ОПЫТЪ

О

УСОВЕРШЕНІИ

ЕЛЕМЕНТОВЪ ГЕОМЕТРІИ,

СОСТАВЛЯЮЩІЙ

ПЕРВУЮ КНИГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ ТРУДОВЪ

АКАДЕМИКА ГУРЬЕВА.

Tout ce qui est susceptible d'idées précises, n'en souffre point d'autres; présenter des notions vagues pour des demonstrations exactes, c'est substituer de fausses lueurs à la lumiere, c'est retarder les progrès de l'esprit en voulant l'eclaircir. L'ignorance croit y gagner, et les sciences y font une perte réelle.

D' Alembert.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

при Императорской Академіи Наукъ,

1798 года.

ЕГО ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЕЛИЧЕСТВУ

ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ ГОСУДАРЮ

ИМПЕРАТОРУ

ПАВЛУ ПЕТРОВИЧУ

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССІЙСКОМУ

Всеподданнѣйшее приношеніе.

ВВЕДЕНІЕ.

Читая *Математическія* откровенія нынѣшних времен и обращаясь къ началамъ, на коихъ оныя обыкновенно утверждаются, всегда я представлялъ себѣ огромное зданіе непрестанно возвышающееся на слабыхъ основаніяхъ, всегда сокрушался о преклонности къ паденію сей чрезвычайной громады полезнѣйшихъ роду человѣческому знаній. Ибо полагать линеи изъ точекъ, поверьхности изъ линей и тѣла изъ поверьхностей составленными, принимать количества безконечныя, почитать кривыя линеи за совокупленіе прямыхъ и утверждать бытіе количествъ, коихъ величина меньше ничего, всегда мнѣ казалось страннымъ и разсудку противнымъ. И можетъ быть долгое время я бы пребылъ въ тщетномъ соболѣзнованіи, естьли бы не получилъ превосходное твореніе Г. Кузена подъ заглавіемъ: Leçons de calcul differentiel et de calcul integral (*). Пять предложеній изъ простой и нѣкоторые вопросы изъ криволинейной Геометрій, во второй главѣ сего сочиненія имъ по способу предѣловъ, отрослю способа древнихъ Геометровъ начертанныя, на послѣдокъ породили надежду свергнуть тягостное уму иго безконечныхъ количествъ и другихъ ему противностей; творенія же удивительнаго Архимеда, коего самъ Нютонъ владыкою Математиковъ называетъ (а), подавъ лучшее понятіе о способѣ древнихъ Геометровъ, оную укрѣпили; и я приступилъ къ разрѣшенію того, что меня и многихъ подобныхъ мнѣ затрудняло.

Мнѣ не нужно здѣсь входить во опроверженіе упомянутыхъ неосновательныхъ положеній, какъ по тому, что съ малымъ и посредственнымъ разсужденіемъ всякой усмотритъ ихъ не правду, такъ и по тому, что о семъ уже многіе писали (b) и

(*) Кузенъ прошлаго 1796 году выдалъ сіе твореніе вторымъ изданіемъ, подъ заглавіемъ: Traité de calcul differentiel et de calcul integral. Въ слѣдующемъ я буду дѣлать ссылки на оное второе изданіе.

(a) Arithmetica univerfalis p. 289, editio fecunda.

(b) Прочитавъ въ Енциклопедіи въ членѣ Geometrie, коего Авторъ д'Аламбертъ, *Objet de la Geometrie*, смотри въ сочиненіи подъ заглавіемъ Institutions de Geometrie par M. De la Chapelle, что уже многіе отъ нихъ заблудилися (а); но надлежитъ токмо доказать по самой точности, по законамъ здраваго разсудка, хотя главныя изъ тѣхъ истиннъ, кои утверждались не основательными положеніями; при томъ такъ, что бы не употреблять науки, коей начала затруднитель-

Examen de la méthode des indivisibles, tome seconde, page 335 et les suivantes; сочиненія подъ заглавіемъ Traité des fluxions par M. Maclaurin, introduction page XLI et les suivantes, купно съ примѣчаніемъ въ низу мѣлкими буквами напечатаннымъ; члены *infini et infiniment petit* Енциклопедіи писанные д'Аламбертомъ; упомянутаго сочиненія г. Кузена *Discours préliminaire*, pag. V & VIII, и chapitre IV de l'introduction pag. 88; *Opuscules Mathématiques* д'Аламберта, tome I, page 201; членъ Negatif Енциклопедіи писанный д'Аламбертомъ же.

(а) Смотри наипаче сочиненіе подъ заглавіемъ Elemens des forces centrales par M. le Chevalier de Forbin, особливо отъ 120 страницы.

Сверхъ того неосновательно тѣ думаютъ, которые утверждаютъ, что строгость и совершенная Математическая точность затрудняетъ и умъ обременяетъ. Ибо говоритъ д'Аламбертъ въ Енциклопедіи въ членѣ Elemens des Sciences, что въ вопросѣ: какое изъ двухъ качествъ въ Елементахъ наукъ должно быть предпочтено, или удобность или строгость точная? предполагается понятіе о семъ ложное, предполагается, будто точная строгость можетъ быть безъ удобности, что совсѣмъ напротивъ: чемъ выводъ строжае, тѣмъ онъ ко разумѣнію удобнѣе ибо строгость состоитъ въ приведеніи всей цѣлости къ началамъ наипростѣйшимъ и проч.

ніе и сложнѣе, въ другой, у коей начала удобнѣе и простѣе. На примѣръ не употреблять Механики въ Алгебрѣ и Геометріи, какъ учинилъ славной Маклоренъ въ своемъ сочиненіи A treatiſe of Fluxions, ибо ввести въ Алгебру и Геометрію движенія, время и скорости, значитъ ввести понятія совершенно чуждыя симъ наукамъ, и не облегчить, но обременить умъ вдругъ многими предметами.

Первый опытъ сего предпріятія я разсудилъ учинить надъ первоначальною Геометріею, какъ надъ первою изъ наукъ Математику составляющихъ; и что составитъ первую книгу Математическихъ трудовъ моихъ.

ТОЧНОЕ И ЯСНОЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТѢХЪ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ

ПРЕДЛОЖЕНІЙ,

кои въ сочиненіяхъ новыхъ писателей обыкновенно утверждаются чрезъ безконечныя и нераздѣлимыя количества и иныя подобныя онымъ неосновательности.

Геометрія до временъ Каваллери всегда сохраняла существенныя ей свойства, то есть точность и ясность; онъ издавъ свое ученіе о нераздѣлимыхъ, первой началъ вводить въ нее неосновательныя положенія, первой началъ полагать линеи изъ точекъ, поверьхности изъ линей и тѣла изъ поверьхностей составленными. — Чрезъ сіе средство доказывалъ равенство и содержаніе параллелограммовъ, треугольниковъ, призьмъ, пирамидъ и проч. И поелику умъ отъ того оставался почти безъ дѣйствія, то онъ обрѣлъ себѣ весьма многихъ послѣдователей. Однакожъ Гулденъ воставъ противъ сихъ мнимыхъ и уму противныхъ количествъ, убѣдилъ его перемѣнить ихъ на елементы безконечно малые и дѣлимые до безконечности и полагать уже величины составленными изъ оныхъ; и симъ онъ мнилъ сохранить прежнюю точность и ясность Геометрїи, не утративъ однакожъ той бездѣйствуемости ума, которая столько понравилась въ способѣ нераздѣлимыхъ.

Нѣтъ нужды здѣсь показывать, какимъ образомъ чинятся доказательства чрезъ посредство сихъ нераздѣлимыхъ и безконечныхъ количествъ, ибо во всѣхъ почти Геометрїяхъ, новыми по сїе время выданныхъ, всякой оныя найти можетъ; такъ же нѣтъ надобности и входить во испровержение ихъ, ибо выше вообще примѣтили, что нераздѣлимыя и безконечныя количества суть неосновательныя положенїя ведущїя къ погрѣшностямъ (а); а по сему не иное что учинить надлежитъ, какъ прямо приступить къ нашему предмету.

Между тѣмъ примѣтимъ, что предложенїя первоначальной Геометрїи, кои обыкновенно доказываются чрезъ безконечныя и нераздѣлимыя количества, суть двухъ родовъ: или такїя, въ коихъ утверждается равенство двухъ величинъ изъ трехъ родовъ протяженности, или такїя, въ коихъ изыскивается содержанїе или лучше пропорцїональность оныхъ; и того ради сїю книгу, точное и ясное онымъ доказательство заключать долженствующую, раздѣлимъ на двѣ главы; въ первой предложимъ таковое доказательство предложенїямъ перваго роду, а въ другой предложенїямъ втораго.

(а) Въ прочемъ смотри еще упомянутаго сочиненїя Г. Маклорена Tome seconde, p. 5 et les suivantes. Здѣсь ссылки дѣлаю и впредь буду дѣлать на французской переводъ сего творенїя, для вящшей языка сего употрбительности.

А хотя того и другаго роду предложенія весьма тѣсным и неразлучным союзом сопряжены между собою; однако здѣсь, как в сочиненіи, которое не связь и расположеніе, но точность и ясность за предмет имѣет, мы можем их разсматривать особо.

Но при сем надлежит не забыть, что случается весьма часто одно и тоже предложеніе вывести из того и другаго начала; так на примѣр Теорема Пиѳагорова выводится из правила наложенія, как учинил Евклид, и выводится так же из Теоріи величин пропорціональных, как сдѣлали многіе новые Геометры; а по тому, поелику мы не предполагаем себѣ извѣстной системы, и коя не может быть как токмо двоякая, или сообразованная с началами или сообразованная с предметами, долженствуем в таковых случаях предлагать тот и другой вывод: Один будет полезен для одной системы, а другой для другой.

ГЛАВА I.

Содержащая точное и ясное доказательство тѣх из упомянутых первоначальной Геометріи предложеній, в коих утверждается равенство двух величин из трех родов протяженности.

Прежде, нежели мы приступим к настоящему предмету, подадим понятіе о главных и паче заслуживающих вниманіе способах доказывать сего роду предложенія.

И что бы удобнѣе сїе намъ сдѣлать можно было, то возмемъ для примѣру одно простѣйшее слѣдующее предложенїе.

Всякой кругъ равенъ треугольнику, коего основанїе окружность сего круга, а высота радїусъ его.

И поелику Архимедъ первой, которой доказалъ сїю истинну, предложивъ ее въ сочиненїи своемъ de Circuli Dimensione (a), то мы начнемъ способомъ Архимедовымъ.

Способъ Архимедовъ.

Прежде, нежели къ сему приступитъ мы можемъ, надлежитъ привести опредѣленїя, аксїомы и предложенїя, предполагаемыя имъ изъ перьваго своихъ сочиненїй de ſphaera et Cylindro.

Опредѣленїя.

I. Кривыя линеи, окончевающїяся на плоскости, суть тѣ, которыя въ разсужденїи прямыхъ, концы оныхъ соединяющихъ, или находятся совсѣмъ по одну сторону или ни сколько по другую не падаютъ.

Примѣчанїе Г. Барро.

Чрезъ названїе кривая линея, означается не только вездѣ и не прерывно кривая, но и какъ бы то ни было

(a) Наилучшее изданїе Архимедовыхъ творенїй, по крайней мѣрѣ по словамъ Маклорена и Моншукла, есть то, которое учинено славнымъ Барро, учителемъ Великаго Нютона, подъ заглавїемъ: Archimedis opera: Methodo nova illuſtrata, et ſuccinctè demonſtrata. Per Iſaacum Barrow, Londini, 1675.

изотнутая линея; или изъ прямыхъ и кривыхъ смѣшанная или вся изъ прямыхъ составленная. Пусть взята будетъ на примѣръ дуга круга ABC, коея концы соединяетъ прямая AC; тогда вся линея ABC отъ прямой AC къ B Черт. 1. уклоняется; но естьли на хордѣ AC возмется точка D, то тутъ нѣкоторая только часть ABC смѣшанной линеи DABC отъ CD, соединяющей концы ея D и C, къ B уклоняется, а другая часть AD на продолженіи самой CD находится, и слѣдственно съ оною CD соединяется; но никакая въ другую сторону, кромѣ B, не уклоняется.

II. Изъ сего роду линей *вогнутою* съ одной и той же стороны называю ту, у которой прямыя, лежащія между какими бы то ни взятыми двумя точками, падаютъ или всѣ по оную сторону, или токмо нѣкоторыя по оную, а другія по самой кривой, но ни какая по другую не падаетъ.

Примѣчаніе Г. Барро.

Для уразумѣнія сего мало яснаго опредѣленія надлежитъ разсмотрѣть изъясненіе предъидущаго опредѣленія, къ коему прибавлю только, что вѣрный признакъ въ одну и туже сторону вогнутости есть тотъ, когда всякая прямая не сѣчетъ кривую, какъ токмо въ двухъ точкахъ.

III. Подобнымъ образомъ поверхости на плоскости оканчевающіяся суть тѣ, которыя не въ самой плоскости находятся, но которыя концы свои въ оной имѣютъ, и которыя въ разсужденіи сей плоскости или находятся совсѣмъ по одну сторону, или нисколько по другую не падаютъ.

IV. Вогнутыми же изъ сего роду поверхностей называю тѣ, у которыхъ прямыя соединяющія двѣ точки падають или всѣ по одну и ту же сторону поверхностей, или нѣкоторыя по одну и ту же ихъ сторону, а другія по самымъ поверхностямъ, но никакая по другую сторону не падаетъ.

Примѣчаніе Г. Барро.

Кто первыя два опредѣленія уразумѣлъ, тотъ и сіи два пойметъ.

Аксіомы

I. Изъ линей, тѣ же концы имѣющихъ, прямая есть наименшая.

II. Но естьли линеи находящіяся въ одной плоскости, тѣ же концы имѣющія и съ одной стороны вогнутыя, неравны и одна изъ нихъ или вся содержится между другою и прямою, тѣ же концы имѣющею, или токмо содержится нѣкоторою частію, имѣя другую общею; то та, которая содержится, есть меньшая.

III. Подобнымъ образомъ изъ поверхностей имѣющихъ тѣ же концы, естьли только оные находятся на плоскости, меньшая есть плоскость.

IV. Но естьли поверхности тѣ же концы имѣющія, которые на плоскости находятся, и съ одной стороны вогнутыя, не равны, и одна изъ нихъ или вся содержитсе между другою и плоскостію тѣ же съ нею концы имѣющею, или токмо содержится нѣкоторыми частями, имѣя другія общими; то та, которая содержится, есть меньшая.

V. Избытокъ двухъ неравныхъ линей, поверхностей и тѣлъ многократно самъ съ собою совокупленный можетъ превзойти всякую данную и опредѣленную линею, поверхность и тѣло.

Архимедъ въ книгѣ своей de Quadratura parabolae Досиѳею (a) именно говоритъ, что сія истинна есть основаніе всѣхъ его изобрѣтеній, и ее предлагаетъ, какъ начало, кое древніе прежде его еще употребляли при доказательствѣ всѣхъ предложеній сего роду (b).

Изъ нея непосредственно слѣдуетъ весьма часто потребное здѣсь первое предложеніе 10й книги Евклидовыхъ Елементовъ, а имянно:

Ежели отъ большей изъ двухъ данныхъ и неравныхъ величинъ отнято будетъ больше половины, и отъ оставшагося болѣе половины, и такъ далѣе; то останется на послѣдокъ нѣкая величина, коя будетъ меньше предложенной меньшей величины.

Доказательство.

Да будутъ AB, C двѣ неравныя величины, изъ коихъ Черт. 2.
AB больше C; говорю, что естьли отъ AB отнято будетъ больше половины, и отъ оставшагося больше половины, и такъ далѣе; то останется на послѣдокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше величины C.

(a) Досиѳей былъ славный въ Аѳинахъ Астрономъ, которому Архимедъ приписывалъ свои сочиненія.

(b) Въ Евклидѣ сіе начало помѣщено въ число опредѣленій и есть 4е опредѣленіе V книги его Елементовъ.

Понеже C меньше AB, то она будучи взятая кратно, будетъ на послѣдокъ больше AB; пусть DE такая кратная величина C, которая больше AB; раздѣли ее на величины равныя C, а имянно на DF, FG, GE; и отъ AB отними больше половины, какъ BH, и отъ оставшагося AH отними больше половины, какъ HK, и такъ далѣе, пока раздѣленія въ AB не будутъ равномногія раздѣленіямъ въ DE; пусть раздѣленія AK, KH, HB равномногія раздѣленіямъ DF, FG, GE; говорю что AK меньше C.

Понеже EG не больше половины DE, а BH больше половины AB; то остальная GD не меньше половины DE, а остальная AH меньше половины AB; но цѣлая DE больше цѣлой AB; по чему и остальная GD больше остальной HA. По томъ понеже GF не больше половины GD, а HK больше половины HA; то остальная FD не меньше половины GD, а остальная AK меньше половины AH; доказано же, что GD больше HA: по чему и остальная DF больше остальной AK; но DF=C; слѣдовательно AK меньше C; и такъ и проч.

Подобно сіе докажется, естьли отниматься будутъ и точныя половины.

Предложенія.

Черт. 3. I) Ежели въ кругъ ADF впишется многоугольникъ (ABCDEF); то периметеръ сего многоугольника меньше окружности круга.

Ибо каждая сторона, какъ AB, меньше дуги AB, кою она стягиваетъ (аксіома 1.); и слѣдственно всѣ вмѣстѣ стороны такъ же меньше всѣхъ вмѣстѣ дугъ, то есть цѣлой периметеръ многоугольника меньше окружности круга.

Такъ же точно докажется, что когда и какая ни есть дуга (AD) какъ нибудь раздѣлится, то протянутыя хорды (AB, BC, BD) всѣ вмѣстѣ суть меньше всѣхъ дугъ вмѣстѣ.

Синусъ своей дуги меньше, то есть, когда изъ центра Z протянется ZYX къ AB перпендикулярно, то $AY < AX$. Ибо $AYB\ (2AY) < AXB\ (2AX)$.

II) Ежели около круга (ABCDE) опишется многоугольникъ (MNOPQ); то периметеръ сего многоугольника будетъ больше окружности круга. Черт. 4.

Ибо ломаная линея $AM + BM$ больше дуги AB (аксїома 2), и $BN + CN$ больше дуги BC, и такъ другїя; чего ради периметеръ всей описанной фигуры больше окружности круга.

Подобнымъ образомъ докажется, что когда и дуга какая ни есть какъ нибудь раздѣлится, то описанныя касательныя всѣ вмѣстѣ будутъ больше сея дуги.

Тангенсъ своей дуги больше, а имянно когда протянешъ ZA, ZM, то $AM < AY$. Ибо $AM + BM\ (2AM) > AYB\ (2AY)$.

Сверхъ сихъ предложенїй Архимедъ еще предполагаетъ двѣ леммы, одну изъ 12[й] книги Евклидовыхъ Елементовъ, а другую ту, коя въ его сочиненїи de Circuli dimensione находится (a).

(a) Въ изданїи Барро оной ненаходится, а смотри въ изданїи Валлиса, подъ заглавїемъ: Archimedis Syracusani Arenarius, et Dimensio circuli. Cum versione et Notis Joh. Wallis, Oxonii, 1676.

1) Ежели кругъ больше какой площади, то возможно въ сей кругъ вписать правильной многоугольникъ, которой такъ же будетъ больше той площади.

