое движение будет *криволинейным равномерным*.

Кроме понятия скорость (мгновенная скорость) в физике вводится также понятие средняя скорость. Причём в механике используются две средних скорости: пути и перемещения (рис. 33).

> ***Средняя скорость перемещения*** *– это векторная величина, которая определяет, как в среднем изменяется положение тела за некоторый промежуток времени. Средняя скорость перемещения равна отношению перемещения, совершённого телом, к промежутку времени, за который оно произошло.*

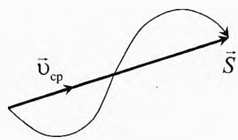


Рис. 33. *Средняя скорость перемещения*

$$\boxed{\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\vec{S}}{t}}.$$

На практике чаще всего применяется другое понятие.

***Средняя скорость пути** – это скалярная величина, которая характеризует движение тела вдоль траектории за определенный промежуток времени. Средняя скорость пути равна отношению пути к промежутку времени, за который он пройден.*

$$\boxed{\upsilon_{ср} = \frac{l}{t}}.$$

✍ **Пример 11.** Туристы сделали дневной переход из пункта A в пункт B, расстояние между которыми по карте 15 км. Двигаясь по дороге, тропинкам, бурелому, они достигли цели за 5 ч, пройдя путь 20 км. С какой скоростью они в среднем приближались к цели? Какова их средняя скорость пути?

➥**Решение.** $\left|\vec{\upsilon}_{ср}\right| = \frac{\left|\vec{S}\right|}{t}$, $\left|\vec{\upsilon}_{ср}\right| = \frac{15}{5}$=3 км/ч. $\upsilon_{ср} = \frac{l}{t}$, $\upsilon_{ср} = \frac{20}{5}$=4 км/ч.↩

✓**Ответ.** Модуль средней скорости перемещения туристов равен 3 км/ч, а средняя скорость движения по траектории 4 км/ч.

✍ **Пример 12.** Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью υ_1, а вторую со скоростью υ_2. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

➥**Решение.** $\upsilon_{ср} = \frac{l}{t_1 + t_2}$; $t_1 = \frac{0{,}5l}{\upsilon_1}$; $t_2 = \frac{0{,}5l}{\upsilon_2}$; $\Rightarrow$ $\upsilon_{ср} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$.↩

✍ **Пример 13*.** Первые 20% времени автомобиль шёл со скоростью υ_1, следующие 30% пути – со скоростью υ_2, а оставшийся путь – со скоростью υ_3. Найти среднюю скорость автомобиля.

➥**Решение.** $\upsilon_{ср} = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t} = \frac{\upsilon_1 \cdot 0{,}2t + 0{,}3l + \upsilon_3 t_3}{t}$;

$t_3 = t - t_1 - t_2 = 0{,}8t - \frac{0{,}3l}{\upsilon_2}$; $\Rightarrow$ $\upsilon_{ср} = 0{,}2\upsilon_1 + 0{,}3\frac{l}{t} + \upsilon_3(0{,}8 - 0{,}3\frac{l}{t \cdot \upsilon_2})$;

$\upsilon_{ср} = 0{,}2\upsilon_1 + 0{,}3\upsilon_{ср} + \upsilon_3(0{,}8 - 0{,}3\frac{\upsilon_{ср}}{\upsilon_2})$; или $\upsilon_{ср} = \frac{2\upsilon_2(\upsilon_1 + 4\upsilon_3)}{7\upsilon_2 + 3\upsilon_3}$.↩

Из приведенных примеров можно сделать следующий вывод.

*Средняя скорость **не равна** в общем случае среднему арифметическому от скоростей на отдельных участках пути.*

§ 9. Ускорение

Эта физическая величина вводится для того, чтобы характеризовать, как с течением времени изменяется скорость тела. Ускорение обозначается $\vec{a}$ по первой букве латинского слова *acceleratio* – «ускорение».

Ускорение – векторная величина, ибо скорость в любой момент времени может изменяться в каком-то определенном направлении. Ускорение – мгновенная характеристика движения, т. к. в разные моменты времени скорость может изменяться по разному.

Ускорение – непрерывная характеристика движения, то есть ускорение не может изменяться скачком от одного значения до другого, а принимает все промежуточные значения. Это обусловлено тем, что сила – причина ускорения – не может изменяться мгновенно. Поскольку ускорение характеризует быстроту изменения скорости, то, очевидно, ускорение больше в том случае, когда скорость быстрее изменяется с течением времени.

Способ измерения ускорения наиболее легко получить для простейшего случая неравномерного движения – равноускоренного прямолинейного движения.

> ***Равноускоренным прямолинейным движением*** *называется такое движение, при котором тело движется по прямолинейной траектории и за любые равные промежутки времени скорость изменяется одинаково.*

Нетрудно убедиться по аналогии с введением понятия скорость, что способу измерения ускорения удовлетворяет соотношение

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}}. \qquad (15)$$

Из этой формулы видно, что ускорение направлено так же, как малое изменение $\Delta\vec{\upsilon}$ скорости тела в окрестности данной точки:

$$\boxed{\vec{a} \uparrow\uparrow \Delta\vec{\upsilon}}.$$

Ускорение *– это векторная величина, показывающая, как изменяется скорость тела с течением времени (в любой момент времени). Ускорение равно отношению малого изменения скорости к малому промежутку времени, за который оно произошло.*

В случае равноускоренного движения ускорение можно вычислять не только по формуле (15), но и по формуле

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}}, \qquad (16)$$

где изменение скорости берется за большие промежутки времени. В этом случае фактически измеряется среднее ускорение, а т. к. в любой момент времени ускорение при равноускоренном движении одинаково, то среднее ускорение будет равно мгновенному. Из (16) следует, что

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a} \cdot t}.$$

Это векторное уравнение равносильно системе алгебраических уравнений в проекции на оси координат X и Y:

$$\boxed{\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x \cdot t, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y \cdot t. \end{cases}}$$

На рис. 34 показаны различные случаи равноускоренного движения.

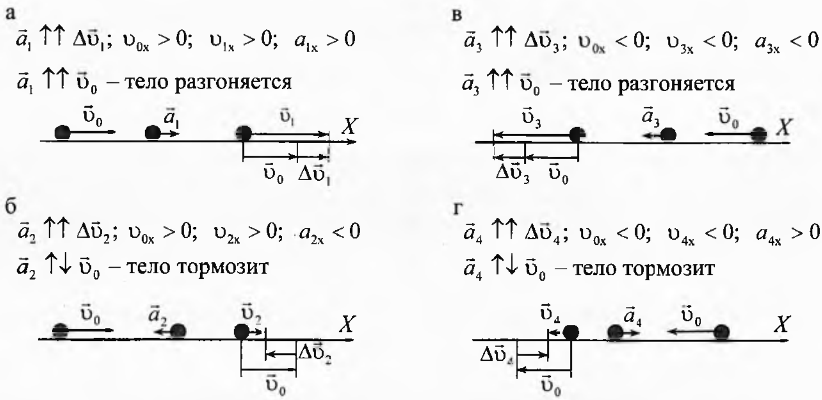


Рис. 34. *Различные случаи равноускоренного движения*

Когда тело разгоняется (рис. 34 а, в), *знаки проекции скорости и ускорения одинаковы. А когда тормозит* (рис. 34 б, г) – *противоположны.*

При этом во всех случаях *малое изменение скорости направлено так же, как и ускорение*:

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \Delta\vec{\upsilon}.$$

Знак проекции ускорения, независимо от того, тормозит тело или разгоняется, может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от того, как ориентировано ускорение относительно оси. Если составляющая ускорения направлена так же как ось, то проекция ускорения положительна, и отрицательна в противном случае.

Равноускоренное движение раньше называлось равнопеременным. Если при этом скорость увеличивалась по модулю, то такое движение называлось равноускоренным; если же скорость уменьшалась по модулю, то – равнозамедленным.

§ 10. Перемещение и координаты тела при равноускоренном движении

Построим график проекции скорости от времени для равноускоренного движения. Пусть для определенности $a_x>0$ и в начальный момент времени $\upsilon_{0x}>0$, тогда график проекции скорости будет иметь вид, показанный на рис. 35:

$$\upsilon_x=\upsilon_{0x}+a_xt. \qquad (17)$$

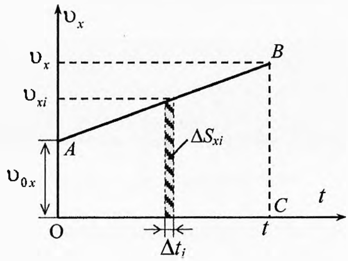


Рис. 35. *Перемещение равно площади под графиком*

Чтобы найти проекцию перемещения S_x за время t, нужно, определить перемещения за малые промежутки времени (столь малые, что изменение скорости пренебрежимо мало по сравнению со значением скорости на этом интервале времени). Затем нужно сложить малые перемещения за всё время:

$$\Delta S_{xi}=\upsilon_{xi}\Delta t_i \quad \Rightarrow \quad S_x=\sum_{i=1}^{N}\upsilon_{xi}\Delta t_i\,, \qquad (18)$$

где N – число участков, на которые разбито движение.

Результат суммирования выражения (18) будет (в определенном масштабе) равен площади трапеции $OABC$:

$$\boxed{S_x=\frac{\upsilon_{0x}+\upsilon_x}{2}\cdot t}. \qquad (19)$$

Выразим время t из (17): $$t=\frac{\upsilon_x-\upsilon_{0x}}{a_x}.$$

Подставляя в (19), получим:

$$\boxed{S_x=\frac{\upsilon_x^2-\upsilon_{0x}^2}{2a_x}} \quad \text{или} \quad \boxed{2a_xS_x=\upsilon_x^2-\upsilon_{0x}^2}.$$

Подставив (17) в (19) получим ещё одно выражение для S_x

$$\boxed{S_x=\upsilon_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2}}. \qquad (20)$$

Аналогично для S_y: $$S_y=\upsilon_{0y}t+\frac{a_yt^2}{2}.$$

Подставляя (20) в (4) получим ***уравнения равноускоренного движения для координат тела***:

$$\boxed{x=x_0+\upsilon_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2}}, \qquad y=y_0+\upsilon_{0y}t+\frac{a_yt^2}{2}. \qquad (21)$$

Из (21) видно, что для решения прямой задачи механики при равноускоренном движении тела (определить положение тела в любой момент времени) нужно знать его начальные координаты, проекции начальной скорости и ускорения на оси координат.

✍ **Пример 14.** К. Э. Циолковский в книге «Вне Земли», рассматривая полет ракеты, пишет: «через 10 секунд она была от зрителя на расстоянии 5 км». С каким ускорением двигалась ракета, и какую приобрела скорость?

➥**Решение.** Из условия неявно следует, что начальная скорость ракеты $\upsilon_0 = 0$, а движение равноускоренное ($a = \text{const}$). Значит, $S = \dfrac{at^2}{2}$; $\Rightarrow$ $a = \dfrac{2S}{t^2}$,

$$a = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ м}}{(10\text{ с})^2} = 100\text{ м/с}^2 = 10g, \quad \upsilon = at = 100\text{ м/с}^2 \cdot 10\text{ с} = 1000\text{ м/с} = 1\text{ км/с}.$$

✓**Ответ.** Ракета летела с ускорением 100 м/с^2 и за 10 с достигла скорости 1 км/с.

✍ **Пример 15.** Тело движется вдоль оси X (рис. 36). Уравнение координаты имеет вид: x=200–20t+t^2. Определить скорость тела через 5 и 20 с, а также пути и перемещения тела за эти промежутки времени.

➥**Решение.** Сравнивая уравнения движения для координаты в общем виде $\left(x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}\right)$ с данным в задаче, находим:

$$x_0 = 200\text{ м}, \quad \upsilon_{0x} = -20\text{ м/с}, \quad a_x = 2\text{ м/с}^2.$$

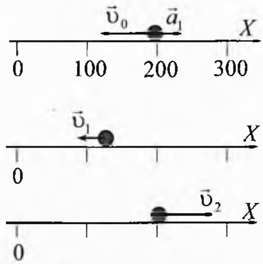


Рис. 36. *Замедление и разворот*

Подставив a_x и υ_{0x} в уравнение движения для скорости $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$, получим:

$$\upsilon_x = -20 + 2t.$$

Теперь найдём υ_{1x} и υ_{2x}:

$$\upsilon_{1x} = -20 + 2 \cdot 5 = -10\text{ м/с}; \quad \upsilon_{2x} = -20 + 2 \cdot 20 = 20\text{ м/с}.$$

$$S_x = x - x_0 = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad S_x = -20t + t^2.$$

$$S_{1x} = -20 \cdot 5 + 5^2 = -75\text{ м}, \quad S_{2x} = -20 \cdot 20 + 20^2 = 0.$$

Чтобы найти пройденные пути за 5 и 20 с, нужно сначала узнать, сколько времени тело двигалось до остановки (υ_x=0):

$$\upsilon_x = -20 + 2 \cdot t_{\text{ост}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{ост}} = 10\text{ с}.$$

Отсюда ясно, что в течение первых 5 секунд тело двигалось в одном направлении, поэтому путь за первые 5 секунд равен

$$l_1 = |S_{1x}| = 75\text{ м}.$$

Ещё через 5 секунд оно остановилось, а через 20 секунд после начала движения тело вернулось в исходную точку (S_{2x}=0), значит, его путь за это время равен двойному пути до остановки:

$$l_2=2|S_{x.\text{ост}}|,\quad S_{x.\text{ост}}=-20\cdot 10+10^2=-100\text{ м};\ \Rightarrow\ l_2=200\text{ м.}$$

✓**Ответ.** Скорость тела через 5 с равна 10 м/с и направлена против оси *X*, через 20 с она стала равной 20 м/с, и тело уже двигалось в положительном направлении оси. За 5 с оно совершило перемещение в отрицательном направлении оси, равное 75 м, перемещение его за 20 с равно нулю, путь за 5 с равен 75 м, а за 20 с тело прошло 200 м.

§ 11. Свободное падение тел

Со времен древнегреческого ученого Аристотеля (учителя Александра Македонского), жившего в IV в. до н. э., считалось, что тела падают на землю тем быстрее, чем они тяжелее. Только Галилею удалось доказать опытным путём, что в действительности это не так, поскольку нужно учитывать сопротивление воздуха. Именно оно искажает картину свободного падения тел, которую можно было бы наблюдать при отсутствии земной атмосферы на участке падения тела.

> *Свободным падением называется движение тела только под действием силы тяжести.*

Сами понятия скорости и ускорения как физические величины были впервые введены Галилеем. Вначале он установил, что свободное падение является равноускоренным движением, но падения тел происходят очень быстро. Он догадался, что можно как бы замедлить свободное падение, изучая скатывание шарика по наклонному желобу. Он получил формулу для пути при начальной скорости равной нулю (*формула Галилея*):

$$S=\frac{at^2}{2}.$$

Галилей обнаружил, что шары одинакового диаметра, изготовленные из дерева, золота, слоновой кости, движутся по желобу практически с одинаковым ускорением. Итак, ускорение не зависит от массы шаров.

Далее он заметил, что с увеличением наклона желоба модуль ускорения увеличивается, но остаётся одинаковым для тел разных масс. Следовательно, и при

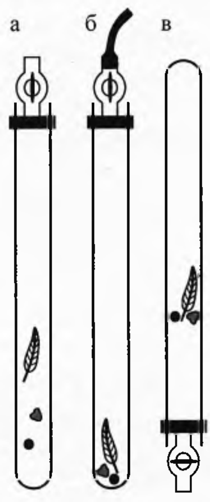


Рис. 37. *Свободное падение в вакууме*

свободном падении тела должны падать с одинаковым ускорением, не зависящим от их массы. Для проверки своего предположения, он наблюдал падение различных тел со знаменитой наклонной Пизанской башни (колокольни): пушечного ядра, мушкетной пули и др. Все эти тела достигали поверхности Земли практически одновременно. Таким образом, Галилей впервые доказал, что земной шар сообщает всем телам вблизи поверхности одно и то же ускорение. Используя полученную ранее формулу для пути $S=at^2/2$, он вычислил ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли:

$$a_{\text{св.падения}}=g\approx 9{,}8 \text{ м/с}^2 .$$

Впоследствии были созданы вакуумные насосы, которые позволили осуществить действительно свободное падение тел, например, в трубке Ньютона. Поместим в трубку Ньютона три разных предмета, например, дробинку, пробку и птичье перо. Затем быстро перевернем её. Все три тела упадут на дно трубки в разное время: сначала дробинка, затем пробка и, наконец, перо (рис. 37а). Но так падают тела при атмосферном давлении воздуха. Стоит только откачать воздух насосом (рис. 37б) и, закрыв после откачки кран, снова перевернуть трубку. Мы увидим, что все три тела упадут одновременно (рис. 37в). Следовательно, в вакууме все тела падают с одинаковым ускорением.

Биографическая справка о Галилее. Галилео Галилей – великий итальянский физик и астроном, впервые применивший экспериментальный метод исследования в науке. Галилей открыл принцип относительности, ввел понятие инерции, исследовал законы падения тел и движение тел по наклонной плоскости. Он предложил применять маятник для измерения времени. Впервые в истории человечества с помощью изготовленной им зрительной трубы Галилей открыл горы на Луне, 4 спутника Юпитера (Галилеевы спутники), звездное строение Млечного пути, пятна на Солнце, фазы Венеры.

Галилей развил запрещенное в те времена учение Коперника о вращении Земли, за что в 1633 г. осужден римским католическим судом. Он был вынужден, преклонив колени, в рубище произнести отречение, что избавило его и семью от преследований. После отречения Галилей ещё 8 лет (почти ослепший) вел астрономические наблюдения. Приговор был отменен Ватиканом 350 лет спустя! Останки Галилея находятся во Флоренции, в Францисканской церкви Санта Кроче (Святой Крест). Там же похоронены и другие великие люди Италии: Микеланджело Буонарроти, Джоаккино Россини, Леонардо да Винчи, Данте Алигьери, Энрико Ферми.

✍ **Пример 16.** Сколько времени $t_п$ падает свинцовая пуля, которую уронили с Пизанской башни, высота которой h=57,5 м?

↪**Решение.** При свободном падении пули перемещение, скорость и ускорение (g=9,8 м/с^2) направлены одинаково. Перемещение пули согласно формуле Галилея: $S=\frac{gt^2}{2}$. К моменту приземления время полета $t_п$ и путь $S{=}h$, значит: $h=\frac{gt_n^2}{2} \Rightarrow t_n=\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $t_n=\sqrt{\frac{2\cdot 57{,}5}{9{,}8}}$ ≈3,4 с.↩

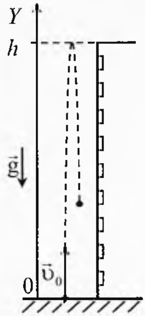


Рис. 38. *Бросок до крыши дома*

✍ **Пример 17.** С какой скоростью должен вылететь камешек из рогатки, чтобы он долетел до крыши девятиэтажного дома высотой h=28 м?

➥**Решение.** Направим ось Y вверх, взяв за начало отсчёта точку выстрела (рис. 38). Проекцию перемещения найдём, используя формулу $2a_yS_y=\upsilon_y^2-\upsilon_{0y}^2$.

Как видно из рисунка: $a_y=-g$; $S_y=h$; $\upsilon_y=0$; $\upsilon_{0y}=\upsilon_0$.

Подставляя в уравнение, получим:

$$-2gh=0-\upsilon_0^2 \quad\Rightarrow\quad \upsilon_0=\sqrt{2gh},\quad \upsilon_0=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 28}\approx 23 \text{ м/с.}$$↩

✍ **Пример 18.** Какова высота дома, если упавший с него стальной шарик пролетел за последнюю секунду (τ=1 с) половину высоты дома.

➥**Решение.** Пусть t – все время полета, тогда $h=\frac{gt^2}{2}$. За время $t_1=t-\tau$ шарик пролетит $h_1=\frac{gt_1^2}{2}=\frac{g(t-\tau)^2}{2}$. Из условия следует, что $h_1=\frac{h}{2}$. Решая совместно уравнения, получим:

$$\frac{g(t-\tau)^2}{2}=\frac{gt^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}(t-\tau)=t \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\sqrt{2}\cdot\tau}{\sqrt{2}-1}\approx 3{,}4 \text{ с.}$$

Тогда $h=\frac{9{,}8\cdot(3{,}4)^2}{2}\approx 57$ м.↩

✓ **Ответ.** h=57 м. Возможно, шарик упал с Пизанской башни.

§ 12. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Рассмотрим движение материальной точки в поле силы тяжести Земли. Модель Земли представим себе в виде шара без гор, впадин и атмосферы радиусом R=6371 км и массой $M=5{,}98\cdot 10^{24}$ кг.

Вблизи поверхности на высоте $h \ll R$ Земля сообщает всем телам одинаковое ускорение, равное 9,8 м/с^2. Если сопротивление среды пренебрежимо мало (при малых скоростях движения), то реальное движение тел будет мало отличаться от того, что мы получим при описании движения согласно принятой модели Земли. Это может быть подъем тела, брошенного вверх с некоторой начальной скоростью, падение вниз, а также движение тела, брошенного под углом к горизонту. Все эти движения можно назвать свободным падением тел.

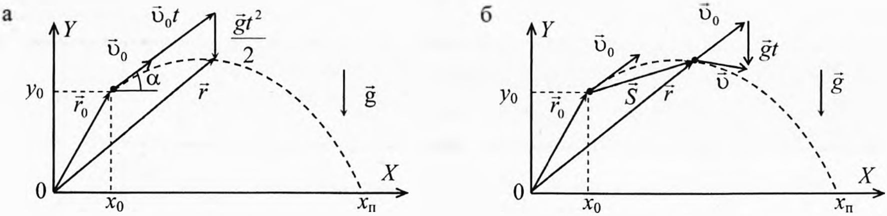


Рис. 39. *Движение тела, брошенного под углом к горизонту*

Уравнения движения (для радиус-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{\upsilon}$) тела, брошенного под углом к горизонту, в векторном виде для момента времени t:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t.$$

Графически они представлены на рис. 39а и 39б.

Уравнения для координат тела и проекций его скорости по осям X и Y имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x}t; \\ y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \dfrac{g_y t^2}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x}; \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + g_y t. \end{cases}$$

Пример 19 (экспериментальный). Бросим тело под углом α=0°, то есть горизонтально. Например, щелкнем по кусочку мела, лежащему на краю стола высотой h=75 см. Заметим, что мел коснулся земли, скажем, на расстоянии l=3 м по горизонтали. Какую начальную скорость υ_0 мы сообщили мелу?

Решение. Начало отсчёта возьмем в точке бросания (рис. 40). Ось Y направим вниз, а X – по горизонтали в сторону полета. Запишем уравнения движения мела по осям:

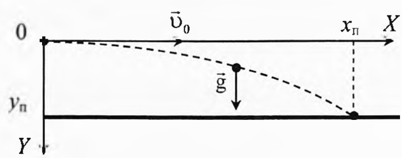


Рис. 40. *Щелчок по мелу*

$$x = \upsilon_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент приземления $x_п=l$, $y_п=h$. Следовательно,

$$l = \upsilon_0 t_п,\ h = \frac{gt_п^2}{2}; \ \Rightarrow\ \upsilon_0 = \frac{l}{t_п},\ t_п = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \ \Rightarrow\ \upsilon_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 7{,}7 \text{ м/с}.$$

✍ **Пример 20.** Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. На какую высоту h оно поднимется, каковы будут его дальность l и время $t_п$ полета? При каком угле бросания дальность полета максимальна? Во сколько раз при этом дальность полета больше высоты подъема? Сопротивлением воздуха пренебречь.

➥**Решение.** Выберем начало отсчёта в точке бросания, направив ось Y вверх, а ось X горизонтально вправо (рис. 41). По оси X тело движется равномерно, а по оси Y с ускорением свободного падения. Учитывая, что $x_0=0$, $y_0=0$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$, $a_x=0$, $a_y=-g$, запишем уравнения движения тела, по осям координат:

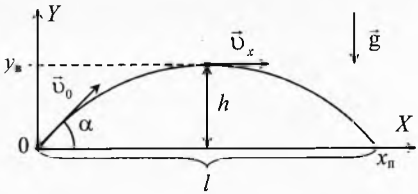


Рис. 41. *Бросок под углом к горизонту*

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha,\quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,\quad x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t,\quad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Учитывая, что *в верхней точке траектории вертикальная проекция скорости равна нулю*, найдём время и высоту подъема:

$$\upsilon_{yв} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_в \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_в = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}}. \tag{22}$$

$$y_в = h \quad \Rightarrow \quad h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_в - \frac{gt_в^2}{2}. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (23), получим:
$$\boxed{h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}. \tag{24}$$

В момент приземления:

$$y_п = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_п - \frac{gt_п^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_п = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}}. \tag{25}$$

Сравнивая (25) и (22) видим, что время полета вдвое больше времени подъема, значит время спуска равно времени подъема тела.

Дальность полета: $l = x_п = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_п = \upsilon_0 \cos\alpha \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$.

Поскольку $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$, то
$$\boxed{l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}}. \tag{26}$$

Из (26) видно, что при угле бросания $\alpha=45^\circ$ дальность полета максимальна и равна $l_{max} = \upsilon_0^2 / g$.

Высота подъема при α=45° равна $h=\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2 45^\circ}{2g}=\dfrac{\upsilon_0^2}{4g}$. То есть при угле бросания 45° дальность полета в четыре раза больше высоты подъема. На рисунке изображена траектория движения тела брошенного под углом 45°.↩

Упражнения. Ускоренное движение

1 Пуля в стволе автомата Калашникова движется с ускорением 616 км/с^2. Какова скорость вылета пули, если длина ствола 41,5 см?

2 Длина разбега при взлете Ту-154 составила 1215 м, а скорость отрыва от земли 270 км/ч. Длина пробега при посадке этого самолета 710 м, а посадочная скорость 230 км/ч. Сравнить ускорения (по модулю) и времена разбега и посадки.

3 Мальчик жонглирует двумя шарами, подбрасывая их по очереди с частотой 2 броска в секунду. На какую высоту поднимаются шары?

4 Камень брошен вверх с начальной скоростью υ_1=15 м/с. В него нужно попасть другим камнем как можно раньше, бросив его с той же точки со скоростью υ_2=10 м/с. Через какой промежуток времени τ следует бросить второй камень?

5 Шарик скатывается по наклонной плоскости из состояния покоя и проходит за первую секунду 5 см. Какой путь он пройдет за 4 с?

6 Шайба скользит по наклонной плоскости из состояния покоя с постоянным ускорением a=2 м/с^2. Чему равны и как соотносятся пути, проходимые ею за равные промежутки времени длительностью τ=0,1с?

7 При скорости движения υ_{10}=10 м/с тормозной путь автомобиля 15 м. Каким будет тормозной путь при скорости υ_{20}=20 м/с, если ускорение, создаваемое автомобилю силой трения одинаково в обоих случаях?

8 По графику $\upsilon(t)$ построить $a(t)$ и $x(t)$ (рис. 42).

9 По наклонной доске пустили снизу вверх катиться шарик. На расстоянии l=30 см от начала пути шарик побывал дважды: через t_1=1 с и через t_2=2 с после начала движения. Определить начальную скорость υ_0 и ускорение a движения шарика, считая его постоянным.

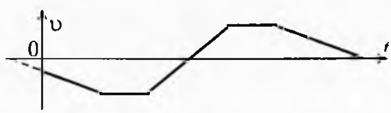


Рис. 42. *Определение ускорения и координаты по графику скорости*

10 Сколько времени свободно падало тело, если за последнюю секунду (τ=1 с) оно пролетело 2/3 всей высоты падения? Начальная скорость равна 0.

11 Аэростат поднимается с земли с ускорением a=2 м/с^2. Через τ=5 с из него выпал предмет. Через какое время он упадет на землю?

12 Из точек A и B, расположенных по вертикали (точка A выше) на расстоянии l=100 м друг от друга, бросают одновременно два тела с одинаковой скоростью υ_0=10 м/с. Из точки A – вертикально вниз, а из точки B – вертикально вверх. Через сколько времени и в каком месте они встретятся?

13 Из точек A и B, расположенных по вертикали (точка A выше) на расстоянии l=100 м друг от друга, бросают одновременно два тела. Из точки A – горизонтально со скоростью υ_0=10 м/с, из точки B – со скоростью υ_0=10 м/с, но направленную под углом α=60° к горизонту. Через сколько времени расстояние между ними будет вновь 100 м? Движение тел происходит в одной плоскости.

14 Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигает мяч во время игры, если от одного игрока к другому он летит 2 с?

13 Из точки A свободно падает тело. Одновременно из точки B под углом α к горизонту бросают другое тело так, что оба тела сталкиваются в воздухе (рис. 43). Показать, что угол α не зависит от начальной скорости υ_0 тела, брошенного из точки B, и определить этот угол, если $H/l=\sqrt{3}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

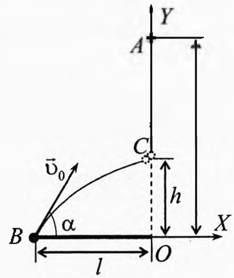


Рис. 43. *Сбить под любым углом*

16 Цель, находящаяся на холме, видна с места расположения орудия под углом α к горизонту. Дистанция (расстояние по горизонтали от орудия до цели) равна l. Стрельба по цели происходит при угле возвышения β к горизонту. Определить начальную скорость υ_0 снаряда, попадающего в цель. Сопротивление воздуха не учитывать. При каком угле возвышения β_0 дальность стрельбы вдоль склона будет максимальной?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $\upsilon=\sqrt{2aS}$ =715 м/с.

2 $2aS=\upsilon^2-0^2$; $S=\dfrac{at^2}{2}$; $\Rightarrow$ $a=\dfrac{\upsilon^2}{2S}$, $t=\dfrac{2S}{\upsilon}$. a_1=2,31 м/с^2, a_2=2,87 м/с^2, t_1=32,4 с, t_2=22,2 с. Ускорение при разбеге в 1,24 раза меньше, а время в 1,46 раза больше.

3 Рассмотрим случай изящного жонглирования, когда шары подбрасываются через равные промежутки времени и с одинаковой начальной скоростью. При этом они будут подниматься на одну высоту, а время полёта каждого шарика равно 1 с. Направим ось Y вверх, начало координат возьмем в нижней точке, а начало отсчёта времени в момент, когда один шар был в верхней точке траектории, а другой в нижней (рис. 44). Запишем уравнение движения для нижнего шара с учетом того, что y_0=0, υ_{0y}=υ_0, g_y=$-g$:

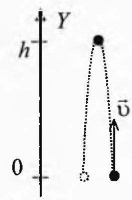


Рис. 44. *Жонглёр*

$$y=\upsilon_0 t-\frac{gt^2}{2}; \qquad \upsilon_y=\upsilon_0-gt.$$

Подставим в уравнения движения $y_в=h$, $\upsilon_{вy}$=0 для верхней точки траектории:

$$h=\upsilon_0 t_в-\frac{gt_в^2}{2}; \qquad 0=\upsilon_0-gt_в.$$

Решая совместно, найдём h: $\upsilon_0=gt_в$ $\Rightarrow$ $h=gt_в^2-\dfrac{gt_в^2}{2}=\dfrac{gt_в^2}{2}$.

В момент возвращения $y_п$=0: $0 = \upsilon_0 t_п - \frac{g t_п^2}{2} \Rightarrow t_п = \frac{2\upsilon_0}{g}$.

Но $t_в=\upsilon_0/g$, значит, $t_в=t_п/2$, $t_в$=(1 с)/2=0,5 с.

Окончательно находим $h = \frac{9{,}8 \cdot (0{,}5)^2}{2}$=1,23 м ≈1,2 м.

Эту задачу можно решить и короче. Из соображений симметрии следует, что вверх и вниз шар движется одинаковое время: по 0,5 с. При движении сверху вниз он проходит высоту h без начальной скорости с ускорением $\vec{g}$.

В этом случае: $y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$. В нижней точке $y_н$=0; $0 = h - \frac{g \cdot t_{сп}^2}{2}$;

$\Rightarrow h = \frac{g \cdot t_{сп}^2}{2}$. $h = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}5^2}{2}$=1,23 м ≈1,2 м.

Итак, шары поднимаются вверх на высоту 1,2 м.

4 Время движения первого камня минимально, если он будет поражен на возможно большей высоте. А это будет, если встреча камней произойдет в верхней точке траектории второго камня (рис. 45). Запишем уравнения движения камней (ось Y направим вверх из точки бросания, отсчёт времени начнем в момент бросания второго камня):

$$y_{01}=y_{02}=0; \quad a_{y1}=a_{y2}=-g; \quad t_1=t+\tau; \quad t_2=t.$$

$$y_1 = \upsilon_1(t+\tau) - \frac{g(t+\tau)^2}{2}; \quad y_2 = \upsilon_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент встречи $y_{1в}=y_{2в}=y_в$:

$$\upsilon_1 t_в + \upsilon_1\tau - \frac{g t_в^2}{2} - g t_в \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = \upsilon_2 t_в - \frac{g t_в^2}{2};$$

$$\Rightarrow \frac{g\tau^2}{2} - (\upsilon_1 - g t_в)\tau - (\upsilon_1 - \upsilon_2) t_в = 0. \qquad (27)$$

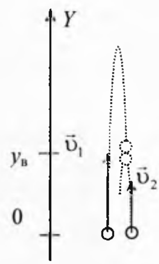


Рис. 45. *Подождать, чтобы сбить быстрее*

Время встречи найдём из условия, что в верхней точке траектории второго камня его скорость уменьшится до нуля:

$$0=\upsilon_2 - g \cdot t_в \quad \Rightarrow \quad t_в= \upsilon_2/g= 1 \text{ с}.$$

Подставляя в (27) значения υ_1, υ_2, $t_в$ и g, получим:

$5\tau^2 - 5\tau - 5=0$; $\tau^2 - \tau - 1=0$, $\tau = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+1} \approx 0{,}5 \pm 1{,}1$(с); τ=1,6 с.

Второй результат отрицательный и не соответствует условию задачи.

5 $S_1 = \frac{a t_1^2}{2}$; $S_2 = \frac{a t_2^2}{2}$; $\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2}$; $\Rightarrow S_2 = S_1 \cdot \frac{t_2^2}{t_1^2}$; $S_2 = 5 \cdot \frac{16}{1} = 80$ см.

6 $S_1 = \frac{a\tau^2}{2}$, $S_2 = \frac{a \cdot 2^2 \tau^2}{2}$, $S_3 = \frac{a \cdot 3^2 \tau^2}{2}$,.. $S_n = \frac{a \cdot n^2 \tau^2}{2}$, где $n = \frac{t}{\tau}$.

$S_{01} = S_1 = \frac{a\tau^2}{2}$=0,01 м =1 см; $S_{12} = S_2 - S_1 = 3 \cdot \frac{a\tau^2}{2} = 3 \cdot S_{01}$=3 см;

$S_{23} = S_3 - S_2 = 5 \cdot \frac{a\tau^2}{2} = 5 \cdot S_{01}$=5 см…

$$S_{n-1,n} = S_n - S_{n-1} = (n^2 - (n-1)^2) \cdot \frac{a\tau^2}{2} = (2n-1) \cdot \frac{a\tau^2}{2} = (2n-1) \cdot S_{01}.$$

Итак, пути, проходимые телом при равноускоренном движении без начальной скорости за равные промежутки времени относятся как ряд натуральных нечетных чисел: $S_{01} : S_{12} : S_{23} : ... : S_{n-1,n} = 1:3:5:...:(2n-1)$.

7 $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = -2aS$; $\upsilon=0$; $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \upsilon_{10}^2 = 2aS_1, \\ \upsilon_{20}^2 = 2aS_2; \end{cases} \Rightarrow S_2 = S_1 \cdot \frac{\upsilon_{20}^2}{\upsilon_{10}^2} = 60 \text{ м.}$$

8 Начальную координату возьмем произвольно (рис. 46).

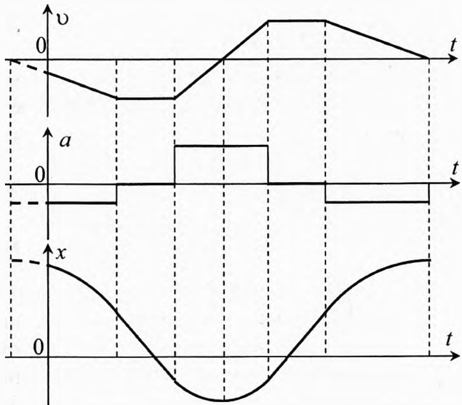


Рис. 46. *Определение ускорения и координаты по графику скорости*

9 $l = \upsilon_0 t - \dfrac{at^2}{2}$;

$$\Rightarrow at^2 - 2\upsilon_0 t + 2l = 0.$$

По теореме Виета $t_1 + t_2 = \dfrac{2\upsilon_0}{a}$, $t_1 t_2 = \dfrac{2l}{a}$. Тогда: $a = \dfrac{2l}{t_1 t_2} = 30$ см/с^2,

$\upsilon_0 = \dfrac{a(t_1 + t_2)}{2} = 45$ см/с.

10 $S_1 = \dfrac{g(t-\tau)^2}{2}$, $S = \dfrac{gt^2}{2}$, $S - S_1 = \dfrac{2}{3}S$; $\Rightarrow$ $S = 3S_1$; $t^2 = 3(t-\tau)^2$ $\Rightarrow t \approx 2{,}4$ с.

11 $h = a\tau^2/2$, $\upsilon_0 = a\tau$, $y = h + \upsilon_0 t - gt^2/2$. Тогда $y=0$ при $t=3{,}4$ с.

12 Относительная скорость тел постоянна и равна $2\upsilon_0$. Тела сближаются с этой скоростью. Следовательно, время до встречи равно $t = l/(2\upsilon_0) = 5$ с.

$y_2 = \upsilon_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = -75$ м. Тела встретятся под точкой B на расстоянии 75 м.

13 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; $x_1 = \upsilon_0 t$, $x_2 = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$,

$y_1 = l - \dfrac{gt^2}{2}$, $y_2 = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$; $d = l$; $\Rightarrow$ $l^2 = \upsilon_0^2 (1 - \cos\alpha)^2 t^2 + (l - \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot t)^2$.

Учитывая, что $\cos\alpha^2 + \sin^2\alpha = 1$, получим:

$$t = \frac{2l \cdot \sin\alpha}{\upsilon_0((1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha)} = \frac{l \cdot \sin\alpha}{\upsilon_0(1-\cos\alpha)} \approx 17{,}3 \text{ с.}$$

14 $h = \dfrac{g(t/2)^2}{2} \approx 5$ м.

15 **I способ.** $x_1 = 0$, $x_2 = -l + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$; $y_1 = H - \dfrac{gt^2}{2}$, $y_2 = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$;

В момент встречи: $x_{1в} = x_{2в}$; $y_{1в} = y_{2в}$; $\Rightarrow$ $t_в = l/(\upsilon_0 \cos\alpha)$; $H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_в$;

$$\Rightarrow H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot l/(\upsilon_0 \cos\alpha); \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = H/l = \sqrt{3}, \alpha = 60°.$$

II способ. Перейдем в систему координат, связанную с телом, падающим из точки A. Здесь скорость тела, брошенного из точки B, постоянна и равна $\vec{\upsilon}_0$. Поэтому ясно, что тела встретятся, если вектор скорости тела направлен к точке A, то есть $\operatorname{tg}\alpha = H/l$.

16 Выберем систему координат XOY, начало которой находится в месте расположения орудия (рис. 47). Тогда для снаряда:

$$x=\upsilon_0\cos\beta\cdot t,\quad y=\upsilon_0\sin\beta\cdot t-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент поражения: $x=l$, $y=l\cdot\text{tg}\alpha$.

Решая совместно 4 уравнения можно получить: $\upsilon_0=\sqrt{\dfrac{gl\cos\alpha}{2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}}$. Дальность полета S вдоль склона $S=l/\cos\alpha$, поэтому полученную формулу, можно записать так:

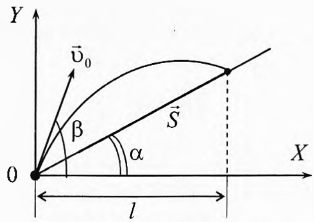


Рис. 47. *Цель на холме*

$$\upsilon_0=\sqrt{\frac{g\cdot S\cos^2\alpha}{2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}},\ \text{отсюда}\ S=\frac{2\upsilon_0^2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}{g\cdot\cos^2\alpha}.$$

Это выражение максимально при максимальном произведении $\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)=0{,}5\cdot[\sin(2\beta-\alpha)-\sin\alpha]$, то есть при максимальном $\sin(2\beta_0-\alpha)=1$, то есть при $\beta_0=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$. При $\alpha=0$ мы получаем известный ответ $\beta_0=\pi/4=45°$.

§ 13. Криволинейное движение

Криволинейным называется движение тела, при котором его скорость изменяется по направлению.

Любое криволинейное движение можно представить как движение по дугам окружностей различных радиусов (рис. 48). Поэтому описание движения тела по криволинейной траектории сводится к описанию движения тела по дугам окружностей, т. е. к вращательному движению, только с разными радиусами на разных участках траектории.

Рис. 48. *Криволинейное движение*

Пусть тело движется по криволинейной траектории и его скорость меняется по модулю и направлению (рис. 49).

Ускорение тела $\vec{a}$ при криволинейном движении можно разложить на две составляющие:

- касательное или тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, которое характеризует быстроту изменения скорости вдоль траектории;
- нормальное или центростремительное ускорение $\vec{a}_n$, которое характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Касательное ускорение вводилось ранее в прямолинейном движении, только так не называлось, т. к. оно же было и полным ускорением, ибо в прямолинейном движении нет нормальной составляющей ускорения.

Ускорение по определению равно быстроте изменения скорости тела в целом (и по модулю и по направлению):

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon} + (-\vec{\upsilon}_0)$.

Как видно из рис. 49:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n.$$

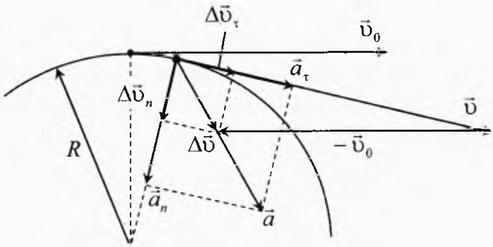


Рис. 49. *Две составляющие ускорения*

Разделим все члены последнего уравнения на Δt:

$$\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}.$$

Ускорение тела $\vec{a}$ равно векторной сумме его составляющих $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

Касательное (тангенциальное) ускорение *$\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости вдоль траектории. Касательное ускорение равно отношению изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ вдоль траектории к малому промежутку времени Δt, за который оно произошло:*

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}}.$$

Касательное ускорение направлено также как и скорость в данной точке. Модуль касательного ускорения равен отношению изменения модуля скорости к малому промежутку времени, за который оно произошло:

$$\boxed{a_\tau = \frac{|\upsilon - \upsilon_0|}{\Delta t}}.$$

Центростремительное (нормальное) ускорение *$\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Центростремительное ускорение направлено перпендикулярно (нормально) к скорости в данной точке траектории, то есть по радиусу дуги данного участка траектории, и равно отношению изменения скорости тела по направлению $\Delta\vec{\upsilon}_n$ к малому промежутку времени Δt, за которое оно произошло:*

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}}.$$

Получим формулу для вычисления центростремительного ускорения. Пусть тело равномерно вращается по окружности (рис. 50), тогда скорость изменяется только по направлению, то есть центростремительное ускорение будет равно полному ускорению тела:

$$\vec{a} = \vec{a}_n \quad \text{при} \quad |\vec{\upsilon}| = \text{const}.$$

Изобразим на рисунке скорости $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}$ тела в точках A и B. По условию $\upsilon_0=\upsilon$. Найдём изменение скорости $\Delta\vec{\upsilon}$. Оно направлено почти по радиусу вращения; если дугу AB взять достаточно малой, то $\Delta\vec{\upsilon}$ будет направлено точно по радиусу, значит центростремительное ускорение направлено к центру вращения.

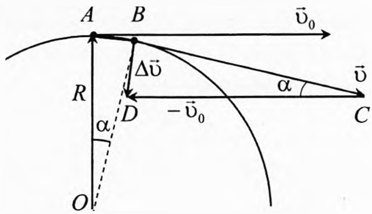


Рис. 50. *Нормальное ускорение*

Проведем хорду AB. Её длина из-за малости угла α примерно равна длине дуги AB, то есть $\upsilon\cdot\Delta t$. На рисунке угол α и дуга AB изображены большими для наглядности.

Рассмотрим подобные треугольники AOB и BCD. В них

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AO} \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\upsilon\cdot\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}, \qquad \text{но} \quad \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = a = a_n.$$

Итак, модуль центростремительного ускорения равен отношению квадрата скорости тела к радиусу его вращения:

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R}}.$$

Так как касательное и центростремительное ускорения всегда взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения $\vec{a}$ тела можно найти по теореме Пифагора:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}.$$

Пример 21. Мотоцикл стартует по окружности радиусом R=100 м и проходит путь l=100 м за t=10 с. Найти ускорение и скорость мотоцикла к концу t=10-й секунды, если касательное ускорение постоянно.

Решение. Так как a_τ=const, то $l=\dfrac{a_\tau t^2}{2}$

$\Rightarrow a_\tau = \dfrac{2l}{t^2}$, $a_\tau=\dfrac{2\cdot 100}{10^2}$=2 м/с^2.

К концу 10-й секунды (рис. 51):

$\upsilon=a_\tau\cdot t=2\cdot 10=20$ м/с; $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}=\dfrac{20^2}{100}$=4 м/с^2.

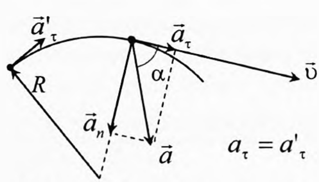


Рис. 51. *Поворот мотоцикла*

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2+4^2} \approx 4{,}5$ м/с^2. $\text{tg}\alpha=a_n/a_\tau$, $\text{tg}\alpha=2$, $\alpha\approx 64°$.

✓ **Ответ.** К концу 10-й секунды модуль скорости равен 20 м/с, ускорение 4,5 м/с^2 направлено под углом 64° к скорости в сторону центра окружности.

§ 14. Резкость движения (рывок)

Касательная и центростремительная составляющие ускорения $\vec{a}$ тела могут изменяться, в том числе неравномерно. В этих случаях движение тела характеризуется дополнительным понятием – *резкость движения* или *рывок*.

Понятие резкость используется при изучении ударов тел. Оно характеризует измерение ускорения тела с течением времени. В последнее время это понятие также называют словом «рывок».

> ***Резкость (рывок)*** *– это векторная физическая величина, которая характеризует изменение ускорения тела или его составляющих с течением времени. Резкость равна отношению малого изменения ускорения тела к малому промежутку времени, за который оно произошло.*

Резкость обозначим буквой $\vec{j}$ – по первой букве английского слова *jerk* (резкое движение, рывок, толчок) или *jolt* (толчок, тряска, удар).

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}} \quad \text{или} \quad \vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{a}'.$$

То есть резкость равна первой производной ускорения по времени.

Единица измерения резкости:

$$[j] = \frac{1\ \text{м}/\text{с}^2}{1\ \text{с}} = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^3}.$$

Если ускорение тела за одну секунду изменяется на 1 м/с^2, то тело движется с резкостью 1 м/с^3.

При движении тела с постоянной резкостью, то его ускорение изменяется в соответствии со следующим уравнением:

$$\vec{j} = \frac{\vec{a} - \vec{a}_0}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{j}\,t}.$$

Резкость движения имеет место при перевозке пассажиров и грузов. Пассажир приспосабливается к ускорению, напрягая мышцы и подбирая позу. При изменении ускорения поза человека тоже меняется. Пассажиру нужно дать время, чтобы отреагировать и сменить её – иначе он потеряет равновесие. Типичный пример – момент полной остановки вагона метро или автобуса после процесса торможения: стоящие пассажиры, наклонившиеся вперёд в процессе торможения, не успевают приспособиться к новому ускорению, возникающему в момент остановки, и наклоняются назад.

Вестибулярный аппарат человека чувствителен именно к рывку, а не к ускорению. Для комфорта пассажиров при разработке поездов инженеры обычно должны закладывать резкость менее 2 м/с^3.

При равноускоренном движении тело и его части находятся в деформированном состоянии под действием ускоряющей силы. При допустимом уровне ускорения постоянная деформация незначительно влияет на долговечность частей груза. Однако частое и быстрое изменение ускорения означает частую и быструю деформацию, что может привести к разрушению хрупкого груза.

При перевозке хрупких грузов и произведений искусства резкость движения уменьшают, комбинируя различные типы упаковок от мягких до систем пружин со свободной подвеской. Например, каждый экспонат коллекции Тутанхамона при доставке из Египта в СССР имел 50 элементов упаковки.

Для многих приборов и устройств в технических условиях нормируется предельное значение резкости движения. В аэрокосмической отрасли используется специальный прибор для измерения резкости. Первый такой прибор (jerkmeter) был запатентован в 1966 году.

Резкость является производной третьего порядка от радиус-вектора. Производные большего порядка применяются редко. Однако при выводе на орбиту телескопа Хаббла инженеры должны были учитывать предельные значения для четвёртой производной радиус-вектора.

✍ **Пример 22.** Тело, движущееся прямолинейно с начальным ускорение a_0=5 м/с^2, начало разгоняться с резкостью j=2 м/с^3 в том же направлении. Вычислить ускорение тела через пять секунд столько резкого движения. Найти конечную скорость тела и его перемещение, если начальная скорость равна υ_0=1 м/с.

↪**Решение.** Ускорение тела:

$$\boxed{a = a_0 + j\cdot t}\,; \quad a = 5 + 2\cdot 5 = 15 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти скорость тела, необходимо воспользоваться интегрированием:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\upsilon = a\cdot dt\,; \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t (a_0 + j\cdot t)\cdot dt\,; \quad \upsilon - \upsilon_0 = a_0\cdot t + \frac{j\cdot t^2}{2}.$$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + a_0\cdot t + \frac{j\cdot t^2}{2}}\,; \quad \upsilon = 1 + 5\cdot 5 + \frac{2\cdot 5^2}{2} = 51\,(\text{м/с}).$$

Аналогично найдём перемещение тела при постоянной резкости движения:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = \upsilon\cdot dt\,; \quad \int_0^S dS = \int_0^t (\upsilon_0 + a_0\cdot t + \frac{j\cdot t^2}{2})\cdot dt\,;$$

$$\boxed{S = \upsilon_0\cdot t + \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{Rt^3}{6}}\,; \quad S = 1\cdot 5 + \frac{5\cdot 5^2}{2} + \frac{2\cdot 5^3}{6} \approx 109 \text{ м}. \hookleftarrow$$

✓ **Ответ.** a=15 м/с^2; υ=51 м/с; S=109 м.

§ 15. Вращательное движение

Вращательное движение твёрдых тел будем рассматривать на примере мысленной модели ***абсолютно твёрдого тела***, которая включает в себя свойства инертности и гравитационности, и не деформируется при любых взаимодействиях с другими телами (т. е. *расстояние между любыми двумя точками абсолютно твёрдого тела остаётся неизменным в любой момент времени).*

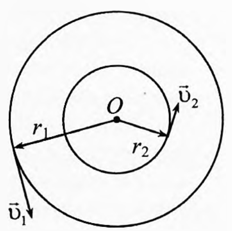


Рис. 52. *Вращение тела*

Движение, при котором каждая точка тела описывает окружность с единым центром, называется ***вращательным движением.***

При вращении твёрдого тела точки с разными радиусами вращения движутся с разными скоростями по разным траекториям (рис. 52). Но при вращении твёрдого тела есть и общие черты. Например, за одно и то же время все его точки совершают одно и то же число оборотов.

Частота вращения *характеризует быстроту вращения тела. Частота вращения равна отношению числа оборотов N тела к малому промежутку времени t, за который они совершены.*

$$\boxed{n = \frac{N}{t}}; \qquad [n] = \frac{\text{об}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}. \qquad (28)$$

При равномерном вращении частота вращения равна числу оборотов, совершаемых телом за единицу времени. Например, частота вращения ротора генератора тепловой электростанции равна 50 об/с. Это значит, что ротор генератора совершает 50 оборотов за 1 с, а за 1 минуту – 3000 оборотов.

При любых, в том числе неравномерных вращениях, можно сказать, что частота вращения n=50 об/с показывает, что в данный миг это тело вращается в 50 раз быстрее, чем тело с частотой вращения 1 об/с. Если в дальнейшем оно будет вращаться равномерно, то за одну секунду совершит 50 оборотов.

Важнейшей характеристикой вращения является период вращения.

Период вращения *– это время, в течение которого совершается один оборот. Период равен отношению времени t к числу оборотов N, которые совершены за это время.*

$$\boxed{T = \frac{t}{N}}. \qquad (29)$$

Единица измерения периода вращения – секунда:

$$[T]=1 \text{ с (мин, ч, год)}.$$

Перемножив (28) на (29) получим связь периода и частоты вращения:

$$T \cdot n = 1 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad \boxed{n = \frac{1}{T}}.$$

Период – есть величина, обратная частоте вращения, а частота вращения – есть величина, обратная периоду вращения.

§ 16. Угол поворота

Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка 53.

Основной величиной, характеризующей изменение положения тела в пространстве при вращательном движении, является угол поворота, который одинаков для любой точки твёрдого тела за одно и то же время.

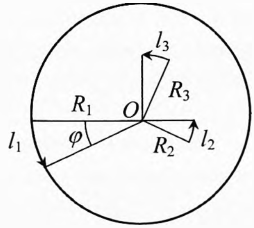


Рис. 53. *Угол поворота*

Получим формулу для вычисления угла поворота. Точки тела, имеющие разные радиусы вращения, проходят различные пути за одно и то же время. Но отношение длины дуги к радиусу вращения точки одинаково для всех точек:

$$\frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2} = \frac{l_3}{R_3}.$$

В этом Вы можете легко убедиться практически.

Причём, это отношение тем больше, чем дольше длится поворот. Поэтому естественно за меру поворота тела принять то, что одинаково для всех его точек, то есть отношение длины дуги, описываемой точкой, к радиусу её вращения. Угол поворота обозначается буквой φ:

$$\boxed{\varphi = \frac{l}{R}}, \quad [\varphi] = 1 \text{ рад}.$$

Угол поворота *– это скалярная величина, характеризующая изменение положения тела в пространстве при вращательном движении. Угол поворота равен отношению длины дуги, описываемой точкой, к радиусу её вращения.*

Единица измерения угла поворота в СИ – один радиан.

Один радиан – это такой угол поворота, при котором точка описывает дугу, равную радиусу её вращения.

Угол поворота равен числу радиусов, которые прошла материальная точка по дуге окружности.

Математическое определение радиана: *1 рад – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу* (рис. 54).

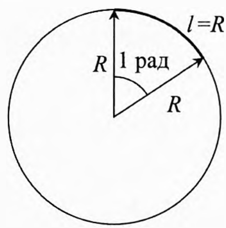


Рис. 54. *Радиан*

Угол поворота позволяет оценить, как повернулось тело в пространстве. Численное значение угла показывает, на сколько радиан повернулось тело за некоторое время.

Угол поворота равен 10 рад, что это значит? Это значит, что за время этого поворота точка прошла по окружности дугу, равную 10 радиусам её вращения.

Кроме радианной меры угла, используемой в Международной системе единиц физических величин СИ, на практике применяется и градусная мера, пришедшая к нам из древнего Вавилона. Получим связь между радианами и градусами. Полный оборот тела соответствует 360°, а в радианной мере

$$\varphi = \frac{l}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ (рад)} \approx 6{,}28 \text{ рад}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\pi \text{ рад} = 360^\circ}\,; \quad \text{или} \quad \boxed{1 \text{ рад} \approx 57{,}3^\circ = 57^\circ 18'}\,.$$

Если тело совершит N оборотов, то путь, проходимый точкой, равен

$$l = 2\pi R \cdot N, \quad \text{тогда} \quad \varphi = \frac{l}{R} = \frac{2\pi RN}{R} = 2\pi N, \quad \boxed{\varphi = 2\pi N}\,.$$

Угловое перемещение. Если известно начальное положение точки и угол поворота, то нельзя однозначно определить, где будет точка, повернувшись на этот угол, так как поворачиваться можно в разных направлениях на один и тот же угол. Значит, угол поворота однозначно не определяет изменение положения вращающегося тела, нужно учесть ещё направление вращения. С этой целью введем понятие: угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$.

> ***Угловое перемещение*** *– это векторная физическая величина, которая служит для количественной оценки изменения положения тела при вращательном движении. Угловое перемещение равно по модулю малому приращению угла поворота радиуса вектора и направлено вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого винта.*

Угловое перемещение прикладывается к оси вращения и его направление по всеобщей договоренности определяется по правилу правого винта. Если рукоятку правого винта (штопора, буравчика) вращать по направлению вращения тела (рис. 55), то поступательное движение винта совпадет с направлением углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$.

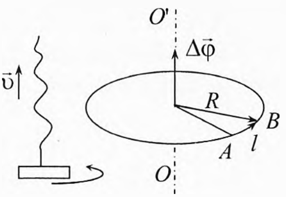


Рис. 55. *Угловое перемещение*

Зная начальное положение точек тела, направление вращения и угол поворота, можно однозначно определить положение каждой точки при вращении тела в пространстве.

Угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ и, вводимые ниже, угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\beta}$ называются псевдовекторами (в отличие от обычных векторов скорости $\vec{\upsilon}$, силы $\vec{F}$ и др.), потому что их направление определяется по договоренности. Если бы было принято правило левого винта, для определения их направления, то они все были бы направлены противоположно. Мы будем называть их для краткости просто векторами. Все операции с псевдовекторами точно такие же, как и с обычными векторами.

§ 17. Угловая скорость

Для того, чтобы характеризовать, как с течением времени изменяется угловое перемещение тела, вводится понятие угловая скорость, которая обозначается буквой ω.

Угловая скорость должна удовлетворять требованиям, аналогичным требованиям к скорости $\vec{\upsilon}$ (называемой иногда линейной скоростью, чтобы не путать с угловой), то есть угловая скорость должна быть векторной, мгновенной, непрерывной характеристикой вращательного движения и большей для того тела, которое быстрее вращается. Всем этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

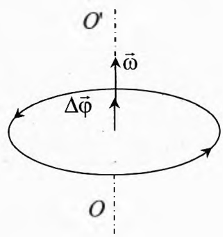


Рис. 56. *Угловая скорость*

> ***Угловая скорость*** *– это векторная величина, введенная для количественной оценки быстроты и направления вращения тела вокруг оси. Угловая скорость равна отношению малого углового перемещения тела к промежутку времени, за который произошло это угловое перемещение.*

Угловая скорость направлена, как и вектор углового перемещения, т.е. вдоль оси вращения (рис. 56). Её направление определяется по правилу правого винта.

Если ось вращения жестко закреплена (не меняет своего направления), то в скалярном виде для угловой скорости можно записать:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}, \quad [\vec{\omega}] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду.

При равномерном вращении вдоль оси, не меняющей своего направления, угловую скорость можно определить по формуле среднего значения

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}} \quad \text{или} \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t}.$$

Если φ_0=0, то $\omega = \frac{\varphi}{t}$ или $\varphi = \omega t$.

> ✍ **Пример 23.** Тело повернулось равномерно на 10 рад за 5 с. Чему равна угловая скорость и что означает полученный результат?

✓ **Ответ.** Угловая скорость равна $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$=2 рад/с. Угол поворота данного тела изменяется в 2 раза быстрее, чем у тела с угловой скоростью 1 рад/с, и при равномерном вращении тело поворачивается на 2 рад за 1 с.

§ 18. Угловое ускорение

Угловая скорость может изменяться с течением времени. Для того чтобы характеризовать это изменение, вводится физическая величина – угловое ускорение, которое обозначается буквой β. Угловое ускорение определяется по аналогии с касательным ускорением.

Угловое ускорение *– это векторная величина, введенная для количественной оценки изменения быстроты вращения тела. Угловое ускорение равно отношению малого изменения угловой скорости к малому промежутку времени, за который оно произошло*

$$\vec{\beta} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Угловое ускорение направлено так же, как изменение угловой скорости, то есть если модуль угловой скорости увеличивается, то угловое ускорение сонаправлено с угловой скоростью. Если модуль угловой скорости уменьшается, то угловое ускорение направлено по оси вращения в сторону, противоположную направлению угловой скорости (см. рис. 57).

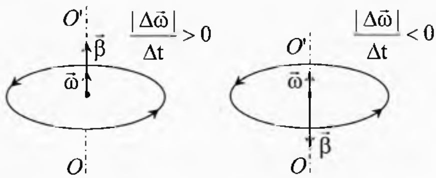


Рис. 57. *Угловое ускорение*

Если ось вращения жестко закреплена (не меняет своего направления), то в скалярном виде для углового ускорения можно записать:

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}.$$

В случае равноускоренного вращения вдоль оси, не меняющей своего направления, угловое ускорение можно вычислить, беря изменение угловой скорости за большие промежутки времени:

$$\boxed{\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t}} \quad \text{или} \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \beta t}.$$

Для угла поворота по аналогии с перемещением в прямолинейном движении получим:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}}.$$

Если тело начинает равноускорено раскручиваться (φ_0=0 и ω_0=0), то

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2}.$$

§ 19. Связи угловых и линейных характеристик вращения тела

Связь угловой скорости со скоростью.

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t};\qquad \Delta\varphi=\frac{\Delta l}{R}\qquad \Rightarrow\qquad \omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\Delta l}{R\Delta t}.$$

Учитывая, что $\upsilon=\frac{\Delta l}{\Delta t}$, получим: $\boxed{\omega=\frac{\upsilon}{R}}$, $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon=\omega R}$.

Скорость при вращении частицы равна произведению угловой скорости и радиуса её вращения.

Связь угловой скорости с центростремительным ускорением.

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{\omega^2R^2}{R}=\omega^2R,\qquad \text{или}\qquad \boxed{a_n=\omega^2R}.$$

Центростремительное ускорение равно произведению квадрата угловой скорости и радиуса вращения тела.

Связь угловой скорости с периодом и частотой вращения. При равномерном вращении $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Если время равно периоду $\Delta t=T$, то за это время тело повернется на угол

$\Delta\varphi=2\pi$ рад, следовательно: $\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}}$.

Учитывая, что частота вращения $n=\frac{1}{T}$, получим: $\boxed{\omega=2\pi n}$.

Это выражение означает, например, что при частоте вращения 1 об/с угловая скорость тела будет равна 2π рад/с.

Связь касательного ускорения с угловым ускорением.

$$a_\tau=\frac{\upsilon-\upsilon_0}{\Delta t}=\frac{\omega R-\omega_0R}{\Delta t}=\frac{\omega-\omega_0}{\Delta t}\cdot R=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\cdot R=\beta\cdot R,\qquad \boxed{a_\tau=\beta\cdot R}.$$

Касательное ускорение точки равно произведению углового ускорения на радиус вращения.

✍ **Пример 24.** Песня В. Добрынина «Казино» длится t=250 с. Общая ширина бороздок этой песни на виниловой грампластинке d=16 мм, средний радиус вращения – R=13,5 см, частота вращения – n=33 об/мин. Определить период, угловую скорость, угол поворота, общую длину бороздок и ширину одной бороздки.

➥**Решение.** $T=\frac{1}{n}$, $T=\frac{1}{33\text{ об/мин}}=\frac{1}{0{,}55\text{ об/с}}=1{,}8$ с.

$\omega=2\pi n$, $\omega=2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}55=3{,}45$ рад/с.

$\varphi=\omega t$, $\varphi=3{,}45$ рад/с $\cdot 250$ с$=864$ рад.

$\varphi=l/R$, $\Rightarrow$ $l=\varphi\cdot R$, $l=864\cdot 0{,}135$ м$=117$ м.

$\varphi=2\pi N$, $\Rightarrow$ $N=\varphi/2\pi$, $N=137$ об.

$d_1=d/N$, $d_1=16$ мм$/137=0{,}12$ мм.↩

✓ **Ответ.** Период вращения диска 1,8 с, угловая скорость 3,45 рад/с, длина бороздок 117 м, ширина бороздки 0,12 мм, угол поворота 864 рад.

✍ **Пример 25.** Среднее расстояние от Земли до Солнца (большая полуось Земной орбиты) $a=149{,}6\cdot 10^6$ км. Чему равна средняя скорость движения Земли по орбите?

➥**Решение.** $\upsilon_{ср}=\frac{2\pi a}{T}$, где $T=1$ год$=365{,}24\cdot 24\cdot 3600$ с$\approx 31{,}56\cdot 10^6$ с;

$$\upsilon_{ср}=\frac{2\pi\cdot 149{,}6\cdot 10^6\text{ км}}{31{,}56\cdot 10^6\text{ с}}\approx 29{,}8\text{ км/с.}$$↩

✓ **Ответ.** Средняя скорость движения Земли по орбите равна 29,8 км/с.

Упражнения. Вращательное движение

1 Корабль-спутник «Восток-3» с космонавтом Николаевым на борту совершил $N=64$ оборота вокруг Земли за время $t=95$ ч. Определить среднюю скорость полета υ. Средняя высота полета корабля над Землей $h=230$ км. Радиус Земли $R=6370$ км.

2 Большой шкив ремённой передачи радиусом $R_1=32$ см вращается с частотой $n_1=2{,}0$ об/с. Радиус малого шкива $R_2=24$ см. Найти угловую скорость ω_2, частоту вращения n_2 малого шкива, а также скорость υ ремня, который движется без проскальзывания (рис. 58).

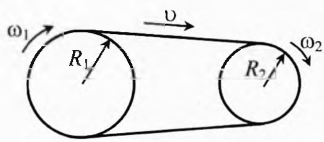


Рис. 58. *Ремённая передача*

3 Диск равномерно вращается относительно оси, проходящей через его центр. Скорость точек края диска $\upsilon_1=3$ м/с. У точек на расстоянии $l=10$ см ближе к оси, скорость $\upsilon_2=2$ м/с. Какова частота n вращения диска?

4 Найти обусловленные суточным вращением Земли скорость υ и нормальное ускорение a_n точек земной поверхности: а) на экваторе; б) на широте $\varphi=60°$.

5 Поезд выезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью 54 км/ч и проходит 600 м за 30 с с постоянным касательным ускорением. Радиус закругления равен 1 км. Определить скорость и полное ускорение в конце пути.

6 Определить угловую скорость к концу 10-й секунды и угловое ускорение мотоциклиста в примере 21 этой главы, приведенном ранее.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $\upsilon=2\pi\cdot(R+h)\cdot N/t=7{,}8$ км/с.

2 $\upsilon=\omega_1\cdot R_1=2\pi n_1\cdot R_1=4{,}0$ м/с; $\omega_2=\upsilon/R_2=2\pi n_1\cdot R_1/R_2=16{,}7$ рад/с; $n_2=\omega_2/2\pi=n_1\cdot R_1/R_2=2{,}67$ об/с$=160$ об/мин.

3 $\upsilon_1=\omega R=2\pi nR$, $\upsilon_2=2\pi n(R-l)$; $\Rightarrow$ $n=(\upsilon_1-\upsilon_2)/(2\pi l)=1{,}6$ об/с.

4 а) $\upsilon=2\pi R/T=465$ м/с; $a_n=\omega^2\cdot R=(2\pi/T)^2\cdot R=0{,}034$ м/с^2;

б) $\upsilon=2\pi R\cos\varphi/T=233$ м/с; $a_n=\omega^2\cdot(R\cos\varphi)=(2\pi/T)^2\cdot(R\cos\varphi)=0{,}017$ м/с^2.

5 $S=\dfrac{\upsilon_0+\upsilon}{2}t$; $\Rightarrow$ $\upsilon=\dfrac{2S}{t}-\upsilon_0=25$ м/с. Полное ускорение $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$, где $a_\tau=\dfrac{\upsilon-\upsilon_0}{t}=\dfrac{1}{3}$ м/с^2, $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{R}=0{,}625$ м/с^2. Значит, $a=0{,}7$ м/с^2.

6 **I способ.** Так как вращение по кругу равноускоренное, то

$$\varphi=\frac{l}{R};\quad \varphi=\frac{\beta t^2}{2};\quad \Rightarrow\quad \frac{l}{R}=\frac{\beta t^2}{2};\quad \Rightarrow\quad \beta=\frac{2l}{Rt^2};\quad \beta=\frac{2\cdot 100}{100\cdot 10^2}=0{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

$$\omega=\beta t,\quad \omega=0{,}02\cdot 10=0{,}2 \text{ рад/с}.$$

II способ. Угловую скорость к концу 10-й секунды найдём, используя её связь с линейной скоростью:

$$\upsilon=\omega\cdot R;\quad \Rightarrow\quad \omega=\upsilon/R,\quad \omega=20/100=0{,}2 \text{ рад/с}.$$

Угловое ускорение найдём, используя его связь с касательным ускорением:

$$a_\tau=\beta R;\quad \Rightarrow\quad \beta=a_\tau/R,\quad \beta=2/100=0{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Глава 2. Основы динамики

Миллионы людей видели, как падают яблоки,
но только Ньютон спросил почему.
Бернард Барух (американский финансист)

Мир един. Явления природы существуют во взаимосвязи. Одни явления вызывают к жизни другие явления, которые порождают новые явления и так далее... Связь явлений, когда одно вызывает появление другого, называется причинностью. То явление, которое порождает другое, называется *причиной*, а то, которое вызывается действием причины, называется *следствием*.

В разделе «Основы динамики» анализируются причины, определяющие характер того или иного движения. В основе динамики лежит принцип причинности и три закона Ньютона.

> ***Динамика** – раздел механики, в котором изучается взаимодействие тел, являющееся причиной изменения их скоростей.*

Как отмечалось выше, все механические движения тел, в зависимости от характера взаимодействия их с другими телами, можно разделить на два вида: движение по инерции и неинерциальное движение.

Если действия на данное тело других тел взаимно компенсируются, то говорят, что тело движется по инерции.

Слово инерция (от лат. inertis – бездеятельный) означает состояние движения или покоя тела, когда внешние действия на тело отсутствуют или взаимно уравновешиваются.

Если же тело испытывает неуравновешенное действие со стороны других тел, то говорят, что его движение неинерциально.

Двум видам движения соответствуют два закона, определяющие характер движения тел в ИСО.

Первый закон – *закон инерции.* Он был открыт для частного случая итальянским ученым Г. Галилеем в 1609 г. и обобщен английским ученым И. Ньютоном в 1687 г.

Второй закон, *устанавливающий характер неинерциального движения тел в ИСО,* был открыт И. Ньютоном в 1687 г.

Им был также открыт **третий закон**, *определяющий характер взаимодействия тел.* Все три закона носят имя И. Ньютона.

§ 20. Первый закон Ньютона

Г. Галилей на основании опытов сделал вывод: *когда тело движется в горизонтальной плоскости, не встречая сопротивления своему движению,* *то движение его является равномерным. Такое движение продолжалось бы бесконечно долго, если бы плоскость была бесконечной.*

Исаак Ньютон обобщил этот результат в следующем утверждении, которое называется ***первым законом Ньютона***:

> *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон выражает определенный порядок причинной связи между явлениями или свойствами материальных объектов. Поэтому формулировка любого закона должна отвечать, по крайней мере, на три вопроса:

- **Что?** – какую существенную связь явлений отражает закон, что существенное и всеобщее наблюдается?
- **Где?** – где именно имеет место данная существенная связь явлений?
- **Когда?** – при каких условиях наблюдается эта связь явлений?

В законе в формулировке Ньютона не указано, в каких системах отсчёта имеет место сохранение скорости тела. Рассмотрим этот вопрос.

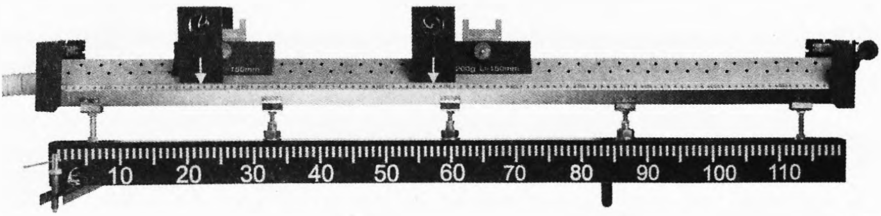


Рис. 1. *Прибор для демонстраций по механике на воздушной подушке, используемый при изучении основ кинематики и законов механики прямолинейного движения*

На приборе для демонстрации законов механики (рис. 1) можно показать, что тележка, поддерживаемая струями воздуха (либо силами магнитного отталкивания), движущаяся по трубе без трения, сохраняет свою скорость относительно трубы, стола, других тел в классе до тех пор, пока не столкнется с упором. То есть тележка сохраняет свою скорость относительно других тел, движущихся по инерции.

Представим себе многообразие тел в природе, которые находятся в разнообразных движениях и взаимодействиях. Есть ли что-нибудь общее в их движении?

> *Оказывается, что все тела, движущиеся по инерции, сохраняют свои скорости относительно друг друга.*

Это и есть наша формулировка I закона Ньютона, в которой объединены ответы на все три вопроса.

1. Что удивительно в движении тел? Оказывается, некоторые тела движутся с постоянной скоростью.

2. При каких условиях это происходит? Тогда, когда они движутся по инерции, то есть при отсутствии внешних некомпенсированных действий.

3. Где, относительно чего такое наблюдается? Относительно любых других тел, которые тоже движутся по инерции.

С любым телом можно связать систему координат и часы и получить систему отсчёта. Если тело отсчёта движется по инерции, то связанная с ним система отсчёта является инерциальной.

Сформулируем ***первый закон Ньютона*** следующим образом.

Любое тело сохраняет свою скорость в любой инерциальной системе отсчёта, когда действия на него других тел взаимно уравновешиваются.

В неинерциальной системе отсчёта тело, движущееся по инерции, не сохраняет свою скорость. Например, мяч, лежащий на полу стоящего автобуса, начнет двигаться назад относительно пола автобуса, если автобус начнет двигаться вперед. Система отсчёта, связанная с автобусом, в данном случае неинерциальна, и в ней I закон Ньютона не выполняется, т.е. скорость тела (мяча), движущегося по инерции, не сохраняется в этой системе отсчёта.

Формулировка явления отвечает на те же вопросы, что и формулировка закона – что? где? когда?

> ***Инерция*** *– это явление сохранения скорости тела, наблюдаемое в инерциальных системах отсчёта, когда действие на тело других тел взаимно уравновешивается.*

Говорить о полном отсутствии действия на какое-либо тело со стороны других тел – некорректно, ибо тел, которые ни с чем не взаимодействуют, просто не существует. Под отсутствием действия на тело других тел на самом деле понимается отсутствие неуравновешенного действия, а не полное отсутствие действия на это тело других тел.