Черт. 5. Да будетъ кругъ ABCD больше площади E; говорю, что въ него возможно вписать правильной многоугольникъ, которой такъ же будетъ больше площади E.

Пусть избытокъ круга ABCD предъ площадью E есть площадь F, такъ что площадь E съ F купно равны кругу ABCD.

Впишу въ кругъ ABCD квадратъ ABCD, и говорю что оной больше половины круга. Ибо описавъ около полукруга BAD прямоугольникъ BIHD, примѣчаю что оной больше полукруга BAD; и по сему утверждаю, что и половина его, коя равна треугольнику BAD, есть больше половины полукруга; такъ же разсуждая нахожу, что и треугольникъ BCD больше половины полукруга BCD; и такъ цѣлой квадратъ ABCD больше половины круга ABCD.

Дуги AB, BC, CD и проч. раздѣлю пополамъ и протяну AK, KB, BL, CL и проч.; то получу треугольники AKB, BLC и проч., изъ коихъ каждой будетъ больше половины сегмента, въ коемъ онъ вписанъ.

Ибо описавъ прямоугольникъ AOPB около сегмента AKB, примѣчаю, что оной больше сего сегмента, и заключаю, что и половина онаго, то есть треугольникъ AKB, больше половины того же сегмента; такъ же разсуждая, докажу то же и о всѣхъ другихъ треугольникахъ, вписанныхъ въ сегменты. Слѣдовательно всѣ треугольники AKB, BLC и проч. купно суть больше половины сегментовъ, въ кои они вписаны.

И такъ продолжая далѣе оставшіяся дуги раздѣлять пополамъ, и отъ краевъ ихъ протягивать прямыя, получимъ напослѣдокъ нѣкоторые сегменты, кои купно будутъ меньше площади F (смотри вышепредложенное I предл. 10^{й} книги Евклидовыхъ Елементовъ); пусть сегменты, стоящіе на прямыхъ AK, KB, BL. и проч. суть таковые; то за тѣмъ, что они съ многоугольникомъ AKBLCMDN равны кругу, которой равенъ E + F, будетъ мног. AKBLCMDN больше E. Слѣд. и проч.

2) Ежели кругъ меньше какой площади, то возможно описать около сего круга правильной многоугольникъ, который такъ же будетъ меньше той площади. Черт. 6.

Да будетъ кругъ ABCD меньше площади E; говорю, что около круга ABCD возможно описать правильной многоугольникъ, которой такъ же будетъ меньше площади E.

Около круга ABCD опишу квадратъ GHKL и говорю: ежели квадратъ GHKL меньше площади E, то требуемое сдѣлано; естьли же нѣтъ, то пусть избытокъ площади E предъ кругомъ есть площадь F; тогда квадратъ GHKL будетъ больше круга ABCD и площади F купно; отниму общій кругъ ABCD; то остальные вырѣзки ABG, BCH и проч. будутъ больше площади F.

По томъ дуги AB, BC и проч. линеями ωG, ωH и проч. изъ центра въ углы квадрата протянутыми, раздѣлю въ точкахъ M, N и проч. по поламъ, и чрезъ нихъ протянувъ къ кругу касательныя RS, TU и проч. и соединивъ A съ M и M съ B линеями AM, BM, говорю:

Понеже GM перпендикулярна къ RS и MR = AR, то GR > AR и треуг. GMR > треуголь. AMR и > вырѣзка AMR; по тому же и треугольникъ GSM> вырѣзка BSM; и такъ цѣлой треугольникъ RGS больше половины вырѣзка AGB; такъ же докажется, что и каждый изъ треугольниковъ HTU, KVX и проч. больше половины каждаго изъ вырѣзковъ BCH, CDK и проч. Слѣд. всѣ треугольники GRS, HTU, KVX и проч. купно больше половины всѣхъ вырѣзковъ, въ коихъ суть содержимы.

И такъ продолжая далѣе оставшіяся дуги раздѣлять по поламъ и чрезъ точки дѣленія проводить касательныя, получимъ на последокъ нѣкоторыя вырѣзки внѣ круга, кои купно будутъ меньше площади F; пусть вырѣзки AMR, MBS, BNT и проч. суть таковые; то за тѣмъ, что они вмѣстѣ съ кругомъ составляютъ многоуголь. RSTUVXZI, будетъ сей многоугольникъ меньше круга ABCD купно съ площадью F, или (по причинѣ, что кругъ ABGD + площадь F = площади E) меньше площади E. И такъ и проч.

Архимедъ въ сочиненіи своемъ de Sphera et Cylindro симъ Леммамъ предложилъ другое доказательство, которое о способѣ его доказывать всѣ предложенія сего роду, и какимъ образомъ онъ чрезъ предложенную выше пятую аксіому могъ достигнуть толь къ многочисленнымъ и удивительнымъ открытіямъ, гораздо лучшее понятіе подать можетъ; чего ради мы здѣсь оное предложимъ. Но прежде изъ сего Архимедова творенія надлежитъ привести здѣсь слѣдующія предложенія.

III) По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ (A,B), возможно найти двѣ неравныя прямыя, изъ коихъ бы большая къ меньшей имѣла меньшее содержаніе, нежели большая величина (A) къ меньшей (B).

Бери $A-B$ кратно (какъ то N разъ) пока произшедшая величина, кою называю X, не превзойдетъ B; тогда взявъ какую ниесть прямую R и сдѣлавъ $R:S=1:N=A-B:X$, говорю, что $R+S$, S суть линеи искомыя. Ибо по причинѣ, что $B<X$, будетъ $A-B:B>(A-B:X)\ R:S$; откуда чрезъ сложенiе произойдетъ $A:B>R+S:S$.

IV) По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ (A, B) около даннаго круга описать и въ немъ вписать такiе два многоугольника, что бы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее содержанiе, нежели какъ большая величина (A) къ меньшей (B).

Да сдѣлано будетъ $OP:OQ<A:B$, и по описанiи на OP полукруга да вмѣстится OQ и протянется PQ; потомъ да дѣлятся по поламъ окружность $CDEF$, ея половина DCF, половина оной CD, и такъ далѣе, пока уголъ DGK, половина угла DGH, не будетъ равенъ углу ROQ, которой меньше угла POQ, и чрезъ K да протянется касательная до пресѣченiя радiусовъ GD, GH въ точкахъ L, M, и еще линея DH. Явственно, что по причинѣ разсѣченiя по поламъ, прямая LM есть сторона многоугольника, около круга описаннаго, и DH сторона многоугольника вкругъ вписаннаго; и для равенства угловъ DGN, ROQ и по причинѣ прямыхъ GND, OQR треугольники DGN, ROQ подобны; чего ради GD (GK) $:GN=OR:OQ$ и $<OP:OQ$; но $GK:GN=LK:DN=LM:DH$; слѣд. $LM:DH<(OP:OQ<)\ A:B$. Черт. 7.

VI) По даннымъ двумъ не равнымъ величинамъ (A, B) около даннаго круга описать многоугольникъ и въ немъ вписать другой такъ, что бы описанной ко вписанному имѣлъ меньшее содержанiе, нежели какъ большая величина (A) къ меньшей (B).

Да будетъ сдѣлано $X:Z \lesssim A:B$, и между X и Z да возмется средняя пропорціональная Y; тогда около даннаго круга описавъ многоугольникъ и въ немъ вписавъ другой такъ, чтобы сторона перваго къ сторонѣ другаго имѣла меньшее содержаніе, нежели какъ X къ Y, говорю, что требуемое сдѣлано. Ибо, удвоенное содержаніе LM къ DH (то есть содержаніе описанной фигуры ко вписанной) меньше, нежели удвоенное содержаніе X къ Y, то есть содержаніе X къ Z, и оное меньше, нежели содержаніе $A:B$; слѣд. требуемое сдѣлано.

Сіи предложенія достаточны для нашего намѣренія, а по тому обратимся къ оному.

На сей конецъ замѣтимъ, что доказательство выше предложенныхъ лемъ не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ показаніи, что въ данной кругъ возможно вписать, и около даннаго круга возможно описать такой многоугольникъ, котораго разность съ симъ кругомъ будетъ меньше, нежели всякая данная величина, предлагаемъ:

Въ данной кругъ (A) вписать правильной многоугольникъ, чтобы сегменты, на кои кругъ многоугольникъ превосходитъ, купно были меньше данной площади (B).

Барро сему предложенію по способу Архимеда ни рѣшенія ни доказательства не показалъ, но удовольствовался токмо ссылкою на Евклидовы Елементы; однако то и другое мы безъ трудности найти можемъ.

Около даннаго круга A описавъ и въ немъ вписавъ такіе два многоугольника C, I, чтобы содержаніе C къ I было меньше, нежели содержаніе A къ A—B, говорю, что требуемое будетъ сдѣлано. Ибо когда $C : I < A : A - B$, то за тѣмъ, что $A < C$, будетъ $A : I < A : A - B$ и $I > A - B$ или $A - I < B$.

Около даннаго круга A описать правильной многоугольникъ, чтобы сегменты, на кои многоугольникъ кругъ превосходитъ, купно были меньше данной площади B.

Около круга A описавъ и въ немъ вписавъ такіе два многоугольника C, I, чтобы $C : I$ было $< A + B : A$, говорю, что требуемое сдѣлано. Ибо когда по причинѣ, что $A > I$, будетъ $C : A <$ ($C : I <$) $A + B : A$; то чрезъ вычитаніе произойдетъ $C - A : A < B : A$, а по сему будетъ $C - A < B$. Слѣд. требуемое сдѣлано.

На послѣдокъ вотъ какъ Архимедъ доказалъ, что всякой кругъ равенъ треугольнику, у котораго основаніе окружность сего круга, а высота радіусъ его.

Да будетъ кругъ N и треугольникъ QRS, котораго основаніе RS есть окружность круга N, а высота QR радіусъ его; говорю, что кругъ N треугольнику QRS равенъ. Черт. 8.

Ибо естьли не равенъ, то будетъ или больше или меньше.

Когда больше, то въ кругъ N возможно будетъ вписать правильной многоугольникъ ABCDF, которой бы такъ же былъ больше треугольника QRS, или слѣдуя Барро, возможно будетъ вписать такой многоугольникъ ABCDEF, чтобы кругъ N безъ многоугольни. ABCDEF былъ меньше круга N безъ треугольни. QRS, и слѣдственно паки такой многоугольникъ ABCDEF, которой бы былъ больше треугольника QRS. Да впишется таковой многоугольникъ

ABCDEF, то за тѣмъ, что всякой вписанной многоугольникъ равенъ треугольнику, у коего высота перпендикуляръ отъ центра NO, то есть линея, коя меньше радіуса или линеи QR, а основаніе периметръ его, то есть линея, коя меньше окружности круга или линеи RS, сей многоугольникъ ABCDEF есть меньше треугольника QRS. Слѣдовательно, когда положить кругъ N больше треугольника QRS, то возможно будетъ быть части больше цѣлаго; что нелѣпо (absurdum); слѣд. и проч.

Когда же кругъ N меньше треугольника QRS, то возможно будетъ около сего круга описать правильный многоугольникъ GHIKLM, которой бы былъ меньше треугольника QRS, или слѣдуя Барро, возможно будетъ описать такой многоугольникъ GHIKLM, чтобы многоугольникъ GHIKLM безъ круга N былъ меньше треугольника QRS безъ круга N, и слѣдственно паки такой, которой бы былъ меньше треугольника QRS. Да опишется таковой многоугольникъ GHIKLM; то за тѣмъ, что всякой описанной около круга многоугольникъ равенъ треугольнику, у коего высота радіусъ или QR, а основаніе периметръ его, то есть линея, коя больше RS, сей многоугольникъ GHIKLM есть больше треугольника QRS. Слѣдовательно, когда положить кругъ N меньше треугольника QRS, то возможно будетъ быть цѣлому меньше своей части; что нелѣпо; слѣдов. и проч.

И такъ кругъ N не можетъ быть ни больше ни меньше треугольника QRS; слѣдовательно онъ ему равенъ.

Ни чего не можетъ быть остроумнѣе, какъ сей способъ доказательствъ (a); однако не смотря на изящество

(a) Слѣды и весьма примѣтныя сего способа видны и въ Евклидѣ. Смотри XII книгу его Елементовъ.

его весьма важныя причины имѣли и имѣютъ изыскивать другой. Ибо сей, какъ всякой примѣтить можетъ, требуетъ весьма многихъ и длинныхъ доводовъ, а отъ того доказательства, помощію его учиненыя, бываютъ весьма трудны ко уразумѣнію.

Славной д'Аламбертъ въ Енциклопедіи въ членѣ Geometrie относительно сего изъясняется такъ: „Доказа„тельства, кои Архимедъ предложилъ въ сочиненіи сво„емъ о Спиралахъ, хотя въ прочемъ весьма точныя, „столь трудны ко уразумѣнію, что одинъ изъ новыхъ, „ученый Математикъ Буйлодъ, по его собственному при„знанію, никогда ихъ хорошо не понималъ, и что дру„гой съ обширнѣйшимъ умомъ, нашъ знаменитый Віета, „подозрѣвалъ ихъ несправедливо во лжезаключеніи, отъ „не достаточнаго оныхъ уразумѣнія. Смотри еще предисловіе къ Аналитикѣ безконечно малыхъ количествъ Марки де л'Опиталя, стр. VIII и IX, изданіе 1781 году.

Способъ Нютоновъ первыхъ и послѣднихъ содержаній количествъ.

Великій Нютонъ видя сіи неудобства и имѣя отвращеніе къ способу нераздѣлимыхъ, изобрѣлъ способъ первыхъ и послѣднихъ содержаній количествъ (а). Онъ основалъ его на слѣдующей леммѣ.

(а) Смотри въ удивительномъ его твореніи подъ заглавіемъ Philosophiae naturalis principia Mathematica книгу 1, отдѣленіе I, страницу 37, Изданіе 3. — Тутъ онъ говоритъ: „Сіи леммы предложены съ тѣмъ, „чтобы избѣгнуть медлѣнности въ выводѣ длинныхъ доказательствъ „утверждающихъ истинну чрезъ доводъ) къ нелѣпости по спосо-

„Количества и содержанія количествъ, которыя въ „нѣкоторое окончаемое время непрестанно приближаются „къ равенству, и которыя прежде окончанія сего времени „могутъ приближиться одно къ другому ближае, нежели „всякая данная разность, сдѣлаются на послѣдокъ равны.

„Ежели сіе отвергаешь, положи, что на послѣдокъ онѣ „будутъ неравны, и да будетъ послѣдняя ихъ разность „D; то онѣ не будутъ имѣть возможности приближиться „къ равенству ближае, нежели сія данная разность D, что „противно положенію.

Нельзя сказать, чтобы сія лемма по ея предписанію была не доказана: она доказана; но не смотря на то въ Геометріи принята быть не можетъ, для двухъ слѣдующихъ причинъ:

1) По тому, что главнѣйшее обстоятельство, которое сію лемму утверждаетъ, есть опредѣленное время, въ кое положено приближенію совершаться, и въ коемъ Геометерія не имѣетъ ни малѣйшей надобности, ибо какая надобность во времени въ такой наукѣ, гдѣ ничего инаго не тре-

---

„бу древнихъ Геометровъ. Ибо хотя чрезъ способъ нераздѣлимыхъ „доказательства и кратче, однако положеніе нераздѣлимыхъ кажется „нѣкоторымъ образомъ грубо; и того ради сей способъ признанъ не „Геометрическимъ: и я разсудилъ лучше приводить доказательство „слѣдующихъ предложеній къ первымъ и послѣднимъ суммамъ и „содержаніямъ раждающихся и исчезающихъ количествъ, то есть „къ предѣламъ сихъ суммъ и содержаній, и тако предложить, „столь кратко, какъ токмо я могъ, доказательство сихъ предѣ- „ловъ. — И симъ то же совершено, что и чрезъ способъ нераздѣли- „мыхъ; но поелику теперь сіи начала доказаны, то мы можемъ ихъ „употреблять съ большею достовѣрностію.

буется, какъ на очевидныхъ истиннахъ основаннаго доказательства, что такое то количество равно, больше или меньше, нежели *другое*?

2) По тому что въ Геометріи непрестанное приближеніе одного количества къ другому совершается не непрерывно, какъ время теченіе имѣетъ, и какъ въ движеніи бываетъ, но прерывно и такъ сказать по волѣ нашей. Многоугольникъ вписанный въ кругъ или около его описанный чрезъ удвоеніе числа сторонъ его приближается къ сему кругу и притомъ такъ, что разность его съ симъ кругомъ можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая данная величина, но никоимъ образомъ положить не можемъ, чтобы сіе приближеніе долженствовало совершиться въ какое ни есть опредѣленное время. Ибо сколько бы лѣтъ, вѣковъ, мы ни трудилися надъ раздѣленіемъ напольы дугъ стягиваемыхъ сторонами многоугольника, никогда конца не достигнемъ, никогда многоугольникъ кругомъ не сдѣлаемъ. И когда понятія, которыя мы имѣемъ о кругѣ и многоугольникѣ, суть совершенно между собою различны, то кто захочетъ во зло употребить оныя и принять за одно двѣ вещи, различную натуру и свойство имѣющія? (b).

(b) Здѣсь можетъ быть иные непривыкшіе вникать въ подробности вещей подумаютъ, что я чрезъ сіе утверждаю и извѣстную Зенонову Софизьму, противъ движенія имъ предлагаемую; то, дабы вывести таковыхъ изъ заблужденія, разсмотримъ оную.

Зенонъ полагалъ, что за черепахою преслѣдуетъ Ахиллесъ, что Ахиллесъ въ два раза скорѣе идетъ черепахи (*), и что другъ отъ

(*) Обыкновенно говорятъ во сто разъ; но я положилъ въ два раза только для большей ясности.

Сверьх того говорить д' Аламберть, что естьли бы кто захотѣлъ не разсматривать, на примѣръ кругъ, во всемъ его совершенствѣ (и слѣдственно со всею строгостію), тотъ бы для него долженъ былъ изобрѣсти столько же различныхъ теоремъ, сколько взято будетъ различныхъ фигуръ болѣе или менѣе къ совершенному кругу подходящихъ.

друга отстоятъ на одну версту. Между тѣмъ какъ Ахиллесъ перебѣгаетъ версту, черепаха подвинется на $\frac{1}{2}$ версты, и по тому Ахиллесъ черепаху еще не нагонитъ, но надобно ему перебѣжать еще $\frac{1}{2}$ версты, а черепаха между тѣмъ уйдетъ въ передъ на $\frac{1}{4}$ версты; перебѣжавши сію часть, Ахиллесъ еще не нагонитъ черепахи, по тому что она между тѣмъ еще въ передъ подвинется; и понеже сіе приближеніе Ахиллеса прродолжается безконечно, то Зенонъ думалъ, что Ахиллесъ ни когда черепахи не нагонитъ. Но вотъ что Зенону отвѣчать надлежитъ;

Поелику полагаешь, что Ахиллесъ вдвое скоряе движется черепахи, то не посредственно уже въ разсужденіе пріемлешь время; такъ положи же, что Ахиллесъ переходитъ 1 версту въ какое ни есть опредѣленное время, на примѣръ въ 1 минуту; то выдетъ, что черепахою $\frac{1}{2}$ версты перейдена въ туже минуту, что Ахиллесъ еще перейдя $\frac{1}{2}$ версты и черепаха $\frac{1}{4}$ версты, въ продолженіе $\frac{1}{2}$ минуты, перешли отъ начала своихъ движеній $1+\frac{1}{2}$ версты, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ вер. въ продолженіе $1+\frac{1}{2}$ минуты, что Ахиллесъ еще перейдя $\frac{1}{4}$ версты и черепаха $\frac{1}{8}$ вер. въ продолженіе $\frac{1}{4}$ минуты, перешли отъ начала своихъ движеній $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ вер. и $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ версты въ продолженіе $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ минуты, и такъ далѣе. Но что же слѣдуетъ изъ сего? слѣдуетъ ли, что Ахиллесъ ни когда черепахи не нагонитъ? Ни мало; слѣдуетъ токмо, что въ продолженіе $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ и проч. минуты, то есть времени, кое всегда меньше двухъ минутъ, Ахиллесъ черепахи не нагонитъ. И сіе ни мало не странно. По прошествіи же двухъ минутъ онъ ее настижетъ, ибо сіе какъ само по себѣ явственно, такъ и по тому, что когда по прошествіи на примѣръ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ минуты Ахиллесъ перешелъ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ верс., а черепаха $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ версты, то по протеченіи еще $\frac{1}{4}$ минуты Ахиллесъ перейдетъ $\frac{1}{4}$ версты, а черепаха $\frac{1}{8}$ версты и слѣдственно въ концѣ это-

Но не входя въ дальнѣйшія возраженія, прочтемъ то, что говоритъ самъ Нютонъ въ концѣ упомянутаго отдѣленія Математическихъ его началъ естественной Философіи на стран. 38.

„Можетъ быть такъ же будутъ возражать, что есть „ли послѣднія содержанія изчезающихъ количествъ даны, „то послѣднія ихъ величины будутъ такъ же даны, а „такимъ образомъ всѣ количества будутъ состоять изъ „нераздѣлимыхъ; что противно доказанному Евклидомъ „относительно несоизмѣримыхъ количествъ, въ 10й книгѣ „его Елементовъ. Но сіе возраженіе основано на ложномъ „положеніи. Ибо послѣднія содержанія, съ коими количе„ства изчезаютъ, не суть дѣйствительно содержанія по„слѣднихъ количествъ, но суть предѣлы, къ коимъ содер„жанія безпредѣльно убывающихъ количествъ всегда при„ближаются, приближаются ближае, нежели всякая данная „разность, но никогда не преходятъ, ниже въ самомъ дѣ„лѣ достигаютъ, пока количества не уменьшены будутъ „до безконечности (in infinitum).

И вотъ Нютонъ самъ отвергнулъ употребленіе предложенной выше своей леммы въ Геометріи, ибо сказать:

рой версты онъ съ нею будетъ находиться вмѣстѣ. И вотъ Зенонова Софизьма испровергнута, не принимая безконечностей и не полагая, чтобы рядъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ и проч. могъ когда нибудь учиниться числомъ 2.

Послѣ толикой простоты и удобности, я не могу себѣ представить, въ чемъ затруднялся г. де ла Кайлль сказавъ сіи слова: l'existence meme du mouvement seroit encore un probleme, si on s'etoit arrêté aux dificultés que Zénon proposoit autrefois pour la combatre. Смотри страницу 430 его сочиненія подъ заглавіемъ: Leçons Elementaires de Mathematiques, nouvelle Edition par M. l'Abbè Marie.

никогда не преходятъ, ниже въ самомъ дѣлѣ достигаютъ, пока количества не уменьшены будутъ до безконечности, то же значитъ, по моему уму, что и сказать: никогда не преходятъ, ниже въ самомъ дѣлѣ достигаютъ, сколько бы количества уменшаемы ни были; что противно смыслу заключающемуся въ упомянутой леммѣ.

Способъ изтощенія.

Изъ сего Нютонова способа первыхъ и послѣднихъ содержаній произошелъ способъ извѣстный подъ именемъ *способа изтощенія* (de la methode d'exhaustion).

Г. Аббатъ Де ла Шапель въ Енциклопедіи въ членѣ Exhaustion говоритъ, что оной состоитъ въ доказательствѣ равенства двухъ величинъ, показуя, что ихъ разность есть меньше, нежели всякая величина, означеніе имѣющая, и для доказательства сего употребляя доводъ къ нелѣпости.

Причина же, для которой оной называется способомъ изтощенія, не есть доводъ къ нелѣпости, но та, что разность сія означена быть не можетъ, и что чрезъ сдѣланіе ея меньше и меньше такъ сказать она совсѣмъ истощевается.

Г. де ла Шапель говоритъ еще, что сей способъ въ великомъ употребленіи былъ у древнихъ, какъ то Евклида, Архимеда и проч. и что онъ основанъ на сей теоремѣ 10й книги Евклидовыхъ елементовъ: количества суть „равны, когда ихъ разность есть меньше, нежели всякая „означеніе имѣющая величина; ибо естьли бы онѣ были не „равны, то бы ихъ разность могла быть означена; что противно положенію. Но вотъ человѣкъ, которой самъ противъ воли своей признался, что онъ сочиненій древнихъ вовсе не читалъ, ибо способъ древнихъ доказывать сего роду предложенія, какъ то выше видѣли, совсѣмъ не таковъ, и теорема, о которой онъ говоритъ, не Евклидова, но недостаточно имъ предложенная Нютонова лемма, ибо сей послѣдній присовокупляетъ время, какъ единое обстоятельство, кое оную утвердить можетъ. — Между тѣмъ надобно думать, что Аббатъ де ла Шапель былъ столь невыгодно для себя признателенъ отъ излишняго надѣянія на слова другаго Свѣтскаго де ла Шапеля, которой по той же причинѣ, какъ и первый, способъ истощенія назвалъ способомъ древнихъ. — Смотри упомянутаго его сочиненія книги IV главу IV, стран. 343 и слѣдующія.

И вотъ для чего во изъясненіи способа древнихъ Геометровъ мы принуждены были нѣсколько распространиться.

И къ сему еще больше мы убѣждены были, когда увидѣли, что одинъ и изъ знаменитѣйшихъ нынѣшняго вѣка Геометровъ Г. Боссю разсказывая о изобрѣтеніяхъ въ Геометріи древнихъ, погрѣшилъ противу истинны. — Вотъ слова его: (Euclide ne donne aucun moyen de comparer la surface du cercle avec celle d'une figure rectiligne.) Il demontre bien à la veritè que les circonferences des differents cercles sont entr' elles comme leurs raions; &c. Пусть читатель пересмотритъ всѣ изданія Евклида, я увѣренъ, что онъ ни въ которомъ не найдетъ сего предложенія, въ коемъ бы было доказано равенство содержаній діаметровъ двухъ круговъ съ ихъ окружностями (a). — И естьли сіе предложеніе съ надле-

(a) Я разумѣю здѣсь тѣ изданія, въ коихъ удержаны слова и смыслъ Евклидовы, а не тѣ, въ коихъ удержано одно только заглавіе сего творенія.

жащею точностію можно доказать токмо, или чрезъ посредство предложенія Евклидомъ дѣйствительно доказаннаго, что площади круговъ суть такъ, какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ, и чрезъ посредство предложенія Архимедова, послику кругъ равенъ треугольнику, у коего радіусъ его высота, а окружность основаніе, или непосредственно чрезъ слѣдующую лемму: разность между периметрами двухъ многоугольниковъ въ кругъ вписаннаго, и около его описаннаго, можетъ быть сдѣлана меньше, нежели всякая данная величина; то за тѣмъ, что Архимедъ жилъ послѣ Евклида и что упомянутой леммы въ Елементахъ Евклида не содержится, нашъ славный ученый долженъ по крайней мѣрѣ признаться въ своей ошибкѣ.

Способъ предѣловъ и исправленіе его.

Новые Геометры давно уже замѣтили, что способъ Архимедовъ доказательствъ не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ слѣдующей истинѣ, что когда возрастающая или убывающая величина имѣетъ два предѣла, то оные равны между собою. Между прочими учинилъ сіе Маклоренъ въ введеніи къ упомянутому его сочиненію A Treatiſe of fluxions (a); но онъ употребивъ для сего доказательство точно то самое, кое Архимедъ прилагалъ при каждомъ предложеніи, принималъ въ разсужденіе не одну возрастающую или убывающую величину, но обѣ оныя, между собою предѣлъ содержащія, купно (b); и кажется не предусматри-

---

(a) Смотри стр. X и XI.

(b) Понеже когда предѣлъ не всегда можетъ содержаться между двумя, возрастающею и убывающею, величинами, какъ кругъ между вписаннымъ и описаннымъ многоугольниками; то само по себѣ слѣвалъ всей важности, каковая въ сей истинѣ заключается, посълику славному д'Аламберту предоставилъ чрезъ оную положить съ толикою удобностію начало точному дифференціальнаго вычисленія доказательству. Смотри въ Енциклопедіи слово differentiel.

Вотъ какъ д'Аламбертъ тутъ сію истинну доказываетъ: „Да будутъ Z и X предѣлы одного количества Y, говорю, что $X = Z$; ибо естьли имѣется между ими „какая разность V, то да будетъ $X = Z \pm V$; поелику по „положенію количество Y можетъ приближиться къ X „столь близко, какъ захочешь; то за тѣмъ, что Z разнится отъ X на количество V, слѣдуетъ, что Y не можетъ „приближиться къ Z ближе, нежели количество V и что „слѣдственно Z не есть предѣлъ количества Y; что противно положенію.

Принявъ сію истинну д'Аламбертъ въ членѣ Géometrie, дабы доказать, что кругъ равенъ треугольнику, у коего основаніе окружность сего круга, а высота радїусъ его, дѣлаетъ слѣдующее предписаніе.

„Надлежитъ для сего токмо показать, что произве„деніе окружности чрезъ половину радїуса есть предѣлъ „площади многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ; и „поелику площадь круга, какъ то явственно, есть также „таковой предѣлъ; то слѣдуетъ, что площадь круга „есть произведеніе окружности чрезъ половину радїуса и „проч.

дуетъ, что чрезъ принятїе одной токмо возрастающей или убывающей величины, тотъ же способъ несравненно обширнѣйшее употребленіе имѣть долженъ будетъ.

И Г. Кузенъ въ упомянутомъ своемъ сочиненіи сіе выполнилъ. Смотри стр. 84 и слѣдующія. „Пусть, говоритъ онъ тутъ, x сторона правильнаго многоугольника „вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ r, и n число сторонъ многоугольника; то $\frac{nx}{r}$ будетъ содержаніе периметра сего многоугольника къ радіусу. Чѣмъ n будетъ увеличиваться, тѣмъ $\frac{nx}{r}$ будетъ болѣе приближаться къ содержанію окружности круга къ радіусу, ни когда однакожъ онаго не достигнувъ; чего ради сіе второе содержаніе есть предѣлъ перваго. Впредь мы будемъ называть „π содержаніемъ полуокружности круга къ радіусу, и потому $2\pi r$ изобразитъ всегда окружность, коея радіусъ есть r.

Потомъ означимъ чрезъ u высоту сегментовъ оставшихся отъ круга, коего радіусъ r, чрезъ вписаніе правильнаго многоугольника, продолжаетъ „получимъ площади онаго $\frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$; и по елику чѣмъ u болѣе убываетъ, тѣмъ сіе выраженіе болѣе приближается къ „равенству съ πr^2, то явствуетъ, что оное второе „выраженіе есть предѣлъ перваго; но кругъ есть такъ же „предѣлъ всѣхъ вписанныхъ многоугольниковъ; слѣдовательно онъ равенъ πr^2.

Подобнымъ образомъ Кузенъ доказываетъ другія предложенія сего роду, и въ заключеніе оныхъ говоритъ: „Таковъ есть, я думаю, простѣйшій и строжайшій способъ доказывать сіи первоначальныя предложенія„. Сіи слова во второмъ изданіи выпущены, и я думаю причиною тому Г. Лежандръ, о Геометріи и способѣ котораго мы будемъ имѣть случай говорить въ концѣ сего отдѣленія.

И такимъ образомъ произошелъ и разпространился такъ называемой способъ предѣловъ, тотъ способъ, которой всѣ вышереченные замѣнить долженствуетъ.

Но вотъ что противъ распространителей онаго способа въ пользу истинны мы говорить имѣемъ (a):

1) Д' Аламбертъ и послѣ его Кузенъ опредѣливъ предѣлъ количествомъ, къ коему другое можетъ приближиться столь близко, какъ захочешь, сирѣчь такъ, что разность ихъ толь мала быть можетъ, какъ хочешь, не ясно выразили то, что они сказать намѣрены были, ибо чрезъ слова: *разность ихъ толь мала быть можетъ, какъ хочешь*, можно разумѣть какъ то, что оная разность въ малости своей границъ не имѣетъ, такъ и то, что можетъ быть равна такой малой величинѣ, какую взять захочешь; что не всегда возможно; такъ на примѣръ въ кругъ не возможно вписать или около его описать такой многоугольникъ, коего бы разность съ симъ кругомъ была равна такой величинѣ, какую взять захочешь, какъ на примѣръ нѣкоей опредѣленной доли круга (b).

(a) Я называю д' Аламберта и Кузена разпространителями способа предѣловъ, по тому что они первые, которые оной приложили къ доказательству Дифференціальнаго вычисленія и всей трансцендентной Геометріи. Смотри Discours preliminaire къ упомянутому сочиненю Г. Кузена, стран. VI.

(b) По всякому сочиненію д' Аламберта заключить можно, что онъ былъ человѣкъ весьма тщательный и точность весьма любящій, и потому безъ сомнѣнія сіе опредѣленіе перемѣнить не преминулъ бы на совершенно ясное, естьли бы онъ писалъ о семъ предметѣ сочиненіе систематическое со всею подробностію. Въ членѣ Limite, коего авторъ упомянутой выше Аббатъ де ла Шапель, д' Аламбертъ видя грубое понятіе, подъ коимъ оной слово сіе разумѣетъ, не преминулъ присовокупить сіи слова: „Есть ли по точности говорить, то предѣлъ ни когда не соединится, или ни когда не будетъ равенъ тому количеству, коего

2) Д' Аламбертъ и Кузенъ не чинивъ ни какихъ доводовъ и доказательствъ, что такое то количество есть предѣлъ другому, напримѣръ, что кругъ есть предѣлъ многоугольникамъ въ него вписаннымъ или около его описанныхъ, погрѣшили противъ строгости и точности, а другїе имъ послѣдующїе, могутъ погрѣшить и противъ истинны. И безъ сомнѣнїя отъ сего произошло, что самъ д' Аламбертъ въ членѣ Differentiel достигъ уравненїя $\frac{0}{0} = \frac{a}{2y}$, кое уму по словамъ самаго его ни какого чистаго понятїя не представляетъ.

3) Кузенъ полагаетъ содержанїе окружности круга къ радїусу предѣломъ содержанїя периметра вписаннаго въ оной кругъ многоугольника къ тому же радїусу, когда доказано уже, что сего перваго содержанїя нѣтъ и не существуетъ. Да и второе содержанїе въ одномъ только случаѣ на вѣрное существующимъ предполагать возможно, а именно, когда сей многоугольникъ есть шестиугольной; въ прочихъ же случаяхъ периметры съ радїусомъ несоизмѣримы и слѣдственно такїе, кои содержанїя къ нему не имѣютъ. И естьли чрезъ содержанїе разумѣть частное, слѣдуя во опредѣленїи дѣленїя Декарту и Нютону, то и тогда Кузенъ правъ не будетъ, ибо надлежитъ доказать, а не принять, что π есть предѣлъ $\frac{nx}{2r}$.

4) И пусть будетъ доказано, что π есть предѣлъ $\frac{nx}{2r}$, то надлежитъ Кузену доказать еще, почему произведе-

---

„онъ предѣлъ; но только сїе послѣднее количество приближается „къ нему всегда болѣе и болѣе, и можетъ разниться столь мало, „какъ хочешь. Кругъ, на примѣръ, есть предѣлъ вписаннымъ и „описаннымъ многоугольникамъ, за тѣмъ что онъ ни когда по „строгости съ ними не соединится, хотя сїи многоугольники могутъ къ нему приближаться безконечно.„

ніе $\frac{\pi x}{2r}.(r^2 - r u)$ имѣетъ предѣломъ произведеніе предѣловъ π и r^2.

5) Д'Аламбертъ въ упомянутомъ членѣ Géometrie Енциклопедіи именно говоритъ, чтобы Алгебры въ Елементахъ Геометріи не употреблять, ибо, по словамъ его, „вычисленіе Алгебраическое не облегчаетъ ни сколько Елементовъ Геометріи, и слѣдовательно въ оные войти не „должно„; но сей Кузеневъ способъ доказательствъ, какъ то явственно, основанъ на Алгебрѣ. И безъ сомнѣнія оный способъ причиною, что Г. Лежандръ положивъ числительныя правила способа предѣловъ нужными для Елементовъ Геометріи и найдя ихъ паче предметомъ Алгебры, нежели предметомъ Геометріи, не употребилъ способа предѣловъ въ своихъ Елементахъ, между тѣмъ какъ Елементы Алгебры предположилъ онымъ. Смотри стран. VII и XI его предисловія. Мы увидимъ ниже, что употребленный Лежандромъ способъ не разнится отъ способа предѣловъ, разсматриваемаго отъ самаго его основанія, какъ только тѣмъ, что первый есть частный, а послѣдній всеобщій; и естьли способъ Лежандровъ привести во всеобщность, то обратится, такъ какъ и способъ Архимедовъ, въ способъ предѣловъ; что ниже дѣйствительно и показать постараемся.

И такъ дабы избѣгнуть всякихъ возраженій, мы здѣсь долженствуемъ: 1) перемѣнить опредѣленіе предѣлу на такое, въ коемъ бы ни не возможности, ни двоякаго смыслу не заключалося, 2) чинить всегда доказательство, когда скажемъ, что такое то количество есть предѣлъ другому, и наконецъ 3) въ первоначальной Геометріи отнюдь не употреблять числительной науки. И такъ:

Опредѣленіе.

Естьли какая нибудь величина отъ какого нибудь извѣстнаго безъ конца продолжаться могущаго дѣйствія всегда возрастаетъ или убываетъ, и отъ того къ другой непремѣнной величинѣ приближается, такъ что можетъ разнится съ нею меньше, нежели всякая по произволенію данная или взятая того же роду величина, и со всѣмъ тѣмъ никогда ея не достигаетъ; то сія другая непремѣнная величина есть то, что предѣломъ первой (возрастающей или убывающей величины) мы называемъ. (a)

(a) Здѣсь крайне остерегаться надлежитъ, чтобы изъ сказанныхъ сокращенно сихъ словъ „*можетъ разнится съ нею меньше, нежели всякая по произволенію взятая величина*„ не заключить, что во опредѣленіи семъ предполагается разность наименьшая изъ всѣхъ возможныхъ величинъ; ибо чрезъ нихъ тутъ разумѣется только, что оная разность можетъ быть учинена меньше, нежели всякая такая величина, которая по произволенію взята или дана будетъ, и слѣдственно предполагается не величина разности, но одна только возможность сдѣлать сію разность меньше такой величины, какую взять захочешъ. При случаѣ сего замѣчанія мнѣ пришло на мысль сдѣлать другое, на произхожденіе безконечныхъ количествъ приемлемыхъ новыми Геометрами.