§ 21. Инертность. Масса

Если на тело произвести некомпенсированное действие, то в ИСО оно получит ускорение. Причём, разные тела при одном и том же действии на них получают разные ускорения.

> *Свойство тел противодействовать изменению их скорости при взаимодействиях с другими телами называется* ***инертностью****.*

Чем труднее изменить скорость тела, тем оно инертнее.

Для того, чтобы количественно характеризовать инертность тел, вводится физическая величина – масса тела. Масса обозначается буквой m.

Способ измерения массы получим, исходя из следующего принципа: *будем считать, что одно тело инертнее (массивнее) другого во столько раз, во сколько раз медленнее у него изменяется скорость, при одинаковом некомпенсированном воздействии на каждое из них.* Этот принцип отражает суть инертности.

Из эксперимента известно, что сжатая пружина действует одинаково на любое тело* (рис. 2). Подействуем такой пружиной на два разных тела. Сжатие (деформация) пружины в обоих случаях должно быть одинаковым.

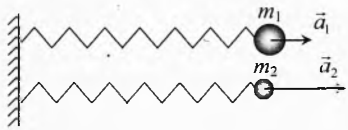


Рис. 2. *Сравнение масс тел*

Тела получают разные ускорения и, согласно принципу, приведенному выше, имеем:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (1)$$

Мы получили способ сравнения масс тел. Но, чтобы получить массу тела в каких-то единицах, необходимо сравнить действие на данное тело и на эталон, масса которого принята за единицу. В СИ единица массы – 1 кг, ею обладает эталон массы, представляющий собой цилиндр из платиноиридиевого сплава, хранящийся в г. Севре близ Парижа, а также его многочисленные копии:

$$\boxed{m_э = 1\,\text{кг}}.$$

Действуя одинаково на данное тело и на эталон массы $m_э$, получим:

$$\frac{m_т}{m_э} = \frac{a_э}{a_т} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{m_т = m_э \cdot \frac{a_э}{a_т}}.$$

Масса тела является скалярной величиной, так как инертность тела проявляется одинаково по всем направлениям, т. е. не зависит от направления. *Масса является аддитивной величиной, т. е. масса двух тел m_1 и m_2, сложенных вместе, равна сумме масс этих тел для любых макроскопических тел*, т. е.

$$\boxed{m_{12} = m_1 + m_2}.$$

* Привлекая эту информацию бездоказательно, мы частично воруем закон Гука. Но как говорила моя мама: «От большого взять немножко – это не воровство, а просто дележка».

***Масса** – это скалярная величина, являющаяся мерой инертности тела. Масса тела равна произведению массы эталона на отношение ускорения эталона к ускорению тела, полученных при одинаковом некомпенсированном действии на каждое из них.*

Например, масса спортивного ядра 7 кг. Что это значит? Это означает, что ядро инертнее килограммовой гири (эталона) в 7 раз, то есть при одинаковом некомпенсированном действии на ядро и эталон скорость ядра будет изменяться в 7 раз медленнее, чем у эталона.

§ 22. Сила

Понятие силы вводится для того, чтобы характеризовать взаимодействие тел. Вместо того, чтобы говорить: «на данное тело действует другое тело», будем говорить: «на данное тело действует сила» или «к телу приложена сила». Сила обозначается буквой $\vec{F}$.

Сила – мгновенная характеристика взаимодействия, ибо в разные моменты времени интенсивность взаимодействия тел может быть различной.

Сила – векторная величина, т. к. она определяет действие, а действие на данное тело другого тела в каждый миг направлено определенным образом, и направление действия может меняться с течением времени. Способ измерения силы вытекает из способа измерения массы. Действительно, из (1) следует: $m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2$, или в векторном виде:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = m_2 \cdot \vec{a}_2. \quad (2)$$

Но, по принципу определения массы, на каждое тело действие пружины одинаково. Другими словами: одинакова сила, приложенная к каждому телу со стороны пружины:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3) , видим, что силу можно определить по результату её действия как произведение массы тела, к которому приложена сила, на ускорение, полученное телом под действием этой силы:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что ускорение направлено так же, как и сила, создающая это ускорение. ***Сила является причиной ускорения.*** В СИ сила измеряется в ньютонах, в честь английского ученого И. Ньютона, открывшего законы динамики.

К телу приложена сила, равная 1 Н. Что это значит?

$$1\,\text{Н} = 1\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Это означает то, что тело массой 1 кг под действием силы 1 Н движется с ускорением 1 м/с^2.

***Сила** – это векторная величина, характеризующая мгновенное взаимодействие данного тела с другим телом. Сила равна произведению массы тела на ускорение, получаемое им благодаря этой силе*.*

Для измерения силы применятся прибор, который называется *динамометр* (силомер). Он представляет собой несложное устройство с пружиной, проградуированной шкалой и указателем (рис. 3). При воздействии на динамометр внешней силы пружина деформируется прямо пропорционально значению этой силы (закон Гука).

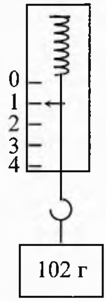


Рис. 3. *Один Ньютон*

Как узнать, какие силы приложены к телу? Сила – это мера взаимодействия тела с другими телами. *Для нахождения всех сил, приложенных к телу, нужно найти все тела, с которыми это тело взаимодействует, и далее оценить, в какой мере и в каком направлении осуществляются эти взаимодействия.* Значение силы не зависит от того, в какой системе отсчёта её измеряют. Обращаем внимание на то, что силы всегда возникают парами; если на одно тело действует другое тело, то второе тело обязательно действует на первое (с такой же по модулю силой, о чем мы узнаем из III закона Ньютона).

§ 23. Второй закон Ньютона

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по той прямой, по которой эта сила действует.

Исаак Ньютон, 1686 г.

В каких случаях можно пользоваться формулой $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ и вытекающей из неё формулой (5) для вычисления ускорения?

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (5)$$

Опыт показывает, что эти формулы можно применять при действии на тело любых сил гравитационного и электромагнитного происхождения, если скорость тела значительно меньше скорости света. Кроме того, оказывается, что *инертность тела проявляется одинаково, независимо от природы*

* То, что силу определили через инертную массу, мы, фактически, украли для этой цели II закон Ньютона. Можно было бы украсть поменьше, например, закон Гука в полном объеме, но тогда способ измерения силы был бы менее общим. А как заметил один известный физик-методист, проф. В. А. Орлов: «Не украдешь – ничего не сформулируешь, больше украдешь – больше сформулируешь».

силы, приложенной к телу, и от модуля силы. Например, масса одного и того же тела на Луне и Земле одинакова. Важно отметить, что *любая сила, приложенная к телу, не зависит от массы этого тела (массы как меры инертности тела). Любая сила не зависит от ускорения тела.* Таким образом, ускорение является функцией двух независимых параметров, и соотношение (5) приобретает характер закона: любая сила создаёт телу ускорение, равное отношению силы к массе тела.

А как быть, если к телу приложено несколько сил? На этот вопрос отвечает ***принцип суперпозиции сил***.

Каждая сила, приложенная к телу, создаёт ему ускорение независимо от наличия других сил. Ускорение тела равно векторной сумме ускорений, созданных отдельными силами.

Пусть на тело массы m действует несколько сил, например, три силы (лебедь, рак и щука) (рис. 4). Согласно принципу суперпозиции, имеем:
во-первых,

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m};\quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m};\quad \vec{a}_3 = \frac{\vec{F}_3}{m};\qquad (6)$$

во-вторых,

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3.\qquad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_3}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m}.\qquad (8)$$

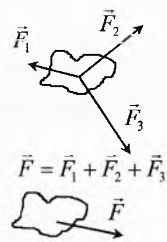


Рис. 4. *Равнодействующая сил*

Векторная сумма сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$*, приложенных к телу, называется* ***равнодействующей (результирующей) сил*** $\vec{F}$.

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}.$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m}}\quad (9),\qquad \text{или}\qquad \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}},\qquad (9')$$

где n – число сил, приложенных к телу (в нашем случае – три силы, n=3). Формулы (5) и (9') выглядят одинаково, только в (5) под $\vec{F}$ понимается одна сила, а в (9') сумма всех сил, приложенных к телу. Важно выяснить, где ещё можно применять формулу (4) для вычисления силы, а также формулы (5) и (9) для вычисления ускорения?

Опыт показывает, что эти формулы можно применять только в инерциальных системах отсчёта. Действительно, пусть с Земли взлетает самолёт с пассажирами. С Землей связана квазиинерциальная (почти инерциальная) система отсчёта, в которой неинерциальность столь мала, что ею можно пренебречь в опытах, не требующих особой точности. Поэтому ускорение, с которым пассажиры движутся относительно Земли, можно вычислить как отношение результирующей сил, действующих на пассажира со стороны кресла, и силы тяжести к массе пассажира. Но относительно системы отсчёта, связанной с взлетающим самолётом, этого сделать по формуле (9) нельзя, ведь пассажиры неподвижны относительно самолёта, a=0, но некомпенсированная сила, действующая на пассажира, и его масса не равны нулю, а значит, не равно нулю отношение силы к массе. То есть II закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта не выполняется.

Сформулируем ***второй закон Ньютона.***

Ускорение тела в любой инерциальной системе отсчёта одинаково. Оно прямо пропорционально результирующей сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально его массе при действии на тело любых сил.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}. \qquad (10)$$

Или в проекции на оси координат:

$$ma_x = \sum_{i=1}^{n}F_{ix}, \quad ma_y = \sum_{i=1}^{n}F_{iy}, \quad ma_z = \sum_{i=1}^{n}F_{iz}. \qquad (11)$$

Уравнения в форме (10) и (11) удобно использовать при решении задач по динамике.

Пример 1. Сила тяги двигателей самолёта массой 60 т при взлёте равна 90 кН. Время разгона 0,75 мин. Чему равно ускорение самолёта, скорость при взлёте и пройденный путь?

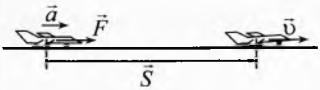


Рис. 5. *Разгон самолёта*

Дано:	СИ:
F=90 кН	$9{,}0\cdot10^4$ Н
m=60 т	$6{,}0\cdot10^4$ кг
t=0,75 мин	45 с
υ_0=0	
υ – ?	
S – ?	
a – ?	

Решение. Найдём ускорение самолёта согласно II закону Ньютона (рис. 5):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad a = \frac{F}{m}, \qquad a = \frac{9\cdot10^4\ \text{Н}}{6\cdot10^4\ \text{кг}} = 1{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Поскольку $\upsilon=at$, то υ=1,5 м/с^2·45 с=67,5 м/с≈240 км/ч.

$$S=\frac{at^2}{2}, \quad S=\frac{1{,}5\cdot45^2}{2}=1520\ \text{м} \approx 1{,}5\ \text{км}.$$

✓ **Ответ.** Длина разгона при взлёте 1,5 км, скорость при отрыве от земли 240 км/ч, среднее ускорение самолёта a=1,5 м/с^2.

Пример 2. Длина направляющих балок боевой реактивной установки БМ-13 («Катюша») равна 5,0 м. Масса каждого снаряда 42,5 кг, скорость снаряда при сходе с направляющей балки 70 м/с. Найти время схода снаряда, а также среднюю силу тяги, действующей на снаряд (рис. 6).

Дано:
υ=70 м/с
m=42,5 кг
l=5,0 м
t – ?
F – ?

Решение. $2al = \upsilon^2 - 0$,

$$\Rightarrow\ a = \frac{\upsilon^2}{2l};\ \Rightarrow F = ma = m\cdot\frac{\upsilon^2}{2l},$$

$$\Rightarrow F = 42{,}5\cdot\frac{70^2}{2\cdot 5} \approx 21\text{ кН}.$$

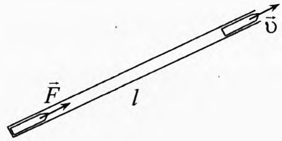


Рис. 6. *Снаряд «Катюши»*

$$\upsilon = at, \Rightarrow\ t = \frac{\upsilon}{a} = \frac{\upsilon\cdot 2l}{\upsilon^2} = \frac{2l}{\upsilon},\ t = \frac{2\cdot 5}{70} = 0{,}14\text{ с.}$$

✓ **Ответ.** Время схода снаряда 0,14 с, а средняя сила тяги 21 кН.

Примечание. В первом примере решалась прямая задача механики: по известной силе определялись скорость тела и путь. А второй пример – обратная задача: по известным пути и скорости определялась сила.

II закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта. Как следует из определения второго закона Ньютона, его нельзя использовать для решения задач в неинерциальных системах отсчёта (НИСО), если в формуле (10) записаны только реально действующие силы. Но если к реальным силам добавить фиктивную силу инерции, равную произведению массы тела на ускорение НИСО относительно ИСО, взятое с обратным знаком, то в таком варианте можно вычислять ускорение тела относительно НИСО:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \vec{F}_и}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \vec{F}_и},$$

где $\boxed{\vec{F}_и = -m\vec{a}_с}$; $\vec{a}_с$ – ускорение НИСО относительно ИСО.

Силы инерции как меры взаимодействия тел не существует. Но ввести её удобно для расчётов движения тел в НИСО. Например, человек стоит на роликовых коньках в равномерно движущемся автобусе. Вдруг автобус начал тормозить. Относительно земли человек продолжает двигаться с той же скоростью, а относительно автобуса поедет вперёд с ускорением, равным ускорению автобуса, взятым с обратным знаком: $\vec{a}_{чел} = -\vec{a}_{авт}$, как будто бы на него подействовала вперёд сила равная $\vec{F}_и = m\vec{a}_{чел} = -m\vec{a}_{авт}$, хотя реальной силы нет. Поэтому для описания движения тела в НИСО и вводится фиктивная сила инерции $\vec{F}_и$.

Другой пример. Человек сидит в автобусе, который разгоняется с ускорением $\vec{a}_{авт}$. Спинка кресла действует на человека силой $\vec{F}$, которая заставляет его ехать с ускорением автобуса в ИСО: $\vec{F} = m\vec{a}_{авт}$. В НИСО, связанной с автобусом, человек, на которого действует неуравновешенная сила со стороны спинки, не движется относительно автобуса. Более того, его как бы прижимает к спинке кресла и относительно автобуса человек находится в покое. Если считать, что к нему приложена сила инерции $\vec{F}_{и} = -m\vec{a}_{авт}$, то эта сила уравновесит силу, действующую со стороны спинки.

Сформулируем **II закона Ньютона в НИСО**.

> *Ускорение тела в неинерциальной системе отсчёта прямо пропорционально сумме реальных сил и силы инерции и обратно пропорционально массе тела.*

> ✍ **Пример 3.** Водитель грузового автомобиля применил аварийное торможение с ускорением 5 м/с^2. Через какое время ящик массой 10 кг столкнется с передней стенкой кузова, если до торможения он находился на расстоянии 2 м от неё, а сила трения скольжения его о пол кузова 40 Н?

Дано.
m=10 кг
a_c=5 м/с^2
S=2 м
$F_{тр}$= 40 Н
t – ?

↪**Решение.** Задачу удобнее решить в НИСО, связанной с автомобилем (рис. 7):

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{и}; \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \vec{F}_{тр} - m\vec{a}_c.$$

В проекции на ось X:

$$ma_x = -F_{тр} - m(-a_c);$$

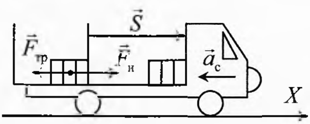


Рис. 7. *Аварийное торможение*

или $\quad ma = ma_c - F_{тр}$. $a = a_c - \dfrac{F_{тр}}{m}$; $\quad a = 5 - \dfrac{40}{10} = 1$ м / с^2;

Тогда: $S = \dfrac{at^2}{2}$; $\Rightarrow$ $t = \sqrt{\dfrac{2S}{a}}$; $\quad t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2}{1}} = 2$ с.↩

✓ **Ответ.** Ящик столкнется с передней стенкой кузова через две секунды, если аварийное торможение будет длиться не менее 2 с.

§ 24. Третий закон Ньютона

Как аукнется, так и откликнется.
Народная мудрость

Тела всегда действуют друг на друга взаимно. Пусть тело массой m_1 налетает на тело массой m_2 (рис. 8). И пусть в некоторый момент времени они действуют друг на друга силами $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$.

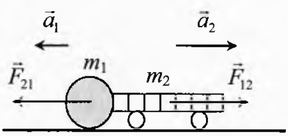


Рис. 8. *Взаимопротиводействие*

Согласно второму закону Ньютона, первое тело действует на второе силой

$$\vec{F}_{12} = m_2\vec{a}_2, \tag{12}$$

а второе на первое силой

$$\vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1. \tag{13}$$

Как связаны силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, с которыми тела взаимодействуют? Тело большей массы действует большей силой на тело меньшей массы или наоборот? Ответ на эти вопросы даёт III закон Ньютона.

Возьмем две тележки разных масс, поместим их на прибор для демонстрации законов механики, прикрепив к ним акселерометры (приборы для измерения ускорения), и будем наблюдать их столкновения. Многочисленные подобные эксперименты показывают, что при любых взаимодействиях двух тел отношение ускорений одинаково в любом опыте, хотя сами ускорения в разных опытах могут как угодно отличаться.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1'}{a_2'} = \frac{a_1''}{a_2''} = \ldots \quad \text{и т. д.,} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \text{const}.$$

Коль скоро отношение ускорений взаимодействующих тел не зависит от условий опыта, определяемых внешними факторами, значит, оно обусловлено свойствами самих взаимодействующих тел. Действительно, оно оказывается равным обратному отношению масс взаимодействующих тел, то есть определяется инертностью этих тел:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \text{откуда следует} \quad m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2,$$

или в векторном виде, учитывая, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имеют противоположные направления:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (14)$$

Подставляя (12) и (13) в (14), получим:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}.$$

То есть *силы взаимодействия двух тел всегда равны по модулю и противоположны по направлению*. Имеется ещё одна особенность: *силы взаимодействия всегда возникают одной природы*. Земля притягивает Луну силой всемирного тяготения, и Луна притягивает Землю силой всемирного тяготения. Магнит притягивает гвоздь магнитной силой, и гвоздь притягивает магнит магнитной силой. Тело давит на опору силой упругости, называемой весом тела, и опора действует на тело силой упругости, называемой силой реакции опоры. Следует особо отметить, что, в отличие от первого и второго законов Ньютона, третий закон выполняется как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчёта.

Если два взаимодействующих тела рассматриваются в НИСО, то динамометры, подсоединённые к ним, покажут одинаковые значения сил. Это понятно. Если, например, при торможении автобуса Вы столкнулись со стойкой, и она согнулась, то не может быть, чтобы стойка в ответ не подействовала на Вас за тоже время.

Сформулируем ***третий закон Ньютона***.

Два тела в любых системах отсчёта при любых взаимодействиях действуют друг на друга силами: равными по модулю, противоположными по направлению и имеющими одинаковую природу.

III закон Ньютона позволяет измерять массы тел, рассматривая непосредственное взаимодействие двух тел, так как равенство сил взаимодействия по модулю обеспечено всегда. Таким образом, способ измерения массы как меры инертности в общем случае можно сформулировать следующим образом.

Масса тела равна произведению массы эталона на отношение ускорения эталона к ускорению тела, полученным при одинаковом действии на каждое из них или при их взаимодействии:

$$\boxed{m_т = m_э \cdot \frac{a_э}{a_т}}.$$

§ 25. Сила упругости. Закон Гука

Как уже отмечалось, все силы в механике имеют гравитационное или электромагнитное происхождение. Одним из проявлений электромагнитных сил является сила упругости.

Пусть два тела сближаются до контакта. Когда расстояние между граничащими слоями молекул уменьшаются до атомных, и тела продолжают сближаться, граничные слои молекул начинают отталкивать друг друга силами межмолекулярного взаимодействия. Эти силы, с которыми граничные слои молекул контактирующих тел отталкивают друг друга, называются ***силами упругости***.

Действие этих сил приводит к деформации обоих тел, то есть граничные слои молекул приближаются к внутренним слоям, и возникают силы упругости уже между граничными и внутренними слоями молекул каждого тела и т.д. Чем ближе подошли граничные слои двух тел друг к другу, тем большие силы упругого отталкивания возникают между ними и тем больше будут сближаться внутренние слои обоих тел к граничным, и будут возрастать силы взаимодействия между внутренними слоями. *Таким образом, появление сил взаимодействия между граничными слоями молекул двух тел является причиной деформации тел.*

Опыт показывает, что при малых деформациях любого твёрдого тела сила взаимодействия между любыми поперечными слоями молекул (сила упругости) прямо пропорциональна удлинению тела (рис. 9):

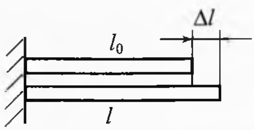


Рис. 9. *Растяжение тела*

$$\boxed{F_{упр} = k \cdot |\Delta l|}, \tag{15}$$

где $l-l_0=\Delta l$ – ***абсолютное удлинение тела***, или, кратко, ***удлинение тела***; k – жёсткость тела, характеризующая упругие свойства тела при деформации растяжения (или сжатия).

Жёсткость численно равна силе упругости, с которой данное тело действует на контактирующее с ним тело, при деформации на единицу длины. Например, жёсткость школьного динамометра Бакушинского равна k=40 Н/м=0,4 Н/см. Это означает, что 1) жёсткость этой пружины составляет 0,4 от пружины жёсткостью 1 Н/см*; 2) при растяжении пружины на 1 см в любом поперечном сечении пружины возникает сила упругости 0,4 Н. С такой же силой эта пружина действует на то тело, которое растягивает её. Жёсткость этого же динамометра 40 Н/м означает, 1) что его пружина жёстче пружины жёсткостью 1 Н/м в 40 раз. Второй смысл определения жёсткости в этом случае может и не подойти, то есть эту пружину, скорее всего, не удастся растянуть на 1 м, чтобы возникла сила 40 Н. Поэтому глубинный смысл жёсткости в первом варианте.

Соотношение (15) носит название ***закона Гука*** в честь английского физика Роберта Гука, установившего этот закон в 1660 г.

Если в конце недеформированного тела поместить начало числовой оси, а ось направить вдоль тела, то удлинение тела равно координате его конца $\Delta l=x$ при растяжении и сжатии. Тогда для проекции силы на ось X получим при растяжении тела (рис. 10а):

$$x_\text{р}=\Delta l;\ \ x_\text{р}>0;\ (F_\text{упр})_x<0,\ \text{то есть}\ (F_\text{упр})_x=-kx_\text{р};$$

при сжатии тела (рис. 10б):

$$x_\text{сж}=-|\Delta l|;\ \ x_\text{сж}<0;\ (F_\text{упр})_x>0,\ \text{то есть}\ (F_\text{упр})_x=-kx_\text{сж};$$

В обоих случаях: $$\boxed{(F_\text{упр})_x=-k\cdot x}.$$

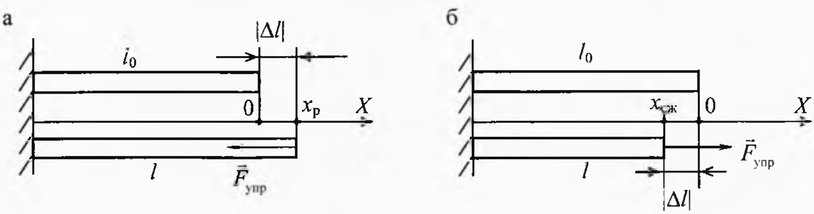


Рис. 10. *Растяжение и сжатие упругого тела*

Действительно, если удлинение положительно, то проекция силы упругости на ось X будет отрицательна, и наоборот. Причём *соотношение знаков*

* Напомним, что измерить какую-нибудь величину – это значит сравнить её с однородной, принятой за единицу этой величины.

проекции силы и смещения не зависит от выбора положительного направления оси. Проверьте этот тезис!

На каждый поперечный слой молекул сила упругости действует и вправо и влево со стороны соседних слоев. За направление силы упругости мы берем то направление, в котором граничный слой молекул одного тела действует на граничный слой контактирующего с ним тела.

Сформулируем ***Закон Гука***:

> *При малых деформациях любого твёрдого тела возникает сила упругости (с которой данное тело действует на другое тело), прямо пропорциональная деформации этого тела и противоположно ей направленная.*

Роберт Гук (1635–1703)

Роберт Гук (английский физик) учился в Оксфордском университете, где с 1665 года стал ассистентом профессора Лондонского университета Р. Бойля. Его работы относятся к теплоте, упругости, оптике, небесной механике. В 1665 г. он с Х. Гюйгенсом установил постоянство температуры таяния льда и кипения воды. В этом же году он усовершенствовал микроскоп, что позволило ему открыть клеточное строение организмов. Он первым описал клетки бузины, укропа, моркови и других растений, причём сам ввел термин клетка. Гук был сторонником волновой теории света, осуществил опыты по дифракции света, выдвинул гипотезу о поперечном характере световых волн. В 1680 г. пришёл к выводу, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Поэтому в 1686 г. после представления Ньютоном в королевское общество своих «Начал» Гук настаивал на собственном приоритете в открытии закона всемирного тяготения. Однако Ньютон заявил, что ему такая зависимость была известна уже давно, и в свое время о ней он сообщил в письме Гюйгенсу. Р. Гук – автор многочисленных изобретений, в частности, барометра.

При измерении различных сил используется важное следствие, вытекающее из второго закона Ньютона: если на тело в данном направлении действуют только две силы независимо от их природы, то они считаются равными по модулю и противоположными по направлению, если их одновременное действие на тело не меняет его скорость, то есть не сообщает телу ускорение.

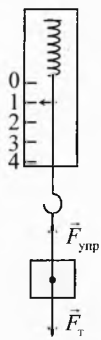


Рис. 11. *Измерение силы*

Например, если мы хотим измерить силу тяжести тела, то подвесим его на динамометре (рис. 11). При ускорении, равном нулю, сила тяжести, приложенная к телу, уравновешивается силой упругости пружины, приложенной к этому же телу ($0 = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{т}$). Её значение равно силе тяжести, с которой Земля притягивает к себе тело ($F_{т} = F_{упр}$). Аналогично можно измерить любую другую силу.

✍ **Пример 4.** Есть две пружины жёсткостью k_1 и k_2. Чему равна жёсткость системы этих пружин, соединённых: а) последовательно; б) параллельно?

↬**Решение.** Коэффициент жёсткости системы пружин:

$$k=F/x, \qquad (16)$$

где F – сила упругости, вызывающая удлинение системы на x.

При последовательном соединении каждая из пружин растягивается одинаковой силой (рис. 12а): $F_1=F_2=F$.

Растяжение пружин найдём из формул:

$$x_1=\frac{F}{k_1} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{F}{k_2}.$$

Полное удлинение системы: $x=x_1+x_2$.

Подставляя сюда выражения для x_1 и x_2 и сравнивая с (16), получим жёсткость последовательно соединённых пружин:

$$\boxed{\frac{1}{k_{\text{посл}}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}, \quad \text{или} \quad \boxed{k_{\text{посл}}=\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1+k_2}}.$$

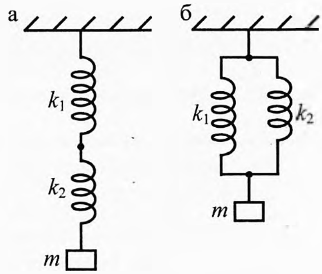


Рис. 12. *Последовательное и параллельное соединение пружин*

При последовательном соединении пружин величина, обратная общей жёсткости, равна сумме обратных величин жёсткостей соединённых пружин. Общая жёсткость меньше, чем жёсткость каждой пружины.

При параллельном соединении (рис. 12б) удлинение пружин одинаково:

$$x=x_1=x_2.$$

Внешняя сила уравновешивается силами упругости двух пружин

$$F=F_1+F_2, \qquad F_1=k_1x_1, \qquad F_2=k_2x_2.$$

Значит жёсткость параллельно соединённых пружин окончательно:

$$k_{\text{пар}}=\frac{F}{x}=\frac{F_1+F_2}{x}=\frac{F_1}{x}+\frac{F_2}{x}=k_1+k_2, \quad \text{или} \quad \boxed{k_{\text{пар}}=k_1+k_2}.$$

При параллельном соединении пружин общая жёсткость равна сумме жёсткостей пружин.

В частности, для одинаковых пружин ($k_1=k_2=k$): $k_{\text{посл}}=k/2$, $k_{\text{пар}}=2k$.↩

§ 26. Закон Гука в дифференциальной форме

Деформацию сжатия и растяжения можно характеризовать **абсолютным удлинением** Δl, равным разности длин образца после деформации и до неё

$$\boxed{\Delta l=l-l_0}.$$

В СИ абсолютное удлинение измеряется в метрах. При растяжении абсолютное удлинение положительно, а при сжатии – отрицательно. Если в однородном стержне среднее расстояние между центрами соседних молекул до растяжения было d_0, а после – d, то $\Delta l=\Delta d \cdot N$, где $\Delta d=d-d_0$ – изменение расстояния между слоями, N – число слоев молекул на всей длине стержня. Чем длиннее тело, тем больше укладывается на его длине слоёв молекул, и тем больше будет удлинение Δl тела при одинаковом изменении расстояния Δd между соседними слоями.

Более важной характеристикой, определяющей степень деформированности тела, является относительное удлинение.

Относительное удлинение равно отношению абсолютного удлинения к длине недеформированного образца:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}}, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\,\%. \tag{23}$$

Относительное удлинение выражается в долях от единицы или в процентах от 100%. Отметим, что при малых растяжениях можно писать $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

При растяжении или сжатии образца между молекулами соседних поперечных слоев возникают силы притяжения (отталкивания), т. е. возникает напряженное состояние тела.

Механическое напряжение – скалярная физическая величина, определяющая степень взаимодействия между любыми двумя соседними поперечными слоями деформированного внешними силами образца. Механическое напряжение равно отношению модуля силы упругости к площади сечения образца, перпендикулярного вектору силы

$$\boxed{\sigma = \frac{F_{упр}}{S_\perp}}, \qquad [\sigma] = 1\ \text{Па} = 1\ \text{Н/м}^2. \tag{24}$$

Механическое напряжение измеряется в единицах давления.

Опыт показывает, что при малых деформациях любого твёрдого тела механическое напряжение, возникающее в образце, прямо пропорционально относительному удлинению образца.

Это и есть ***закон Гука в дифференциальной форме***:

$$\boxed{\sigma = E \cdot |\varepsilon|}. \tag{25}$$

где E – коэффициент, характеризующий упругие свойства тела на деформацию сжатия (растяжения), и называется *модулем нормальной упругости* или ***модулем Юнга***.

Комбинируя (23), (24) и (25), получим:

$$\boxed{F_{упр} = \frac{ES_\perp}{l_0} \cdot \Delta l}. \tag{26}$$

Сравнивая выражение (26) с формулой закона Гука в интегральной форме: $F_{упр} = k|\Delta l|$, видим, что жёсткость тела зависит от материала, площади поперечного сечения и длины образца:

$$\boxed{k = \frac{ES_\perp}{l_0}}.$$

Жёсткость тела *k прямо пропорциональна площади поперечного сечения и модулю Юнга и обратно пропорциональна начальной длине тела.*

Модуль Юнга E характеризует упругие свойства материала и равен механическому напряжению, которое возникло бы в стержне при относительном удлинении, равном 1. То есть при увеличении длины образца вдвое. Абсолютное большинство материалов не может растянуться до такой деформации. Например, стальной стержень разрывается при относительном удлинении в 15%. Модуль Юнга вводится для количественной оценки упругости материала. Он показывает, во сколько раз один материал более упруг, чем другой. Например, модуль упругости вольфрама может достигать 400 ГПа, а у железа в среднем 200 ГПа. Значит, вольфрам в 2 раза более упруг, чем железо при малых деформациях. То есть если к стержням одинаковой формы из стали и вольфрама приложить одинаковые силы, то возникнет одинаковое напряжение, и образец из вольфрама испытает вдвое меньше относительное удлинение, чем стальной.

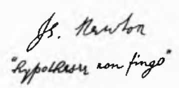
Следует заметить, что малая деформация – понятие относительное: для одних материалов деформация в 1% является малой (резина, сталь), а для других — недопустимо большой, при которой образец разорвется (стекло, чугун).

§ 27. Закон всемирного тяготения

Когда однажды в думу погружен,
Увидел Ньютон яблока падение,
Он вывел притяжения закон
Из этого простого наблюдения.

Дж. Байрон

Исаак Ньютон (1643–1727)



Автограф и девиз Ньютона: «Гипотез не выдвигаю»

Самый выдающийся английский ученый Исаак Ньютон, заложивший основы современного естествознания, родился в Вулсторпе. В 1665 г. он окончил Кембриджский Университет и в связи с эпидемией чумы провел 2 г. в отчем доме.

Отсутствие городской суеты, возможность подолгу спокойно размышлять позволили ему сделать в эти годы основные открытия. Вот как об этом писал он сам: «В начале 1665 г. я нашёл метод приближенного вычисления рядов и правило преобразования в ряд двучлены любой степени... В январе следующего года – теорию цветов. В том же году я начал размышлять о том, что тяготение распространяется до орбиты Луны, и из кеплеровского правила периодов планет, находящихся в полукубической пропорции к расстоянию от центров их орбит, вывел, что силы, которые держат планеты на их орбитах, должны быть обратно пропорциональны квадратам расстояний от центров, вокруг которых они обращаются; и таким образом, сравнив силу, требуемую для удержания Луны на её орбите с силой тяжести на поверхности Земли, я нашёл, что они отвечают друг другу. Всё это было в два чумных года 1665-м и 1666-м. Ибо в эти годы в расцвете творческих сил я думал о математике и физике больше, чем когда-либо после...»

Итак, математическое выражение закона всемирного тяготения Ньютон получил в 24 года, но, сверяя свои результаты с данными опыта, он обнаружил расхождение и публиковать свои результаты не стал. В итоге, открытый им закон пролежал на полке 20 лет никому не известный. Когда же Ньютону стали известны более точные данные по движению Луны, он, как пишет О. Лодж, «достал свои старые рукописи и снова приступил к вычислениям. Новые данные изменяют результаты: в чрезвычайном возбуждении пересматривает он глазами свою работу, перо не успевает следить за мыслью, и, наконец, вычисления приводят его к желаемым результатам, и беспредельно большое значение и глубина его открытия настолько ослепляют его своим сиянием, что затуманенные глаза не видят рукописи. В изнеможении он отбрасывает перо; тайна мироздания, наконец, открылась ему единственному в мире».

Изложенное выше ярко иллюстрирует один из важнейших тезисов материалистской философии: ***практика – критерий истины***. Проследим за логикой практического подтверждения открытия закона всемирного тяготения.

II закон Ньютона гласит, что ускорение тела прямо пропорционально силе, приложенной к телу, и обратно пропорционально его массе. Но поскольку телам любой массы вблизи поверхности Земля создаёт одинаковое ускорение (открытие Галилея), значит, гравитационная сила должна быть пропорциональна массе тела, то есть

$$F_г \sim m.$$

Согласно III закону Ньютона, тела всегда взаимодействуют с одинаковыми по модулю силами независимо от их масс (рис. 13). Это, естественно, касается и гравитационного взаимодействия, то есть для двух частиц (материальных точек)

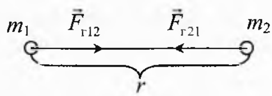


Рис. 13. *Взаимопритяжение*

$$F_{г12} = F_{г21}.$$

Но поскольку гравитационная сила пропорциональна массе каждого тела $F_{г12} \sim m_1$, $F_{г21} \sim m_2$, то равенство сил (по модулю) будет, если гравитационная сила пропорциональна произведению масс взаимодействующих тел

$$F_{г12} = F_{г21} \sim m_1 m_2.$$

Итак, сила гравитационного взаимодействия пропорциональна произведению масс притягивающихся тел:

$$F_г \sim m_1 m_2.$$

А как гравитационное взаимодействие двух тел (материальных точек) зависит от расстояния между ними? Ньютон догадался, что любые тела на любом расстоянии Земля притягивает к себе по одному и тому же закону, в том числе и Луну.

Тело массы m на поверхности Земля притягивает силой $F_0=mg_0$. Такое же тело на орбите Луны Земля будет притягивать силой $F=mg_Л$, где $g_Л$ – ускорение, которое Земля создаёт телу на орбите Луны. Тогда

$$\frac{F_0}{F}=\frac{g_0}{g_Л}. \tag{17}$$

Сила притяжения создаёт Луне центростремительное ускорение:

$$g_Л=\frac{\upsilon_Л^2}{r_Л}=\frac{(2\pi r_Л/T)^2}{r_Л}=\frac{4\pi^2 r_Л}{T^2},$$

где $r_Л \approx 384{,}4$ тыс. км – среднее расстояние от Земли до Луны;

$T=27{,}3$ сут. – период вращения Луны вокруг Земли относительно звезд (сидерический период). Тогда

$$g_Л=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 3{,}844\cdot 10^8\ м}{(27{,}3\cdot 24\cdot 3600\ с)^2}=0{,}0027\ м/с^2.$$

Подставляя значение $g_Л$ в (17), получим:

$$\frac{F_0}{F_Л}=\frac{9{,}8\ м/с^2}{0{,}0027\ м/с^2}\approx 3600. \tag{18}$$

Учитывая, что радиус Земли $r_0=6371$ км, найдём отношение расстояний:

$$\frac{r_Л}{r_0}=\frac{3{,}844\cdot 10^8\ м}{6{,}371\cdot 10^6\ м}\approx 60. \tag{19}$$

Сравнивая (18) и (19), получаем, что сила гравитационного взаимодействия между Землей и телом (между любыми телами) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\frac{F_0}{F_Л}=\left(\frac{r_Л}{r_0}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad F_г\sim\frac{1}{r^2}.$$

Обобщив всё изложенное, получим: $F_г\sim\dfrac{m_1\cdot m_2}{r^2}$ или

$$\boxed{F_г=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}}, \tag{20}$$

где G – гравитационная постоянная или постоянная всемирного тяготения – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц и не зависящий от масс тел и расстояния между ними.

Уравнение (20) выражает ***закон Всемирного тяготения***.

Все тела во Вселенной притягиваются друг к другу. Сила притяжения между двумя материальными точками равна произведению гравитационной постоянной на произведение масс этих материальных точек, деленному на квадрат расстояния между ними. Силы притяжения направлены вдоль линии, соединяющей эти тела.

Формула (20) применима для точечных тел, а также для тел шарообразной формы с равномерно распределённой по шаровым слоям массой. В этом случае под r понимается расстояние между центрами тел (рис. 14).

В случае тел другой формы для вычисления силы тяготения нужно рассматривать силы взаимодействия каждого малого элемента одного тела с каждым малым элементом другого тела, вычисляя по формуле (20), и суммировать все силы с помощью высшей математики и/или компьютера.

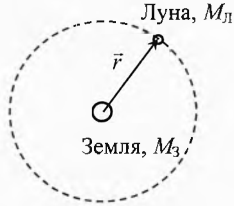


Рис. 14. *Притяжение шаровых тел*

Найдём силу притяжения Земли и Луны:

$$F_{ЗЛ} = G\cdot\frac{M_З\cdot M_Л}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(3{,}844\cdot10^{8})^2} = 2\cdot10^{20}\ (\text{Н}).$$

То есть сила притяжения Земли и Луны составляет 200 миллиардов миллиардов ньютонов.

§ 28. Гравитационная постоянная

Когда в 1686 г. Ньютон открыл закон всемирного тяготения, он не знал ни одного значения масс небесных тел, в том числе и Земли. Неизвестно ему было и значение гравитационной постоянной. Между тем, гравитационная постоянная является одной из фундаментальных констант. Как же найти её значение?

Из закона всемирного тяготения следует, что $G = F\dfrac{r^2}{m_1m_2}$, значит, для её нахождения нужно измерить силу притяжения F между телами известной массы и расстояние между ними.

Генри Кавендиш (1731–1810)

Первые измерения G проводились в середине XVIII. Оценить, правда, очень грубо, значение гравитационной постоянной удалось в результате рассмотрения притяжения маятника к горе, масса которой была определена геологическими методами. Точные измерения G проделал впервые в 1798 г. английский физик и химик Генри Кавендиш более чем через 100 лет после открытия Ньютоном закона Всемирного тяготения. Генри Кавендиш – богатый английский лорд, прослывший чудаковатым и нелюдимым человеком. Исследования проводил в собственной лаборатории, публиковал только те свои статьи, в достоверности которых был полностью уверен, в связи с этим долгое время его работы по электричеству оставались неизвестными. Их издал в 1879 г. Дж. Максвелл. Оказалось, что ещё в 1771 г. Кавендиш пришёл к выводу, что силы электрического взаимодействия обратно пропорциональны квадрату расстояния между зарядами (в 1785 г. закон электрического взаимодействия установил Ш. Кулон).

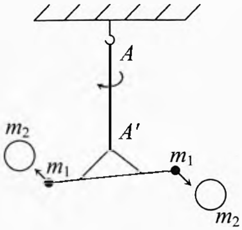


Рис. 15. *Измерение гравитационной постоянной*

С помощью крутильных весов (рис. 15) Кавендиш по углу закручивания нити AA' сумел измерить ничтожно малую силу притяжения между маленькими и большими металлическими шарами. Для этого ему пришлось использовать столь чувствительную аппаратуру, что даже слабые воздушные потоки могли исказить измерения. Поэтому он разместил аппаратуру в прозрачном ящике; ящик ставил в комнате, а сам проводил наблюдения за аппаратурой с помощью телескопа из другого помещения.

Опыты показали, что ***гравитационная постоянная*** равна

$$\boxed{G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2}.$$

Гравитационное взаимодействие тел очень слабое. Возьмем два стальных шара массой по 1 кг и поместим их на расстояние 1 м друг от друга. Вычислим силу их гравитационного взаимодействия

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{1\,\text{кг} \cdot 1\,\text{кг}}{1\,\text{м}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н}.$$

Сила равна $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н, то есть гравитационная постоянная равна силе, с которой притягиваются друг к другу тела массой по 1 кг, находящиеся на расстоянии 1 м. Это чрезвычайно малая сила, поэтому в быту мы не замечаем притяжения даже относительно крупных тел.

Но в том, что G так мала, есть определенный философский смысл. Расчёты показывают, что если бы гравитационная постоянная в нашей Вселенной имела значение, например, в 100 раз больше существующего, то это привело бы к тому, что время существования звезд, в том числе Солнца, значительно уменьшилось, и разумная жизнь на Земле появиться не успела. Другими словами нас с вами сейчас не было бы!

В законе всемирного тяготения масса фигурирует уже не как мера инертности, а как мера тяжести, т. е. мера способности тела к гравитационному притяжению с другими телами (гравитационный заряд, если говорить по аналогии с электрическим взаимодействием). Многочисленными, всё более точными опытами установлена строгая прямая пропорциональность массы, как меры тяжести, с массой, как мерой инертности. Подбором значения G их сделали одинаковыми $m_и \equiv m_т$, то есть инертная масса тождественно равна гравитационной. Во втором законе Ньютона масса берется как мера инертности, $m_и$, а в законе всемирного тяготения как мера тяжести, $m_т$, но пишется везде без индекса, т. к. одинакова в обоих случаях.

§ 29. Сила тяжести

Одно из проявлений сил всемирного тяготения – сила тяжести. Это сила притяжения тела к Земле (или к другому крупному небесному телу: Луне, Солнцу и др.) (рис. 16).

$$F_т = G\frac{mM}{r^2} \quad \text{или} \quad \boxed{F_т = G\frac{mM}{(R+h)^2}}, \qquad (21)$$

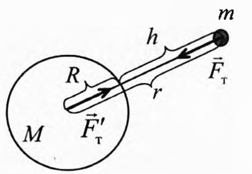


Рис. 16. *Сила тяжести*

где M – масса Земли, m – масса тела, $r=R+h$ – расстояние между центром Земли и телом, h – высота, на которой находится тела над поверхностью Земли, R – средний радиус Земли (R=6371 км).

Опыт Кавендиша по определению гравитационной постоянной справедливо называют опытом по «взвешиванию» Земли. Действительно, силу тяжести можно вычислить и по второму закону Ньютона. Т. к. Земля сообщает на одной высоте всем телам одинаковое ускорение g=9,81 м/с^2 вблизи её поверхности, то

$$\boxed{\vec{F}_т = m\vec{g}}. \qquad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), видим, что при h=0

$$G\frac{mM}{R^2} = mg; \quad \Rightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G}; \qquad M = \frac{9{,}81\cdot(6{,}371\cdot10^6)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}} \approx 6\cdot10^{24} \text{ кг.}$$

Сравнивая (21) и (22), видим, что ускорение, сообщаемое телам, уменьшается с высотой

$$\boxed{g = \frac{GM}{(R+h)^2}}.$$

Но и на поверхности Земли оно не везде равно $g = \dfrac{GM}{R^2}$≈9,81 м/с^2. Это обусловлено несферичностью Земли, неодинаковой плотностью пород, залегающих под разными участками поверхности, и вращением Земли. Ускорение свободного падения максимально у полюсов $g_п$=9,83 м/с^2 и минимально на экваторе $g_э$=9,78 м/с^2.

✍ **Пример 5.** После того, как Кавендиш измерил гравитационную постоянную с помощью крутильных весов, были проведены и другие опыты по её измерению. В одном из них на рычажных весах уравновешивался стеклянный, наполненный ртутью, шар массой m_1=5,0 кг. Затем под него подкатывали большой свинцовый шар массой около m_2=6,0 т. Расстояние между центрами шаров равно r=50 см. Благодаря гравитационной силе притяжения шаров, равновесие нарушалось. Груз какой массы m нужно было добавить на чашку весов, для восстановления равновесия?

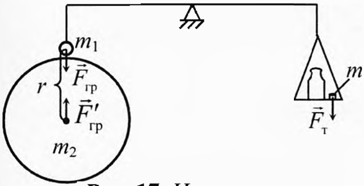


Рис. 17. *Измерение гравитационной постоянной*

Решение. В новом положении равновесия сила гравитационного взаимодействия шаров равна силе тяжести дополнительного груза (рис. 17):

$$F_{гр}=F_т\ ;\ G\frac{m_1m_2}{r^2}=mg\ ,\ \Rightarrow\quad m=\frac{Gm_1m_2}{gr^2},$$

$$m=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \dfrac{Н\cdot м^2}{кг^2}\cdot5\ кг\cdot6\cdot10^3\ кг}{9{,}8\ м/с^2\cdot0{,}25\ м^2}=8{,}0\cdot10^{-7}\ кг.$$

✓ **Ответ.** m=0,8 мг. Это в 12 раз меньше самого маленького груза в школьном наборе грузов для лабораторных весов! Но даже такую маленькую силу смогли практически измерить два века до наших дней!

Первая космическая скорость. Если сообщить телу небольшую скорость под углом к горизонту, то, пролетев некоторое расстояние, оно упадет на поверхность Земли. Чем больше начальная скорость, тем дальше улетит тело. Можно сообщить такую скорость, что тело будет двигаться по окружности вокруг Земли. То есть, насколько оно будет улетать по касательной за время Δt, на столько же и приближаться, благодаря притяжению, к Земле.

Вычислим, какую скорость должно иметь тело, чтобы вращаться по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли (рис. 18).

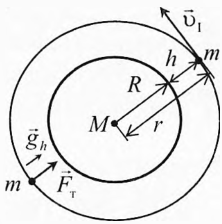


Рис. 18. *Первая космическая скорость*

При вращении вокруг Земли по круговой орбите тело движется с центростремительным ускорением

$$g_h=\frac{\upsilon_I^2}{r}.$$

На достаточно большой высоте (где отсутствует атмосфера) к телу приложена только сила тяжести

$$F_т=G\frac{mM}{r^2}.$$

По второму закону Ньютона

$$m\vec{g}_h=\vec{F}_т.$$

Подставляя выражение для g_h и $F_т$ в последнее уравнение, получим:

$$m\cdot\frac{\upsilon_I^2}{r}=G\cdot\frac{mM}{r^2};\qquad \upsilon_I=\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Учитывая, что r=R+h, найдём первую космическую скорость:

$$\boxed{\upsilon_I=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}}.$$

Видно, что первая космическая скорость максимальна вблизи поверхности Земли, где h<<R:

$$\upsilon_{max}=\sqrt{\frac{GM}{R}};\qquad \upsilon_{max}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}371\cdot 10^{6}}}=7{,}9\cdot 10^{3}\ \text{м/с};\quad \upsilon_{max}\approx 8\ \text{км/с}.$$

> *С высотой первая космическая скорость уменьшается. Например, на высоте, равной трем радиусам Земли, она уменьшится в два раза.*

В литературе встречаются два варианта математического определения первой космической скорости. В первом варианте она может быть вычислена для любого расстояния $r=R+h$ от центра Земли; во втором варианте первая космическая скорость определяется только при $h=0$ для модели Земли, представляющей собой однородный шар радиусом 6371 км, у которого нет атмосферы.

Хотя первая космическая скорость на высоте h меньше, чем вблизи поверхности Земли, но при запуске на высоту h начальную скорость телу нужно создать более чем 7,9 км/с, ибо, пока тело долетит до высоты h, значительная часть её скорости потеряется из-за торможения тела силой тяжести. Например, на расстоянии 384,4 тыс. км, где находится Луна, первая космическая скорость равна 1 км/с (с этой скоростью летает Луна). Но для запуска спутника с Земли на такое расстояние потребуется существенно больше энергии, чем для орбиты вблизи Земли.

Мы будем определять I космическую скорость по первому варианту, ибо она охватывает все случаи.

> ***Первая космическая скорость** равна скорости тела, при которой оно движется вокруг центра тяготения (Земли, Луны или др. крупных небесных тел) по круговой орбите на данной высоте от поверхности.*

§ 30. Вес тела. Реакция опоры. Перегрузки. Невесомость

Вес тела в инерциальной системе отсчёта

> *Вес – это сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемое каким-либо небесным телом, например, Землей, Луной и т.д.), действует на опору или подвес, препятствующее свободному падению этого тела.*

Вес прилагается к опоре (или подвесу) и обозначается $\vec{P}$ (рис. 19). Если вес перпендикулярен к поверхности, то сила, с которой опора действует на тело, тоже перпендикулярна к поверхности и называется силой нормальной реакции опоры. Она прилагается к телу и обозначается буквой $\vec{N}$.

Как связана сила тяжести с весом тела? Если подставка и тело не имеют ускорения в инерциальной системе отсчёта (a=0), тогда согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_т + \vec{N} = 0.$$

Согласно третьему закону Ньютона вес тела равен силе реакции опоры, взятой с обратным знаком:

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Из этих двух равенств следует, что:

$$\vec{F}_т = \vec{P}.$$

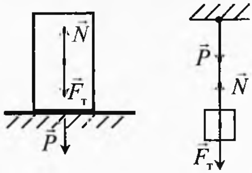


Рис. 19. *Вес тела*

То есть если тело движется без ускорения в инерциальной системе отсчёта, то вес тела равен силе тяжести по модулю и направлен так же, как сила тяжести. Но это не означает, что вес и сила тяжести – это одно и то же. Действительно, вес – это, как правило, сила упругости, с которой тело давит на опору или растягивает подвес, а сила тяжести – это сила гравитационного притяжения тела к Земле.

Вес тела в неинерциальной системе отсчёта. Пусть тело и опора движутся с некоторым ускорением в ИСО (рис. 20). Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{N}.$$

Согласно третьему закону Ньютона:

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем:

$$\vec{P} = \vec{F}_т - m\vec{a} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}}.$$

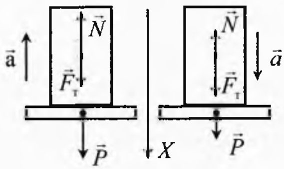


Рис. 20. *Вес тела в НИСО*

Если ускорение направлено вертикально вверх, то вес тела больше силы тяжести:

$$P_x = mg - m(-a) = mg + ma; \quad \text{или} \quad P_x = m(g+a).$$

Если же ускорение направлено вниз, то вес тела меньше силы тяжести:

$$P_x = mg - ma = m(g-a).$$

Если при этом $a=g$, то вес тела равен нулю: $P_x=0$. То есть любое свободно падающее тело невесомо – не давит на опору (не растягивает подвес). То же касается и частей тела: например, голова свободно падающего человека не давит на шею, ноги не давят на подошвы обуви, обувь не давит на опору.

Если относительно ИСО ускорение тела с опорой $\vec{a}$ направлено под углом α к вертикали (рис. 21), то вес тела будет направлен под углом β к вертикали, зависящим от соотношения между $\vec{a}$ и $\vec{g}$. При этом

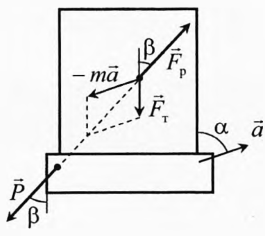


Рис. 21. *Вес тела в НИСО*

сила реакции опоры, в соответствии с III законом Ньютона, $\vec{F}_р = -\vec{P}$ тоже направлена под углом β к вертикали в сторону, противоположную весу $\vec{P}$.

Перегрузки. При движении с ускорением, например, во время запуска космического корабля, все тела в нём, в том числе и космонавты, испытывают перегрузки. Поскольку при запуске корабля его ускорение $\vec{a}$ направлено вертикально вверх, то его можно представить в виде $\vec{a} = -\frac{a}{g}\cdot\vec{g}$. Тогда:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}) = m(\vec{g} + \frac{a}{g}\cdot\vec{g}) = m\vec{g}(1 + \frac{a}{g}).$$

Откуда видно, что вес больше силы тяжести: $P>mg$.

***Перегрузка** – состояние тела, при котором его вес превышает силу тяжести. Перегрузку оценивают коэффициентом перегрузки $n = \frac{a}{g}$, который показывает во сколько раз ускорение тела больше ускорения силы тяжести.*

При n-кратной перегрузке, то есть когда $a=n\cdot g$, вес тела увеличивается в $n+1$ раз: $P=mg(n+1)$. Первый в мире космонавт Ю. А. Гагарин вспоминал: «Я почувствовал, какая-то непреодолимая сила всё больше и больше вдавливает меня в кресло. И хотя оно было расположено так, чтобы до предела сократить влияние огромной тяжести, наваливающейся на мое тело, было трудно пошевелить рукой и ногой…»

Чем меньше время действия перегрузки, тем большую перегрузку способен выдержать человек. Установлено, что человек, находясь в вертикальном положении, достаточно хорошо переносит перегрузки до 8g в течение 3 секунд; 5g в течение 12–15 с. При кратковременном действии менее 0,1 с человек способен переносить 20-кратные перегрузки и более при равномерном распределении нагрузки, например с помощью подушки безопасности, – максимально до 60g.

На участке разгона ракеты-носителя коэффициент перегрузки составляет несколько единиц, как правило, не более 6. При перегрузках, составляющих 10g, даже тренированные люди, например, летчики, могут кратковременно терять сознание.

После выключения двигателей ускорение космического корабля становится равным $\vec{g}$, а вес $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}) = m(\vec{g} - \vec{g}) = 0$.

Состояние, когда тело движется только под действием силы тяжести, называется невесомостью.

✍ **Пример 6.** Пусть кабина лифта движется с ускорением, направленным вниз и равным 1,5g. Определить вес тела.

➥**Решение.** $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$ или $P_x = m(g_x - a_x)$, где $g_x = g$, $a_x = a$; $\Rightarrow$ $P_x=mg-ma=mg-m\cdot 1,5g= - 0,5mg$.↩

✓ **Ответ.** Тело весит 0,5mg; вес тела при этом приложен к потолку лифта и направлен вверх (рис. 22).

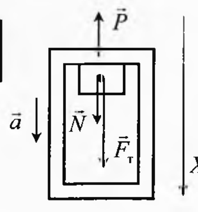


Рис. 22. *Вес в лифте*

✍ **Пример 7.** Автомобиль массой m=3,0 т движется со скоростью υ=36 км/ч по мосту: а) по горизонтальному, б) выпуклому радиусом кривизны R=60 м, в) вогнутому радиусом кривизны R=60 м. С какой силой он давит на мост, *находясь* на его середине?

Дано.	**СИ.**
m=3,0 т	$3{,}0\cdot10^3$ кг
υ=36 км/ч	10 м/с
R=60 м	
g=9,8 м/с^2	
P_1, P_2, P_3 – ?	

➥**Решение.** а) В первом случае автомобиль движется без ускорения (рис. 23а). Согласно III закону Ньютона,

$$P_1=N_1.$$

Согласно II закону Ньютона: $F_т–N_1=0$.

Следовательно: $P_1=F_т=mg$; P_1=29,4 кН≈29 кН.

б) При движении по выпуклому мосту автомобиль стремится как бы улететь по касательной, но сила тяжести в купе с силой реакции опоры создают ему центростремительное ускорение вниз (рис. 23б):

$$ma_2=F_т–N_2, \quad P_2=N_2, \Rightarrow P_2=m(g-a_2);$$

$$a_2=\frac{\upsilon^2}{R}; \quad P_2=m(g-\frac{\upsilon^2}{R}); \quad P_2=24{,}4 \text{ кН}\approx24 \text{ кН}.$$

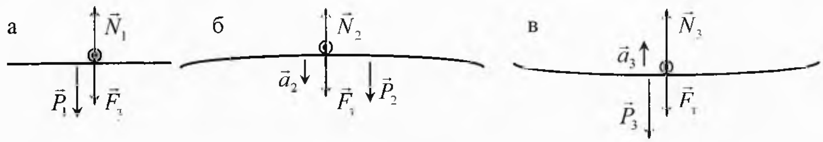


Рис. 23. *Вес при движении на плоском, выпуклом и вогнутом мосту*

в) При движении по вогнутому мосту автомобиль стремится двигаться по касательной, но сила реакции опоры заворачивает его кверху, создавая в купе с силой тяжести центростремительное ускорение вверх (рис. 23в).

$$ma_3=N_3-F_т, \quad P_3=N_3, \Rightarrow P_3=m(g+a_3);$$

$$a_3=\frac{\upsilon^2}{R}; \quad P_3=m(g+\frac{\upsilon^2}{R}); \quad P_3=34{,}4 \text{ кН}\approx34 \text{ кН}.$$↩

✓ **Ответ.** *а)* $P_1=mg$=29 кН; б) $P_2=m(g-\frac{\upsilon^2}{R})$=24 кН; в) $P_3=m(g+\frac{\upsilon^2}{R})$=34 кН.

§ 31. Сила трения

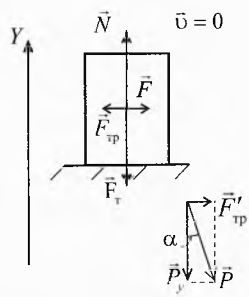


Рис. 24. *Сила трения*

Приложим к телу, лежащему на горизонтальной поверхности небольшую силу вдоль поверхности (рис. 24). Возможно, тело не сдвинется. Почему? Ведь, согласно II закону Ньютона, любая сила должна заставить двигаться тело с ускорением. Дело в том, что при попытке сдвинуть тело возникает сила, препятствующая взаимному смещению тел, и называется она силой трения покоя. Если сила $\vec{F}$ стремится сдвинуть тело вправо, то возникающая сила трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны опоры направлена влево и тем самым препятствует сдвигу тела. А тело при этом согласно III закону Ньютона старается сдвинуть опору вправо силой $\vec{F}'_{\text{тр}}$:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}'_{\text{тр}}}.$$

Таким образом, силы трения всегда возникают парами и препятствуют взаимному смещению тел относительно друг друга.

На самом деле никакого нового взаимодействия не возникает, просто сила реакции опоры и вес тела изменяют свои направления.

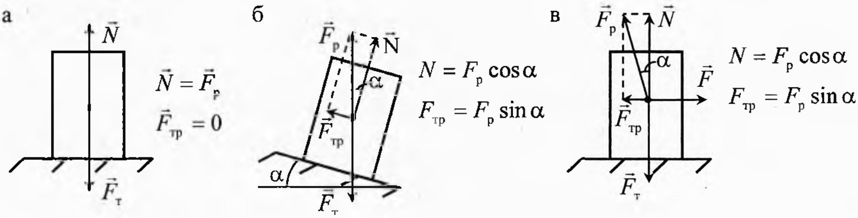


Рис. 25. *Сила трения в различных случаях*

Рассмотрим 3 примера:

а) тело стоит на горизонтальной поверхности (рис. 25а), в этом случае сила трения не возникает, а сила реакции опоры равна нормальной реакции опоры:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{N};$$

б) тело стоит неподвижно на наклонной поверхности с углом наклона α (рис. 25б). На тело по-прежнему действуют 2 силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$ и сила реакции опоры $\vec{F}_{\text{р}}$, направленная вверх, которую можно разложить на две составляющие: нормальную составляющую $\vec{N}$ и касательную к поверхности $\vec{F}_{\text{тр}}$, которую называют силой трения:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}};$$

в) тело находится на горизонтальной поверхности и движется с ускорением, благодаря внешней силе $\vec{F}$ (рис. 25в). В этом случае сила реакции опоры направлена под некоторым углом α к вертикали.

Во всех случаях нормальная реакция опоры и сила трения равны:

$$\boxed{N = F_{\text{р}} \cos\alpha} \quad \text{и} \quad \boxed{F_{\text{тр}} = F_{\text{р}} \sin\alpha}.$$

Причём в случае а) $F_{\text{тр}}=0$ ($\alpha=0$), в случае б) $F_{\text{тр}} = F_{\text{р}} \sin\alpha$ – это сила трения покоя, а в случае в) $F_{\text{тр}} = F_{\text{р}} \sin\alpha$ – это сила трения скольжения. Между нормальной ($\vec{N}$) и касательной ($\vec{F}_{\text{тр}}$) составляющими силы реакции опоры $\vec{F}_{\text{р}}$ существует очевидное соотношение:

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{F_{\text{р}} \sin\alpha}{F_{\text{р}} \cos\alpha} = tg\alpha \quad \text{или} \quad \boxed{F_{\text{тр}} = N \cdot tg\alpha}.$$

При решении задач силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и нормальную реакцию опоры $\vec{N}$ для удобства часто рассматривают как отдельные силы, хотя на самом деле это составляющие одной силы – силы реакции опоры $\vec{F}_{\text{р}}$.

При малом значении сдвигающей силы $\vec{F}$ сила трения уравновесит её, и тело останется в покое. В этом случае силу трения называют ***силой трения покоя.***

Если сдвигающая сила достаточно большая, то тело начнет скользить или катиться по поверхности опоры. В этих случаях говорят о ***силе трения скольжения*** или ***силе трения качения.*** Сила трения скольжения приблизительно равна максимальной силе трения покоя:

$$F_{\text{тр.ск}} = F_{\text{р}} \cdot \sin\alpha_{\max}; \qquad F_{\text{тр.ск}} = N \cdot \text{tg}\alpha_{\max}.$$

Зависимость силы трения от сдвигающей силы показана на рис. 26.

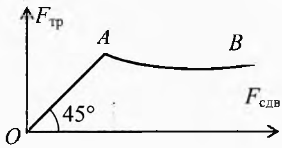


Рис. 26. *Зависимость силы трения от сдвигающей силы*

Участок *OA* соответствует покою, при этом сила трения уравновешивает сдвигающую силу:

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{сдв}}.$$

Участок *AB* соответствует скольжению тела:

$$F_{\text{тр}} < F_{\text{сдв}}.$$

Уменьшением $F_{\text{тр.ск.}}$ по сравнению с максимальной силой трения покоя будем пренебрегать и считать силу трения скольжения не зависящей от сдвигающей силы и от скорости. Максимальное значение тангенса угла наклона реакции опоры равно ***коэффициенту трения***, который обозначается буквой μ.

$$\mu = \text{tg}\alpha_{\max}, \qquad \text{тогда} \qquad \boxed{F_{\text{тр}} = \mu N}. \qquad (27)$$

Коэффициент трения не зависит от площади опоры и силы реакции опоры *N*. Он определяется свойствами контактирующих поверхностей тела и опоры, которые зависят от рода материалов и структур поверхностей. Коэффициент трения показывает, какую часть от силы нормальной реакции опоры составляет сила трения скольжения.

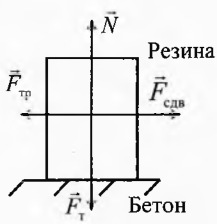


Рис. 27. *Резина по бетону*

Из (27) следует так называемая ***формула Амонтона:***

$$\boxed{\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N}}.$$

Например, при трении резины по бетону μ=0,75. Это значит, что сила трения скольжения составляет три четвертых части от силы нормальной реакции опоры. Это надо учитывать при изображении сил на рисунках (рис. 27). Если коэффициент трения μ дерева по дереву равен 0,4, то вектор $\vec{F}_{тр}$ силы трения должен быть в 2,5 раза короче вектора $\vec{N}$ силы реакции опоры. Если коэффициент трения очень мал, например, сталь по льду, μ=0,014, то масштаб для наглядности приходится искажать, но, по крайней мере, $\vec{N}$ должна быть в несколько раз длиннее на рисунке, чем $\vec{F}_{тр}$, то есть стремление к истине должно просматриваться хотя бы в тенденции даже там, где её невозможно достичь.

Таблица 1. Ориентировочные значения коэффициентов трения скольжения несмазанных материалов

Материал	Коэффициент трения μ
Сталь по: стали	0,15–0,18
чугуну	0,15–0,18
Бронза по бронзе	0,2
Чугун по чугуну	0,10–0,21
Железо по: железу	0,44
дубу	0,48
Кожа по чугуну	0,2–0,4
Дерево по дереву: вдоль волокон	0,48
поперек волокон	0,34
Сталь по льду	0,014
Целлофан по: стали	0,27–0,29
коже	0,43–0,44
резине	0,95
Резина по асфальту	0,50–0,75

При решении многих школьных задач считается, что максимальная сила трения покоя приблизительно равна силе трения скольжения. Во всех случаях между нормальной реакцией опоры $\vec{N}$ и силой трения $\vec{F}_{тр}$ существует связь:

$$\boxed{F_{тр} \le \mu N}.$$

Знак < имеет место в случае трения покоя, а знак = при скольжении.

***Сила трения** – составляющая силы реакции опоры, касательная к поверхности соприкосновения тел, препятствующая смещению контактирующих тел относительно друг друга. Силы трения всегда возникают парами в противоположных направлениях.*

Формула для определения силы сухого трения скольжения $F_{тр.ск}=\mu N$ называется формулой Амонтона. Более точен двучленный закон трения Дерягина:

$F_{тр.ск}=\mu_и(N+p_0S)$, где $\mu_и$ – истинный коэффициент трения; p_0 – добавочное давление, вызванное силами молекулярного взаимодействия; S – общая площадь всех областей непосредственного контакта между телами.

Максимальная сила трения покоя всегда больше силы трения скольжения.

В зависимости от особенности строения контактирующих поверхностей разница может составлять от нескольких процентов до 80% и более. То есть сдвинуть тело всегда труднее, чем потом двигать его равномерно по поверхности. Скрипка звучит, когда по струнам водят смычком, благодаря разнице коэффициентов трения покоя и трения скольжения.

Сила трения качения. Трение качения обусловлено тем, что тело за счёт своего веса вдавливается в опору и спереди появляется возвышенность, препятствующая движению тела (рис. 28).

Сила трения качения - тормозящая сила (горизонтальная составляющая реакции опоры), возникающая при качении тела.

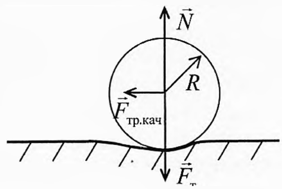


Рис. 28. *Сила трения качения*

Сила трения качения тем больше, чем более рыхлая опора (трудно катиться по песку автомобилю или велосипедисту). Сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела (тележку с колёсами большого радиуса легче катить, чем такую же тележку с маленькими колёсами)

$$F_{тр.кач.}=\frac{k}{R}N, \qquad (28)$$

где k – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины, N – сила реакции опоры. Выражение (28) называется ***формулой Кулона***.

Если тело катится по однородной поверхности, k и R не изменяются, и можно их отношение обозначить $\mu_{кач}$. Тогда формула для силы трения примет вид:

$$\boxed{F_{тр.кач}=\mu_{кач}N}.$$

Коэффициент трения качения $\mu_{кач}$, как правило, меньше коэффициента трения скольжения, поэтому цилиндрическое тело предпочитает катиться, а не скользить. Наличие жидкости между твёрдыми телами уменьшает силу трения, т. к. в этом случае трение в основном происходит между слоями жидкости, а трение в жидкости меньше, чем трение между твёрдыми телами. Поэтому для уменьшения трения в механизмах используется смазка.

Сила сцепления. Какая разница в движении автомобиля с включенным и отключенным сцеплением? Во втором случае усилие двигателя не передаётся ведущим колесам. На них действует сила трения качения, и автомобиль, имевший скорость, постепенно остановится. Если же сцепление включить, то усилие двигателя передаётся на ведущие колеса (рис. 29). Покрышки колес толкают землю назад, а земля

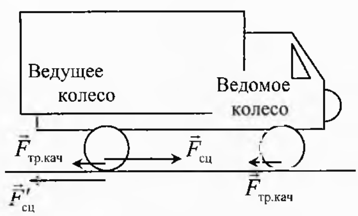


Рис. 29. *Сила сцепления*

толкает их вперед, согласно третьему закону Ньютона. Кроме того, на ведущие колеса действует по-прежнему сила трения качения. На ведомые колеса действует только сила трения качения.

> ***Сила сцепления** – это сила трения покоя, с которой ведущие колеса действуют на землю, а она на них. Сила сцепления, стремящаяся двигать автомобиль, есть сила трения покоя, с которой земля обратной реакцией действует на автомобиль вперед*

$$F_{сдвиг}=F_{сц}=F_{тр.пок}.$$

Если сила сцепления больше силы трения качения и силы сопротивления воздуха, то автомобиль разгоняется по горизонтальной поверхности; если они равны по модулю, то автомобиль движется равномерно (по инерции).

При повороте автомобиля появляется боковая составляющая силы сцепления, которая создаёт центростремительное ускорение. Продольная составляющая силы сцепления, которая создаёт касательное ускорение, может при этом быть, а может и не быть, поэтому тело по окружности может двигаться равномерно, имея только центростремительное ускорение $a_ц$, но может и с касательным ускорением.

✍ **Пример 8.** Автомобиль массой m=3 т с двумя ведущими мостами трогается с места. Какое максимальное ускорение он может развить, если $\mu_{ск}$=0,20, $\mu_{кач}$=0,0020?

➥**Решение.** На автомобиль в горизонтальном направлении действует сила трения качения на все 4 колеса, препятствующая движению $F_{тр.кач}=\mu_{кач}N=\mu_{кач}mg$, и сила сцепления (трения покоя), с которой дорога толкает его вперед из-за того, что он отталкивает дорогу назад. Максимальная сила сцепления (на грани пробуксовки) равна силе трения скольжения: $F_{тр.ск}=\mu_{ск}N=\mu_{ск}mg$.

Согласно II закону Ньютона для горизонтальной оси: $ma_{max}=F_{тр.ск}-F_{тр.кач}$.

Значит, $a_{max}=(\mu_{ск}-\mu_{кач})g=1{,}94$ м/с$^2\approx1{,}9$ м/с^2.↩

✍ **Пример 9.** Автомобиль массой m тянет по горизонтальной дороге с помощью троса такой же автомобиль. При каком ускорении трос оборвется, если его разрывная сила равна $0{,}3mg$, а коэффициент трения скольжения шин о дорогу равен 0,4?

➥**Решение.** Запишем II закон Ньютона в проекции на ось X для ведущего и ведомого автомобилей (рис. 30):

$$ma=F_{сц}-F_н-F_{тр.кач};$$

$$ma=F'_н-F_{тр.кач}.$$

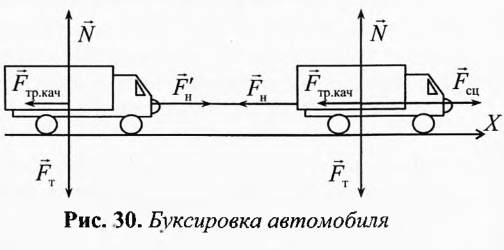


Рис. 30. *Буксировка автомобиля*

Вычитая из первого уравнения второе и учитывая, что согласно III закону Ньютона $F_н=F'_н$, получим: $0=F_{сц}-2F_н \Rightarrow F_н=F_{сц}/2$.

Сила натяжения будет максимальной при максимальной силе сцепления, то есть когда у первого автомобиля все колеса ведущие, и все они находятся на грани пробуксовки: $F_{сц.max}=\mu N=\mu mg$. Итак, $F_{н.max}=\mu mg/2=0{,}2mg$.↩

✓ **Ответ.** Максимально возможная сила натяжения меньше разрывной силы троса, поэтому он не разорвется ни при каких ускорениях, которые способен создавать первый автомобиль (при плавном движении без рывков).

Примечание. Разорвать такой трос можно только при резком старте в случае, если перед стартом трос провисал (был не натянут), тогда в момент рывка нагрузка на трос в зависимости от его жёсткости может значительно превышать рассчитанную силу натяжения.

Упражнения

1 Балласт какой массы m надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом M=1200 кг, а подъемная сила постоянна и равна F=8 кН.

2 Санки массой m тащат горизонтальной силой F по горизонтальной плоскости. Сделать рисунок, расставить силы. Определить ускорение, если коэффициент трения равен μ.

3 Тело соскальзывает по наклонной плоскости, составляющей угол наклона α к горизонту. Сделать рисунок, расставить силы, вычислить ускорение, если: а) трения нет, б) коэффициент трения μ.

4 Тело толкнули вверх по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту и коэффициентом трения μ. Найти ускорение тела во время подъема.

5 К телу массой m=5 кг, находящемуся на наклонной плоскости с углом наклона α=30°, приложена вверх сила F под углом β=45° к наклонной плоскости. При каких значениях силы F тело будет: а) двигаться вверх, б) находиться в равновесии, в) скользить вниз? Коэффициент трения тела с поверхностью μ=0,3.

6 Через неподвижный блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массой M каждый (рис. 31). Найти ускорение системы и силу давления перегрузка массы m, который поставили на один из грузов.

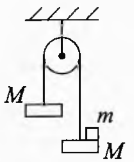


Рис. 31. *Ускорение, вес перегрузка*

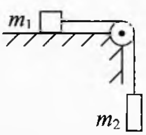


Рис. 32. *Система грузов в лифте*

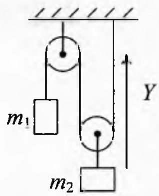


Рис. 33. *Ускорение, сила натяжения*

7 Система из двух грузов массами m_1 и m_2 находится в лифте (рис. 32). Найти ускорения тел и силу натяжения, если коэффициент трения между грузом m_1 и опорой равен μ, а лифт: 1) едет с постоянной скоростью; 2) едет вверх с ускорением a_0; 3) едет вниз с ускорением a_0. Принять $m_2 > \mu m_1$, $a_0 < g$.