Опредѣленіе самое симъ количествамъ, поколику по оному онѣ суть наибольшія или наименьшія величины изъ всѣхъ возможныхъ, показываетъ, что онѣ не иное что, какъ худо выразумленныя сіи два начала пріемлемыя Древними Геометрами: количество можно увеличить такъ, что оно превзойдетъ всякое данное, и можно уменьшить его такъ, что оно сдѣлается меньше всякаго даннаго. Древніе пріемля сіи начала, не принимали какъ одну только безконечность въ дѣйствіи, при увеличиваніи и уменьшеніи количествъ бываемую, безконечность ясную и умомъ постигаемую; но новые не довольны будучи сею безконечностію, положили, какъ увеличиванію, такъ и уменьшенію конецъ, и тако произвели свои самыя наибольшія и самыя наименьшія количества, наименовавъ ихъ безконечно великими и безконечно малыми, которыхъ умъ никоимъ образомъ постигнуть не можетъ. Послѣ же примѣчая, что при без-

Здѣсь само по себѣ видно, что въ случаѣ возрастающей величины предѣлъ полагается больше сей величины, а въ случаѣ убывающей предѣлъ меньше оной величины. Ибо въ противномъ случаѣ ни та ни другая не могла бы приближаться къ своему предѣлу, но напротивъ отъ онаго отдаляться бы долженствовала.

И положивъ сïе, выше предложенную основательную истинну способа предѣловъ мы такимъ образомъ доказать имѣемъ.

Пусть X величина возрастающая и A, B два ея предѣла, то буде оные не равны между собою, одинъ другаго долженъ быть больше. Пусть A больше B на нѣкоторое непремѣнное количество D, поелику A и B суть количества непремѣнныя; то будетъ $A = B + D$. Понеже X всегда меньше B, то разность X съ $B + D$ не можетъ сдѣлаться меньше D, и слѣдственно не можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенïю данной величины; и понеже $B + D = A$, то и разность X съ A не можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенïю данной величины, и A не есть предѣлъ величины X; что противно положенïю; слѣд. и проч.

конечно малой или самой наименьшей хордѣ синусъ верзусъ долженъ быть столько же малъ въ сравненïи хорды, сколько хорда въ сравненïи дïаметра, принуждены были изъ самыхъ наименьшихъ количествъ произвести наименьшïя вторыя, и такъ далѣ; равнымъ образомъ изъ самыхъ наибольшихъ, наибольшïя вторыя, и такъ далѣ; а такимъ образомъ, что сдѣлали новые Геометры? Отвергнули ясную и умомъ постигаемую безконечность въ дѣйствïи, при увеличиванïи и уменьшенïи количествъ бываемую, и вмѣсто оной приняли другую темнѣйшую и умомъ со всѣмъ не постигаемую.

Пусть X величина убывающая и A, B два ея предѣла, что буде оные не равны между собою, одинъ другаго меньше; пусть A меньше B на нѣкоторое непремѣнное количество D, поелику A и B суть количества непремѣнныя; то будетъ $A = B - D$. Понеже X всегда больше B, то разность X съ $B - D$ не можетъ сдѣлаться меньше D, и слѣдственно не можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины; и понеже $B - D = A$, то и разность X съ A не можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины, и A не есть предѣлъ величины X; что противно положенію; слѣд. и проч. (a)

(a) Естьли кто сіи доказательства будетъ разсматривать логически, тотъ увидитъ ясно, что онѣ не въ иномъ чѣмъ состоятъ, какъ: 1) въ положеніи возможности сдѣлать разность X съ A и B меньше всякой по произволенію данной величины, 2) въ уничтоженіи сея возможности, когда положится A не равно B, и 3) въ заключеніи изъ того, что $A = B$.

Сверхъ того замѣтимъ еще, что въ доказательства сіи не посредственно входятъ всѣ три упомянутыя во опредѣленіи предѣлу обстоятельства, а имянно: 1) чтобы предѣлы A и B были данныя или непремѣнныя величины, 2) чтобы разность ихъ съ возрастающею или убывающею безъ конца величиною X могла быть сдѣлана меньше, нежели всякая величина, которая по произволенію дана будетъ, и 3) чтобы оная величина X никогда до предѣловъ A и B достигнуть не могла. Въ самомъ дѣлѣ; естьли отнимешь одно которое нибудь изъ сихъ обстоятельствъ отъ обоихъ предѣловъ A и B или отъ одного котораго нибудь изъ нихъ, то никоимъ образомъ доказать не можно будетъ, что A равно B. На примѣръ, естьли отъимемъ последнее обстоятельство отъ предѣла B; то въ первомъ доказательствѣ, гдѣ было $A = B + D$, не льзя будетъ сказать, что *разность X съ $B + D$ не можетъ сдѣлаться меньше D, и слѣдственно меньше всякой по произволенію данной величины*, ибо когда отъемлется, что X до B не можетъ достигнуть, то X до B достигнетъ, и какъ X возрастаетъ безъ

Оба сіи случая еще иначе доказать можемъ: Положимъ, что X величина возрастающая и что $A > B$ на D, такъ что $A - B = D$; то, поелику X съ A можетъ имѣть разность меньше, нежели всякое по произволенію данное количество, да сдѣлается $A - X < D$ и слѣдственно $<$ такъ же и $A - B$; откуда выдетъ, что $X > B$; что не возможно; слѣд. и проч.

Положимъ теперь, что X величина убывающая и что $A > B$ на D, такъ что $A - B = D$; то поелику X съ B можетъ имѣть разность меньше, нежели всякое по произволенію данное количество, да сдѣлается $X - B < D (= A - B)$; откуда выдетъ, что $X < A$; что невозможно; слѣд. и проч.

Примѣчаніе 1.

Ясно видно, что сіе доказательство есть не иное что, какъ точный переводъ того, которое употребилъ Архимедъ при утвержденіи равенства круга съ извѣстнымъ треугольникомъ.

конца, то X сдѣлавшись $= B$, послѣ превзойдетъ B; и тогда ничего противнаго положенію не выдетъ.

Такъ же, естьли тоже обстоятельство въ томъ же доказательствѣ отъимемъ отъ предѣла A, а у предѣла B удержимъ, то справедливо, выдетъ сперва противное положенію, и изъ того слѣдуетъ, что A не можетъ быть больше B; но за тѣмъ, что для различности обстоятельствъ сопровождающихъ предѣлы A и B, сего недовольно, дабы заключить, что $A = B$, надлежитъ положить еще $A < B$ или $B > A$; и тогда, какъ и въ первомъ случаѣ, ничего противнаго положенію уже не выдетъ.

Примѣчаніе 2.

Для большей ясности читатель вмѣсто буквъ A, B и X въ томъ и семъ доказательствѣ, долженъ употребить линеи, и производить съ ними тѣже разсужденія, какія мы учинили съ буквами.

Сверьхъ сей истинны, тако нами утвержденной, имѣется еще другая, къ пропорціональнымъ величинамъ относящаяся, на коихъ способъ предѣловъ наипаче основанъ; мы ихъ будемъ называть *основательными истиннами способа предѣловъ.* И поелику вторая изъ сихъ истиннъ, какъ основанная на Теоріи величинъ пропорціональныхъ, здѣсь мѣста занять не можетъ, то ничего болѣе не останется намъ, какъ прилагать первую основательную истинну къ доказательству перваго роду первоначальной Геометріи предложеній.

Предложеніе I.

Всякой кругъ равенъ треугольнику, коего основаніе окружность круга, а высота радіусъ его.

Доказательство.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ знать слѣдующія леммы.

1) Всякой правильной многоугольникъ равенъ треугольнику, у коего основаніе периметеръ сего многоугольника, а высота перпендикуляръ отъ центра онаго.

2) Периметеръ вписаннаго въ кругъ многоугольника меньше, а периметеръ описаннаго около круга многоугольника больше, нежели окружность круга.

Архимедъ сїю лемму основалъ на первыхъ двухъ своихъ аксїомахъ, но сїи аксїомы не имѣютъ той ясности, которая уничтожаетъ всякое сомнѣнїе; по чему мы ихъ здѣсь, по крайней мѣрѣ относительно сея леммы, приведемъ къ понятїямъ наипростѣйшимъ, какъ токмо возможно будетъ. И такъ сначала замѣтимъ слѣдующїя двѣ истинны.

а) Естьли какая нибудь величина возрастаетъ и приближается къ другой непремѣнной; она должна быть меньше сей непремѣнной, ибо въ противномъ случаѣ она отъ сей непремѣнной отдаляться бы долженствовала.

Б) Но есть ли величина убываетъ и приближается къ другой непремѣнной; она должна быть больше сей непремѣнной, ибо въ противномъ случаѣ она отъ сей непремѣнной отдаляться бы долженствовала.

По томъ прибѣгнемъ къ правилу наложенїя, какъ главному началу и источнику нашихъ въ Геометрїи познанїй:

Поелику чрезъ совершенное закрытїе положенныхъ линей и поверхностей одной на другую, мы удостовѣрены бываемъ о равенствѣ сихъ протяженностей, то само по себѣ слѣдуетъ, что чѣмъ какїя изъ сихъ протяженностей ближае приходятъ къ сему состоянїю, тѣмъ разность между ими должна становиться меньше, и слѣдственно одна къ другой изъ нихъ тѣмъ болѣе приближаться долженствуетъ; чего ради дабы уразумѣть истинну упомянутыхъ аксїомъ въ ограниченномъ нами смыслѣ, ничего болѣе не требуется, по причинѣ приведенныхъ предъ симъ двухъ истиннъ, какъ показать, что чрезъ извѣстное безъ конца продолжаться могущее дѣйствїе ломаная линея вписуемая въ дугѣ возрастаетъ, а ломаная около дуги описуемая убываетъ, и что та и другая къ состоянію закрыть дугу ближе и ближе приходитъ. И такъ:

Черт. 9. aa) Пусть AB сторона какого ниесть многоугольника въ кругъ вписаннаго, и ACB соотвѣтственная оной дуга; изъ центра E опусти на AB перпендикуляръ EF, и протяни AC, CB; получишь ломаную ACB, коя для 20 предл. первой книги Евклид. Елемен. будетъ больше AB. Опусти еще на AC и CB перпендикуляры EG, EH, и протяни AK, KC, CL, LB; получишь другую ломаную AKCLB, коя для той же причины будетъ больше ломаной ACB. И такъ продолжая далѣе, найдешь, что ломаная линея въ дугѣ чрезъ сіе безконечное дѣйствіе вписуемая всегда возрастаетъ. Но возрастая, она приближается къ состоянію закрыть дугу, ибо (по причинѣ что EG > EF) KG < CF. Слѣдовательно, для предложеннаго предъ симъ, будетъ и проч.

Черт. 10. bb) Пусть AD, BD двѣ половины двухъ сторонъ описаннаго около круга многоугольника и ACB соотвѣтственная имъ дуга; изъ центра E протяни въ общее пресѣченіе D сихъ половинъ прямую ED и проведи касательную FCG; получишь ломаную AFCGB, коя, для упомянутаго Евклидова предложенія, будетъ меньше ломаной ADB; и такъ продолжая далѣе, найдешь, что ломаная около дуги чрезъ сіе безконечное дѣйствіе описуемая всегда убываетъ. Но убывая, она приближается къ состоянію закрыть дугу ACB, ибо (по причинѣ, что ED > EF) HF < CD. Слѣдовательно, для предложеннаго предъ симъ, будетъ и проч. (a).

(a) Г. Лежандръ принявъ первую изъ приведенныхъ выше и здѣсь въ ограниченномъ смыслѣ доказанныхъ Архимедовыхъ аксіомъ за опредѣленіе линеи прямой, впадаетъ при общемъ доказательствѣ

Изъ предложенныхъ сихъ двухъ леммъ слѣдуетъ, что многоугольникъ вписанный въ кругъ меньше, а многоугольникъ описанный около круга больше, нежели треугольникъ, у коего высота радiусъ, а основанiе окружность сего круга.

второй въ то неудобство, что оная первая, на которой сiе доказательство основано, прiемлемая какъ опредѣленiе, подвержена сему возраженiю: „откуда извѣстно, что отъ точки къ другой не „имѣется, какъ одинъ токмо путь кратчайшiй? Для чего не могли бы быть многiе, всѣ различные, всѣ равные и всѣ кратчайшiе? Смотри д' Алабертова сочиненiя подъ заглавiемъ, Melange de literature, томъ V, стран. 205. — Наше доказательство хотя учинено и въ ограниченномъ смыслѣ, однако не подвержено ни какому неудобству; и здѣсь для нашего намѣренiя не нужны сiи аксiомы, какъ въ семъ ограниченномъ смыслѣ. Въ общемъ же смыслѣ онѣ паче полезны для Геометрiи криволинейной, гдѣ и общее доказательство удобно получить могутъ.

Между тѣмъ и въ первоначальной Геометрiи нужно доказать, почему изъ двухъ дугъ круга, имѣющихъ общую хорду меньшая есть та, которая содержится между другою дугою и хордою, ибо на семъ основано доказательство слѣдующаго предложенiя: между двумя точками на поверхности шара находящимися дуга большаго круга есть кратчайшее между ими разстоянiе. И такъ учинимъ сему доказательство.

Пусть DAE, DaE двѣ дуги имѣющiя общую хорду DE; изъ средины B на хордѣ DE вставь перпендикуляръ aABcC, сыщи центры дугъ C, c, проведи CE, cE, и протяни къ дугамъ въ E касательныя pE, qE, отъ угла acE возми такую частную величину HcE, что бы половина оной zcE была меньше угла cEC и слѣдственно такъ же меньше угла pEq; и на конецъ въ дугѣ DaE впиши, а около дуги DAE опиши ломаныя DGaHE, DKQLAMPNE соотвѣтственныя сему частному взятiю: вторая изъ нихъ будетъ содержаться между первою и хордою DE; въ чемъ удобно всякой удостовѣриться можетъ; и по тому первая будетъ больше второй; что съ помощiю упомянутаго 20 Евклидова предложенiя подражая 21 му всякой доказать можетъ; но по доказанному выше дуга DaE > лом. DGaHE, и ломан. DKLAMNE > дуг. DAE; слѣд. и проч. Черт. II.

3) Разность между вписаннымъ въ кругъ и описаннымъ около него многоугольниками чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ можетъ учинена быть меньше, нежели всякая по произволенїю данная или предложенная того же роду величина.

Сїе предложенїе можетъ быть выведено и изъ одного правила наложенїя и изъ правила наложенїя соединеннаго съ теорїею величинъ пропорцїональныхъ; и такъ мы долженствуемъ ему предложить два доказательства.

a) Около круга O опиши и въ него впиши два одинакаго числа сторонъ правильные многоугольника EFGH, Черт. 12
ABCD; ихъ разность будетъ треугольники ABE, BFC, CGD, ADH. По томъ протянувъ OE, OF, OG, OH, въ точкахъ K, L, M, N, въ коихъ дуги AB, BC, CD, DA, сими протянутыми линеями разсѣкаются пополамъ, проведи къ кругу касательныя QKP, RLS, TMV, XNY и соединяющїя линеи AK, KB, BL, CL, CM, DM, DN, AN; получишь другїе два правильные многоугольника QPRSTVXY, AKBLCMDN, кои противъ первыхъ двойное число сторонъ имѣютъ, и коихъ разность, то есть треугольники AQK, KPB, BRL, LSC, CTM, MVD, DXN, NYA, меньше, нежели половина разности первыхъ многоугольниковъ, то есть треугольниковъ ABE, BFC, CGD, DHA. Ибо, когда на примѣръ треугол. AKB $> \frac{1}{2}$ трапец. AQPB, и треу. QEP $> \frac{1}{2}$ треуг. QEP, то треуг. AKB + треуг. QEP $> \frac{1}{2}$ трапец. AQPB $+ \frac{1}{2}$ треуг. QEP, то есть $> \frac{1}{2}$ треуг. AEB; и дабы получить треугольники AQK, KPB, надлежитъ отъ треуг. ABE отнять треуг. AKB + треуг. QEP, то есть величину, коя $> \frac{1}{2}$ треуг. ABE; тоже и такъ же докажется въ прочихъ углахъ; слѣдовательно разность описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ убываетъ болѣе, нежели на половину. Но ког-

да количество уменьшается болѣе, нежели на половину, то оно можетъ учиниться меньше всякаго, какое по произволенію предложено или дано будетъ. Слѣдовательно чрезъ удвоеніе числа сторонъ и проч.

b) Второе доказательство требуетъ слѣдующей леммы:

Разность между перпендикуляромъ отъ центра вписаннаго въ кругъ многоугольника и радіусомъ круга, или все то же перпендикуляромъ отъ центра описаннаго около круга многоугольника, чрезъ удвоеніе числа сторонъ сихъ многоугольниковъ убываетъ болѣе, нежели на половину, и слѣдственно можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая данная величина.

Ибо, пусть AB сторона вписаннаго въ кругъ многоугольника, CD перпендикуляръ отъ центра онаго; DE будетъ разность между радіусомъ CE и перпендикуляромъ CD. Протяни AE, и изъ центра C опусти на оную перпендикуляръ CH; будетъ AE сторона другаго вписаннаго въ кругъ многоугольника, которой противъ перваго двойное число сторонъ имѣетъ, CH перпендикуляръ отъ центра онаго, и HG разность между радіусомъ и симъ перпендикуляромъ. Я говорю, что сія разность HG менѣе половины первой DE. Ибо, изъ H протяни HF параллельно CE, изъ C радіусомъ CD опиши дугу DK; будетъ $KG = DE$, $HF = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} KG$; а по сему HN и тѣмъ паче $HK > \frac{1}{2} KG \left(= \frac{1}{2} DE\right)$; слѣдовательно остальная $HG < \frac{1}{2} DE$, и слѣдовательно и проч. Черт. 13.

Теперь пусть M описанной около круга правильной многоугольникъ и m такой же вписанной, и D данная величина, которой разность M — m надлежитъ сдѣлать меньше. Положи еще, что C площадь круга, r радіусъ и u перпендикуляръ отъ центра вписаннаго многоугольника. Возми отъ C такую частную величину $\frac{C}{n}$, что бы оная была меньше D, и сыщи третью пропорціональную z къ r и u, такъ чтобы было $r : u = u : z$; я говорю, что естьли разность $r - u$ меньше половины толико же частной величины $\frac{z}{n}$ сей третей пропорціональной z, то требуемое сдѣлано.

Въ самомъ дѣлѣ, поелику многоугольники M, m суть въ удвоенномъ содержаніи линей r, u, то будетъ $M : m = r : z$, и $M - m : \frac{m}{n} = r - z : \frac{z}{n}$; и какъ, по причинѣ что $r - u : u - z = r : u$ и что $u < r$, $u - z < r - u < \frac{1}{2}\frac{z}{n}$, то выдетъ $(u - z) + (r - u) < \frac{z}{n}$, или, по причинѣ что сумма разностей каждыхъ двухъ величинъ сряду взятыхъ равна разности крайнихъ, $r - z < \frac{z}{n}$; и потому, для пропорціи $M - m : \frac{m}{n} = r - z : \frac{z}{n}$, будетъ $M - m < \frac{m}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Естьли же $r - u$ не меньше $\frac{1}{2}\frac{z}{n}$, то чрезъ удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ сдѣлай $r - u' < \frac{1}{2}\frac{z}{n}$; и пусть тогда многоугольники будутъ M' и m', и третія пропорціональная къ r и u' будетъ z', то, поелику $z' > z$ (a), $r - u'$ будетъ и паче $< \frac{z'}{n}$; а потому, какъ и прежде, выдетъ $M' - m' < \frac{m'}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Положивъ сіе, ничего болѣе не остается, какъ утвердить главное предложеніе, для котораго предложенныя теперь пріемлются, а имянно: кругъ равенъ треугольнику, у коего основаніе окружность, а высота радіусъ его.

И такъ говорю, кругъ и сей треугольникъ суть предѣлы вписаннаго въ кругъ многоугольника. Ибо:

(a) Что $z' > z$, то по тому: когда сдѣлаешь сію пропорцію $r : u' = u : s$, то по причинѣ пропорціи $r : u = u : z$, выдетъ $s > z$, но по причинѣ что $u' : z' = r : u' = u : s$, $z' > s$; слѣд. и проч.

1) Между тѣмъ какъ сей вписанной многоугольникъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ его, которое безъ конца продолжаться можетъ, возрастая перемѣняется, кругъ и упомянутой треугольникъ пребываютъ непремѣнны, и слѣдовательно суть величины непремѣнныя. 2) Оной вписанной многоугольникъ чрезъ сіе удвоеніе приближается какъ къ кругу такъ и къ треугольнику такимъ образомъ, что разность его съ ними можетъ быть учинена меньше всякой по произволенію данной величины; въ самомъ дѣлѣ, когда кругъ и сей треугольникъ меньше описаннаго многоугольника, а больше вписаннаго, то каждая изъ разностей круга и треугольника со вписаннымъ многоугольникомъ меньше разности описаннаго съ тѣмъ же вписаннымъ, и когда сія послѣдняя разность, по доказанной предъ симъ леммѣ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины, то каждая изъ первыхъ и паче можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины. 3) Совсѣмъ тѣмъ вписанной многоугольникъ никогда ни кругомъ ни упомянутымъ треугольникомъ не сдѣлается, будучи ихъ всегда меньше.

Откуда, для первой основательной истинны способа предѣловъ, слѣдуетъ, что кругъ сему треугольнику равенъ. (a)

(a) И такъ преимущество сего способа предъ Архимедовымъ весьма велико, а имянно: на примѣръ въ семъ предложеніи Архимедъ употребилъ двѣ аксіомы и три леммы; но здѣсь и съ сими аксіомами обращенными въ теоремы только три леммы; Архимедъ при каждомъ предложеніи сего роду чинитъ два доказательства ad absurdum, а здѣсь надлежитъ токмо привести предложеніе къ основательной истиннѣ способа предѣловъ, и что дѣлается весьма удобно. Въ прочемъ строгость и точность Архимедова

Присовокупленіе.

Точно такъ же поступить надлежитъ при доказательствѣ, что секторъ равенъ треугольнику, у коего основаніе дуга сектора, а высота радіусъ его.

Примѣчаніе.

Здѣсь можетъ быть для иныхъ единожды нужно замѣтить, что хотя, кромѣ круга или извѣстнаго треугольника, множество можетъ быть величиною различныхъ фигуръ, кои больше вписаннаго многоугольника, а меньше описаннаго, и что слѣдственно множество такихъ величиною различныхъ фигуръ, коихъ разность со вписаннымъ многоугольникомъ можетъ быть меньше всякой по произволенію данной величины, однако изъ того не слѣдуетъ еще, чтобы какая нибудь изъ сихъ фигуръ могла быть предѣломъ вписаннаго многоугольника, ибо для сего по опредѣленію предѣла требуется еще, чтобы сія фигура величиною была данная или непремѣнная, и чтобы вписанной въ кругъ многоугольникъ никогда до нея достигнуть или ей быть равенъ не могъ. И поелику всѣ сіи три условія, заключающіяся въ опредѣленіи предѣлу, неминуемо входятъ въ доказательство основательной истинны способа предѣловъ, то не слѣдуетъ такъ же, чтобы фигура съ однимъ только упомянутымъ условіемъ была равна кругу или извѣстному треугольнику.

Между тѣмъ замѣтимъ, что условіе, по коему какая нибудь фигура есть всегда больше вписаннаго мно-

---

способа не только что не потеряна, но и знатно умножена, съ соблюденіемъ единообразности въ доказательствѣ всѣхъ сего роду предложеній, какъ то въ слѣдующемъ видѣть можно.

гоугольника, а меньше описаннаго, заключаетъ въ себѣ собственно два условія предѣлу приличествующія, а именно: то, что разность ея со вписаннымъ многоугольникомъ можетъ быть учинена меньше, нежели всякая по произволенію данная величина, и то, что вписанной многоугольникъ никогда до нея достигнуть не можетъ. Но совсѣмъ тѣмъ, поелику не достаетъ третьяго условія, сія фигура не есть предѣлъ вписанному многоугольнику, и слѣдственно не равна кругу или извѣстному треугольнику. Придай же непремѣнность сей фигурѣ, и она будетъ точный предѣлъ вписанному многоугольнику и равна кругу или извѣстному треугольнику; что или докажется, какъ доказана была основательная истинна, или слѣдуетъ изъ сея истинны.

Напротивъ же того, когда предположено будетъ только, что вписанной въ кругъ многоугольникъ можетъ имѣть съ сею фигурою разность меньше, нежели всякая по произволенію данная величина, то не смотря на непремѣнность фигуры, она не будетъ предѣлъ и не будетъ равна кругу или треугольнику. Въ самомъ дѣлѣ прилагая къ сему случаю доказательство основательной истинны, ничего изъ того произвести не можемъ. – Смотри примѣчаніе сдѣланное выше на сіе доказательство.

Предложеніе II.

Поверьхность прямаго цилиндра, безъ основаній, равна прямоугольнику, у коего основаніе окружность основанія цилиндра, а высота бокъ его.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ знать слѣдующія леммы.

1) Поверхность прямой призьмы равна прямоугольнику, у котораго высота таже, что и у призьмы, а основанíе периметръ многоугольника, которой призмѣ есть основанíе.

Откуда слѣдуетъ, что поверхность вписанной въ цилиндръ призьмы меньше, а поверьхность описанной около цилиндра призьмы больше, нежели прямоугольникъ сдѣланный изъ боку цилиндра и окружности основанія онаго.

Черт. 14. 2) Поверхность вписанной въ цилиндръ призьмы AB меньше, а поверхность описанной около онаго призьмы CD больше, нежели поверьхность цилиндра. Ибо, когда впишемъ въ цилиндръ и опишемъ около онаго другія призьмы, противъ перьвыхъ двойное число сторонъ имѣющія и притомъ такъ, какъ означено на чертежѣ, и сіе дѣйствіе продолжимъ далѣе и далѣе; то найдемъ, что поверхность вписанной призьмы отъ того возрастаетъ, а поверьхность описанной призьмы отъ того убываетъ, и что та и другая къ состоянію закрыть поверьхность цилиндра ближе и ближе приходитъ; чего ради по предложенному выше во второй леммѣ перьваго предложенія заключимъ и проч.

Присовокупленіе.

Сіе равно справедливо, когда цилиндръ будетъ и наклонный или косвенный: для доказательства тутъ возрастанія и убыванія вписанной и описанной призьмъ, стоитъ токмо вообразить себѣ плоскость, перпендикулярно къ оси цилиндръ разсѣкающую; взаимныя сѣченія сея плоскости съ сторонами призьмъ будутъ высоты параллелограммовъ, оныя стороны призьмъ составляющихъ; и какъ основанія сихъ параллелограммовъ суть всѣ равны оси цилиндра, то отъуда удобно заключить можно прочее.

5) **Разность между поверьхностями равносторонной описанной около прямаго цилиндра призьмы и толико же равносторонной въ цилиндръ вписанной, чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной того же роду величины.**

Чтобы доказательство сея леммы произвести изъ одного правила наложенія, безъ теоріи величинъ пропорціональныхъ, то надлежитъ вѣдать сію истинну:

Разность между периметрами описаннаго около круга многоугольника и подобнаго ему вписаннаго чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ убываетъ болѣе, нежели на половину. Вотъ ея доказательство.

Пусть AB сторона какого нибудь правильнаго описаннаго многоугольника и CD сторона подобнаго ему вписаннаго; то опустивъ перпендикуляры CE, DF, получишь разность сихъ сторонъ $= AE + FB$ или $= 2AE$; по томъ протянувъ CG, DG, опусти на нихъ перпендикуляры OH, OK, отсѣки ими линею LM и протяни NP, получишь стороны описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ, кои противъ первыхъ двойное число сторонъ имѣютъ, и сторонъ коихъ разность найдется, опустивъ перпендикуляры Ne, Pf, и будетъ $= Le + Mf$ или $= 2Le$; и поелику каждой сторонѣ первыхъ многоугольниковъ соотвѣтствуютъ двѣ стороны вторыхъ, то соотвѣтственная разность сторонъ сихъ вторыхъ многоугольниковъ будетъ $4Le$; по чему все дѣло теперь состоитъ токмо въ показаніи, что $4Le$ меньше половины $2AE$, или все то же, что $4Le$ меньше AE. На сей конецъ протянувъ CQ параллельно OL и тѣмъ уголъ ACE раздѣливъ на два равные ACQ, QCE, протяни еще перпендикуляръ HR и говори: понеже $HG = \frac{1}{2}CG$, Черт. 15.

то чрезъ теорїю о параллельныхъ линеяхъ выдетъ и $LR = \frac{1}{2}QE$, и за тѣмъ что $QE < \frac{1}{2}AE$, будетъ $\frac{1}{2}QE < \frac{1}{4}AE$ и $LR < \frac{1}{4}AE$; но $Le < LR$; слѣд. $Le < \frac{1}{4}AE$ или $4Le < AE$. И такъ чрезъ удвоенїе числа сторонъ многоугольниковъ разность периметровъ ихъ убываетъ болѣе, нежели на половину.

И положивъ сїе, говорю: понеже поверьхность описанной около цилиндра призьмы равна прямоугольнику, у коего высота бокъ цилиндра, а основанїе периметръ многоугольника, описаннаго около основанїя цилиндра и служащаго призьмѣ основанїемъ, и поверьхность вписанной въ цилиндръ призьмы равна прямоугольнику, у коего высота тотъ же бокъ цилиндра, а основанїе периметръ многоугольника вписаннаго въ основанїе цилиндра и служащаго призьмѣ основанїемъ; то явствуетъ, что разность поверьхностей сихъ призьмъ равна прямоугольнику, у коего высота бокъ цилиндра, а основанїе разность периметровъ упомянутыхъ двухъ многоугольниковъ; и понеже сїя послѣдняя разность чрезъ удвоенїе числа сторонъ сихъ многоугольниковъ убываетъ болѣе, нежели на половину, то слѣдуетъ, что и прямоугольникъ, у коего высота бокъ цилиндра, а основанїе разность сїя, или что разность поверьхностей призьмъ, чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ, убываетъ такъ же болѣе, нежели на половину; но количество убывающее такимъ образомъ можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая по произволенїю данная величина; слѣдовательно и проч.

Но предположивъ теорїю величинъ пропорцїональныхъ, такъ при доказательствѣ сея лемы поступить надлежитъ.

Пусть Π, π поверьхности описанной и вписанной призьмъ, C поверьхность цилиндра и D по произволенїю данная величина, которой разность $\Pi - \pi$ должна быть сдѣлана меньше; и пусть еще r радіусъ или перпендикуляръ отъ центра описаннаго многоугольника и u перпендикуляръ отъ центра вписаннаго; будетъ $\Pi : \pi =$ периметеръ описаннаго многоугольника къ периметеру вписаннаго, и слѣдственно $= r . u$; откуда выдетъ $\Pi - \pi : \pi = r - u : u$. Возми отъ C такую частную величину $\frac{C}{n}$, которая бы была меньше по произволенію данной величины D, и естьли $r - u$ будетъ меньше толико же частной величины $\frac{u}{n}$ перпендикуляра u вписаннаго многоугольника, то требуемое сдѣлано. Ибо, когда $\Pi - \pi : \pi = r - u : u$, то будетъ $\Pi - \pi : \frac{\pi}{n} = r - u : \frac{u}{n}$, и за тѣмъ что $r - u < \frac{u}{n}$, выдетъ $\Pi - \pi < \frac{\pi}{n} < \frac{C}{n} < D$. Естьли же $r - u$ не меньше $\frac{u}{n}$, то чрезъ удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ сдѣлай $r - u' < \frac{u}{n}$; и пусть тогда поверьхности призьмъ будутъ Π', π', то по причинѣ что u возрастаетъ и что слѣдственно $r - u'$ паче меньше $\frac{u'}{n}$, выдетъ, какъ и перде, $\Pi' - \pi' < \frac{\pi'}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Присовокупленіе.

Сіе равно справедливо, когда цилиндръ будетъ и косвенный. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB сторона описаннаго около основанія цилиндра какого ниесть правильнаго многоугольника и CD сторона подобнаго вписаннаго; то параллелограммъ AH боками своими параллельный оси OP, будетъ сторона описанной около цилиндра призьмы, и параллелограммъ CL, боками своими такъ же параллельный оси OP, сторона вписанной въ цилиндръ призьмы; я говорю, что оныя стороны сихъ двухъ призьмъ имѣютъ высоты GM, KN равныя между собою, ибо по причинѣ что AB параллельна CD и AG параллельна Черт. 16.

CK, уголъ GAM равенъ углу KCN, и сверьхъ того, за тѣмъ что $AG = CK = OP$, прямоугольной треуголь. AGM равенъ прямоуголь. треуголь. CKN; а такимъ образомъ каждыя соотвѣтственныя стороны описанной и вписанной призьмъ суть такъ какъ соотвѣтственныя стороны описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ; и какъ оныя стороны сихъ многоугольниковъ суть въ содержанiи перпендикуляровъ отъ центра $OF (= r)$ и $OE (= u)$, то для учиненiя послѣдняго заключенiя ничего болѣе не остается, какъ повторить предложенное предъ симъ доказательство.

Приступимъ теперь къ доказательству самаго предложенiя.

И такъ говорю, поверьхность прямаго цилиндра и прямоугольникъ, у коего основанiе окружность основанiя цилиндра, а высота бокъ онаго, суть предѣлы поверьхности призьмы въ цилиндръ вписанной. Ибо:

1) Между тѣмъ какъ поверьхность вписанной въ цилиндръ призьмы чрезъ удвоенiе числа сторонъ ея, которое безъ конца продолжаться можетъ, возрастая перемѣняется, поверьхность цилиндра и упомянутой прямоугольникъ пребываютъ непремѣнны, и слѣдовательно суть величины непремѣнныя. 2) Оная поверьхность вписанной въ цилиндръ призьмы чрезъ сiе удвоенiе приближается какъ къ поверьхности цилиндра, такъ и къ прямоугольнику, такимъ образомъ, что разноть ея съ ними можетъ быть учинена меньше всякой по произволенiю данной величины; въ самомъ дѣлѣ когда поверьхность цилиндра и упомянутой прямоугольникъ меньше поверьхности призьмы около цилиндра описанной, а больше поверьхности призьмы въ цилиндръ вписанной, и когда разность поверьхностей сихъ

призьмъ чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ можетъ быть учинена меньше всякой по произволенїю данной величины; то явствуетъ, что разность поверьхности цилиндра съ съ поверьхностїю вписанной въ него призьмы, и разность прямоугольника съ тою же поверьхностїю призьмы и паче меньше всякой по произволенїю данной величины учиниться можетъ. 3) Совсѣмъ тѣмъ поверьхность вписанной въ цилиндръ призьмы никогда равна ни поверхности цилиндра ни упомянутому прямоугольнику не будетъ.

Отсюда, для первой основательной истинны способа предѣловъ, заключимъ, что поверьхность прямаго цилиндра упомянутому прямоугольнику равна.

Присовокупленїе.

Естьли предложенное теперь доказательство повторится при косомъ цилиндрѣ, то докажется, что поверьхность онаго есть предѣлъ поверьхности вписанной въ него призьмы. И сего довольно для взаимнаго сравненїя поверьхностей цилиндровъ подобныхъ; въ чемъ былъ главной нашъ предметъ при обращенїи отъ прямаго цилиндра на косой.

Между тѣмъ къ предложенному доселѣ не много надобно прибавить, дабы опредѣлить прямоугольникъ равный поверьхности косаго цилиндра. И такъ учинимъ сїе прибавленїе.

Поверьхность косвенной призьмы равна прямоугольнику, у котораго высота ребро призьмы, а основанїе периметеръ многоугольника, которой произойдетъ отъ разсѣченїя призьмы перпендикулярно къ ея ребрамъ. Сїе ясно изъ присовокупленїя второй леммы.

Сѣченіе косаго цилиндра сдѣланное перпендикулярно къ оси или боку онаго не есть кругъ, но особая кривая линея *Еллипсомъ* называемая. Намъ здѣсь нѣтъ нужды входить во изслѣдованіе свойства ея, что обыкновенно предлагается въ коническихъ сѣченіяхъ, а довольно замѣтить, что когда въ цилиндръ впишется и около его опишется двѣ призмы, то на той же плоскости, на которой Еллипсъ находится, и которая перпендикулярна къ ребрамъ сихъ призьмъ, составятся два многоугольника, одинъ въ Еллипсъ вписанный, а другой около Еллипса описанный, изъ коихъ перваго периметръ меньше, а другаго больше, нежели окружность Еллипса; что докажется вписывая и описывая призьмы такъ, какъ учинено было во *второй* леммѣ сего предложенія.

Откуда слѣдуетъ, что поверьхность вписанной въ косой цилиндръ призьмы меньше, а поверьхность описанной около онаго больше, нежели прямоугольникъ сдѣланный изъ боку цилиндра и окружности Еллипса.

И какъ сіи призьмы и сей прямоугольникъ сопровождаютъ тѣ же обстоятельства, которыя выше примѣчены при призьмахъ и прямоугольникѣ относящихся до прямаго цилиндра, то заключимъ, что оный прямоугольникъ есть предѣлъ поверьхности вписанной въ косой цилиндръ призьмы; а такимъ образомъ, поелику доказано, что и поверьхность косаго цилиндра есть предѣлъ поверьхности сей призьмы, будетъ поверьхность онаго цилиндра сему прямоугольнику равна.

Наконецъ точно такъ же поступить надлежитъ при доказательствѣ, что поверьхность цилиндрическаго сектора, когда цилиндръ прямой, равна прямоугольнику, сдѣланному изъ боку цилиндра и периметера основанія сектора цилиндрическаго, и что, когда цилиндръ косой, равна прямоугольнику сдѣланному изъ боку цилиндра и периметера перпендикулярнаго къ оси сѣченія сектора цилиндрическаго.

Примѣчаніе.

Архимедъ доказываетъ, что поверьхность прямаго цилиндра (что есть единый случай, который онъ разсматриваетъ) равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между діаметромъ основанія и бокомъ его; что изъ предложеннаго нами весьма удобно произвести можно: пусть P поверьхность цилиндра, Q основаніе его, a радіусъ онаго основанія, b бокъ цилиндра, r средняя пропорціональная между 2 a и b, и R кругъ, коего радіусъ сія средняя; сыщи къ a и r третью пропорціональную z; будетъ $z = 2b$. Ибо, $a : r = r : z$, или $2a : r = 2r : z$, и $2a : r = r : b$ или $2a : r = 2r : 2b$. Почему $Q : R\ (= a : z) = a : 2b$, но $Q : P = \frac{a}{2} : b = a : 2b$; слѣдоват. $P = R$.