8 Найти ускорения a_1 и a_2 грузов массами m_1 и m_2, а также силу натяжения T нерастяжимой нити в системе, изображенной на рис. 33. Трением, массой блоков и нити пренебречь.

9 Среднее расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 земным радиусам, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. В какой точке прямой, соединяющей их центры, тело будет притягиваться к Земле и Луне с одинаковой силой? Радиус Земли равен $R_З \approx 6400$ км.

10 Радиус Луны меньше радиуса Земли в 3,7 раза, а её масса в 81 раз меньше массы Земли. Чему равно ускорение свободного падения на Луне?

11 На экваторе некоторой шарообразной планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсах. Определить период её вращения, если средняя плотность вещества, из которого состоит планета, равна $\rho=3\cdot 10^3$ кг/м^3.

12 Найти среднюю плотность планеты, у которой на экваторе пружинные весы показывают вес тела на 10% меньше, чем на полюсе. Сутки на планете T=24 ч.

13 Жёсткость пружины равна 50 Н/м. Если с её помощью равномерно тянуть по полу коробку массой 2 кг, то длина пружины увеличивается с 10 до 15 см. Какова сила упругости? Чему равен коэффициент трения?

14 Стальная проволока сечением 2,5 мм^2 и длиной 10 см сложена вдвое и подсоединена к грузу. Какова жёсткость системы? Модуль Юнга $E=2{,}2\cdot 10^{11}$ Па.

15 На подставке лежит тело массой m=0,2 кг, подвешенное к потолку с помощью пружины. Вначале пружина не растянута. Подставку начинают опускать с ускорением a=2 м/с^2. Через t=2 с тело отрывается от подставки. Найти жёсткость пружины.

16 При какой наименьшей длине железный стержень, будучи подвешен за один конец, разорвется под действием собственной тяжести? Предел прочности $\sigma_{пч}=5{,}88\cdot 10^8$ Па, плотность железа $\rho=7{,}874$ кг/м^3.

17 Автомобиль движется со скоростью υ_1=72 км/ч по ветру. Скорость ветра υ_2=5 м/с. Во сколько раз изменится сила сопротивления воздуха при движении автомобиля против ветра с той же скоростью, если сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля относительно воздуха $F_{сопр} = \beta\cdot\upsilon^2_{отн}$?

18 Доска массой M находится на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α. Куда и с каким ускорением должна бежать по доске собака, чтобы доска не соскальзывала? Масса собаки m, коэффициент трения между лапами и доской μ. При каком условии это возможно?

19 Брусок находится на наклонной плоскости. Построить зависимость силы трения $F_{тр}$ от угла наклона α. Явлением застоя пренебречь.

20 Найти период вращения маятника, совершающего круговые движения в горизонтальной плоскости. Длина нити l, угол между нитью и вертикалью α (рис. 34).

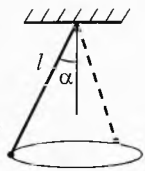


Рис. 34. *Вращение маятника*

21 Груз массой m=0,1 кг, находящийся на горизонтальном стержне, соединен с осью вращения пружиной жёсткостью k=300 Н/м (рис. 35). Стержень вращается вокруг вертикальной оси. Каким должен быть период вращения стержня, чтобы пружина растянулась на четверть первоначальной длины? Трение не учитывать.

22 Найти тормозной путь автомобиля, движущегося со скоростью υ_0=60 км/ч. Коэффициент трения шин по сухому асфальту равен μ_1=0,7, по мокрому асфальту μ_2=0,4, по укатанному снегу μ_3=0,2, по обледенелой дороге μ_4=0,1.

23 Машина едет по ровному полю со скоростью υ. Вдруг водитель увидел впереди канаву, расположенную перпендикулярно скорости движения. Как он должен поступить, чтобы с максимальной вероятностью не залететь в неё? Коэффициент трения скольжения μ.

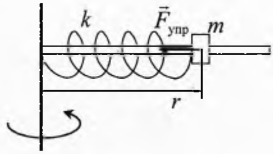


Рис. 35. *Вращение на пружине*

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $0=F+F_{сопр}-Mg$; $0=F-F_{сопр}-(M-m)g$; $\Rightarrow$ $m=2(M-F/g)\approx800$ кг.

2 $ma=F-F_{тр}$, $F_{тр}=\mu mg$; $\Rightarrow$ $a=F/m-\mu g$.

3 а) $a=g\cdot\sin\alpha$, б) $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$, если $\mathrm{tg}\alpha>\mu$; $a=0$, если $\mathrm{tg}\alpha\le\mu$;

4 $a=g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.

5 Направим ось X вверх вдоль плоскости, а ось Y – перпендикулярно плоскости. Если тело движется вверх ($a_x>0$), то по второму закону Ньютона

по оси X: $ma_x=F\cdot\cos\beta-mg\cdot\sin\alpha-F_{тр}$;

по оси Y: $0=N+F\cdot\sin\beta-mg\cdot\cos\alpha$.

Учитывая, что $F_{тр}=\mu N$, получим: $F>\dfrac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$, $F>41$ Н.

Аналогично, тело движется вниз при $F<\dfrac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{\cos\beta-\mu\sin\beta}$, $F<24$ Н.

Если же 24 Н $<F<$41 Н, то тело будет находиться в равновесии.

6 $(M+m)a=(M+m)g-T$; $Ma=T-Mg$; $\Rightarrow$ $a=\dfrac{mg}{2M+m}$.

$ma=mg-N$, $N=P$; $\Rightarrow$ $P=m(g-a)=mg\cdot\dfrac{2M}{2M+m}$.

7 1) $a_1=a_2=\dfrac{(m_2-\mu m_1)\cdot g}{m_1+m_2}$; $T=\dfrac{(1+\mu)\cdot m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot g$.

2) $a_1=\sqrt{\left(\dfrac{(m_2-\mu m_1)(g+a_0)}{m_1+m_2}\right)^2+a_0^2}$; $a_2=\dfrac{(m_2-\mu m_1)(g+a_0)}{m_1+m_2}-a_0$;

$T=\dfrac{(1+\mu)\cdot m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot(g+a_0)$. 3) $a_1=\sqrt{\left(\dfrac{(m_2-\mu m_1)(g-a_0)}{m_1+m_2}\right)^2+a_0^2}$;

$a_2=\dfrac{(m_2-\mu m_1)(g-a_0)}{m_1+m_2}+a_0$; $T=\dfrac{(1+\mu)\cdot m_1m_2}{m_1+m_2}(g-a_0)$.

8 $m_1a_{1y}=T-m_1g$; $m_2a_{2y}=2T-m_2g$; $a_{1y}=-2a_{2y}$. Решая систему уравнений, получим: $a_{1y}=-\dfrac{2(2m_1-m_2)g}{4m_1+m_2}$; $a_{2y}=\dfrac{(2m_1-m_2)g}{4m_1+m_2}$; $T=\dfrac{3m_1m_2}{4m_1+m_2}g$.

9 $\dfrac{GmM_З}{(60R_З-l)^2}=\dfrac{GmM_З/81}{l^2}$. На расстоянии l=6$R_З$=38400 км от центра Луны.

10 $g_Л=\dfrac{GM_Л}{R_Л^2}$; $g_З=\dfrac{GM_З}{R_З^2}$; $\Rightarrow$ $g_Л=g_З\dfrac{M_Л}{M_З}\left(\dfrac{R_З}{R_Л}\right)^2$=1,65 м/с^2.

11 $P_э=P_п-m\dfrac{\upsilon^2}{R}$; $\upsilon=\dfrac{2\pi R}{T}$; $P_э=\dfrac{P_п}{2}$; $P_п=G\dfrac{mM}{R^2}$; $M=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$.

Решая совместно, получим ответ: $T=\sqrt{\dfrac{6\pi}{G\rho}}$, T=9706 с ≈ 2 часа 42 мин.

12 $\rho=\dfrac{30\pi}{GT^2}$=190 кг/м^3.

13 $F_{упр}=k\cdot\Delta l$=2,5 Н; $\mu=\dfrac{F_{упр}}{mg}=0{,}13$.

14 $k=2\cdot\dfrac{ES}{l/2}=2{,}2\cdot10^7$ Н/м.

15 До отрыва: $ma=mg-F_{упр}-N$. В момент отрыва $N=0$, поэтому:

$ma=mg-F_{упр}$; $F_{упр}=kx$; $x=\dfrac{at^2}{2}$; $\Rightarrow$ $k=\dfrac{2m(g-a)}{at^2}=0{,}4\dfrac{Н}{м}$.

16 $\sigma_{пч}=\dfrac{mg}{S}=\dfrac{\rho lSg}{S}$; $\Rightarrow$ $l=\dfrac{\sigma_{пч}}{g\rho}$=7,6 км.

17 $\dfrac{F_{c2}}{F_{c1}}=\dfrac{(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{(\upsilon_1-\upsilon_2)^2}=2{,}8$.

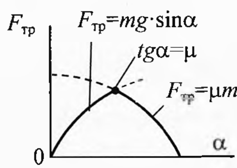


Рис. 36. *Сила трения при наклоне*

18 Для собаки: $ma=mg\sin\alpha+F_{тр}$. Для доски: $0=Mg\sin\alpha-F_{тр}$;

Значит, собака должна бежать вниз с ускорением $a=g\sin\alpha(1+\dfrac{M}{m})$. При этом должно выполняться условие для максимальной силы трения: $F_{тр}\le\mu N$. Учитывая, что $N=mg\cdot\cos\alpha$, получим: $Mg\cdot\sin\alpha\le\mu mg\cdot\cos\alpha$, то есть при $\mu\ge(M/m)\cdot tg\alpha$.

19 При $tg\alpha\le\mu$ тело не скользит: $F_{тр}=mg\cdot\sin\alpha$. При $tg\alpha>\mu$ тело скользит: $F_{тр}=\mu N=\mu mg\cdot\cos\alpha$ (рис. 36).

20 См. рис. 37. $mg=F_н\cos\alpha$;

$m\dfrac{\upsilon^2}{r}=F_н\sin\alpha$; $r=l\cdot\sin\alpha$; $T=\dfrac{2\pi r}{\upsilon}$;

$\Rightarrow$ $T=\dfrac{2\pi r}{\sqrt{gr\cdot tg\alpha}}=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}$.

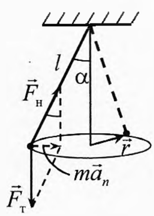


Рис. 37. *Вращение маятника*

21 $m\frac{\upsilon^2}{r} = F_{\text{упр}}$; $F_{\text{упр}} = k\Delta l$; $T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$; $r = l + \Delta l$;

$$\Delta l = 0{,}25l; \Rightarrow\ T = \frac{2\pi r}{\sqrt{k\cdot\Delta l\cdot r/m}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{5m}{k}} \approx 0{,}13 \text{ с.}$$

22 Если в автомобиле отсутствует антиблокировочная система (АБС), то при полностью нажатой педали тормоза колёса будут заблокированы тормозными колодками, при этом шины автомобиля будут скользить по асфальту, оставляя черный тормозной след, на основе которого сотрудники ГИБДД определяют виновного в дорожно-транспортном происшествии.

По второму закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g}$.

В проекции на вертикальную ось: $0=N-mg$.

В проекции на горизонтальную ось X, направленную по скорости движения:

$$ma_x = -F_{\text{тр}}.$$

Учитывая, что при проскальзывании $F_{\text{тр}}=\mu N$, получим: $a_x = -\mu g$.

Начальная скорость по оси X равна υ_0, а конечная – нулю.

Значит, $2a_xS_x = \upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2 \ \Rightarrow\ 2\cdot(-\mu g)\cdot S_{\text{торм}} = 0 - \upsilon_0^2 \ \Rightarrow\ \boxed{S_{\text{торм}} = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}}$.

Итак, при езде по сухому асфальту тормозной путь равен:

$$S_{\text{торм1}} = \frac{(60\text{ км/ч})^2}{2\cdot 0{,}7\cdot 9{,}8\text{ м/с}^2} = \frac{(16{,}7\text{ м/с})^2}{2\cdot 0{,}7\cdot 9{,}8\text{ м/с}^2} = 20\text{ м.}$$

Для мокрого асфальта: $S_{\text{торм2}}=35$ м.

Для укатанного снега: $S_{\text{торм3}}=71$ м.

Для обледенелой дороги: $S_{\text{торм4}}=142$ м.

Как видно из расчётов, тормозной путь составляет десятки метров, даже при движении со скоростью 60 км/ч по сухому асфальту!

Примечание. Антиблокировочная система регулирует усилие тормозных колодок таким образом, чтобы колёса вращались на грани блокирования, но не застопоривались. Коэффициент трения покоя больше, чем коэффициент трения скольжения, поэтому длина тормозного пути при использовании АБС будет меньше, чем при торможении с заблокированными колесами. Кроме этого сохраняется устойчивость и управляемость автомобиля.

23 У водителя есть два крайних варианта: 1) резко затормозить, 2) сделать поворот без торможения. Тормозной путь $S=\upsilon^2/(2\mu g)$. При повороте максимальная сила трения $F_{\text{тр}}=\mu mg$ создаёт машине центростремительное ускорение, $ma_n=F_{\text{тр}}$; $m\upsilon^2/R=\mu mg \Rightarrow$ радиус поворота $R=\upsilon^2/(\mu g)$. Видно, что радиус поворота в 2 раза больше тормозного пути. Нетрудно сообразить, что другие варианты, сочетающие поворот с торможением, увеличат вероятность падения в канаву по сравнению с первым вариантом. Отсюда вывод: *увидел канаву – тормози*!

Глава 3. Статика

Дайте мне точку опоры –
и я переверну Землю!
Архимед

> ***Статика*** *– это раздел механики, в котором изучается равновесие тел. Равновесие – это такое состояние тела, когда оно и его составные части не имеют ускорения в данной системе отсчёта.*

Можно говорить о равновесии тела в инерциальных системах отсчёта (ИСО) и в неинерциальных системах отсчёта (НИСО). Тело, находящееся в равновесии в ИСО, не будет в равновесии относительно НИСО, и наоборот. Например, пассажиры, сидящие во взлетающем самолете, находятся в равновесии относительно самолета, но не в равновесии относительно Земли. Хотя равновесие тела в НИСО условно, ибо при большом ускорении «душа хочет вывернуться наизнанку». Поэтому истинное равновесие наблюдается только в ИСО (или квазиинерциальных СО). Мы будем рассматривать равновесие тел преимущественно в инерциальных системах отсчёта.

§ 32. Центр масс и центр тяжести

Центр масс. До сих пор мы рассматривали кинематику и динамику материальной точки, где для решения задач не важны размеры и форма тела. В каком направлении ни приложили бы силу к материальной точке, она получит ускорение равное отношению результирующей силы к массе тела. Однако так бывает не всегда. Если в произвольной точке протяженного тела приложить силу, то оно начнет поворачиваться, и только через некоторое время станет двигаться поступательно. Прилагая к любой точке тела силу, в каждом случае можно найти такое направление, при котором тело сразу начнет двигаться поступательно. Если к точке пересечения этих линий приложить силу любого направления, то тело начнет двигаться поступательно (как материальная точка).

> ***Центр масс*** *– это точка, лежащая на пересечении линий действия таких сил, которые ответственны только за поступательное движение тела. В этой точке как бы сосредоточена вся масса тела.*

Центр тяжести. Каждый атом макроскопического тела притягивается к Земле. Изображать силу тяжести, действующую на каждый атом, невозможно, да и не нужно.

Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется ***центром тяжести тела.***

Как экспериментально найти центр тяжести, например, плоского тела? Подвесим фигуру из картона на нити и проведем отвесную линию вдоль нити (рис. 1). Центр тяжести находится где-то на этой линии (если бы это было не так, то возникла составляющая силы тяжести, стремящаяся сдвинуть центр тяжести тела в сторону этой линии). Затем можно подвесить тело в другой точке и снова провести отвесную линию вдоль нити. Точка пересечения этих линий будет центром тяжести тела.

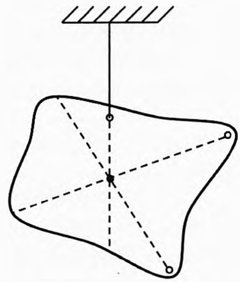


Рис. 1. *Центр тяжести*

Если же положить это тело на горизонтальную поверхность и тянуть за нить, добиваясь поступательного движения и проводя линию действия карандашом по телу, и сделав этот опыт несколько раз, в точке пересечения этих линий мы получим центр масс (по определению).

Опыт показывает, что центр тяжести совпадает с центром масс тела. Действительно, если мы поместим в герметичный сосуд (например, трубку Ньютона) тела произвольной формы, откачаем воздух, затем, быстро перевернув, будем смотреть на свободное падение тел, то можем заметить, что они падают не только с одинаковым ускорением, но и что их движение будет поступательным независимо от начальной ориентации тела относительно сосуда. А поступательно тела движутся только тогда, когда результирующая сила приложена к центру масс. Из этого следует следующий вывод.

Сила тяжести приложена к центру масс тела, то есть центр тяжести совпадает с центром масс.

Экспериментальная задача: определить центр масс и центр тяжести плоского тела (картона) по методике, описанной в этом параграфе, и убедиться, что в пределах погрешности измерений они совпадают. Для решения задачи достаточно прицепить к картонке в разных местах 3 нити. С одной стороны нарисовать линии отвеса, а с другой стороны – направление сил, двигающих картонку поступательно по столу. Затем проколоть точки пересечения. И потом, для проверки, подпереть картонку снизу пальцем или ручкой. Картонка при этом будет находиться в равновесии.

§ 33. Равновесие тела при отсутствии возможности вращения

Пусть на тело действуют силы так, что их равнодействующая проходит через центр масс. Тогда оно движется поступательно с ускорением, определяемым вторым законом Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}. \qquad (1)$$

Равновесие тела, т. е. отсутствие ускорения, как видно из (1), будет, если сумма сил, приложенных к телу, равна нулю:

$$\vec{a} = 0, \qquad \text{если} \qquad \boxed{\sum \vec{F}_i = 0}.$$

Это есть ***первое условие равновесия тела*** в инерциальной системе отсчёта в векторном виде. Оно равносильно системе алгебраических уравнений по осям координат:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad \sum F_{iy} = 0, \qquad \sum F_{iz} = 0.$$

Материальная точка находится в равновесии в инерциальной системе отсчёта, если сумма сил, приложенных к нему, равна нулю или сумма проекций этих сил на любую ось равна нулю.

✍ **Пример 1.** Найти силы, действующие на стержни AB и BC (рис. 2), если α=60°, а масса лампы m=3 кг.

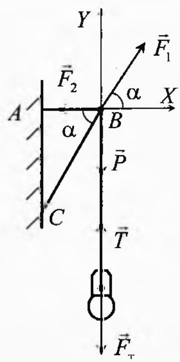


Рис. 2. *Подвес для лампы*

➥**Решение.** Рассмотрим равновесие лампы и соединительного узла B. К лампе приложены две силы: сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$. Условие равновесия лампы: $\vec{T} + m\vec{g} = 0$. По III закону Ньютона вес лампы $\vec{P}$ равен силе натяжения $\vec{T}$, взятой с обратным знаком: $\vec{P} = -\vec{T}$.

Следовательно, $\vec{P} = m\vec{g}$.

На соединительный узел в точке B действуют силы: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{P}$. Стержень AB растягивается и на узел B действует силой упругости $\vec{F}_2$ в направлении от B к A. Стержень BC сжимается весом $\vec{P}$ и силой $\vec{F}_2$ и на узел B действует силой $\vec{F}_1$ в направлении от C к B. Условие равновесия узла B: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = 0$ или в проекциях на оси X и Y:

$$F_1 \cos\alpha - F_2 = 0, \qquad F_1 \sin\alpha - P = 0.$$

$\Rightarrow$ $F_1 = P/\sin\alpha = mg/\sin\alpha$ =34 Н. $F_2 = F_1 \cdot \cos\alpha = mg \cdot \mathrm{ctg}\alpha$=17 Н.↩

✓ **Ответ.** На стержень AB действует растягивающая сила 17 Н. А на стержень BC – сжимающая сила 34 Н.

Пример 2. Под каким углом нужно тянуть санки за веревку, чтобы прилагаемое усилие было минимальным? Коэффициент трения санок о дорогу равен μ.

↪**Решение.** Сила тяги будет минимальна при медленном равномерном движении. На санки действуют четыре силы: нормальная реакция опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила тяжести $\vec{F}_т$ и движущая сила со стороны человека $\vec{F}$ (рис. 3). Согласно первому условию равновесия

$$\vec{N}+\vec{F}_{тр}+\vec{F}_т+\vec{F}=0.$$

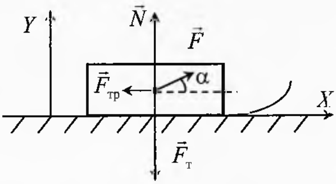


Рис. 3. *Не любишь саночки возить – посчитай как легче*

Или в проекции на оси координат:

по X: $F\cos\alpha - F_{тр}=0$, где $F_{тр}=\mu N$,

по Y: $N+F\sin\alpha - F_т=0$.

Комбинируя первое уравнение со вторым, получим: $N=\dfrac{F\cdot\cos\alpha}{\mu}$.

Подставим этот результат в третье уравнение:

$$F\frac{\cos\alpha}{\mu}+F\cdot\sin\alpha - F_т=0 \quad\Rightarrow\quad F=\frac{F_т}{\dfrac{\cos\alpha}{\mu}+\sin\alpha}.$$

Движущая сила минимальна, когда её первая производная по углу α будет равна нулю:

$$0=F'=\frac{0-\left(-\dfrac{\sin\alpha}{\mu}+\cos\alpha\right)F_т}{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\mu}+\sin\alpha\right)^2},\quad \cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{\mu}=0,\quad\Rightarrow\quad tg\alpha=\mu.$$↩

✓ **Ответ.** Прилагаемое усилие будет минимальным при равномерном движении санок, когда тангенс угла наклона веревки равен коэффициенту трения (tgα=μ).

§ 34. Момент силы. Правило моментов сил

Равенство нулю сил, приложенных к телу, является необходимым, но не достаточным условием для равновесия тела в инерциальной системе отсчёта.

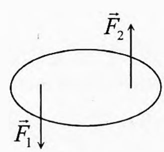


Рис. 4. *Неподвижный центр при вращении*

Например, если к телу приложена пара одинаковых по модулю, но противоположно направленных сил $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$ в разных точках (рис. 4), то их сумма равна нулю и центр масс тела останется неподвижным, а тело будет поворачиваться, т. е. отдельные части тела будут двигаться с ускорением.

Значит для того, чтобы тело и его части были в равновесии в инерциальной системе отсчёта, нужно, чтобы не только сумма сил, приложенных к ним, равнялась нулю, но и суммарное вращающее действие этих сил равнялось нулю. Вращающее действие силы характеризуется физической величиной «*момент силы*», который обозначается буквой M.

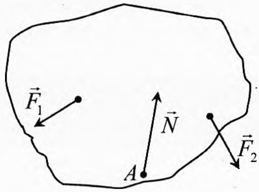


Рис. 5. *К измерению момента силы*

Момент силы – мгновенная характеристика взаимодействия, так как в разные моменты времени вращающее действие может быть различно.

Способ измерения момента силы рассмотрим на следующем примере. Пусть твёрдое тело имеет закрепленную ось A, перпендикулярную плоскости рис. 5, и может свободно поворачиваться вокруг этой оси. Пусть в этой плоскости на него действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, стремящиеся вращать тело в противоположных направлениях. Пусть сила тяжести тела пренебрежимо мала по сравнению с этими силами. И пусть при всем этом тело находится в равновесии:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{N}=0,$$

где $\vec{N}$ – сила реакции опоры со стороны оси.

Значит, моменты первой и второй сил равны по модулю и противоположны по направлению. Как же вычислить момент силы и от чего он зависит?

Перенесем силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ параллельно самим себе так, чтобы они выходили из одной точки O (рис. 6). При этом их вращающее действие не изменится. Возьмем ось X с началом в точке O, перпендикулярную отрезку OA.

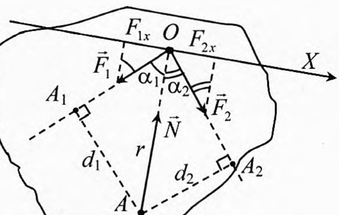


Рис. 6. *К измерению момента силы*

Поскольку тело находится в равновесии, то сумма проекций всех сил на эту ось должна быть равна нулю.

$$F_{1x}+F_{2x}+N_x=0.$$

Проекция $\vec{N}$ на ось X равна нулю ($N_x=0$), т. к. $\vec{N}$ перпендикулярна оси X. Значит,

$$F_{1x}+F_{2x}=0. \qquad (2)$$

Сделаем дополнительные построения. *Опустим из точки A перпендикуляры на направления сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$*. Найдём $d_1=AA_1$, $d_2=AA_2$, *которые называются плечами соответствующих сил.* Обозначим угол A_1OA через α_1, угол A_2OA – через α_2, а AO – через r.

***Плечо силы** – это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.*

Как видно из рисунка:

$F_{1x}=-F_1\sin\alpha_1$ (3); $F_{2x}=F_2\sin\alpha_2$. (4)

$\sin\alpha_1=d_1/r$ (5); $\sin\alpha_2=d_2/r$. (6)

Подставляя (5) и (6) в (3) и (4), а результат в (2), получим:

$$-\frac{F_1 d_1}{r}+\frac{F_2 d_2}{r}=0, \quad \text{или} \quad -F_1d_1+F_2d_2=0.$$

$$\boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2}. \qquad (7)$$

По условию, суммарный момент, действующий на тело, равен нулю, то есть моменты M_1 и M_2 равны по модулю и противоположны по направлению. Из (7) видно, что для обеих сил одинаково произведение модуля силы на её плечо. Следовательно, момент силы можно определить как произведение силы на её плечо:

$$\boxed{M = F\cdot d}.$$

Момент силы определяется в ньютонометрах. $[M]=Н\cdot$м.

Пусть плечо силы равно 1 м, а значение силы равно 1 Н, тогда эта сила действует на тело вращающим моментом 1 Н·м.

Чем больше сила и чем больше плечо относительно данной оси вращения, тем больше момент силы.

Учитывая, что $d=r\cdot\sin\alpha$, формулу для момента силы можно записать и так:

$$\boxed{M = F\cdot r\cdot\sin\alpha}.$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор, проведенный от оси вращения до точки приложения силы $\vec{F}$, α – угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и направлением силы $\vec{F}$.

Момент силы – векторная величина. Момент силы прилагается к оси вращения, а его направление определяется по правилу правого винта (рис. 7): если рукоятку правого винта вращать по направлению, в котором сила стремится вращать тело относительно данной оси, то поступательное движение винта совпадет с направлением момента силы. В нашем примере момент первой силы направлен к нам, а момент второй силы от нас.

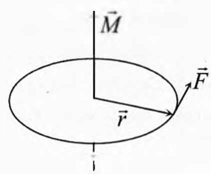


Рис. 7. *Направление момента силы*

> ***Момент силы*** *– это векторная величина, определяющая мгновенное вращающее действие силы. Момент силы равен произведению силы на её плечо. Направление момента силы определяется по правилу правого винта.*

Момент силы так же, как и угловая скорость, является псевдовекторной величиной, но для краткости говорят просто векторная.

Из всего вышесказанного следует ***второе условие равновесия***.

> *Тело с закрепленной осью вращения находится в равновесии, если векторная сумма моментов сил, приложенных к телу, равна нулю относительно оси вращения:*

$$\boxed{\sum \vec{M}_i = 0}.$$

В нашем примере $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$.

Если силы, приложенные к телу, расположены в одной плоскости, как в нашем примере, то векторное равенство можно заменить алгебраическим, условно считая моменты сил, стремящихся вращать тело по часовой стрелке, положительными, а против часовой – отрицательными.

Тело с закрепленной осью вращения находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов сил, приложенных к телу, равна нулю относительно оси вращения:

$$\sum M_i = 0.$$

Второе условие равновесия можно применять для любого количества сил, приложенных к телу. Причём оно справедливо как для тел с закрепленной осью вращения, так и для незакрепленных тел. Ось, относительно которой рассматривается правило моментов, можно брать в любой точке тела и даже вне тела.

Действительно, если относительно какой-нибудь оси, проходящей через тело, правило моментов сил не будет соблюдаться, то тело начнет вращаться, т.е. не будет в равновесии, а значит, не будет соблюдаться правило моментов относительно любой другой оси, проходящей через тело.

В большинстве школьных задач силы, приложенные к телу, лежат в одной плоскости. Поэтому можно сразу записывать ***баланс моментов сил в скалярной форме***.

Тело с закрепленной осью вращения находится в равновесии, если сумма модулей моментов сил, стремящихся вращать тело по часовой стрелке, равна сумме модулей моментов сил, стремящихся вращать тело против часовой стрелки, относительно выбранной оси вращения:

$$\boxed{\sum |M_{\text{по час.стр.}}| = \sum |M_{\text{против час.стр.}}|}. \qquad (8)$$

Сформулируем ***общее правило равновесия тела***.

Любое твёрдое тело находится в равновесии в любой ИСО, если сумма сил, приложенных к нему, равна нулю и сумма моментов этих сил равна нулю относительно любой оси:

1) $\boxed{\sum \vec{F}_i = 0}$; 2) $\boxed{\sum \vec{M}_i = 0}$.

При решении задач на равновесие нужно изобразить все силы, приложенные к телу, равновесие которого рассматривается, записать первое условие равновесия в векторном виде или по осям координат. Если требуется применить второе условие равновесия, то нужно удачно выбрать ось вращения, чтобы решение было проще, и записать правило моментов.

✍ **Пример 3.** Бревно уравновешено на тросе (рис. 8). Где находятся центр масс и центр тяжести бревна? Какая часть бревна окажется тяжелее, если его распилить в месте подвеса?

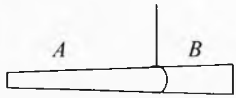


Рис. 8. *Бревно на тросе*

➥**Решение.** Центр тяжести находится в центре сечения, который опоясывает трос. Если бы центр тяжести был слева или справа, бревно наклонилось бы в соответствующую сторону. Центр масс всегда совпадает с центром тяжести. Толстая часть бревна тяжелее. Действительно, центр тяжести части A бревна находится дальше от сечения подвеса, чем у части B. Следовательно, плечо силы тяжести левой части больше, чем у правой относительно оси вращения, взятой в сечении подвеса: $d_A>d_B$. Моменты же сил при равновесии равны ($M_A=M_B$), значит $m_Agd_A=m_Bgd_B$, $\Rightarrow$ $\dfrac{m_B}{m_A}=\dfrac{d_A}{d_B}>1$, то есть $m_B>m_A$. Короткая часть B массивнее более длинной части бревна. ↩

✍ **Пример 4.** На невесомом стержне прикреплено несколько (например, 5) материальных точек массами m_1, m_2, m_3, m_4 и m_5. Их координаты относительно точки O: x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 соответственно (рис. 9). Найти положение центра масс этой системы.

➥**Решение.** Подставим под стержень упор так, чтобы стержень оказался в равновесии. По первому условию равновесия сила реакции опоры уравновешивает суммарную силу тяжести тел:

$$N=m_1g+m_2g+m_3g+m_4g+m_5g.$$

Запишем второе условие равновесия моментов сил относительно точки O. Момент силы реакции опоры равен сумме моментов сил тяжести всех пяти тел:

$$N\cdot x_ц=m_1g\cdot x_1+m_2g\cdot x_2+m_3g\cdot x_3+m_4g\cdot x_4+m_5g\cdot x_5.$$

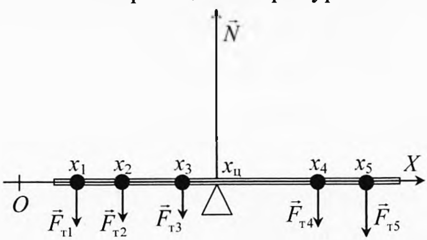


Рис. 9. *Расчет центра масс системы*

Разделив второе уравнение на первое, получим ***положение центра масс системы тел***:

$$\boxed{x_ц=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4+m_5x_5}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}}.$$ ↩

Примечание. В общем случае ***положение центра масс для N тел***, расположенных в пространстве, можно определить по формуле:

$$\boxed{\vec{r}_{ц} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m_{общ}}},$$

где $\vec{r}_{ц}$ – радиус-вектор центра масс системы, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, проведенный от начала координат до частицы массой m_i, $m_{общ} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – общая масса всех тел.

Пример 5. Человек удерживает за один конец трубу массой m=50 кг, составляющую угол α=30° с горизонтом. Какую минимальную силу он должен приложить, чтобы удержать трубу в равновесии? Чему равна при этом сила реакции опоры?

Решение. На трубу действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила со стороны человека $\vec{F}_ч$ и сила реакции $\vec{F}_р$ от поверхности пола (рис. 10). Рассмотрим второе условие равновесия относительно точки O, где труба касается земли. Момент силы $\vec{F}_р$ относительно точки O равен нулю, так как равно нулю плечо этой силы:

$M_р$=0, так как $d_р$=0.

Сила тяжести стремится повернуть трубу по часовой стрелке, а человек в противоположном направлении. Чтобы приложить минимальную силу, человек должен иметь максимальное плечо. Оно будет таковым, если силу человека направить перпендикулярно трубе. Согласно (8), получим:

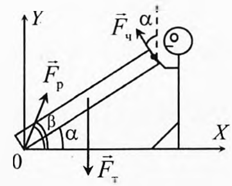


Рис. 10. *Держи за конец*

$$|M_ч|=|M_т| \quad \text{или} \quad F_ч \cdot d_ч = F_т \cdot d_т,$$

где $F_т$=mg; $d_ч=l$; $d_т=(l/2)\cdot\cos\alpha$.

$$\Rightarrow \quad F_ч l = mg(l/2)\cdot\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad F_ч=(mg\cdot\cos\alpha)/2=212 \text{ Н} \approx 0{,}21 \text{ кН}$$

Для нахождения силы реакции опоры воспользуемся первым условием равновесия: $\vec{F}_т + \vec{F}_р + \vec{F}_ч = 0$, или в проекции

$$\left.\begin{aligned} &\text{на ось } X: \; F_р\cos\beta - F_ч\sin\alpha = 0 \\ &\text{на ось } Y: \; F_р\sin\beta - F_т + F_ч\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; \text{tg}\beta = \frac{mg - F_ч\cos\alpha}{F_ч\sin\alpha}, \; \beta=71°.$$

$$F_р = \frac{F_ч\sin\alpha}{\cos\beta}; \qquad F_р = \frac{212\cdot 0{,}5}{0{,}326}=325 \text{ Н} \approx 0{,}33 \text{ кН}.$$

✓ **Ответ.** Человек должен приложить силу 0,21 кН перпендикулярно трубе, сила реакции опоры направлена под углом 71° к горизонту. Её модуль равен 0,33 кН.

§ 35. Виды равновесия

На практике большую роль играет качественная характеристика равновесия, называемая устойчивостью.

Равновесие тел может быть устойчивым (а), неустойчивым (б), безразличным (в). На рис. 11 и 12 показаны примеры всех трёх видов равновесия для шарика на опоре и для шарнирно закрепленной линейки.

Рис. 11. *Равновесие устойчивое, неустойчивое, безразличное*

> ***Равновесие устойчиво****, если при малом отклонении тела появляется сила, стремящаяся вернуть тело в исходное положение.*
> ***Равновесие неустойчиво****, если при малом отклонении тела появляется сила (составляющая результирующей силы), стремящаяся отклонить тело ещё больше.*
> ***Равновесие безразлично****, если при смещении тела его центр масс остаётся на том же уровне, то есть телу «безразлично» такое смещение.*

Если центр масс ниже точки подвеса (рис. 12а), то при малом отклонении от положения равновесия тело под действием момента силы тяжести будет стремиться вернуться назад в равновесное положение. То есть *если центр масс ниже точки подвеса, то такое положение тела устойчиво*.

Если центр масс выше точки подвеса (рис. 12б), то при малом отклонении от положения равновесия положение центра масс понижается, тело будет под действием силы тяжести стремиться занять ещё более низкое положение. То есть *если центр масс выше точки подвеса, то равновесие неустойчиво.*

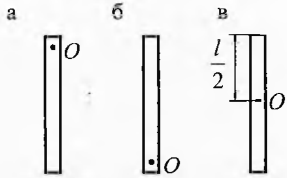


Рис. 12. *Равновесия при разных точках подвеса*

Если же точка подвеса находится в центре тяжести, то равновесие безразлично (рис. 12в).

Любое тело стремится к возможно более низкому положению центра масс, то есть к более устойчивому положению, что следует из принципа наименьшего действия.

§ 36. Равновесие тела со свободной опорой

Пусть тело лежит на некоторой поверхности (рис. 13). Если поверхность наклонять, то тело может потерять устойчивость: начнет скользить по поверхности или перевернется. Скользить тело начнет, когда составляющая силы тяжести, направленная вдоль наклонной плоскости, становится больше максимальной силы трения покоя.

$$F_т \cdot \sin\alpha > F_{тр}, \text{ где } F_{тр} = \mu N = \mu mg \cdot \cos\alpha.$$

$$\Rightarrow \quad mg \cdot \sin\alpha > \mu mg \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha > \mu.$$

Переворачивается тело в случае, когда линия действия силы тяжести выходит за пределы поверхности опоры (рис. 14).

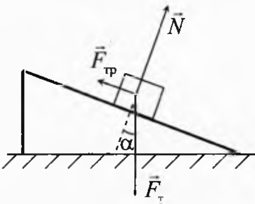


Рис. 13. *Скольжение по плоскости*

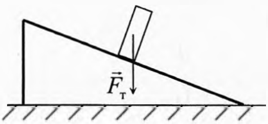


Рис. 14. *Переворот через ребро*

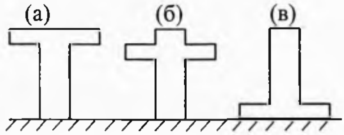


Рис. 15. *Степень устойчивости*

У низких тел потеря равновесия проявится в виде скольжения, а высокие тела будут переворачиваться. Подсчитайте, при каком соотношении высоты тела и размера основания вдоль наклонной плоскости вероятность опрокидывания и соскальзывания одинакова при заданном коэффициенте трения μ.

Для тел, имеющих свободную поверхность опоры, естественно ввести понятие *«степень устойчивости»*.

Чем на больший угол нужно отклонить тело, чтобы оно перевернулось, тем степень устойчивости больше. Например (рис. 15), наибольшая устойчивость будет у тела (в), наименьшая – у тела (а).

У тела (а) выше всего расположен центр масс, поэтому оно перевернется при меньшем угле наклона. Третье тело (в) имеет самое низкое положение центра масс и самую большую площадь опоры, поэтому для переворота его нужно отклонить на больший угол, чем тела (а) и (б).

✍ **Пример 6 (экспериментальный).** Используя линейку определить коэффициент трения спичечного коробка о стол.

➥**Решение.** Если к спичечному коробку приложить на небольшом расстоянии h от его основания горизонтально направленную силу $\vec{F}$, превышающую максимальную силу трения $F_{тр}=\mu mg$, то он придёт в движение. Если же эту силу приложить достаточно высоко, то коробок может, не трогаясь с места, опрокинуться (рис. 16). Это будет в том случае, когда момент силы $\vec{F}$ относительно оси, проходящей, например, перпендикулярно плоскости рисунка через точку A, окажется больше момента силы тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ относительно той же оси:

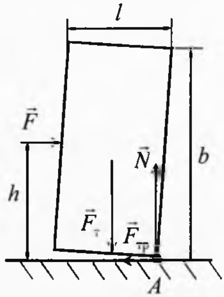


Рис. 16. Определение коэффициента трения

$$F \cdot h > mg \cdot l/2,$$

где l – ширина коробка.

Необходимо найти такую точку приложения силы $\vec{F}$, с которой наблюдается переход от одного случая к другому.

Согласно первому условию равновесия по горизонтали по осям X и Y и формуле Амонтона:

$$F - F_{тр} = 0; \quad N - mg = 0; \quad F_{тр} = \mu N; \quad \Rightarrow \quad F = \mu mg.$$

По второму условию равновесия (правило моментов) относительно оси вращения, проходящей через точку A:

$$F \cdot h = mg \cdot l/2.$$

Решая совместно эти уравнения, получим: $\mu = \dfrac{l}{2h}$.

Экспериментальное определение коэффициента трения возможно лишь в том случае, если высота коробка удовлетворяет условию $b \geq \dfrac{l}{2\mu}$. Иначе он не будет переворачиваться, и при любой точке приложения силы $\vec{F}$ будет скользить.

§ 37. Равновесие тела в неинерциальной системе отсчёта

Первое условие равновесия. Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта имеет вид (см. § 23): $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_и$, где фиктивная сила инерции $\vec{F}_и$ равна произведению массы тела на ускорение НИСО относительно ИСО, взятое с обратным знаком $\vec{F}_и = -m\vec{a}_c$. Сила инерции прилагается к центру масс тела.

Если относительно неинерциальной системы отсчёта ускорение тела равно нулю ($\vec{a} = 0$), то в этой НИСО тело находится в равновесии. Это – первое условие равновесия:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i + \vec{F}_и = 0}.$$

Или в проекции на оси координат:

$$\sum F_{ix} + F_{иx} = 0, \qquad \sum F_{iy} + F_{иy} = 0, \qquad \sum F_{iz} + F_{иz} = 0.$$

Все эти три уравнения должны выполняться одновременно.

Второе условие равновесия. Аналогично рассмотрим второе условие равновесия. Тело находится в равновесии в НИСО, если сумма моментов реально действующих сил и момента силы инерции будет равна нулю относительно произвольной оси вращения:

$$\sum \vec{M}_i + \vec{M}_и = 0.$$

Если все реальные силы и силы инерции лежат в одной плоскости, то векторную сумму моментов сил можно заменить алгебраической:

$$\boxed{\sum M_i + M_и = 0}.$$

Если размеры тела (вдоль радиуса вращения) пренебрежимо малы по сравнению с радиусом вращения, то $M_и = F_и \cdot d_и$, где $F_и = ma_c$ – сила инерции, приложенная к центру масс тела, $d_и$ – плечо силы инерции. Если же размеры тела сопоставимы с радиусом вращения, то необходимо мысленно разбить это тело на маленькие кусочки, посчитать момент силы инерции для каждого кусочка, а затем просуммировать их.

✍ **Пример 7.** Велосипедист делает поворот радиусом R=50 м со скоростью υ=10 м/с. На какой угол он должен отклониться от вертикали, чтобы благополучно совершить вираж? Коэффициент трения скольжения шин о дорогу μ=0,5. При какой максимальной скорости возможен вираж с данным радиусом? Каков при этом максимальный угол наклона?

➥**Решение.** Рассмотрим движение велосипедиста в неинерциальной системе отсчёта, поворачивающейся вместе с велосипедом. В этой НИСО на велосипед действуют две реальные силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{F}_р$ со стороны дороги, а также сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}$, приложенная к центру масс и направленная противоположно центростремительному ускорению $\vec{a}$ велосипеда.

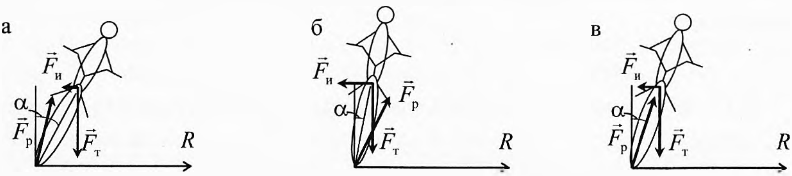


Рис. 17. *Наклон велосипедиста при повороте*

Для того чтобы в НИСО велосипед «покоился», сумма сил приложенных к нему должна быть равна нулю (первое условие равновесия):

$$\vec{F}_т + \vec{F}_р + \vec{F}_и = 0\,.$$

Сразу не ясно как направлена сила реакции $\vec{F}_р$. Как у Ильи Муромца, у неё есть три варианта: налево от оси велосипеда (рис. 17а), направо от неё (рис. 17б) и вдоль оси велосипеда (рис. 17в). Чтобы не ошибиться, записывая второе условие равновесия (правило моментов сил), ось вращения возьмем в точке касания шины с дорогой. В этом случае момент силы реакции опоры равен нулю, а момент силы тяжести, стремящийся свалить велосипедиста внутрь круга, уравновешивается моментом силы инерции

$$M_т = M_и \text{ или } F_т \cdot d_т = F_и \cdot d_и.$$

Обозначим расстояние от точки касания шины с дорогой до центра тяжести через l. Тогда плечо силы тяжести $d_т = l\cdot\sin\alpha$, а плечо силы инерции $d_и = l\cdot\cos\alpha$. После подстановки правило моментов примет вид:

$$mg\cdot l\cdot\sin\alpha = ma\cdot l\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{ma}{mg}.$$

Из последней формулы видно, что для выполнения второго условия равновесия сила реакции опоры $\vec{F}_р$ должна быть направлена вдоль оси велосипеда. Учитывая, что центростремительное ускорение равно $a = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{g}=\frac{\upsilon^2}{g\cdot R}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{(10\,\text{м/с})^2}{10\,\text{м/с}^2\cdot 50\,\text{м}}=0{,}2\ \Rightarrow\ \alpha\approx 11^\circ.\qquad(9)$$

Центростремительное ускорение создаётся касательной составляющей силы реакции опоры (силой трения): $F_\text{р}\sin\alpha=F_\text{тр}$. Учитывая, что нормальная составляющая реакции опоры равна $N=F_\text{р}\cos\alpha$, получим:

$$F_\text{тр}/N=\operatorname{tg}\alpha \qquad \text{или} \qquad F_\text{тр}=N\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Согласно формуле Амонтона максимальная сила трения равна $F_\text{тр}=\mu N$. Для успешного виража движение нежелательно доводить до проскальзывания вдоль радиуса вращения, то есть $F_\text{тр}\le\mu N$ или $\operatorname{tg}\alpha\le\mu$. В нашем случае это условие выполнено, поэтому вираж будет удачным, если наклониться на угол $\alpha=11^\circ$.

Найдём максимальный угол наклона к вертикали:

$$\operatorname{tg}\alpha_{max}=\mu\ \Rightarrow\ \alpha_{max}=\operatorname{arctg}\mu,\ \ \alpha_{max}=\operatorname{arctg}0{,}5=26{,}6^\circ\approx 26^\circ.$$

При этом велосипедист будет двигаться с максимально возможной скоростью. Формула (9) будет справедлива вплоть до проскальзывания:

$$\operatorname{tg}\alpha_{max}=\frac{\upsilon_{max}^2}{gR}\quad\Rightarrow\quad\upsilon_{max}=\sqrt{gR\cdot\operatorname{tg}\alpha_{max}}=\sqrt{gR\cdot\mu},\quad \upsilon_{max}=15{,}8\approx 15\ \text{м/с}.$$

✓ **Ответ.** Велосипед должен отклониться от вертикали на 11°. Максимальная скорость, при которой возможен вираж равна 15 м/с, при этом наклон оси велосипеда к вертикали максимален и равен 26°, причём тангенс максимального угла наклона оказывается равен коэффициенту трения μ.

Упражнения

1 Определить положение центра тяжести треугольника из однородного картона.

2 Каков должен быть коэффициент трения, чтобы клин, заколачиваемый в бревно, не выскакивал из него? Угол при вершине клина $\alpha=30^\circ$ (рис. 18).

3 Железный прут массой M изогнут пополам так, что его части образуют прямой угол (рис. 19). Прут подвешен шарнирно. Найти угол α, который образует с вертикалью верхний стержень в положении равновесия.

4 Лестница длиной $l=4$ м приставлена к гладкой стене под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu=0{,}2$. На какое расстояние l' вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем она начнет скользить? Массой лестницы можно пренебречь.

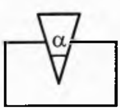


Рис. 18. *Клин в бревне*

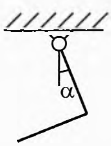


Рис. 19. *Наклон прямого угла*

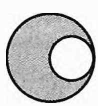


Рис. 20. *Дырка в бублике*

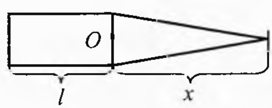


Рис. 21. *Центр тяжести пластины*

5 Три шара радиуса R каждый – цинковый (плотность ρ_1), алюминиевый (ρ_2) и железный (ρ_3) – скреплены в точках касания. Центры шаров расположены вдоль одной прямой. Найти положение центра тяжести относительно центра второго шара.

6 Определить положение центра тяжести однородного диска радиуса R, из которого вырезано отверстие радиуса $r=R/2$, как показано на рис. 20.

7 Во сколько раз высота x треугольной части тонкой однородной пластины должна отличаться от длины прямоугольной части l, чтобы центр тяжести всей пластины находился в точке O (рис. 21)?

8 Какой максимальной длины l_{max} доска может быть забита между двумя вертикальными стенками, расположенными на расстоянии d=2,0 м друг от друга, если коэффициент трения между доской и стенкой μ=0,46? Массой доски пренебречь.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Разделим треугольник на тонкие полоски, параллельные стороне AC (рис. 22). Каждая полоска будет в равновесии относительно оси, проходящей через её середину. Значит, если вдоль медианы BD поместить под треугольником узкую опору, то он будет в равновесии, значит, центр масс расположен на медиане BD. Аналогично доказываем, что центр масс расположен на медианах CF и AE. Поскольку медианы любого треугольника пересекаются в одной точке, то центр тяжести треугольника из однородного картона (или любого другого материала) будет находиться на пересечении медиан.

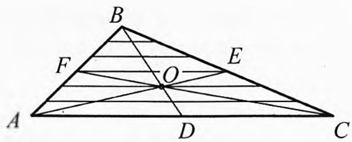


Рис. 22. *Центр масс треугольника*

2 $\mu \ge \dfrac{F_{тр}}{N} = tg\dfrac{\alpha}{2}$=0,27.

3 Рассчитаем баланс моментов сил тяжести обеих половинок прута:

$$\frac{Mg}{2}\left(\frac{l}{4}\sin\alpha\right) = \frac{Mg}{2}\left(\frac{l}{4}\cos\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha\right) \Rightarrow tg\alpha = 1/3,\ \alpha=18{,}4°.$$

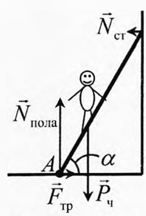


Рис. 23. *Человек на лестнице*

4 Первое условие равновесия и формула Амонтона:

$$N_{стены}=F_{тр};\ N_{пола}=P_ч;\ F_{тр}\le\mu N_{пола}$$

Правило моментов сил относительно точки A (рис. 23):

$P_ч\cdot l'\cdot\cos\alpha=N_{стены}\cdot l\cdot\sin\alpha;\quad \Rightarrow\quad l'\le\mu\cdot l\cdot tg\alpha\approx1{,}4$ м.

5 $x = \dfrac{(-2R)\cdot m_1 + 0\cdot m_2 + (2R)\cdot m_3}{m_1+m_2+m_3} = \dfrac{2R(\rho_3-\rho_1)}{\rho_1+\rho_2+\rho_3}$.

6 $0 = -\dfrac{3}{4}M\cdot b + \dfrac{1}{4}M\cdot\dfrac{R}{2}$. На расстоянии $b=R/6$ слева от центра диска по оси симметрии.

7 $x=\sqrt{3}\,l$. Учесть, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения медиан.

8 $l_{max} = d\cdot\sqrt{1+\mu^2}$, $l_{max}\approx$2,2 м. Силы реакции опоры, действующие со стороны стенок на концы доски, должны быть направлены вдоль доски и $F_{тр}\le\mu N$.

Глава 4. Импульс. Закон сохранения импульса

Ученье – свет, а не ученье –
чуть свет и на работу.
Народная мудрость

§ 38. Импульс силы. Импульс тела

Сила характеризует мгновенное действие одного тела на другое, в результате которого тело получает ускорение. Но часто важно знать результат не мгновенного действия, а за некоторый промежуток времени. С этой целью вводится понятие импульс силы, определяемый как произведение среднего значения силы на время её действия. Импульс силы – векторная величина, т. к. сила всегда имеет направление. Направление импульса силы совпадает с направлением силы. Импульс силы обозначается $\vec{j}$.

$$\boxed{\vec{j} = \vec{F}_{\text{ср}} \cdot \Delta t}.$$

***Импульс силы** – это векторная величина, характеризующая действие силы на тело за некоторый промежуток времени. Импульс силы равен произведению среднего значения силы и времени её действия.*

Единица измерения импульса силы 1 Н·с. Если к телу в течение 1 с приложена сила 1 Н, то оно получило импульс силы 1 Н·с.

$$[j] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Тело, движущееся в данной системе отсчёта, может взаимодействовать с другим телом, если они встретятся. Для того чтобы характеризовать движение и возможное действие данного тела на другое, вводится понятие импульс тела (количество движения). Импульс тела – векторная величина, т. к. возможное действие на другие тела направлено по скорости тела. Он определяется как произведение массы тела на его скорость в данной системе отсчёта, т. е. чем больше масса тела и его скорость, тем больше его возможное действие на другие тела в данной системе отсчёта. Импульс тела обозначается $\vec{P}$.

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{\upsilon}}.$$

Единица измерения импульса тела – 1 кг·м/с. Если тело массой 1 кг движется со скоростью 1 м/с, то его импульс равен 1 кг·м/с.

$$[P] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

***Импульс тела** (количество движения) – это векторная величина, характеризующая движение и возможное действие тела на другие тела. Импульс равен произведению массы тела и скорости в данной системе отсчёта.*

Векторный характер импульса тела и то, что возможное действие может быть непоправимым при больших массах и скоростях тел, недостаточно ощущается населением нашей страны. Об этом свидетельствуют данные статистики: десятки тысяч погибших и искалеченных людей в дорожно-транспортных происшествиях ежегодно! Другая причина этой ужасной статистики – недопустимо узкие дороги в нашей стране, не говоря об их качестве. И самое главное – пренебрежение правилами безопасности дорожного движения некоторыми водителями и пешеходами, многие из которых в спешке не успевают дожить даже до пенсионного возраста.

Историческая справка. Понятие импульса тела было введено в физику французским философом, физиком, математиком и физиологом Рене Декартом (лат. имя Картезий), провозгласившим основным принципом своей философии утверждение: «Я мыслю, следовательно, я существую». Он сформулировал закон инерции в 1644 г.; дал теорию магнетизма; первым математически вывел закон преломления света (экспериментально открыл этот закон ок. 1621 г. голландский ученый Виллеброрд Снеллиус).

Виллеброрд Снеллиус (1580–1626)

Рене Декарт (1596–1650)

Из-за отсутствия в то время физического понятия массы он определил импульс как произведение «величины тела на скорость его движения». Это определение было уточнено Ньютоном и названо количеством движения. Согласно Ньютону «количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе».

В XX веке с развитием квантовой механики вместо сочетания слов «количество движения» чаще стали использовать более короткий термин «импульс». Во второй половине XX века термин «импульс» стал превалирующим в употреблении по сравнению с «количеством движения» и в школьных учебниках. Краткость – сестра таланта, но школьнику не просто, слыша термин «импульс», разобраться, о чем идёт речь: импульсе силы или импульсе тела. Так всегда: что-то находим, а что-то теряем.

§ 39. Связь импульса тела с импульсом силы

Пусть тело действует силой $\vec{F}$ на другое тело массой m (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона в инерциальной системе отсчёта:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

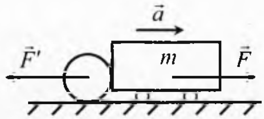


Рис. 1. *Импульс силы*

Учитывая, что $\vec{a} = (\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0)/\Delta t$, из (1) получим:

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0)}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{P} - \vec{P}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t};$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}}. \quad (2)$$

Скорость изменения импульса тела равна силе, под действием которой изменяется импульс тела.

Из (2) следует:

$$\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{P} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{j} = \Delta\vec{P}}. \quad (3)$$

Импульс внешней силы, приложенной к телу, равен изменению импульса (количества движения) этого тела.

§ 40. Закон сохранения импульса

Пусть два тела массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ (рис. 2а) и сталкиваются (рис. 2б). После столкновения их импульсы изменяются (рис. 2в).

Как связаны между собой импульсы до и после взаимодействия (если нет внешних сил, влияющих на импульсы тел за время взаимодействия)? Согласно III закону Ньютона, силы, с которыми тела действуют друг на друга, в любой момент времени равны по модулю и противоположны по направлению независимо от того, упругое взаимодействие или неупругое, центральный или нецентральный удар:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

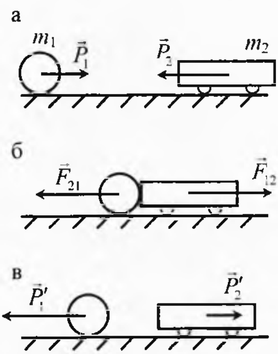


Рис. 2. *Закон сохранения импульса*

А если силы равны в любой миг, то равны и средние значения этих сил за время удара:

$$\vec{F}_{12ср} = -\vec{F}_{21ср},$$

С учетом II закона Ньютона получим:

$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = -m_1 \cdot \vec{a}_1 \qquad \text{или} \qquad m_2 \cdot \frac{\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_2}{\Delta t} = -m_1 \cdot \frac{\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t},$$

где Δt – время взаимодействия, $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$ – скорости тел после взаимодействия.

Умножив последнее уравнение на Δt, получим:

$$m_2\vec{\upsilon}_2' - m_2\vec{\upsilon}_2 = -m_1\vec{\upsilon}_1' + m_1\vec{\upsilon}_1;$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'} \qquad \text{или} \qquad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2.$$

Мы получили, что *при любых взаимодействиях двух тел между собой, при отсутствии внешних сил, сумма импульсов взаимодействующих тел остаётся неизменной*. Этот результат, оказывается, можно обобщить на случай любого количества взаимодействующих тел. Причём во время взаимодействия некоторые тела могут соединяться или распадаться, т. е. количество тел может меняться, но сумма импульсов этой системы тел сохраняется в любой момент времени:

$$\boxed{\sum \vec{P}_i = \sum \vec{P}_i'}. \tag{4}$$

Сформулируем ***закон сохранения импульса***.

В замкнутой системе тел, где действуют только внутренние силы, сумма импульсов тел остаётся неизменной с течением времени.

Векторное уравнение (4) равносильно системе алгебраических уравнений для проекций сил на оси координат:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = \sum P_{ix}'; \\ \sum P_{iy} = \sum P_{iy}'; \\ \sum P_{iz} = \sum P_{iz}'. \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \sum m_i\upsilon_{ix} = \sum m_i\upsilon_{ix}'; \\ \sum m_i\upsilon_{iy} = \sum m_i\upsilon_{iy}'; \\ \sum m_i\upsilon_{iz} = \sum m_i\upsilon_{iz}'. \end{cases}$$

То есть *если векторная сумма импульсов системы тел не изменяется с течением времени, то и сумма проекций сил на любую ось тоже остаётся неизменной*. При решении школьных задач закон сохранения импульса используется, как правило, для одной или двух осей.

Если на систему тел действуют внешние (сторонние) силы, то её импульс не сохраняется. Согласно (3) запишем:

$$\vec{F}_{стор} \cdot \Delta t = \sum \vec{P}'_i - \sum \vec{P}_i.$$

Если импульс внешней силы во много раз меньше исходного импульса системы тел, то им можно пренебречь и в течение этого времени применять закон сохранения импульса.

Итак, ***условие применения закона сохранения импульса***:

$$\boxed{|\vec{F}_{\text{стор}} \cdot \Delta t| << |\sum \vec{P}_i|}.$$

✍ **Пример 1.** Тележка массой m_1=100 кг движется со скоростью υ_1=2 м/с, её догоняет юноша массой m_2=50 кг, скорость которого υ_2=5 м/с и вскакивает на тележку. Какова скорость тележки с юношей?

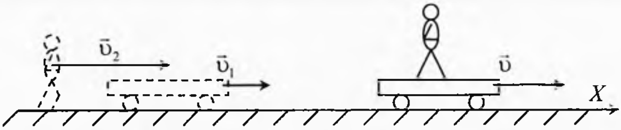


Рис. 3. *Юноша догоняет запрыгивает на тележку*

➥**Решение.** Согласно закону сохранения импульса $\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}$ или в проекции на ось X (рис. 3):

$$p_{01}+p_{02}=p \quad \text{или} \quad m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon.$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \quad \upsilon = \frac{100 \cdot 2 + 50 \cdot 5}{100 + 50} = \frac{450}{150} = 3\,(\text{м/с}).$$ ↩

✓**Ответ.** Скорость тележки с юношей равна $\upsilon = 3\,\text{м/с}$.

✍ **Пример 2.** Какова станет скорость тележки, если юноша будет двигаться навстречу и запрыгнет на неё?

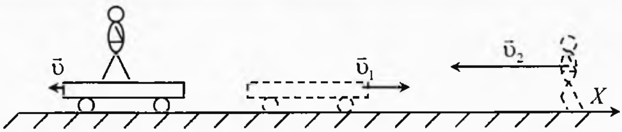


Рис. 4. *Юноша бежит навстречу и запрыгивает на тележку*

➥**Решение.** В проекции на ось X (рис. 4):

$$m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = (m_1 + m_2)\upsilon_x, \text{ где } \upsilon_{1x} = \upsilon_1, \ \upsilon_{2x} = -\upsilon_2.$$

$$\Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_x, \quad \upsilon_x = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)}, \ \upsilon_x \approx -0{,}33\,(\text{м/с}).$$ ↩

✓**Ответ.** Скорость тележки с юношей равна $\upsilon = 0{,}33\,\text{м/с}$ и направлена против начальной скорости движения тележки.

✍ **Пример 3.** Ракета массой m=100 кг стартует вертикально вверх. Определить ускорение ракеты, если расход топлива μ=2 кг/с, а скорость истечения газов относительно ракеты $\upsilon_г$=2 км/с.

Дано:
m=100 кг
μ=2 кг/с
$\upsilon_г=2\cdot10^3$ м/с
$g\approx10$ м/с^2
a – ?

➥**Решение.** Согласно второму закону Ньютона, для ракеты, имеем (рис. 5):

$$m\vec{a}=\vec{F}_р+\vec{F}_т,$$

где $\vec{F}_р$ – реактивная сила газовой струи, $\vec{F}_т$ – сила тяжести ракеты в данный миг.

В проекции на ось Y:

$$ma=F_р-F_т. \quad (5)$$

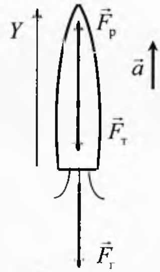


Рис. 5. *Ускорение ракеты*

Вылетающие газы получают импульс вниз относительно ракеты, а ракета такой же импульс вверх. Изменение импульса газов за время Δt равно импульсу силы, действующей на газ со стороны ракеты:

$$F_г\cdot\Delta t=\Delta(m_г\cdot\upsilon_г); \quad \Rightarrow \quad F_г=\upsilon_г\cdot\frac{\Delta m_г}{\Delta t}=\mu\cdot\upsilon_г,$$

где $\mu=\dfrac{\Delta m_г}{\Delta t}$ – массовый расход газа (масса газа, выпущенного за время Δt).

Согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec{F}_р$, с которой газ действует на ракету, равна по модулю силе $\vec{F}_г$, с которой ракета действует на газ: $F_р=F_г$.

Значит,

$$F_р=\mu\cdot\upsilon_г. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), с учетом того, что $F_т=mg$, получим:

$$ma=\mu\cdot\upsilon_г-mg \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\mu\cdot\upsilon_г}{m}-g;$$

$$a=\frac{(2\,кг/с)\cdot2\cdot10^3\,м/с}{100\,кг}-10\,м/с^2=30\,м/с^2=3g. ⬅$$

✓**Ответ.** Ракета стартует с ускорением $3g$.

Итак, ***реактивная сила газовой струи*** *равна произведению массового расхода продуктов сгорания и скорости их относительно ракеты, взятой с обратным знаком:*

$$\boxed{\vec{F}_р=-\mu\vec{\upsilon}_г}.$$

✍ **Пример 4.** Труба массой m переменного сечения имеет на концах участки сечениями S_1 и S_2, закрытые поршнями массами m_1 и m_2. Труба расположена горизонтально, не закреплена и заполнена гремучим газом. Определить скорость трубы и второго поршня после взрыва газа, если первый поршень вылетел со скоростью υ_1. Массой газа и трением можно пренебречь (рис. 6).

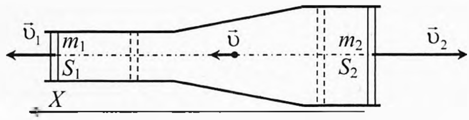


Рис. 6. *Гремучий газ в трубе*

➥**Решение.** Согласно закону Паскаля газ давит по всем направлениям одинаково. Средние силы, действующие на поршни и трубу:

$$\overline{F_1} = \overline{p}\cdot S_1; \quad \overline{F_2} = \overline{p}\cdot S_2;$$

$$\overline{F} = \overline{p}(S_2 - S_1).$$

Все три силы направлены горизонтально. После того, как один из поршней вылетит из трубы, давление газа быстро уменьшится до атмосферного. Значит, время Δt, в течение которого газ действует на поршни и трубу, одинаково.

Запишем для каждого тела связь между импульсом силы и импульсом тела:

$$\overline{F_1}\cdot\Delta t = \Delta(m_1\upsilon_1); \quad \overline{F_2}\cdot\Delta t = \Delta(m_2\upsilon_2); \quad \overline{F}\cdot\Delta t = \Delta(m\upsilon).$$

Учитывая, что для всех тел $\upsilon_0=0$, и $F=pS$, получим:

$$pS_1\cdot\Delta t = m_1\upsilon_1, \quad pS_2\cdot\Delta t = m_2\upsilon_2, \quad p(S_2 - S_1)\cdot\Delta t = m\upsilon.$$

Сравнивая первое уравнение со вторым, а затем с третьим, находим:

$$\upsilon_2 = \frac{S_2 m_1}{S_1 m_2}\upsilon_1, \quad \upsilon = \frac{(S_2 - S_1)m_1}{S_1 m}\upsilon_1.$$

Скорость трубы можно было бы найти и по закону сохранения импульса. Суммарный импульс до и после взрыва равен нулю. Относительно оси X имеем:

$$m_1\upsilon_1 + m\upsilon - m_2\upsilon_2 = 0,$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1}{m} = \frac{m_2\cdot\dfrac{S_2 m_1}{S_1 m_2}\upsilon_1 - m_1\upsilon_1}{m} = \frac{m_1\upsilon_1(S_2/S_1 - 1)}{m} = \frac{m_1(S_2 - S_1)}{S_1 m}\cdot\upsilon_1. \text{↩}$$

✓ **Ответ.** $\upsilon_2 = \dfrac{S_2 m_1}{S_1 m_2}\cdot\upsilon_1, \quad \upsilon = \dfrac{m_1(S_2 - S_1)}{S_1 m}\cdot\upsilon_1.$

✍ **Пример 5.** Снаряд массой $m=30$ кг, летевший со скоростью $\upsilon=20$ м/с, разорвался на два осколка. Первый, массой $m_1=20$ кг, полетел со скоростью $\upsilon_1=50$ м/с под углом $\alpha=30°$ к первоначальной скорости снаряда. Найти скорость второго осколка.

➥**Решение.** Масса второго осколка: $m_2=m - m_1=10$ кг.

Согласно закону сохранения импульса (рис. 7):

$$m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$$

Или для проекций на оси координат:

$$m\upsilon = m_1\upsilon_1\cos\alpha - m_2\upsilon_2\cos\beta;$$

$$0 = m_1\upsilon_1\sin\alpha - m_2\upsilon_2\sin\beta.$$

Найдём сначала угол β, под которым полетел второй осколок относительно оси X:

$$\begin{cases} m_2\upsilon_2\sin\beta = m_1\upsilon_1\sin\alpha, \\ m_2\upsilon_2\cos\beta = m_1\upsilon_1\cos\alpha - m\upsilon; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{m_1\upsilon_1\sin\alpha}{m_1\upsilon_1\cos\alpha - m\upsilon}.$$

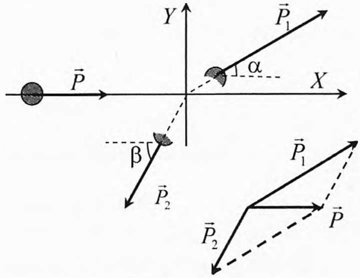


Рис. 7. *Разрыв снаряда*

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{20\cdot 50\cdot 0{,}5}{20\cdot 50\cdot 0{,}866 - 30\cdot 20} \approx 1{,}88;\quad \beta\approx 62°.$$

$$\upsilon_2 = \frac{m_1\upsilon_1\sin\alpha}{m_2\sin\beta};\quad \upsilon_2 = \frac{20\cdot 50\cdot 0{,}5}{10\cdot 0{,}88}\approx 57\text{ м/с.}$$

✓**Ответ.** Второй осколок полетит со скоростью 57 м/с под углом 62° к первоначальной скорости снаряда в обратную сторону.

Упражнения

1 Шарик массой m=0,1 кг движется со скоростью υ=1 м/с и упруго ударяется о плоскость. Определить изменение импульса шарика, если направление скорости составляет с плоскостью α=90°, α=30°.

2* Снаряд разорвался в верхней точке траектории на высоте h=19,6 м на две одинаковые части. Через время τ=1 с после взрыва одна часть падает на Землю под тем местом, где произошёл взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии S_1=1000 м?

3 Конькобежец массой M=60 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m=0,5 кг. Спустя время t=0,5 с камень упал, пролетев по горизонтали S=20 м. С какой скоростью начнет скользить конькобежец?

4 Человек массой m=70 кг стоит на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки l=5 м, масса M=280 кг. На сколько переместится лодка, если человек перейдет с кормы на нос?

5 В неподвижный гладкий шар ударяется не центрально другой такой же шар. Под каким углом они разлетятся, если шары абсолютно упругие?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 а) $|\Delta p|=2m\upsilon$; б) $|\Delta p| =|\Delta p_y|=2m\upsilon\cdot\sin\alpha$.

2 Найдём время подъема $t_в$ снаряда до верхней точки (рис. 8). В этой точке вертикальная составляющая скорости снаряда становится равной нулю:

$$h = \upsilon_{0y}t_в - \frac{gt_в^2}{2},\qquad 0 = \upsilon_{0y} - gt_в;\qquad \Rightarrow\qquad t_в = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\text{ с.}$$

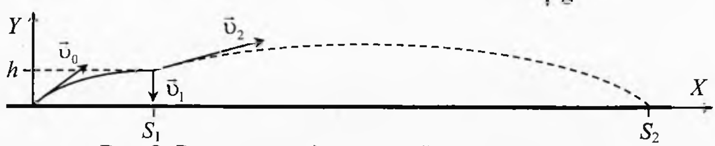


Рис. 8. *Разрыв снаряда в верхней точке траектории*

За это время снаряд пролетел расстояние S_1 по горизонтали, а затем разорвался на две части. Найдём горизонтальную проекцию скорости снаряда:

$$\upsilon_{0x} = \frac{S_1}{t_в} = 500\text{ м/с.}$$

Так как после разрыва первая часть полетела вниз, то весь горизонтальный импульс снаряда перешёл второй части:

$$m\upsilon_{0x} = \frac{m}{2}\cdot 0 + \frac{m}{2}\cdot\upsilon_{2x}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{2x} = 2\cdot\upsilon_{0x} = 1000 \text{ м/с}.$$

После разрыва снаряда первая часть полетела вниз ($\upsilon_{1y}<0$) и через время τ приземлилась ($y_\tau=0$):

$$0 = h + \upsilon_{1y}\tau - \frac{g\tau^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{1y} = \frac{g\tau}{2} - \frac{h}{\tau} = -14{,}7 \text{ м/с}.$$

Поскольку снаряд разорвался в верхней точке траектории, то его вертикальная составляющая скорости и импульса в этот момент равна нулю. Значит, суммарный импульс двух частей снаряда по оси Y сразу после разрыва тоже равен нулю:

$$0 = \frac{m}{2}\upsilon_{1y} + \frac{m}{2}\upsilon_{2y}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{2y} = -\upsilon_{1y} = +14{,}7 \text{ м/с}.$$

Найдём время полета второй части снаряда до приземления:

$$0 = h + \upsilon_{2y}\tau_2 - \frac{g\tau_2^2}{2}.$$

Подставляя данные, после сокращения получим:

$$\tau_2^2 - 3\tau_2 - 4 = 0; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = 4 \text{ с}.$$

Итак, вторая часть снаряда улетела от места выстрела на расстояние S_2:

$$S_2 = S_1 + \upsilon_{2x}\tau_2 = 5 \text{ (км)}.$$

3 $u = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{S}{t} = 0{,}33$ м/с.

4 $0 = m\cdot\upsilon_{1x} + M\cdot\upsilon_{2x}$; $0 = m\dfrac{\Delta x_1}{\Delta t} + M\dfrac{\Delta x_2}{\Delta t}$; $\Delta x_1 = l - S_л$; $\Delta x_2 = -S_л$; $\Rightarrow$ $S_л = \dfrac{l\cdot m}{M+m} = 1$ м.

5 Так как трения нет, то шары взаимодействуют только по оси X, значит, скорости по оси Y остаются прежними (рис. 9):

$$\upsilon_{1y} = \upsilon_{0y}, \quad \text{а} \quad \upsilon_{2y} = 0.$$

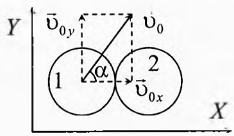


Рис. 9. *Удар шаров*

По оси X происходит абсолютно упругий удар, при котором шары меняются скоростями ($m_1=m_2$), то есть:

$$\upsilon_{1x} = 0, \quad \upsilon_{2x} = \upsilon_{0x}.$$

Скорости шаров после удара: $\upsilon_1 = \upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\alpha$; $\quad \upsilon_2 = \upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\alpha$.

То есть они разлетятся под прямым углом при любом $\alpha \neq 0$, что полезно знать начинающим бильярдистам.

Глава 5. Энергия и работа

Любая работа заслуживает того,
чтобы её делать хорошо.*

Напомним, что механика изучает движение и взаимодействие макроскопических тел. Мы рассмотрели физические величины, которые характеризуют движение тел: перемещение, скорость, ускорение и др., а также величины, характеризующие взаимодействие – сила, импульс силы, момент силы. Импульс тела имеет второе название – количество движения, является характеристикой движения и в то же время характеризует возможное действие этого тела на другие тела.

*Наиболее общей мерой движения и взаимодействия материи является физическая величина – **энергия**.*

> *Энергия имеет две формы – кинетическую и потенциальную. Кинетическая энергия обусловлена движением тел, а потенциальная энергия – их взаимодействием.*

Энергия разделяется также на механическую и внутреннюю. К внутренней энергии относятся: энергия движения и взаимодействия молекул – внутренняя (тепловая) энергия, энергия движения и взаимодействия электронов с ядром – энергия атома, энергия движения и взаимодействия нуклонов в ядре (энергия связи ядра) и др.

Механическая энергия обусловлена движением тела как целого или его частей, а также взаимодействием его с другими телами или его отдельных частей друг с другом:

$$\boxed{E = E_к + E_п},$$

где E – механическая энергия тела (системы тел),

$E_к$ – кинетическая энергия тела (системы тел),

$E_п$ – потенциальная энергия тела (системы тел).

---

* Если этот тезис, услышанный мною впервые от петербургского ученого Сергея Григорьевича Попова, принять за основу русской национальной идеи, то все наши народы скоро заживут весело, богато и здорово, а народы других стран вздохнут с облегчением и порадуются за нас.

§ 41. Механическая работа

Механическая энергия тела в целом и отдельные её компоненты могут изменяться под действием приложенной к телу силы. В этом случае говорят, что над телом совершается работа.

Работа – это мера изменения энергии тела в результате приложенной к телу силы. При этом может изменяться кинетическая энергия $E_к$ тела, потенциальная $E_п$ или вся энергия E в целом:

$$|A|=|\Delta E_к| \quad \text{или} \quad |A|=|\Delta E_п| \quad \text{или} \quad |A|=|\Delta E|. \qquad (1)$$

Выполняемая работа зависит от значения приложенной силы, пройденного расстояния и ориентации силы относительно скорости тела. Формула работы имеет вид:

$$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos(\widehat{\vec{F}\vec{\upsilon}}) \quad \text{или} \quad \boxed{A=F\cdot S\cdot\cos\alpha}, \qquad (2)$$

где α – угол между направлением силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{\upsilon}$.

***Механическая работа** – это скалярная величина, характеризующая изменение энергии в результате приложенной к телу силы. Работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и косинус угла между ними.*

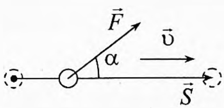


Рис. 1. *Работа положительна*

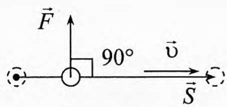


Рис. 2. *Работа не совершается*

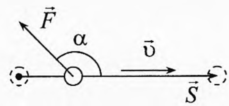


Рис. 3. *Работа отрицательна*

Проведём анализ формулы работы.

1. Если угол между направлением силы и скорости острый (рис. 1), то сила* совершает положительную работу:

$$A>0 \quad \text{при} \quad -90^\circ<\alpha<90^\circ;$$

Если сила совпадает по направлению со скоростью, то её работа положительна и максимальна:

$$A_{max}=F\cdot S \quad \text{при} \quad \alpha=0.$$

2. Если угол между направлением силы и скорости прямой (рис. 2), то работа равна нулю. То есть сила, перпендикулярная направлению скорости, работы не совершает (не увеличивает и не уменьшает энергию).

$$A=0 \quad \text{при} \quad \alpha=\pm 90^\circ.$$

* Строго говоря, работу совершает не сила, а тело или поле (электромагнитное или гравитационное), но для краткости принято говорить, что работу совершает сила.

3. Если угол между направлением силы и скорости тупой (рис. 3), то сила совершает отрицательную работу:

$$A<0 \quad \text{при} \quad 90^\circ<\alpha<270^\circ.$$

Работа силы максимально отрицательна при $\alpha=180^\circ$:

$$A_{\min}=-F\cdot S.$$

Работа и энергия измеряются в джоулях. Единица измерения вытекает из формулы (2):

$$1\ \text{Дж}=1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м}.$$

Если тело под действием силы 1 Н проходит 1 м в направлении силы, то работа, совершённая, равна 1 Дж.

§ 42. Теорема о кинетической энергии (работа результирующей сил)

Попал физик в больницу после автокатастрофы. Лежит и бредит:
– Хорошо, что пополам. Хорошо, что пополам. Хорошо, что пополам...
– Что пополам? – спрашивает врач.
– Хорошо, что кинетическая энергия эм-вэ-квадрат пополам!

Анекдот

Пусть к телу приложена постоянная сила, и тело совершает некоторое перемещение $\vec{S}$ за время t, имея начальную скорость $\vec{\upsilon}_1$, а через время t достигает скорости $\vec{\upsilon}_2$. Вычислим работу силы $\vec{F}$ за это время (рис. 4):

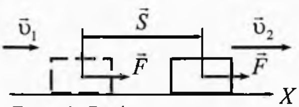


Рис. 4. *Работа силы изменяет кинетическую энергию тела*

$$A_{рез}=F\cdot S\cdot\cos\alpha.$$

Согласно второму закону Ньютона, результирующая сила:

$$\vec{F}=m\vec{a} \qquad \text{или в скалярной форме:} \quad F=ma.$$

Модуль перемещения определим по формуле $S=\dfrac{\upsilon_2^2-\upsilon_1^2}{2a}$, т. к. движение равноускоренное, а проекции всех величин положительные. Учитывая, что в данном случае $\cos\alpha=\cos 0=1$, получим:

$$A_{рез}=ma\cdot\frac{\upsilon_2^2-\upsilon_1^2}{2a}\cdot 1=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

$$\boxed{A_{рез}=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}}. \qquad (3)$$

Согласно (1), работа – это мера изменения энергии, происходящего за счёт приложенной силы. У нас же получилось, что работа равна изменению величины $\frac{m\upsilon^2}{2}$. Значит, это выражение для энергии, и, очевидно, кинетической, т. к. скорость – характеристика движения:

$$\boxed{E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}}.$$

Теперь (3) можно записать более коротко:

$$\boxed{A_{рез} = E_{к2} - E_{к1}} \quad \text{или} \quad \boxed{A_{рез} = \Delta E_к}. \qquad (4)$$

***Работа результирующей сил**, приложенных к телу, равна изменению кинетической энергии тела.*

Это утверждение носит название ***теоремы о кинетической энергии***. Следует отметить, что теорема о кинетической энергии имеет место не только для постоянной, но и для переменной силы. Работа результирующей силы определяется только массой, начальной и конечной скоростями тела.

Формулы (3) и (4) можно записать и в другом виде:

$$\boxed{\frac{m\upsilon_1^2}{2} + A_{рез} = \frac{m\upsilon_2^2}{2}} \quad \text{или} \quad \boxed{E_{к1} + A_{рез} = E_{к2}}.$$

Если к начальной кинетической энергии тела прибавить (со своим знаком «+» или «–») работу результирующей сил, приложенных к телу, то получим значение конечной кинетической энергии тела.

Необходимо так же отметить, что результирующая работа $A_{рез}$ – это работа всех приложенных сил, включая консервативные. Например, при свободном падении тела сила тяжести совершает положительную работу, при этом увеличивается кинетическая энергия тела.

Кинетическая энергия всегда положительна.

Согласно (4), это означает, что для сообщения телу кинетической энергии приложенная сила должна совершить положительную работу.

Работа результирующей сил равна кинетической энергии, которую получит тело при сообщении ему скорости от 0 до υ:

$$A_{рез} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\cdot 0}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} = E_к.$$

Аналогично, движущееся тело за счёт своей кинетической энергий совершит положительную работу при остановке.

Кинетическая энергия равна положительной работе, которую совершит тело, если его скорость уменьшиться от текущей скорости до нуля в данной инерциальной системе отсчёта.

Сформулируем определение кинетической энергии.

***Кинетическая энергия** – это скалярная величина, являющаяся основной мерой движения тела. Кинетическая энергия равна половине произведения массы тела и квадрата его скорости в данной системе отсчёта.*

§ 43. Работа силы тяжести

Пусть тело движется под углом к горизонту, например, съезжает по наклонной плоскости (рис. 5). На него действует несколько сил. Вычислим работу одной только силы – силы тяжести при переходе тела из положения 1 в положение 2.

$A_т = F_т \cdot S \cdot \cos\alpha$, где $F_т = mg$.

Так как α – острый угол, то

$$\cos\alpha = \frac{h_1 - h_2}{S} > 0.$$

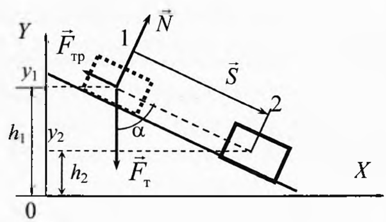


Рис. 5. *Работа силы тяжести*

Подставим это выражение в формулу для работы:

$$A_т = mg \cdot S \cdot \frac{h_1 - h_2}{S} = mg(h_1 - h_2);$$

$$\boxed{A_т = mgh_1 - mgh_2}. \tag{5}$$

Сравнивая (5) с (1), заключаем, что потенциальная энергия, обусловленная силой тяжести, должна вычисляться по формуле:

$$\boxed{E_т = mgh}, \tag{6}$$

где h – высота*, на которой находится тело массой m относительно произвольно взятого нулевого уровня, например от земной поверхности, от уровня моря и т.п.

Тогда формула (5) примет вид:

---

* Для обозначения высоты, на которой находится тело, исторически принято использовать не только координату по оси Y, но и букву h. На самом деле $h \equiv y$ и $\boxed{E_т = mgy}$.

$$\boxed{A_т = E_{т1} - E_{т2}} \quad \text{или} \quad \boxed{A_т = -\Delta E_т}. \tag{7}$$

Работа силы тяжести равна разности потенциальной энергии между начальным и конечным положением тела.

Во втором варианте можно сформулировать в следующем виде.

Работа силы тяжести *равна изменению потенциальной энергии при переходе тела из одной точки тела в другую, взятой с обратным знаком.*

Необходимо отметить, что *работа силы тяжести не зависит от траектории движения, а определяется разностью координат по вертикали и значением силы тяжести.*

Работа силы тяжести не зависит и от наличия других сил, а значит, от характера движения тела – равномерного или ускоренного В любом случае работа силы тяжести определяется по формуле (5).

Если конечная высота равна нулю, то сила тяжести совершит работу, равную начальному запасу потенциальной энергии:

$$h_2=0 \quad \Rightarrow \quad A_т=mgh_1-0=E_{т1} \quad \text{или} \quad \boxed{E_{т1} = A_{т10}}.$$

Потенциальная энергия равна работе, которую совершит сила тяжести при переходе тела из данной точки на нулевой уровень.

В отличие от кинетической энергии, потенциальная может быть как положительной, так и отрицательной. Если тело находится ниже нулевой отметки ($h<0$), то при переводе его на нулевой уровень (рис. 6) работа силы тяжести отрицательна (в данном случае $\alpha=180°$), а значит $E_т<0$.

Подчеркнем, что при решении задач с использованием формул (5) и (6), определяющих энергию силы тяжести, ось Y нужно направлять вверх!

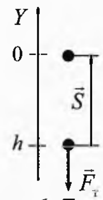


Рис. 6. *Тело в потенциальной яме*

Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. Формула для потенциальной энергии $E_т=mgh$ верна только для однородного поля, например при движении тел на небольших высотах относительно поверхности Земли. Если же требуется рассчитать изменение энергии для космического корабля или спутника, то необходимо учитывать зависимость силы тяжести от расстояния между телом и Землей.

Землю можно считать шаром с равномерно распределенной по объему массой M. Тогда по закону Всемирного тяготения тело массой m притягивается к Земле силой

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

где r – расстояние между телом и центром Земли.

Значит, при удалении тела от Земли на малое расстояние dr сила притяжения совершит отрицательную работу (сила притяжения направлена противоположно скорости):

$$\delta A = F\cdot dr\cdot\cos180^\circ = -F\cdot dr = -G\frac{mM}{r^2}\cdot dr.$$

Потенциальная энергия равна работе, которую совершит сила тяжести при переходе тела из данной точки на нулевой уровень. Обычно под нулевым уровнем принимают бесконечно большое расстояние, на котором тела уже не взаимодействуют друг с другом:

$$E_т = \int_0^A \delta A = -\int_r^\infty G\frac{mM}{r^2}\cdot dr = \left.\frac{GmM}{r}\right|_r^\infty = \frac{GmM}{\infty} - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{r}.$$

Потенциальная энергия *взаимодействия двух материальных точек (или тел шарообразной формы с равномерно распределенной массой) прямо пропорциональна массе каждого из тел и обратно пропорциональна расстоянию между ними:*

$$\boxed{E_т = -\frac{GmM}{r}}.$$

Потенциальная энергия, обусловленная силой тяготения, отрицательна относительно нулевого уровня, взятого при r=∞. Действительно, тела обладают максимальной потенциальной энергией притяжения на бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается (условно) равной нулю. При сближении тел сила притяжения совершает положительную работу за счёт уменьшения потенциальной энергии. Поэтому при $r < \infty$ потенциальная энергия меньше нуля.

Получим теперь приближенную формулу для работы, которую совершит сила тяжести при перемещении тела с некоторой высоты $h \ll R$ на поверхность Земли, то есть с расстояния $r_1=R+h$ до расстояния $r_2=R$ до центра Земли:

$$A_т = E_{т1} - E_{т2} = -\frac{GmM}{R+h} - \left(-\frac{GmM}{R}\right) = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GmM\cdot h}{R\cdot(R+h)}.$$

Учитывая, что $h \ll R$ и что $g = \dfrac{GM}{R^2}$, получим:

$$A_т \approx m\cdot\frac{GM}{R^2}\cdot h = mgh.$$

Это совпадает с тем, что можно получить по формуле (5).

§ 44. Теорема о потенциальной энергии. Работа силы упругости

Расположим на горизонтальной плоскости пружину жесткостью k. С одной стороны закрепим её неподвижно, а с другой прицепим груз массой m (рис. 7). Поместим начало отсчёта оси X в точке, где находится тело при недеформированной пружине. Положительное направление можно взять как вправо, так и влево. Возьмем вправо, тогда координата тела равна (по модулю и знаку) удлинению пружины $x=\Delta l$.

Пусть сила упругости при движении тела от x_1 до x_2 изменяется по закону Гука (рис. 8):

$$F_x = -kx.$$

Разобьём процесс сжатия пружины на небольшие участки, на которых изменением силы упругости можно пренебречь по сравнению со значением силы, а саму силу считать практически постоянной. Элементарная работа силы упругости на небольшом участке равна произведению силы упругости, модуля перемещения и косинуса угла между ними:

$$A_i = F_i \cdot |\Delta x_i| \cdot \cos\alpha .$$

Угол между силой упругости и скоростью в нашем случае равен нулю, значит $\cos\alpha=\cos 0=1$; $|x_i|$ – модуль перемещения. Значит,

$$A_i = F_i \cdot |\Delta x_i| .$$

Мы получили, что элементарная работа силы упругости равна в определённом масштабе площади заштрихованного прямоугольника под графиком зависимости силы упругости от координаты.

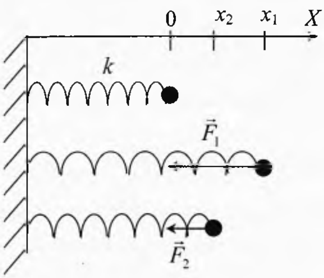


Рис. 7. *Работа силы упругости*

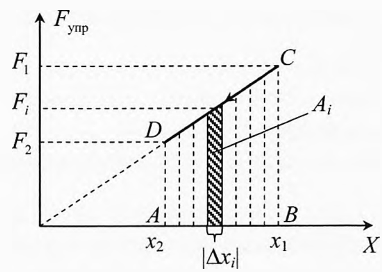


Рис. 8. *Работа равна площади под графиком*

Просуммировав это выражение, получим, что работа силы упругости при перемещении от x_1 до x_2 в определенном масштабе равна площади трапеции $ABCD$:

$$A_{упр} = \sum A_i = \sum F_i \cdot |\Delta x_i| = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2) \cdot (x_1 - x_2);$$

$$A_{\text{упр}} = \frac{1}{2}\cdot(k\cdot x_1 + k\cdot x_2)\cdot(x_1 - x_2) = \frac{k}{2}\cdot(x_1^2 - x_2^2);$$

$$\boxed{A_{\text{упр}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (1), заключаем, что потенциальная энергия, обусловленная силой упругости, должна вычисляться по формуле:

$$\boxed{E_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}}. \quad (9)$$

Тогда, учитывая (9), уравнение (8) примет вид:

$$\boxed{A_{\text{упр}} = E_{\text{упр1}} - E_{\text{упр2}}} \quad \text{или} \quad \boxed{A_{\text{упр}} = -\Delta E_{\text{упр}}}. \quad (10)$$

Работа силы упругости *равна изменению потенциальной энергии деформации пружины, взятому с обратным знаком.*

Работа силы упругости, как и работа силы тяжести, не зависит от формы траектории и характера движения тела. Она определяется разностью потенциальной энергии в начальном и конечном положениях тел. Если конечная координата x_2=0, то $A_{\text{упр}}$=$E_{\text{упр1}}$. Это значит, что потенциальная энергия, обусловленная упругим взаимодействием, равна работе, которую совершит сила упругости при переходе тела из данной точки на нулевой уровень. Обратим внимание, что формулы (8) и (9) верны только тогда, когда начало оси X находится у свободного конца недеформированного тела.

В отличие от потенциальной энергии силы тяжести, потенциальная энергия силы упругости всегда положительна.

Значит, при переходе тела на нулевой уровень сила упругости совершит положительную работу независимо от того, сжата или растянута пружина в начальный момент.

Формулы (7) и (10) имеют одинаковую форму.

Силы, работа которых не зависит от формы траектории тела и характера движения, а определяется начальным и конечным положениями тел, называются ***консервативными силами****.*

Для консервативных сил вводится понятие «потенциальная энергия».

Потенциальная энергия *– это скалярная величина, являющаяся наиболее общей мерой взаимодействия материи. Потенциальная энергия равна работе, совершаемой консервативной силой при переходе тела из данного положения в положение с нулевой потенциальной энергией.*

Формулы (7) и (10) выражают ***теорему о потенциальной энергии***.

> ***Работа любой консервативной силы*** *при переходе из одного положения в другое равна изменению потенциальной энергии, обусловленной этой силой, взятой с обратным знаком.*

§ 45. Закон сохранения механической энергии

Пусть к телу приложено несколько сил. Согласно принципу суперпозиции, каждая из них совершает работу независимо от наличия других сил. Рассмотрим случай, когда на тело действуют только консервативные силы, например, сила тяжести и/или сила упругости.

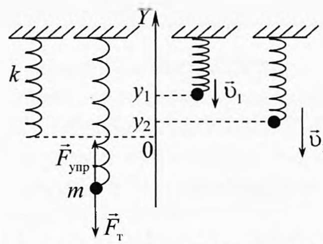


Рис. 9. *Энергия груза на пружине*

Пусть невесомая пружина жесткостью k подвешена вертикально (рис. 9). Около свободного её конца возьмем начало отсчёта и прикрепим к нему тело (материальную точку) массы m. При данном выборе начала отсчёта и положительного направления можно использовать формулы для потенциальной энергии силы тяжести $E_т=mgy$ и потенциальной энергии упругого взаимодействия $E_{упр}=\dfrac{ky^2}{2}$. Если пружину растянуть (или сжать) и отпустить, то система придёт в колебательное движение. Пусть в некотором положении координата тела будет y_1, а скорость $\vec{\upsilon}_1$. В соседнем положении соответственно y_2 и $\vec{\upsilon}_2$. При переходе из положения y_1 в положение y_2 сила тяжести и сила упругости в соответствии с теоремой о потенциальной совершат работу, равную энергии разности соответствующей потенциальной энергии:

$$A_{т12}=E_{т1}-E_{т2}. \qquad A_{упр12}=E_{упр1}-E_{упр2}. \tag{11}$$

Результирующая работа, в соответствии с теоремой о кинетической энергии, равна изменению кинетической энергии тела:

$$A_{рез12}=E_{к2}-E_{к1}. \tag{12}$$

С другой стороны результирующая работа равна алгебраической сумме работ силы тяжести и силы упругости:

$$A_{рез12}=A_{т12}+A_{упр12}. \tag{13}$$

Подставляя (11) и (12) в (13) получим:

$$E_{к2}-E_{к1}=E_{т1}-E_{т2}+E_{упр1}-E_{упр2}, \quad \Rightarrow \quad E_{к1}+E_{т1}+E_{упр1}=E_{к2}+E_{т2}+E_{упр2}.$$

Напомним, что сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется её механической энергией, то есть мы получили, что механическая энергия системы тел, где действуют только сила тяжести и/или сила упругости, в двух произвольных положениях одинакова:

$$\boxed{E_1 = E_2} \tag{14}$$

Это формула отражает закон ***сохранения механической энергии***.

В замкнутой системе тел, где действуют только консервативные силы, механическая энергия системы тел остаётся неизменной с течением времени.

✍ **Пример 1.** Тело свободно падает с высоты h. Какой скорости оно достигнет к моменту приземления? Трением о воздух пренебречь.

➥**Решение.** Начало отсчёта возьмем на поверхности земли, ось направим вверх (рис. 10). Механическая энергия в течение всего времени движения сохраняется, т. к. действует только сила тяжести. Запишем закон сохранения энергии для верхнего и нижнего положений:

$$E_в=E_н;\ E_в=mgh;\ E_н=\frac{m\upsilon_н^2}{2};\ \Rightarrow\ mgh=\frac{m\upsilon_н^2}{2};\ \upsilon_н=\sqrt{2gh}.$$ ↩

✓ **Ответ.** К моменту приземления скорость тела достигнет значения $\upsilon_н=\sqrt{2gh}$. Этот результат ранее был получен и по формулам кинематики.

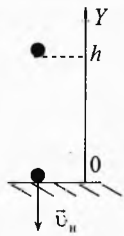


Рис. 10. *Падение с высоты*

✍ **Пример 2.** Шар массой m=3 кг удерживается на высоте y_1=3 м над столиком, укрепленным на пружине. Найти максимальное сжатие пружины при свободном падении шара на столик, если жесткость пружины k=700 Н/м. Массой столика и пружины пренебречь.

Дано.
m=3 кг;
y_1=3 м;
k=700 Н/м;
g=10 м/с^2;

$|y_2|$ – ?

➥**Решение.** Ось Y направим вверх (рис. 11), тогда потенциальная энергия силы тяжести вычисляется по формуле:

$$E_т=mgy.$$

Начало отсчёта на оси возьмем на уровне столика при недеформированной пружине, тогда потенциальная энергия силы упругости будет вычисляться по формуле:

$$E_{упр}=\frac{ky^2}{2}.$$

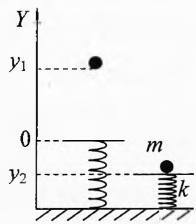


Рис. 11. *Максимальное сжатие*

Кинетическая энергия шара в верхнем и нижнем положениях равна 0:

$$E_{кв}=0;\quad E_{кн}=0.$$

В процессе движения шарика на него действует сначала только сила тяжести, а после соприкосновения со столиком и сила упругости. Обе силы консервативные, поэтому можно применять закон сохранения механической энергии, причём наверху она обусловлена только потенциальной энергией силы тяжести, а внизу потенциальной энергией силы тяжести и силы упругости:

$$E_в=E_н;\quad E_в=mgy_1;\quad E_н=mgy_2+\frac{ky_2^2}{2};\quad \Rightarrow\quad mgy_1=mgy_2+\frac{ky_2^2}{2}.$$

$$k\cdot(y_2)^2+2mg\cdot y_2-2mgy_1=0;\qquad y_2=\frac{-mg\pm\sqrt{(mg)^2+2mgky_1}}{k}.$$

Поскольку $y_2<0$, то берем знак «–»: $y_2=\dfrac{-mg-\sqrt{(mg)^2+2mgky_1}}{k}.$

$$|y_2|=\frac{30+\sqrt{(30)^2+2\cdot 30\cdot 700\cdot 3}}{700}=0{,}55\text{ м.}$$

✓ **Ответ.** Максимальное сжатие пружины составит 55 см.

§ 46. Закон изменения механической энергии

На систему тел могут действовать не только консервативные силы, но неконсервативные: сила трения скольжения, сила трения качения, сила вязкого трения, и др.

Под действием внешних сил и сил трения механическая энергия системы может не сохраняться. Работа силы трения всегда приводит к уменьшению суммарной механической энергии системы тел, а работа внешней силы может как уменьшить, так и увеличить механическую энергию системы тел.

Если силы трения в системе отсутствуют, то энергия её изменяется на значение работы внешних (сторонних) сил

$$\Delta E=A_{ст},\qquad \text{если}\qquad A_{тр}=0.$$

Если суммарная работа внешних сил равна нулю, то изменение энергии системы тел равно работе сил трения

$$\Delta E=A_{тр},\qquad \text{если}\qquad A_{ст}=0.$$

В общем случае работа сторонних сил и сил трения равна изменению механической энергии системы тел:

$$\boxed{A_{ст}+A_{тр}=\Delta E}. \qquad (15)$$

Под сторонними силами понимаются все неконсервативные силы, за исключением силы трения, а также те консервативные силы, потенциальная энергия которых не учтена в механической энергии системы тел.

Если сторонняя сила совершает положительную работу, а силы трения такую же по модулю, но отрицательную, то механическая энергия системы не будет меняться. Например, автомобиль, едущий по горизонтальной дороге с постоянной скоростью, имеет постоянную механическую энергию. В данном случае работа двигателя (сторонней силы) равна по модулю суммарной работе сил трения и сил сопротивления воздуха, но имеет противоположный знак.

Очевидно, что закон сохранения механической энергии (14) является частным случаем более общего закона изменения энергии (15) для случая, когда работа сил трения и работа сторонних сил равны нулю, или их суммарная работа равна нулю.

Формулу (15) можно записать в другом виде:

$$\boxed{E_1 + A_{\text{ст}} + A_{\text{тр}} = E_2}.$$

Если к начальной механической энергии прибавить работу сторонних сил и/или сил трения, то получим значение конечной механической энергии системы тел.

✍ **Пример 3.** В автомобиле, движущемся по горизонтальной дороге со скоростью υ_0=90 км/ч, отключив двигатель, применили аварийное торможение до полной остановки υ=0. Чему равен тормозной путь и время торможения, если коэффициент трения шин о дорогу μ=0,6?

↪**Решение.** Согласно теореме о кинетической энергии работа силы трения равна изменению кинетической энергии:

$$A_{\text{тр}}=E_{\text{к}}-E_{\text{к}0} \quad \text{или} \quad F_{\text{тр}} \cdot S \cdot \cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

где $\alpha=180^\circ$ – угол между перемещением $\vec{S}$ автомобиля и силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Учитывая, что при проскальзывании $F_{\text{тр}} = \mu mg$, получим:

$$-\mu mg \cdot S = 0 - \frac{m\upsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}; \qquad S = \frac{(25\,\text{м}/\text{с})^2}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}8\,\text{м}/\text{с}^2} \approx 55\,\text{м}.$$

Тормозной путь пропорционален квадрату скорости (или кинетической энергии) и обратно пропорционален коэффициенту трения (или силе трения). Поэтому опасно ездить с большой скоростью в гололед или влажную погоду.

Согласно второму закону Ньютона автомобиль тормозит с постоянным ускорением $a = \frac{F_{тр}}{m}$. Найдём время торможения:

$$\upsilon = \upsilon_0 - at; \quad 0 = \upsilon_0 - at \;\Rightarrow\; t = \frac{\upsilon_0}{a} = \frac{m\upsilon_0}{F_{тр}} = \frac{\upsilon_0}{\mu g},\; t \approx 4{,}2 \text{ с}.$$

Итак, время торможения прямо пропорционально начальной скорости (или импульсу) автомобиля и обратно пропорционален коэффициенту трения (или силе трения).↩

✍ **Пример 4.** Санки массой m соскальзывают с горки высотой h. Какую работу должен совершить мальчик, чтобы втащить их на горку с того места, где они остановятся, по той же траектории, прилагая силу параллельно поверхности?

↪**Решение.** Во время спуска и движения по горизонтальной части траектории на санки действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 12). Так как $\vec{N}$ всегда перпендикулярна перемещению, то её работа равна нулю. Запишем закон сохранения (изменения) энергии для этого случая, сравнив энергию в начале движения и в момент остановки.

$$A_{тр} = \Delta E_{в.н.},$$

где $\Delta E_{в.н.}$ – изменение энергии при движении сверху вниз до остановки.

Тогда

$$A_{тр} = 0 - mgh.$$

Начало отсчёта взято на уровне основания горки. Ось направлена вверх. Полученное уравнение показывает, что механическая энергия уменьшилась от mgh до 0 за счёт работы силы трения ($A_{тр}<0$) при спуске и на горизонтальном участке, и в конечном счёте превратилась во внутреннюю энергию (в тепло).

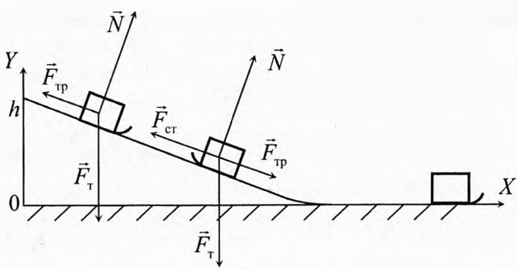


Рис. 12. *Любишь кататься, люби и саночки возить*

При возвращении санок назад действует, кроме всего перечисленного, сторонняя сила мальчика. В этом случае, закон изменения энергии будет

$$A_{ст} + A_{тр} = \Delta E_{н.в}.$$

Работа силы трения при подъеме будет такой же, как и при спуске, так как движение происходит по той же траектории и во всех соответственных точках $F_{тр}$ будет такая же по модулю как при спуске и направлена против движения

Будем считать, что при малой скорости и достаточно большом радиусе закругления можно пренебречь увеличением силы реакции опоры на закруглённом участке спуска, обусловленного центростремительным ускорением. Либо для однозначности будем считать, что скорости движения на данном участке при подъёме и спуске были одинаковыми.

Изменение механической энергии санок при движении снизу вверх:

$$\Delta E_{н.в.}=mgh-0.$$

С учетом сказанного:

$$A_{ст} - mgh=mgh, \qquad A_{ст}=2mgh.$$

✓ **Ответ.** Для возвращения санок на гору мальчик должен совершить работу, равную $2mgh$! По этому случаю вспоминаются слова из песни: «Если ты кататься любишь – люби саночки возить».

§ 47. Коэффициент полезного действия

Для совершения работы используются простые и сложные механизмы. Работа, затрачиваемая при решении данной задачи, как правило, больше минимальной (полезной) работы. Это связано с тем, что невозможно из-за наличия сил трения и других причин передавать всю затрачиваемую энергию на совершение полезной работы. Для того чтобы характеризовать эффективность механизма, вводится понятие коэффициента полезного действия.

> ***Коэффициента полезного действия*** *(КПД) – это скалярная величина, характеризующая эффективность механизма по совершению полезной работы. КПД равно отношению полезной (необходимой) работы к работе (энергии), затрачиваемой за то же время.*

КПД обозначается буквой η (эта)

$$\boxed{\eta = \frac{A_{п}}{A_{з}}}; \tag{16}$$

или выраженное в процентах:

$$\eta = \frac{A_{п}}{A_{з}} \cdot 100\%. \tag{17}$$

КПД – безразмерная величина, согласно (16), вычисляется в частях от единицы или, согласно (17), в процентах от 100%.

Какая работа является полезной? Полезная работа – эта та работа, которую совершенно необходимо выполнить для решения данной задачи. Как правило, это работа против силы тяжести. Например, нам нужно погрузить пианино на грузовой автомобиль. Можно его поднять на руках и поставить в кузов, но это очень тяжело. Можно расположить наклонно доски и вкатить его на колесиках, тем самым приложив значительно меньшее усилие (но пройдя больший путь). Однако ликвидировать силу тяжести на время затаскивания пианино никто не в состоянии. Поэтому работа против силы тяжести является абсолютно необходимой, а, следовательно, «полезной».

✍ **Пример 5.** Определить КПД при подъеме груза по наклонной плоскости, если коэффициент трения μ, угол наклона плоскости к горизонту α.

Решение. КПД: $\eta = \dfrac{A_п}{A_з}$.

Полезная работа – работа по преодолению силы тяжести. Эту работу необходимо совершить при любом способе подъема:

$$A_п = mgh.$$

Затраченная для этой цели работа:

$$A_з = F_{ст} \cdot S, \text{ где } S = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

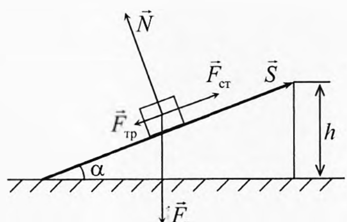


Рис. 13. *КПД наклонной плоскости*

При равномерном подъеме в случае, когда сторонняя сила направлена вдоль наклонной плоскости (рис. 13):

$$\begin{cases} F_{ст} = mg\sin\alpha + F_{тр}, \\ N = mg\cos\alpha, \\ F_{тр} = \mu \cdot N; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_{ст} = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{mgh}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha}} = \frac{1}{1 + \mu ctg\alpha}.$$

✓ **Ответ.** При подъеме тела по наклонной плоскости КПД $\eta = \dfrac{1}{1 + \mu\mathrm{ctg}\alpha}$.

§ 48. Мощность

Для того чтобы характеризовать быстроту преобразования энергии за счёт приложенной силы, вводится скалярная величина мощность. Мощность, развиваемая двигателем, в разные моменты времени может быть различной, т. е. мощность – мгновенная характеристика.

***Мощность силы** – это скалярная величина, характеризующая быстроту преобразования энергии тела за счёт работы, приложенной к телу силы. Мощность равна отношению малой работы к малому промежутку времени, за который она совершена.*

$$\boxed{N = \frac{\Delta A}{\Delta t}}. \qquad (18)$$

Единица измерения мощности в СИ ватт (Вт). Если механизм совершает работу 1 Дж за 1 с, то его мощность равна 1 Вт.

Малая работа равна

$$\Delta A = F \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (18) получим:

$$N = \frac{F \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha}{\Delta t}.$$

Учитывая, что $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \upsilon$, получим:

$$\boxed{N = F \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha}.$$

***Мощность** равна произведению силы, скорости и косинуса угла между силой и скоростью.*

Если сила и скорость совпадают по направлению, то

$$\boxed{N = F \cdot \upsilon} \quad \text{при} \quad \alpha = 0.$$

Если мощность двигателя постоянна, то более целесообразно её вычислять по формуле

$$\boxed{N = \frac{A}{t}}.$$

Наряду с основной единицей мощности Вт, её кратными и дольными единицами 1 кВт=1000 Вт, 1 МВт=10^6 Вт, 1 мВт=0,001 Вт и др., используется старая мера мощности – лошадиная сила (л. с.). Одна лошадиная сила равна мощности, развиваемой на поверхности Земли при равномерном подъеме груза массой 75 кг на высоту 1 м за 1 с при стандартном ускорении свободного падения (9,80665 м/с^2):

$$1 \text{ л. с.} = \frac{mgh}{t} = \frac{75 \text{ кг} \cdot 9{,}80665 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ с}} = 735{,}49875 \text{ Вт}.$$

Полученное значение является точным значением *метрической лошадиной силы* по определению. Итак,

$$\boxed{1\ \text{л.с.} = 735{,}49875\ \text{Вт}}, \quad \text{или} \quad \boxed{1\ \text{л.с.} \approx 735{,}5\ \text{Вт}}.$$

В быту лошадиная сила используется для расчёта стоимости транспортного налога и страхового полиса на автомобили – чем мощнее двигатель автомобиля, тем больше налог и дороже страховка.

Историческая справка о введении в физику понятий работа и энергия. В 1774 г. Петербургский математик академик Семён Кириллович Котельников (1723–1806) ученик Эйлера, автор первого русского учебника по механике, писал: «Действие махины, или действующия посредством ея силы, равно тягости, умноженной на перейденный ею путь». В то время общепринятого названия физической величины «работы» не было; её называли механическим эффектом, или моментом деятельности, или виртуальным моментом.

Гюстав Госпар Кориолис (1792–1843)

Жан Виктор Понселе (1788–1867)

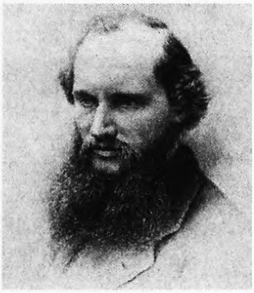
Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716)

Один из ста тысяч пленных французской армии, Жан Виктор Понселе, находясь в Саратове, увлекся наукой и даже написал трактат по математике. Вернувшись из плена через 2 года на родину, он продолжал занятия наукой, а в 1826 г. написал «Курс механики, примененной к машинам». В своей книге Понселе подробно рассматривает пространственную характеристику действия силы. Он назвал её словом «работа». Свой термин обосновал тем, что она «совпадает с тем, как на практике оплачивается всякая работа, связанная с поднятием тяжестей, например выкачиванием воды из шахт, поднятием земли или каких-либо материалов на некоторую высоту». Во всех этих случаях учитывается вес груза и совершённый путь в соответствии с поговоркой: «Бери больше, кидай дальше». Понселе говорил: «Работа есть то, что оплачивается». Его поддержал другой французский ученый Гюстав Госпар Кориолис. Постепенно название «работа» утвердилось.

В конце XVII века немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц ввел в науку величину, равную mv^2, и назвал её «живой силой». Энергией (от лат. energeia – действие, деятельность) её впервые назвал английский ученый Томас Юнг в 1807 г. Однако тогда это название не прижилось, и только в 1829 г. Кориолис разделил её на два, получив формулу $\frac{m\upsilon^2}{2}$. В середине XIX в. шотландский инженер и физик Уильям Джон Макуорн Ранкин, определяя понятие энергия, писал: «Термин «энергия» предполагает любые состояния и субстанции, которые заключаются в способности производить работу». Величину $\frac{m\upsilon^2}{2}$ назвал «актуальной энергией». Кинетической эту энергию назвал несколько позже английский ученый Уильям Томсон, получивший за свои научные заслуги от английской королевы титул лорд Кельвин.

Томас Юнг (1773–1829)

Уильям Джон Макуорн Ранкин (1820–1872)



Уильям Томсон (лорд Кельвин) (1824–1907)

Понятие потенциальной энергии, обобщенное на разные случаи взаимодействия, ввел немецкий ученый-физик Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц. В 1847 г. Гельмгольц сделал доклад на заседании физического общества, вписавший его имя в историю науки как одного из авторов закона сохранения энергии. Он ввел в науку понятие потенциальной энергии, называя её «напряженной силой», а кинетическую энергию – «живой силой». В своем историческом докладе он впервые доказывает, что «когда тела действуют друг на друга силами притяжения или отталкивания, независящими от времени и скорости, то сумма живых и напряженных сил остаётся постоянной». Так впервые сформулирован закон сохранения энергии.

Идеи Гельмгольца не сразу были приняты современниками. Старшее поколение ученых скептически отнеслось к понятию энергии, считая, что физика основывается на понятии силы. Однако благодаря работам У. Ранкина, У. Томсона и других к 1860 г. закон сохранения энергии нашёл всеобщее признание и вскоре стал краеугольным камнем всего естествознания.

Герман Гельмгольц (1821–1894)

Упражнения

1 Какую работу совершает двигатель автомобиля массой m=1,3 т при старте с места на первых S=75 м пути, если это расстояние он проходит за время t=10 с? Коэффициент трения качения μ=0,05.

7 Какую работу совершит мальчик, стоящий на гладком льду, сообщив санкам скорость υ=4 м/с относительно льда, если масса санок m=4 кг, а масса мальчика M=20 кг? Трением пренебречь.

3 Какую работу нужно совершить, чтобы тонкую доску массой m высотой h и толщиной d перевести из горизонтального положения в вертикальное? А толстую доску?

4 Поезд массой $m=5\cdot10^5$ кг поднимается со скоростью υ=36 км/ч по уклону высотой h=10 м на каждый S=1 км пути. Коэффициент трения качения μ=0,003. Определить мощность, развиваемую тепловозом.

5 Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить с помощью ворота из колодца ведро воды массой m=10 кг цепью с линейной плотностью $\rho_л$=0,6 кг/м? Расстояние от ворота до поверхности воды h=5 м. Трением пренебречь.

6 Тело брошено вертикально вверх со скоростью υ_0=49 м/с. На какой высоте H его кинетическая энергия будет равна потенциальной?

7 Вагон массой M=20 т, двигаясь со скоростью υ=0,5 м/с, ударяется о два неподвижных пружинных буфера. Найти наибольшее сжатие буферов x, если жесткость одной пружины k=5 МН/м. Трением пренебречь.

8 Тело массой m=0,5 кг двигалось по столу с начальной скоростью υ_0=2 м/с. Пройдя расстояние S=2 м, оно достигло края стола и упало на пол. При ударе выделилось Q=5 Дж тепла. Коэффициент трения между телом и столом μ=0,05. Найти высоту стола.

9 В покоящийся шар массой M=1 кг, подвешенный на длинном жестком стержне, закрепленном в подвесе на шарнире, попадает пуля массой m=0,01 кг. Она летит под углом α=45° к линии стрежня. Удар центральный*. После удара пуля застревает в шаре, и они вместе, отклонившись, поднимаются на высоту h=0,12 м. Найти скорость пули перед ударом.

10 Молот массой m=1,5 т ударяет по раскаленной болванке, лежащей на наковальне, и деформирует её. Масса наковальни с болванкой M=20 т. Определить КПД при ударе молота, удар абсолютно неупругий. Считать работу, совершённую при деформации, полезной.

11 Колодец, площадь дна которого S и глубина H, заполнен наполовину водой. Насос выкачивает воду и подаёт её на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R. Какую работу совершит насос, если выкачает всю воду из колодца за время t? Какова средняя скорость струи воды?

12 Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти максимальную разность сил натяжения нити.

---

* ***Центральный удар*** *– удар, при котором относительная скорость тел до удара направлена вдоль линии, соединяющей центры масс, а поверхность соприкосновения перпендикулярна этой линии.*

13 Один грузик подвешен на нерастяжимой нити длиной l, а другой на жестком невесомом стержне такой же длины. Какие минимальные скорости надо сообщить грузикам, чтобы они вращались в вертикальной плоскости?

14 В неподвижный гладкий шар ударяется нецентрально другой такой же шар. Под каким углом они разлетятся, если шары абсолютно упругие?

15* Доказать, что после центрального упругого соударения шаров массами m_1 и m_2, движущихся с произвольными скоростями $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{u}_0$, модуль их относительной скорости не изменится.

16* У стены на гладком полу стоит брусок массы M, внутри которого вырезан гладкий полуцилиндрический жёлоб радиуса R. Наверху желоба удерживают маленькую шайбу массы m (рис. 14). Её отпускают. Вычислить максимальную скорость бруска, а также высоту, на которую поднимется шайба через один период.

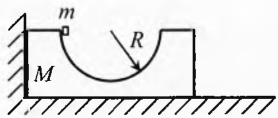


Рис. 14. *Шайба в жёлобе*

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $A=F_д S$; $ma=F_д-F_{тр}$; $S=\dfrac{at^2}{2}$; $F_{тр}=\mu mg$; $\Rightarrow A=m\left(\dfrac{2S}{t^2}+\mu g\right)\cdot S=195$ кДж.

7 $0=m\upsilon-Mu$; $A=E_2-E_1=\dfrac{m\upsilon^2}{2}+\dfrac{Mu^2}{2}-0=\dfrac{m\upsilon^2}{2}(1+\dfrac{m}{M})=38{,}4$ Дж.

3 $A_1=mg(h/2-d/2)$; $A_2=0{,}5mg(\sqrt{h^2+d^2}-d)$.

4 $N=F_{тр}\cdot\upsilon+\dfrac{mgh}{t}=\mu mg\cdot\upsilon+mgh\dfrac{\upsilon}{S}$; $\Rightarrow$ $N=mg\upsilon(\mu+\dfrac{h}{S})=650$ кВт.

5 $A=(m+\rho_л h/2)gh\approx564$ Дж.

6 $E_0=E_к+E_т$, $E_к=E_т$, $E_т=mgH$; $\Rightarrow$ $\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}=2mgH$; $H=\dfrac{\upsilon_0^2}{4g}\approx61$ м.

7 $\dfrac{M\upsilon^2}{2}=2\cdot\dfrac{kx^2}{2}$; $\Rightarrow$ $x=\upsilon\cdot\sqrt{\dfrac{M}{2k}}=2{,}2$ см.

8 См. рис. 15. 1) $E_{к2}-E_{к1}=A_{тр}$; $A_{тр}=-F_{тр}S=-\mu mgS$;

$\Rightarrow$ $\dfrac{m\upsilon^2}{2}-\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}=-\mu mgS$; $\upsilon^2=\upsilon_0^2-2\mu gS$.

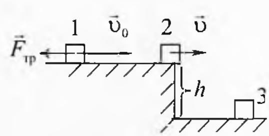


Рис. 15. *Падение со стола*

2) $E_2=E_{т2}+E_{к2}=mgh+\dfrac{m\upsilon^2}{2}=mgh+\dfrac{m}{2}(\upsilon_0^2-2\mu gS)$

3) $E_2=E_3+Q$; $E_3=0$; $\Rightarrow$ $Q=mgh+\dfrac{m}{2}(\upsilon_0^2-2\mu gS)$; $\Rightarrow$

$h=\dfrac{Q}{mg}-\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}+\mu S$; $h=0{,}9$ м.

9 $m\upsilon\cdot\sin\alpha=(M+m)u$, $\dfrac{(M+m)u^2}{2}=(M+m)gh$; $\Rightarrow$ $\upsilon=\dfrac{M+m}{m\sin\alpha}\cdot\sqrt{2gh}=220$ м/с.

10 $\eta=\dfrac{|\Delta E|}{E_1}$; $E_1=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$; $m\upsilon=(m+M)u$; $E_2=\dfrac{(m+M)u^2}{2}$; $|\Delta E|=E_1-E_2$;

$\Rightarrow\ \eta=\dfrac{M}{M+m}\approx 93\%$.

11 Объемный расход воды в трубе: $\dfrac{V}{t}=\pi R^2\cdot\upsilon$, где $V=S\dfrac{H}{2}$.

Значит, средняя скорость струи равна $\upsilon=\dfrac{SH}{2\pi R^2 t}$.

По закону изменения энергии: $A=\Delta E_к+\Delta E_т$; $\Delta E_к=\dfrac{m\upsilon^2}{2}=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{SH}{2\pi R^2 t}\right)^2$.

Начало отсчёта возьмем на дне колодца. Центр масс воды вначале находится на высоте $H/4$, а в конце – на высоте H. Тогда изменение потенциальной энергии воды, обусловленной силой тяжести, равно: $\Delta E_т=mg\left(H-\dfrac{H}{4}\right)$.

Масса всей воды $m=\rho\cdot V=\rho\cdot S\cdot\dfrac{H}{2}$.

Окончательно получим: $A=\dfrac{\rho SH}{2}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SH}{2\pi R^2 t}\right)^2+\dfrac{3}{4}Hg\right)$.

12 $m\dfrac{\upsilon_1^2}{R}=T_1-mg$; $m\dfrac{\upsilon_2^2}{R}=T_2+mg$; $\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}+mg2R$; $\Rightarrow$ $T_1-T_2=6mg$.

13 $\upsilon_{01}=\sqrt{5gl}$; $\upsilon_{02}=2\sqrt{gl}$.

14 Законы сохранения импульса и энергии для столкновения:

$$m\vec{\upsilon}_0=m\vec{\upsilon}_1+m\vec{\upsilon}_2 \quad\text{и}\quad \frac{m\upsilon_0^2}{2}=\frac{m\upsilon_1^2}{2}+\frac{m\upsilon_2^2}{2}.$$

Сокращая массу шаров, получим:

$$\vec{\upsilon}_0=\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_2 \quad\text{и}\quad \upsilon_0^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2.$$

Первое уравнение означает, что векторы скоростей $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ составляют треугольник, второе – что для этого треугольника выполняется теорема Пифагора, значит он прямоугольный: угол между векторами $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ равен 90°.

15 Законы сохранения энергии и импульса для столкновения:

$$\frac{m_1\upsilon_0^2}{2}+\frac{m_2u_0^2}{2}=\frac{m_1\upsilon^2}{2}+\frac{m_1u^2}{2} \quad\text{и}\quad m_1\vec{\upsilon}_0+m_2\vec{u}_0=m_1\vec{\upsilon}+m_2\vec{u}.$$

Пусть ось X направлена вдоль центров шаров. При центральном ударе начальные скорости $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{u}_0$ и силы взаимодействия шаров будут направлены вдоль этой оси. Значит, скорости тел будут изменяться только вдоль этой оси, поэтому, конечные скорости $\vec{\upsilon}$ и $\vec{u}$ тоже будут направлены вдоль оси X:

$$\frac{m_1\upsilon_{0x}^2}{2}+\frac{m_2u_{0x}^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_x^2}{2}+\frac{m_1u_x^2}{2} \quad\text{и}\quad m_1\upsilon_{0x}+m_2u_{0x}=m_1\upsilon_x+m_2u_x.$$

Перенесём в одну сторону слагаемые с m_1, а в другую – слагаемые с m_2:

$$\begin{cases} m_1(\upsilon_{0x}^2-\upsilon_x^2)=m_2(u_x^2-u_{0x}^2); \\ m_1(\upsilon_{0x}-\upsilon_x)=m_2(u_x-u_{0x}); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(\upsilon_{0x}-\upsilon_x)(\upsilon_{0x}+\upsilon_x)=m_2(u_x-u_{0x})(u_x+u_{0x}); \\ m_1(\upsilon_{0x}-\upsilon_x)=m_2(u_x-u_{0x}). \end{cases}$$

Разделив предпоследнее уравнение на последнее, получим, что модуль относительной скорости шаров не изменится:

$$\upsilon_{0x}+\upsilon_x=u_x+u_{0x} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_{0x}-u_{0x}=-(\upsilon_x-u_x) \quad\Rightarrow\quad \vec{\upsilon}_0-\vec{u}_0=-(\vec{\upsilon}-\vec{u}).$$

16 Брусок начнёт движение после достижения шайбой нижней точки. Скорость шайбы в этот миг найдём, используя закон сохранения энергии:

$$mgR=\frac{m\upsilon_0^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon_0=\sqrt{2gR}. \tag{20}$$

Скорость бруска достигнет максимума, когда шайба вернется вновь в нижнюю точку. Согласно закону сохранения импульса и энергии,

$$m\upsilon_0=Mu-m\upsilon. \tag{21}$$

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\frac{Mu^2}{2}+\frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{22}$$

Преобразуем уравнения (21) и (22) к виду:

$$\begin{cases} m(\upsilon_0^2-\upsilon^2)=Mu^2, \\ m(\upsilon_0+\upsilon)=Mu; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m(\upsilon_0+\upsilon)(\upsilon_0-\upsilon)=Mu^2, \\ m(\upsilon_0+\upsilon)=Mu. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим:

$$\upsilon_0-\upsilon=u, \quad\Rightarrow\quad \upsilon=\upsilon_0-u. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21) с учетом (20), получим: $u=\dfrac{2m\sqrt{2gR}}{m+M}$.

Через один период колебаний шайба будет двигаться с такой же скоростью, как и брусок (шайба будет двигаться вместе с бруском, находясь в верхней точке своей траектории). Согласно закону сохранения энергии и импульса:

$$mgR=mgh+\frac{(m+M)u_1^2}{2}, \quad m\upsilon_0=(m+M)u_1; \Rightarrow u_1=\frac{m\upsilon_0}{(m+M)}, \quad h=\frac{M\cdot R}{M+m}.$$

Глава 6. Гидромеханика

Сомнение доставляет мне не меньшее наслаждение, чем знание.
Данте Алигьери

> ***Гидромеханика*** *– раздел механики, в котором изучается движение и взаимодействие жидкостей.*

Жидкости могут находиться в состоянии покоя относительно Земли, но могут и двигаться. Характер движения жидкости может быть самым различным. Можно выделить два крайних вида: ламинарное и турбулентное течения.

> ***Ламинарное*** *(лат. lamina – лист, пластина, полоска) – спокойное течение вязкой жидкости, когда отсутствует перемешивание между её соседними слоями. Давление в каждой точке пространства и скорость жидкости не изменяются с течением времени.*
> ***Турбулентное*** *(лат. turbulentus – бурный, беспорядочный) – течение жидкости, сопровождающееся завихрениями. При турбулентном движении скорость и давление в каждой точке потока жидкости хаотически пульсируют.*

§ 49. Гидростатика

> ***Гидростатика*** *– это часть гидромеханики, в которой изучается равновесие жидкостей и газов, а также равновесие находящихся в них тел.*

Медленное изменение формы жидкости без изменения её объема может происходить под действием малых сил, ибо в жидкости нет трения покоя.

В поле силы тяжести свободно падающие жидкие тела принимают шарообразную форму благодаря силам поверхностного натяжения. При наличии атмосферы жидкие тела принимают более обтекаемую форму, зависящую от соотношения сил сопротивления и сил поверхностного натяжения.

Покоящаяся жидкость в поле тяжести принимает форму сосуда, а её поверхность горизонтальна, независимо от формы сосуда. Если сосуд с жидкостью движется ускоренно относительно инерциальной системы отсчёта, то поверхность жидкости на элементарном участке располагается под некоторым углом, зависящим от ускорения.

Давление. Для того чтобы характеризовать распределение силы по поверхности, к которой она приложена, вводится скалярная физическая величина «*давление*». Давление на элементарном участке равно отношению модуля силы δF, действующей на перпендикулярную площадку, к значению малой площади $\delta S_{\perp}$ этой поверхности

$$p = \frac{\delta F}{\delta S_{\perp}}.$$

Единица измерения давления в СИ – паскаль: $1\,\text{Па} = \dfrac{1\,\text{Н}}{1\,\text{м}^2}$.

Если сила распределена равномерно по поверхности, то давление будет одинаково на всех элементарных участках поверхности и его можно вычислить как отношение силы к площади поверхности, перпендикулярной силе:

$$\boxed{p = \frac{F}{S_{\perp}}}.$$

Давление 1 Па означает, что на данном элементарном участке поверхности сила давит так же, как и равномерно распределенная сила 1 Н давит на перпендикулярную ей поверхность площадью 1 м^2.

Наиболее известная единица давления 1 мм рт. ст. носит название 1 Тор в честь итальянского ученого Э. Торричелли, впервые измерившего атмосферное давление:

$$1\ \text{Тор} \equiv 1\ \text{мм рт. ст.} = 133{,}3\ \text{Па}.$$

Это означает, что ртутный столбик высотой 1 мм оказывает такое же давление, как равномерно распределенная сила 133,3 Н на 1 м^2 поверхности, перпендикулярной этой силе.

Нормальное атмосферное давление:

$$1\ \text{атм} = 101325\ \text{Па} = 760\ \text{мм рт. ст.} \equiv 760\ \text{Тор}.$$

Это означает, что вся толща Земной атмосферы создаёт такое же давление, как вертикальный столбик ртути высотой 760 мм.

В технике применяется единица 1 мм вод. ст. Как и для ртути, здесь рассчитывается давление однородного столбика воды высотой 1 мм:

$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \rho g h.$$

$$1\ \text{мм вод. ст.} = 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 9{,}8\ \text{Па}.$$

Существует устаревшая единица давления – техническая атмосфера, равная давлению, которое оказывает тело массой 1 кг в поле тяжести Земли на инерциальную горизонтальную подставку площадью 1 см^2:

$$1\ \text{ат} = \frac{1\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2}{10^{-4}\ \text{м}^2} = 98\ \text{кПа}.$$

Блез Паскаль
(1623–1662)

Таким образом, физическая атмосфера (1 атм) отличается от технической (1 ат) всего на 3,3%. И для многих школьных задач их можно считать одинаковыми.

Закон Паскаля. На определенной глубине давление в данной жидкости не зависит от ориентации площадки, то есть одинаково по всем направлениям. Если с помощью поршня мы создадим дополнительное давление в сосуде с жидкостью или газом (например, известный опыт с шаром Паскаля (рис. 1)), то достаточно быстро (со скоростью звука в данной среде) давление увеличится на одинаковую величину на всех уровнях.

$$p'_A = p_A + \Delta p,\ p'_B = p_B + \Delta p,\ p'_C = p_C + \Delta p,\ p'_D = p_D + \Delta p$$

Все молекулы стремятся (к свободе) к состоянию с наименьшей энергией взаимодействия. Поэтому если где-то давление возросло, а значит, возросла энергия упругого отталкивания молекул, то они стремятся сдвинуться туда, где сила отталкивания поменьше. В силу молекулярного хаоса перераспределение молекул произойдет таким образом, что изменение давления во всех точках окажется одинаковым.

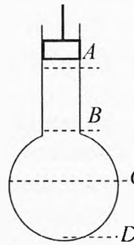


Рис. 1. *Шар Паскаля*

Давление, производимое на жидкость или газ, передаётся на одинаковое значение в каждую точку жидкости или газа.

Этот закон был открыт в 1653 г. (опубликован лишь в 1663 г.) французским математиком, физиком и философом Б. Паскалем, и носит его имя: ***закон Паскаля***.

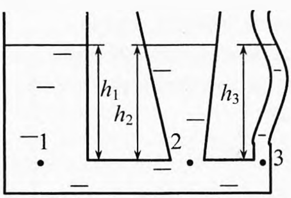


Рис. 2. *Однородная жидкость в сообщающихся сосудах*

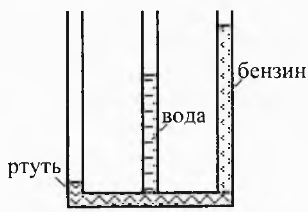


Рис. 3. *Ртуть выдавливает лёгкие жидкости*

На применении закона Паскаля основано действие многих гидравлических устройств: прессов, домкратов, гидроприводов в комбайнах и тракторах, тормозных систем автомобилей и т.п.

Следствием закона Паскаля является то, что в сообщающихся сосудах с однородной жидкостью открытый уровень жидкости во всех сосудах одинаков (рис. 2). А давление на одинаковом уровне в сообщающихся сосудах одинаково независимо от их формы.

Действительно,

$$p_1=\rho_1 g h_1+p_а;\ p_2=\rho_2 g h_2+p_а;\ p_3=\rho_3 g h_3+p_а.$$

Но в точках 1, 2 и 3: $p_1=p_2=p_3$; если бы было не так, то жидкость перетекала бы из одного сосуда в другой. И в случае однородной жидкости ($\rho_1=\rho_1=\rho_3=\rho$):

$$\rho g h_1=\rho g h_1=\rho g h_3.$$

Это возможно только при $h_1=h_2=h_3$.

Если же плотности жидкостей в разных сосудах различны, то свободные уровни в них будут находиться на разных высотах. Причём наибольшая высота – у жидкости с наименьшей плотностью. Например, если в трёх трубках находятся ртуть, вода и бензин, то соотношение уровней будет, как представлено на рис. 3.

§ 50. Сила Архимеда

Архимед
(287–212 до н. э.)

В инерциальной системе отсчёта на тело, находящееся в жидкой, газообразной или сыпучей среде (при вибрации), в поле силы тяжести действует вертикально вверх выталкивающая сила, называемая ***силой Архимеда***. Сила Архимеда равна разности сил давления со стороны среды на верхнюю и нижнюю грани тела (рис. 4):

$$\vec{F}_А=\vec{F}_н+\vec{F}_в \quad \text{или по модулю} \quad F_А=F_н-F_в.$$

Действительно, возьмем для определенности тело цилиндрической формы и поместим его в сосуд с жидкостью ρ_c. А сосуд с жидкостью пусть стоит на инерциальной подставке. Давление на определенном уровне одинаково в любой точке. Поэтому из соображения симметрии ясно, что суммарная горизонтальная сила давления на тело равна нулю.

$$F_н=p_н\cdot S,\quad p_н=p_а+\rho_c g h_н,\quad F_н=(p_а+\rho_c g h_н)\cdot S;$$

$$F_в=p_в\cdot S,\quad p_в=p_а+\rho_c g h_в,\quad F_в=(p_а+\rho_c g h_в)\cdot S;$$

$$F_А=(p_a+\rho_c g h_н)\cdot S-(p_а+\rho_c g h_в)\cdot S=\rho_c g(h_н-h_в)\cdot S,$$

Учитывая, что $h_н-h_в=H$ – высота тела, получим:

$$F_А=\rho_c g\cdot H\cdot S.$$

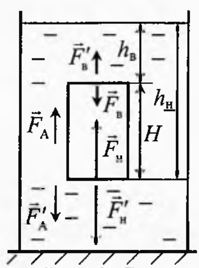


Рис. 4. *Сила Архимеда*

Так как $H\cdot S=V$ – объем погруженного в жидкость тела, получим:

$$F_A = \rho_c \cdot g \cdot V\,.$$

Так как $m_{вс}=\rho_c \cdot V$ – масса вытесненной среды (жидкости), $P_{вс}=m_{вс}g$ – вес вытесненной среды (жидкости), то:

$$F_A = m_{вс}g; \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_A = P_{вс}}\,.$$

Сила Архимеда равна весу вытесненной среды.

Важно отметить, что сила Архимеда не зависит от формы тела. Если тело погружено частично, то в формуле для силы Архимеда нужно брать только объем погруженной части тела $V_п$:

$$\boxed{F_A = \rho_c \cdot g \cdot V_п}\,.$$

*В инерциальной системе отсчёта на тело, погруженное в жидкость или газ, действует вверх выталкивающая сила (**сила Архимеда**). Модуль силы Архимеда равен произведению плотности среды, ускорения силы тяжести и объема погруженной в среду части тела.*

Точка приложения силы Архимеда находится в центре тяжести, находившейся ранее на месте тела, вытесненной жидкости.

На рисунке 4 видно, что тело (согласно III закону Ньютона) отталкивает воду вверх верхней гранью силой $\vec{F}'_в = -\vec{F}_в$, и нижней гранью вниз силой $\vec{F}'_н = -\vec{F}_н$, так что в целом тело давит на воду силой, направленной вниз и по модулю равной силе Архимеда:

$$\vec{F}'_A = -\vec{F}_A\,.$$

Выражение для силы Архимеда можно логически получить значительно проще. Действительно, заменим мысленно тело, помещенное в жидкость, той же жидкостью в объеме погруженной части тела. Очевидно, что на неё будут действовать те же силы давления со стороны остальной жидкости, что и на тело, погруженное до этого. Также ясно, что помещенная нами жидкость будет находиться в равновесии, то есть выталкивающая сила Архимеда уравновесит силу тяжести жидкости. Таким образом, в инерциальной системе отсчёта выталкивающая сила равна силе тяжести вытесненной жидкости и противоположно ей направлена.

Если сосуд движется с ускорением, то сила Архимеда будет равна весу вытесненной среды.

Если ускорение сосуда направленно вверх, то сила Архимеда $F_A=\rho_c \cdot (g+a) \cdot V_п$ больше, чем сила тяжести вытесненной среды. Если ускорение направлено вниз, то $F_A=\rho_c \cdot (g-a) \cdot V_п$. Если $\vec{a} = \vec{g}$, т. е. при свободном падении сосуда с телом, то сила Архимеда отсутствует $F_A=0$. Отсутствие силы

Архимеда наблюдается, например, в космическом корабле при движении по орбите вокруг Земли.

В общем случае, когда ускорение $\vec{a}$ сосуда направлено произвольно:

$$\boxed{\vec{F}_А = -\rho_с V_п (\vec{g} - \vec{a})}.$$

Во всех случаях сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости или газа, взятому с обратным знаком:

$$\boxed{\vec{F}_А = -\vec{P}_{вс}}.$$

✍ **Пример 1.** Кубик изо льда плавает в стакане с водой. На какую долю высоты лед поднимется над свободной поверхностью воды? Изменится ли уровень воды в стакане, если лед растает? $\rho_л = 917\ кг/м^3$, $\rho_в = 1000\ кг/м^3$.

Решение. К кубику приложены сила Архимеда и сила тяжести (рис. 5), при этом он находится в равновесии:

$F_А = F_т$, где $F_т = mg = \rho_л g h^3$,

$\Rightarrow \quad F_А = \rho_в g V_п = \rho_в g h^2 \cdot (h - x)$.

Решая совместно, получим:

$$\rho_в g h^2 (h - x) = \rho_л g h^3,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{h} = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} = 0{,}083 = 8{,}3\%.$$

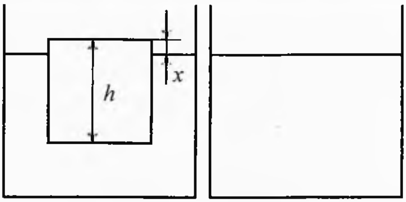


Рис. 5. *Тающий лёд не увеличивает уровень воды*

Из закона Архимеда следует, что масса вытесненной жидкости (воды) равна массе плавающего в жидкости тела (льда). Когда лед растает, то получившаяся из него вода будет занимать объем вытесненной ранее льдом, поэтому уровень воды во время и после таяния льда не изменится.

✓ **Ответ.** x/h=8,3%. Уровень воды во время и после таяния льда не изменится.

✍ **Пример 2.** Из алюминия (ρ=2,7 г/см^3) выточили стакан с толщиной стенок d=2,0 мм и наружной площадью сечения, равной S_1=50 см^2. Площадь основания стакана S_2=100 см^2, а толщина основания h=2,0 см. Стакан опускают в воду ($\rho_в$=1,0 г/см^3) основанием вниз. Какой должна быть высота стакана H, чтобы он не утонул (рис. 6)?

Решение. Высота стакана минимально возможная, когда его верхняя кромка будет практически на уровне поверхности воды.

Условие равновесия стакана:

$$F_т = F_А;\quad F_А = \rho_в g(S_2h + S_1H);\quad F_т = \rho V_2 g + \rho V_1 g;$$

$$V_2 = S_2h,\quad V_1 = H(\pi r_1^2 - \pi(r_1 - d)^2) = \pi H(2r_1d - d^2) \approx 2\pi H r_1 d,$$

$$S_1 = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{S_1/\pi}.$$

Значит, $$F_т = \rho g\left(S_2h + 2Hd\sqrt{\pi S_1}\right).$$

Тогда, $$H = \frac{hS_2(\rho - \rho_в)}{S_1\rho_в - 2\rho d\sqrt{\pi S_1}} = 9{,}3 \text{ см}.$$

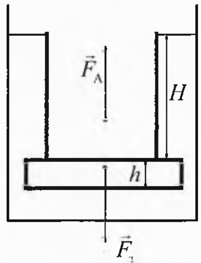


Рис. 6. *Стакан с толстым дном*

✓ **Ответ.** Чтобы стакан не утонул, его высота должна удовлетворять условию: $H \geq 9{,}3$ см.

Пример 3. Тело, состоящее из двух цилиндров радиусами R=10 см и r=5 см и высотами H=5 см и h=10 см, приклеено ко дну сосуда, в котором находится вода. Вычислить выталкивающую силу, если верхняя граница тела находится на глубине h_0=5 см (рис. 7). Задачу решить при отсутствии атмосферного давления.

Дано.
R=10 см=0,1 м
r=5 см=0,05 м
H=5 см=0,05 м
h=10 см=0,1 м
$\rho_c = 10^3$ кг/м^3
h_0=5 см=0,05 м
$F_А$ – ?

Решение. Формула для выталкивающей силы $F_А = \rho_c g \cdot V_т$ получена, когда со всех сторон тела находится жидкость. В нашем же случае нижнее основание тела не соприкасается с водой, поэтому сила Архимеда:

$$F_А = \rho_c g \cdot V_т - p_{дно} \cdot S_м;$$

где $V_т = \pi R^2 H + \pi r^2 h$; $S_м = \pi r^2$;

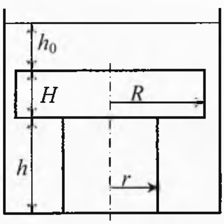


Рис. 7. *Сила Архимеда меньше веса вытесненной воды?*

$p_{дно} = \rho_c g(h_0 + h + H)$ – давление воды на дне сосуда при отсутствии атмосферного давления.

$$F_А = \pi\rho_c g[R^2H + r^2h - r^2(h_0 + h + H)];$$

$$F_А = 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot [10^{-2} \cdot 0{,}05 + 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 - 25 \cdot 10^{-4}(0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}05)] = 7{,}85 \text{ Н}.$$

Можно выталкивающую силу вычислить и более строго: она будет равна разности сил давления на нижнее и верхнее основания первого тела:

$$F_А = p_н(S_б - S_м) - p_в \cdot S_б,$$

где $S_б = \pi R^2$, $S_м = \pi r^2$, $p_н = \rho_c g(h_0 + H)$, $p_в = \rho_c g h_0$, – без учёта атмосферного давления.

$$F_А = \rho_c g(h_0 + H)(\pi R^2 - \pi r^2) - \rho_c g h_0 \pi R^2 = \pi\rho_c g[H \cdot (R^2 - r^2) - h_0 r^2] = 7{,}85 \text{ Н}.$$

В обоих случаях решения результат один и тот же.

✓ **Ответ.** Сила Архимеда, действующая на тело при отсутствии атмосферного давления, равна примерно 8 Н.

Примечание 1. Сила Архимеда оказалась меньше, чем вес вытесненной телом воды. Но ведь если убрать тело, а его место заполнить водой, то она будет находиться в равновесии. Дело в том, что сила Архимеда – это сила взаимодействия тела только с жидкой (или газообразной) средой. Оставшуюся часть веса жидкости компенсирует давление со стороны дна сосуда (нормальная реакция опоры):

$$0=F_A+N-m_c g \quad \Rightarrow \quad N=m_в g-F_A. \qquad (1)$$

Массы вытесненной среды:

$$m_c=\rho_c\cdot V_c=\rho_c\cdot(S_б\cdot H+S_м\cdot h)=\pi\rho_c\cdot(R^2\cdot H+r^2\cdot h).$$

Подставляя выражение для m_c и F_A в (1), получим значение нормальной реакции опоры $\vec{N}$:

$$N=\pi r^2\cdot\rho_c\cdot g(h_0+H+h) \quad \text{или} \quad N=p_{дно}\cdot S_м.$$

Примечание 2. Отметим также, что при наличии в этом примере атмосферного давления сила Архимеда, то есть результирующая сила со стороны молекул воды, будет прижимать тело ко дну с огромной силой, в 100 раз, превышающей силу, рассчитанную без учёта $p_{атм}$:

$$F_{A1}=\rho_c g\cdot V_т-p_{дно1}\cdot S_м; \quad p_{дно1}=p_{атм}+\rho_c g(h_0+h+H) \Rightarrow$$

$$F_{A1}=F_A-p_{атм}\cdot\pi r^2=-777 \text{ Н}.$$

Этот эффект используются в присосках, если просто положить присоску на стол, то со стороны воздуха на неё будет действовать незначительная сила Архимеда, направленная вверх. Но если прижать присоску к гладкой поверхности, то потом оторвать её от поверхности будет непросто, т.к. атмосферное давление прижимает присоску к поверхности, и не даёт её оторвать.

✍ **Пример 4.** Алюминиевый шар объемом $V=20$ см^3 и плотностью $\rho_1=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 находится в сосуде с водой, который движется с постоянным горизонтальным ускорением $a=2{,}5$ м/с^2 (рис. 8). Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Боковая стенка сосуда наклонена к горизонтальной поверхности дна под углом $\alpha=70°$. Плотность воды $\rho=1{,}0\cdot10^3$ кг/м^3. Чему равны силы давления шара на дно, на боковую стенку и суммарная сила давления шара на сосуд?

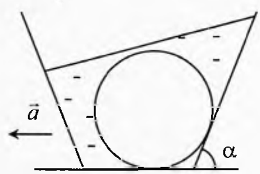


Рис. 8. *Шар в движущемся сосуде*

➥**Решение.** Перейдем в неинерциальную систему отсчёта, связанную с сосудом (движущуюся с ускорением $\vec{a}$) (рис. 9). На шар действуют пять сил: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила инерции $\vec{F}_и$, нормальные силы реакции опоры со стороны дна $\vec{N}_1$ и боковой стенки сосуда $\vec{N}_2$ (так как трение отсутствует, то сила реакции опоры перпендикулярна поверхности опоры), и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (результирующая сила давления со стороны прилегающих слоев воды). Поскольку шар остаётся в равновесии (его ускорение в данной НИСО равно нулю), то по II закону Ньютона:

$$\vec{F}_т+\vec{F}_и+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{F}_A=0. \qquad (2)$$

Сила тяжести шара:

$$\vec{F}_т=m\vec{g}, \quad F_т=mg=\rho_1 Vg. \qquad (3)$$

Сила инерции связана с переходом в НИСО:

$$\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}\,,\ \ F_{\text{и}}=ma=\rho_1 Va. \qquad (4)$$

По III закону Ньютона сила давления на дно и на стенку:

$$\vec{N}_1 = -\vec{P}_1,\ \ N_1=P_1; \qquad \vec{N}_2 = -\vec{P}_2,\ \ N_2=P_2. \qquad (5)$$

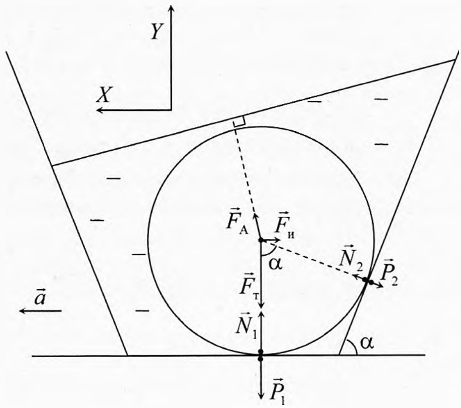


Рис. 9. *Давление шара на стенки движущегося сосуда*

Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости $\vec{F}_{\text{А}} = -\vec{P}_{\text{в}}$. Действительно, уберем шар и рассмотрим жидкость того же объема на его месте (рис. 10). На выделенный объем жидкости действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{тв}}$, сила инерции $\vec{F}_{\text{ив}}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{Ав}}$ (результирующая сила давления со стороны прилегающих слоев воды). Поскольку выделенный объем воды находится в равновесии, то

$$\vec{F}_{\text{тв}}+\vec{F}_{\text{ив}}+\vec{F}_{\text{Ав}}=0. \qquad (6)$$

Сила тяжести воды:

$$\vec{F}_{\text{тв}} = m_{\text{в}}\vec{g}\,,\ \ F_{\text{тв}}=m_{\text{в}}g=\rho Vg. \qquad (7)$$

Сила инерции, действующая на воду в НИСО:

$$\vec{F}_{\text{ив}} = -m_{\text{в}}\vec{a}\,,\ \ F_{\text{ив}}=m_{\text{в}}a=\rho Va. \qquad (8)$$

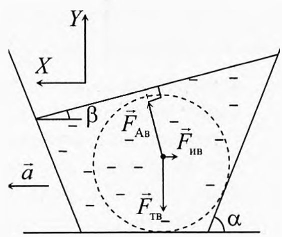


Рис. 10. *Равновесие водяного шара*

Проецируя (6) на оси X и Y и подставляя (7) и (8), получим:

$$F_{\text{Ав}x}=\rho aV, \qquad F_{\text{Ав}y}=\rho gV.$$

Модуль силы Архимеда:

$$F_{\text{Ав}} = \rho V\sqrt{g^2+a^2}\,. \qquad (9)$$

Но поскольку сила Архимеда есть результирующая сила давления со стороны прилегающих слоев воды, то на шар будет действовать точно такая же сила:

$$\vec{F}_{\text{А}} = \vec{F}_{\text{Ав}},\quad \text{то есть}\quad F_{\text{А}x}=\rho aV,\quad F_{\text{А}y}=\rho gV. \qquad (10)$$

Проецируя (2) на оси X и Y:

$$-F_{\text{и}}+N_2\sin\alpha+F_{\text{А}x}=0; \qquad -F_{\text{т}}+N_1+N_2\cos\alpha+F_{\text{А}y}=0.$$

Подставляя сюда (3), (4), (5) и (10), получим:

$$-\rho_1 Va+P_2\sin\alpha+\rho aV=0; \qquad -\rho_1 Vg+P_1+P_2\cos\alpha+\rho gV=0.$$

Решая эти уравнения относительно неизвестных P_1 и P_2, получим:

$$P_1 = (\rho_1-\rho)V(g-a\cdot ctg\alpha)=300\ \text{мН};\ \ P_2 = \frac{(\rho_1-\rho)Va}{\sin\alpha}=90\ \text{мН}.$$

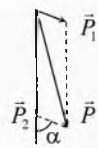


Рис. 11. *Теорема косинусов для силы давления*

Результирующая сила давления (вес) $\vec{P}$ шара на сосуд найдём по теореме косинусов (рис. 11):

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2; \quad P=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\alpha}=340 \text{ мН.}$$

✓ **Ответ.** Сила давления шара на дно P_1=300 мН, на боковую стенку P_2=90 мН; суммарная сила давления шара на сосуд P=340 мН.