Предложеніе III.

Поверьхность прямаго конуса, безъ основанія, равна треугольнику, у коего основаніе окружность основанія конуса, а высота косой бокъ онаго.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ знать слѣдующія леммы.

1) Поверьхность равносторонной пирамиды равна треугольнику, у коего основаніе периметеръ основанія пирамиды, а высота перпендикуляръ изъ вершины ея на сторону основанія опущенный.

Откуда слѣдуетъ, что поверьхность вписанной въ конусъ пирамиды меньше, а поверьхность описанной около онаго больше, нежели треугольникъ, у коего основанїе окружность основанїя конуса, а высота косой бокъ онаго. 2) Поверьхность вписанной въ конусъ пирамиды меньше, а поверьхность описанной около онаго больше, нежели поверьхность конуса.

Черт. 17. a) Пусть ABCDE вписанная въ конусъ какая ниесть равносторонная пирамида; чрезъ удвоенїе числа сторонъ ея впиши въ оной другую, и такъ далѣе; я говорю, что поверьхность пирамиды отъ того будетъ возрастать и приближаться къ состоянїю закрыть поверьхность конуса. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AFC, BFC двѣ стороны другой пирамиды двойное число сторонъ противъ первой имѣющей; оныя двѣ стороны AFC, BFC вмѣстѣ взятыя будутъ больше соотвѣтственной стороны ABC первой пирамиды; ибо основанїе AF + BF больше основанїя AB, и каждая изъ высотъ GC, HC больше высоты KC, по тому что при общемъ катетѣ CO, каждой изъ катетовъ OG, OH больше катета OK; почему поверьхность вписанной въ конусъ пирамиды чрезъ удвоенїе числа сторонъ ея возрастаетъ; возрастая же приближается къ состоянїю закрыть поверьхность конуса, ибо гдѣ бы конусъ ни разсѣчь параллельно основанїю, всегда хорды AF, BF будутъ ближе къ окружности круговъ, отъ сего разсѣченїя произходящихъ, нежели хорда AB; слѣдовательно по предложенному выше во второй леммѣ перваго предложенїя заключимъ и проч.

Черт. 18. b) Пусть ABCDE описанная около конуса какая ниесть равносторонная пирамида; чрезъ удвоенїе числа сторонъ ея опиши около онаго другую, и такъ далѣе; я говорю, что поверьхность пирамиды отъ того будетъ убывать и приближаться къ состоянію закрыть поверьхность конуса. Въ самомъ дѣлѣ, пусть GCH сторона другой пирамиды противъ первой двойное число сторонъ имѣющей; она будетъ меньше, нежели вмѣстѣ взятыя двѣ части ACH, ACG сторонъ первой пирамиды; ибо основаніе GH меньше основанія AG + AH, и высоты CM, CL, CK всѣ равны между собою, по тому что суть косые бока прямаго конуса; тоже и такъже докажется при другихъ углахъ; почему поверьхность описанной пирамиды чрезъ удвоеніе числа сторонъ ея дѣйствительно убываетъ; убывая же приближается къ состоянію закрыть поверьхность конуса, ибо гдѣ бы конусъ ни разсѣчь пораллельно основанію, всегда ломаная LGKHM будетъ ближе къ окружности круговъ, отъ сего разсѣченія произходящихъ, нежели ломанная LAM; слѣдовательно по предложенному выше во второй леммѣ перваго предложенія заключимъ и проч.

Присовокупленіе.

Сіе равно справедливо, когда конусъ будетъ и косой; но справедливо не иначе, какъ относительно цѣлыхъ поверьхностей. Для учиненія сего яснымъ, надлежитъ вѣдать слѣдующую истинну.

Въ трехсторонной пирамидѣ сумма всякихъ трехъ сторонъ больше четвертой.

Поелику изъ вершины какого нибудь угла сей пирамиды опущенный перпендикуляръ на противолежащую оному углу сторону ея, можетъ упасть или внутри пирамиды, или внѣ оной; то здѣсь два случая имѣютъ мѣсто:

Черт. 19. a) Пусть перпендикуляръ DE падаетъ внутри пирамиды; изъ E опусти на AC, CB, AB перпендикуляры EF, EG, EH и проведи DF, DG, DH, которыя такъ же будутъ перпендикулярны къ AC, CB, AB; и какъ DF, DG, DH катеты прямоугольныхъ треугольниковъ DEF, DEG, DEH, то первые будутъ больше другихъ, и треугол. ACD + CBD + ABD > (треуг. ACE + CBE + ABE =) треу. ACB.

b) Пусть перпендикуляръ DE падаетъ внѣ пирамиды; то, поелику точка E можетъ падать или между самою стороною основанія пирамиды и продолженіями двухъ другихъ, или токмо между продолженіями двухъ сторонъ, здѣсь еще два случая имѣютъ мѣсто:

Черт. 20. a a) Пусть первой случай имѣетъ мѣсто, то поступивъ, какъ и прежде, выдетъ треуг. ACD + ABD > (треуг. ACE + ABE >) ABC; а по сему треуг. ACD + ABD + CBD и паче > ABC.

Черт. 21. bb) На конецъ да имѣетъ мѣсто второй случай, тогда будетъ треуголь. ACD > ACE, которой же > ACB; слѣд. и прочь.

Примѣчаніе.

Мы здѣсь ни которыхъ изъ плоскостей пирамиду содержащихъ не полагали взаимно перпендикулярными, но естьли сіе положить, то выдетъ еще три случая, которыя представить себѣ и доказать, послѣ сего, всякой удобно уже можетъ.

И положивъ сіе, безъ всякой трудности найдешь, что цѣлая поверхность вписанной въ косой конусъ пирамиды чрезъ удвоенїе числа сторонъ ея возрастаетъ и приближается къ состоянїю закрыть цѣлую поверьхность сего конуса и что цѣлая поверьхность описанной около косаго конуса пирамиды чрезъ то же дѣйствїе убываетъ и приближается къ состоянїю закрыть цѣлую поверьхность сего конуса; и потому заключишь, что цѣлая поверьхность первой пирамиды меньше, а цѣлая поверхность другой больше, нежели цѣлая поверхность косаго конуса.

3) Разность между поверьхностями равносторонныхъ пирамидъ, около прямаго конуса описанной и въ оной вписанной, чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая по произволенїю данная величина.

Пусть AB сторона какого нибудь правильнаго многоугольника около основанїя конуса описаннаго, и CD сторона подобнаго ему въ оное основанїе вписаннаго; то вообразивъ себѣ линеи AF, BF и CF, DF и чрезъ нихъ проходящїя плоскости, получишь стороны пирамидъ около конуса описанной и въ него вписанной; по томъ изъ центра O въ точку касанїя H протянувъ радїусъ OH пресѣкающїй CD въ K пополамъ и перпендикулярно, сыщи OG, такъ чтобы было $HO:KO = OF:OG$, и протянувъ GC, GD, вообрази проходящую чрезъ нихъ плоскость; получишь сторону CGD пирамиды, коя описанной около конуса пододна. Ибо по причинѣ что $OH:OK = OA:OC = OB:OD$, съ помощїю учиненной выше пропорцїи найдется, что треуг. CDG подобенъ и плоскостїю параллеленъ треуг. ABF; то же и такъ же докажется при другихъ сторонахъ сихъ пирамидъ. Черт. 28.

И такъ говорю, поверхность Π описанной пирамиды къ поверхности π, оной подобной, будетъ въ удвоенномъ содержанїи линей AB, CD; и какъ описанной около основанія конуса многоугольникъ M ко вписанному m суть такъ же въ удвоенномъ содержаніи линей AB, CD; то будетъ $\Pi : \pi = M : m$ и $\Pi - \pi : \Pi = M - m : M$ или $\Pi - \pi : M - m = \Pi : M$; по причинѣ же, что $\Pi : M = FH : HO$, будетъ $\Pi - \pi : M - m = FH : HO$. — Пусть Π', π' поверьхности пирамидъ, двойное число сторонъ противъ перьвыхъ имѣющихъ, и M', m' ихъ основанія; то по тому же будетъ $\Pi' - \pi' : M' - m' = FH : HO$; слѣдовательно $\Pi - \pi : M - m = \Pi' - \pi' : M' - m'$ и $\frac{1}{2}(\Pi - \pi) : \frac{1}{2}(M - m) = \Pi' - \pi' : M' - m'$; но по доказанному въ третей леммѣ перваго предложенія $M' - m' < \frac{1}{2}(M - m)$, слѣдовательно и $\Pi' - \pi' < \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$. И такъ разность поверьхностей описанной и подобной оной вписанной пирамидъ убываетъ болѣе, нежели на половину, и потому можетъ учиниться меньше, нежели всякая по произволенію данная величина. И какъ поверьхность вписанной пирамиды, коя описанной неподобна и у коей сторона треуг. CDF, больше поверьхности π пирамиды, коя описанной подобна и у коей сторона треугольникъ CDG (ибо, по причинѣ что ось OF въ прямомъ конусѣ перпендикулярна къ плоскости его основанія и что OK перпендикулярна къ CD, FK и GK перпендикулярны къ той же CD, и $FK > GK$); то явствуетъ, что разность между описанною и сею вписанною, коя описанной не подобна, и паче меньше всякой по произволенію данной величины учиниться можетъ.

Здѣсь мы основались на третей леммѣ перваго предложенія, но и безъ сей леммы прямо сіе доказать можемъ, а имянно такимъ образомъ:

Поелику Π, π суть въ удвоенномъ содержаніи линей AB, CD, кои же суть такъ какъ линеи OH ($= r$) и

OK ($=u$), то будетъ $\Pi : \pi = r : z$, гдѣ z есть третья пропорціональная къ r и u; и потому ничего болѣе не остается, какъ повторить предложенное въ упомянутой леммѣ второе для нея доказательство.

Присовокупленіе.

Сіе равно справедливо и при косомъ конусѣ, но не иначе, какъ относительно цѣлыхъ поверьхностей; и доказательство точно то же, что и въ прямомъ, кромѣ только доказательства того, что поверьхность вписанной пирамиды больше, нежели поверьхность той, которая описанной подобна. Для сего, поелику здѣсь ось конуса OF не перпендикулярна къ основанію его, изъ вершинъ F и G конуса и той пирамиды, которая описанной подобна, опусти на плоскость основанія ихъ перпендикуляры FM, GN и еще на CD перпендикуляры MP, NQ, и протяни линеи PF, QG; оныя будутъ такъ же перпендикулярны къ CD; и потому углы MPF, NQG равны между собою, и по причинѣ что FMP, GNQ прямые, треугольники FMP, GNQ подобны; чего ради $FM : GN = FP : GQ$, и какъ $FM > GN$, то будетъ $FP > GQ$; слѣд. и проч. Черт. 22.

Приступимъ теперь къ доказательству самаго предложенія.

И такъ говорю, поверьхность прямаго конуса и треугольникъ, у коего основаніе окружность основанія конуса, а высота косой бокъ онаго, суть предѣлы поверьхности пирамиды въ конусъ вписанной. Ибо:

1) Между тѣмъ какъ поверьхность вписанной въ конусъ пирамиды чрезъ удвоеніе числа сторонъ ея, кото-

рое безъ конца продолжаться можетъ, возрастая перемѣняется, поверьхность конуса и упомянутой треугольникъ пребываютъ непремѣнны, и слѣдовательно суть величины непремѣнныя. 2) Оная поверьхность вписанной пирамиды чрезъ сїе удвоенїе приближается какъ къ поверхости конуса, такъ и къ треугольнику, такимъ образомъ, что разность ея съ ними можетъ учиниться меньше всякой по произволенїю данной величины; въ самомъ дѣлѣ, когда поверхость конуса и упомянутой треугольникъ меньше поверьхности пирамиды около конуса описанной, а больше поверьхности пирамиды въ конусъ вписанной, и когда разность поверьхностей сихъ пирамидъ чрезъ удвоенїе числа сторонъ ихъ можетъ быть учинена меньше всякой по произволенїю данной величины; то явствуетъ, что разность поверхности конуса съ поверьхностїю вписанной въ него пирамиды, и разность треугольника съ тою же поверьхностїю пирамиды и паче меньше всякой по произволенїю данной величины учиниться можетъ. 3) Совсѣмъ тѣмъ поверьхность вписанной въ конусъ пирамиды никогда равна ни поверьхности конуса ни упомянутому треугольнику не будетъ.

Откуда, для первой основательной истинны способа предѣловъ, слѣдуетъ, что поверьхность прямаго конуса упомянутому треугольнику равна.

Присовокупленїе 1.

Естьли предложенное теперь доказательство повторится при косомъ конусѣ, то докажется, что цѣлая поверьхность онаго есть предѣлъ цѣлой поверьхности вписанной въ него пирамиды; и чего довольно для взаимнаго сравненїя поверьхностей косыхъ подобныхъ конусовъ.

Что же принадлежитъ до опредѣленія площади равной поверьхности косаго конуса, то Геометрія тутъ должна признать слабость и недостатокъ свой; да и самая вышшая математика не даетъ для сего, какъ токмо весьма слабыя пособія, доказывая, что сія площадь, равная поверьхности косаго конуса, зависитъ отъ спрямленія коническихъ сѣченій и квадратуры одной изъ кривыхъ третьяго порядка.

Наконецъ точно такъ же поступить надлежитъ при доказательствѣ, что кривая часть поверьхности прямаго коническаго сектора равна треугольнику, коего основаніе дуга основанія коническаго сектора, а высота косой бокъ его.

Присовокупленіе 2.

Изъ того, что поверьхность прямаго конуса равна треугольнику, коего основаніе окружность основанія конуса, а высота косой бокъ онаго, слѣдуетъ: 1) Что сія поверьхность равна прямоугольнику, коего высота косой бокъ конуса, а основаніе окружность круга, которой произойдетъ отъ разсѣченія конуса параллельно основанію чрезъ средину высоты его, 2) что поверьхность прямаго усѣченнаго конуса равна прямоугольнику, коего высота косой бокъ конуса, а основаніе окружность круга, которой произойдетъ отъ разсѣченія конуса параллельно основаніямъ чрезъ средину высоты его.

Примѣчаніе.

Архимедъ въ сочиненіи своемъ de Sphera et cylindro доказываетъ, что поверьхность прямаго конуса равна кругу, коего радїусъ есть средняя пропорцїональная между радїусомъ основанїя и косымъ бокомъ онаго; что послѣ предложеннаго нами такъ докажется: Пусть P поверьхность конуса, Q основанїе онаго, a радїусъ сего основанїя, b косой бокъ конуса, r средняя пропорцїональная между a и b, и R кругъ, коего радїусъ сїя средняя; сыщи къ a и r третью пропорцїональную z; будетъ $z = b$, ибо $a : r = r : z$ и $a : r = r : b$; почему $Q : R (= a : z) = a : b$, но и $Q : P = a : b$; слѣдовател. $P = R$.

Подражая сему, удобно докажешь, что поверьхность усѣченнаго конуса равна кругу, коего радїусъ есть средняя пропорцїональная между суммою радїусовъ основанїй конуса и косымъ его бокомъ.

Предложенїе IV.

Поверьхность шара равна прямоугольнику, коего основанїе окружность большаго круга шара, а высота дїаметръ онаго.

Для доказательства сего предложенїя надлежитъ знать слѣдующїя леммы:

1.) Естьли на данной линеи состроится точная половина какого нибудь правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ чтобы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми; то поверьхность тѣла, которое произойдетъ отъ обращенїя сея половины многоугольника около данной линеи, равна прямоугольнику, коего основанїе окружность круга, описаннаго перпендикуляромъ отъ центра, а высота та данная линея.

Доказательство сея леммы зависитъ отъ слѣдующихъ случаевъ:

a) Поверьхность описанная линеею AB, съ CD въ A пресѣкающеюся, чрезъ обращеніе ея около CD, равна прямоугольнику, коего основаніе окружность круга описаннаго перпендикуляромъ EF, изъ средины E линеи AB на ней до пресѣченія его съ CD поставленнымъ, а высота часть AG линеи CD усѣченная концомъ A линеи AB и перпендикуляромъ BG, изъ другаго на CD опущеннымъ. Ибо, отъ обращенія прямоугольнаго треугольника ABG произойдетъ прямой конусъ, и поверьхность онаго равна прямоугольнику изъ AB на окружность круга описаннаго перпендикуляромъ EH изъ E на CD опущеннымъ; но поелику, для подобія треугольниковъ ABG, EHF, AB : AG = EF : EH = окруж. радіу. EF: окруж. радіу. EH, то сей прямоугольникъ равенъ прямоугольнику изъ AG на окруж. радіу. EF; слѣд. и проч. Черт. 23.

b) Поверьхность описанная линеею AB, съ CD не пресѣкшеюся, чрезъ обращеніе ея около CD равна прямоугольнику, коего основаніе окружность круга, описаннаго перпендикуляромъ EF, изъ средины E линеи AB на ней до пресѣченія съ CD поставленнымъ, а высота часть GH линеи CD усѣченная перпендикулярами AG, BH, изъ концовъ линеи AB на CD опущенными. Ибо, отъ обращенія прямоугольной трапеціи ABHG произойдетъ прямой усѣченной конусъ, и поверьхность его равна прямоугольнику изъ AB на окружность круга описаннаго перпендикуляромъ EK, изъ E на CD опущеннымъ; но поелику для подобія треугольниковъ ABL, EFK, изъ коихъ въ первомъ сторона AL параллельна и равна GH, AB : AL (= GH) = EF : EK = окруж. радіу. EF: окруж. радіу. EK, то сей прямоугольникъ равенъ прямоугольнику изъ GH на окруж. радіу. EF; слѣд. и проч. Черт. 24.

Черт. 25. c) Наконецъ остается случай, въ которомъ AB параллельна CD. Поелику здѣсь отъ опущенныхъ перпендикуляровъ AG, BH изъ концовъ линеи AB на CD, выдетъ прямоугольникъ, то отъ обращенія онаго произойдетъ прямой цилиндръ, коего поверьхность равна прямоугольнику изъ AB на окружность круга описаннаго линеею AG или BH; но AG или BH = EF и AB = GH; слѣд. и проч.

Теперь представь себѣ упомянутую половину многоугольника, состроенную на данной линеи: перпендикуляры, изъ срединъ сторонъ ея на оныхъ сторонахъ возставленные, всѣ пресѣкутся съ данною линеею въ одной точкѣ, а имянно въ срединѣ ея, и всѣ будутъ равны между собою; а части данной линеи усѣченныя перпендикулярами, изъ концовъ сторонъ на оную данную линею опущенными, вмѣстѣ составятъ сію данную линею. Почему для предложенныхъ предъ симъ случаевъ, поверьхность тѣла, произведеннаго обращеніемъ сея половины многоугольника, будетъ дѣйствительно упомянутому выше прямоугольнику равна.