Примечание. Из решения задачи полезно также отметить следующее.

Сила Архимеда перпендикулярна поверхности воды.

Это равносильно тому, что в НИСО вектором ускорения свободного падения является новый вектор $\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}$ (его модуль $g'=\sqrt{g^2+a^2}$), определяемый силой тяжести и силой инерции, и поверхность воды становится перпендикулярной новому вектору $\vec{g}'$, а сила Архимеда определяется формулой

$$\vec{F}_A=-\rho\vec{g}'V=-m_в\vec{g}'=-\vec{P}_в, \text{ её модуль: } F_A=\rho g'V=\rho V\sqrt{g^2+a^2},$$

Это выражение совпадает с (9).

Сила Архимеда равна весу вытесненной воды и направлена противоположно ей.

В нашем случае сила Архимеда направлена под углом β к вертикали:

$$\text{tg}\beta=F_{Ax}/F_{Ay}=\rho aV/(\rho gV)=a/g, \quad \beta\approx 14°.$$

§ 51. Плавание тел

Если средняя плотность тела меньше плотности жидкой среды, то в состоянии равновесия часть тела находится над поверхностью жидкости. Для кораблей важна устойчивость плавания. Корабль плавает устойчиво, если при большой качке он не переворачивается. Устойчивость определяется положением метацентра.

Пусть корабль накренен на угол α от вертикали (рис. 12). Его центр масс находится в точке *O*. А центр тяжести вытесненной им воды (точка приложения силы Архимеда) находится в точке *B*.

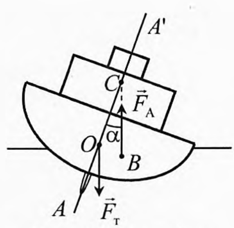


Рис. 12. *Устойчивость корабля*

Точка C (точка пересечения оси симметрии AA' с направлением силы Архимеда) называется ***метацентром****. Если метацентр C находится выше центра тяжести O, то судно устойчиво.*

Действительно, из рисунка видно, что относительно киля момент выталкивающей силы Архимеда больше момента силы тяжести судна (F_A=$F_т$, а плечо F_A больше плеча $F_т$), поэтому оно стремится вернуться к вертикальному положению. Чем ниже находится центр тяжести корабля, тем это судно более устойчиво.

Степень устойчивости *можно характеризовать углом, на который нужно отклонить тело в жидкости, при котором оно перевернется. Чем больше этот критический угол, тем более устойчиво плавание тела в жидкости.*

Устойчивость подводных лодок. Если плотность среды равна средней плотности тела, то оно будет в равновесном состоянии внутри жидкости. Но практически осуществить это нелегко. Попробуйте, насыпая песок в стеклянный пузырек с пробкой, добиться плавания его внутри воды. Малейший недостаток песка приведет к его всплытию, хотя и медленному. Малейший избыток заставит опуститься его на дно. В подводных лодках равенство силы тяжести и силы Архимеда регулируется изменением объема воздуха между легким и прочным корпусами лодки при помощи баллонов со сжатым воздухом и специальных регулирующих устройств (редукторов). Но может ли подводная лодка зависнуть при $F_т = F_А$? Казалось бы, она находится в безразличном равновесии. Оказывается – нет. Пусть под действием случайных небольших сил она немного приподнимется. Давление воды уменьшится, и сжатый воздух расширится. Сила Архимеда станет заметно больше силы тяжести, и лодка всплывет. Если же благодаря небольшим случайным силам лодка немного опустится от равновесного положения, то избыточное давление воды дополнительно сожмет воздух между легким и прочным корпусом. Сила Архимеда уменьшится, и лодка начнет тонуть. Так что поддержание заданной глубины требует постоянной корректировки.

Гидростатическое взвешивание.

> ***Гидростатическое взвешивание*** *– это экспериментальное определение плотности вещества с использованием закона Архимеда.*

✍ **Пример 5.** Измерить плотность твёрдого тела.

➥**Решение.** Для этого сначала взвешиваем тело с неизвестной плотностью в воздухе, а затем в жидкости с известной плотностью.

В воздухе (рис. 13а): $F_{Ав} \approx 0$.

По III закону Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$.

По II закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} = 0$.

$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{g}$ или $P = mg$. (11)

В жидкости с известной плотностью ρ_1 (рис. 13б) аналогично:

$$\vec{P}_1 = -\vec{N}_1,\ m\vec{g} + \vec{F}_А + \vec{N}_1 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_1 = m\vec{g} + \vec{F}_A$$

или $P_1 = mg - \rho_1 gV$. (12)

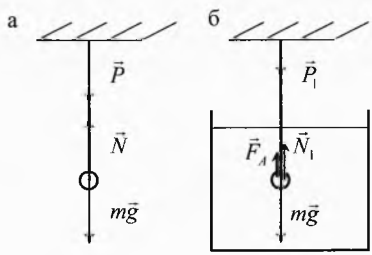


Рис. 13. *Гидростатическое взвешивание*

Учитывая, что $V = m/\rho$, из (11) и (12), получим:

$$P_1 = mg - \rho_1 g\frac{m}{\rho} \quad \text{или} \quad P_1 = P\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right), \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_1 \cdot P}{P - P_1}.$$

Пример 6. Измерить плотность жидкости.

Решение. Как и в предыдущем примере, прикрепим тело к динамометру и взвесим его в воздухе, затем в жидкости с известной плотностью ρ_1 и в сосуде с неизвестной плотностью ρ_2. Запишем уравнения, вытекающие из условия равновесия груза для всех трёх случаев.

$$\begin{cases} P = mg; \\ P_1 = mg - \rho_1 gV; \\ P_2 = mg - \rho_2 gV; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_2 gV = P - P_2; \\ \rho_1 gV = P - P_1; \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P - P_2}{P - P_1} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{P - P_2}{P - P_1}.$$

Для такого измерения необходимо иметь динамометр и твёрдое тело, которое тонет в обеих жидкостях и не растворяется в них.

§ 52. Уравнение неразрывности струи

При изучении движения жидкости её рассматривают как сплошную среду. Ламинарное движение жидкости удобно изображать в виде линий тока (рис. 14).

***Линия тока** – это геометрическое место точек, касательные к которым совпадают с направлением скорости жидкости в этих точках.*
*Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, образуется поверхность, которую называют **трубкой тока**.*

Вектор скорости касателен поверхности трубки тока во всех её точках. Частицы жидкости не пересекают стенок трубки тока (то есть не входят в трубку и не выходят из неё). Поэтому массовый расход жидкости в любом сечении трубки тока одинаков. Течение жидкости в трубке тока равносильно течению жидкости в реальной трубе.

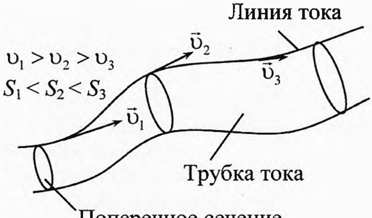


Рис. 14. *Линия и трубка тока*

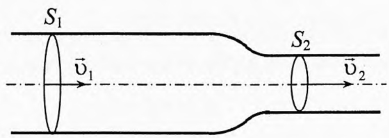


Рис. 15. *Ламинарное течение*

Рассмотрим ламинарное течение жидкости в трубке тока (в трубе переменного сечения (рис. 15)). Если струя неразрывна, то массовый расход жидкости (масса жидкости, протекающая в единицу времени) одинаков в любом сечении, так как жидкость нигде не накапливается:

$\frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2}$. Учитывая, что $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$, получим: $\frac{\rho_1 \cdot \Delta V_1}{\Delta t_1} = \frac{\rho_2 \cdot \Delta V_2}{\Delta t_2}$.

Т.к. жидкости практически несжимаемы ($\rho_1 \approx \rho_2$), то объемный расход жидкости в любом сечении неразрывной струи одинаков:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{const}. \tag{13}$$

Объем жидкости, протекающей через поперечное сечение S за время t со скоростью υ:

$$\Delta V = S \cdot \upsilon \cdot \Delta t, \tag{14}$$

Тогда, подставляя (14) в (13), получаем:

$$\frac{S_1 \upsilon_1 \Delta t_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2 \upsilon_2 \Delta t_2}{\Delta t_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}}. \tag{15}$$

Уравнение (15) называются ***уравнением неразрывности струи***.

В неразрывной струе скорость течения жидкости обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубы.

Заметим, что ***объемный расход жидкости*** равен:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot \upsilon}.$$

В случае движения газа давление в разных сечениях трубы может существенно отличаться. А значит, в разных сечениях будет разная плотность газа. Для неразрывной струи в этом случае получим:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_1 S_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \frac{\rho_2 S_2 \Delta l_2}{\Delta t},$$

$$\boxed{\rho_1 S_1 \upsilon_1 = \rho_2 S_2 \upsilon_2} \quad \text{или} \quad \boxed{\mu_1 = \mu_2},$$

где μ – это ***массовый расход жидкости или газа***:

$$\boxed{\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S \upsilon}.$$

Массовый расход жидкости или газа в неразрывной струе одинаков в любом сечении. В любом сечении неразрывной струи произведение плотности газа на площадь поперечного сечения и скорость течения одинаково.

✍ **Пример 7.** Почему струя, вытекающая из крана, по мере падения становится тоньше?

✓ **Ответ.** Потому, что скорость падающей воды возрастает, а поскольку расход жидкости остаётся одинаковым в любом сечении, то площадь сечения, а значит, и диаметр должны уменьшаться.

✍ **Пример 8.** Как, используя кран с водой, часы, линейку с делениями и кружку, измерить ускорение свободного падения g?

↪**Решение.** Пустим из крана неразрывную струю (рис. 16). Измерим на двух разных уровнях её диаметр. Затем определим объемный расход воды, собрав в кружку объем воды V за время t. Вычислим скорость воды в первом и втором сечении из соотношений:

$$\frac{V}{t} = S_1\upsilon_1; \quad \frac{V}{t} = S_2\upsilon_2.$$

Используя формулу $2gh = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2$, найдём g:

$$g = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2h} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{V^2}{2ht^2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right).$$

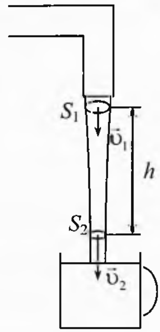


Рис. 16.
Измерение g

Каждый может в домашних условиях практически решить эту задачу. Не удивляйтесь, если результат существенно не сойдется с табличным значением g=9,8 м/с^2. Ибо легко измерять теоретически, а практически измерить диаметр струи, особенно в нижнем сечении, непросто.↩

§ 53. Закон Бернулли

Рассмотрим движение жидкости с энергетической точки зрения. Введем понятие «объемная плотность энергии» или кратко «плотность энергии».

Плотность энергии *– это скалярная величина, характеризующая распределение энергии в пространстве. Плотность энергии равна отношению энергии вещества в малом объеме к значению этого объема:*

$$\boxed{w = \frac{\delta E}{\delta V}}.$$

При равномерном распределении энергии плотность энергии можно определить как отношение энергии вещества к занимаемому объему

$$w = \frac{E}{V}.$$

Пусть жидкость массы m движется со скоростью υ и находится на высоте h. Жидкость сжата до давления p. Плотность кинетической энергии можно определить как отношение кинетической энергии жидкости к занимаемому объему:

$$w_к = \frac{E_к}{V}, \qquad w_к = \frac{m\upsilon^2}{2V} = \frac{\rho\upsilon^2}{2}, \qquad \boxed{w_к = \frac{\rho\upsilon^2}{2}}. \tag{16}$$

Плотность кинетической энергии характеризует распределение кинетической энергии вещества в пространстве.

Аналогично, плотность потенциальной энергии, обусловленная силой тяжести, характеризует распределение этой энергии в пространстве:

$$w_т = \frac{E_т}{V}, \qquad w_т = \frac{mgh}{V} = \rho gh, \qquad \boxed{w_т = \rho gh}. \tag{17}$$

Жидкость, находящаяся под статическим давлением p, обладает потенциальной энергией, обусловленной силой упругости отталкивания молекул. Плотность энергии упругого отталкивания молекул равна отношению этой энергии к объему жидкости:

$$w_{упр} = \frac{E_{упр}}{V}. \tag{18}$$

Оказывается, она равна статическому давлению p жидкости

$$\boxed{w_{упр} = p}. \tag{18'}$$

Пусть жидкость течет по трубе переменного сечения без трения (идеальная жидкость) (рис. 17). Тогда в жидкости действуют только силы тяжести и силы упругости. Поэтому к её движению можно применять закон сохранения энергии. То есть энергия жидкости малой массы m в сечениях 1 и 2 одинакова:

Даниил Бернулли (1700–1782)

$$E_1 = E_2.$$

$$E_{1к} + E_{1т} + E_{1упр} = E_{2к} + E_{2т} + E_{2упр}. \tag{19}$$

Разделим это выражение на объем жидкости массой m:

$$\frac{E_{1к}}{V} + \frac{E_{1т}}{V} + \frac{E_{1упр}}{V} = \frac{E_{2к}}{V} + \frac{E_{2т}}{V} + \frac{E_{2упр}}{V},$$

Учитывая (16), (17), (18), получим:

$$w_{1к} + w_{1т} + w_{1упр} = w_{2к} + w_{2т} + w_{2упр}. \tag{20}$$

Суммарная плотность энергии жидкости, текущей без трения, одинакова в любом сечении жидкости.

Это не что иное, как закон сохранения энергии для жидкостей. Учитывая (16), (17), (18'), уравнение (20) можно записать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2}.$$

Это уравнение носит название ***закона Бернулли*** (в честь академика Д. Бернулли, впервые получившего его в 1738 г. во время работы в Петербурге).

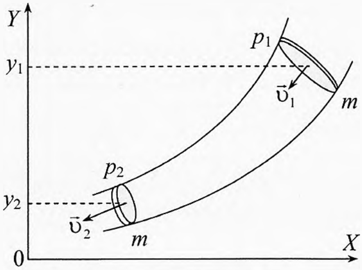


Рис. 17. *Закон Бернулли*

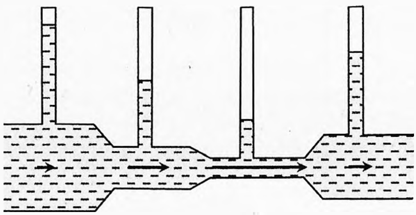


Рис. 18. *Демонстрация закона Бернулли*

Закон Бернулли легко продемонстрировать на примере движения жидкости в трубе переменного сечения (рис. 18), с впаянными в неё открытыми трубками (манометрами). В узких местах трубы скорость потока воды больше, поэтому давление меньше, а значит, высота столбика жидкости в соответствующем манометре будет меньше.

Объяснить изменение давления воды на одном уровне при разных сечениях трубы можно следующим образом. При переходе жидкости из широкой трубы в узкую её скорость увеличивается пропорционально уменьшению площади сечения трубы. Но изменение скорости согласно II закону Ньютона может происходить только благодаря какой-то силе. Именно поэтому давление в широкой части трубы должно быть больше, чем в узкой, чтобы за счёт разницы давлений жидкость смогла ускориться. При этом с точки зрения закона сохранения энергии увеличение кинетической энергии жидкости компенсируется соответствующим уменьшением потенциальной энергии упругости сжатой жидкости, так что полная энергия жидкости остаётся постоянной.

Давление в потоке. В неподвижной жидкости давление на определенном уровне одинаково по всем направлениям. А как обстоит дело с давлением в движущейся жидкости? Оказывается, что измеряемое давление неподвижным манометром зависит от ориентации площадки в потоке.

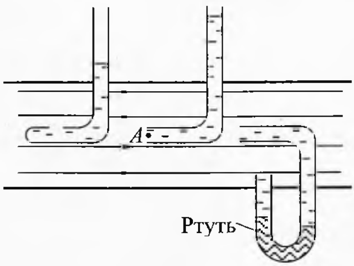


Рис. 19. *Трубка Пито*

Представим себе манометр в виде изогнутой трубки, передняя часть которой запаяна и обращена навстречу потоку, а в боковой стенке имеется отверстие параллельное скорости обтекающей жидкости (рис. 19). Такая трубка, называемая зондом, искажает поток только вблизи её переднего конца, а вблизи отверстия поток почти не изменяется, поэтому давление здесь такое же, как и во всех других точках линии тока, проходящих вблизи отверстия. Соединенный с таким зондом манометр измеряет давление жидкости p (***статическое давление***), входящее в закон Бернулли. Такое же давление покажет произвольно ориентированный манометр, движущийся вместе с потоком.

Если же взять трубку с открытым передним концом (трубка Пито), то показания соединенного с ней манометра будут больше p. Так как жидкость внутри трубки неподвижна, то скорость жидкости в точке A обращается в нуль. Обозначим давление в этой точке через p_A, а давление и скорость в потоке вдали от трубки на той же линии через p и υ. Применяя к выделенной лини тока закон Бернулли, получим:

Анри Пито (1695–1771)

$$p_A = p + \frac{\rho\upsilon^2}{2}.$$

Именно это давление p_1 покажет трубка Пито.

Плотность кинетической энергии струи называется ***динамическим давлением.***

$$p_д = \frac{\rho\upsilon^2}{2}$$

Используя зонд и трубку Пито, можно измерить скорость жидкости в потоке:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(p_1 - p)}{\rho}}.$$

Людвиг Прандтль (1875–1953)

На рис. 19 справа показана дифференциальный манометр, измеряющий скоростной напор в миллиметрах ртутного столба. Он используется для измерения скорости протекания жидкости и соответственно объемного расхода жидкости.

Аналогичным принципом действия обладает трубка Прандтля (рис. 20), которая используется для определения давления окружающего воздуха и для определения скорости воздуха относительно вертолёта (или самолёта). В трубке Прандтля имеется одно отверстие в направлении потока для измерения полного давления и несколько отверстий по кольцу вдоль поверхности трубки на некотором расстоянии от её острия для измерения статического давления. Разница между давлениями может быть измерена с помощью манометра, согласно закону Бернулли эта разница является динамическим давлением.

Рис. 20. *Трубка Прандтля (на вертолёте Ка-26) Фото: Zátonyi Sándor*

Угроза безопасности движения в потоке. Закон Бернулли объясняет эффект притяжения между телами, находящимися вблизи границ потоков движущихся жидкостей (газов). Иногда это притяжение может создавать угрозу безопасности. Например, при движении скоростного поезда «Сапсан» (скорость движения более 200 км/час) для людей на платформах возникает опасность сброса под поезд.

На автомагистралях проносящиеся мимо многотонные грузовики с прицепами притягиваются к стоящему на обочине автомобилю. Это одна из опасностей, которыми объясняют запрет на остановку автомобилей на обочинах автомагистралей.

Аналогично «затягивающая сила» возникает при движении судов параллельным курсом. Например, подобные инциденты происходили с пассажирским лайнером «Олимпик» (лайнер, аналогичный «Титанику»). В июне 1911 года «Олимпик» затянул под себя 200-тонный портовый буксир. В результате столкновения корма буксира была сильно повреждена. В сентябре 2011 года в заливе Солент произошло столкновение лайнера «Олимпик» и бронепалубного крейсера «Хоук». В результате столкновения в борту «Олимпика» образовалась 14-метровая пробоина, было повреждено лишь два отсека. «Хоук» пострадал больше – его длинный нос с выступающим форштевнем свернуло набок, часть обшивки сорвало. Оба корабля остались на плаву и были отведены на ремонт.

Причиной столкновения являлось «присасывание судов» – гидродинамическое притяжение судов, следующих параллельными курсами. Основная причина присасывания – специфическое распределение зон повышенного и пониженного давления воды вдоль корпуса судна. Присасывание сильнее действует на судно меньшего водоизмещения и приводит к резкому ухудшению управляемости, поэтому современная практика судовождения требует, чтобы судно меньшего размера выполняло обгон более крупного на максимальном расстоянии и на минимально возможной скорости.

Пример 9. Пусть жидкость течет по горизонтальной трубе переменного сечения (рис. 21). В каких сечениях статическое давление больше?

Решение. Так как оба сечения находятся на одинаковой высоте, то закон Бернулли для данного случая примет вид:

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}+p_1=\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}+p_2.$$

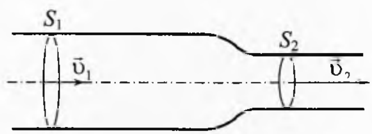


Рис. 21. *Больше скорость – меньше давление*

Так как, согласно уравнению неразрывности $S_1\upsilon_1=S_2\upsilon_2$, в сечении большей площади S_1 скорость υ_1 меньше, что υ_2. Значит, статическое давление в первом сечении больше, чем во втором. Это и понятно. При переходе жидкости из первого сечения во второе скорость возрастает, значит, возрастает и кинетическая энергия жидкости. Следовательно, потенциальная энергия упругого взаимодействия молекул должна, вследствие закона сохранения энергии, переходить в кинетическую.

Пример 10. В сосуде находится жидкость высотой h. Каково давление жидкости на дно сосуда? С какой скоростью будет вытекать жидкость из небольшого отверстия у дна сосуда? Атмосферное давление равно $p_а$.

Решение. Направим ось координат вверх и начало её поместим на уровне дна (рис. 22). Закон Бернулли для двух уровней жидкости (у дна сосуда и на поверхности) будет иметь вид:

$$p_д=p_а+\rho gh.$$

Мы получили известную формулу для расчёта давления на дно сосуда.

Для верхнего слоя жидкости и жидкости, вытекающей из отверстия у дна, имеем: $p_а + \rho gh = p_а + \dfrac{\rho \upsilon^2}{2}$.

Кинетической энергией верхнего слоя жидкости пренебрегаем. Производя сокращения в обеих частях равенства, получим:

$$\rho gh = \frac{\rho \upsilon^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}}.$$

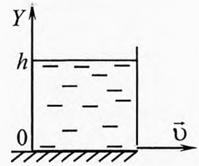


Рис. 22. *Скорость струи под давлением*

Оказывается, вода выливается с такой скоростью, какую она получила бы при свободном падении с высоты h. Эта формула называется ***формулой Торричелли***, потому что он первым её получил.

Пример 11. Оценить скорость истечения жидкости υ из медицинского шприца. Считать жидкость идеальной. На поршень шприца площадью S_0=1 см^2 действует сила F=5 Н (рис. 23), струя жидкости вытекает из иглы с отверстием площадью S=0,2 мм^2.

Решение. Рассмотрим линию тока, проходящую вдоль оси симметрии шприца, и применим к ней закон Бернулли. Обозначая скорость поршня и, следовательно, жидкости вблизи него через υ_0, получим:

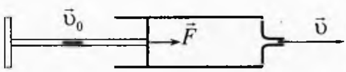


Рис. 23. *Медицинский шприц*

$$p_0 + \frac{\rho \upsilon_0^2}{2} = \frac{\rho \upsilon^2}{2}, \quad \text{где} \quad p_0 = \frac{F}{S_0}.$$

Из уравнения неразрывности вытекает, что $S_0\upsilon_0 = S\upsilon$. Выражая отсюда υ и подставляя в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{F}{S_0} = \frac{\rho \upsilon^2}{2}\left(1 - (S/S_0)^2\right).$$

Обычно площадь отверстия иглы во много раз меньше площади поршня шприца: $S \ll S_0$. Тогда, пренебрегая квадратом отношения S/S_0 по сравнению с единицей, находим скорость истечения жидкости из шприца: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2F}{\rho S_0}}$ =10 м/с.

Пример 12. Направим из брандспойта водяную струю, скорость которой υ_0=20 м/с, перпендикулярно стене. Какое давление будет оказывать струя на стену?

Решение. Воспользуемся вторым законом Ньютона, из которого следует, что сила, действующая на воду, равна скорости изменения импульса останавливающейся воды. Будем считать, что вода, ударяясь о стену, останавливается и стекает вниз:

$$F = \frac{|\Delta P|}{\Delta t} = \frac{|0 - P_0|}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot \upsilon_0}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V \cdot \upsilon_0}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l \cdot \upsilon_0}{\Delta t} = \rho S \upsilon_0^2.$$

Согласно III закону Ньютона струя воды действует на стены с такой же силой, создавая давление:

$$p = \frac{F}{S} = \rho\upsilon_0^2 = 10^3 \cdot 20^2 = 4 \cdot 10^5\ (\text{Па}) \approx 4\ (\text{ат}).$$

✓ **Ответ.** Давление воды в струе равно $4 \cdot 10^5$ Па. Такое давление окажет струя, неупруго ударяясь о стену.

Примечание. Если струю из брандспойта направить на стену не нормально, а под малым углом к вертикали, то она окажет на стенку давление значительно больше (почти в два раза), чем при нормальном падении, ибо струя не только останавливается, но и отражается в обратную сторону.

§ 54. Движение тел в жидкости и газах

Действие жидкости или газа на движущееся тело будет таким же, как при набегании такого же потока жидкости или газа на неподвижное тело. Это очень удобно при исследовании аэродинамики автомобилей, самолетов, лодок и т.п., так как позволяет проводить исследования на неподвижных относительно Земли установках. Силу $\vec{F}$, с которой набегающий поток действует на тело, можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_x$, направленную вдоль скорости $\vec{\upsilon}$ невозмущенного потока, называемую ***лобовым сопротивлением***, и перпендикулярную к ней составляющую $\vec{F}_y$, называемую ***подъёмной силой*** (рис. 24).

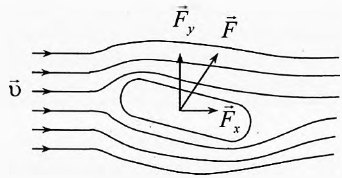


Рис. 24. *Подъёмная сила и лобовое сопротивление*

Подъёмная сила при обтекании симметричных (относительно скорости $\vec{\upsilon}$ невозмущенного потока) тел равна нулю, а для несимметричных тел не равна нулю.

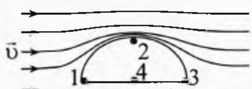


Рис. 25. *Обтекание полуцилиндра*

На рис. 25 показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока симметричны относительно прямой, проходящей через точки 2 и 4. Однако относительно прямой, проходящей через точки 1 и 3, картина тока несимметрична. Вблизи точки 2 линии гуще, и, в соответствии с законом Бернулли, давление меньше, чем вблизи точки 4. В результате чего возникает подъемная сила.

Иначе обстоит дело при движении в вязкой жидкости. Очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно тело, увлекая за собой из-за внутреннего трения последующие слои. Дальше от поверхности тела скорость слоев становится всё меньше, и на некотором расстоянии жидкость будет невозмущенной движением тела. Таким образом, тело, движущееся в жидкости, окружено слоями жидкости с разными скоростями от υ до 0. Эта группа примыкающих к телу слоев жидкости называется ***пограничным слоем***. В нём действуют силы вязкого трения, которые, в конечном счёте, приложены к телу, и приводят к возникновению лобового сопротивления.

Джордж Габриэль Стокс (1819–1903)

Закон Стокса. Английский математик Джордж Стокс установил в 1851 г., что при небольших скоростях и размерах тел, когда сопротивление среды обусловлено практически только силами вязкого трения, модуль силы лобового сопротивления определятся формулой, называемой ***законом Стокса***:

$$\boxed{F = k\cdot\eta\cdot l\cdot\upsilon},$$

где υ – скорость тела относительно среды, l – характерный поперечный размер тела, k – безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела, η – динамическая вязкость среды, характеризующая способность среды препятствовать движению тела относительно неё.

В частности, для небольших шариков при малых скоростях в широком сосуде закон Стокса принимает вид:

$$F=6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика.

Сформулируем ***закон Стокса***.

Сила сопротивления, возникающая при ламинарном движении шарика в жидкости (газе), прямо пропорциональна динамической вязкости среды, характерному поперечному размеру и скорости тела относительно среды.

Влияние вязкости на лобовое сопротивление. Лобовое сопротивление в вязкой жидкости обусловлено не только силой вязкого трения. Наличие пограничного слоя изменяет характер обтекания тела. Полное обтекание становится невозможным (рис. 26). Из-за сил трения пограничным слоем поток отрывается от поверхности тела. В результате позади тела возникают вихри. Они уносятся потоком и постепенно затухают. Энергия вихрей расходуется на нагрев среды. Давление на тело сзади (в вихревой области) меньше, чем спереди. Из-за этого возникает вторая (вихревая) составляющая силы лобового сопротивления. Таким образом, лобовое сопротивление слагается из сопротивления трения и сопротивления давления. При данных поперечных размерах сопротивление давления сильно зависит от формы тел. Наименьшим сопротивлением обладают тела каплевидной формы (по форме крыла самолета) (рис. 27).

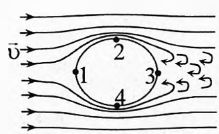


Рис. 26. *Вихри при плохом обтекании*

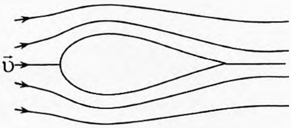


Рис. 27. *Идеальная каплевидная форма*

Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется ***числом Рейнольдса***. При малых Re, то есть при малых скоростях и малом поперечном сечении, основную роль играет сопротивление трения в соответствии с законом Стокса. При больших Re в лобовом сопротивлении преобладает сопротивление давления.

В общем случае формулу для вычисления силы сопротивления можно записать в следующем виде:

$$F_c=\beta_1\cdot\upsilon+\beta_2\cdot\upsilon^x,$$

где $\beta_1 \cdot \upsilon = F_{c1}$ обусловлено вязким трением;

$\beta_2 \cdot \upsilon^x = F_{c2}$ обусловлено сопротивлением давления.

В школьной физике обычно используется упрощенный вариант для силы сопротивления при движении тела в жидкой и газообразной среде

$$\boxed{F_c = \beta \cdot \upsilon^{\alpha}},$$

где β – коэффициент сопротивления, зависящий от вязкости среды, формы и скорости тела;

υ – скорость тела относительно среды;

α – коэффициент, зависящий от скорости тела относительно среды. При малых скоростях (ламинарное движение): $\alpha=1$. При больших скоростях: $\alpha>1$. В школьных задачах в этом случае обычно берут $\alpha=2$.

§ 55. Зависимость сопротивления среды от скорости и формы тела

Силу, препятствующую движению тела в воздухе, называют аэродинамическим сопротивлением. Зависимость силы сопротивления от формы тела можно выяснить с помощью аэродинамических весов. Аэродинамические весы представлены на рис. 28. В стержне весов *B* имеется гнездо, куда вставляются тела различной формы и размеров. Приведение указателя весов к нулю производится путём перемещения груза *A*. Вставив в гнездо круглый диск и изменяя скорость потока воздуха, выходящего из электрической воздуходувки *E*, увидим, что сила сопротивления возрастает с увеличением скорости воздушного потока.

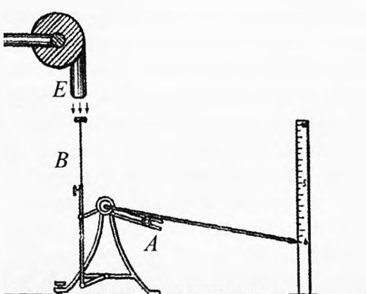


Рис. 28. *Аэродинамические весы*

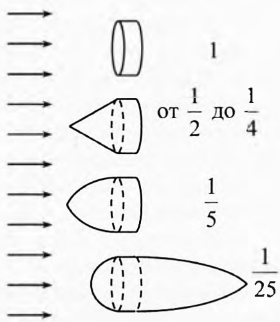


Рис. 29. *Форма имеет значение*

Если же взять диск меньшего размера, то сила сопротивления при той же скорости потока будет меньше. Проводя аналогичные опыты с телами различной формы, обнаружим, что при одинаковой скорости воздушного потока сопротивление шара такого же диаметра, как диска, будет меньше, хотя площадь лобового сечения одинакова. Особенно велико сопротивление у полусферы, обращенной вогнутой стороной навстречу потоку. Поэтому форма полусферы используется в парашютах. Влияние формы тела на значение аэродинамического сопротивления наглядно показано на рис. 29. За единицу сопротивления принято сопротивление цилиндра. Конусообразная насадка к нему уменьшает сопротивление в 2–4 раза в зависимости от угла конуса. Гранатообразная насадка доводит сопротивление до 1/5, то есть уменьшая его в 5 раз. Наконец, если придать цилиндру форму, близкую к форме падающей капли или рыбы, то сопротивление уменьшается в 25 раз по сравнению с цилиндром при одинаковой площади лобового сечения.

§ 56. Подъемная сила крыла самолета

Средняя плотность самолета значительно больше плотности воздуха, поэтому для его движения необходима подъёмная сила, которая позволяла бы ему отрываться от поверхности земли, подниматься и лететь на определенной высоте. Сечение крыла самолета представлено на рис. 30. Практика показала, что для осуществления подъёма крыло самолета должно быть расположено так, чтобы имелся некоторый угол между его нижней линией и направлением полета (этот угол изменяется действием руля высоты). При горизонтальном полете угол α не превышает 1–1,5° (при посадке около 15°). При наличии такого угла скорость потока воздуха, обтекающего крыло сверху, будет больше, чем скорость потока, обтекающего нижнюю поверхность крыла. На рисунке это отмечено разной густотой линий тока.

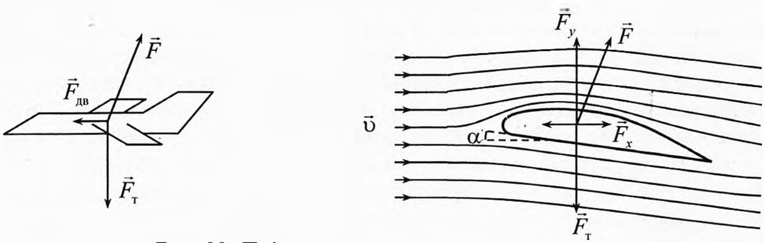
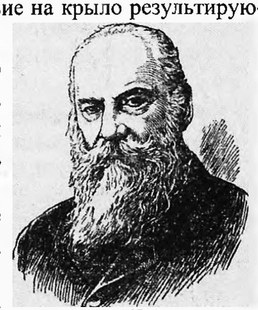


Рис. 30. *Подъемная сила крыла самолёта*

Но, как следует из закона Бернулли, в том месте потока, где скорость больше, давление меньше, и наоборот. Поэтому при движении самолета в воздухе над верхней поверхностью крыла будет пониженное давление, а над нижней – повышенное. Эта разность давлений и обуславливает действие на крыло результирующей силы $\vec{F}$ со стороны воздуха.

Вертикальная составляющая этой силы (сила $\vec{F}_y$) называется подъёмной силой, направленной против силы тяжести тела. Если эта сила больше силы тяжести самолета, то он будет подниматься вверх; если меньше, то опускаться. Горизонтальная составляющая силы $\vec{F}$ представляет собой лобовое сопротивление $\vec{F}_x$, которое преодолевается тягой винта $\vec{F}_{дв}$, или струёй газа из реактивного двигателя.



Николай Егорович Жуковский (1847–1921)

Конструирование и расчёт самолетов производится на основе аэродинамической теории. В разработку этой теории большой вклад внес наш замечательный учёный

Николай Егорович Жуковский и его ученики. В честь него назван г. Жуковский в Московской области, где находится Центральный Аэрогидродинамический Институт (ЦАГИ). Жуковский дал формулу для определения подъёмной силы самолета, которая лежит в основе расчётов при постройке самолетов. Жуковскому принадлежат важные исследования закономерностей движения жидкости, которые получили широкое практическое применение. Ещё на заре развития авиации Жуковский говорил: «Человек не имеет крыльев и по отношению веса своего тела к весу мускулов в 72 раза слабее птицы. Но я думаю, что он полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума». Прошло немного времени, и эти пророческие слова оправдались.

Упражнения

1 Подвесьте рядом две банки от кофе с водой на длинных нитях. Затем сильно подуйте между ними. Банки притянутся друг к другу. Почему?

2 Уравновесьте чашечные лабораторные весы и дуньте под одну чашку. Опустится она или поднимется? Почему?

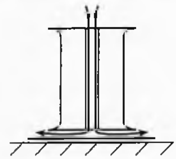
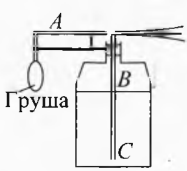


Рис. 31. *Дуть или не дуть*



Пузырек с одеколоном

Рис. 32. *Пульверизатор*

3 Вырежьте легкий картонный кружок и положите на стол. Приблизьте к нему катушку (рис. 31). 1) Втяните в себя воздух через катушку. Что произойдет с кружком? Почему? 2) Подуйте сильно в отверстие катушки. Что произойдет с кружком? Почему?

4 На рис. 32 изображен пульверизатор. Если сжать грушу, то из трубки A выдувается воздух, а жидкость поднимется по трубке CB и при выходе из неё распыляется. Изготовить такой прибор и объяснить его действие.

5 Тело массой m плотностью ρ падает в среде плотностью ρ_c. Определить, от каких факторов зависит ускорение падающего тела.

6 Оценить (численно) максимальную скорость, которую может развить парашютист в затяжном прыжке (до раскрытия парашюта). Известно, что сила сопротивления воздуха F, действующая на парашютиста, является степенной функцией скорости υ, характерного размера тела l и плотности воздуха ρ: $F_c = \gamma\rho^k l^n \upsilon^\alpha$, где γ – безразмерный множитель порядка единицы, k, n, α – некоторые числа. Плотность воздуха принять равной ρ=1 кг/м^3. Характерный размер парашютиста, когда он стремится набрать максимальную скорость l=0,5 м (летит головой вниз).

7 Деревянную лодку массы m=150 кг оттолкнули от берега озера с начальной скоростью υ_0=2 м/с. Сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна её скорости: $\vec{F}_c = -\beta\vec{\upsilon}$. На какое расстояние S лодка удалится от берега, если β=20 Н·с/м?

8 Деревянная линейка закреплена шарнирно за один конец, другой конец линейки опущен в воду. Линейка находится в наклонном положении так, что погруженная часть составляет её половину. Определить плотность дерева, из которого сделана линейка.

9 С большой высоты падает стальной шар. Чему равен модуль ускорения шара перед упругим ударом о горизонтальную подставку, лежащую на Земле? А сразу после удара?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

5 На тело действуют три силы (рис. 33): сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления. Согласно второму закону Ньютона, $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{F}_A + \vec{F}_c$.

В проекции на ось Y имеем: $ma=F_т-F_A-F_c$,
где $F_т=mg$; $F_A=\rho_c gV$; $F_c=\beta\cdot\upsilon^\alpha$.

$$a = g - \frac{\rho_c gV}{m} - \frac{\beta\upsilon^\alpha}{m}; \quad m=\rho_т\cdot V; \quad a = g\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_т}\right) - \frac{\beta\upsilon^\alpha}{m}.$$

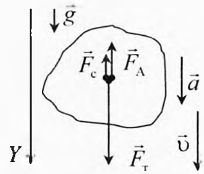


Рис. 33. *Ускорение несвободного падения*

Итак, ускорение тела при падении в газе или жидкости находится в линейной зависимости от ускорения силы тяжести. Оно зависит также от отношения плотности среды к плотности тела. Чем больше плотность тела по сравнению с плотностью среды, тем больше ускорение тела.

Ускорение зависит от набранной скорости: чем больше скорость, тем больше сила трения, тем меньше ускорение тела. Ускорение зависит от формы тела, вязкости среды и от массы тела. При прочих равных условиях, чем больше масса тела, тем больше ускорение, а значит и набираемая скорость: шар стальной падает быстрее, чем такой же по объему шар деревянный или стальной с полостью. При достижении определенной скорости сила Архимеда и сила трения уравновешивают силу тяжести, и далее тело движется без ускорения.

Например, парашютист с раскрытым парашютом падает примерно со скоростью 5 м/с, а с нераскрывшимся парашютом в 10 раз большей. Изменяя свое положение относительно направления скорости, парашютисты могут двигаться быстрее или медленнее, догонять друг друга и выполнять различные фигуры, пока не настанет время рассоединяться и раскрывать парашюты.

6 Для определения чисел k, n, α воспользуемся соображениями размерности. Сила измеряется в Н=кг·м/с^2, плотность в кг/м^3, характерный размер тела в м, скорость в м/с. Отсюда

$$\frac{кг\cdot м}{с^2} = \frac{кг^k}{м^{3k}}\cdot м^n\cdot\frac{м^\alpha}{с^\alpha}; \quad \Rightarrow \quad кг\cdot м\cdot с^{-2} = кг^k\cdot м^{n+\alpha-3k}\cdot с^{-\alpha}.$$

Приравнивая степени при кг, м, с в левой и правой частях равенства, получим:

$$1=k, \qquad 1=n+\alpha-3k, \qquad -2=-\alpha.$$

Отсюда $k=1$, $\alpha=2$, $n=2$. Следовательно, $F_c = \gamma\rho l^2\upsilon^2$.

Установившаяся скорость парашютиста в затяжном прыжке определяется из соотношения, что сила тяжести уравновешивается силой сопротивления воздуха:

$$F_т=F_c; \quad Mg = \gamma\rho l^2\upsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{Mg}{\gamma\rho}}.$$

Возьмем массу парашютиста M=90 кг, $\gamma\approx1$, $g\approx10$ м/с^2: $\upsilon \approx \frac{1}{0,5}\sqrt{\frac{90\cdot10}{1\cdot1}}$ =60 м/с.

Если масса парашютиста M=60 кг, то $\upsilon\approx50$ м/с.

7 В горизонтальном направлении на лодку действует только сила сопротивления воды (рис. 34). Согласно II закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_c$.

Или в проекции на ось X: $ma_x = F_{cx}$.

Подставляя выражение $F_{cx} = -\beta\upsilon_x$, получим:

$$ma_x = -\beta\upsilon_x.$$

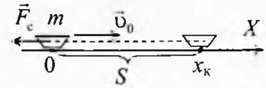


Рис. 34. *Сопротивление воды*

Умножим это уравнение на небольшой промежуток времени Δt:

$$ma_x\Delta t = -\beta\upsilon_x\Delta t.$$

Учитывая, что $a_x \cdot \Delta t = \Delta\upsilon_x$; $\Delta\upsilon_x \cdot \Delta t = \Delta x$, получим: $m \cdot \Delta\upsilon_x = -\beta \cdot \Delta x$.

От начального момента времени до конца движения проекция скорости тела на ось X уменьшается от $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$ до $\upsilon_{кx} = 0$, а координата от $x_0 = 0$ до $x_к = S$. Суммируя последнее уравнение за всё время движения, получим:

$$m\Sigma\Delta\upsilon_x = -\beta\Sigma\Delta x, \quad \Rightarrow \quad m(\upsilon_{кx} - \upsilon_{0x}) = -\beta(x_к - x_0), \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0 = \beta S, \quad \Rightarrow \quad S = m\upsilon_0/\beta = 15 \text{ м}.$$

8 Относительно шарнирного соединения (т. O) сила тяжести $\vec{F}_т$ стремится вращать линейку против часовой стрелки, а сила Архимеда $\vec{F}_А$ – по часовой стрелке, а момент силы упругости нити равен нулю (рис. 35). Их вращающие моменты взаимно уравновешиваются $|M_т| = |M_А|$. Сила тяжести $F_т = mg = \rho Vg$ приложена к центру тела, её плечо $d_т = \dfrac{l}{2}\sin\alpha$, где l – длина линейки, α – угол наклона линейки относительно вертикали.

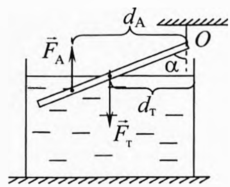


Рис. 35. *Погружение линейки на шарнире*

Сила Архимеда прилагается к середине погруженной части $F_А = \rho_в g\dfrac{V}{2}$, её плечо $d_А = \dfrac{3}{4}l\sin\alpha$. Значит согласно правилу моментов сил: $F_т \cdot d_т = F_А \cdot d_А$;

$$\Rightarrow \rho Vg \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha = \rho_в g\frac{V}{2} \cdot \frac{3}{4}l\sin\alpha; \Rightarrow \rho = 0{,}75\rho_в; \quad \rho = 750 \text{ кг/м}^3.$$

Примечание. Интересно отметить, что плечи обеих сил пропорциональны синусу угла наклона. Поэтому угол наклона не влияет на соотношение между моментами сил тяжести и Архимеда. Следовательно, при разных углах наклона погруженная часть будет одной и той же.

9 Поскольку шар падает с большой высоты, то через некоторое время после начала движения скорость шара станет постоянной, а сила тяжести будет полностью уравновешена силой сопротивления воздуха: $a_1 = 0$; $0 = mg - F_c$.

Сразу после упругого удара скорость шара поменяет направление на противоположное. Поскольку модуль скорости сразу после удара такой же, как и до удара, то сила сопротивления со стороны воздуха останется такой же, но теперь будет направлена вниз. Поэтому ускорение шара сразу после удара будет равно $2g$ и направлено вниз: $ma_2 = mg + F_c = 2mg \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2g$.

Глава 7. Динамика вращательного движения

Не следует думать, что новые идеи побеждают путём острых дискуссий, в которых создатели нового переубеждают своих оппонентов. Старые идеи уступают новым таким образом, что носители старого умирают, а новое поколение воспитывается в новых идеях, воспринимая их как нечто само собой разумеющееся.

Макс Планк

§ 57. Момент инерции

Динамика вращательного движения *– раздел механики, в котором изучается взаимодействие вращающихся тел.*

В главе «Статика» отмечалось, что тело находится в равновесии в инерциальной системе отсчёта, если сумма сил, приложенных к нему, равна нулю и равен нулю суммарный момент сил, приложенных к телу. При этом тело может равномерно двигаться как целое и равномерно вращаться. А что будет, если к телу приложить некоторый момент силы, отличный от нуля? Оно начнет вращаться с некоторым угловым ускорением. Опыт показывает, что угловое ускорение тела зависит от момента сил, приложенных к нему. Кроме этого, оно зависит от массы тела и от распределения массы относительно оси вращения. Чем большая часть массы тела находится дальше от оси вращения, тем труднее его раскручивать.

Способность тела препятствовать изменению его угловой скорости при действии на него внешних моментов сил характеризуется физической величиной, называемой ***моментом инерции****.*

У одного и того же тела различно распределение массы относительно различных осей вращения. Поэтому, когда речь идёт о моменте инерции тела, нужно учитывать, относительно какой оси вращения его надо вычислять. *Момент инерции* тела более верно было бы назвать *моментом инертности* тела. Момент инерции обозначается буквой I.

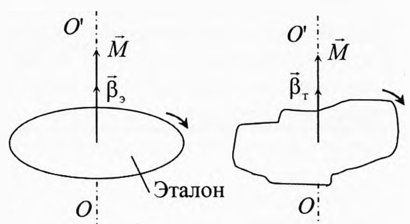


Рис. 1. *Угловое ускорение тела и эталона*

Момент инерции – скалярная величина. Действительно, как ни расположено тело в пространстве, способность к вращению тела будет проявляться одинаково относительно данной оси, связанной с телом.

Способ измерения момента инерции аналогичен способу измерения массы. Если подействовать одинаковым моментом сил на данное тело и эталон (рис. 1), момент инерции которого принят за единицу, то момент инерции тела будет равен отношению углового ускорения эталона к угловому ускорению тела.

Если $\vec{M}_т = \vec{M}_э = \vec{M}$, то $\dfrac{I_т}{I_э} = \dfrac{\beta_э}{\beta_т}$, $\Rightarrow$ $\boxed{I_т = \dfrac{\beta_э}{\beta_т} \cdot I_э}$.

***Момент инерции** – скалярная величина, характеризующая вращательную инертность тела относительно данной оси вращения. Момент инерции равен отношению углового ускорения эталона (момент инерции которого принят за единицу) к угловому ускорению тела, получаемым при одинаковых вращающих моментах сил, приложенных к каждому из них.*

§ 58. Основной закон динамики вращательного движения (уравнение Эйлера)

Возьмем «диск вращающийся» из стандартного школьного оборудования, намотаем на один из шкивов нить, и через блок будем подвешивать к нити разные грузы (рис. 2). На диск при этом будут действовать разные вращающие моменты. Груз будет опускаться, а диск раскручиваться с некоторым угловым ускорением. Те же опыты можно повторить, намотав нить на второй шкив этого диска. Затем можно ставить на диск симметрично одинаковые грузы и вновь измерять зависимость углового ускорения диска от вращающего момента сил и момента инерции. Грузы располагают на диске симметрично, чтобы не было перекосов при вращении*.

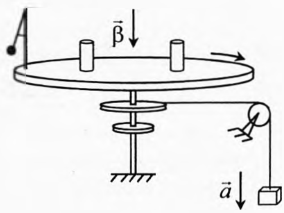


Рис.2. *Диск вращающийся*

Многочисленные опыты показывают, что: 1) угловое ускорение тела (диска с грузами) прямо пропорционально вращающему моменту при неизменном моменте инерции; 2) угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции при неизменном вращающем моменте. Обобщая все подобные, опыты можно сформулировать основной закон динамики вращательного движения, который открыл родившийся в г. Базеле (Швейцария) математик, механик и физик Леонард Эйлер.

В любой инерциальной системе отсчёта при действии любых сил тело движется с угловым ускорением, которое прямо пропорционально результирующему моменту сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}}.$$

* При сезонной замене колес автомобиля производится их обязательная балансировка, при которой добиваются равномерного вращения колеса, при необходимости устанавливаются грузики-компенсаторы. Если же колесо разбалансировано, то это приводит к биению руля на большой скорости, постепенно разбивается рулевое управление, могут выйти из строя амортизаторы, подшипники и прочие детали подвески.

Этот закон аналогичен второму закону Ньютона для вращения тела относительно неподвижной оси. Он отражает связь между моментами сил, приложенных к телу, моментом инерции тела и угловым ускорением тела.

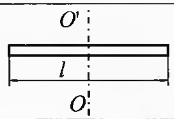
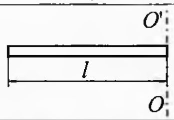
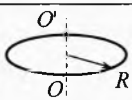
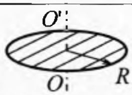
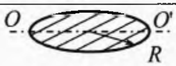
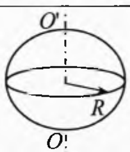
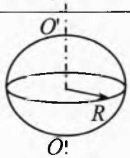
Из основного закона динамики вращательного движения следует, что угловое ускорение всегда направлено так же, как его причина (результирующий вращающий момент сил).

Этот закон также носит название ***динамическое уравнение Эйлера для твёрдого тела***.

Л. Эйлер обладал выдающимися способностями, издал огромное количество работ (ок. 850). Причём наиболее продуктивные в научном плане были его годы жизни в России с 1727 г. по 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни в Петербурге. Здесь им было подготовлено около 500 научных работ.

Леонард Эйлер
(1707–1783)

Таблица 2. Моменты инерции некоторых тел

Тело		**Ось вращения проходит**	**Момент инерции**
Стержень		через середину стержня, перпендикулярно его длине	$\frac{1}{12}ml^2$
Стержень		через один из концов стержня, перпендикулярно его длине	$\frac{1}{3}ml^2$
Обруч (тонкое кольцо)		через центр обруча, перпендикулярно плоскости обруча	mR^2
Диск		через центр диска, перпендикулярно плоскости диска	$\frac{1}{2}mR^2$
Диск		через центр диска, вдоль его диаметра	$\frac{1}{4}mR^2$
Шар		через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$
Тонкостенная сфера		через центр сферы	$\frac{2}{3}mR^2$

§ 59. Вычисление момента инерции

Пусть к материальной точке массой m, движущейся по окружности радиуса R, приложена сила $\vec{F}$, совпадающая по направлению с её скоростью (рис. 3). Она создаёт телу касательное ускорение, определяемое вторым законом Ньютона:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\vec{F}}{m}.$$

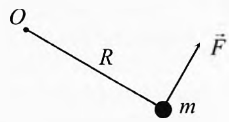


Рис. 3. *Момент инерции материальной точки*

При этом тело получает угловое ускорение, согласно основному закону динамики вращательного движения: $\beta = \frac{M}{I_{(\bullet)}}$, где $M = F \cdot R$ – вращающий момент силы $\vec{F}$ относительно оси вращения O.

Учитывая также, что $\beta = \frac{a_\tau}{R}$ получим:

$$I_{(\bullet)} = \frac{M}{\beta} = \frac{F \cdot R}{\beta} = \frac{m \cdot a_\tau \cdot R}{\beta} = \frac{m \cdot a_\tau \cdot R \cdot R}{a_\tau} = m \cdot R^2.$$

***Момент инерции точечного тела** массой m, имеющего радиус вращения R, равен произведению массы тела и квадрата радиуса его вращения.*

$$\boxed{I_{(\bullet)} = mR^2}.$$

Размерность момента инерции $[I]$=кг·м^2.

Момент инерции (как и масса тела) является аддитивной величиной, то есть момент инерции тела равен арифметической сумме моментов инерции частиц тела (материальных точек) относительно данной оси:

$$I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + ... + m_NR_N^2 = \sum_{i=1}^{N} m_iR_i^2; \qquad \boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_iR_i^2}.$$

Очень просто вычислить момент инерции тонкого кольца относительно оси, проходящей через центр кольца, перпендикулярной плоскости кольца (рис. 4). В этом случае радиусы всех частиц одинаковы и равны радиусу кольца:

$$I_{\text{т.к.}} = \sum_{i=1}^{N}(m_iR_i^2) = \sum_{i=1}^{N}(m_iR^2) = R^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{N} m_i = m_{\text{т.к.}}$ – масса тонкого кольца.

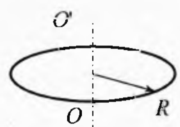


Рис. 4. *Момент инерции тонкого кольца*

Значит ***момент инерции тонкого кольца***:

$$I_{\text{т.к.}} = m_{\text{т.к.}}R^2.$$

Момент инерции сложного тела можно вычислить, применяя высшую математику или экспериментально: измерить момент сил, приложенных к телу, и его угловое ускорение, и используя основной закон динамики вращательного движения, вычислить момент инерции:

$$I = \frac{M}{\beta}.$$

§ 60. Теорема Гюйгенса–Штейнера


Христиан Гюйгенс (1629–1695)


Якоб Штейнер (1796–1863)

Найдём связь между моментом инерции тела произвольной формы массой m относительно двух различных параллельных осей.

Пусть оси проходят через точки O и A перпендикулярно плоскости рисунка 5. Для простоты вывода рассмотрим плоскую фигуру. Проведем радиус-векторы $\vec{R}_i$ и $\vec{r}_i$ от осей O и A до участка тела с элементарной массой Δm_i. В этом случае $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{d}$, где $\vec{d}$ – радиус вектор $\overrightarrow{OA}$. В соответствии с теоремой косинусов,

$$r_i^2 = R_i^2 + d^2 - 2d \cdot R_i \cdot \cos\alpha_i .$$

Умножим это уравнение на Δm_i:

$$r_i^2 \Delta m_i = R_i^2 \Delta m_i + d^2 \Delta m_i - 2d \cdot R_i \cdot \Delta m_i \cdot \cos\alpha_i .$$

Просуммируем это уравнение для всех участков тела:

$$\sum r_i^2 \Delta m_i = \sum R_i^2 \Delta m_i + d^2 \cdot \sum \Delta m_i - 2d \cdot \sum R_i \cdot \Delta m_i \cdot \cos\alpha_i .$$

где $\sum \Delta m_i = m$ – общая масса тела; $x_ц$ – координата центра масс по оси OX;

$\sum r_i^2 \cdot \Delta m_i = I_A$ – момент инерции тела m относительно оси A (перпендикулярной плоскости рисунка);

$\sum R_i^2 \cdot \Delta m_i = I_O$ – момент инерции тела m относительно оси O (перпендикулярной плоскости рисунка).

$\sum R_i \cdot \Delta m_i \cdot \cos\alpha_i = \sum x_i \cdot \Delta m_i = m \cdot x_ц$.

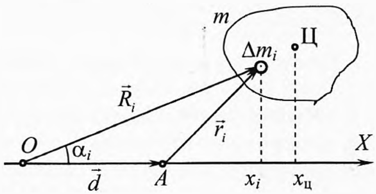


Рис. 5. *Теорема Гюйгенса–Штейнера*

Таким образом,

$$I_A = I_O + md^2 - 2d \cdot m \cdot x_ц .$$

Рассмотрим частный случай, когда ось O проходит через центр масс тела. Тогда $x_ц$=0. И предыдущая формула упрощается, принимая вид:

$$\boxed{I_A = I_O + md^2} .$$

Это важное соотношение называется ***теоремой Гюйгенса–Штейнера*** в честь голландского физика, математика и астронома Христиана Гюйгенса и швейцарского математика Якоба Штейнера.

Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной md^2, где d – расстояние между осями.

✍ **Пример 1.** Как отличаются угловое ускорение однородного шара, который вращается сначала относительно оси, проходящей через его центр, а второй раз – относительно оси, касающейся его поверхности, если момент силы, приложенной к шару, в обоих случаях был одинаков?

➥**Решение.** В первом случае момент инерции I_0=0,4mR^2 (рис. 6). Во втором случае согласно теореме Гюйгенса–Штейнера: $I=I_0+mR^2$, где R – расстояние от центра тяжести до новой оси вращения.

$$I=0{,}4mR^2+mR^2=1{,}4mR^2.$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения (уравнению Эйлера):

$$\beta_0=M/I_0; \quad \beta=M/I; \quad \Rightarrow$$
$$\beta_0/\beta=I/I_0=(1{,}4m\cdot R^2)/(0{,}4m\cdot R^2)=3{,}5.$$ ⬅

✓ **Ответ.** Во 2-м случае шар будет раскручиваться в 3,5 раза медленнее.

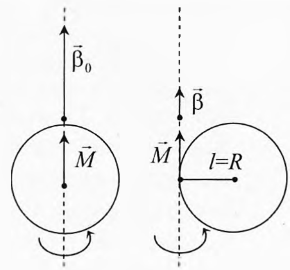


Рис. 6. *Смещение оси вращения шара*

✍ **Пример 2.** Через однородный цилиндрический блок массой m=10 кг перекинута нить. Один конец нити прикреплен к бруску массой m_1=20 кг, лежащему на столе, коэффициент трения между бруском и столом μ=0,4. На другом конце нити весит груз массой m_2=12 кг. С каким ускорением будет двигаться система грузов?

Дано.
m=10 кг
m_1=20 кг
m_2=12 кг
μ=0,4
a – ?

➥**Решение.** Для грузов согласно второму закону Ньютона (рис. 7):

$$m\vec{a}_1=\vec{T}_1+\vec{F}_{тр}+\vec{N}+\vec{F}_{т1},$$
$$m\vec{a}_2=\vec{T}_2+\vec{F}_{т2}.$$

Учитывая, что $a_1=a_2=a$, в проекции по осям X и Y получим:

$$m_1a=T_1-F_{тр}; \quad N-m_1g=0; \quad -m_2a=T_2-m_2g.$$

Учитывая, что $F_{тр}=\mu\cdot N$, получим:

$$F_{тр}=\mu m_1g \quad \Rightarrow \quad m_1a=T_1-\mu m_1g.$$

Для блока согласно закону динамики вращательного движения: $I\vec{\beta}=\vec{M}_1+\vec{M}_2$

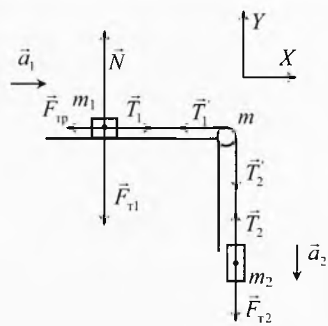


Рис. 7. *Грузы на массивном блоке*

Учитывая, что: $\beta=\dfrac{a}{R}$, $I=\dfrac{mR^2}{2}$, $T_1=T_1'$, $T_2=T_2'$, и что моменты сил T_1' и T_2' стараются вращать блок в противоположные стороны, получим: $\dfrac{mR^2}{2}\cdot\dfrac{a}{R}=(T_2-T_1)R$; $\Rightarrow$ $0{,}5ma=T_2-T_1$.

Решим систему трёх полученных уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5ma=T_2-T_1, \\ m_1a=T_1-\mu m_1g, \\ -m_2a=T_2-m_2g; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &0{,}5ma=m_2g-m_2a-m_1a-\mu m_1g, \\ &(0{,}5m+m_2+m_1)a=m_2g-\mu m_1g; \end{aligned}$$

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{0{,}5m + m_2 + m_1}; \qquad a = \frac{(12 - 0{,}4 \cdot 20) \cdot 9{,}8}{0{,}5 \cdot 10 + 12 + 20} = 1{,}06 \text{ м/с}^2 \approx 1 \text{ м/с}^2.$$

✓ **Ответ.** Система грузов будет двигаться с ускорением 1 м/с^2.

§ 61. Импульс момента силы. Момент импульса тела

Импульс момента силы. Момент силы характеризует мгновенное вращающее действие силы. Как правило, при решении задач важно знать результат действия момента силы не за мгновение, а за определенный промежуток времени. Для этой цели вводится физическая величина «*импульс момента силы*». Импульс момента силы – векторная величина, направленная так же, как момент силы. Импульс момента силы тем больше, чем больше момент силы и время его действия. Импульс момента силы обозначим $\vec{\lambda}$. По аналогии с импульсом силы в поступательном движении, импульс момента силы определим как произведение среднего момента силы на время его действия:

$$\boxed{\vec{\lambda} = \vec{M}_{\text{ср}} \cdot \Delta t}, \qquad [\lambda] = \text{Н·м·с} = \frac{\text{кг·м}}{\text{с}^2}\text{·м·с} = \frac{\text{кг·м}^2}{\text{с}}.$$

***Импульс момента силы** – это векторная величина, характеризующая вращающее действие момента силы в течение определенного промежутка времени. Импульс момента силы равен произведению среднего момента силы на время его действия.*

Момент импульса тела. Если вращающийся диск, который с одной стороны прикреплен к оси, привести в контакт с неподвижным диском (рис. 8), то второй диск тоже придёт во вращение. Если мы положим на вращающийся диск монету, то она начнет вращаться с диском (при достаточном трении). Значит, вращающиеся тела способны оказывать вращающее действие на другие тела. Для того, чтобы характеризовать возможное действие со стороны вращающегося тела, вводится понятие «*момент импульса тела*» или просто «*момент импульса*».

Момент импульса – векторная величина, так как возможное действие со стороны вращающегося тела на другие тела направлено определенным образом.

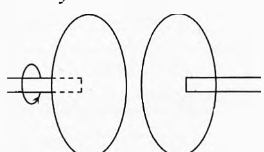


Рис. 8. *Сцепление дисков передаёт вращающий момент*

Момент импульса тела обозначается $\vec{L}$. Он зависит от момента инерции тела и его угловой скорости. Чем больше эти величины, тем больше его возможное действие на другие тела.

По аналогии с импульсом тела в поступательном движении, момент импульса будем считать равным произведению момента инерции на угловую скорость.

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}, \qquad [L] = (\text{кг·м}^2)\cdot\frac{1}{\text{с}} = \frac{\text{кг·м}^2}{\text{с}}.$$

Видно, что момент импульса тела сонаправлен с его угловой скоростью, то есть прилагается к оси вращения.

***Момент импульса тела** – это векторная величина, характеризующая вращательное движение тела и его возможное вращающее действие на другие тела. Момент импульса равен произведению момента инерции тела на его угловую скорость в данной системе отсчёта.*

Почему величина $\vec{L}$ называется моментом импульса тела? Пусть материальная точка массы m вращается по окружности радиуса R. Её момент инерции $I=mR^2$, тогда её момент импульса $L_{(\bullet)} = mR^2\omega$, но $\omega R=\upsilon$ – скорость тела, следовательно,

$$L_{(\bullet)} = m\upsilon \cdot R.$$

Здесь R можно рассматривать как «плечо» импульса тела $m\upsilon$. И как произведение силы на плечо мы называли моментом силы, так, по аналогии, произведение импульса тела на плечо R называем «*моментом импульса*». Раньше он назвался «момент количества движения».

Если скорость материальной точки направлена под некоторым углом α к направлению к центру вращения (рис. 9), то:

$$\boxed{L_{(\bullet)} = m\upsilon R \cdot \sin\alpha}.$$

где $b=R\cdot\sin\alpha$ – иногда называется *прицельным расстоянием*.

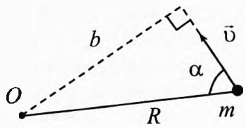


Рис. 9. *Момент импульса материальной точки*

Связь между импульсом момента силы и моментом импульса тела. Из основного уравнения динамики вращательного движения $\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}$ и определения углового ускорения $\vec{\beta} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ следует, $\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{M}}{I}$, $\Rightarrow$ $I\Delta\vec{\omega} = \vec{M}\Delta t$.

С течением времени момент инерции тоже может измениться, поэтому его следует перенести за знак изменения:

$$\Delta(I\vec{\omega}) = \vec{M}\Delta t \qquad \text{или} \qquad \boxed{\Delta\vec{L} = \vec{\lambda}}. \qquad (1)$$

Формула (1) выражает *закон **изменения момента импульса***.

Изменение момента импульса тела (системы тел) равно импульсу моментов сил, приложенных к телу, за это же время.

Под $\vec{M}$ понимается сумма моментов всех сил, приложенных к телу, которые могут увеличивать или уменьшать момент импульса системы.

Например, двигатель электропроигрывателя может раскрутить диск до определенной угловой скорости, то есть придать ему определенный момент импульса.

Силы трения, действующие в системе, всегда ведут к уменьшению момента импульса системы, например, отключенное точило тормозится силами сопротивления, и точильный камень прекращает вращаться. Если вращающий момент двигателя уравновешивает момент сил трения, то момент импульса системы сохраняется. Например, с постоянной угловой скоростью вращается диск работающего электропроигрывателя, с определенной скоростью вращаются турбины и др.

Из (1) следует, что если суммарный момент сил, приложенных к телу, равен нулю ($\vec{M} = 0$), то момент импульса сохраняется:

$$\Delta\vec{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const} \quad \text{или} \quad \boxed{I\omega = \text{const}} \tag{2}$$

Значит,

$$\boxed{I_1\omega_1 = I_2\omega_2} \tag{3}$$

Выражения (2), (3) представляют ***закон сохранения момента импульса***.

Момент импульса системы тел сохраняется (то есть остаётся неизменным с течением времени) в инерциальной системе отсчёта, если сумма моментов всех сил, приложенных к системе тел, равна нулю.

Этот закон можно применять при решении задач не только тогда, когда $\vec{\lambda}=0$, но и когда его значение во много раз меньше начального момента импульса, то есть при

$$|\vec{\lambda}| \ll |\vec{L}_0|.$$

Закон сохранения момента импульса установил Л. Эйлер в 1746 г. *Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства*, то есть однородности свойств пространства в любом направлении.

Закон изменения момента импульса (1) можно записать более подробно:

$$\boxed{\vec{L} - \vec{L}_0 = \vec{\lambda}_{\text{ст}} + \vec{\lambda}_{\text{тр}}},$$

где $\vec{\lambda}_{\text{тр}}$ – импульс момента силы трения, $\vec{\lambda}_{\text{ст}}$ – импульс момента всех остальных сторонних сил, действующих на тело.

Изменение момента импульса тела (системы тел) равно суммарному импульсу моментов всех сторонних сил, приложенных к телу, и сил трения.

Возьмем для примера стеклянную трубку с округлыми отшлифованными краями и пропустим через неё шёлковую нить, к концу которой привяжем стальной шарик (рис. 10). Приведем шарик во вращение в горизонтальной плоскости. При втягивании нити в трубку момент сторонней силы $\vec{F}$ на шарик будет равен нулю, а моментом силы трения шарика о воздух и нити о воздух и трубку можно пренебречь. Поэтому момент импульса $L=I\omega$ будет практически неизменным. А так как при втягивании нити момент инерции будет уменьшаться пропорционально квадрату радиуса ($I=mR^2$), то угловая скорость будет увеличиваться в такой же степени:

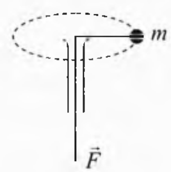


Рис. 10. *Увеличение ω при вытягивании нити*

$$\omega \sim \frac{1}{I} \quad \text{или} \quad \omega \sim \frac{1}{R^2}.$$

Яркие примеры проявления закона сохранения момента импульса наблюдаются на тренировках и соревнованиях по фигурному катанию. Фигурист, раскинув руки, раскручивается в горизонтальной плоскости и совершает прыжок. Затем он сразу сдвигает ноги и прижимает руки к телу, при этом его момент инерции уменьшается, а угловая скорость увеличивается согласно закону сохранения момента импульса. Сделав несколько оборотов (от одного до четырех), фигурист опускается на лед и сразу раскидывает руки в стороны, увеличивая момент инерции тела, чтобы уменьшить угловую скорость и удержаться в равновесии. Поскольку момент инерции человека может изменяться до семи раз при различных положениях частей тела, то возможность иллюстрации закона сохранения момента импульса в фигурном катании значительна. Не случайно фигурист часто заканчивает свою программу осевым вращением, поднимая руки вверх над головой. При этом момент инерции тела минимален, а, значит, максимальна частота вращения.

Замечательное проявление закона сохранения момента импульса наблюдаем в особенности устройства вертолета. Подъемная сила и сила тяги вертолета создаётся несущим винтом, расположенным над корпусом в горизонтальной плоскости. Но при наличии одного винта вертолет неизбежно пришёл бы во вращение, противоположное винту. Ведь до запуска двигателя момент импульса системы «винт-корпус» был равен нулю, он должен быть равен нулю и когда винт начнет вращаться, значит корпус получит момент импульса в другую сторону:

$$I_в\omega_в - I_к\omega_к = 0; \quad \omega_к = \omega_в \frac{I_в}{I_к}.$$

Чтобы вертолет не вращался, делают второй винт соосно с первым, но вращающийся в противоположном направлении (или в конце хвостовой балки малый винт, вращающийся в вертикальной плоскости). При вращении хвостового винта образуется вращающий момент в горизонтальной плоскости, компенсирующий «отдачу» несущего винта. Хвостовой винт называется рулевым, так как выполняет ещё рулевые функции. Таковы, например, вертолеты конструкции М. Л. Миля. У вертолетов конструкции А. И. Камова два несущих винта, расположенных соосно один над другим и вращающихся в противоположных направлениях. Таким вертолетам хвостовой винт не нужен.

На некоторых военных вертолетах устанавливают дополнительные винты впереди, как у самолетов, для увеличения скорости и маневренности.

Широчайшее применение имеют гироскопические приборы.

***Гироскоп** – это быстровращающееся тело в специальном кардановом подвесе, благодаря которому ось вращения тела «O» может свободно вращаться и занимать любое положение в пространстве* (рис. 11).

Если тело раскрутить, а потом повернуть стойку гироскопа произвольным образом, то ось вращения тела останется относительно звезд в том же положении, так как момент импульса тела при отсутствии внешних воздействий (если трением в системе можно пренебречь) сохраняется в любой инерциальной системе отсчёта.

В морфлоте и авиации используются гирокомпасы. В системе «автопилот» используют гировертикали и гирогоризонтали. Гироскопы являются важной составной частью систем управления космическими аппаратами.

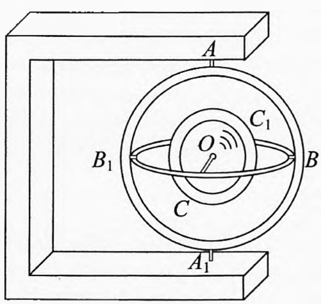


Рис. 11. *Гироскоп*

§ 62. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия материальной точки вычисляется по формуле:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Если тело движется поступательно, то его кинетическая энергия вычисляется так же. А как вычислить кинетическую энергию тела, которое движется поступательно и при этом вращается? Рассмотрим случай, когда тело только вращается.

Пусть твёрдое тело произвольной формы, массой m вращается относительно оси OO' с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 12).

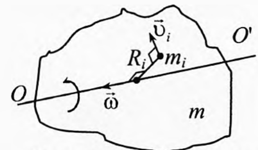


Рис. 12. *Кинетическая энергия вращающегося тела*

Разобьем тело на бесконечно малые части, имеющие массы m_1, m_2, ..., m_N и радиусы вращения R_1, R_2, ..., R_N. Т.к. все части являются материальными точками, то

$$E_{к.вр} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + ... + \frac{m_N\upsilon_N^2}{2}.$$

Учитывая, что $\upsilon_i = \omega R_i$, получим:

$$E_{к.вр} = \frac{m_1\omega^2R_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2R_2^2}{2} + ... + \frac{m_N\omega^2R_N^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + ... + m_NR_N^2).$$

$$E_{к.вр} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} m_iR_i^2\right)\omega^2}{2}.$$

Поскольку $m_iR_i^2 = I_i$ – момент инерции i-го участка тела, то

$$E_{к.вр} = \frac{\omega^2}{2}\cdot\sum_{i=1}^{N} I_i.$$

Так как момент инерции – аддитивная величина, то $\sum_{i=1}^{N} I_i = I$ – момент инерции всего тела относительно оси OO'. Значит, кинетическая энергия вращающегося тела

$$\boxed{E_{к.вр} = \frac{I\omega^2}{2}}.$$

В случае, когда тело движется поступательно и вращается относительно оси, проходящей через центр масс, его кинетическая энергия состоит из двух частей: энергии поступательного и энергии вращательного движения

$$E_к = E_{к.пост} + E_{к.вр} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

где υ – скорость центра массы тела,

I – момент инерции тела относительно оси OO', вокруг которой вращается тело, и которая проходит через центр масс тела.

§ 63. Законы Кеплера

До середины XVII в. господствовала геоцентрическая система мира Птолемея, согласно которой центральное положение во Вселенной занимает неподвижная Земля, вокруг которой вращаются Солнце, Луна, планеты и звёзды. В 1543 г. польский астроном Николай Коперник опубликовал перед смертью свое учение «Об обращении небесных сфер», объясняя видимые движения небесных светил вращением Земли вокруг оси и обращением планет, в том числе Земли вокруг Солнца. Но его учение было запрещено католической церковью с 1616 по 1828 г. из-за чего в свое время пострадал Г. Галилей.

Николай Коперник (1473–1543), памятник в Варшаве

Тихо Браге (1546–1601)

Иоганн Кеплер (1571–1638)

Король Дании Фредерик II подарил астроному Тихо Браге остров, на котором он построил в 1576 г. обсерваторию «Ураниборг» и свыше 20 лет вел определение положения светил с наивысшей для того времени точностью. Он доказал, что кометы – небесные тела; составил каталог звезд... Тихо Браге был последним крупным астрономом, кто придерживался геоцентрической системы мира. У него работал немецкий астроном Иоганн Кеплер, который не мог производить астрономические наблюдения, ибо у него была болезнь «двойственность зрения», например, вместо одной звезды он видел сразу две. Однако он полезно выполнял другие функции. В 1601 году Тихо Браге умер. После его смерти многочисленные результаты астрономических наблюдений достались Кеплеру. Подбирая различные геометрические фигуры, и сравнивая их с характером движения планет, он обнаружил, что планеты движутся по эллипсам. Таким образом, он открыл первый закон, а затем II и III законы, названные его именем. Отметим, что в то время законы Ньютона и закон всемирного тяготения не были открыты. Таким образом, Иоганн Кеплер стал одним из творцов астрономии нового времени.

Сформулируем ***законы Кеплера***.

I закон Кеплера. *Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

II закон Кеплера. *Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём площадь сектора орбиты, описанной радиус-вектором, проведенным от Солнца к планете, изменяется прямо пропорционально времени.*

III закон Кеплера. *Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний (больших полуосей орбит) от Солнца.*

Вывод III закона Кеплера для кругового движения. При круговом движении (рис. 13) сила гравитации $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ создаёт нормальное (центростремительное) ускорение планете $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r}.$$

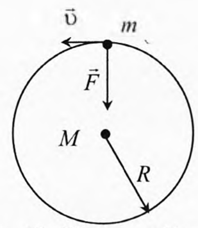


Рис. 13. *III закона Кеплера для кругового движения*

За период планета проходит путь $2\pi r$: $2\pi r = \upsilon \cdot T$. Решая эти уравнения, получим:

$$T = 2\pi\frac{r}{\upsilon} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{r^3} = \text{const}.$$

Для двух тел, обращающихся вокруг центра тяготения по круговым орбитам можно записать:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \text{или} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Вывод II и III законов Кеплера для эллиптической орбиты. Момент импульса планеты массы m, движущейся вокруг Солнца равен (рис. 14):

$$L = m\upsilon r \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью планеты $\vec{\upsilon}$. Поскольку сила притяжения направлена по радиусу ($\vec{F} \parallel \vec{r}$), то импульс момента этой силы равен 0, значит, момент импульса планеты остаётся неизменным с течением времени:

$$L = \text{const}.$$

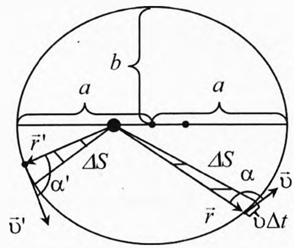


Рис. 14. *II закона Кеплера для движения по эллипсу*

Найдём площадь ΔS, которую за время Δt заметает радиус-вектор $\vec{r}$, конец которого движется со скоростью $\vec{\upsilon}$:

$$\Delta S = \frac{1}{2}r\cdot\upsilon\Delta t\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{m}\cdot m\upsilon r\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{m}\cdot L.$$

Тогда получим равенство, которое выражает **II *закон Кеплера***:

$$\boxed{\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const}}, \quad \boxed{\Delta S = \text{const}\cdot\Delta t}. \qquad (4)$$

За равные промежутки времени радиус-вектор, проведённый от Солнца до планеты, заметает одинаковую площадь.

Итак, $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}r\cdot\upsilon\cdot\sin\alpha$. Для разных моментов времени:

$$\boxed{r\cdot\upsilon\cdot\sin\alpha=r'\cdot\upsilon'\cdot\sin\alpha'}.$$

Чем ближе приближается планета (комета) к Солнцу, тем быстрее она движется.

Например, для точек афелия и перигелия (наиболее удаленной и наиболее близкой точек) $\alpha=\alpha'=90^0$, тогда $r_{аф}\upsilon_{аф}=r_{пер}\upsilon_{пер}$. То есть скорость планеты относительно Солнца минимальна в афелии и в максимальна перигелии. Особенно существенна разница в скорости для комет с сильно вытянутыми орбитами. Они могут подходить к Солнцу даже ближе Земли и поворачивать на 180° за достаточно короткое время (менее Земного года), а потом улетать к афелию в течение сотен и даже тысяч лет.

Просуммируем полученное выражение (4) за весь период:

$$L\Delta t=2m\Delta S \quad\Rightarrow\quad L\cdot T=2m\cdot S.$$

Площадь эллипса вычисляется по формуле: $S=\pi ab$. Тогда период вращения:

$$T=\frac{2\pi mab}{L}. \qquad (5)$$

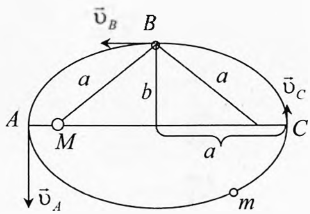


Рис. 15. *III закона Кеплера для движения по эллипсу*

Энергия планеты:

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}-G\frac{mM}{r}. \qquad (6)$$

В точках перигелия (A) и афелия (C) (рис. 15): $\vec{\upsilon}\perp\vec{r}$, $\sin\alpha=1$, $L=m\upsilon r$.

Откуда с учетом (6):

$$E=\frac{L^2}{2mr^2}-G\frac{mM}{r} \quad \text{или} \quad r^2+\frac{GmM}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0.$$

Это уравнение имеет два корня (точки A и C), причём по теореме Виета:

$$r_A+r_C=-\frac{GmM}{E}.$$

Поскольку $r_A+r_C=2a$, то полная энергия планеты:

$$E=-\frac{GmM}{2a}. \qquad (7)$$

Запишем (6) для точки B, учитывая, что $r_B=a$:

$$E=\frac{m\upsilon_B^2}{2}-G\frac{mM}{a}.$$

С учетом (7):

$$\upsilon_B=\sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

В точке B момент импульса (b – прицельное расстояние):

$$L=m\upsilon_B b=mb\sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Подставляя это выражение в (5), получим:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}} \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{a^3} = const\,.$$

Это и есть **III *закон Кеплера***.

Для двух планет, обращающихся вокруг Солнца, квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}} \quad \text{или} \quad \boxed{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3}.$$

Упражнения

1 Два цилиндра одинаковой массы и одинакового радиуса спускаются по наклонной плоскости с одной высоты. Один соскальзывает, другой – вращается без проскальзывания. Какой из них спустится быстрее и с большей скоростью?

2 Почему при больших скоростях (более 100 км/ч) затруднено управление мотоциклом?

3 Почему юла при большой частоте вращения держится устойчиво, а при малой – быстро опрокидывается?

4 Многие виды оружия имеют нарезной ствол. Каковы преимущества и недостатки такого оружия?

5 Метеорит, скорость которого равна υ_0=2360м/с, летит в сторону Луны, радиус которой $R_Л$=1,74·10^6 м (рис. 16). Определить минимальное прицельное расстояние b, при котором метеорит не упадет на поверхность Луны. Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно $g_Л$=1,6 м/с^2.

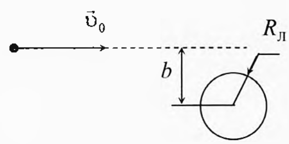


Рис. 16. *Прицельное расстояние*

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 В обоих случаях (рис. 17) уменьшение потенциальной энергии приводит к увеличению кинетической энергии, но в первом случае увеличивается только кинетическая энергия поступательного движения, а во втором – кинетическая энергия вращательного и поступательного движений. Значит, соскальзывающий цилиндр наберет большую скорость и спустится быстрее.

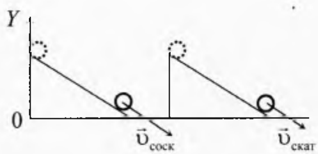


Рис. 17. *Скользить без трения быстрее, чем скатиться*

Действительно, при соскальзывании, согласно закону сохранения механической энергии:

$$E_т = E_к; \quad mgh = \frac{m\upsilon_{соск}^2}{2}; \quad \upsilon_{соск} = \sqrt{2gh}\,.$$

При скатывании без проскальзывания

$$E_т = E_{к.пост} + E_{к.вр}; \quad mgh = \frac{m\upsilon_{скат}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Момент инерции однородного цилиндра относительно его оси:

$$I = \frac{mR^2}{2}, \text{ тогда} \quad mgh = \frac{m\upsilon_{скат}^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2\cdot 2}; \quad \upsilon_{скат} = \omega R;$$

$$\Rightarrow \quad gh = \frac{\upsilon_{скат}^2}{2} + \frac{\upsilon_{скат}^2}{4}; \ \upsilon_{скат} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon_{соск}}{\upsilon_{скат}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2.$$

2 При больших скоростях момент импульса переднего колеса становится значительным, и, согласно закону сохранения момента импульса, стремится сохранить не только модуль, но направление в пространстве, поэтому трудно поворачивать руль.

5 Учитывая, что начальный момент импульса метеорита относительно Луны (рис. 18) равен $m\upsilon_\perp r = m\upsilon_0 \sin\alpha \cdot r = m\upsilon_0 b$, запишем выражения законов сохранения механической энергии и момента импульса для метеорита (для бесконечно удаленной точки от Луны и ближайшей к ней).

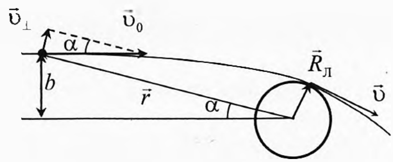


Рис. 18. *Прицельное расстояние*

Это правомерно, так как на метеорит действует консервативная сила тяготения, момент которой относительно центра Луны равен нулю:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{GmM_л}{R_л}; \qquad m\upsilon_0 b = m\upsilon R_л,$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость метеорита вблизи поверхности Луны в момент времени, когда $\vec{\upsilon} \perp \vec{R}_л$, $M_л$ – масса Луны. Учитывая, что $g_л = \frac{GM_л}{R_л^2}$, получим:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g_л R_л}, \qquad b = \frac{\upsilon R_л}{\upsilon_0} = R_л \cdot \sqrt{1 + (2g_л R_л)/\upsilon_0^2}, \qquad b = 2{,}46\cdot 10^6 \text{ м}.$$

Глава 8. Механические колебания

Колебания маятника придают уверенность часам.

Леонид Леонидов
(актер МХАТа)

§ 64. Период, частота и амплитуда колебаний

Колебания *– это движения, повторяющиеся точно или приблизительно через определенный промежуток времени.*
Свободные колебания *– колебания, происходящие под действием внутренних сил.*
Вынужденные колебания *– колебания, происходящие под действием внешней периодической силы.*

Вертикальные колебания груза на пружине являются примером свободных колебаний. Движение пилы при распиливании бревна – пример вынужденных колебаний.

Главной характеристикой колебаний является период.

Период колебаний *– наименьший промежуток времени, через который система, совершая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент времени, выбранный произвольно. Период равен отношению времени к числу колебаний, произошедших за это время.*

$$\boxed{T = \frac{t}{N}}. \qquad (1)$$

Период измеряется в секундах и других единицах времени.

Например, период дыхания здорового человека в спокойном состоянии составляет от 3 до 15 секунд (одна из моих учениц в возрасте 16 лет дышала 4–5 раз в минуту). Индийские йоги могут замедлять период сердечных сокращений до 1 минуты и более, а период дыхания увеличивать ещё в большей степени. Период сердечных сокращений у тренированного спортсмена в спокойном состоянии достигает 2 с, а во время быстрого бега может уменьшиться до 0,3 с.

Важной характеристикой колебательных процессов является частота.

Частота колебаний *– это скалярная величина, характеризующая быстроту совершения колебаний. Частота равна отношению числа колебаний к промежутку времени, за который они совершены.*

$$\boxed{\nu = \frac{N}{t}}. \qquad (2)$$

Частота колебаний измеряется в герцах, Гц.

$$1\ \text{Гц} = \frac{1\ \text{колебание}}{1\ \text{с}} = 1\ \frac{1}{\text{с}} = 1\ \text{с}^{-1}.$$

Частота сердечных сокращений младенца составляет от 120 до 160 (180) колебаний в минуту или 2–3 Гц, а частота дыхания запыхавшегося человека равна примерно 1 Гц.

Из (1) и (2) получим:

$$T \cdot \nu = 1, \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{\nu}}, \quad \text{или} \quad \nu = \frac{1}{T}. \qquad (3)$$

Итак, период – величина обратная частоте колебаний, а частота – величина обратная периоду.

§ 65. Колебания математического и пружинного маятников

Математический маятник. Подвесим маленький стальной шарик на тонкой нити. Перпендикулярно нити начертим ось с началом координат в положении равновесия шарика. Отклоним шарик и отпустим. Он начнет колебаться. Теоретически будем описывать колебания мысленной модели, называемой математическим маятником.

> ***Математический маятник*** *– колебательная механическая система, состоящая из материальной точки, подвешенной в поле действия силы тяжести на невесомой нерастяжимой нити.*

Наш шарик, подвешенный на нити (нитяной маятник), по свойствам довольно близок к этой модели.

Отклонение маятника от положения равновесия в проекции на ось X назовем ***смещением*** x (рис. 1). Он движется по дуге окружности. При малых колебаниях длина дуги S приблизительно равна по модулю смещению x, тогда угол

$$\alpha = \frac{S}{l} \approx \frac{x}{l} = \sin\alpha.$$

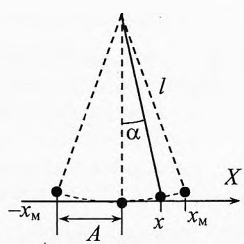


Рис. 1. *Математический маятник*

Модуль максимального смещения от положения равновесия в ту или другую сторону называется ***амплитудой колебаний***

$$\boxed{A = |x_м|}.$$

Расстояние между двумя крайними положениями колеблющегося тела называется ***размахом*** колебаний. Размах колебаний равен двум амплитудам:

$$\boxed{\text{размах} = 2A}.$$

При колебаниях *математического маятника* результирующая сил, действующих на груз (материальную точку), равна сумме сил тяжести груза и упругости нити (рис. 2):

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_{т} + \vec{F}_{у}.$$

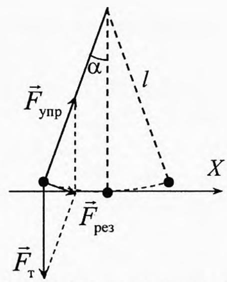


Рис. 2. *Математический маятник*

Результирующая сил создаёт ускорение грузу. Угол α будем считать положительным, если маятник отклоняется вправо, и отрицательным, если – влево. Тогда

$$\alpha \approx \frac{x}{l}.$$

Проекция суммы сил на ось колебаний X:

$$F_x = -F_{упр}\cdot\sin\alpha.$$

Знак «–» поставлен потому, что проекция силы упругости F_x и угол α всегда имеют разные знаки. Если x>0 и α>0, тогда F_x<0, и наоборот.

При малых колебаниях математического маятника:

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \sin\alpha \quad \text{и} \quad F_{упр} \approx mg;$$

$$F_x = -F_{упр}\cdot\sin\alpha \approx -mg\cdot\sin\alpha = -\frac{mgx}{l}$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X:

$$ma_x = F_x; \qquad ma_x = -\frac{mgx}{l};$$

$$\boxed{a_x = -\frac{g}{l}x}. \qquad (4)$$

Проекция ускорения при малых колебаниях математического маятника в инерциальной системе отсчёта прямо пропорциональна ускорению силы тяжести и смещению от положения равновесия и обратно пропорциональна длине маятника (не зависит от массы груза).

Пружинный маятник. Рассмотрим колебания пружинного маятника в горизонтальной плоскости. Для этого прикрепим груз массы m к пружине жесткостью k (рис. 3).

Пружинный маятник *– колебательная механическая система, состоящая из невесомой пружины, подчиняющейся закону Гука, один конец которой жёстко закреплён, а на втором находится груз массы m.*

При выведении груза из положения равновесия пружина будет действовать на него силой упругости $F_{упр}=k|\Delta l|$, где Δl – удлинение пружины. В проекции на ось X, начало которой взято в точке нахождения груза при недеформированной пружине,

$$(F_{упр})_x=-kx.$$

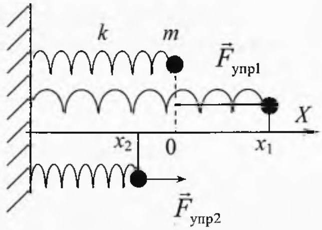


Рис. 3. *Пружинный маятник*

Запишем II закон Ньютона в проекции на ось X:

$$m\vec{a}=\vec{F}_{упр} \quad \text{или} \quad ma_x=(F_{упр})_x; \quad \Rightarrow \quad ma_x=-kx,$$

$$\boxed{a_x=-\frac{k}{m}x}. \tag{5}$$

Знак «–» обусловлен тем, что проекции ускорения на ось X и смещение x имеют всегда разные знаки.

Итак, проекция ускорения пружинного маятника прямо пропорциональна смещению и жесткости пружины и обратно пропорциональна массе груза.

В обоих случаях свободных колебаний (пружинного и математического маятников) ускорение колеблющегося тела оказалось прямо пропорционально смещению от положения равновесия. Это обусловлено тем, что сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, линейно зависит от смещения.

Свободные колебания, в которых ускорение колеблющегося тела прямо пропорционально смещению, будем называть ***колебаниями под действием квазиупругих сил*** *(то есть колебания аналогичные колебаниям при упругой силе).*

Из рассмотренных примеров видно: для существования свободных колебаний необходимо, чтобы при любом смещении тела от положения равновесия возникла сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Кроме того, тело должно обладать инертностью (массой). Действительно, после прохождения положения равновесия возникает сила, препятствующая дальнейшему движению, но тело, набравшее скорость, благодаря инертности продолжает некоторое время двигаться в том же направлении. Наконец, чтобы колебания продолжались долго, необходимо отсутствие трения в колебательной системе, по крайней мере, сила трения должна быть пренебрежимо мала по сравнению с максимальным значением квазиупругой силы, чтобы реальные колебания были похожи на колебания модели, в которой сила трения естественно отсутствует.

Постоянная сила не влияет на характер колебаний. Докажем, что при вертикальных колебаниях пружинного маятника можно не учитывать изменение потенциальной энергии, обусловленной силой тяжести, если начало отсчёта взять не в конце недеформированной пружины, а в положении равновесия.

Изобразим невесомую недеформированную пружину жесткостью k, прикрепленную к потолку (рис. 4). Ось колебаний X направим вверх, а начало отсчёта оси X возьмем в конце недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины будет вычисляться по формуле $E_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}$. Прицепим к пружине груз массы m. Потенциальная энергия груза, обусловленная силой тяжести, будет вычисляться по формуле $E_{\text{т}}=mgx$. Параллельно оси X изобразим ось Y, начало отсчёта которой возьмем в положении равновесия груза на пружине. Оттянем пружину вниз и отпустим. Груз будет совершать вертикальные колебания. Пусть в некоторый момент смещение груза равно x, скорость υ_x. Запишем закон сохранения энергии:

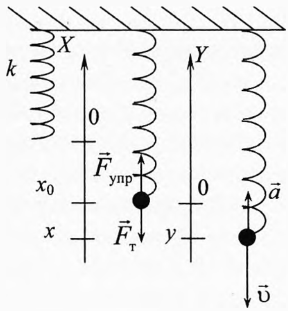


Рис. 4. *Сила тяжести не влияет на колебания*

$$\frac{kx_0^2}{2} + mgx_0 + \frac{m\upsilon_{0x}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + mgx + \frac{m\upsilon_x^2}{2},$$

где υ_{0x} – скорость в момент прохождения положения равновесия; $|x_0|$ – растяжение пружины в положении равновесия, для которого согласно II закону Ньютона:

$$mg=k|x_0| \quad \Rightarrow \quad mg=-kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Поскольку $x=y+x_0$, $\upsilon_y=\upsilon_x$, то

$$\frac{kx_0^2}{2} + mgx_0 + \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2} = \frac{k(y+x_0)^2}{2} + mg(y+x_0) + \frac{m\upsilon_y^2}{2},$$

$$\frac{kx_0^2}{2} + mgx_0 + \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2} = \frac{ky^2}{2} + kx_0\cdot y + \frac{kx_0^2}{2} + mg\cdot y + mgx_0 + \frac{m\upsilon_y^2}{2}.$$

Подставляя выражение для x_0, после сокращения получим:

$$\frac{m\upsilon_{0y}^2}{2} = \frac{ky^2}{2} + \frac{m\upsilon_y^2}{2}.$$

Это и есть закон сохранения энергии в новой системе координат Y.

Как видно, энергия силы тяжести не входит в это уравнение.

Возьмем производную этого уравнения по времени $0 = \frac{k2yy'}{2} + \frac{m2\upsilon_y\upsilon'_y}{2}$.

Учитывая, что $\upsilon_y=y'$ и $a_y=\upsilon'_y=y''$, получим:

$$0 = ky + my'' \quad \text{или} \quad 0 = ky + ma_y; \quad a_y = -\frac{k}{m}y.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (5) для горизонтальных колебаний груза на пружине.

Таким образом, сила тяжести лишь смещает положение равновесия колебаний, не изменяя характер колебаний.

§ 66. Фаза колебаний

Основная (прямая) задача механики – определять положение тела в любой момент времени. Для решения этой и других задач, связанных с колебаниями, введем физическую величину, называемую ***фазой колебаний.*** Определим фазу как число, которое ставится в соответствии с данной стадией колебания.

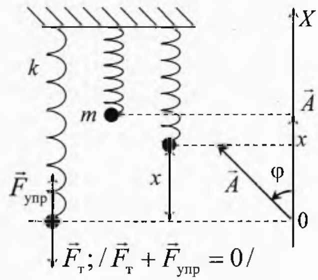


Рис. 5. *Вектор амплитуды синхронно вращаем с колеблющимся телом*

Способ измерения фазы получим методом векторных диаграмм на основе связи колебательного движения с вращательным. Обратим сначала внимание на эту связь в модели двигателя внутреннего сгорания. Поршень связан шатуном с коленчатым валом. Поршень совершает колебательное движение, а коленчатый вал – вращательное. Следует отметить, что каждому положению колеблющегося поршня соответствует определенное положение вращающегося коленчатого вала. Поэтому о положении поршня можно судить по положению (углу поворота) коленчатого вала.

Получим способ измерения фазы на примере вертикальных колебаний пружинного маятника. Пусть в начальный момент времени пружина максимально сжата. Поместим в положение равновесия колеблющегося тела начало вектора $\vec{A}$, равного по длине амплитуде смещения (***вектор амплитуды смещения***) (рис. 5).

> *Пусть пружинный маятник свободно колеблется, а вектор амплитуды $\vec{A}$ вращается против часовой стрелки таким образом, чтобы его проекция на ось колебаний была равна смещению колеблющегося тела в любой момент времени. Такое вращение вектора амплитуды называется* ***синхронным.***

Тогда координата тела будет вычисляться по формуле:

$$\boxed{x = A \cdot \cos\varphi}, \qquad (6)$$

где φ – угол поворота вектора амплитуды от положительного направления оси *X*. Как видно из (6), с помощью вектора амплитуды положение колеблющегося тела задаётся однозначно. Поэтому естественно определить фазу колебаний как угол поворота вектора амплитуды.

Поскольку для всех колебаний мы задаем вращение вектора амплитуды в одном направлении (против часовой стрелки), то фазу следует определить как скалярную величину.

***Фаза колебаний** – это скалярная величина, позволяющая определять состояние колебательной системы в любой момент времени. Фаза равна углу поворота (против часовой стрелки) вектора амплитуды, синхронно вращающегося с колеблющимся телом. Фаза измеряется в радианах и градусах.*

Возникает вопрос: как находить фазу колебаний?

Опыт показывает, что в случае свободных колебаний, происходящих под действием квазиупругих сил, вектор амплитуды для соблюдения синхронности должен вращаться с постоянной угловой скоростью, то есть

$$\boxed{\varphi = \omega t}, \tag{7}$$

Причём угловая скорость вращения вектора амплитуды определяется параметрами колебательной системы, например, для пружинного маятника:

$$\boxed{\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \tag{8}$$

а для математического маятника:

$$\boxed{\omega_{\text{м}} = \sqrt{\frac{g}{l}}}. \tag{9}$$

Зависимость угловой скорости вектора амплитуды от параметров колебательной системы понятна, ибо чем быстрее колеблется маятник, тем быстрее должен вращаться вектор амплитуды, так как он должен вращаться синхронно с колеблющимся телом.

Подставляя (8) и (9) в (4) и (5), получим:

$$\boxed{a_x = -\omega^2 x} \qquad \text{или} \qquad x'' = -\omega^2 x. \tag{10}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое в школе не решают, но мы решение этого уравнения получим подстановкой (7) в (6):

$$x = A\cdot\cos\omega t. \tag{11}$$

Свободные колебания, происходящие под действием квазиупругих сил, называются простыми или синусоидальными, т.к. смещение изменяется с течением времени по простому закону синуса (или косинуса).

По такому же закону изменяются скорость и ускорение колеблющегося маятника (см. § 68), поэтому такие колебания также называются ***гармоническими***, ибо гармония – есть согласованность, соразмерность частей и целого.

Если в начальный момент времени (момент включения секундомера) смещение не равно «+А», а меньше, то координата тела в начальный момент определится, как видно из рис. 6, по формуле

$$x_0 = A \cdot \cos\varphi_0,$$

Так как в любой следующий момент времени фаза равна

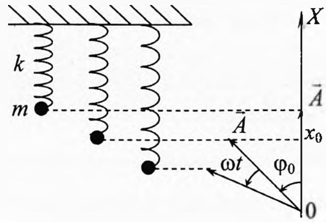


Рис. 6. *Фаза колебаний*

$$\boxed{\varphi = \omega t + \varphi_0}, \qquad (7')$$

то

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}, \qquad (11')$$

где φ_0 – *начальная фаза колебаний*, она *равна углу между положительным направлением оси колебаний и вектором амплитуды в начальный момент времени, отсчитанному против часовой стрелки.*

Угловая скорость вращения ω вектора амплитуды в колебаниях называется ***циклической или круговой частотой*** и характеризует быстроту изменения фазы колебаний.

Циклическая частота, как видно из (7), измеряется в рад/с.

$$[\omega]=\text{рад/с}=\frac{1}{\text{с}}=\text{с}^{-1}.$$

Циклическая частота равна 5 рад/с. Что это значит? Это значит, что в данном колебательном процессе фаза изменяется в 5 раз быстрее, чем при колебаниях с эталонной частотой $\omega_{\text{эт}}=1$ рад/с, и в случае свободных колебаний, происходящих под действием квазиупругих сил, за 1 секунду фаза увеличивается на 5 рад, что соответствует повороту на 5 рад вектора амплитуды, синхронно вращающегося с колеблющимся телом.

Циклическая (круговая) частота колебаний *– это скалярная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения фазы колебаний. Циклическая частота равна изменению фазы колебаний за единицу времени.*

§ 67. Период свободных колебаний

Если тело совершило одно полное колебание, то время колебаний равно одному периоду: $t=T$, а вектор амплитуды повернулся на угол $\varphi=2\pi$ рад (или 360°). Тогда для любых свободных колебаний под действием квазиупругих сил, учитывая (7), получим:

$$2\pi=\omega\cdot T, \quad \text{откуда} \quad \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) значение циклических частот, для пружинного и математического маятников из (8) и (9) получим:

$$\boxed{T_{\text{пр}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}, \tag{13}$$

$$\boxed{T_{\text{м}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}. \tag{14}$$

Формула (14) называется ***формулой Гюйгенса***.

Из (12) следует, что

$$\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

Частота колебаний – величина, обратная периоду: $\nu=\frac{1}{\mathrm{T}}$, значит:

$$\boxed{\omega=2\pi\nu}.$$

В чем смысл этой зависимости? Частота равна числу колебаний за одну секунду. Поскольку при совершении одного колебания фаза изменяется на 2π рад, то естественно, что циклическая частота (угловая скорость вращения вектора амплитуды) в 2π раз больше частоты колебаний.

§ 68. Скорость и ускорение гармонических колебаний. Графическое представление колебаний

Рассмотрим вертикальные колебания пружинного маятника. Начало отсчёта на оси колебаний поместим в положении равновесия груза. Колебания груза будут происходить точно также, как при горизонтально расположенной пружине.

Скорость тела, совершающего гармонические колебания, можно получить, вычислив первую производную смещения по времени:

$$x=A\cdot\cos\omega t; \qquad \upsilon_x=x'=A\omega(-\sin\omega t)=-A\omega\sin\omega t,$$

$$\boxed{\upsilon_x=-A\omega\sin\omega t}.$$

Так как максимальное значение синуса равно 1, то амплитуда скорости

$$\boxed{\upsilon_{\text{м}}=A\omega}.$$

Тогда $\upsilon_x=-\upsilon_{\text{м}}\sin\omega t$ или, после тригонометрических преобразований,

$$\boxed{\upsilon_x=\upsilon_{\text{м}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Зависимость ускорения от времени при гармонических колебаниях получим подстановкой (11) в (10):

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 x, \\ x &= A\cos\omega t; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_x = -A\omega^2\cos\omega t.$$

Максимальное значение косинуса равно 1, значит, амплитуда ускорения:

$$\boxed{a_м = A\omega^2}.$$

Значит, $a_x = -a_м\cos\omega t$, и после тригонометрических преобразований:

$$\boxed{a_x = a_м\cos(\omega t + \pi)}.$$

На представленной ниже панораме (рис. 7а) слева изображена колебательная система – пружинный маятник. Рядом – вектор амплитуды смещения $\vec{A}$, а так же скорость $\vec{\upsilon}_м$ и ускорение $\vec{a}_м$ конца вектора амплитуды смещения. Из этого рисунка видно, что проекции скорости и ускорения колеблющегося тела равны проекциям скорости и ускорения конца вектора амплитуды на ось колебаний:

$$\upsilon_x = -\upsilon_м\sin\omega t, \qquad \text{где} \quad \upsilon_м = \omega A,$$

$$a_x = -a_м\cos\omega t, \qquad \text{где} \quad a_м = \omega^2 A.$$

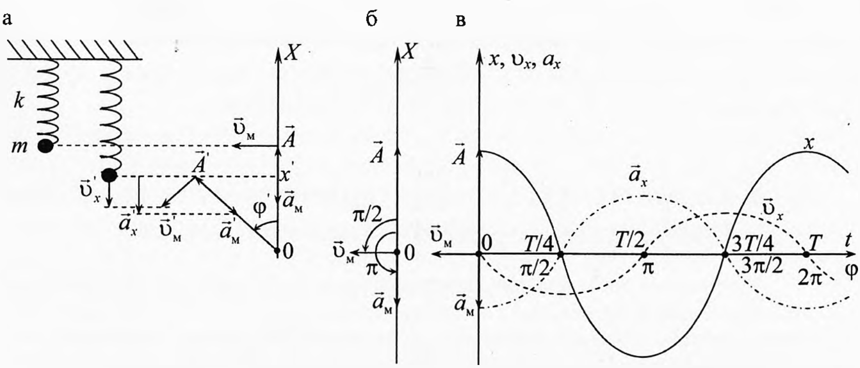


Рис. 7. *Пружинный маятник; векторная диаграмма амплитуды смещения, скорости и ускорения; график зависимости смещения, скорости и ускорения от времени*

На рис. 7б представлена векторная диаграмма амплитуды смещения $\vec{\upsilon}_x$, амплитуды скорости $\vec{\upsilon}_м$ и амплитуды ускорения $\vec{a}_м$ в начальный момент времени, когда смещение $x_0=x_м=A$. Переместив параллельно самим себе векторы амплитуды, скорости и ускорения так, чтобы их начала оказались в положении равновесия, получим векторную диаграмму, из которой видно, что скорость и ускорение опережают по фазе смещение на $\pi/2$ и π соответственно. Вращая эту тройку векторов против часовой стрелки с угловой скоростью ω, получим в проекции на ось колебаний смещение, скорость и ускорение колеблющегося тела в любой момент времени. График в зависимости x, υ_x, a_x от времени или фазы колебаний на рис. 7в.

Мы получили, что в случае свободных колебаний, происходящих под действием квазиупругой силы, смещение, скорость и ускорение изменяются согласованно по одному и тому же закону косинуса, то есть наблюдается гармония в колебаниях этих величин:

$$x = A\cos\omega t,$$

$$\upsilon_x = \upsilon_м \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{где } \upsilon_м = \omega A.$$

$$a_x = a_м \cos(\omega t + \pi), \quad \text{где } a_м = \omega^2 A.$$

Аналогично можно получить выражение для резкости движения:

$$j_x = j_м \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{где } j_м = \omega^3 A.$$

Отметим, что резкость при гармонических колебаниях изменяется плавно.

§ 69. Энергия гармонических колебаний

Энергию гармонически колеблющегося тела рассмотрим на примере пружинного маятника (рис. 8).

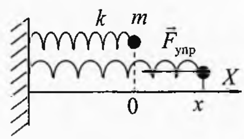


Рис. 8. *Энергия пружинного маятника*

Полная механическая энергия состоит из потенциальной $E_п = \dfrac{kx^2}{2}$ и кинетической $E_к = \dfrac{m\upsilon_x^2}{2}$ энергий:

$$E = E_к + E_п, \tag{15}$$

Подставляя $\upsilon_x = -A\omega\sin\omega t$, получим:

$$\boxed{E_к = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t}. \tag{16}$$

Учитывая, что $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\Rightarrow$ $k = m\omega^2$ и $x = A\cdot\cos\omega t$, получим:

$$\boxed{E_п = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t}. \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (15), получим:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t + \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t = \frac{mA^2\omega^2}{2}(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t).$$

Учитывая, что $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, получим окончательно:

$$\boxed{E = \frac{mA^2\omega^2}{2}}. \tag{18}$$

То есть полная энергия гармонических колебаний при отсутствии трения сохраняется; происходит только преобразование кинетической энергии в потенциальную, и наоборот.

Обратим внимание, что формулы (16), (17) и (18) применимы не только для пружинного маятника, но и для любых гармонических колебаний, ибо в них фигурируют общие для всех колебаний характеристики: масса, циклическая частота, амплитуда. Подставляя (18) в (16) и (17), получим:

$$\boxed{E_к = E\sin^2\omega t}, \qquad \boxed{E_п = E\cos^2\omega t}.$$

Учитывая, что $\sin^2\omega t = \dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$ и $\cos^2\omega t = \dfrac{1+\cos 2\omega t}{2}$, получим:

$$E_к = \frac{E}{2}(1-\cos 2\omega t), \qquad E_п = \frac{E}{2}(1+\cos 2\omega t),$$

Из двух последних формул можно сделать следующий вывод.

> *Частота изменения потенциальной и кинетической энергий свободных колебаний в 2 раза больше частоты смещения, то есть период колебаний кинетической и потенциальной энергий в 2 раза меньше периода смещения (скорости, ускорения).*

Изобразим графически зависимости $E_к$ и $E_п$, E и смещения x от времени (рис. 9). Видно, что при гармонических колебаниях потенциальная и кинетическая энергии изменяются согласованно. Графики их являются зеркальным отражением друг друга. Полная энергия колебаний при этом не изменяется.

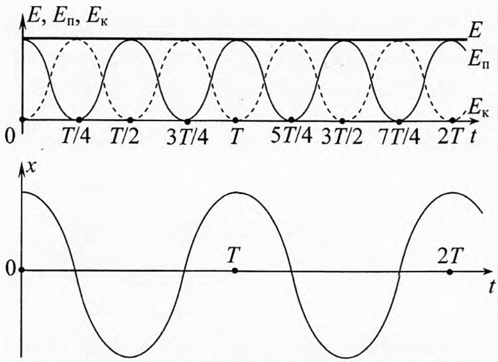


Рис. 9. *Кинетическая и потенциальная энергии изменяются в два раза быстрее смещения*

Пример 1. Нитяной маятник длиной l=25 см отклонили на угол α=5° и отпустили. Найти амплитуду колебаний $x_м$, максимальную скорость $\upsilon_м$ и ускорение $a_м$.

✓ **Ответ.** $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $x_м = l\cdot\sin\alpha$=2,2 см/с; $\upsilon_м = x_м\cdot\omega = x_м\cdot\sqrt{\dfrac{g}{l}}$=13,6 см/с; $a_м = x_м\cdot\omega^2 = \dfrac{x_м g}{l}$=85,4 см/с.

Пример 2. Человек массой 80 кг качается на качелях. Амплитуда его колебаний 1 м. За 1 мин он совершает 15 колебаний. Найти максимальную высоту подъема, а также кинетическую, потенциальную энергию, смещение и скорость через 1/12 периода.

Дано.
m=80 кг
t=1 мин=60 с
N=15
A=1 м
t_1=T/12

h – ?
$E_{к1}$ – ?
$E_{п1}$ – ?
x_1 – ?
υ_{x1} – ?

Решение. Оценим сначала, является ли данное колебание гармоническим (рис. 10): $\sin\alpha = A/l$.

Длину оценим из формулы Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}.$$

Период найдём из формулы периода по определению

$$T = \frac{t}{N}, \quad T = \frac{60\,\text{с}}{15} = 4\ \text{с}.$$

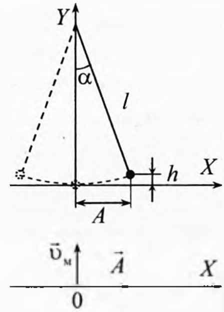


Рис. 10. *Колебания человека на качелях*

Тогда $l = \dfrac{4^2 \cdot 9{,}8}{4\pi^2} \approx 4$ м; $\sin\alpha = 1/4 = 0{,}25$; $\alpha = 14{,}5°$.

При таком значении угла $\sin\alpha$ всего на 4% отличается от $\operatorname{tg}\alpha$ и ещё меньше от α в радианной мере. Поэтому колебания человека на качелях можно считать почти гармоническими (квазигармоническими) и применять соответствующие формулы для решения, а именно:

$$E = E_{к1} + E_{п1}, \quad E_{к1} = E\cdot\sin^2\omega t_1, \quad E_{п1} = E\cdot\cos^2\omega t,$$

где $E = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ – полная энергия колебаний, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$E = \frac{m4\pi^2 A^2}{2T^2}, \quad E = \frac{80\cdot 4\pi^2\cdot 1}{2\cdot 4^2} \approx 100\ \text{Дж}.$$

$$E_{к1} = 100\cdot\sin^2\frac{2\pi}{T}t_1 = 100\cdot\sin^2\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12} = 100\cdot\sin^2\frac{\pi}{6} = 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25\ \text{Дж}.$$

$$E_{п1} = 100\cdot\cos^2\frac{\pi}{6} = 75\ \text{Дж}.$$

Потенциальную энергию можно было бы определить и по-другому:

$$E_{п1} = E - E_{к1}, \quad E_{п1} = 100 - 25 = 75\ \text{Дж}.$$

$$x_1 = A\cdot\cos\omega t_1 = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12}\right) = A\cdot\cos\frac{\pi}{6}, \quad x_1 \approx 0{,}87\ \text{м}.$$

$$\upsilon_{x1} = -A\omega\cdot\sin\frac{\pi}{6}, \quad \upsilon_{x1} \approx -0{,}8\ \text{м/с}.$$

Проекция скорости отрицательна, значит, в этот момент он движется против оси X.

Максимальную высоту подъема найдём, исходя из закона сохранения энергии. В верхней точке вся энергия колебательной системы будет в форме потенциальной энергии

$$E = mgh; \quad \Rightarrow \quad h = \frac{E}{mg}, \quad h = \frac{100}{80\cdot 10} = 0{,}125\ \text{м} \approx 0{,}13\ \text{м}.$$

✓ **Ответ.** Максимальная высота подъема h=13 см, кинетическая энергия $E_{к1}$=25 Дж, потенциальная $E_{п1}$=75 Дж, смещение x_1=0,87 м, скорость υ_1=0,8 м/с направлена против оси X – к положению равновесия.

✍ **Пример 3.** Поплавок массой m=10 г площадью поперечного сечения S=2 см^2 колеблется в воде с амплитудой A=1 см. Определить период колебаний, энергию колебаний и максимальную скорость поплавка.

Дано.
$m=10^{-2}$ кг
$S=2\cdot10^{-4}$ м^2
$A=10^{-2}$ м
$\rho=10^3$ кг/м^3

T – ?
E – ?
υ_{max} – ?

➥**Решение.** Изобразим (рис. 11) положения равновесное и утопленное на $\Delta h=-x$ (если ось OX направить вверх). Получим уравнение колебаний. Возвращающей силой будет разница между силой Архимеда и силой тяжести:

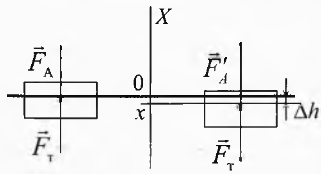


Рис. 11. *Колебания поплавка*

$$m\vec{a}=\vec{F}'_A+\vec{F}_т$$

В положении равновесия: $F_A=F_т$.

Из первого уравнения получим в проекции на ось X: $ma_x=F'_A-F_т$.

Подставляя $F_т$ из второго уравнения в третье, получим: $ma_x=F'_A-F_A$.

Учитывая выражение для сил Архимеда $F_A=\rho gV$ и $F'_A=\rho gV'$, получим:

$$ma_x=\rho g(V'-V);\quad V'-V=S\cdot\Delta h=-S\cdot x;\quad\Rightarrow\quad ma_x=-\rho gS\cdot x.$$

Откуда следует:

$$a_x=-\frac{\rho gS}{m}\cdot x.$$

Это уравнение показывает, что поплавок совершает гармонические колебания в соответствии с уравнением

$$a_x=-\omega^2\cdot x.$$

Значит, $\omega=\sqrt{\dfrac{\rho gS}{m}}$; $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho gS}}$; $T=2\pi\sqrt{\dfrac{10^{-2}}{10^3\cdot10\cdot2\cdot10^{-4}}}$=0,44 с.

$$E=\frac{m\omega^2A^2}{2}=\frac{m\rho gSA^2}{2m}=\frac{\rho gSA^2}{2};\ E=\frac{10^3\cdot10\cdot2\cdot10^{-4}\cdot10^{-4}}{2}=10^{-4}\text{ Дж.}$$

$$\upsilon_{max}=\omega A=\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}\cdot A,\quad \upsilon_{max}=\sqrt{\frac{10^3\cdot10\cdot2\cdot10^{-4}}{10^{-2}}}\cdot10^{-2}=0{,}14\text{ м/с.}$$ ↩

✓ **Ответ.** Период колебаний поплавка равен 0,44 с, энергия колебаний 0,1 мДж, максимальная скорость 14 см/с.

✍ **Пример 4.** Маятник длиной 1 м совершает малые свободные колебания вдоль стены без касания. На 50 см ниже точки подвеса вбит гвоздь. Определить период колебаний маятника (рис. 12).

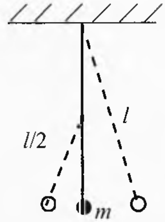


Рис. 12. *Гвоздь посреди маятника*

Решение. Маятник совершает свободные колебания. Половину колебания с длиной $l_1=l$, а вторую половину с длиной $l_2=l/2$. Период колебаний

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2},\ \text{где}\quad T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{l/2}{g}}.$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad T=\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8}}(1+0{,}71)=1{,}7\text{ с.}$$

✓ **Ответ.** Период колебаний маятника равен 1,7 с.

§ 70. Физический маятник

***Физический маятник** – это колебательная механическая система, представляющая собой любое свободно подвешенное тело, центр масс которого находится ниже точки подвеса.*

Обозначим расстояние от точки подвеса (точка O) до центра тяжести тела (точка B) через d (рис. 13).

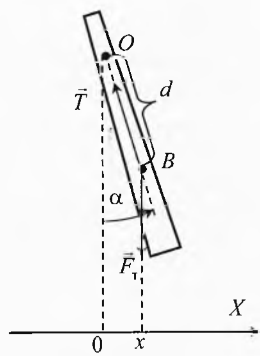


Рис. 13. *Физический маятник*

Будем считать, что $\alpha>0$, если тело отклонили вправо, и $\alpha<0$, если тело отклонили влево.

При отклонении тела (физического маятника) от положения равновесия возникает момент составляющей силы тяжести $M=-mg\cdot d\cdot\sin\alpha$, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. При малых колебаниях, когда $\sin\alpha\approx\alpha$ (в радианной мере):

$$M=-mgd\cdot\alpha.$$

Знак «–» стоит потому, что момент силы тяжести старается уменьшить угол α, когда он положителен, и увеличить, когда он отрицателен (либо потому, что проекция силы, действующей со стороны гвоздя, но ось X отрицательна при положительном x и положительна при отрицательном x).

Этот момент силы создаёт телу угловое ускорение $\beta=\frac{M}{I}$, согласно основному уравнению динамики вращательного движения, значит:

$$\beta=-\frac{mgd}{I}\cdot\alpha.$$

Это уравнение аналогично уравнению гармонических колебаний:

$$a_x=-\omega^2x.$$

Значит, при малых углах отклонения физический маятник будет колебаться с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I}}$ и периодом

$$\boxed{T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{mgd}}}.$$

Введём обозначение: $l_{\text{пр}} = \dfrac{I}{md}$. Эта величина называется *приведенной длиной маятника*. Тогда период малых колебаний физического маятника выглядит как формула Гюйгенса для математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

Если роль физического маятника выполняет однородный стержень (линейка), подвешенный за один конец (рис. 14), то его момент инерции относительно конца:

$$I = \frac{1}{3}ml^2.$$

Тогда приведенная длина такого маятника, с учетом, что $d = l/2$, будет равна

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{md} = \frac{ml^2/3}{m \cdot l/2} = \frac{2l}{3}.$$

А период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

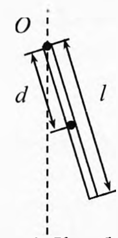


Рис. 14. *Колебания линейки*

Из приведенного примера ясно: математический маятник такой же длины, как стержень, имеет больший период, чем физический в виде стержня, подвешенного за один конец: $T_{\text{мат}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Очевидно, что *период физического маятника всегда меньше периода математического такой же длины*. Причём, чем дальше центр масс находится от точки подвеса, тем значение периода колебаний физического маятника ближе к значению периода математического маятника такой же длины.

Математический маятник – это предельный случай физического маятника, у которого вся масса маятника сосредоточена в одной точке.

§ 71. Вынужденные колебания

Рассмотрим колебания тела, при которых на него, кроме силы упругости и сил сопротивления, действует внешняя периодическая сила, изменяющаяся, например, по закону косинуса.

Если тело покоилось, то после начала действия периодической силы оно начнет совершать вынужденные колебания, амплитуда которых будет возрастать, пока не достигнет установившегося значения. *Время установления колебаний с постоянной амплитудой называется временем релаксации*. Частота вынужденных колебаний будет равна частоте изменения вынуждающей силы. Амплитуда установившихся колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы, её частоты, трения в системе и разности между собственной частотой колебательной системы и частотой вынуждающей силы.

Примерами вынужденных колебаний могут служить атмосферные и океанические приливы под действием Луны, тряска автомобиля, движущегося по неровной дороге, вибрации машин из-за эксцентричности вращающихся деталей. Переменный электрический ток тоже представляет собой вынужденные колебания (свободных зарядов в электрической цепи) и др.

Резонанс. При частоте внешней силы, значительно меньшей или большей собственной частоты, амплитуда вынужденных колебаний будет малой, так как в течение значительной части периода внешняя сила действует против внутренней квазиупругой силы. При приближении частоты внешней силы к собственной частоте колебаний системы амплитуда вынужденных колебаний возрастает и становится максимальной при частоте, близкой к собственной частоте колебаний системы. При этом в течение всего периода внешняя сила совершает положительную работу, т.е. направлена по скорости, и в установившемся режиме работа внешней силы будет равна по модулю и противоположна по знаку работе сил сопротивления.

Резонанс *(лат. resono – звучу в ответ, откликаюсь) – это вынужденные колебания с резко возросшей амплитудой в колебательной системе с малым трением при частоте вынуждающей силы, близкой к собственной частоте колебаний в системе.*

Чем меньше трение в системе, тем больше амплитуда колебаний. Это и понятно. Работа равна произведению среднего значения силы на пройденный путь, а чем меньше сила сопротивления, тем больше путь, проходимый колеблющимся телом за период, а значит, и амплитуда при одной и той же работе внешней силы.

В приведенных на рис. 15 резонансных кривых видно, что наиболее значительно амплитуда возрастает в первом случае при минимальной силе трения – это острый резонанс. В третьем случае амплитуда возрастает незначительно – это тупой резонанс. Но тупой резонанс – это, по сути, не резонанс, так как резонанс – резкое возрастание амплитуды колебаний.

Говорят, что в дореволюционное время в Петербурге рухнул мост, через который в ногу шагали матросы. Равномерные и одновременные удары десятков ног случайно совпали с резонансной частотой конструкции моста, и он разрушился, хотя при других обстоятельствах выдерживал значительно большее количество народа.

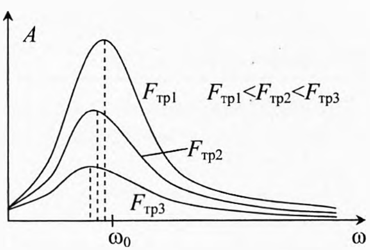


Рис. 15. *Резонансные кривые*

Резонанс может возникнуть, когда одно движущееся тело вызывает движение другого. Такой тип резонанса часто наблюдается в музыкальных инструментах и называется «*акустическим резонансом*». Например, он может возникнуть между двумя хорошо настроенными скрипками. Если на скрипке играют в комнате, в которой находится другая скрипка, то её струны тоже будут вибрировать и производить звук, даже если никто не касается её струн. Это происходит потому, что оба инструмента были настроены на одну и ту же частоту, вибрация струн одной из скрипок через звуковые колебания вызывает вибрацию струн другой скрипки.

§ 72. Автоколебания

Незатухающие колебания в системе, где заметную роль играет трение, можно создать не только с помощью внешней периодической силы, но и другим путём. Действительно, если колебательная система связана с источником энергии, при помощи которого восполняются потери на трение, то колебания будут незатухающими. Энергия должна поступать от источника за определенные, как правило, малые, по сравнению с периодом, промежутки времени.

Для решения этой задачи служит обратная связь. Например, в часах «ходиках» устройством, регулирующим поступление энергии к маятнику, является анкер K, на который в крайних положениях маятника действуют зубья R шестерни (рис. 16). А к широкой оси шестерни приложен вращающий момент со стороны цепи, к которой подвешена гиря.

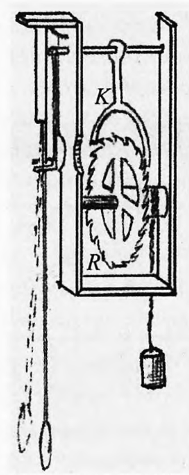


Рис. 16. *Автоколебания ходиков*

Маятник в течение почти всего периода совершает свободные колебания собственной частоты и только в крайних положениях получает «порцию» энергии от гири с помощью анкера и шестерни храпового механизма.

***Автоколебания** – незатухающие колебания, которые поддерживаются за счёт энергии внешнего источника. В отличие от вынужденных колебаний, частота и амплитуда автоколебаний определяются свойствами самой колебательной системы.*

Автоколебательные системы распространены чрезвычайно широко. Блок-схема автоколебательных систем представлена на рис. 17.

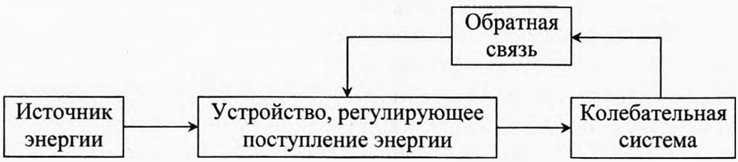


Рис. 17. *Блок-схема автоколебательных систем*

Примерами автоколебательных систем являются: механические часы, генератор незатухающих электромагнитных колебаний на ламповом триоде или транзисторе, система регулирования температуры в обжиговой печи на двух позиционных регуляторах. Стоящий человек тоже представляет собой автоколебательную систему: действительно, центр тяжести его находится высоко, а площадь опоры ног мала, поэтому он всё время отклоняется в ту или другую сторону. С помощью мозжечка мышцам подаётся команда «возвращать» тело в вертикальное положение. При нормальном состоянии отклонения человека практически незаметны на глаз. Колебания скрипичной струны при движении смычка и воздуха в органной трубе тоже представляют собой автоколебания.

Упражнения

1 Записать уравнения гармонических колебаний $x(t)$ при следующих параметрах и построить графики $x(t)$: а) A=10 см, $\varphi_0=\pi/4$, $\omega=2\pi$ рад/с; б) A=5 см, $\varphi_0=\pi/2$, T=2 с; в) A=4 см, $\varphi_0=\pi$, ν=2 Гц.

2 Записать уравнения гармонических колебаний, если амплитуда A=5 см, начальная фаза φ_0=0, период T=0,01 с. Определить частоту ν, циклическую частоту ω, амплитуду скорости $\upsilon_м$ и ускорения $a_м$, полную энергию для тела массой m=0,1 кг.

3 Скорость материальной точки изменяется по закону $\upsilon_x=0{,}2\pi\cdot\cos2\pi t$ (м/с). Определить амплитуду смещения A и амплитуду ускорения $a_м$. Найти смещение x через t=5/12 с после начала колебания.

4 По уравнению $x=0{,}2\sin\pi t$ (м) определить смещение материальной точки через t=1,5 с после начала отсчёта времени и возвращающую силу, действующую в этот момент на колеблющееся тело массой 0,2 кг.

5 Во сколько раз и как надо изменить длину нитяного маятника, чтобы: а) период колебаний увеличился в 2 раза; б) частота увеличилась в 2 раза?

6 Как относятся длины двух маятников, если за одно и то же время они совершают 10 и 20 колебаний соответственно?

7 Какая разница в показаниях двух одинаковых маятниковых часов возникает за сутки (t=1 сут), если одни часы установлены на уровне моря, а другие – на высоте h=4,0 км? Радиус Земли $R_З$=6370 км.

8 На сколько отстанут часы за сутки, если их перенести с полюса на экватор? Ускорение свободного падения: $g_п$=9,832 м/с^2, $g_э$=9,780 м/с^2.

9 К пружине неизвестной жесткости прицепили груз неизвестной массы. Удлинение пружины в положении равновесия равно x_0=10 см. Чему равен период колебаний такого пружинного маятника?

10 Предположим, что через центр Земли прорыт сквозной тоннель. С какой скоростью будет двигаться упавший в тоннель камень при подлете к центру Земли? Плотность Земли принять постоянной, а радиус R=6400км. Вращением Земли пренебречь. Считать что в тоннеле вакуум.

11 Предположим, что из Москвы в С.-Петербург прорыт прямой тоннель. За какое время пассажиры поезда совершили бы путешествие из Петербурга в Москву по этому тоннелю при отсутствии двигателей и трения? Путь равен l=640 км.

Какова при этом средняя и максимальная скорости поезда? Считать что в тоннеле вакуум.

12 Если период колебаний груза массой m, подвешенного на невесомой пружине, равен T, то чему равен период колебаний груза $2m$, подвешенного на двух таких же пружинах, висящих: а) параллельно, б) последовательно?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 1) $x_1=0{,}1\cdot\cos(\pi/4+2\pi t)$ (м); 2) $x_2=0{,}05\cdot\cos(\pi/2+\pi t)$ (м);
3) $x_3=0{,}04\cdot\cos(\pi+4\pi t)$ (м).

2 $x=0{,}05\cdot\cos(200\pi t)$ (м); $\nu=1/T=100$ Гц; $\omega=2\pi/T=628$ рад/с;
$\upsilon_м=\omega\cdot A=31$ м/с; $a_м=\omega^2 A=20$ км/с^2; $W=0{,}5m\upsilon_м^2=49$ Дж.

3 $\upsilon=\omega A\cdot\cos(\omega t)$; $\Rightarrow$ $A=0{,}1$ м; $a_м=\omega^2\cdot A=3{,}9$ м/с^2; $x=A\cdot\sin\omega t=0{,}05$ м.

4 $x=-0{,}2$ м; $F_x=-m\omega^2 x\approx0{,}4$ Н.

5 $а)\ \dfrac{l_2}{l_1}=\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2=4$; $б)\ \dfrac{l_2}{l_1}=\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2=0{,}25$.

6 $T_1=\dfrac{t}{N_1}$, $T_2=\dfrac{t}{N_2}$; $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}}$, $T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}}$, $\Rightarrow$ $\dfrac{l_1}{l_2}=\left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2=4$.

7 $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, $g_0=\dfrac{GM}{R^2}$, $g=\dfrac{GM}{(R+h)^2}$; $\dfrac{\Delta t}{t}=\dfrac{T-T_0}{T_0}$.

Решая совместно, получим: $\dfrac{\Delta t}{t}=\dfrac{h}{R}$ $\Rightarrow$ $\Delta t=\dfrac{h}{R}\cdot t=54$ с.

8 $T_п=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_п}}$, $T_э=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_э}}$, $\Delta t=(T_э-T_п)\cdot N$, $N=\dfrac{t}{T_п}$; $\Delta t=\left(\sqrt{\dfrac{g_п}{g_э}}-1\right)\cdot t=229$ с.

9 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Условие равновесия $mg=kx_0$; $\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\dfrac{x_0}{g}}=0{,}63$ с.

10 Тело, находящееся под землей, будут притягивать только внутренние слои Земли, т. к. суммарное действие внешних слоев будет равно нулю. Поэтому, если тело находится на расстоянии r от центра Земли, то сила притяжения к Земле будет равна:

$$F_r=G\frac{mM_r}{r^2}=G\frac{m(\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3)}{r^2}=\frac{4}{3}\pi Gm\rho\cdot r.$$

На поверхности Земли эта же сила равна mg, поэтому:

$$mg=\frac{4}{3}\pi Gm\rho\cdot R.$$

То есть сила притяжения под землей прямо пропорциональна расстоянию до центра Земли:

$$F_r=\frac{mg}{R}\cdot r.$$

Согласно второму закону Ньютона, эта сила создаёт ускорение телу:

$$ma_r = -\frac{mg}{R}\cdot r \quad \text{или} \quad a_r = -\frac{g}{R}\cdot r.$$

Знак «–» поставлен потому, что ускорение $\vec{a}$ направлено к центру Земли, а радиус вектор $\vec{r}$ направлен от центра Земли к телу.

Итак, мы получили уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{g/R}$ и амплитудой R. Максимальная скорость у тела будет в самом центре Земли: $\upsilon_м = \omega R = \sqrt{gR}$ =7,9 км/с.

11 Движение будет представлять гармонические колебания относительно центра тоннеля:

$$ma_x = -F_т\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; ma_x = -mg\cdot\frac{x}{R}, \quad a_x = -\frac{g}{R}\cdot x.$$

Циклическая частота колебаний $\omega = \sqrt{g/R}$, амплитуда колебаний $0{,}5l$.

$$t=\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}=42 \text{ мин}; \; \upsilon_{ср}=\frac{l}{t}=254 \text{ м/с}; \; \upsilon_м=\omega\cdot 0{,}5l=0{,}5l\sqrt{\frac{g}{R}}=400 \text{ м/с}.$$

12 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$; а) $T' = 2\pi\sqrt{2m/(2k)}=T$; б) $T'' = 2\pi\sqrt{2m/(k/2)}=2T$.

Глава 9. Экспериментальные задания

Физика – наука экспериментальная.

Предлагаемые нами экспериментальные задачи представляют собой, по сути, физический практикум. Замечательная особенность его в том, что для выполнения большинства работ используется самое простое оборудование. Многие работы можно выполнить даже в домашних условиях.

Когда молодой специалист приходит устраиваться на работу, его в первую очередь спрашивают: «А что ты умеешь делать?» При решении экспериментальных задач вы работаете с мысленными и реальными моделями. Развивается ваш мозг, глаз и руки. Золотые руки всегда в цене. «Рукастый» – самая яркая похвала специалисту.

Эти экспериментальные задания составлены и апробированы в течение многих лет заслуженным учителем Чувашии Юрием Яковлевичем Ивановым: на уроках со своими учащимися, а также с ребятами групп олимпийского резерва при Центре дополнительного образования детей и на курсах повышения квалификации учителей. Компьютерную проработку представленных здесь задач выполнил Павел Викторович Дельцов (погибший в результате несчастного случая в 2010 году).

§ 73. Измерение физических величин

Вопрос профессора:
– Длина квадрата равна 2 м. Чему равна его площадь?
Ответ студента:
– А с какой точностью измерена длина квадрата?

Точность измерений физических величин. Получение точных значений физических величин при их измерении – важная задача.

Теоретически сумма масс двух тел равна их общей массе: $m_1+m_2=m_{12}$, а практически она может оказаться больше или меньше из-за погрешности каждого измерения. Точность измерений характеризуется погрешностью.

***Абсолютная погрешность измерения** – это разность между найденным на опыте и истинным значением физической величины:*

$$\boxed{\Delta x = x - x_{\text{ист}}}.$$

«Погрешность» измерений и «ошибка» измерений – синонимы*.

---

* По-гречески грех – это ошибка, непопадание в цель.

Относительная погрешность *– это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины:*

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}} \quad \text{или} \quad \boxed{\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} \cdot 100\%}.$$

Относительная погрешность вычисляется в частях от единицы или в процентах от 100%.

Выделяют два вида погрешности: случайные и систематические.

Систематические погрешности прямых измерений.

Систематические погрешности *– погрешности, которые сохраняют значение и знак во время опыта.*

Они обусловлены ошибками приборов и постановкой опыта (неравноплечность весов, неравномерность разбивки шкал приборов, установка нуля и другие).

Оценка систематических погрешностей производится с учетом анализа особенности методики, паспортной точности приборов и проведения контрольных опытов.

Металлические линейки достаточно точны, погрешность миллиметрового деления $\leq 0{,}05$ мм, а сантиметрового деления $\leq 0{,}1$ мм, она примерно равна *погрешности отсчёта на глаз* (0,1–0,2 деления шкалы). Погрешности деревянных и пластмассовых линеек неизвестны и могут быть большими (до 5 мм при длине линейки 30 см).

Систематические погрешности электрических приборов (амперметров, вольтметров и др.) определяются классом точности и выражены обычно в процентах. Амперметр класса 0,2 имеет максимальную абсолютную погрешность не более 0,2% полной шкалы прибора. На всех участках шкалы эта погрешность одинакова.

Поэтому, если имеется возможность, нужно использовать диапазон, где стрелка отклоняется ближе к концу шкалы, тогда относительная погрешность измерений окажется меньше.

Шкалы измерительных приборов изготовлены так, что *одно деление приблизительно равно максимальной погрешности прибора.*

В научных публикациях принято приводить не максимальную, а стандартную (среднеквадратичную) погрешность. Строгих формул перевода максимальной погрешности в стандартную нет.

Приблизительно можно считать стандартную систематическую погрешность равной половине максимальной

$$\Delta_{\text{сист}} \approx \Delta_{\text{макс}}/2.$$

Как уменьшить систематические погрешности? Усовершенствовать приборы или использовать приборы лучшего качества, использовать более точные разновески, изменить методику измерения и т.д.

Случайные погрешности прямых измерений.

Случайные погрешности *– погрешности, которые непредсказуемым образом изменяют свою величину и знак от опыта к опыту.*

Случайные погрешности обусловлены трением, люфтами в механических приспособлениях, тряской, несовершенством объекта измерения.

Как уменьшить случайные погрешности? Многократным повторением опытов.

Количество измерений необходимо обдумать.

Никогда не измеряйте только один раз!

Если в результате 2–3 измерений получаются одинаковые значения, то этого количества достаточно. Если нет, то понять и устранить причину; если не удаётся, то провести много измерений.

Пусть систематические погрешности пренебрежимо малы, тогда наилучшим значением измеряемой величины является среднее арифметическое:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}.$$

Этому результату соответствует стандартная или среднеквадратичная погрешность

$$\boxed{\Delta x_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}},$$

где $(x_i - \bar{x})$ – отклонение i-го измерения от среднего значения.

Результат опыта записывается в виде*:

$$\boxed{x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \Delta x} \quad \text{или} \quad \bar{x} - \Delta x \le x_{\text{ист}} \le \bar{x} + \Delta x.$$

Оценка полной погрешности измерений. В реальных опытах присутствуют как систематические, так и случайные ошибки. Полную погрешность можно вычислить по теореме Пифагора (рис. 1):

$$\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (\Delta x_{\text{случ}})^2}.$$

---

* Истинное значение измеряемой величины никому неизвестно. Но с помощью измерений мы можем найти окрестность, внутри которой находится истина. Кроме того истинного значения может не существовать, например невозможно определить истинную длину бруска, так как его длина может отличаться на сотни тысяч слоев молекул в точках, отстоящих друг от друга на десятые доли миллиметра.

Обратим внимание на важную особенность этой формулы. Пусть случайная погрешность в 2 раза меньше систематической ($\Delta x_{случ}=\Delta x_{сист}/2$), тогда:

$$\Delta x_{полн}=\sqrt{(\Delta x_{сист})^2+\left(\frac{\Delta x_{сист}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}(\Delta x_{сист})^2}\approx 1{,}12\cdot\Delta x_{сист}.$$

Оказывается, что в школьных опытах сами погрешности редко удаётся оценить с точностью лучшей 10–20%. Но в нашем случае с такой точностью $\Delta x_{полн}\approx\Delta x_{сист}$. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину большей. Значит, если, например, случайная ошибка в 2 раза меньше систематической, то нет смысла проводить многократные измерения, так как полная погрешность при этом практически не изменится. Измерения достаточно провести 2–3 раза, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

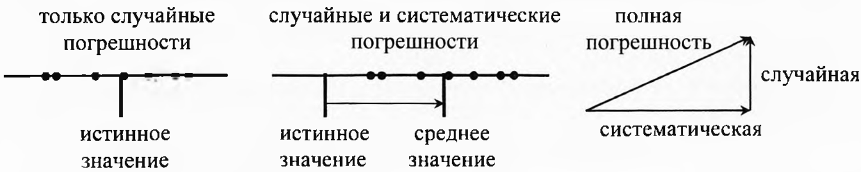


Рис. 1. *Случайные и систематические погрешности*

Обработка результатов косвенных измерений. Измерения делятся на прямые и косвенные. Мы рассмотрели прямые измерения. Рассмотрим результаты косвенных измерений.

Если косвенно измеряемая величина $A=B\pm C$, где B и C – независимые величины, то наилучшее значение A равно сумме (разности) наилучших значений B и C:

$$\overline{A}=\overline{B}\pm\overline{C}. \tag{1}$$

В этом случае стандартная абсолютная погрешность равна

$$\boxed{\Delta A=\sqrt{(\Delta B)^2+(\Delta C)^2}}.$$

Тогда относительная погрешность:

$$\varepsilon_A=\frac{\Delta A}{\overline{A}}=\frac{\sqrt{\Delta B^2+\Delta C^2}}{\overline{B}\pm\overline{C}}.$$

Если $A=B\cdot C\cdot D$ или $A=\dfrac{B\cdot C}{D}$, где B, C и D – независимые величины, то лучшими будут значения:

$$\overline{A}=\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} \qquad \text{и} \qquad \overline{A}=\frac{\overline{B}\cdot\overline{C}}{\overline{D}}. \tag{2}$$

В этих случаях относительная погрешность ε равна:

$$\boxed{\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{\overline{A}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\overline{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\overline{D}}\right)^2}}. \quad (3)$$

А стандартная погрешность:

$$\Delta A = \overline{A} \cdot \varepsilon_A = \overline{A} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\overline{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\overline{D}}\right)^2}.$$

В случае, если величины B, C и D – зависимы, то сначала надо подсчитать A_i для каждого опыта, а потом найти среднее значение A.

Например, если вычисляем жесткость пружины, подвешивая на неё грузы разной массы, то сначала надо посчитать значение жесткости для каждого опыта отдельно:

$$k_i = \frac{m_i g}{l_i},$$

а потом вычислить среднее значение:

$$\overline{k} = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}.$$

Стандартную относительную погрешность вычислим по формуле (3):

$$\varepsilon = \frac{\Delta k}{\overline{k}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2},$$

где m, l – масса груза и растяжение пружины, взятые из опыта, в котором жесткость k_i максимально близка к её среднему значению $\overline{k}$, или из опыта, в котором относительная погрешность измеряемых величин минимальна.

✍ Пример 1. Измерить плотность тела.

Дано.
m=(350±8) г
V=(181±5) см^3

ρ – ?

➥**Решение.** По определению плотности тела:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho} = \frac{\overline{m}}{\overline{V}}; \quad \overline{\rho} = \frac{350\text{ г}}{181\text{ см}^3} = 1{,}93 \text{ г/см}^3.$$

$$\Delta\rho = \overline{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2};$$

$$\Delta\rho = 1{,}93 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{350}\right)^2 + \left(\frac{5}{181}\right)^2} = 0{,}067 \approx 0{,}07 \text{ г/см}^3.$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\overline{\rho}} = \frac{0{,}07}{1{,}93} \approx 0{,}04 = 4\%. $$ ↩

✓**Ответ.** Плотность тела ρ=(1,93±0,07) г/см^3 измерена с относительной погрешностью 4%.

Примечание. При обработке измерений по формулам (1) и (2) *следует все измеряемые величины определять приблизительно с одинаковой точностью.* Например, если объём измеряется с точностью 1%, а масса – 0,5%, то его плотность определяется с точностью

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} = 1{,}1\% \approx 1\%.$$

Если же массу измерить с точностью 0,01%, то плотность будет определена практически с той же погрешностью. Поэтому тратить время и силы на измерение массы с точностью 0,01%, очевидно, не имеет смысла.

Точность записи результатов. Любая физическая величина известна с определенной погрешностью. Например, масса тела m=(1,245±0,003) г означает, что точной является цифра «4», а «5» – приближенной. Масса тела может быть в интервале $1{,}242 \le m \le 1{,}248$.

Погрешности следует округлять до двух значащих цифр, если первая из них является «1», а вторая «4», «5», «6» или «7», и до одной значащей цифры в остальных случаях.

Так правильно писать ±3; ±0,2; ±0,08; ±0,14 и так далее.

Неверно ±3,2; ±0,23.

Не следует округлять ±0,14 до ±0,1, ибо в этом случае пренебрегают 30% погрешности, и истинное значение измеряемой величины может не попасть в этот интервал.

§ 74. Кинематика

Условия экспериментальных задач

1 Определить начальную скорость и ускорение шарика, пущенного вверх по наклонной плоскости.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, металлический желоб, линейка измерительная, пружинная «катапульта», секундомер.

2 Изучить ускоренное движение стробоскопическим методом. Проверить, что пути, проходимые телом за любые последовательные равные промежутки времени, относятся как ряд нечетных чисел, т. е. 1:3:5:7… и т. д.

Оборудование: электронный стробоскоп, сосуд с водой, стакан, кран поворотный, бюретка, штатив с муфтой и лапкой, линейка измерительная.

3 Исследовать зависимость ускорения шарика, движущегося по наклонному желобу, от угла наклона желоба к горизонту.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, шарик, лента измерительная, копировальная бумага, отвес (нить с грузиком), бумага, кнопки.

4 Определить ускорение свободного падения с помощью вращающегося диска.

Оборудование: электропроигрыватель, линейка измерительная, транспортир, два шара равной массы на нити, два круга из белой и копировальной бумаги, спички, штатив с муфтой и лапкой.

5 Определить скорость движения шарика у конца наклонного желоба.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, металлический желоб, лента измерительная, секундомер, стальной шарик, груз из набора по механике.

6 Измерить время своей реакции на различные сигналы.

Оборудование: линейка измерительная длиной 40–50 см.

Возможные решения предложенных задач

1 На наклонном желобе на расстоянии l >60–80 см от начала пути сделаем метку A (рис. 2). По наклонному желобу пустим вверх шарик с помощью пружинной «катапульты» и измерим время прохождения шарика через метку A при движении вверх t_1 и при движении вниз t_2.

Времена t_1 и t_2 есть корни квадратного уравнения, выражающего зависимость координаты x шарика от времени. Основание наклонного желоба выберем в качестве тела отсчёта, и ось X направим вверх по желобу. При этом зависимость координаты x от времени выразится следующим образом:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad \text{где } x_0=0.$$

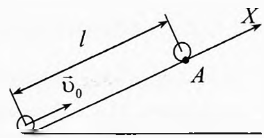


Рис. 2. *Движение шарика по наклонной плоскости*

При $x=l$ получим квадратное уравнение: $l = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}$, корнями которого являются значения t_1 и t_2. Придадим этому уравнению вид приведенного квадратного уравнения:

$$t^2 - \frac{2\upsilon_0}{a}t + \frac{2l}{a} = 0.$$

Тогда, в соответствии с теоремой Виета:

$$t_1 + t_2 = \frac{2\upsilon_0}{a} \quad \text{и} \quad t_1 \cdot t_2 = \frac{2l}{a}.$$

Откуда найдём ускорение, а затем начальную скорость шарика:

$$a = \frac{2l}{t_1 \cdot t_2}; \quad \upsilon_0 = \frac{l}{t_1 \cdot t_2}\cdot(t_1 + t_2) = l\cdot\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

В частности, если l соответствует максимальной точке подъема, то

$$t_1=t_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \frac{2l}{t_1}.$$

2 Рассчитаем отношение путей, проходимых телом за любые последовательные равные промежутки времени. Путь, пройденный телом за одну, две и три секунды при равноускоренном движении с ускорением a, равен:

$$S = \frac{at^2}{2}; \Rightarrow S_1 = \frac{a}{2}\cdot 1; \quad S_2 = \frac{a}{2}\cdot 4; \quad S_3 = \frac{a}{2}\cdot 9.$$

Соответственно, пути, пройденные телом за 1-ю, 2-ю и 3-ю секунды, равны:

$$S_{01} = S_1 = \frac{a}{2}\cdot 1, \quad S_{12} = S_2 - S_1 = \frac{a}{2}\cdot 3, \quad S_{23} = S_3 - S_2 = \frac{a}{2}\cdot 5.$$

Отсюда $S_{01} : S_{12} : S_{23} : ... = 1 : 3 : 5 : ...$

Откроем кран для выпуска воды и включим стробоскоп (рис. 3). Изменяя частоту вспышек импульсной лампы стробоскопа вращением ручки потенциометра «частота плавно» и скорость вытекания воды поворотом крана, добиваемся визуальной остановки капель воды относительно линейки. Измеряем расстояние между «неподвижными» каплями и вычисляем отношение $S_{01}:S_{12}:S_{23}...$ Повторяем опыт при другой скорости вытекания воды.