Откуда слѣдуетъ, что естьли въ полукругъ впишется половина правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ что бы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми, то поверьхность тѣла произшедшаго отъ обращенія сея половины многоугольника меньше, нежели прямоугольникъ, коего основаніе окружность наибольшаго круга шара, произведеннаго обращеніемъ полукруга, а высота діаметръ онаго шара; и что естьли около тогоже полукруга опишется половина правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ чтобы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми, то поверьхность тѣла произшедшаго отъ обращенія сея половины многоугольника больше, нежели упомянутой прямоугольникъ.

2) Поверьхность перваго тѣла меньше, а поверьхность другаго больше, нежели поверьхность шара.

Для учиненія сего яснымъ стоитъ токмо доказать слѣдующую истинну: Поверьхность описанная ломаною линеею ACB чрезъ обращеніе плоскости, на которой она находится, около непремѣнной линеи EF, больше, нежели поверьхность описанная линеею AB чрезъ тоже обращеніе. Здѣсь ломаная полагается вогнутою со стороны непремѣнной линеи EF. Чрт. 26.

Раздѣливъ уголъ ACB линеею CG пополамъ, я говорю, что оная CG продолженная встрѣчается съ EF; ибо перпендикуляръ изъ C на EF; опущенный, падаетъ или на самую CG или по которую ниесть ея сторону; когда на самую CG, то очевидно, что продолженная CG встрѣчается съ EF; когда же по которую нибудь сторону, какъ падаетъ перпендикуляръ CH, то, поелику уголъ ACG меньше прямаго, уголъ HCG паче меньше прямаго, и два угла FHC и HCG, вмѣстѣ взятые, меньше двухъ прямыхъ; и потому продолженная CG паки съ EF встрѣчается. Раздѣли AC, AG, CB, GB въ K, L, M и N пополамъ и соедини K съ L и M съ N линеями KL, MN; онѣ будутъ параллельны CG, и потому съ EF, такъ какъ и CG, встрѣчаются; и сего ради перпендикуляръ KP > LQ и перпендикуляръ MR > NS; извѣстно же, что AC > AG и CB > GB; чего ради прямоугольникъ изъ AC на окруж. радіу. KP съ прямоугольникомъ изъ CB на окруж. радіу. MR, то есть поверьхность описанная ломаною ACB, больше, нежели прямоугольникъ изъ AG на окруж.

радіу. LQ съ прямоугольникомъ изъ GB на окруж. радіу. NS, то есть поверьхности описанной линеею AB. ИС. Д. Н.

Доказательство точно тоже, когда которой ниесть изъ концовъ ломаной падаетъ на самую EF, около коей ломаная обращаясь описываетъ кривую поверьхность.

Такъ же истинна сія равно справедлива, когда которая нибудь изъ линей AC, CB будетъ и перпендикулярна къ EF; далѣе же, то есть когда напримѣръ AC падаетъ по другую сторону перпендикуляра, изъ A на EF опущеннаго, она не имѣетъ мѣста, какъ токмо по тѣхъ поръ, пока CG не сдѣлается параллельною EF.

Положивъ сіе, представимъ себѣ полукругъ и впишемъ въ него полумногоугольникъ ABCDE, чрезъ удвоеніе числа сторонъ впишемъ другой AaBbCcDdE, и такъ далѣе; я говорю, поверьхность описуемая во время обращенія полукруга полупериметромъ многоугольника отъ того будетъ возрастать и приближаться къ состоянію закрыть поверьхность шара, описуемую полуокружностію круга; ибо поверьхность описанная каждою ломаною AaB, BbC, CcD, DdE больше и ближае къ поверьхности шара, нежели поверьхность описанная соотвѣтственною прямою AB, BC, CD, DE; и сего ради заключимъ и проч.

Черт. 27.

Теперь около полукруга опишемъ полумногоугольникъ ABCDE, и чрезъ удвоеніе числа сторонъ опишемъ другой GabcdefghH, и такъ далѣе; я говорю, поверьхность описуемая во время обращенія полукруга полупериметромъ многоугольника отъ того будетъ убывать и приближаться къ состоянію закрыть поверьхность шара,

Черт. 28.

описуемую полуокружностію круга; ибо, поверхности описанныя линеями Ga и Hh меньше, нежели поверьхности описанныя линеями Aa, Eh; что всякой удобно усмотрить; такъ же поверьхности описанныя линеями bc, de, fg меньше, нежели поверьхности описанныя ломаными bBc, dCe, fDg; что выше доказано было; сверьхъ того ясно видно, что поверьхность описанная полупериметромъ GabcdefghH ближе къ поверхности шара, нежели поверьхность описанная полупериметромъ ABCDE; и такъ заключимъ и проч.

Здѣсь, въ томъ и другомъ случаѣ, каждая линея раздѣляющая на двѣ равныя части составляемый ломаною уголъ встрѣчается съ тою, около коей дѣлается обращеніе; и потому въ предложенной предъ симъ истиннѣ сіе обстоятельство предположить можно.

3). Разность между поверьхностями описаннаго около шара тѣла и подобнаго вписаннаго въ оной, чрезъ удвоеніе числа сторонъ можетъ учиниться меньше, нежели всякая по произволенію данная величина.

Пусть ABCDEF тѣло извѣстнымъ образомъ въ шаръ Черт. 29. вписанное и GHKLMN подобное около шара описанное; я говорю, поверьхность сего послѣдняго къ поверьхности перьваго въ удвоенномъ содержаніи перпендикуляровъ отъ центра OQ и OP двухъ полумногоугольниковъ GHKLM, ABCDE, произведшихъ сіи тѣла. Ибо, изъ угловъ H, K, L, B, C, D опустивъ на линею GAEM перпендикуляры Hh, KO, Ll и Bb, CO, Dd, полумногоугольники раздѣлятся на подобные треугольники и трапеціи; и потому во время обращенія полумногоугольниковъ оными треугольниками и трапеціями описуются подобные конусы цѣлые и усѣченные, и тѣла GHKLMN, ABCDEF будутъ составлены изъ сихъ конусовъ; но поверьхности подобныхъ конусовъ въ удвоенномъ содержанїи ихъ косыхъ боковъ, кои же здѣсь суть стороны полумногоугольниковъ, оныя тѣла произведшихъ, и оныя стороны суть такъ какъ перпендикуляры отъ центра OQ и OP; слѣд. и проч. Въ прочемъ, поелику $GM : AE = OQ : OP =$ окруж. радїу. OQ: окруж. радїу. OP, прямоугольники равные поверьхностямъ сихъ тѣлъ суть подобны, и находятся въ удвоенномъ содержанїи высотъ своихъ GM, AE; чего ради и поверхности сихъ тѣлъ будутъ находиться въ удвоенномъ содержанїи линей GM и AE, и слѣдственно такъ же въ удвоенномъ содержанїи перпендикуляровъ OQ и OP.

Пусть Π поверхность описаннаго тѣла, π вписаннаго, C поверьхность шара, r перпендикуляръ OQ, u перпендикуляръ OP и D данная величина, которой разность $\Pi - \pi$ должна быть сдѣлана меньше; возьми отъ C такую частную величину $\frac{C}{n}$, что бы оная была меньше D, и сыщи третью пропорцїональную z къ r и u, такъ что бы было $r : u = u : z$; я говорю, что естьли разность $r - u$ меньше половины толико же частной величины $\frac{z}{n}$ сей третей пропорцїональной z, то требуемое сдѣлано.

Въ самомъ дѣлѣ, поелику Π, π суть въ удвоенномъ содержанїи линей r и u, то будетъ $\Pi : \pi = r : z$ и $\Pi - \pi : \frac{\pi}{n} = r - z : \frac{z}{n}$; и какъ (по причинѣ что $r - u : u - u = r : u$ и что $u < r$) $u - z < r - u < \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{n}$, то выдетъ $(u - z) + (r - u) < \frac{z}{n}$, или, по причинѣ что сумма разностей каждыхъ двухъ величинъ сряду взятыхъ равна разности крайнихъ, $r - z < \frac{z}{n}$, и потому $\Pi - \pi < \frac{\pi}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Естьли же $r - u$ не меньше $\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{n}$, то чрезъ удвоенїе числа сторонъ многоугольниковъ сдѣлай $r - u' < \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{n}$, и пусть тогда поверхность описаннаго и вписаннаго тѣлъ будетъ Π', π' и третья пропорцїональная къ r и u' будетъ z', то, поелику $z' > z$, $r - u'$ будетъ и паче $< \frac{1}{2} \cdot \frac{z'}{n}$; и потому, какъ и прежде, выдетъ $\Pi' - \pi' < \frac{\pi'}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Положивъ сїе, приступимъ къ доказательству самаго предложенїя.

И такъ говорю, поверьхность шара и прямоугольникъ, у коего основанїе окружность наибольшаго круга шара, а высота дїаметръ сего круга, суть предѣлы поверьхности вписаннаго въ шаръ тѣла. Ибо:

1) Между тѣмъ какъ поверьхность вписаннаго въ шаръ тѣла чрезъ удвоенїе числа сторонъ производящаго его полумногоугольника, которое безъ конца продолжаться можетъ, возрастая перемѣняется, поверьхность шара и упомянутой прямоугольникъ пребываютъ непремѣнны и слѣдовательно суть величины непремѣнныя. 2) Оная поверьхность вписаннаго въ шаръ тѣла чрезъ сїе удвоенїе приближается какъ къ поверьхности шара такъ и къ прямоугольнику такимъ образомъ, что разность ея съ ними можетъ учиниться меньше всякой по произволенїю данной величины; въ самомъ дѣлѣ, когда поверьхность шара и площадь упомянутаго прямоугольника меньше поверьхности описаннаго около шара тѣла, а больше поверьхности подобнаго вписаннаго, и когда разность поверьхностей сихъ тѣлъ чрезъ удвоенїе числа сторонъ многоугольниковъ, ихъ произведшихъ, можетъ быть учине-

на меньше всякой по произволенію данной величины; то явствуетъ, что разность поверьхности шара съ поверьхностію вписаннаго въ него тѣла, и разность прямоугольника съ тою же поверьхностію вписаннаго тѣла и паче меньше всякой по произволенію данной величины учиниться можетъ. 3) Совсѣмъ тѣмъ поверьхность вписаннаго въ шаръ тѣла никогда равна ни поверьхности шара ни упомянутому прямоугольнику не будетъ.

Откуда, для первой основательной истинны способа предѣловъ, слѣдуетъ, что поверьхность шара упомянутому прямоугольнику равна.

Присовокупленіе.

Откуда слѣдуетъ еще, что поверьхность шара въ четверо болше наиболшаго его круга, и потому равна кругу, коего радіусъ есть діаметръ шара.

Наконецъ точно такъ же докажется, что поверьхность сегмента шара, безъ его основанія, равна прямоугольнику, коего основаніе окружность наибольшаго круга шара, а высота равная высотѣ сего сегмента.

Примѣчаніе.

Архимедъ доказываетъ, что поверьхность сегмента шара равна кругу, коего радіусъ есть прямая отъ верьшины сегмента до окружности основанія его протянутая; что послѣ предложеннаго нами такъ докажется: Пусть P поверьхность сегмента, Q наибольшій кругъ шара, а радіусъ его, R кругъ, коего радіусъ упомянутая прямая, r сія прямая и h высота сегмента; сыщи къ a и r третью пропорціональную z, будетъ $z = 2b$. Ибо $2a : r = r : b$, или $2a : r = 2r : 2b$, и $a : r = r : z$, или $2a : r = 2r : z$. По чему $Q : R (= a : z) = a : 2b = \frac{a}{2} : b$; но и $Q : P = \frac{a}{2} : b$; слѣд. $P = R$.

Теперь мы приступить имѣемъ къ тѣмъ предложеніямъ сего роду, кои толщины тѣлъ за предметъ имѣютъ. Новые Геометры оныя обыкновенно доказываютъ чрезъ способъ нераздѣльныхъ или безконечныхъ количествъ; но мы отвергнувъ оной, не иное что учинить долженствуемъ, какъ употреблять правило наложенія и способъ предѣловъ.

Предложеніе V.

Толщины призмъ, имѣющихъ равныя высоты и основанія суть равны между собою.

Во всѣхъ почти изданіяхъ Елементовъ Евклида, кромѣ токмо изданія Роберта Симсона, сіе предложеніе основывается на слѣдующемъ опредѣленіи:

Равныя и подобныя (прямолинейныя) тѣла суть тѣ, кои окружены и содержимы равными подобными и равномногими плоскостями. Евклид. Елемен. книга XI, опредѣленіе 10.

Робертъ Симсонъ, по справедливости онымъ недовольный, въ критическихъ и Геометрическихъ своихъ примѣчаніяхъ говоритъ (a): „когда смыслъ слова, *равно*,„ извѣстенъ и „установленъ прежде, нежели какъ сіе слово употреблено въ

(a) See in the Elements of Euclid by Robert Simſon, eighth edition, p. 341.

„семъ опредѣленіи; то предложеніе, которое въ немъ заклю-
„чается, есть теорема, коей правда или неправда должна
„быть доказана, а не принята; и потому Өеонъ или иной
„какой издатель обративъ теорему, коя должна быть до-
„казана, во опредѣленіе, поступилъ невѣжественно: что
„фигуры подобны, доказательство сему должно быть
„выведено изъ опредѣленія подобнымъ фигурамъ; а что
„онѣ равны, то доказательство сему должно быть вы-
„ведено изъ Аксіомы: величины, кои совершенно совмѣщают-
„ся, суть равны между собою, или изъ предложенія А
„пятой книги (a), или изъ предложнія 9 (b), или изъ
„предл. 14 (c) той же книги.

Потомъ Симсонъ доказываетъ, что сіе опредѣленіе не токмо что должно быть теоремою доказываемою, но и что оно несправедливо по крайней мѣрѣ вообще; ибо оно истинно, говоритъ онъ, токмо въ одномъ случаѣ, сирѣчь, когда углы тѣлъ будутъ составлены изъ трехъ плоскихъ.

И хотя противъ сего доказательства Г. Лежандръ въ XII своемъ примѣчаніи, на равенство и подобіе многогранныхъ тѣлъ, восталъ не безъ основанія; однако въ пользу упомянутаго Евклидова опредѣленія ничего не про-

---

(a) Ежели изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ первая больше второй, то и третія больше четвертой; естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше.

(b) Величины, кои имѣютъ одно и то же содержаніе къ третьей, суть равны между собою; и величины, къ коимъ третья имѣетъ одно и то же содержаніе, суть также равны между собою.

(c) Ежели изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ, первая будетъ больше третей, то и вторая будетъ больше четвертой; естьли равна, то равна; и естьли мельше, то меньше.

извелъ; но на противъ принужденъ былъ сказать: Quoi qu'il en ſoit, il reſulte de ces obſervations que les definitions 9 et 10 d'Euclide ne peuvent être conſervées telles qu'elles ſont. Robert Simſon ſupprime la definition des ſolides égaux, qui en effet ne doit trouver place que parmi les théoremes, &c. Смотри страницу 323 его Елементовъ Геометрїи.

И такъ приведенное выше Евклидово опредѣленїе есть теорема, которую доказать надлежитъ, и которая дѣйствительно подлежитъ доказательству. Оное не индѣ искать надлежитъ какъ въ правилѣ наложенїя и способѣ предѣловъ. Но хотя и справедливо, что изъ приводимыхъ Симсономъ предложенїй можетъ быть выведено и дѣйствительно выводится равенство двухъ фигуръ; однако сїе не иначе учинено быть можетъ, какъ когда чрезъ правило наложенїя положится сему равенству доброе основанїе, ибо безъ того ни какое изъ помянутыхъ предложенїй къ тѣламъ приложить не можно; и по сему сїе правило, въ прочемъ простѣйшее и естественнѣйшее, есть самое первое, которое при доказательствѣ равенства двухъ тѣлъ употребить надлежитъ.

И чтобы защитить оное отъ возраженїй, кои не привыкшїе вникать въ подробности вещей сдѣлать могутъ; то приведемъ здѣсь писанное д' Аламбертомъ въ Енциклопедїи въ членѣ Geometrie къ защищенїю его.

„Правило наложенїя отнюдь не есть, какъ нѣкото-„рые новые Геометры говорятъ, механическое и грубое; „но напротивъ правило строгое, ясное, простое и извле-„ченное изъ истинной натуры вещей. Когда кто хочетъ „доказать, на примѣръ что два треугольника, имѣющїе „основанїя и углы при оныхъ равные, суть равны во

„всемъ между собою; тотъ правило наложенія употре-
„битъ съ успѣхомъ: изъ равенства предположеннаго
„основаній и угловъ, заключитъ по справедливости, что
„сіи основанія и углы положенные одни на другіе совмѣ-
„щаются; потомъ изъ совмѣщенія сихъ частей, ясно и
„чрезъ не посредственное слѣдствіе заключитъ и совмѣщеніе
„прочихъ, и слѣдственно равенство и совершенное подобіе
„двухъ треугольниковъ.

„И такъ правило наложенія не состоитъ въ грубомъ
„наложеніи одной фигуры на другую, для заключенія изъ
„того равенства ихъ, какъ плотникъ налагаетъ свой футъ
„на длину, для измѣренія ея; но состоитъ въ воображеніи
„одной фигуры перенесенною на другую, и заключеніи:
„1) Изъ предположеннаго равенства данныхъ частей, со-
„вмѣщеніе сихъ частей; 2) изъ сего совмѣщенія, совмѣщеніе
„прочихъ, и слѣдственно равенство цѣлое и совершенное
„подобіе двухъ фигуръ. И проч.

И точно то же самое говорить надлежитъ къ защи-
щенію правила наложенія въ тѣлахъ.

И такъ приложимъ сіе правило къ доказательству
тѣхъ предложеній, которыя нужны къ утвержденію на-
шего въ общемъ его смыслѣ пріемлемаго: *толщины призьмъ
имѣющихъ равныя высоты и основанія суть равны меж-
ду собою.*

1) Ежели каждой изъ двухъ толстыхъ угловъ будетъ
содержимъ въ трехъ плоскихъ, и плоскіе углы одного ра-
вны плоскимъ угламъ другаго, каждой каждому, и притомъ
разположены одинаково; то сіи толстые углы равны
между собою.

Пусть каждый изъ двухъ толстыхъ угловъ A и B Черт. 30.
содержитъ въ трехъ плоскихъ такъ, что CAD = FBG, CAE = FBH и EAD = HBG; отдѣли произвольныя AK, BL равныя между собою; возставь въ плоскостяхъ CAE, FBH перпенд. KM, LN, и въ плоскостяхъ EAD, HBG перпенд. KO, LP равные же между собою; протяни MQ, OS параллельно KA, и NR, PT параллельно LB; соедини M съ O, N съ P, Q съ S и R съ T линеями, и говори: Понеже AK = BL, KM = LN, углы AKM, BLN прямые и KAQ, LBR равные; то трапеціи AKMQ, BLNR будутъ совершенно равны между собою, и AQ = BR, QM = RN; такъ же докажется, что и трапеція AKOS = трап. BLPT, и AS = BT, OS = PT; потомъ, по причинѣ что AQ = BR, AS = BT и уголъ QAS = RBT, будетъ треуг. AQS = треугол. BRT, и QS = RT; и понеже AK, BL перпендикулярны къ плоскостямъ MKO, NLP, и MQ, OS параллельны AK, а NR, PT параллельны BL; то MQ съ OS и NR съ PT суть въ однѣхъ плоскостяхъ, между собою параллельны и къ плоскостямъ MKO, NLP перпендикулярны (a); почему протянувъ QV параллельно MO, и RW парал-

(a) Смотри предл. 8 и 9 одиннадцатой книги Евклидовыхъ Елементовъ.