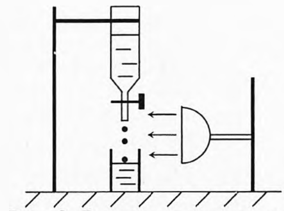


Рис. 3. *Визуальная остановка капель стробоскопом*

3 Укрепляем желоб на штативе достаточно высоко над столом под некоторым углом к горизонту (рис. 4). С помощью отвеса и рулетки можно определить $\sin\alpha$. Ускорение определим, измерив длину желоба (пройденный путь) и вычислив скорость шарика в конце пути. Для этого достаточно знать положение шарика в момент удара о стол, которое удобно фиксировать, используя лист копировальной бумаги, закрепленной на столе с помощью кнопок. Характер зависимости ускорения шарика от угла наклона желоба резко меняется после достижения таких значений угла наклона, при которых возникает проскальзывание шарика.

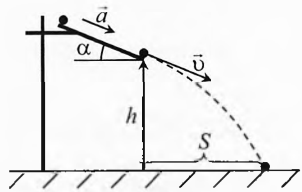


Рис. 4. *Зависимость ускорения шарика от наклона*

4 Найдём время падения тела без начальной скорости с высоты h:

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Если же вместо одного падающего тела использовать два тела, падающих с разных высот h_1 и h_2, время падения их будет отличаться на

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Отсюда модуль ускорения свободного падения выразим через h_1, h_2 и Δt:

$$g = \frac{2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}{\Delta t^2}.$$

Для измерения интервала Δt можно использовать равномерно вращающийся диск электропроигрывателя (рис. 5а). Над диском помещаются два шарика на разной высоте. Если включить проигрыватель и пережечь нить, то шары упадут на вращающийся диск в разные моменты времени t_1 и t_2. Между радиусами, проведенными на диске через точки падения шаров, образуется центральный угол φ (рис. 5б). Измерив этот угол в градусах, можно определить интервал времени $\Delta t = t_1 - t_2$. Если диск делает n=78 об/мин, то за интервал времени Δt диск повернется на угол $\varphi = \frac{78}{60} \cdot 360° \cdot \Delta t$.

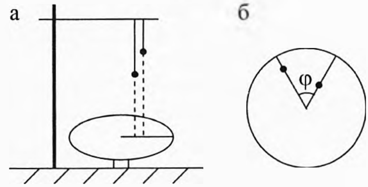


Рис. 5. *Свободной падение шаров на вращающийся диск*

Тогда интервал времени Δt в секундах $\Delta t = \dfrac{\varphi}{468°}$.

Измерив значения h_1, h_2 и рассчитав значение Δt, вычислить модуль ускорения свободного падения. Для определения места падения шаров удобно использовать лист белой и копировальной бумаги.

6 Работа выполняется вдвоем. Один ученик вертикально держит в руке линейку, а рука второго ученика находится у нижнего конца линейки. Первый отпускает линейку, а второй ловит её пальцами. Измеряем расстояние h, которое пройдет линейка, пока второй ученик её не поймает (расстояние измеряется по делениям на самой линейке). Это расстояние линейка пролетела за время $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Это время и будет временем реакции человека.

§ 75. Динамика

Условия экспериментальных задач

1 Определить массу тела.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, пружина, линейка измерительная, гиря известной массы, тело неизвестной массы.

2 Запустить тележку с заданным ускорением, например с ускорением a=0,2 м/с^2. Тележка приводится в движение падающим грузом (рис. 6).

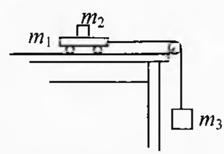


Рис. 6. *Подбор нагрузки для создания ускорения*

Оборудование: прибор для изучения законов динамики и кинематики, секундомер, набор грузов-разновесков общей массы 20 г, весы, набор гирь, линейка измерительная.

3 Рассчитать и измерить расстояние, пройденное телом под действием постоянной силы за известное время.

Оборудование: трибометр, деревянный брусок, набор грузов, линейка измерительная, динамометр, метроном.

4 Рассчитать и измерить время ускоренного движения системы грузов, прикрепленных к нити, перекинутой через неподвижный блок, если длина пройденного пути задана.

Оборудование: два груза массой по 0,1 кг, груз массой 10 г, неподвижный блок, пластилин, секундомер, линейка измерительная, штатив с муфтой.

5 Определить максимальную скорость, которую сообщает пружина «катапульты» деревянному бруску.

Оборудование: деревянная доска с «катапультой», линейка измерительная, деревянный брусок.

6 Рассчитать частоту и период вращения конического маятника при заданном угле α между нитью и вертикалью. Проверить расчёты экспериментально.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, прочная нить, груз из набора по механике, секундомер, линейка измерительная.

Возможные решения предложенных задач

1 Под действием гири известной массы m закрепленная на штативе пружина испытывает растяжение x_1, а под действием тела массы m_x пружина растягивается на x_2. Из закона Гука получим: $mg=kx_1$; $m_xg=kx_2$; $\Rightarrow\ m_x = m\dfrac{x_2}{x_1}$.

2 Если трение в подшипниках тележки и блока пренебрежимо мало, то, исходя из II закона Ньютона, можно записать:

$$(m_1+m_2+m_3)a=m_3g,$$

где m_1, m_2, m_3 – массы, соответственно тележки, груза на тележке и падающего груза. Из этого уравнения определим массу падающего груза, при которой ускорение будет равно a=0,2 м/с^2:

$$m_3 = (m_1 + m_2)\cdot\frac{a}{g-a}.$$

Для найденной массы падающего груза проверяем значение ускорения, с которым движется система тел: $a=\dfrac{2h}{t^2}$, где h – высота, с которой опускается падающий груз до пола, t – время падения.

3 Измерив с помощью динамометра силу трения $F_{тр}$ бруска о поверхность стола и силу тяжести бруска и применив II закон Ньютона, рассчитаем ускорение движения системы тел (рис. 7) под действием силы тяжести груза: $a=\dfrac{mg-F_{тр}}{m+M}$.

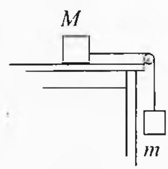


Рис. 7. *Расчёт расстояния*

Определим расстояние S, пройденное бруском по линейке трибометра за время t=1 с, используя выражение:

$$S=\frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{mg-F_{тр}}{2(m+M)}t^2.$$

Установив брусок на расстоянии S от упора, отпускаем его в момент удара метронома, настроенного на отсчёт времени, равный 0,5 с.

При хорошем совпадении расчёта и эксперимента удар бруска об упор трибометра должен совпадать со третьим ударом метронома.

4 Укрепив неподвижный блок в штативе, перекидываем через него нить, подвешиваем грузы массой по M=0,1 кг каждый. К верхнему грузу, находящемуся на высоте h от поверхности стола, прикрепляем такое количество пластилина, чтобы он при легком толчке равномерно двигался вниз. Таким образом, мы компенсируем силу трения в блоке. Подвесим к верхнему грузу гирю массой m=10 г (рис. 8). По II закону Ньютона для левого и правых грузов:

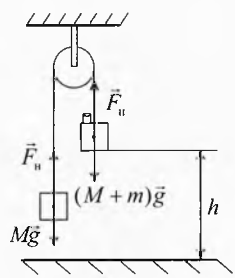


Рис. 8. *Расчёт времени падения*

$$Ma=F_н-Mg; \qquad (M+m)a=(M+m)g-F_н,$$

где $F_н$ – сила натяжения нити, a – ускорение движения грузов. Значит, ускорение грузов: $a=\dfrac{mg}{2M+m}$.

Время движения с высоты h равно: $t=\sqrt{\dfrac{2h}{a}}=\sqrt{\dfrac{2h(2M+m)}{mg}}$.

Проведя прямое измерение времени движения грузов секундомером, сравниваем результат с расчётным значением.

5 С помощью «катапульты» запустить брусок по горизонтальной поверхности доски и определить максимальную (из серии запусков) дальность $S_м$ движения бруска (рис. 9).

По II закону Ньютона, $ma=\mu mg$; $\Rightarrow$ $a=\mu g$.

Откуда $\upsilon_м = \sqrt{2aS_м} = \sqrt{2\mu g S_м}$.

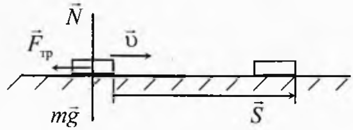


Рис. 9. *Катапультирование бруска*

Коэффициент трения скольжения μ легко определить из отдельного опыта по тангенсу угла наклона α_0, при котором начинается равномерное соскальзывание бруска с доски, которую держат дрожащими руками (чтобы исключить явление застоя): $\mu=\text{tg}\alpha_0$.

6 При вращении мятника в горизонтальной плоскости на него действует сила тяжести $F_т=mg$ и сила натяжения нити $F_н$, благодаря чему возникает нормальное (центростремительное) ускорение (рис. 10):

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_т + \vec{F}_н .$$

В проекции на горизонтальное и вертикальное направления:

$$m\omega^2 r=F_н\cdot\sin\alpha; \qquad (1)$$

$$mg=F_н\cdot\cos\alpha. \qquad (2)$$

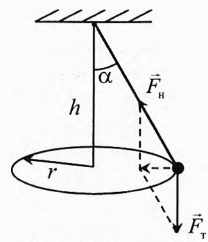


Рис. 10. *Вращение конического маятника*

Разделив (1) на (2) и учитывая, что $\omega=2\pi\nu$ и $r=h\cdot\text{tg}\alpha$, найдём частоту колебаний, а затем период колебаний:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}. \qquad (3)$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}. \qquad (4)$$

Высоту h подбираем по заданному углу α, например, 30°:

$$h = l\cdot\cos\alpha .$$

Приведя конический маятник во вращательное движение, проверяем экспериментально правильность полученных результатов по формулам (3) и (4).

§ 76. Законы сохранения в механике

Условия экспериментальных задач

1 Найти массу пластилинового шарика.

Оборудование: стальной шарик массой m=50 г, нить, штатив со стержнем, пластилиновый шарик (ρ=1200 кг/м^3), транспортир, линейка измерительная.

2 Определить коэффициент трения скольжения дерева по дереву, используя закон сохранения энергии.

Оборудование: трибометр, брусок, динамометр, линейка измерительная, нить.

3 Рассчитать скорость вылета струи из шприца. Результаты расчёта проверить экспериментально.

Оборудование: медицинский шприц, динамометр стрелочный, штангенциркуль, линейка измерительная.

4 Определить силу натяжения нити в момент прохождения грузиком положения равновесия при его свободных колебаниях на нити.

Оборудование: грузик массой m=100 г, подвешенный на нити при помощи динамометра, штатив с муфтой и лапкой, линейка измерительная.

5 Определить коэффициент трения скольжения бруска по трибометру.

Оборудование: трибометр с блоком, брусок известной массы, набор грузов, мерная лента, капроновая леска длиной 1,2 м, штатив.

Возможные решения предложенных задач

1 Подвешиваем стальной и пластилиновый шарики на нитях одинаковой длины. Затем отводим пластилиновый шар на угол α и отпускаем его. После неупругого соударения шаров измеряем угол отклонения β системы двух слипшихся шаров (рис. 11).

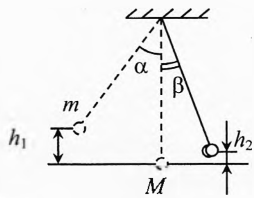


Рис. 11. *Неупругое соударение шаров*

Из закона сохранения импульса: $m\upsilon=(m+M)u$ можно определить массу m пластилинового шарика: $m=\dfrac{Mu}{\upsilon-u}$, где M – масса стального шара, υ – скорость отклоняемого шара до удара, u – скорость слипшихся шаров сразу после неупругого удара.

Выразим скорости υ и u через длину l нити и углы α и β отклонения:

$$\upsilon=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}\,; \qquad u=\sqrt{2gh_2}=2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{gl}\,.$$

Поэтому
$$m=\frac{M\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)-\sin(\beta/2)}.$$

Сравните полученный результат с расчётом массы через объём при известной плотности: $m=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$.

2 Брусок, помещенный на лабораторный трибометр, при помощи нити соединяем с динамометром, и, закрепив динамометр, оттягиваем брусок. Отмечаем его положение, снимаем показание F динамометра и растяжение пружины x. Затем брусок отпускаем (рис. 12). Измеряем путь S, пройденный бруском.

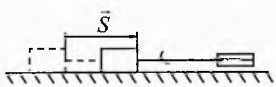


Рис. 12. *Определение коэффициента трения*

Начальное растяжение пружины динамометра должно быть достаточным для того, чтобы после остановки бруска пружина была уже в недеформированном состоянии. Тогда потенциальная энергия пружины полностью преобразуется во внутреннюю энергию путём совершения работы против силы трения, поэтому $\dfrac{kx^2}{2}=\mu mgS$. Учитывая, что начальное показание динамометра $F=kx$, найдём коэффициент трения: $\mu=\dfrac{F\cdot x}{2mgS}$.

Сравните результат с измерением коэффициента трения по формуле Амонтона, измерив силу трения и вес бруска: $\mu = \frac{F_{тр}}{N} = \frac{F_{тр}}{mg}$.

3 Скорость струи определим, приравнивая кинетическую энергию вылетевшей из шприца жидкости $\frac{m\upsilon^2}{2}$ работе поршня $F\cdot l$, где l – его перемещение.

Так как площадь отверстия много меньше площади поршня ($S_{отв} << S_п$), то можно пренебречь кинетической энергией, которой обладает жидкость, двигаясь внутри широкой части шприца до выхода из отверстия. Так как жидкость практически несжимаема, то масса вытекшей жидкости $m = \rho V = \rho S_п l$, где $S_п = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поршня, d – диаметр поршня, ρ – плотность жидкости. $F\cdot l = \frac{\rho S_п l \upsilon^2}{2}$, откуда

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_п}} = \sqrt{\frac{8F}{\rho \pi d^2}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}} \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2F}{\pi\rho}}.$$

Силу давления можно определить динамометром.

Значение скорости υ можно найти, измерив высоту h вертикального подъема воды: $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Результаты должны совпасть в пределах погрешности.

4 Отклонив грузик в сторону, поднимаем его на высоту h, а затем отпускаем. Грузик колеблется под действием силы натяжения нити $\vec{T}$ и силы тяжести $m\vec{g}$ (рис. 13). Запишем для этого движения II закон Ньютона: $\vec{F}_н + m\vec{g} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение груза. При прохождении положения равновесия у груза есть только нормальное (центростремительное) ускорение $a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, где υ – модуль скорости, R – расстояние от точки подвеса до центра груза. Значит для положения равновесия: $F_н - mg = m\frac{\upsilon^2}{R}$. Согласно закону сохранения энергии, $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}$. Из двух последних уравнений получим: $F_н = \frac{2mgh}{R} + mg = mg\left(\frac{2h}{R} + 1\right)$.

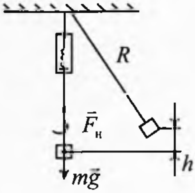


Рис. 13. *Натяжение нити*

Проверим по показанию динамометра аналитический результат.

5 Собираем установку, показанную на рис. 14. Натянув шнур, отмечаем на доске трибометра карандашом положение B_1 переднего края бруска.

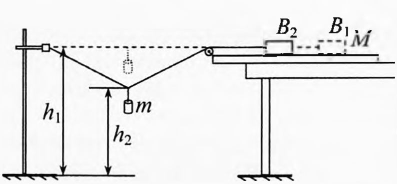


Рис. 14. *Поглощение энергии трением*

К шнуру подвешиваем груз (0,1–02 кг) и, придерживая его, определяем высоту точки его подвеса h_1 над поверхностью стола. Затем груз отпускаем. Он опускается до высоты h_2, и брусок перемещается по доске трибометра и останавливается в положении B_2.

По закону сохранения энергии, потенциальная энергия груза переходит во внутреннюю энергию путём совершения работы против сил трения ($A_{тр}<0$), поэтому:

$$A_{тр}=\Delta E \;\Rightarrow\; -F_{тр}\cdot S=mg(h_2-h_1).$$

Так как сила трения $F_{тр}=\mu Mg$, то $\mu MgS=mg(h_1-h_2)$,

где m и M – соответственно массы груза и бруска; g – ускорение свободного падения; μ – коэффициент трения; $S=B_1B_2$ – путь, пройденный бруском.

Итак, $\mu=\dfrac{m(h_1-h_2)}{MS}$.

§ 77. Статика. Гидростатика

Условия экспериментальных задач

1 Определить коэффициент трения покоя $\mu_п$ и коэффициент трения скольжения $\mu_{ск}$ дерева по дереву.

Оборудование: деревянный брусок, трибометр, линейка измерительная.

2 Определить отношение коэффициента трения покоя к коэффициенту трения скольжения дерева по дереву.

Оборудование: длинный деревянный брусок, 2–3 круглых деревянных стержня, линейка измерительная.

3 Определить массу цилиндра.

Оборудование: динамометр; цилиндр, масса которого больше предела измерения динамометра; прямоугольный брусок; линейка измерительная.

4 Определить коэффициент трения скольжения керамического магнита по металлическому листу и силу магнитного притяжения между ними.

Оборудование: керамический магнит, нить, металлический лист – экран из набора по геометрической оптике, динамометр.

5 Определить коэффициент трения скольжения фанерной пластинки о поверхность стола.

Оборудование: пластинка из фанеры, измерительная линейка, миллиметровая бумага.

Возможные решения предложенных задач

1 Положим брусок на трибометр, и будем медленно поднимать один край трибометра. После некоторого критического угла наклона брусок начнет скользить по трибометру (рис. 15). Запишем первое правило равновесия:

$$0=\vec{N}+\vec{F}_{тр}+m\vec{g}.$$

В проекции на ось Y: $0=N-mg\cdot\cos\alpha$.

В проекции на ось X: $0=mg\cdot\sin\alpha-F_{тр}$.

Учитывая, что $F_{тр}\le\mu N$, получим:

$mg\cdot\sin\alpha\le\mu\cdot mg\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,\alpha\le\mu$.

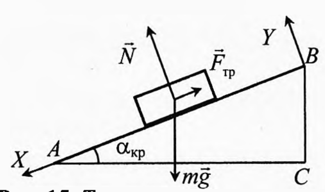


Рис. 15. *Трение покоя и скольжения*

То есть брусок будет оставаться в покое при $\text{tg}\alpha \leq \mu$. Значит максимальный (критический) угол наклона связан с коэффициентом трения покоя соотношением:

$$\boxed{\mu = \text{tg}\alpha_{\text{кр}}}.$$

Учитывая, что $\text{tg}\alpha_{\text{кр}} = BC/AC$, получим: $\mu = BC/AC$.

Измерив линейкой длины BC и AC, рассчитаем коэффициент трения покоя $\mu_{\text{п}}$.

Если же будем из горизонтального положения *дрожащей* рукой поднимать трибометр до начала проскальзывания, то по этой же формуле вычислим коэффициент трения скольжения $\mu_{\text{ск}}$. Он окажется меньше, чем $\mu_{\text{п}}$.

2 Основой возможного варианта выполнения задания является уравнение равновесия тела (правило моментов).

Положив брусок на две деревянные палочки (рис. 16), начинаем медленно двигать одну из палочек к центру масс бруска. При этом происходит скольжение бруска: сначала по одной, затем по другой палочке. В момент смены движения сила трения покоя $F_{\text{тр1}}$ у палочки 1 равна по модулю силе трения скольжения $F_{\text{тр2}}$ у палочки 2, то есть

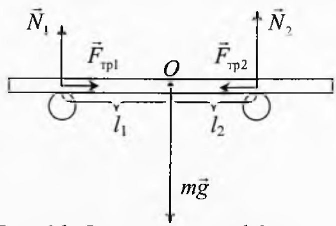


Рис. 16. *Отношение коэффициентов трения покоя и скольжения*

$$F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}}, \quad F_{\text{тр1}} = \mu_{\text{п}} N_1, \quad F_{\text{тр2}} = \mu_{\text{с}} N_2; \quad \Rightarrow \mu_{\text{п}} N_1 = \mu_{\text{с}} N_2.$$

Соотношение сил нормального давления N_1 и N_2 можно определить, применив правило моментов относительно центра масс бруска (точки O):

$$N_1 \cdot l_1 = N_2 l_2.$$

Следовательно, для искомого отношения коэффициентов трения покоя и скольжения получаем: $\dfrac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{с}}} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

3 Будем перекатывать цилиндр динамометром через препятствие (брусок). На цилиндр действуют силы: $\vec{F}_{\text{т}}$ – сила тяжести; $\vec{F}$ – сила тяги приложена к оси цилиндра и направлена горизонтально; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (рис. 17).

Запишем моменты сил, вращающих цилиндр относительно оси в точке A:

$$M_{\text{т}} = F_{\text{т}} \cdot x; \quad M_F = F \cdot (R - h); \quad M_N = N \cdot 0 = 0,$$

где R – радиус цилиндра, h – высота препятствия, x – плечо силы тяжести.

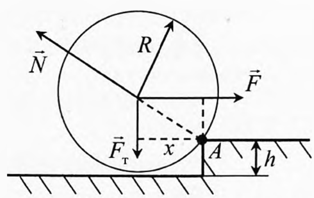


Рис. 17. *Определение массы перекатом через препятствие*

Тогда второе условие равновесия цилиндра

$$F_{\text{т}} \cdot x = F \cdot (R - h), \text{ где } x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}.$$

Следовательно: $F_т \cdot \sqrt{h(2R-h)} = F(R-h)$, откуда $F_т = \dfrac{F(R-h)}{\sqrt{h(2R-h)}}$, а масса цилиндра: $m = \dfrac{F(R-h)}{g\sqrt{h(2R-h)}}$. Измерив силу F, радиус цилиндра и высоту препятствия, вычисляем массу цилиндра.

4 Положим керамический магнит на горизонтально расположенный стальной экран и потянем его динамометром так, чтобы экран двигался равномерно (рис. 18а).

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} F_{упр1} = F_{тр1}; \\ N_1 - mg - F_м = 0; \\ F_{тр1} = \mu N_1, \end{cases}$$

где $F_м$ – сила магнитного притяжения.

Решая систему, получим:

$$F_{упр1} = \mu(F_м + mg). \qquad (1)$$

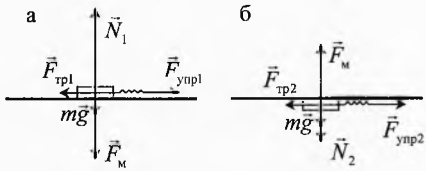


Рис. 18. *Движение магнита по металлу*

Повторим опыт с керамическим магнитом, расположив его под металлическим экраном (рис. 18б). Система уравнений для этого случая такова:

$$\begin{cases} F_{упр2} = F_{тр2}; \\ F_м - mg - N_2 = 0; \\ F_{тр2} = \mu N_2. \end{cases} \Rightarrow F_{упр2} = \mu(F_м - mg). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим значение коэффициента трения и силу магнитного притяжения:

$$\mu = \frac{F_{упр1} - F_{упр2}}{2mg}; \qquad F_м = \frac{F_{упр1} + F_{упр2}}{F_{упр1} - F_{упр2}} \cdot mg.$$

5 На куске фанеры сделана лунка, куда удобно упереть угол линейки и толкать фанеру под разными углами.

Можно найти такой угол, при котором фанерка уже скользит (проходит заклинивание), и измерить его с помощью миллиметровой бумаги (рис. 19).

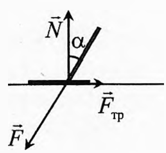


Рис. 19. *Трение фанеры по столу*

Составим систему уравнений и определим коэффициент трения: $F_{тр} = F \cdot \sin\alpha$; $N = F \cdot \cos\alpha$; $F_{тр} = \mu N$, $\Rightarrow$ $\mu = \dfrac{F_{тр}}{N} = \text{tg}\,\alpha$.

§ 78. Механические колебания

Условия экспериментальных задач

1 Рассчитать период вертикальных колебаний груза на пружине. Результаты расчёта проверить экспериментально.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, груз неизвестной массы, пружина, линейка измерительная, секундомер (для проверки частоты).

2 Рассчитать и измерить период вертикальных колебаний пробирки с песком в сосуде с водой. Сравнить полученные результаты между собой.

Оборудование: сосуд с водой, пробирка, песок, набор гирь, чашечные весы, штангенциркуль, секундомер.

3 Определить радиус кривизны вогнутого сферического зеркала или линзы.

Оборудование: вогнутое зеркало (или большая вогнутая линза), секундомер, стальной шарик известного радиуса.

4 Определить отношение длин маятников.

Оборудование: два нитяных маятника разной (но не сильно отличающейся) длины, штатив с муфтой и лапкой.

5 Рассчитать период вертикальных колебаний для двух пружин, соединенных в одном случае последовательно, а в другом – параллельно. Результаты расчёта проверить экспериментально.

Оборудование: две пружины, имеющие разные (но не сильно отличающиеся) жесткости, набор грузов, линейка измерительная, секундомер, штатив с муфтой и лапкой.

6 Рассчитать период колебаний столба воды в водяном манометре. Проверить расчёты экспериментально.

Оборудование: водяной манометр, секундомер, резиновая трубка, линейка измерительная.

7 Изучить удар мяча, падающего на стол. Построить график зависимости максимальной деформации мяча от высоты падения. Оценить:

а) время соударения при разных высотах падения;

б) давление воздуха в мяче.

Оборудование: мяч (масса мяча 200 г), листы белой и копировальной бумаги, лист миллиметровой бумаги, штатив с муфтой и кольцом, линейка измерительная.

Возможные решения предложенных задач

1 Подвесить к пружине груз неизвестной массы и определить растяжение Δl пружины. Так как при этом сила упругости равна силе тяжести $k\Delta l=mg$, то жесткость пружины $k=mg/\Delta l$.

Подставим это значение в формулу для периода колебаний груза на пружине:

$$T=2\pi\sqrt{m/k}\,; \qquad \Rightarrow \qquad T=2\pi\sqrt{\Delta l/g}\,.$$

Далее экспериментально определим период колебаний груза на пружине: $T=t/N$, где t – время, необходимое для совершения N колебаний, и сравним результаты.

2 На плавающую пробирку с песком действует сила тяжести $\vec{F}_т$, направленная вертикально вниз, и архимедова сила $\vec{F}_А$, направленная вертикально вверх (рис. 20). В положении равновесия: $\vec{F}_т=\vec{F}_А$, где $F_А=\rho gV$, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, V – объем погруженной части пробирки. Таким образом, в положении равновесия: $F_т=\rho gV$.

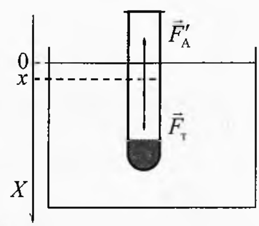


Рис. 20. *Плавающая пробирка*

Если погрузить пробирку на глубину x, то результирующая выталкивающая сила будет создавать грузу ускорение a_x: $ma_x=F_т-F'_А$, где $F'_А=\rho gV'$ – сила Архимеда в данный момент, $V'=V+S\cdot x$ – объем погруженной части пробирки в данный момент, S – площадь поперечного сечения пробирки. Значит,

$$ma_x = \rho gV - \rho g(V + S\cdot x) \quad \text{или} \quad a_x = -\frac{\rho gS}{m}x.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний ($a_x = -\omega^2\cdot x$) с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}.$$

Массу m пробирки с песком можно измерить с помощью чашечных весов, площадь S рассчитать по формуле $S = \pi d^2/4$, где d – внешний диаметр поперечного сечения пробирки (измерить штангенциркулем).

3 Расположим зеркало (линзу) горизонтально и опустим на него шарик. Если бы шарик двигался без вращения, то есть скользил бы по поверхности зеркала, то его движение было бы полностью аналогично движению маятника с длиной подвеса $R-r$ (рис. 21). Тогда из формулы для периода колебаний математического маятника можно найти радиус зеркала (линзы):

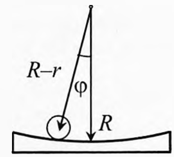


Рис. 21. *Радиус вогнутого зеркала*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}} \quad \Rightarrow \quad R = r + \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

Если учесть вращение шара, момент инерции которого равен $I = 0{,}4mr^2$, то по закону сохранения энергии шара:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega_ш^2}{2} + mgh = 0,$$

где $\upsilon = \omega_ш r = \omega(R-r)$ – скорость центра шара, $\omega_ш$ – угловая скорость вращения шара относительно центра, $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ – угловая скорость вращения центра шара относительно центра зеркала (линзы), $h = (R-r)(1-\cos\varphi) \approx (R-r)\dfrac{\varphi^2}{2}$ *. Значит,

$$\frac{m\omega^2(R-r)^2}{2} + \frac{0{,}4mr^2\cdot\omega^2(R-r)^2}{2r^2} + mg(R-r)\cdot\frac{\varphi^2}{2} = \text{const};$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}4(R-r)\cdot\omega^2 + g\cdot\varphi^2 = \text{const}.$$

Это гармонические колебания с циклической частотой $\omega_к$ и периодом T:

$$\omega_к = \sqrt{\frac{g}{1{,}4(R-r)}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}4(R-r)}{g}}; \quad \Rightarrow \quad R = r + \frac{gT^2}{5{,}6\cdot\pi^2}.$$

4 Повесим оба маятника рядом, чтобы за ними можно было вести наблюдения совместно. Отклонив маятники, одновременно выпустим их из рук. В начальный момент фазы колебаний будут одинаковыми, но постепенно маятник с меньшим периодом «обгонит» другого. Однако через некоторое время колебания вновь совпадут по фазе. Если к этому времени маятник совершит N колебаний, то второй на одно колебание меньше. Поэтому можно записать:

$$N\cdot T_1 = (N-1)T_2,$$

где T_1 и T_2 – период колебаний первого и второго маятников.

---

* Здесь мы воспользовались приближённой формулой: $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$ при $\varphi \ll 1$.

Отсюда отношение периодов: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{N-1}{N}$.

Так как $T_1 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $T_2 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}}$, то $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$ или $\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2$.

5 Определим по отдельности жесткости k_1 и k_2 каждой пружины. В положении равновесия: $F_{упр}=mg$; $kx=mg$, откуда $k=mg/x$, где g – ускорение свободного падения, x – удлинение пружины.

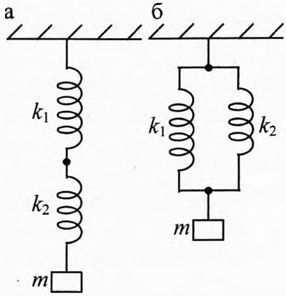


Рис. 22. *Колебания груза на системе пружин*

Жесткость системы, состоящей из последовательных пружин (рис. 22а), равна:

$$\frac{1}{k_{посл}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad k_{посл} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}.$$

Тогда период колебаний груза массой m на системе последовательно соединенных пружин:

$$T_{посл} = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2}}.$$

При параллельном соединении (рис. 22б) общая жесткость пружин равна: $k_{пар} = k_1 + k_2$. Тогда период колебаний груза массой m на системе параллельно соединенных пружин:

$$T_{пар} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Проверяем экспериментально полученные значения периодов.

6 В стеклянную трубку манометра наливаем подкрашенную воду, а резиновую трубку соединяем с манометром. Сжимая резиновый шланг, а затем быстро отпустив (сняв избыточное давление), можно привести воду в манометре в колебательное движение. Вода движется ускоренно под действием силы давления разности столбов жидкости. Колебания будут совершаться относительно положения равновесия, соответствующего равным высотам уровня воды в обоих коленах (рис. 23). Поэтому разность уровней будет равна $2x$.

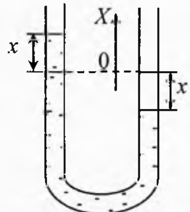


Рис. 23. *Колебания столба воды*

На всю массу воды действует возвращающая сила

$$F_x = -2\rho g S x,$$

где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения, S – площадь внутреннего сечения трубки манометра. Знак «минус» означает, что сила направлена против смещения.

С другой стороны по аналогии с колебаниями груза на пружине: $F_x = -kx$.

Следовательно, $k = 2\rho g S$.

Подставляя выражение для k в формулу для периода колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,

получим: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}.$$

Зная сечение трубки S, плотность жидкости ρ и длину всего водяного столба l в манометре, можно вычислить массу воды: $m=\rho Sl$.

Для периода колебаний получаем следующую формулу: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

Измерим экспериментально период колебаний столба воды в манометре. Для этого, возбудив колебания, определяем время t, в течение которого совершится N колебаний водяного столба, а затем рассчитаем $T_э$ по формуле: $T_э=\dfrac{t}{N}$.

Сравниваем значения периодов T и $T_э$, полученные теоретически и экспериментально.

7 Удар мяча о поверхность стола можно рассматривать как колебания упругого деформированного тела с периодом $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, где m – масса мяча, k – жесткость мяча.

Время τ соударения мяча о стол равно половине периода $\tau=\dfrac{T}{2}=\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

По закону сохранения энергии (рис. 24а): $\dfrac{kx^2}{2}=mgH$,

где x – максимальная деформация мяча, H – высота падения мяча.

Тогда жесткость мяча: $k=\dfrac{2mgH}{x^2}$.

Значит, время соударения мяча о стол:

$$\tau=\frac{\pi x}{\sqrt{2gH}}.$$

Из рис. 24б определим деформацию мяча:

$x=AB=OA-OB$; $OA=D/2$; $OC=D/2$; $BC=d/2$;

$$OB=\sqrt{OC^2-BC^2}=\sqrt{(D/2)^2-(d/2)^2};$$

$$x=\frac{D-\sqrt{D^2-d^2}}{2},$$

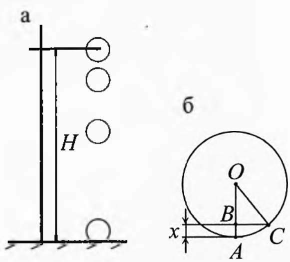


Рис. 24. *Падение мяча на стол*

где D – диаметр мяча, d – диаметр следа от удара мяча, полученного с помощью копировальной бумаги.

Проводя серию экспериментов, можно показать, что $\dfrac{x}{\sqrt{H}}$. Следовательно, время τ соударения мяча о стол не зависит от высоты H падения мяча. Можно также получить оценку времени соударения ($\tau\approx 30\div 50$ мс).

Избыточное (по сравнению с атмосферным) давление воздуха в мяче определяется из формулы $\Delta p=\dfrac{kx}{S}$, где $S=\dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь следа мяча при его ударе.

Глава 10. Задачи для желающих дойти до самой сути

С годами всё больше наполняешься
ощущением, что знание есть сила,
а сила есть знание,
и счастье в радости познания.
В. П. Дельцов

§ 79. Кинематика

1 **Три черепахи.** В вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны l находятся три (точечных) черепахи. Они начинают двигаться с одинаковыми по модулю скоростями υ. Первая черепаха всё время движется в направлении второй, вторая – в направлении третьей, третья – в направлении первой. Через какое время и где они встретятся?

➥**Решение.** I способ. Из соображений симметрии следует, что в любой момент времени черепахи будут находиться в вершинах всё уменьшающегося равностороннего треугольника. Поэтому ясно, что они встретятся в центре треугольника (точка O) (рис. 1). Составляющая скорости черепахи на радиус (направление на точку O) остаётся постоянной: $\upsilon_R=\upsilon\cdot\cos\alpha$. Черепахи встретятся через время $t=R/\upsilon_R$, где $R\cos\alpha=l/2$, $\alpha=30°$. Тогда $t=l/(2\upsilon\cdot\cos^2\alpha)=2l/(3\upsilon)$.

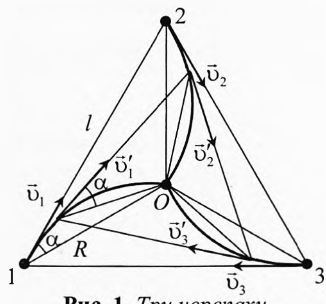


Рис. 1. *Три черепахи*

II способ. Скорость первой черепахи относительно третьей $\vec{\upsilon}_{13}=\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_3$. В проекции на отрезок, соединяющий 1-ю и 3-ю черепах: $\upsilon_{13}=\upsilon_1\cos 60° + \upsilon_3=1{,}5\upsilon$. К моменту встречи они должны сблизиться от l до 0. Тогда $t=l/\upsilon_{13}=2l/(3\upsilon)$.⬅

2 **Лиса и Заяц.** Заяц находится на расстоянии R=300 м от Лисы. Заяц заметил лису и начал бежать со скоростью u=10 м/с по прямой, перпендикулярной линии, соединяющей их в начальный момент времени. В этот момент Лиса увидела Зайца и начала догонять его, двигаясь всё время в направлении Зайца со скоростью υ=20 м/с. Через какое время она его догонит?

➥**Решение.** Рассмотрим движение Зайца и Лисы в произвольный момент времени (рис. 2). Лиса приближается к Зайцу со скоростью $\upsilon_{отн}=\upsilon-u_z$, где u_z – составляющая скорости Зайца на направление скорости Лисы.

Так как $u_z=u\cdot\cos\varphi$; $\upsilon_y=\upsilon\cdot\cos\varphi$, то

$$\frac{u_z}{\upsilon_y} = \frac{u}{\upsilon} = \text{const}.$$

Найдём, насколько лиса приблизится к зайцу за промежуток времени Δt:

$$\Delta z = \upsilon_{\text{отн}} \cdot \Delta t = (\upsilon - u_z) \cdot \Delta t = (\upsilon - \upsilon_y \frac{u}{\upsilon}) \cdot \Delta t.$$

Просуммируем это выражения за всё время движения:

$$\sum \Delta z = \upsilon \cdot \sum \Delta t - \frac{u}{\upsilon} \cdot \sum \upsilon_y \cdot \Delta t.$$

Учитывая, что $\sum \Delta z = R$; $\sum \Delta t = t$; $\sum \upsilon_y \cdot \Delta t = \sum \Delta y = l$, получим:

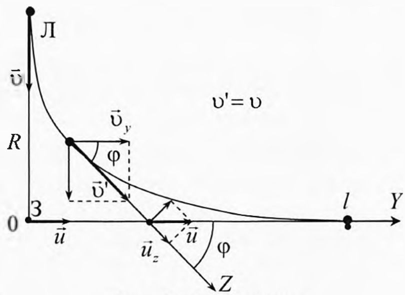


Рис. 2. *Лиса и Заяц*

$$R = \upsilon \cdot t - \frac{u}{\upsilon} \cdot l.$$

Учитывая, что $l = u \cdot t$, найдём время сближения: $t = \dfrac{R}{\upsilon - u^2/\upsilon}$=20 с.

Вопрос на засыпку: какой путь пробежала лиса? Подсказка: какое расстояние успеет пробежать заяц?↩

3 **Шар и ступенька.** Шар радиуса R=5 см, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на ступеньку высотой h=R/5. При какой скорости скольжения шар «запрыгнет» на ступеньку после первого удара? Удар шара о ступеньку упругий. Трения нет.

↪**Решение.** Так как трение отсутствует, то сила реакции ступеньки направлена перпендикулярно поверхности, то есть на центр масс шара (рис. 3). А поскольку во время удара результирующая сила направлена на центр масс шара (действием силы тяжести за время удара можно пренебречь), то удар шарика можно рассматривать как упругий удар шара о «стенку» (ось X). Значит, скорость шара после отражения будет так же направлена под углом α к оси X, или под углом 2α к горизонту, а её модуль останется прежним: $\upsilon = \upsilon_0$.

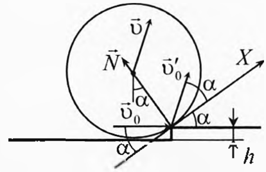


Рис. 3. *Шар и ступенька*

Чтобы запрыгнуть на ступеньку, по горизонтали шар должен пролететь расстояние $R\sin\alpha$ со скоростью $\upsilon_г = \upsilon_0 \cos 2\alpha$. Значит, $t_п = \dfrac{R\sin\alpha}{\upsilon_0 \cos 2\alpha}$.

За это время он должен с начальной скоростью по вертикали $\upsilon_в = \upsilon_0 \sin 2\alpha$ подняться хотя бы на высоту h: $(\upsilon_0 \sin 2\alpha) \cdot t_п - \dfrac{g t_п^2}{2} \geq h$.

Откуда: $h \leq R\sin\alpha \cdot tg 2\alpha - \dfrac{gR^2 \sin^2\alpha}{2\upsilon_0^2 \cos^2 2\alpha}$; $\upsilon_0 \geq \dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{gR^2}{2(R\sin\alpha \cdot tg 2\alpha - h)}}$.

Задача имеет решение, когда подкоренное выражение положительно, то есть $(R\sin\alpha \cdot tg 2\alpha - h) > 0$. В противном случае шар не сможет запрыгнуть на ступеньку при любой начальной скорости.

Так как $\cos\alpha=\dfrac{R-h}{R}=\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$, $\sin2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$,

$\cos2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\dfrac{7}{25}$, $tg2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\dfrac{24}{7}$, то $\upsilon_0\ge\sqrt{\dfrac{225\cdot gR}{182}}$, $\upsilon_0\ge0{,}78$ м/с.

4 Наматывание нити на столб. На гладкой горизонтальной плоскости стоит вертикальный столб радиуса R=15 см. Тонкая нить длиной l_0=1,2 м одним концом прикреплена к столбу, а к другому привязана гайка. Вначале гайка лежит на плоскости, нить натянута. Гайке придают толчком скорость υ=2 м/с перпендикулярно нити, и она начинает двигаться вокруг столба, наматывая на него нить. Трения нет. Через какое время τ вся нить намотается на столб?

Решение. Поскольку сила натяжения перпендикулярна скорости $\vec{F}\perp\vec{\upsilon}$, то модуль скорости будет постоянен (рис. 4): $\upsilon=|\vec{\upsilon}|=\text{const}$.

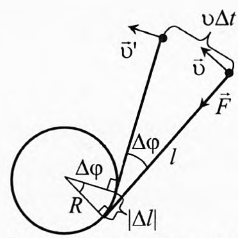


Рис. 4. *Наматывание нити*

Для двух достаточно близких положений:

$$\Delta\varphi=\frac{\upsilon\Delta t}{l},\quad \Delta\varphi=\frac{|\Delta l|}{R}=-\frac{\Delta l}{R}.$$

Откуда $\Delta t=-\dfrac{1}{\upsilon R}l\cdot\Delta l$. Переходя к пределу при $\Delta t\to0$ и интегрируя (суммируя) за всё время движения, получим:

$$\int_0^\tau dt=-\frac{1}{\upsilon R}\cdot\int_{l_0}^0 l\cdot dl \quad\Rightarrow\quad t\Big|_0^\tau=-\frac{1}{\upsilon R}\cdot\frac{l^2}{2}\Big|_{l_0}^0.$$

Откуда исходное время: $\tau=\dfrac{l_0^2}{2\upsilon R}=\dfrac{1{,}2^2}{2\cdot2\cdot0{,}15}=2{,}4$ с.

5 Брошенное тело. Тело брошено с уровня земли под углом α=45° к горизонту (рис. 5). В некоторый момент оно оказалось на высоте h_1=28 м над землей, а ровно через τ=1 с – на высоте h_2=26 м. Найти дальность полета. Ускорение свободного падения принять равным g=10 м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

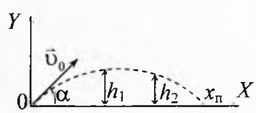


Рис. 5. *Брошенное тело*

Решение. Уравнения движения по горизонтальной и вертикальной осям:

$$x=\upsilon_0\cos\alpha\cdot t;\quad y=\upsilon_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент времени t_1 и через промежуток τ тело находилось на высоте:

$$h_1=\upsilon_0\sin\alpha\cdot t_1-\frac{gt_1^2}{2};\quad h_2=\upsilon_0\sin\alpha\cdot(t_1+\tau)-\frac{g(t_1+\tau)^2}{2}.$$

В момент приземления ($y_п$=0, $x_п$=l): $0=\upsilon_0\sin\alpha\cdot t_п-\dfrac{gt_п^2}{2}$; $l=\upsilon_0\cos\alpha\cdot t_п$.

Решая полученную систему из 4-х последних уравнений с 4-мя неизвестными (l, υ_0, t_1, $t_п$), после утомительных преобразований можно получить ответ.

✓ **Ответ.** l=115 м.

§ 80. Динамика

6 Одинокий мальчик. Мальчик массой m подтягивает себя и тележку массой M к стене с помощью веревки, переброшенной через неподвижные блоки. Какое наибольшее ускорение он может сообщить тележке при условии, что его ноги не проскальзывают? Коэффициент трения между ногами и тележкой – μ; между полом и тележкой трения нет.

➥**Решение.** Возможны три варианта: 1) $m<M$; 2) $m>M$; 3) $m=M$.

Рассмотрим вариант, когда масса мальчика меньше массы тележки (рис. 6а). В этом случае он должен не только тянуть веревку, но и толкать ступнями ног тележку вперед силой трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Тележка действует, согласно третьему закону Ньютона, на мальчика силой трения покоя $\vec{F}'_{тр}$ в противоположном направлении. На рисунке изображены все силы, приложенные к мальчику, а на тележку только силы, приложенные в горизонтальном направлении.

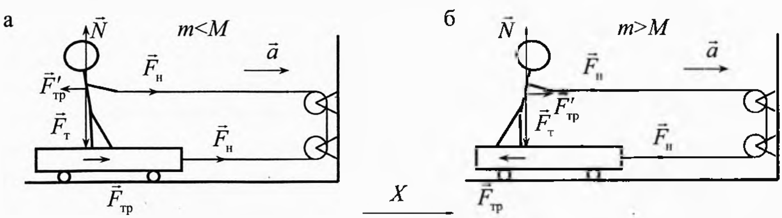


Рис. 6. *Лёгкий и тяжёлый мальчик тянет тележку через блок*

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X для обоих тел:

$$m\cdot a=F_н - F'_{тр}, \qquad M\cdot a=F_н+F_{тр}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = F'_{тр}$, получим: $(M-m)a=2\cdot F_{тр}$.

Ускорение максимально, когда сила трения покоя достигнет максимума (на грани проскальзывания) $F_{тр.max}=\mu\cdot N$, где $N=mg$. Учитывая это, получим:

$$a_{max}=\frac{2\mu N}{M-m}=\frac{2\mu mg}{M-m}=\frac{2\mu g}{\frac{M}{m}-1}.$$

Если масса мальчика больше массы тележки, то он должен толкать тележку ногами назад (силой трения покоя), а тележка на него будет действовать вперед (рис. 6б). Аналогично первому варианту имеем по оси X:

$$m\cdot a=F_н + F'_{тр}; \quad M\cdot a=F_н - F_{тр}, \quad F_{тр}=F'_{тр}; \quad F_{тр.max}=\mu\cdot N.$$

$$a=\frac{2F_{тр}}{m-M}; \quad a_{max}=\frac{2\mu mg}{m-M}=\frac{2\mu g}{1-\frac{M}{m}}.$$

Наконец, если $m=M$, то сила трения не будет возникать, так что мальчик может создать любое ускорение, но, конечно, в пределах своих физических способностей. Ускорение тележки и мальчика: $a=F_н/m$. ↩

7 Шайба на наклонной плоскости. Шайба лежит на наклонной плоскости, причём $\operatorname{tg}\alpha=\mu$. Ей сообщают начальную скорость $\vec{\upsilon}_0$ нормально образующей наклонной плоскости, вдоль поверхности. Определить скорость шайбы внизу наклонной плоскости, если последняя достаточно длинна.

➥Решение. На шайбу действуют три силы: сила тяжести (вниз), сила нормальной реакции опоры (перпендикулярно к поверхности), сила трения в направлении, противоположном скорости в данный миг (рис. 7). По оси X, взятой по направлению начальной скорости, шайба будет тормозить от значения скорости υ_0 до 0. По оси Y скорость шайбы увеличивается от 0 до $\upsilon_к$, и далее шайба будет двигаться по оси Y с этой скоростью.

Действительно, модуль силы трения в любой момент времени:

$$F_{тр}=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot mg\cos\alpha=mg\cdot\sin\alpha.$$

То есть сила трения уравновесит скатывающую составляющую силы тяжести, и шайба будет двигаться дальше равномерно.

Скорость изменения проекции импульса по оси Y, согласно второму закону Ньютона, $\frac{\Delta p_y}{\Delta t}=mg\cdot\sin\alpha-F_{тр}\cdot\sin\beta$, где β – угол между направлением скорости в данной точке и осью X.

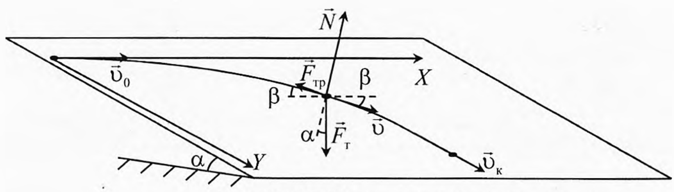


Рис. 7. *Шайба на наклонной плоскости*

Аналогично, скорость изменения модуля полного импульса:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta-F_{тр}.$$

Подставляя в эти уравнения $F_{тр}=mg\cdot\sin\alpha$, получим:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t}=F_{тр}(1-\sin\beta);\qquad \frac{\Delta p}{\Delta t}=F_{тр}(\sin\beta-1).$$

Откуда видно, что $\frac{\Delta p_y}{\Delta t}=-\frac{\Delta p}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ $\Delta p_y=-\Delta p$; или за достаточно большое время: $m\upsilon_к-0=-(m\upsilon_к-m\upsilon_0)$ $\Rightarrow$ $2m\upsilon_к=m\upsilon_0$; $\upsilon_к=\upsilon_0/2$.⬅

✓ **Ответ.** Шайба повернется на угол 90°, её скорость уменьшится в два раза до $0{,}5\cdot\upsilon_0$, в дальнейшем шайба продолжит двигаться равномерно.

8 Футбольный мяч. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату его скорости относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью $\upsilon_1=20$ м/с и ускорением $a_1=13$ м/с^2. После удара он полетел вертикально вверх со скоростью $\upsilon_2=10$ м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара? Чему равен импульс силы футболиста $\vec{J}$? Чему равна средняя сила $\vec{F}_{ср}$ удара, если время удара $\tau=0{,}1$ с? Масса мяча $m=0{,}4$ кг.

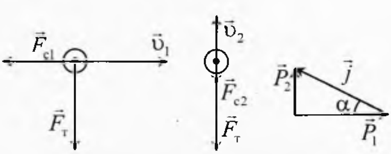


Рис. 8. *Футбольный мяч*

➥Решение. На мяч в воздухе действуют две силы (рис. 8): сила тяжести и сила сопротивления воздуха: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{F}_с$. В первом случае $\vec{F}_с$ направлена горизонтально, а $\vec{F}_т$ вертикально: $a_1^2 = g^2 + (F_{с1}/m)^2$. Во втором случае $\vec{F}_с$ и $\vec{F}_т$ направлены вертикально вниз: $a_2 = g + (F_{с2}/m)$. По условию $F_с$=$\beta\cdot\upsilon^2$; $\Rightarrow F_{с2}/F_{с1} = (\upsilon_2/\upsilon_1)^2$.

Решая эти уравнения, получим: $a_2 = g + (\upsilon_2/\upsilon_1)^2 \cdot \sqrt{a_1^2 - g^2}$, a_2=12 м/с^2.

Импульс силы равен изменению импульса тела:

$$\vec{j} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) \quad \Rightarrow \quad j = m\sqrt{\upsilon_2^2 + \upsilon_1^2}, \quad j\text{=8,9 Н·с}.$$

$$\vec{j} = \vec{F}_{ср}\cdot\tau \quad \Rightarrow \quad F_{ср}=j/\tau, \quad F_{ср}\text{=89 Н}.$$

Сила $\vec{F}_{ср}$ и её импульс $\vec{j}$ направлены под углом (180°–α) к начальной скорости $\vec{\upsilon}_1$: tgα=P_2/P_1=υ_2/υ_1, α≈27°.⬅

9 **Игрушечный танк.** Игрушечный танк массы m начинает двигаться с одного конца доски массой M к другому (рис. 9). Первоначально доска покоилась на горизонтальной поверхности стола. Если поверхность стола гладкая, то танк, передвинувшись на правый край, совершит перемещение $\vec{S}_1$ относительно стола. Какое максимальное перемещение $\vec{S}_2$ он может совершить при наличии трения между доской и поверхностью стола? Танк движется только вперед. Считать, что двигатель танка может развивать любую мощность, гусеницы не проскальзывают, и он способен мгновенно останавливаться на доске.

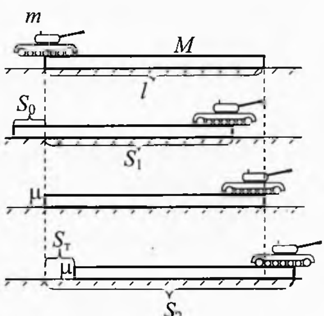


Рис. 9. *Игрушечный танк*

➥Решение. В случае гладкой поверхности стола центр масс системы останется неподвижен: S_1m=S_0M, S_1=l–S_0, где l – длина доски, S_0 – смещение доски относительно стола. Откуда: $l = S_1\cdot\dfrac{M+m}{M}$.

При наличии трения между доской и столом танк должен ехать по доске с максимальным ускорением a_{max}, при котором доска всё ещё не проскальзывает относительно стола, а на конце доски резко остановиться, чтобы проехать дополнительное расстояние вместе с доской. В этом случае $a_{max} = \dfrac{(F_{тр})_{max}}{m} = \dfrac{\mu(m+M)g}{m}$, где μ – коэффициент трения между доской и поверхностью стола. Перед торможением в конце доски танк будет иметь скорость: $\upsilon = \sqrt{2a_{max}l} = \sqrt{2\mu g l\cdot\dfrac{m+M}{m}}$.

По закону сохранения импульса сразу после торможения скорость доски с танком: $u = \dfrac{m\upsilon}{m+M} = \sqrt{2\mu g l\cdot\dfrac{m}{m+M}}$. Тормозной путь: $S_т = \dfrac{u^2}{2\mu g} = \dfrac{m}{m+M}\cdot l$. Итак, $S_2 = l + S_т = \left(1+\dfrac{m}{m+M}\right)l$, $S_2 = \left(1+2\dfrac{m}{M}\right)S_1$. Как видно, S_2 не зависит от μ (в том числе и для близких к 0), однако при μ=0 танк пройдет путь $S_1 \neq S_2$. Подумайте, почему.⬅

10 **Система блоков.** Каковы ускорения грузов системы, показанной на рис. 10а? Участки нити, не соприкасающиеся с блоками, вертикальны. Блоки невесомы.

➥Решение. Центральный блок невесом, значит:

$$T_2=2T.$$

По II закону Ньютона для тел по оси Y:

$$m_1a_{1y}=T-m_1g; \quad m_2a_{2y}=T_2-m_2g; \quad m_3a_{3y}=T-m_3g.$$

Пусть для определенности массы m_1, m_2 и m_3 таковы, что центральный груз m_2 движется вверх, а грузы m_1 и m_3 движутся вниз.

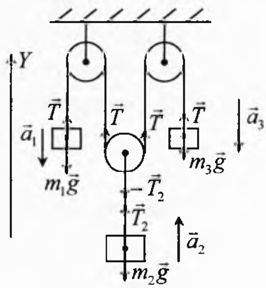


Рис. 10а. *Система блоков*

Из условия нерастяжимости нити следует, что сумма длин всех четырех её вертикальных отрезков остаётся при движении неизменной (рис. 10б). Следовательно, сумма ускорений $\vec{a}_1'$ и $\vec{a}_3'$ равна двойному ускорению среднего блока:

$$\boxed{\vec{a}_1'+\vec{a}_3'=2\vec{a}_2}.$$

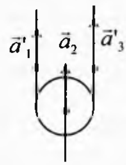


Рис. 10б. *Условие нерастяжимости нити*

В нашем случае ускорение участков нити по модулю равно ускорению соответствующих грузов:

$\vec{a}_1'=-\vec{a}_1$, $\quad \vec{a}_3'=-\vec{a}_3$, тогда по оси Y: $-a_{1y}-a_{3y}=2a_{2y}$.

Решая совместно пять уравнений, получим:

$$T=\frac{4m_1m_2m_3g}{m_2m_3+4m_1m_3+m_1m_2}; \quad a_{1y}=\frac{3m_2m_3-4m_1m_3-m_1m_2}{m_2m_3+4m_1m_3+m_1m_2}\cdot g;$$

$$a_{2y}=\frac{4m_1m_3-m_2m_3-m_1m_2}{m_2m_3+4m_1m_3+m_1m_2}\cdot g; \quad a_{3y}=\frac{3m_1m_2-m_2m_3-4m_1m_3}{m_2m_3+4m_1m_3+m_1m_2}\cdot g.$$ ➥

11 **Центр масс Земля–Луна.** Вычислить скорость центра Земли относительно центра масс системы Земля–Луна. Масса Земли $M_З=5{,}98\cdot10^{24}$ кг, масса Луны $M_Л=7{,}35\cdot10^{22}$ кг. Период вращения системы Земля–Луна $T=27{,}3$ сут. Расстояние между центрами Земли и Луны $r=384\cdot10^6$ м.

➥Решение. Земля и Луна притягивают друг друга одинаковыми по модулю силами, которые создают центростремительное ускорение Земле и Луне относительно их общего центра масс (рис. 11):

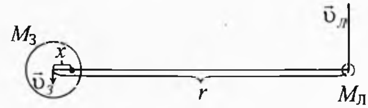


Рис. 11. *Центр масс Земля–Луна*

$$M_З\cdot a_З=M_Л\cdot a_Л; \Rightarrow M_З\cdot\omega^2x=M_Л\cdot\omega^2(r-x),$$

где x – расстояние от центра Земли до центра масс.

Значит, $x=r\cdot\dfrac{M_Л}{M_Л+M_З}=4{,}66\cdot10^6$ м.

Угловая скорость вращения Луны и Земли вокруг их общего центра масс:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Скорость центра Земли относительно центра масс Земля–Луна:

$\upsilon_з = \omega \cdot x = \frac{2\pi r}{T} \cdot \frac{M_Л}{M_Л + M_З}$, $\upsilon_З$=12,4 м/с. А скорость Луны $\upsilon_Л \approx 1$ км/с.↩

12 **Шайба на ленте.** Шайба скользит по гладкому столу со скоростью υ_0 и попадает на транспортер, лента которого движется с начальной скоростью u навстречу шайбе (рис. 12). Сколько времени шайба будет находиться на ленте, если коэффициент трения μ?

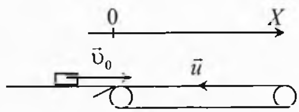


Рис. 12. *Шайба на ленте*

↪**Решение.** В инерциальной системе отсчёта, связанной с лентой, шайба движется со скоростью ($\vec{\upsilon}_0 - \vec{u}$), или в проекции на ось X: $\upsilon_0 + u$. При движении шайбы по ленте в горизонтальном направлении на шайбу действует сила трения, которая создаёт ей тормозящее ускорение:

$$a_x = -F_{тр}/m = -\mu N/m = -\mu g.$$

Уравнение движения в системе отсчёта, связанной с Землей: $x = \upsilon_0 t - \frac{\mu g t^2}{2}$.

Предположим, что шайба остановится относительно ленты раньше, чем снова вернется в исходную точку. Тогда время до остановки шайбы относительно ленты:

$$t_{ост} = \frac{\upsilon_0 + u}{\mu g}.$$

В этот момент шайба будет на расстоянии $x_{ост}$ от начала ленты:

$$x_{ост} = \upsilon_0 t_{ост} - \frac{\mu g t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{ост} = \frac{\upsilon_0^2 - u^2}{2\mu g}.$$

Значит, если $\upsilon_0 > u$, то шайба остановится относительно ленты через время $t_{ост}$ и оставшийся путь ($x_{ост}$) до возвращения будет ехать на ленте со скоростью u в течение времени $\frac{x_{ост}}{u}$. Полное время $t_1 = t_{ост} + \frac{x_{ост}}{u} = \frac{\upsilon_0 + u}{\mu g} + \frac{\upsilon_0^2 - u^2}{2\mu g \cdot u} = \frac{(\upsilon_0 + u)^2}{2\mu g \cdot u}$.

Если $\upsilon_0 = u$, то шайба остановится относительно ленты в тот момент, когда вернется на край ленты: $t_2 = t_{ост} = \frac{\upsilon_0 + u}{\mu g} = \frac{2\upsilon_0}{\mu g}$.

Если $\upsilon_0 < u$, то шайба не успеет остановиться относительно ленты. Время движения найдём из условия x=0 в уравнении движения шайбы:

$$0 = \upsilon_0 t_3 - \frac{\mu g \cdot t_3^2}{2}, \quad \text{откуда } t_3 = \frac{2\upsilon_0}{\mu g}.$$↩

13 **Удар кубика о стенку.** Упругий кубик, движущийся по гладкому горизонтальному столу, ударяется о жёсткую стенку под углом α и отскакивает перпендикулярно ей. Определить минимально возможный коэффициент трения между кубиком и стенкой, при котором это возможно.

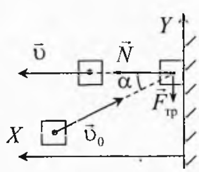


Рис. 13. *Удар кубика*

↪**Решение.** Запишем II закон Ньютона для малого промежутка времени при ударе (рис. 13):

$$m\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}=N;\quad m\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}=-F_{тр};\quad \Rightarrow\quad -\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\upsilon_x}=\frac{F_{тр}}{N}.$$

Поскольку $\frac{F_{тр}}{N}\le\mu$, то $-\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\upsilon_x}\le\mu$ или $-\Delta\upsilon_y\le\mu\Delta\upsilon_x$.

Просуммировав последнее выражение за весь удар, получим:

$$-(0-\upsilon_{0y})\le\mu(\upsilon_x-\upsilon_{0x}).$$

Так как кубик упругий, то $\upsilon_x=-\upsilon_{0x}$. Итак, $\mu\ge\frac{\upsilon_{0y}}{-2\upsilon_{0x}}=\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{2\upsilon_0\cos\alpha}=\frac{tg\alpha}{2}$.

При минимально возможном коэффициенте трения $\mu_{min}=\frac{tg\alpha}{2}$ кубик будет проскальзывать на протяжении всего удара. При $\mu\ge\mu_{min}$ кубик будет проскальзывать до тех пор, пока его скорость вдоль стенки (по оси Y) не уменьшится до 0.↩

14 **Груз на гладком клине.** На гладкую наклонную плоскость, расположенную под углом α, положили гладкий клин массой M так, что его верхняя поверхность оказалась горизонтальной, а на неё поставили гладкий груз массой m. Определить ускорение клина.

↪**Решение.** На груз действуют две силы (рис. 14а): $m\vec{a}=\vec{F}_т+\vec{N}$ и обе в вертикальном направлении, значит, груз будет опускаться строго вниз (рис. 14б) с ускорением $\vec{a}$:

$$ma=mg-N.$$

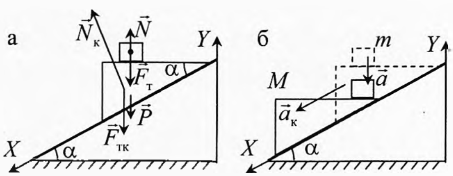


Рис. 14. *Груз на гладком клине*

На клин действует три силы: $M\vec{a}_к=\vec{F}_{тк}+\vec{N}_к+\vec{P}$. Клин будет двигаться вдоль оси X: $Ma_к=Mg\cdot\sin\alpha+P\cdot\sin\alpha$, где $P=N$ – вес груза.

Так как проекции ускорений груза и клина на ось Y должны быть одинаковы, то $a=a_к\cdot\sin\alpha$. Решая эти уравнения, получим: $a_к=\frac{(M+m)\cdot g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$.↩

15 **Шайба налетает на стенку.** Быстро вращающаяся упругая шайба, движущаяся по гладкому горизонтальному столу со скоростью $\vec{\upsilon}_0$, ударяется о жёсткую стенку под прямым углом. Коэффициент трения между шайбой и стенкой μ. Под каким углом отскочила шайба? Какова угловая скорость вращения шайбы после удара ω, если начальная угловая скорость вращения шайбы равна ω_0?

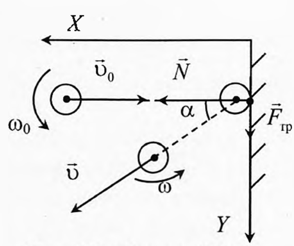


Рис. 15. *Удар шайбы*

Решение. Запишем II закон Ньютона для малого промежутка времени при ударе (рис. 15):

$$m\cdot\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}=N,\qquad m\cdot\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}=F_{тр}. \qquad (1)$$

Откуда: $\dfrac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\upsilon_x}=\dfrac{F_{тр}}{N}$. Так как шайба вращалась быстро, то во время удара она всё время проскальзывала относительно стенки и $F_{тр}=\mu N$.

Итак, $\Delta\upsilon_y=\mu\Delta\upsilon_x$. Просуммировав за весь удар, получим:

$$\upsilon_y-0=\mu(\upsilon_x-\upsilon_{0x}).$$

Так как шайба упругая, то $\upsilon_x=-\upsilon_{0x}=\upsilon_0$. Значит,

$$\upsilon_y=2\mu\upsilon_0. \qquad (2)$$

Шайба отскочит под угол α к нормали: $\text{tg}\alpha=\upsilon_y/\upsilon_x=2\mu$.

По закону динамики вращательного движения (уравнение Эйлера):

$$I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=-F_{тр}R,$$

где R – радиус шайбы. Знак «–» указывает на то, что момент силы трения уменьшает угловую скорость.

Подставляя $F_{тр}$ из (1) в последнее уравнение, после сокращения получим:

$$I\Delta\omega=-Rm\Delta\upsilon_y. \qquad (3)$$

Просуммировав за всё время удара, получим: $I(\omega-\omega_0)=-Rm(\upsilon_y-0)$.

С учетом выражения для υ_y из (2): $\omega=\omega_0-\dfrac{mR}{I}2\mu\upsilon_0$.

Так как момент инерции цилиндрической шайбы равен $I=0{,}5\cdot mR^2$, то

$$\omega=\omega_0-\frac{4\mu\cdot\upsilon_0}{R}. \qquad (4)$$

Шайба будет всё время проскальзывать, если $\omega\geq\dfrac{\upsilon_y}{R}$, учитывая (2) и (4):

$$\omega_0-\frac{4\mu\cdot\upsilon_0}{R}\geq\frac{2\mu\cdot\upsilon_0}{R}\quad\Rightarrow\quad\omega_0\geq\frac{6\mu\cdot\upsilon_0}{R}.$$

Если же начальная скорость вращения была недостаточно большой ($\omega_0<\dfrac{6\mu\cdot\upsilon_0}{R}$), то шайба будет проскальзывать до тех пор, пока не начнет катиться (начиная с того момента, когда $\omega R=\upsilon_y$). Просуммируем (3) для данного случая:

$$I(\omega-\omega_0)=-Rm(\omega R-0)\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{\omega_0\cdot I}{I+mR^2}=\frac{\omega_0}{3}.$$

Скорость по оси Y: $\upsilon_y=\omega R=\dfrac{\omega_0 R}{3}$. Угол отскока α: $\text{tg}\alpha=\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\dfrac{\omega_0 R}{3\upsilon_0}$.

✓ **Ответ.** Если $\omega_0\geq\dfrac{6\mu\cdot\upsilon_0}{R}$, то $\omega=\omega_0-\dfrac{4\mu\cdot\upsilon_0}{R}$; $\text{tg}\alpha=2\mu$. Если же $\omega_0<\dfrac{6\mu\cdot\upsilon_0}{R}$, то $\omega=\dfrac{\omega_0}{3}$; $\text{tg}\alpha=\dfrac{\omega_0 R}{3\upsilon_0}$.

Примечание. Мы получили, что угловая скорость уменьшилась от ω_0 до ω, а линейная скорость увеличилась от υ_0 до $\sqrt{\upsilon_0^2+\upsilon_y^2}$. Кроме этого часть энергии перешла во внутреннюю путём совершения работы против силы трения. Найдите изменение внутренней энергии системы тел.

§ 81. Статика и гидростатика

16 **Прижатый лист.** На горизонтальном столе находится легкий лист бумаги, прижатый однородным стержнем массы m, верхний конец которого шарнирно закреплен. Угол между стержнем и листом равен α. Коэффициент трения между ними μ_1. Какую минимальную силу нужно приложить по горизонтали, чтобы вытащить лист? Коэффициент трения между столом и бумагой равен μ_2.

Решение. По второму закону Ньютона для листа бумаги по оси X (рис. 16):

$$m_л a_x = F - F'_{тр1} - F_{тр2}.$$

Лист будет двигаться, если $F \geq F'_{тр1} + F_{тр2}$, значит, $F_{min} = F'_{тр1} + F_{тр2}$.

Учитывая, что $F'_{тр1} = \mu_1 N$, и что $F_{тр2} = \mu_2 N$, получим: $F_{min} = (\mu_1 + \mu_2)N$.

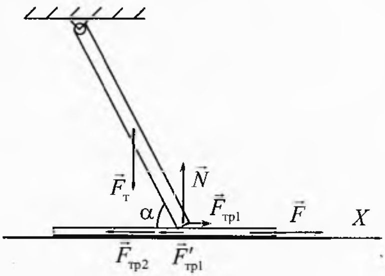


Рис. 16. *Вытянуть прижатый лист*

Для стержня, относительно оси, проходящей через шарнир, запишем правило моментов сил:

$$mg \cdot 0{,}5 \cdot l \cdot \cos\alpha = N \cdot l \cdot \cos\alpha + F_{тр1} \cdot l \cdot \sin\alpha.$$

Учитывая, что $F_{тр1} = F'_{тр1} = \mu_1 N$, получим: $mg \cdot 0{,}5 \cdot \cos\alpha = N(\cos\alpha + \mu_1 \cdot \sin\alpha)$,

$$\Rightarrow N = \frac{0{,}5mg \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} = \frac{mg}{2(1 + \mu_1 tg\alpha)}; \qquad F_{min} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mg}{2(1 + \mu_1 tg\alpha)}.$$

✓ **Ответ.** Чтобы вытащить лист, нужно приложить силу $F_{min} = \dfrac{(\mu_1 + \mu_2)mg}{2(1 + \mu_1 tg\alpha)}$.

17 **Приклеенное тело.** Тело, массой m=2,5 кг и объемом V=60 л, приклеено ко дну бассейна, наполненного водой до уровня h_0=1,0 м. Насколько нужно изменить уровень воды в бассейне, чтобы тело начало всплывать? Площадь плоской поверхности тела, соприкасающегося с дном S=50 см^2. Сила сцепления клея $F_к$=20 Н.

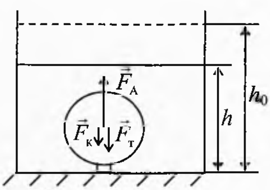


Рис. 17. *Приклеенное тело*

Решение. Тело всплывет при условии, что (рис. 17):

$F_т + F_к \leq F_A$, где $F_т = mg$; $F_A = \rho gV - pS$; $p = p_a + \rho gh$, p – давление на дно сосуда.

$$mg + F_к \leq \rho gV - (p_a + \rho gh)S; \quad \rho ghS \leq \rho gV - p_a S - mg - F_к;$$

$$h \leq \frac{V}{S} - \frac{p_a}{\rho g} - \frac{m}{\rho S} - \frac{F_к}{\rho gS};$$

$$h \leq \frac{0{,}06}{5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1{,}01 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9{,}8} - \frac{2{,}5}{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} - \frac{20}{10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}8 \text{ м}.$$

$$\Delta h = h - h_0; \quad \Delta h \leq 0{,}8 - 1 = -0{,}2 \text{ м}; \quad |\Delta h| \geq 0{,}2 \text{ м}.$$

✓ **Ответ.** Для того чтобы тело оторвалось, уровень воды нужно понизить не менее чем на 0,2 м.

18 **Каток и ступенька.** Тяжелый цилиндрический каток необходимо поднять на ступеньку высоты h. Определить наименьшую силу $F_{мин}$, которую необходимо приложить к центру катка в горизонтальном направлении, если радиус катка R, а сила тяжести равна $F_т$.

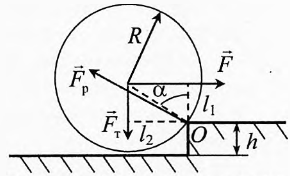


Рис. 18. *Каток и ступенька*

➥Решение. Условие равновесия относительно точки O (момент силы реакции опоры $\vec{F}_р$ относительно точки O равен нулю) (рис. 18):

$$M_1=M_2; \text{ или } F\cdot l_1=F_т\cdot l_2.$$

Учитывая, что $l_1=R\cdot\cos\alpha$; $l_2=R\cdot\sin\alpha$, получим: $F=F_т\cdot\mathrm{tg}\alpha$.

Видно, что для подъёма катка на ступеньку, необходимо приложить силу $F_{мин}=F_т\cdot\mathrm{tg}\alpha_0$, где α_0 – угол в момент отрыва, а при дальнейшем подъёме угол α уменьшается и сила, необходимая для подъёма тоже уменьшается.

$$\mathrm{tg}\alpha_0=\frac{l_{20}}{l_{10}}=\frac{\sqrt{R^2-l_{10}}}{l_{10}}=\frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h}; \Rightarrow \quad F_{мин}=F_т\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

На рисунке $\vec{F}_р$ направлена не точно на центр цилиндра для того, чтобы относительно центра цилиндра был некоторый момент, который придавал бы ему вращение.↩

19 **Трение нити с диском.** Через жёстко закрепленный диск перекинута веревка, к которой прикреплен груз массой m=100 кг. Коэффициент трения нити о диск μ=0,4. Центральный угол, который составляет касающаяся с диском часть веревки, φ=150°. Какую минимальную силу F нужно приложить, чтобы удержать груз?

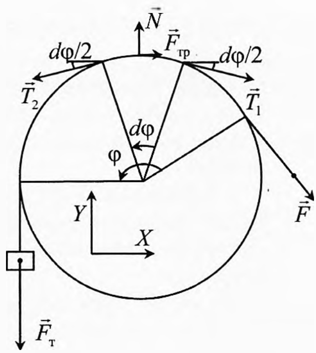


Рис. 19. *Трение нити с диском*

➥Решение. Условие равновесия для малого участка нити, составляющего угол dφ (рис. 19):

$$\vec{N}+\vec{F}_{тр}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0.$$

По оси Y: $N-T_1\sin(d\varphi/2)-T_2\sin(d\varphi/2)=0$,

По оси X: $F_{тр}+T_1\cos(d\varphi/2)-T_2\cos(d\varphi/2)=0$.

Сила F минимальна, когда груз будет на грани проскальзывания вниз $F_{тр}=\mu N$.

Так как угол $d\varphi$ мал, то

$$\cos(d\varphi/2)\approx 1, \quad \sin(d\varphi/2)\approx d\varphi/2.$$

Поскольку $T_1=T$; $T_2=T+dT$, то

$$N=(T_1+T_2)\cdot d\varphi/2=T\cdot d\varphi+dT\cdot d\varphi/2\approx T\cdot d\varphi; \quad F_{тр}=T_2-T_1=dT.$$

Значит, $dT=\mu\cdot T\cdot d\varphi$. Проинтегрируем это выражение по всей нити:

$$\int_F^{F_т}\frac{dT}{T}=\mu\int_0^{\varphi}d\varphi, \quad \ln F_т-\ln F=\mu(\varphi-0), \quad \ln\frac{F_т}{F}=\mu\varphi.$$

Итак, $F=F_т\cdot e^{-\mu\varphi}$, или $F=mg\cdot e^{-\mu\varphi}$, $F=100\cdot 10\cdot e^{-0.4\,(5\pi/6)}\approx 220$ Н.

Экспоненциальная зависимость силы F от угла намотки позволяет одному матросу останавливать небольшой корабль при причаливании.↩

20 Сосиска. Почему при кипячении сосисок в воде они имеют склонность лопаться вдоль, а не поперек?

Решение. При разогреве давление внутри сосиски одинаково по всем направлениям. Вычислим продольные и поперечные силы растяжения, действующие на единицу длины поверхности сосиски (рис. 20а). Продольная сила упругости уравновешивает силу давления сосиски, действующую вдоль неё $F_{прод} = pS_{сеч} = p\cdot\pi R^2$. На единицу длины продольная сила будет равна: $\frac{F_{прод}}{2\pi R} = \frac{p\cdot\pi R^2}{2\pi R} = \frac{p\cdot R}{2}$. На участок дуги Δl пленки поперечного сечения шириной x действуют силы натяжения $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ (рис. 20б):

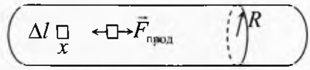


Рис. 20а. *Разрыв сосиски*

$$2T\cdot\frac{\alpha}{2} = p\cdot\Delta l\cdot x, \quad \text{где } \alpha = \Delta l / R.$$

Откуда $T = p\cdot R\cdot x$. Сила поперечного натяжения на единицу длины $\frac{T}{x} = p\cdot R$, что в 2 раза больше силы продольного натяжения. А так как пленка сосиски по всем направлениям имеет приблизительно одинаковую прочность, то рваться будет там, где сила натяжения на единицу длины больше, то есть поперек сосиски.

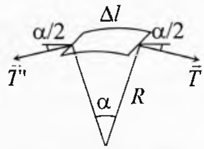


Рис. 20б. *Натяжение сосиски*

✓ **Ответ.** Сосиска лопается вдоль, потому что поперечная сила на единицу длины в 2 раза больше, чем продольная.

21 Устойчивость тела в воде. Длинный брусок квадратного сечения свободно плавает в воде, при этом одна из его боковых граней находится над поверхностью воды и параллельна ей. При какой плотности материала бруска это возможно?

Решение. Глубину погружения h бруска квадратного сечения со стороной a найдём из равенства силы тяжести и силы Архимеда:

$$F_т = F_А \quad \text{или} \quad \rho_б l a^2 \cdot g = \rho\cdot g\cdot lah,$$

$$\Rightarrow \quad h = a\cdot\rho_б/\rho \quad \text{или} \quad \rho_б = \rho\cdot h/a.$$

где ρ – плотность воды, $\rho_б$ – плотность бруска, l – длина бруска.

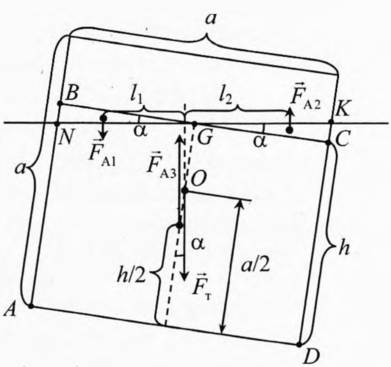


Рис. 21. *Устойчивость тела в воде*

Положение равновесия бруска устойчиво, если при его отклонении от этого положения на небольшой угол α (рис. 21) возникает возвращающий момент сил. Результирующий момент удобно считать относительно продольной оси, проходящей через центр масс бруска O, так как относительно этой оси момент силы тяжести равен нулю. Момент архимедовой силы проще всего подсчитать отдельно для треугольника GCK и прямоугольника $ABCD$ за вычетом треугольника GBN:

$$M = M_{GCK} - (M_{ABCD} - M_{GBN});$$

$$M_{GCK}=F_{A2}\cdot l_2;\quad M_{GBN}=F_{A1}\cdot l_1;\quad M_{ABCD}=F_{A3}\cdot l_3,$$

где l_1, l_2 и l_3 – плечи сил $\vec{F}_{A1}$, $\vec{F}_{A2}$ и $\vec{F}_{A3}$.

$$F_{A1}=\rho g l S_1=\rho g l\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\alpha a}{2}\right)=\rho g l\cdot\frac{\alpha a^2}{8}.\quad F_{A2}=F_{A1}.\quad F_{A3}=\rho g l S_3=\rho g l\cdot a\cdot h.$$

Итак, возвращающий момент должен быть больше нуля:

$$M>0;\quad\Rightarrow\quad M=F_{A1}\cdot(l_1+l_2)-F_{A3}\cdot l_3>0.$$

Так как центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан, которая делит медиану в отношении 2:1, то $l_1+l_2=a\cdot 2/3$.

Плечо силы F_3: $l_3=(a/2-h/2)\cdot\alpha$.

Тогда, $\rho g l\cdot\frac{\alpha a^2}{8}\cdot\frac{2a}{3}-\rho g l\cdot a\cdot h\cdot\frac{a-h}{2}\cdot\alpha>0$; $6h^2-6ha+a^2>0$. Решая это уравнение, получим: $h<a\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\approx 0{,}21$, $h>a\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)\approx 0{,}79$.

Откуда плотность бруска либо $0<\rho_б<0{,}21$ г/см^3, либо $0{,}79<\rho_б<1{,}0$ г/см^3

Если же $0{,}21\le\rho_б\le 0{,}79$ г/см^3, то равновесие будет неустойчивым и брусок перевернется вверх ребром. Если же $\rho_б\ge 1{,}0$ г/см^3, то брусок просто утонет.↩

§ 82. Законы сохранения

22 **Шар в кастрюле.** Стеклянный шарик массой m=25 г упускают без начальной скорости в широкую кастрюлю с водой. Определить, сколько выделится тепла после падения шарика на дно. Высота воды в кастрюле h=15 см, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3, плотность стекла $\rho_c=2{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.

↪**Решение.** Тепло выделится в окружающее пространство за счёт потери механической энергии системой шар – кастрюля (рис. 22):

$$Q=E_0-E.$$

При этом часть энергии выделится за счёт работы сопротивления воды при движении шарика, а другая часть – при ударе о дно.

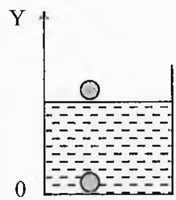


Рис. 22. *Падение шара в воде*

Возьмём начало отсчёта на дне кастрюли и направим ось Y вверх, поскольку речь идёт об изменении потенциальной энергии, обусловленной силой тяжести. В начальном положении энергия шарика равна mgh, а энергия ещё не вытесненной воды равна нулю. В целом $E_0=mgh$. В нижнем положении шарика его энергия равна нулю, а энергия вытесненной воды равна $m_вgh$. В целом $E=m_вgh$.

Масса вытесненной воды $m_в=\rho_в\cdot V=\rho_в\cdot\frac{m}{\rho_c}$. Тогда $E=\rho_в\cdot\frac{m}{\rho_c}\cdot gh$.

Подставляя выражения для E и E_0 в первое уравнение, получим:

$$Q=mgh-\frac{\rho_в}{\rho_c}\cdot mgh=mgh\left(1-\frac{\rho_в}{\rho_c}\right).\quad Q\approx 23\text{ мДж.}$$↩

✓ **Ответ.** В окружающее пространство выделится 23 мДж тепла.

23 **Шайба на полусфере.** Шайба соскальзывает с полусферы радиуса R, имея начальную скорость υ_0. На какой высоте h от основания полусферы шайба оторвётся? Трением пренебречь.

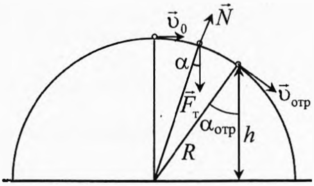


Рис. 23. *Шайба на полусфере*

↪Решение. К шайбе приложены две силы (рис. 23): сила тяжести и сила реакции опоры. Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{N}.$$

В проекции на радиус вращения

$$ma_n = mg\cdot\cos\alpha - N.$$

В момент отрыва

$$N_{отр}=0; \quad \cos\alpha_{отр}=h/R; \quad a_n=\upsilon^2_{отр}/R.$$

Учитывая всё это, получим:

$$m\frac{\upsilon^2_{отр}}{R} = mg\frac{h}{R}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2_{отр} = gh. \qquad (1)$$

Запишем закон сохранения энергии для начального положения и для точки отрыва:

$$mgR + \frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgh + \frac{m\upsilon^2_{отр}}{2}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2_{отр} = 2gR - 2gh + \upsilon_0^2. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим:

$$gh = 2gR - 2gh + \upsilon_0^2; \quad \Rightarrow \quad 3gh = 2gR + \upsilon_0^2; \quad h = \frac{2}{3}R + \frac{\upsilon_0^2}{3g}.$$

В частности, если $\upsilon_0=0$, то $h=2R/3$.

Скорость, при которой шайба сразу ($h \geq R$) оторвется от полусферы:

$$\frac{2}{3}R + \frac{\upsilon_0^2}{3g} = h \geq R, \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 \geq \sqrt{gR}. ↩$$

✓ **Ответ.** Шайба оторвется на высоте $h = \frac{2}{3}R + \frac{\upsilon_0^2}{3g}$.

24 **Вылетающая пробка.** В трубке массой $m_т$=20 г, закрытой пробкой массой $m_п$=5 г, находится немного воды. Трубка подвешивается с помощью нити длиной R=20 см к горизонтально расположенному стержню, вокруг которого она может вращаться. Трубку подогревают, и вода в ней испаряется до тех пор, пока пробка не вылетит. С какой скоростью u должна вылететь пробка, чтобы трубка сделала один полный оборот?

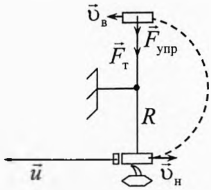


Рис. 24. *Вылет пробки*

↪Решение. Применим закон сохранения импульса к процессу вылета пробки из трубки (рис. 24). Учтём, что начальный импульс системы был равен 0:

$$0 = m_т\upsilon_н - m_п u; \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_т\upsilon_н}{m_п}. \qquad (1)$$

Скорость трубки в нижней точке после вылета пробки найдём, используя закон сохранения энергии. Для этого приравняем энергию трубки в верхней и нижней точках траектории. Это правомерно, ибо во время полета на трубку действуют только сила тяжести и сила упругости нити.

$$\frac{m_т \upsilon_н^2}{2} = m_т g \cdot 2R + \frac{m_т \upsilon_в^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon_н^2 = 4gR + \upsilon_в^2. \tag{2}$$

Скорость трубки вверху найдём по второму закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{F}_{упр}$.

Учтём, что в верхней точке при движении по окружности результирующая сил должна создать трубке центростремительное ускорение $a = \upsilon_в^2 / R$, а нить не должна провиснуть, т.е. $|\vec{F}_{упр.в}| \geq 0$. Значит,

$$m \cdot \frac{\upsilon_в^2}{R} = mg + F_{упр.в}; \quad \text{или} \quad m \cdot \frac{\upsilon_в^2}{R} \geq mg; \quad \Rightarrow \quad \upsilon_в^2 \geq gR. \tag{3}$$

Решая совместно (1), (2) и (3), получим: $\upsilon_н^2 \geq 4gR + gR = 5gR$;

$$u \geq \frac{m_т}{m_п} \cdot \sqrt{5gR}; \qquad u \geq \frac{0{,}02}{0{,}005} \cdot \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0{,}2} \approx 13 \text{ м/с.}$$ ↩

✓ **Ответ.** Пробка должна вылететь со скоростью не менее 13 м/с.

25 **Энергия для ГЭС.** На реке построили ГЭС. Оказалось, что за 300 км выше по течению ни скорость течения, ни уровень воды не изменились. Следовательно, после постройки не изменились ни кинетическая, ни потенциальная энергия воды за 300 км выше по течению. Аналогичная ситуация за 200 км ниже по течению. Откуда же тогда взялась энергия для работы ГЭС?

↪**Решение.** Согласно закону изменения энергии работа сил трения при движении воды равна изменению механической энергии воды до постройки ГЭС.

$$A_{тр1} = \Delta E.$$

После постройки ГЭС изменение энергии равно работе сил трения и работе ГЭС.

$$A_{тр2} + A_{гэс} = \Delta E.$$

Т.к. изменение энергии в обоих случаях одинаково, то уменьшились потери на трение после постройки ГЭС. Действительно, чем быстрее течет река, тем большую работу она совершает против сил трения, используя свою энергию. Выше плотины скорость течения замедлилась, и уменьшились потери на трение, что даёт возможность использовать часть энергии, обусловленной силой тяжести, для работы ГЭС:

$$A_{гэс} = A_{тр1} - A_{тр2} \quad \text{или} \quad |A_{гэс}| = |A_{тр1} - A_{тр2}|.$$ ↩

26 **Подъем космической станции.** Космическая станция массой m=10 т движется по круговой орбите вокруг Земли на высоте h_1=500 км. Какую работу должны совершить его двигатели, чтобы перевести корабль на орбиту с высотой h_2=510 км? Радиус Земли R=6370 км. Масса Земли M=5,98·10^{24} кг.

↪**Решение.** Работа внешней силы идёт на изменение кинетической энергии и потенциальной энергии силы тяжести: $A = \Delta E_т + \Delta E_к$.

Первая космическая скорость на высотах h_1 и h_2:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R + h_1}}, \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{GM}{R + h_2}}.$$

Причём $\upsilon_1 > \upsilon_2$, то есть кинетическая энергия станции уменьшается:

$$\Delta E_к = E_{к2} - E_{к1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = -\frac{GMm(h_2 - h_1)}{2(R+h_1)(R+h_2)} < 0.$$

Потенциальная энергия силы тяжести, наоборот, увеличивается:

$$\Delta E_т = E_{т2} - E_{т1} = \left(-\frac{GMm}{R+h_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{R+h_1}\right) = \frac{GMm(h_2 - h_1)}{(R+h_1)(R+h_2)} > 0;$$

Тогда $A = \Delta E_к + \Delta E_т = \dfrac{GMm(h_2 - h_1)}{2(R+h_1)(R+h_2)}$, $A \approx 422$ МДж.↩

✓ **Ответ.** А=0,42 ГДж.

27 **Ромб на стене.** Тело массой m упруго ударяется о конструкцию $ABCD$ в форме ромба (рис. 25а) и останавливается. Конструкция состоит из легких шарнирно соединенных стержней и трёх грузов массой M каждый, закрепленных в точках A, B и C. Шарнир D укреплен в массивной стене. Скорость шарика направлена вдоль BD. Найти массу M, считая m и α известными.

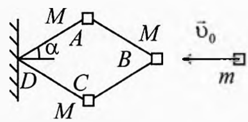


Рис. 25а. *Ромб на стене*

↪**Решение.** Так как тело массой m после упругого удара остановилось, то у правого грузика будет скорость $\vec{\upsilon}_0$ (по аналогии с упругим столкновением двух одинаковых шайб) (рис. 25б).

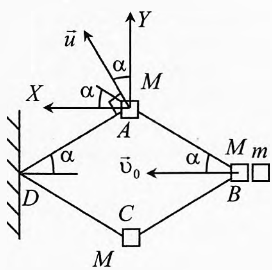


Рис. 25б. *Ромб на стене*

Поскольку точка A может двигаться только по окружности вокруг точки D, то её скорость перпендикулярна AD ($\vec{u} \perp AD$).

По оси X скорость точки A равна половине скорости точки B:

$$u_x = \upsilon_0/2 \quad \text{или} \quad u \cdot \sin\alpha = \upsilon_0/2. \qquad (1)$$

Это же выражение можно получить из условия равенства проекций скоростей концов стержня (точек A и B) на ось стержня AB:

$u \cdot \cos(90° - 2\alpha) = \upsilon_0 \cos\alpha$; $\Rightarrow$ $u \cdot \sin(2\alpha) = \upsilon_0 \cos\alpha$; $\Rightarrow$ $2u \cdot \sin\alpha = \upsilon_0$.

Согласно закону сохранения энергии при ударе:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{M\upsilon_0^2}{2} + 2\frac{Mu^2}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим: $M = m \cdot \dfrac{2\sin^2\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha}$.

Закон сохранения импульса нельзя использовать из-за наличия стенки. Массивная стена поглощает импульс, но энергия при упругом ударе стене практически не передаётся.↩

28 **Весомая складная подвеска.** Подвеска состоит из однородных стержней, соединенных шарнирно. Вес системы P. Определить натяжение нити AB (рис. 26).

↪**Решение.** Если длину нити AB уменьшить на Δl, то перемещение точки D системы будет равно нулю. Точка C поднимется на Δl, точки B и A на $2\Delta l$ и $3\Delta l$ соответственно; центр масс O поднимется на $\dfrac{3}{2}\Delta l$.

Работа по сокращению нити пойдет на увеличение потенциальной энергии системы (поднятие центра масс):

$$F_н \cdot \Delta l = P \cdot \frac{3}{2}\Delta l,$$

где $F_н$ – сила натяжения нити. Откуда $F_н$=1,5P.

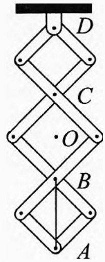


Рис. 26. *Тяжёлая подвеска*

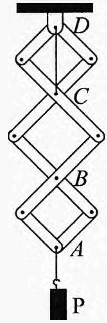


Рис. 27. *Лёгкая подвеска*

29 **Гиря на невесомой подвеске.** Подвеска состоит из невесомых стержней, соединенных шарнирно (рис. 27) и груза весом *P*. Определить натяжение нити *DC*.

✓ **Ответ.** $F_н$=3P. *Указание.* См. решение предыдущей задачи ($F_н \cdot \Delta l = P \cdot 3\Delta l$).

30 **Падение гантели.** Гантель длины *l* с шариками одинаковой массой на концах установлена вертикально на гладкой горизонтальной плоскости. Затем гантель отпускают. Определить скорость верхнего шарика перед ударом о плоскость.

Решение. Так как трение отсутствует, и по горизонтальной оси на гантель силы не действуют, то её центр масс будет падать вертикально вниз (рис. 28). Значит, во время удара левый шарик будет покоиться, а правый будет падать со скоростью: $mg\frac{l}{2} = \frac{(m/2)\upsilon^2}{2}$, где *m* – масса гантели.

Итак, $$\upsilon = \sqrt{2gl}.$$

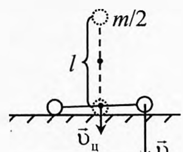


Рис. 28. *Падение гантели*

Можно решить и через скорость центра масс $\vec{\upsilon}_ц = \vec{\upsilon}/2$, но тогда нужно ещё учитывать вращение гантели относительно центра масс с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\upsilon/2}{l/2} = \frac{\upsilon}{l}: \quad mg\frac{l}{2} = \frac{m\upsilon_ц^2}{2} + \frac{I\cdot\omega^2}{2} = \frac{m(\upsilon/2)^2}{2} + \frac{(m(l/2)^2)\cdot(\upsilon/l)^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gl}.$$

31 **Цилиндр на столе.** Определить энергию упругости цилиндра массой *m*, стоящего на столе, если его длина *l*, площадь поперечного сечения *S*, модуль Юнга *E*.

Решение. Выделим слой цилиндра с координатой *x* и толщиной *dx* (рис. 29). Его жесткость $k = \frac{ES}{dx}$. На него действует вес вышележащих слоев: $F = \frac{x}{l}mg$. Под действием этой силы он сжимается на *dl*: *F*=*k*·*dl*.

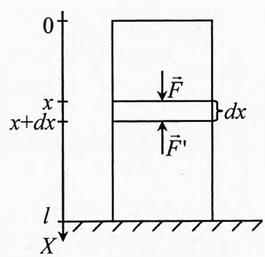


Рис. 29. *Энергия упругости цилиндра*

Энергия упругости этого слоя:

$$dW = \frac{k(dl)^2}{2} = \frac{k}{2}\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{F^2}{2k} = \frac{(xmg/l)^2}{2(ES/dx)} = \frac{(mg)^2}{2ES\cdot l^2}x^2dx.$$

Просуммировав (проинтегрировав) энергию по всем слоям, получим:

$$W = \int_0^W dW = \frac{(mg)^2}{2ES\cdot l^2}\int_0^l x^2dx = \frac{(mg)^2}{2ES\cdot l^2}\cdot\frac{l^3}{3} = \frac{(mg)^2 l}{6ES}; \qquad W = \frac{m^2g^2l}{6ES}.$$

32 **Шайба и жёлоб.** На идеально гладком столе находится тяжелый брусок массой M, одна сторона которого представляет собой полуцилиндр радиусом R. Какую скорость $\vec{\upsilon}$ нужно сообщить шайбе массой m вдоль стола, чтобы она достигла верхней точки A? Какое давление будет оказывать шайба на брусок в точке B? Трением пренебречь.

Решение. Закон сохранения энергии и импульса по оси X в системе отсчёта, связанной со столом, для начального (нижнего) положения шайбы и момента, когда шайба окажется в верхней точке A (рис. 30а):

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg\cdot 2R + \frac{m\upsilon_A^2}{2} + \frac{Mu_A^2}{2}, \qquad (1)$$

$$m\upsilon = -m\upsilon_A + Mu_A, \qquad (2)$$

где υ_A – скорость шайбы в точке A относительно стола, u_A – скорость бруска в этот же момент.

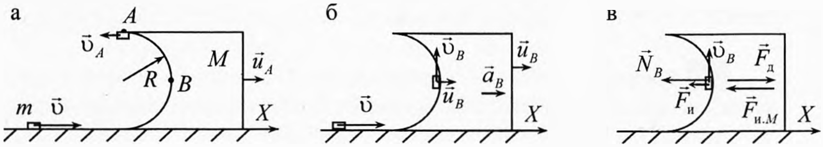


Рис. 30. *Шайба и жёлоб. а – начальное положение шайбы и в точке A; б – шайба в точке B в исходной системе отсчёта; в – шайба в точке B в неинерциальной системе отсчёта, связанной с бруском*

Поскольку трения нет, то брусок действует на шайбу (а она на него) по перпендикуляру к поверхности бруска. Значит, в точке A сила взаимодействия может быть направлена только по вертикали, а следовательно, в этот момент брусок движется равномерно (без ускорения).

Перейдем в СО, связанную с бруском (движущуюся со скоростью $\vec{u}_A$). В момент, когда шайба в точке A, эта СО – инерциальная. В ней шайба совершает движение по окружности радиуса R, её скорость вращения: υ_A+u_A. По II закону Ньютона:

$$ma_n = mg + N_A.$$

где $a_n = \dfrac{(\upsilon_A + u_A)^2}{R}$ – нормальное (центростремительное) ускорение.

Требуемая начальная скорость $\vec{\upsilon}$ будет минимальна при $N_A=0$. Поэтому:

$$m\frac{(\upsilon_A + u_A)^2}{R} = mg \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A + u_A = \sqrt{gR}. \qquad (3)$$

Решая совместно (1), (2) и (3), после утомительных преобразований получим:

$$\upsilon = \sqrt{gR(5M + 4m)/M}. \qquad (4)$$

В ИСО, связанной со столом (рис. 30б), скорость шайбы в точке B: $\vec{\upsilon}_B + \vec{u}_B$, где $\vec{u}_B$ – скорость бруска в этот момент, $\vec{\upsilon}_B$ – скорость шайбы относительно бруска. Согласно законам сохранения энергии и импульса по оси X запишем:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg\cdot R + \frac{m(\upsilon_B^2 + u_B^2)}{2} + \frac{Mu_B^2}{2}. \qquad (5)$$

$$m\upsilon = (m + M)u_B, \qquad (6)$$

В момент, когда шайба находится в точке B, брусок движется с ускорением $\vec{a}_B = \vec{F}_д / M$. Перейдем (рис. 30в) в неинерциальную СО, связанную с бруском (движущуюся с ускорением $\vec{a}_B$). В этой НИСО согласно II Ньютона по оси X сила реакции опоры $\vec{N}_B$ и сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}_B$ создают шайбе центростремительное ускорение (в СО, связанной с бруском, шайба движется по окружности радиуса R):

$$m\frac{\upsilon_B^2}{R} = N_B + F_и, \quad \text{где } F_и = ma_B = m\frac{F_д}{M},$$

По III закону Ньютона N_B=$F_д$, значит:

$$m\frac{\upsilon_B^2}{R} = F_д + m\frac{F_д}{M}. \qquad (7)$$

Из (4), (5), (6) и (7) можно получить, что сила давления: $F_д = \dfrac{mM(3M+2m)g}{(M+m)^2}$.

33 **Шар, падающий на клин.** Клин массой M лежит на гладкой поверхности. На него вертикально падает шар массой m со скоростью υ_0 и после абсолютно упругого удара отскакивает горизонтально. Найти скорость клина u. Каков угол наклона клина к горизонту?

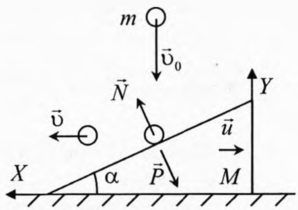


Рис. 31. *Падение шара на клин*

➥**Решение.** Согласно закону сохранения энергии при упругом ударе (рис. 31):

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

По закону сохранения импульса по оси X:

$$0 = m\upsilon - Mu.$$

Решая совместно оба уравнения, найдём скорость клина: $\quad u = \dfrac{m\upsilon_0}{\sqrt{M(M+m)}}$.

Поскольку клин гладкий, то во время удара сила трения отсутствует, а сила реакции опоры перпендикулярна поверхности клина. Влиянием силы тяжести шара за время удара можно пренебречь. Поэтому по II-му закону Ньютона, для шара за малый (по сравнению со временем удара) промежуток времени, получим:

$$m\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t} = N\cos\alpha, \qquad m\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = N\sin\alpha.$$

Откуда $\quad \dfrac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\upsilon_x} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad$ или $\quad \Delta\upsilon_y \cdot \mathrm{tg}\alpha = \Delta\upsilon_x$.

Просуммируем последнее выражение за весь удар:

$$(0-(-\upsilon_0))tg\alpha = \upsilon - 0 \qquad \text{или} \qquad tg\alpha = \upsilon/\upsilon_0.$$

Так как $\upsilon = \dfrac{Mu}{m} = \dfrac{M\upsilon_0}{\sqrt{M(M+m)}}$, то $\quad \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{M}{(M+m)}}$. ➥

34 **Шар, налетающий на клин.** На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой M и углом наклона α (рис. 32а). Клин плотно прилегает к поверхности плиты. Шар массой m летит горизонтально и упруго ударяется о гладкую наклонную поверхность клина. В результате клин приходит в движение по плите. Через некоторое время шар попадает в ту же точку на клине, от которой он отскочил. Найти отношение m/M.

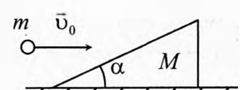


Рис. 32а. *Шар летит на клин*

Решение. Согласно закону сохранения импульса по оси X (рис. 32б):

$$m\upsilon_0 = (m + M)\upsilon_x, \qquad (1)$$

где υ_x – горизонтальная составляющая скорости шара после столкновения равна скорости клина (в противном случае шар не упадет в ту же точку).

По закону сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2)}{2} + \frac{M\upsilon_x^2}{2}. \qquad (2)$$

Поскольку клин гладкий, то во время удара сила трения отсутствует, а сила реакции опоры перпендикулярна поверхности клина. Влиянием силы тяжести шара за время удара можно пренебречь. Поэтому по II-му закону Ньютона, для шара за малый (по сравнению со временем удара) промежуток времени, получим:

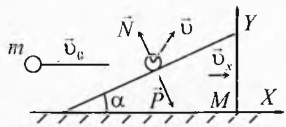


Рис. 32б. *Упругий удар шара*

$$m\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t} = N\cos\alpha; \qquad m\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = -N\sin\alpha.$$

Откуда $\dfrac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\upsilon_x} = -\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ или $\Delta\upsilon_y = -\text{ctg}\alpha\cdot\Delta\upsilon_x$. Просуммируем за весь удар:

$$\upsilon_y - 0 = -\text{ctg}\alpha\cdot(\upsilon_x - \upsilon_0) \qquad \text{или} \qquad \upsilon_y = \text{ctg}\alpha\cdot(\upsilon_0 - \upsilon_x). \qquad (3)$$

Решая совместно (1), (2) и (3), получим: $\dfrac{m}{M} = \text{ctg}^2\alpha - 1$.

35 Вторая космическая скорость. Вычислить вторую космическую скорость. Под второй космической скоростью понимается минимальная скорость, которую необходимо сообщить космическому аппарату вблизи поверхности Земли, чтобы полученной кинетической энергии хватило для выхода аппарата из сферы действия Земного притяжения. В этом случае он становится спутником Солнца. Вторая космическая скорость имеет и другие названия: скорость убегания, ускользания, а также параболическая скорость.

Космический корабль с начальной скоростью, равной второй космической υ_{II}, движется по параболической орбите, удаляясь сколько угодно далеко от Земли. Скорости меньшие параболической называются эллиптическими, большие – гиперболическими.

Решение. По закону сохранения энергии начальной кинетической энергии корабля должно хватить на то, чтобы улететь с поверхности Земли (с расстояния R от центра Земли) в бесконечность:

$$E_{\text{к}R} + E_{\text{т}R} = E_{\text{к}\infty} + E_{\text{т}\infty} \qquad \text{или} \qquad \frac{m\upsilon_{II}^2}{2} + \left(-G\frac{mM}{R}\right) = 0 + 0.$$

Итак, $\upsilon_{II} = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\cdot\upsilon_I = 11{,}2$ км/с.

§ 83. Движение жидкостей и газов

36 Тележка с жидкостью. Тележка, на которой стоит стакан с керосином, двигают по горизонтальному столу с ускорением a=5 м/с^2. Какова форма поверхности керосина?

Решение. I способ. Перейдем в неинерциальную систему отсчёта, связанную с тележкой. В этой системе ко всем силам взаимодействия добавляется сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}$, которую можно рассматривать как «дополнительную» (горизонтальную) силу тяжести. Жидкость, таким образом, находится в однородном поле «сил тяготения» с новым ускорением свободного падения $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ (рис. 33). Поверхность жидкости будет перпендикулярна вектору $\vec{g}'$, поэтому она образует с горизонтальной плоскостью угол α, где $\text{tg}\alpha = (a/g) = 0{,}5$, $\alpha = 27°$.

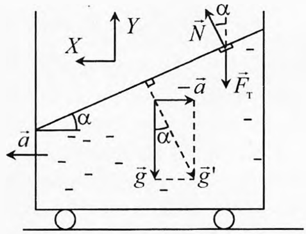


Рис. 33. *Тележка с жидкостью*

II способ. В инерциальной системе отсчёта на элемент жидкости вблизи поверхности действуют сила тяжести и сила и нормальная реакции окружающих слоев жидкости. Они создают элементу жидкости ускорение $\vec{a}$: $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_т$. По оси X: $ma = N \cdot \sin\alpha$; по оси Y: $0 = N \cdot \cos\alpha - F_т$. Откуда получаем: $\text{tg}\alpha = ma/F_т = a/g$. Жидкость будет наклонена к горизонту под углом $\alpha = 27°$.

37 **Изогнутая трубка с водой.** Одно колено изогнутой трубки с открытыми концами вертикально, а второе наклонено под углом α к горизонту (рис. 34а). В трубку налита вода. С каким минимальным горизонтальным ускорением $\vec{a}$, лежащим в плоскости трубки, надо двигать систему, чтобы вся вода из трубки двигалась?

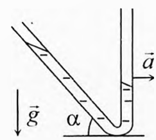


Рис. 34а. *Ускорение трубки с водой*

Решение. Вся вода выльется, если наклон её поверхности к горизонту составит угол $\beta \geq \alpha$. Найдём зависимость β от ускорения a. Пусть произвольный сосуд с водой движется с горизонтально направленным ускорением $\vec{a}$. Рассмотрим вблизи поверхности небольшой элемент воды массой m в виде параллелепипеда, расположенного вдоль поверхности (рис. 34б). На элемент действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления $\vec{N}$ со стороны окружающей воды, направленная перпендикулярно поверхности воды. Сумма этих сил равна $m\vec{a}$. Имеем $tg\beta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$. Для выливания воды из трубки должно выполняться условие $\text{tg}\beta \geq \text{tg}\alpha$, то есть $a \geq g \cdot \text{tg}\alpha$. Отсюда минимальное ускорение $a = g \cdot \text{tg}\alpha$.

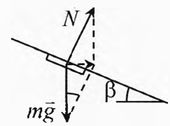


Рис. 34б. *Наклон поверхности воды*

38 **Акселерометр.** Акселерометр представляет собой изогнутую под прямым углом трубку, заполненную маслом и расположенную в вертикальной плоскости (рис. 35). При движении трубки с ускорением $\vec{a}$ в горизонтальном направлении уровни масла равны $h_1 = 8$ см, $h_2 = 12$ см. Найти ускорение автомобиля, на котором он установлен.

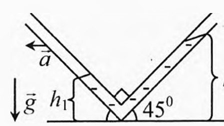


Рис. 35. *Акселерометр*

Указание. Перейти в неинерциальную систему отсчёта, движущуюся с ускорением $\vec{a}$. В ней на элемент жидкости действует результирующая сила

$\vec{F}=m(\vec{g}-\vec{a})$. Ускорение находим из условия перпендикулярности уровня поверхности жидкости во всей трубке вектору $\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}$.↩

✓ **Ответ.** $a=g\dfrac{h_2-h_1}{h_2+h_1}$, a=0,2g.

39 **Вращающийся стакан.** Стакан с водой радиуса R=4 см вращается вокруг его вертикальной оси с угловой скоростью ω=18 рад/с. Какова форма поверхности воды в стакане и глубина воронки?

↪**Решение.** В инерциальной системе отсчёта на элемент жидкости массой m вблизи поверхности действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ окружающих слоев жидкости (рис. 36). Они создают элементу жидкости нормальное (центростремительное) ускорение $\vec{a}_n$:

$$m\vec{a}_n=\vec{N}+\vec{F}_т.$$

По оси X: $ma_n=N\cdot\sin\alpha$.

По оси Y: $0=N\cdot\cos\alpha-F_т$.

Откуда получаем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{ma_n}{F_т}=\frac{a_n}{g},\text{ где } a_n=\omega^2x.$$

Так как $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\omega^2x}{g}$.

Откуда, $\Delta y=\dfrac{\omega^2}{g}\cdot x\cdot\Delta x$.

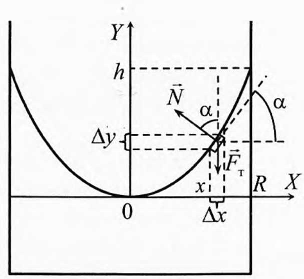


Рис. 36. *Вращающийся стакан*

Или в пределе при $\Delta x\to 0$: $dy=\dfrac{\omega^2}{g}\cdot x\cdot dx$.

Интегрируя, получим: $y=\int\limits_0^y dy=\dfrac{\omega^2}{g}\cdot\int\limits_0^x x\cdot dx=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$, итак $y=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$.

Значит, глубина воронки: $h=\dfrac{\omega^2R^2}{2g}$, $h=\dfrac{18^2\cdot 0{,}04^2}{2\cdot 9{,}8}$=0,026 м =2,6 см.↩

✓ **Ответ.** Форма поверхности жидкости параболическая $y=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$, глубина воронки h=2,6 см.

40 **Стакан с чаем.** Высокий стакан диаметром d=6 см наполовину заполнен чаем. С какой частотой нужно вращать ложечку в стакане, чтобы разность между уровнем жидкости у стенок стакана и в центре была равна h=2 см сразу после того, как ложечку вынули? Какова форма поверхности чая?

✓ **Ответ.** Форма поверхности точно такая же, как и в задаче «Вращающийся стакан»: $y=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$, где $\omega=2\pi\nu$. Разность уровней h: $h=\dfrac{\omega^2R^2}{2g}$, где $R=d/2$. Итак, $h=\dfrac{(2\pi\nu)^2(d/2)^2}{2g}$, откуда частота вращения: $\nu=\dfrac{\sqrt{2gh}}{\pi d}$, ν=3,3 об/с.

41 **Мяч в воздухе.** Мяч брошен под углом $\alpha_1=30°$ к горизонту. Приземлился он на том же уровне под углом $\beta_1=-40°$ к горизонту. За время полета модуль скорости уменьшился в полтора раза. Когда мяч с такой же скоростью бросили под другим углом α_2 к горизонту, то он приземлился в той же точке, что и в первый раз, но под углом $\beta_2=-70°$, при этом модуль скорости за время полета уменьшился в два раза. Под каким углом к горизонту бросили мяч во втором случае? Считать, что сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости мяча.

Дано.
$\upsilon_1=\upsilon_{01}/1,5$
$\upsilon_2=\upsilon_{02}/2$
$x_{1п}=x_{2п}=x_п$
$\upsilon_{01}=\upsilon_{02}=\upsilon_0$
$\alpha_1=30^0$
$\beta_1=-40°$
$\beta_2=-70°$
$\vec{F}_c=-k\vec{\upsilon}$
$\alpha_2-?$

Решение. Во втором случае потеряна большая часть скорости, значит, мяч летел дольше, поэтому ясно, что во втором случае мяч брошен под большим углом, чем в первом. В горизонтальном направлении на мяч действует только сила сопротивления: $ma_x=F_{cx}$.

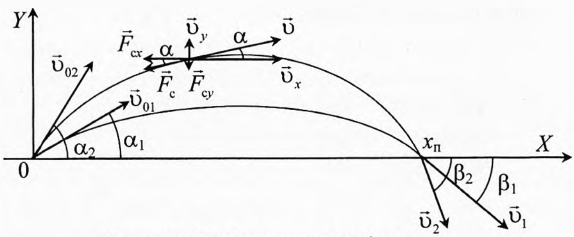


Рис. 37. *Полёт мяча в воздухе*

Как видно из рис. 37, $F_{cx}=-F_c\cos\alpha=-k\upsilon\cos\alpha=-k\upsilon_x$. Значит,

$$ma_x=-k\upsilon_x.$$

Умножим последнее уравнение на малый промежуток времени Δt:

$$ma_x\Delta t=-k\upsilon_x\cdot\Delta t.$$

Учтём, что $a_x\Delta t=\Delta\upsilon_x$ и $\upsilon_x\Delta t=\Delta x$, и просуммируем левые и правые части равенства за всё время движения:

$$m\Delta\upsilon_x=-k\Delta x, \quad \Rightarrow \quad m\sum\Delta\upsilon_x=-k\sum\Delta x, \quad \Rightarrow \quad m(\upsilon_x-\upsilon_{0x})=-kx_п.$$

где $x_п$ – координата приземления мяча по оси X.

Запишем последнее уравнение для обоих случаев:

$$m(\upsilon_1\cos\beta_1-\upsilon_0\cos\alpha_1)=-kx_п; \qquad m(\upsilon_2\cos\beta_2-\upsilon_0\cos\alpha_2)=-kx_п;$$

Сравнивая два последних уравнения, получим:

$$\upsilon_1\cos\beta_1-\upsilon_0\cos\alpha_1=\upsilon_2\cos\beta_2-\upsilon_0\cos\alpha_2; \quad \cos\alpha_2=\cos\alpha_1+\frac{\upsilon_2}{\upsilon_0}\cos\beta_2-\frac{\upsilon_1}{\upsilon_0}\cos\beta_1;$$

$$\cos\alpha_2=\cos30°+\frac{1}{2}\cos70°-\frac{1}{1,5}\cos40°\approx0,526; \qquad \alpha_2\approx58°.$$

✓ **Ответ.** Во втором случае мяч бросили под углом 58° к горизонту.

42 **Деревянный плот.** Деревянный плот массы m оттолкнули от берега так, что в начальный момент времени его скорость оказалась равной $\vec{\upsilon}_0$ и направленной перпендикулярно берегу. Скорость течения реки равна $\vec{u}$. Сила сопротивления воды движению плота $\vec{F}_c=-\beta\vec{\upsilon}_{отн}$. На какое расстояние плот удалится от берега? Как зависят проекции скорости плота υ_y поперек и υ_x по течению от времени?

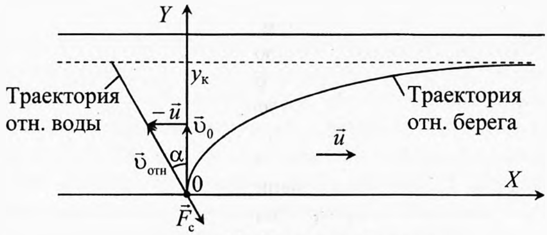


Рис. 38. *Деревянный плот*

Решение. В начальный момент относительно земли плот движется перпендикулярно берегу, а относительно воды со скоростью $\vec{\upsilon}_{отн}$, направленной под углом α к скорости $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 38):

$$\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_0 + (-\vec{u}), \text{ где } \operatorname{tg}\alpha = u/\upsilon_0.$$

В дальнейшем по оси X и Y в системе отсчёта, связанной с водой, скорость плота начнет уменьшаться из-за трения о воду.

Согласно II закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_с$. Так как $\vec{F}_с = -\beta\vec{\upsilon}_{отн}$, то $m\vec{a} = -\beta\vec{\upsilon}_{отн}$.

По оси Y:

$$ma_y = -\beta\upsilon_y; \qquad m\cdot\frac{d\upsilon_y}{dt} = -\beta\upsilon_y. \tag{1}$$

Значит, $m\cdot d\upsilon_y = -\beta\cdot\upsilon_y\cdot dt$. Так как $\upsilon_y\cdot dt = dy$, то $m\cdot d\upsilon_y = -\beta\cdot dy$.

После суммирования до остановки плота по оси Y, получим:

$$m\cdot(0-\upsilon_0) = -\beta\cdot(y_к - 0), \quad \Rightarrow \quad y_к = m\cdot\upsilon_0/\beta.$$

То есть удаление плота от берега $y_к$ прямо пропорционально начальному импульсу $m\upsilon_0$ и обратно пропорционально коэффициенту сопротивления β.

Теперь получим, как изменяется υ_y с течением времени. Из (1) получим:

$$\frac{d\upsilon_y}{\upsilon_y} = -\frac{\beta}{m}\cdot dt.$$

Проинтегрируем левую часть по скорости от υ_0 до υ_y, а правую – по времени от 0 до t:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_y}\frac{d\upsilon_y}{\upsilon_y} = -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt, \quad \ln\upsilon_y - \ln\upsilon_0 = -\frac{\beta}{m}t. \text{ Или } \upsilon_y = \upsilon_0\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}.$$

То есть с течением времени скорость плота по оси Y убывает по экспоненциальному закону.

Аналогично по оси X относительно воды: $\upsilon_{отн.x} = -u\cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$. А относительно берега по оси X: $\upsilon_x = u\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$.

43 **Эффект Магнуса и угловой удар.** Угловой удар подаётся с угла лицевой линии футбольного поля. И даже при отсутствии ветра мяч, поднимаясь, летит в поле, а потом может завернуть в ворота и огорчить соперника. Объяснить характер полета мяча.

Решение. Футболист бьет по мячу под углом к горизонту. Если он подает справа от ворот (рис. 39), то кроме сообщения поступательной скорости, он ещё закручивает мяч против часовой стрелки. Движение мяча равносильно тому, что поток воздуха обдувает его в обратном направлении. Скорость потока и скорость вращения точек мяча, расположенных ближе к воротам, сонаправлены, и давление воздуха с этой стороны уменьшается (по сравнению с полетом без вращения). С другой стороны скорость потока и вращения противоположны, значит, скорость прилежащего к мячу воздуха меньше и давление будет больше. Поэтому возникнет сила, перпендикулярная скорости центра мяча, в направлении ворот (эффект Магнуса). В таком случае есть вероятность забить гол с углового удара без касания мяча другими игроками и вратарем, что мы нередко наблюдаем.

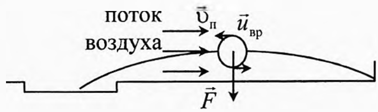


Рис. 39. *Эффект Магнуса*

§ 84. Колебания

44 **Пружинный маятник.** К недеформированной пружине жёсткостью k прикрепили груз массой m и отпустили. Найти период колебаний, а также зависимость координаты, скорости и ускорения груза от времени.

➥**Решение.** Направим ось X вверх, а её начало возьмём в точке, где пружина не деформирована (рис. 40а). Пусть в некоторый момент координата груза x ($x<0$), тогда по II закону Ньютона для груза: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{F}_{упр}$, или в проекции на ось X:

$$ma_x = F_{упр.x} - mg \quad \text{или} \quad ma_x = -kx - mg,$$

где $F_{упр.x} = -kx$ – сила упругости пружины. Знак «–» поставлен потому, что $x<0$, а проекция силы упругости на ось X: $F_{упр.x}>0$.

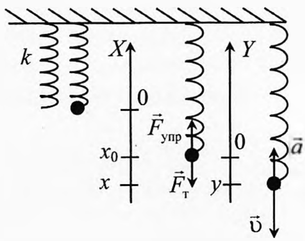


Рис. 40а. *Пружинный маятник*

В положении равновесия ($a_x=0$, $x_0<0$):

$$kx_0 = -mg \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Тогда: $$ma_x = -kx + kx_0 \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}(x - x_0).$$

Введём ещё одну ось Y, так же направленную вертикально вверх, но её начало возьмём в положении равновесия. Тогда $y=x-x_0$ (напомним, что $x_0<0$). Ускорение груза в проекции на ось Y точно такое же, как и в проекции на ось X: $a_y=a_x$.

Итак, $a_y = -\dfrac{k}{m}y$. Значит, груз будет совершать гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Общее уравнение для координаты при гармонических колебаниях: $y=A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Тогда по оси X: $x=x_0+A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$.

По условию, в момент времени $t=0$ тело находилось в точке $x=0$. Тогда

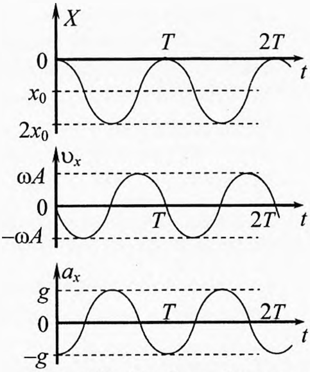


Рис. 40б. *Графики движения*

$$0=x_0+A\cdot\cos(\omega\cdot 0+\varphi_0);$$

$$\Rightarrow\ A\cdot\cos\varphi_0=-x_0. \qquad (1)$$

Продифференцировав зависимость координаты от времени, получим скорость тела:

$$\upsilon_x=x'=-A\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\varphi_0).$$

В момент времени t=0 тело покоилось:

$$0=-A\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot 0+\varphi_0);$$

$$\Rightarrow\ A\cdot\omega\cdot\sin(\varphi_0)=0;\ \Rightarrow\ \sin(\varphi_0)=0.$$

Значит, φ_0=0. Начальная фаза 180° нам не подойдёт, т.к. в этом случае амплитуда колебаний получится отрицательной.

Подставляя в (1), получим: $A=-x_0$.

Тогда, зависимость координаты тела по оси X от времени:

$$x=x_0\cdot(1-\cos(\omega t)) \quad \text{или} \quad x=A\cdot(\cos(\omega t)-1).$$

Зависимость скорости от времени:

$$\upsilon_x=x_0\cdot\omega\cdot\sin(\omega t) \quad \text{или} \quad \upsilon_x=-\omega A\cdot\sin(\omega t).$$

Ускорение: $a_x=-\dfrac{k}{m}(x-x_0)=\dfrac{k}{m}\cdot x_0\cdot\cos(\omega t)$.

Подставляя выражение для x_0, получим: $a_x=-g\cdot\cos(\omega t)$.

Графики этих зависимостей представлены на рис. 40б.

Постоянно действующая сила тяжести $\vec{F}_т$ не изменяет характера колебаний, а лишь смещает положение равновесия на величину $|x_0|=F_т/k$.

45 **Пружинно-математический маятник.** На рис. 41а показано положение равновесия колебательной системы – математического маятника с пружинной связью. Найти период T малых колебаний этой системы. Каким станет период T', если пружину заменить тонкой полоской резины той же длины и жёсткости?

Решение. Будем считать (рис. 41б), что угол отклонения $\alpha>0$, если шарик отклонен вправо, и $\alpha<0$, если он отклонен влево.

При отклонении шарика от положения равновесия относительно оси O возникает момент силы тяжести и силы упругости пружины стремящийся вернуть его в положение равновесия:

$$M=-(F_т\cdot l\sin\alpha+F_{упр}\cdot l_1),$$

где $F_т=mg$, $F_{упр}=kx_1=kl_1\text{tg}\alpha$.

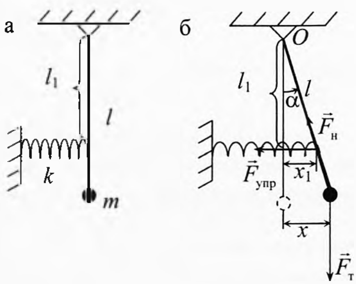


Рис. 41. *Пружинно-математический маятник*

При малых колебаниях, когда $\text{tg}\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha$ (в радианной мере):

$$M=-(mgl+kl_1^2)\cdot\alpha.$$

Знак «–» стоит потому, что результирующий момент сил M старается уменьшить угол α, когда он положителен, и увеличить, когда он отрицателен.

Этот момент сил создаёт шарику угловое ускорение $\beta = \frac{M}{I}$, согласно основному уравнению динамики вращательного движения. Момент инерции шарика относительно точки O равен $I = ml^2$. Значит, $\beta = -\frac{mgl + kl_1^2}{ml^2}\alpha$.

Мы получили уравнение гармонических колебаний, аналогичное уравнению колебаний груза на пружине ($a_x = -\omega^2 \cdot x$).

Значит, при малых углах отклонения наш маятник будет колебаться с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{mgl + kl_1^2}{ml^2}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl + kl_1^2}}$.

Полоска резины, в отличие от пружины, при смещении груза влево от положения равновесия свободно провиснет и не будет действовать на груз (если вес резины пренебрежимо мал). Поэтому период T' колебаний такой системы будет складываться из половины периода T и половины периода колебаний обычного математического маятника: $T' = \pi\left(\sqrt{\frac{ml^2}{mgl + kl_1^2}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\right)$.↩

46 **Пружинный маятник с блоком.** Найти период малых колебаний системы, изображенной на рис. 42. Блок невесом, нить нерастяжима, масса груза m, жёсткость пружины k.

↪**Решение.** Пусть в некоторый момент времени смещение груза по оси X относительно положения равновесия равно x. Тогда дополнительная (по сравнению с растяжением в положении равновесия) деформация пружины равна $2x$.

I способ. Из условия невесомости блока: $T_2 = 2T_1$.

По III закону Ньютона: $T_1 = F_{упр}$, где $F_{упр} = k \cdot 2x$.

II закон Ньютона для тела (с учетом того, что сила тяжести уравновешивается начальным растяжением пружины): $m\vec{a} = \vec{T}_2$.

Или в проекции на ось X: $ma_x = -T_2 = -2T_1 = -4kx$.

$a_x = -\frac{4k}{m}x$ – это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}$, и периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$.

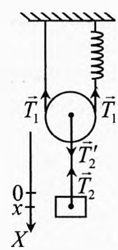


Рис. 42. *Пружинный маятник с блоком*

II способ. По закону сохранения энергии для произвольного положения груза (влияние силы тяжести можно не учитывать, т.к. оно учтено в начальном растяжении пружины в положении равновесия):

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{k(2x)^2}{2} = \text{const} \quad \text{или} \quad \upsilon_x^2 + \frac{4k}{m}\cdot x^2 = \text{const}.$$

Это аналогично уравнению для энергии гармонических колебаний груза на пружине:

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \upsilon_x^2 + \frac{k}{m}\cdot x^2 = \text{const}, \quad \text{или} \quad \boxed{\upsilon_x^2 + \omega^2 \cdot x^2 = \text{const}}.$$

Отметим, что если взять производную этого уравнения по времени, то получим уравнение гармонических колебаний: $2\upsilon_x \cdot \upsilon_x' + \omega^2 \cdot 2x \cdot x' = \text{const}$; $\Rightarrow a_x = -\omega^2 \cdot x$.

Значит, наша система будет совершать гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{4k}{m}}$, и периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{4k}}$.

47 **Колебания двух грузов.** На гладком горизонтальном столе лежат два кубика одинаковой массы m, соединенные пружиной жёсткостью k и длиной l_0 в нерастянутом состоянии (рис. 43а)? На левый кубик внезапно начинает действовать постоянная по величине и направлению сила $\vec{F}$. Найти минимальное и максимальное расстояние между кубиками при дальнейшем движении.

Решение. Центр масс системы движется с ускорением $\vec{a}_{\text{цм}} = \vec{F}/(2m)$. Перейдем в неинерциальную систему отсчёта, связанную с центром масс системы, то есть движущуюся с ускорением $\vec{a}_{\text{цм}}$. В этой системе отсчёта на каждое тело действует сила инерции (рис. 43б):

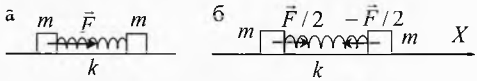


Рис. 43. *Колебания двух грузов*

$$\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}_{\text{цм}} = -\vec{F}/2.$$

Итак, на правый груз по оси X действует сила (кроме силы упругости пружины): $\vec{F}_{\text{п.}x} = -\vec{F}/2$, а на левый груз действует результирующая сила (кроме силы упругости пружины): $\vec{F}_{\text{л.}x} = \vec{F} - \vec{F}_{\text{и}} = \vec{F}/2$.

В этой системе отсчёта грузы будут колебаться относительно положения равновесия, определяемого из условия равенства сил, действующих на груз:

$$F/2 = F_{\text{упр}} \quad \text{или} \quad F/2 = k \cdot x_{\text{р}},$$

где $x_{\text{р}}$ – сжатие пружины в положении равновесия, равное амплитуде колебаний ($x_{\text{р}} = A$). Максимальная длина пружины будет равна длине недеформированной пружины: $l_{max} = l_0$, а минимальная длина – на размах колебаний меньше, то есть на две амплитуды меньше: $l_{min} = l_0 - 2 \cdot A = l_0 - F/k$.

✓ **Ответ.** $l_{min} = l_0 - F/k$; $l_{max} = l_0$.

Приложение. Основные формулы

1. Кинематика

Координата: $\Delta x = x - x_0$; $x = x_0 + \Delta x$;

Перемещение: $\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0$; $\vec{S} = \Delta\vec{r}$; $\vec{S} = \vec{S}_x + \vec{S}_y$; $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$;

$\begin{cases} S_x = \Delta x; \\ S_y = \Delta y; \end{cases}$ $\begin{cases} S_x = x - x_0; \\ S_y = y - y_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + S_x; \\ y = y_0 + S_y; \end{cases}$

Сложение перемещений: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \ldots$; $\begin{cases} S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \ldots; \\ S_y = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} + \ldots \end{cases}$

Путь: $l \geq S$.

Скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$; при равномерном прямолинейном движении: $\upsilon = \dfrac{S}{t}$; $\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_x \cdot t; \\ y = y_0 + \upsilon_y \cdot t. \end{cases}$

Средняя скорость: $\upsilon_{ср} = \dfrac{S_{общ}}{t_{общ}}$; $\upsilon_{ср} = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots}$.

Ускорение: $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$; $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{a}\cdot\Delta t$; $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$; $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \Delta\vec{\upsilon}$; $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\cdot\Delta t$.

Равноускоренное движение: $\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}$; $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\cdot t$; $\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x \cdot t, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y \cdot t. \end{cases}$

$S_x = \dfrac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2}\cdot t$; $2a_x S_x = \upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2$; $S_x = \upsilon_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2}$; $\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_x t + \dfrac{a_x t^2}{2}; \\ y = y_0 + \upsilon_y t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases}$

Резкость движения (рывок): $\vec{j} = \dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$; при постоянной резкости: $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{j}\cdot t$; $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\cdot t + \dfrac{\vec{j}\cdot t^2}{2}$;

$\vec{S} = \vec{\upsilon}_0\cdot t + \dfrac{\vec{a}\cdot t^2}{2} + \dfrac{\vec{j}\cdot t^3}{6}$.

Свободное падение тел: $\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_0\cdot\cos\alpha\cdot t; \\ y = y_0 + \upsilon_0\cdot\sin\alpha\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0\cdot\cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0\cdot\sin\alpha - gt. \end{cases}$

При x_0=0, y_0=0: $t_{подъёма} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; $t_{полёта} = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; $h = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Касательное ускорение: $\vec{a}_\tau = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}$; $a_\tau = \dfrac{|\upsilon - \upsilon_0|}{\Delta t}$.

Центростремительное ускорение: $\vec{a}_n = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}$; $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Полное ускорение: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Частота и период вращения: $n = \dfrac{N}{t}$; $T = \dfrac{t}{N}$; $T = \dfrac{1}{n}$; $n = \dfrac{1}{T}$.

Угол поворота: $\varphi = \dfrac{l}{R}$; $l = 2\pi R\cdot N$; $\varphi = 2\pi N$.

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$; при равномерном вращении: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Угловое ускорение: $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$; $\Delta\omega = \omega - \omega_0$; при равноускоренном вращении: $\omega = \omega_0 + \beta t$;
$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\beta t^2}{2}$.

Связи между угловыми и линейными характеристиками при вращении тела:
$\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$; $\upsilon = \omega R$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\omega = 2\pi n$; $a_n = \omega^2 R$; $a_\tau = \beta \cdot R$.

2. Основы динамики

Первый закон Ньютона: $\vec{\upsilon} = \text{const}$ в инерциальной системе отсчёта при $\vec{F}_{рез} = 0$.

Второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_{рез}$, где $\vec{F}_{рез} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$; $\begin{cases} ma_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \\ ma_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \end{cases}$

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с ускорением $\vec{a}_c$ относительно инерциальной системы отсчёта: $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{F}_и$; где $\vec{F}_и = -m\vec{a}_c$.

Третий закон Ньютона: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.
Сила упругости, закон Гука: $F_{упр} = k \cdot |\Delta l|$; $\Delta l = l - l_0$; $(F_{упр})_x = -k \cdot x$.

Относительное удлинение: $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0} 100\,\%$.

Механическое напряжение, закон Гука: $\sigma = \dfrac{F}{S_\perp}$; $\sigma = E \cdot |\varepsilon|$.

Модуль Юнга, жесткость тела: $F = \dfrac{ES_\perp}{l_0} \cdot \Delta l$; $k = \dfrac{ES_\perp}{l_0}$.

Закон всемирного тяготения: $F_т = G \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

Сила тяжести: $\vec{F}_т = m\vec{g}$; $F_т = G \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}$; $g = \dfrac{G \cdot M}{(R+h)^2}$; $g_0 = \dfrac{G \cdot M}{R^2}$.

Первая космическая скорость: $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$; $\upsilon_{1.\max} = \sqrt{\dfrac{GM}{R}} \approx 7{,}9\,(км/с)$.

Вес тела в неинерциальной системе отсчёта: $\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}$.
Реакция опоры, нормальная реакция, сила трения: $N = F_р \cos\alpha$; $F_{тр} = F_р \sin\alpha$.
Сила трения покоя: $F_{тр} \le \mu N$. Сила трения скольжения: $F_{тр\ скольж} = \mu N$.
Сила трения качения: $F_{тр.кач} = \mu_{кач} N$.

Тормозной путь: $S = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu g}$.
Критический угол наклона плоскости для скольжения тела по ней: $\mu = tg\alpha_{кр}$.

3. Статика

Первое условие равновесия: $\sum \vec{F}_i = 0$ или $\sum \vec{F}_{ix} = 0$; $\sum \vec{F}_{iy} = 0$; $\sum \vec{F}_{iz} = 0$.
Момент силы: $M = F \cdot d$.
Второе условие равновесия (правило моментов сил): $\sum |M_{по\ час\ стр}| = \sum |M_{против\ час\ стр.}|$.

Положение центра масс системы: $x_{ц.м.} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}$; $\vec{r}_{ц.м.} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m_{общ}}$.

4. Импульс. Закон сохранения импульса

Импульс сторонней силы: $\vec{j} = \vec{F}_{стор} \cdot \Delta t$.

Импульс тела: $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$.

Связь импульса тела с импульсом силы: $\vec{F}_{стор} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$; $\vec{F}_{стор} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P}$; $\vec{j} = \Delta\vec{P}$.

Закон сохранения импульса (при $\vec{F}_{стор} = 0$): $\sum \vec{P}_i = \sum \vec{P'}_i$ или $\begin{cases} \sum P_{ix} = \sum P'_{ix}; \\ \sum P_{iy} = \sum P'_{iy}; \\ \sum P_{iz} = \sum P'_{iz}. \end{cases}$

Закон изменения импульса: $\vec{F}_{стор} \cdot \Delta t = \sum \vec{P}'_i - \sum \vec{P}_i$ или $\sum \vec{P}_i + \vec{F}_{стор} \cdot \Delta t = \sum \vec{P}'_i$.

Реактивная сила газовой струи: $\vec{F}_р = -\mu\vec{\upsilon}_г$.

5. Энергия и работа

Механическая энергия – сумма кинетической и потенциальной: $E = E_к + E_п$.

Механическая работа: $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$, где α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{\upsilon}$.

При $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$: $A > 0$.

При $\alpha = 0^\circ$: $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{S}$; $A_{max} = F \cdot S$.

При $\alpha = \pm 90^\circ$: $\vec{F} \perp \vec{S}$; $A = 0$.

При $90^\circ < \alpha < 270^\circ$: $A < 0$.

При $\alpha = 180^\circ$: $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{S}$; $A = -F \cdot S$.

Кинетическая энергия (поступательного движения): $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$.

Теорема о кинетической энергии (работа результирующей сил):

$A_{рез} = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$; $A_{рез} = E_{к2} - E_{к1}$; $A_{рез} = \Delta E_к$;

или альтернативном виде: $\dfrac{m\upsilon_1^2}{2} + A_{рез} = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2}$; $E_{к1} + A_{рез} = E_{к2}$.

Потенциальная энергия, обусловленная силой тяжести: $E_т = mgh$.

Потенциальная энергия взаимодействия двух материальных точек: $E_т = -\dfrac{GmM}{r}$.

Работа силы тяжести: $A_т = mgh_1 - mgh_2$; $A_т = E_{т1} - E_{т2}$; $A_т = -\Delta E_т$

Потенциальная энергия, обусловленная силой упругости: $E_{упр} = \dfrac{kx^2}{2}$.

Работа силы упругости: $A_{упр} = \dfrac{kx_1^2}{2} - \dfrac{kx_2^2}{2}$; $A_{упр} = E_{упр1} - E_{упр2}$; $A_{упр} = -\Delta E_{упр}$.

Закон сохранения механической энергии: $E_1 = E_2$; $E_{к1} + E_{т1} + E_{упр1} = E_{к2} + E_{т2} + E_{упр2}$.

Закон изменения механической энергии: $A_{ст} + A_{тр} = \Delta E$ или $E_1 + A_{ст} + A_{тр} = E_2$.

Коэффициента полезного действия (КПД): $\eta = \dfrac{A_п}{A_з}$ или $\eta = \dfrac{A_п}{A_з} \cdot 100\%$.

Мощность: $N = \dfrac{\delta A}{\Delta t}$ или $N = \dfrac{A}{t}$;

Мощность силы: $N = F \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha$, где α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{\upsilon}$; при $\alpha = 0$: $N = F \cdot \upsilon$.

6. Гидромеханика

Давление: $p = \dfrac{F}{S_\perp}$.

Давление столба однородной жидкости (газа или твердого тела): $p = \rho g h$.

Сила Архимеда: $F_А = \rho_с g V_{пт}$; $\vec{F}_А = -\vec{P}_{вс}$, где $\vec{P}_{вс}$ – вес вытесненной среды.

Объемный расход жидкости: $\dfrac{V}{t} = S \upsilon$.

Уравнение неразрывности струи жидкости: $\dfrac{V_1}{t} = \dfrac{V_2}{t}$ или $S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2$ или $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$.

Массовый расход жидкости или газа: $\mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S \upsilon$.

Уравнение неразрывности струи жидкости или газа: $\mu_1 = \mu_2$ или $\rho_1 S_1 \upsilon_1 = \rho_2 S_2 \upsilon_2$.

Плотность энергии: $w = \dfrac{\delta E}{\delta V}$.

Плотность кинетической энергии жидкости: $w_к = \dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$.

Плотность потенциальной энергии, обусловленной силой тяжести жидкости: $w_т = \rho g h$.

Плотность потенциальной энергии, обусловленной упругостью жидкости: $w_{упр} = p$.

Закон Бернулли: $\dfrac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \dfrac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$; $w_{1к} + w_{1т} + w_{1упр} = w_{2к} + w_{2т} + w_{2упр}$.

Динамическое давление: $p_д = \dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$.

Формула Торричелли: $\upsilon = \sqrt{2gh}$.

Сила сопротивления жидкости (газа): $F_с = \beta \cdot \upsilon^\alpha$; при малых скоростях $\alpha = 1$: $\vec{F}_с = -\beta \cdot \vec{\upsilon}$.

7. Динамика вращательного движения

Основной закон динамики вращательного движения (уравнение Эйлера): $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{M}}{I}$; $\beta = \dfrac{M}{I}$.

Момент инерции точечного тела: $I_{(\cdot)} = mR^2$.

Момент инерции произвольного тела: $I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i R_i^2$.

Теорема Гюйгенса–Штейнера: $I_A = I_O + md^2$.

Импульс момента силы: $\vec{\lambda} = \vec{M}_{стор} \cdot \Delta t$.

Момент импульса тела: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Момент импульса материальной точки: $L = m\upsilon R \cdot \sin\alpha$, где α – угол между $\vec{R}$ и $\vec{\upsilon}$.

Закон изменения момента импульса: $\Delta(I\vec{\omega}) = \vec{M}_{стор} \cdot \Delta t$ или $\Delta\vec{L} = \vec{\lambda}$.

Закон сохранения момента импульса (при $\vec{M}_{стор} = 0$): $\vec{L} = \text{const}$; $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$; $I\omega = \text{const}$.

Кинетическая энергия вращения тела: $E_{к\,вр} = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

II закон Кеплера: $\Delta S = \text{const} \cdot \Delta t$; $r \cdot \upsilon \cdot \sin\alpha = r' \cdot \upsilon' \cdot \sin\alpha'$.

III закон Кеплера: $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3}$; $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^3$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$.

8. Механические колебания

Частота и период колебаний: $\nu = \frac{N}{t}$; $T = \frac{t}{N}$; $T = \frac{1}{\nu}$; $\nu = \frac{1}{T}$.

Циклическая частота колебаний: $\omega = 2\pi\nu$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Размах и амплитуда колебаний: размах $= 2A$.

Уравнение гармонических колебаний: $a_x = -\omega^2 x$, или $x'' = -\omega^2 x$, или $\upsilon_x^2 + \omega^2 x^2 = \mathrm{const}$.

Колебания пружинного маятника: $a_x = -\frac{k}{m}x$; $\frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \mathrm{const}$; $\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $T_{\text{пр}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Колебания математического маятника: $a_x = -\frac{g}{l}x$; $\omega_{\text{м}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Колебания физического маятника: $\beta = -\frac{mgd}{I}\alpha$; $\omega_{\text{ф}} = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$; $T_{\text{ф}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{mgd}}$.

Фаза колебаний: $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Смещение колеблющегося тела (при $\varphi_0 = 0$): $x_{\text{м}} = A$; $x = A\cdot\cos\varphi$ или $x = x_{\text{м}}\cdot\cos(\omega t)$.

Скорость колеблющегося тела: $\upsilon_{\text{м}} = A\omega$; $\upsilon_x = -\upsilon_{\text{м}}\cdot\sin(\omega t)$ или $\upsilon_x = \upsilon_{\text{м}}\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ускорение колеблющегося тела: $a_{\text{м}} = A\omega^2$; $a_x = -a_{\text{м}}\cdot\cos\omega t$ или $a_x = a_{\text{м}}\cdot\cos(\omega t + \pi)$.

Энергия гармонических колебаний: $E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$; $E_{\text{к}} = E\cdot\sin^2\omega t$; $E_{\text{п}} = E\cdot\cos^2\omega t$.

9. Измерение физических величин

Абсолютная погрешность измерения: $\Delta x = x - x_{\text{ист}}$.

Относительная погрешность: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}$ или $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}\cdot 100\%$.

Систематическая погрешность прямого измерения: $\Delta x_{\text{сист}} \approx \Delta x_{\text{макс}}/2$.

Наилучшее значение: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Случайная погрешность: $\Delta x_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

Полная погрешность измерений: $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (\Delta x_{\text{случ}})^2}$

Истинное значение: $x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \Delta x$ или $\bar{x} - \Delta x \le x_{\text{ист}} \le \bar{x} + \Delta x$.

Обработка результатов косвенных измерений:

при $A = B \pm C$ (где B и C независимы) наилучшее значение: $\bar{A} = \bar{B} \pm \bar{C}$; абсолютная и относительная погрешности: $\Delta A = \sqrt{(\Delta B)^2 + (\Delta C)^2}$; $\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{\bar{A}} = \frac{\sqrt{\Delta B^2 + \Delta C^2}}{\bar{B} \pm \bar{C}}$;

при $A = B\cdot C\cdot D$ или $A = \frac{B\cdot C}{D}$ (где B, C и D независимы) наилучшее значение: $\bar{A} = \bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$ или $\bar{A} = \frac{\bar{B}\cdot\bar{C}}{\bar{D}}$; абсолютная и относительная погрешности: $\Delta A = \bar{A}\cdot\varepsilon = \bar{A}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2}$;

$\varepsilon = \frac{\Delta A}{\bar{A}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2}$.

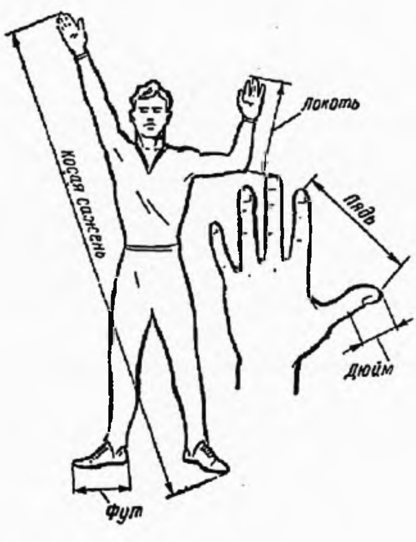
Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Кратные			Дольные		
приставка	обозначение	множитель	приставка	обозначение	множитель
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
гига	Г	10^{9}	нано	н	10^{-9}
мега	М	10^{6}	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^{3}	мили	м	10^{-3}
гекто	г	10^{2}	санти	с	10^{-2}
дека	да	10^{1}	деци	д	10^{-1}

Таблица соотношения некоторых старых русских и зарубежных мер длины с метрическими мерами

1 морская миля = 1852 м
1 сухопутная миля = 1609 м
1 верста = 500 саженям = 1066,8 м
1 кабельтов = 0,1 морской мили = 185 м
1 сажень = 3 аршинам = 7 футам = 213,4 см
1 ярд = 3 футам = 36 дюймам = 91,44 см
1 аршин = 16 вершкам = 28 дюймам = 72,12 см
1 фут = 12 дюймам = 30,48 см
1 вершок = 4,44 см
1 дюйм = 25,4 мм
1 ангстрем ≡ 1 A° = 10^{-10} м

Первые единицы длины были связаны с размером человеческого тела.



Плотности тел

Плотности некоторых твердых тел при t=20°C

Твердое тело	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3	Твердое тело	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3
Осмий	22600	22,6	Мрамор	2700	2,7
Иридий	22400	22,4	Стекло оконное	2500	2,5
Платина	21500	21,5	Фарфор	2300	2,3
Золото	19300	19,3	Бетон	2300	2,3
Свинец	11300	11,3	Кирпич	1800	1,8
Серебро	10500	10,5	Сахар–рафинад	1600	1,6
Медь	8900	8,9	Оргстекло	1200	1,2
Латунь	8500	8,5	Капрон	1100	1,1
Сталь, железо	7800	7,8	Полиэтилен	920	0,92
Олово	7300	7,3	Парафин	900	0,90
Цинк	7100	7,1	Лед	900	0,90
Чугун	7000	7,0	Дуб (сухой)	700	0,70
Корунд	4000	4,0	Сосна (сухая)	400	0,40
Алюминий	2700	2,7	Пробка	240	0,24

Плотности некоторых жидкостей при t=20°C

Жидкость	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3	Жидкость	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3
Ртуть	13600	13,6	Спирт	800	0,80
Серная кислота	1800	1,80	Нефть	800	0,80
Мед	1350	1,35	Ацетон	790	0,79
Вода морская	1030	1,03	Эфир	710	0,71
Молоко цельное	1030	1,03	Бензин	710	0,71
Вода чистая	1000	1,00	Жидкое олово (при t=400°C)	6800	6,80
Масло подсолнечное	930	0,93			
Масло машинное	900	0,90	Жидкий воздух (при t=400°C)	860	0,80
Керосин	800	0,80			

Плотности некоторых газов при t=0°C

Газ	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3	Газ	ρ, кг/м^3	ρ, г/см^3
Хлор	3,210	0,00321	Угарный газ (CO)	1,250	0,00125
Углекислый газ (CO_2)	1,980	0,00198	Природный газ	0,800	0,00080
Кислород	1,430	0,00143	Водяной пар (при 100°C)	0,590	0,00059
Воздух	1,290	0,00129	Гелий	0,180	0,00018
Азот	1,250	0,00125	Водород	0,090	0,00009

Все плотности вычислены при нормальном атмосферном давлении.