Здѣсь да позволено будетъ спросить, для чего многіе новые писатели, относительно доказательствъ свойствамъ взаимно сопряженныхъ плоскостей и линей съ плоскостями, отступили отъ Евклида, и вмѣсто точныхъ и ясныхъ предложили слабыя и темныя? не уже ли сія Евклидова теорія имѣетъ какія либо трудности? Истинно я не нахожу путъ ни для самыхъ юныхъ умовъ ни чего затрудительнаго, и не вижу, какъ одну токмо странную преклонность къ нарушенію точности. И сколько я примѣтить могъ, то новые писатели наипаче стараются перемѣнить доказательство 6 му и 8 му Евклидовымъ предложеніямъ; но я не могу представить себѣ, чтобы такое ихъ путъ затрудняло.

лельно NP, найдешь, что прямоугольные треугольники QSV, RTW равны между собою, и что слѣдственно QV = RW и MO = NP; а по сему напослѣдокъ треугольникъ MKO будетъ = треугол. NLP и уголъ MKO = углу NLP.

Положивъ сïе, вообрази себѣ толстой уголъ B положеннымъ въ уголъ A такъ, что точка B лежитъ на точкѣ A, линея BF на AC и плоскость FBH на плоскости CAE; то во первыхъ, по причинѣ равенства угловъ FBH и CAE, линея BH ляжетъ на линею AE, и за тѣмъ что BL = AK и углы BLN, AKM прямые, точка L ляжетъ на точку K, и линея LN на KM; во вторыхъ, по причинѣ что BL, AK перпенд. къ плоскостямъ NLP, MKO, плоскость NLP ляжетъ на плоскость MKO, и за тѣмъ что уголъ NLP = углу MKO, LP ляжетъ на KO, и плоскость HBG на плоскость EAD; въ третьихъ по причинѣ равенства угловъ HBG, EAD, линея GB ляжетъ на DA и плоскость FBG на плоскость CDA. И такъ толстой уголъ A съ другимъ B совмѣщается безъ остатку, и слѣд. одинъ изъ нихъ другому равенъ.

Сïе предложенïе Робертомъ Симсономъ и нѣкоторыми другими издателями Евклидовыхъ Елементовъ доказано, но не общимъ способомъ, ибо они полагаютъ или оба перпендикуляра KM, KO встрѣчающимися съ линеями AC, AD, такъ какъ и перпендикуляры LN, LP встрѣчающимися съ линеями BF, BG, или по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ съ одною изъ тѣхъ линей.

2) Всякïя призмы содержимыя равномногими, равными, подобными и одинаково разположенными плоскостями суть равны между собою.

Пусть ABCFDE, GHKNLM двѣ призмы содержимыя равномногими, равными и подобными плоскостями, такъ что плоскость ABC равна и подобна плоскости GHK, плоскость AE равна и подобна плоскости GM, плоскость AF равна и подобна плоскости GN и плоскость BF равна и подобна плоскости HN; то говорю, призьма ABCFDE равна призьмѣ GHKNLM. Черт. 31.

Понеже толстой уголъ B содержимъ тремя плоскими ABE, CBE и ABC, которые равны плоскимъ угламъ GHM, KNM и GHK, содержащимъ толстой уголъ N; то толстой уголъ B толстому углу H равенъ; такъ же докажется, что и прочїе толстые углы одной призьмы равны прочимъ угламъ другой.

Положивъ сїе, помысли, что призьма GHKNLM положена въ призьму ABCFDE, такъ что точка H лежитъ на точкѣ B, линея GH на AB и плоскость GHK на плоскости ABC; то по причинѣ что плоскость ABC равна и подобна плоскости GHK, плоскость GHK совершенно соединится съ плоскостїю ABC, и за тѣмъ что толстой уголъ B = углу H и что плоскость BD равна и подобна плоскости HL, плоскость HL соединится и совмѣстится съ плоскостїю BD; подобнымъ образомъ разсуждая докажешь то же и о прочихъ плоскостяхъ. Но когда каждая изъ плоскостей и сторонъ одной призьмы лежитъ и совершенно закрываетъ каждую плоскость и сторону другой, то одна призьма съ другою совмѣщается; слѣд. и проч.

Примѣчанїе.

Сїе предложенїе Робертъ Симсонъ предположилъ 28 му одиннатцатой книги Евклид. Елементовъ, полагая по-

слѣднее слѣдствїемъ перваго; но Г. Лежандръ справедливо нѣкоторымъ образомъ примѣчаетъ (a), что Робертъ Симсонъ опровергая Евклидово доказательство сему 28 му предложенїю, какъ основанное на упомянутомъ выше 10 опредѣленїи, впадаетъ самъ въ неудобство, что основываетъ свое на совмѣщенїи, котораго тутъ не существуетъ. Я говорю справедливо нѣкоторымъ образомъ, потому что сїе слѣдствїе не вовсе не имѣетъ мѣста; ибо когда ребра параллелепипеда перпендикулярны къ основанїямъ, то Робертъ Симсонъ и оное слѣдствїе совершенно справедливы. И что бы то и другое дѣйствительно показать,
Черт. 52 возмемъ параллелепипедъ AG; я говорю, что когда ребра его не перпендикулярны, тогда двѣ трехстороннїя призмы DABFEH, DCBFGH, хотя въ прочемъ содержимыя равномногими, равными и подобными плоскостями, не могутъ быть такъ положены одна въ другую, что бы совмѣстилися. Ибо, толстой уголъ E съ G никоимъ образомъ совмѣститься не можетъ, по тому что плоск. угл. HEF равенъ плоск. угол HGF, но плоск. угол. AEF не равенъ плоск. угл. CGH, и плоск. угол. AEH не равенъ плоск. угл. CGF; такъ же и толстой уголъ A съ G совмѣститься не можетъ, потому что здѣсь хотя плоскїе углы одного равны плоскимъ угламъ другаго, однако расположены будучи неодинаково, не могутъ сдѣлать того, чтобы толстые углы A и G совмѣстилися. Напротивъ того когда ребра AE, BF, CG и DH параллелепипеда перпендикулярны къ основанїямъ AC и EG онаго, тогда совмѣщенїе угла E съ G непосредственно будетъ слѣдовать, а потомъ и цѣлое совмѣщенїе призмы DABFEH съ призмою DCBFGH.

(a) Смотри въ сочиненїи его, Note I^e sur quelques noms et definitions, pag. 280.

Для меня нѣкоторымъ образомъ удивительно, что сїе обстоятельство не пришло на мысль толь искусному толкователю Евклида, каковъ былъ Робертъ Симсонъ, тѣмъ наипаче, что онъ дѣлавши примѣчанїя свои на 25, 26 и 29 предложенїя XI книги Евклид. Елементовъ, былъ кажется въ самомъ выгодномъ положенїи, что бы усмотрѣть оное; ибо въ первомъ между прочимъ примѣчаетъ почти точно тоже самое, что и Лежандръ, а именно говоритъ: „Менелай въ 4 предложенїи первой книги своей Сферики доказываетъ, что сферическїе треугольники, которыхъ стороны взаимно равны, имѣютъ и углы равные; понеже удобно показать можно, что они должны совмѣститься, естьли *испытается, что стороны ихъ имѣютъ одинаковое расположенїе и порядокъ*„. Въ другомъ же замѣчаетъ, что 28 предложенїе не служитъ, какъ токмо къ утвержденїю 40го, и перваго случая 29 предложенїя XI книги, и потому предъ онымъ 29мъ Евклидомъ помѣщено было. Но всякой съ малымъ вниманїемъ усмотрѣть можетъ, что для сего случая нѣтъ ни малѣйшей надобности составлять особаго предложенїя, ибо оной докажется, такъ какъ остальные два случая доказаны; почему справедливое мѣсто 28 му было бы предъ 40мъ; но какъ сїе 40е есть послѣднее изъ предложенїй XI книги и служитъ леммою въ 3 предложенїю XII, то натуральнѣе думать, что какъ 28, такъ и зависящее отъ него 40е, помѣщено въ XI книгу не Евклидомъ, а какимъ нибудь неискуснымъ издателемъ его творенїя. И такъ, поелику XII книга толкуетъ наипаче о способѣ предѣловъ, кажется самое помѣщенїе сего 28 предложенїя въ XII книгу должно было заставить подозрѣвать Роберта Симсона, что для него одного наложенїя не довольно, или что изъ одного наложенїя оно не слѣдуетъ; что и дѣйствительно справедливо, какъ то мы выше примѣтили.

Г. Лежандръ неприемля способа предѣловъ, и употребляя оной, не примѣчая того, не сомнѣвается, чтобы не можно было доказать сіе 28 предложеніе и многія подобныя ему другія чрезъ посредство одного наложенія чиня нѣкое разрѣшеніе до безконечности простертое (a); но почитая таковое доказательство чрезъ мѣру сложнымъ для предмета, толико простаго, ввелъ на сей конецъ въ Геометрію *Симметрію*, какъ нѣкое начало. Такъ толстой уголъ A у него равенъ толстому углу G, для симметріи плоскихъ, оные толстые содержащихъ, и призьма DABFEH равна призьмѣ DCBFGH, для симметріи равныхъ плоскостей, сіи призьмы содержащихъ. И чтобы сію симметрію украсить нѣкоторымъ умствованіемъ, то присовокупилъ доводъ употребляемый въ Механикѣ при доказательствѣ законовъ упорности (d'inertie), говоря, что для одинаковыхъ обстоятельствъ съ той и другой стороны, нѣтъ причины, чтобы, на примѣръ уголъ A не былъ равенъ углу G, или чтобы призьма DABFEH не была равна призьмѣ DCBFGH. Но хотя сей доводъ и неоспоримъ, однако должно признаться, что для начинающихъ онъ крайне сомнителенъ, и Геометрія можетъ обойтись безъ него, нисколько не обременяя учащагося. При чемъ не безполезно замѣтить, что не оспоримость сего довода зависитъ наипаче отъ того, что каждое изъ одинаковыхъ обстоятельствъ съ своей стороны дѣлаетъ фигуру въ величинѣ непремѣнною; что слѣдуетъ изъ наложенія доказывающаго, что всѣ фигуры сопровождаемыя симъ обстоятельствомъ суть равны между собою; и послѣ сего, поелику обстоятельства съ обѣихъ сторонъ одинаковыя

(a) Смотри note VII, sur les figures Symmétriques, pag. 305 et 306 его Геометріи.

и при томъ таковыя, что каждое съ своей стороны дѣлаетъ фигуру въ величинѣ непремѣнною, дѣйствительно не имѣется никакой причины, чтобы одна фигура была не равна другой. Но какъ бы то ни было, сей доводъ для сказанной выше причины въ Геометріи мѣста имѣть не можетъ. И такъ упомянутое 28е предложеніе должно быть иначе доказано.

Между тѣмъ замѣтимъ, что послику оно въ ограниченномъ смыслѣ, то есть когда ребра параллелепипеда перпендикулярны къ основаніямъ онаго, есть истинное слѣдствіе предъ симъ доказаннаго нами предложенія, его можно и безъ того употреблять въ семъ ограниченномъ смыслѣ; что и неминуемо должно сдѣлать при доказательствѣ 31го предложенія Евклид. елемен.[1], когда тутъ пожелаешь избѣгнуть 25го, которое основано на теоріи величинъ пропорціональныхъ; и именно тутъ поступить надлежитъ такимъ образомъ:

Пусть на параллелограммахъ AK, KE, кои суть дополненія параллелограммовъ HF, BD, стоятъ два параллелепипеда KL, EM, имѣющіе основанія на однѣхъ параллельныхъ плоскостяхъ и ребра къ онымъ перпендикулярные, то дополнивъ ихъ параллелепипедами FQ и DR, получишь параллелепипедъ EL, и представивъ себѣ плоскость CGOP, раздѣлишь оною, какъ параллелепипедъ EL, такъ и параллелепипеды FQ и DR, на двѣ равныя части; откуда заключишь, что параллелепипеды KL, EM суть равны между собою. Черт. 33.

Потомъ съ помощію 29 предложенія XIтой книги Евклид. Елемен. заключишь, что вообще всякіе параллелепипеды, стоящіе на равныхъ параллелограммахъ, дополненіями называемыхъ, и имѣющіе основанія на однѣхъ параллельныхъ плоскостяхъ, суть равны между собою.

На конецъ послѣ сего не трудно уже доказать вообще, что параллелепипеды, стоящіе на всякихъ равныхъ параллелограммахъ и имѣющіе равные высоты, суть равны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть на равныхъ параллелограм-
Черт. 34. махъ AB, CD стоятъ два параллелепипеда AE, CF имѣющіе одну высоту и ребра перпендикулярные къ основаніямъ; я примѣчаю, что углы одного изъ параллелограммовъ AB, CD или равны или неравны угламъ другаго.

a Когда равны, такъ что угол. GAH (= GBH) = CKD = CLD и угол. AGB (= AHB = KCL (= KDL), то на продолженныхъ AH, BH сдѣлай HM = CL и HN = CK, и сострой параллелограммъ HO и на немъ параллелепипедъ OP той же высоты что и AE; я говорю, онъ будетъ равенъ параллелепипеду CF, ибо параллелепипедъ CF съ OP содержимы равномногими, равными и одинаково расположенными плоскостями, что удобно всякой примѣтить можетъ, начиная отъ плоскостей MP и CQ. Но по предложенному выше тотъ же параллелепипедъ OP равенъ AE, потому что параллелограммъ OH = GH и вмѣстѣ суть дополненія параллелограммовъ AM и BN, что удобно всякой доказать можетъ. Слѣд. и проч.

b) Когда же углы параллелограммовъ AB и CD не равны между собою, то сдѣлай на KD параллелограммъ KSRD, равный съ CD и равноугольный съ AB, и сострой на немъ параллелепипедъ SF; онъ по первому случаю будетъ равенъ параллелепипеду AE; но онъ же, по причинѣ равныхъ трехстороннихъ призьмъ CKZYTS, LDFQVR, равенъ параллелепипеду CF; слѣд. и проч.

И такъ съ помощїю 29го предлож. XIй книги Евкл. Елемен. заключимъ, что всякїе параллелепипеды стоящїе на равныхъ параллелограммахъ и имѣющїе одну высоту суть равны между собою.

Отсюда многїя слѣдствїя произвести можно, а имянно слѣдуетъ: что изъ двухъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одну высоту, тотъ большїй или меньшїй, которой имѣетъ большее или меньше основанїе; что два или многїя одной высоты параллелепипеды вмѣстѣ взятые равны одному, у коего высота таже, а основанїе равно основанїямъ ихъ вмѣстѣ взятымъ; что изъ двухъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одну высоту, одинъ другаго есть толико кратной или частной, колико основанїе одного есть кратное или частное основанїя другаго; что изъ двухъ параллелепипедовъ имѣющихъ одну высоту одинъ больше или меньше такой по кратной или частной величины другаго, когда основанїе его больше или меньше толико же кратной или частной величины основанїя сего другаго, и наконецъ что изъ двухъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одну высоту, одинъ разнствуетъ съ другимъ на параллелепипедъ, у коего основанїе равно разности основанїй сихъ двухъ параллелепипедовъ, а высота таже.

Точно тѣ же слѣдствїя имѣютъ мѣсто, когда у параллелепипедовъ вмѣсто высоты будутъ основанїя одинаковы.

3) Трехсторонная ри ьма равна параллелепипеду, у коего основанїе и высота равны основанїю и высотѣ призьмы.

Пусть ABCFED трехсторонная призьма и QS параллелепипедъ имѣющїй съ призьмою равныя основанїя Черт. 35.

и высоты. Раздѣли одну изъ сторонъ, какъ AB, основанія ABC призьмы на сколько ни есть равныхъ частей AB', B'B'', B''B''', B'''B; впиши въ сіе основаніе и опиши около него параллелограммы AC''', B'C'', B''C' и AG, B'G''', B''G'', B'''G'; и на оныхъ параллелограммахъ составь параллелепипеды, коихъ бы ребра были параллельны ребрамъ призьмы; отъ чего получатся вписанные въ призьму и описанные около оной параллелепипеды DC''', E'C'', E''C' и DG, E'G''', E''G'', E'''G'; я говорю, что вписанные взятые вмѣстѣ меньше, а описанные взятые вмѣстѣ больше, нежели призьма ABCFED и нежели параллелепипедъ QS: относительно призьмы сіе само собою явно; но относительно параллелепипеда сіе потому, что основанія вписанныхъ параллелепипедовъ взятые вмѣстѣ меньше, а описанныхъ больше, нежели треугольникъ ABC и слѣдственно такъ же нежели параллелограммъ QR.

Потомъ я примѣчаю, что разность между описанными параллелепипедами и вписанными равна параллелепипеду DG, ибо основанія параллелепипедовъ HG, H''G''', H'G''; E'''G', составляющихъ сію разность, вмѣстѣ взятыя равны основанію AG параллелепипеда DG и высота всѣхъ ихъ одинаковая. По чему когда каждая изъ частей, на которыя была раздѣлена сторона AB, раздѣлится на полы, и соотвѣтственно оному раздѣленію въ призьму впишутся и около нея опишутся другіе параллелепипеды, и такъ далѣе; то разность между описанными и вписанными параллелепипедами можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины, ибо отъ этого основаніе AG параллелепипеда DG равнаго оной разности, такъ какъ и самой сей параллелепипедъ, уменьшается на половину.

На конецъ говорю, призьма ABCFED и параллелепипедъ QS суть предѣлы вписаннымъ параллелепипедамъ, вмѣстѣ взятымъ. Ибо:

1) Между тѣмъ какъ величина сихъ вписанныхъ параллелепипедовъ вмѣстѣ взятыхъ чрезъ раздѣленіе на полы, которое безъ конца продолжаться можетъ, всѣхъ частей на которыя одна изъ сторонъ основанія раздѣлена была, и соотвѣтственное сему раздѣленію ихъ вписываніе возрастая перемѣняется, призьма ABCFED и параллелепипедъ QS пребываютъ непремѣнны, и слѣдственно суть величины непремѣнныя. 2) Оная величина вписанныхъ параллелепипедовъ чрезъ упомянутое дѣйствіе приближается какъ къ призьмѣ ABCFED такъ и къ параллелепипеду QS такимъ образомъ, что разность ея съ ними можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины; въ самомъ дѣлѣ, когда призьма ABCFED и параллелепипедъ QS меньше описанныхъ, а больше вписанныхъ параллелепипедовъ, и когда разность между описанными и вписанными чрезъ упомянутое дѣйствіе можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины, то явствуетъ, что разность призьмы ABCFED со вписанными въ нее параллелепипедами и разность параллелепипеда QS съ тѣми же вписанными параллелепипедами и паче меньше всякой по произволенію данной величины учиниться можетъ. 3) Совсѣмъ тѣмъ величина вписанныхъ параллелепипедовъ никогда равна ни призьмѣ ABCFED ни параллелепипеду QS не будетъ.

Откуда, для первой основательной истинны способа предѣловъ, заключимъ, что призьма ABCFED параллелепипеду QS равна.

Присовокупленіе. 1.

Трехсторонныя призьмы имѣющія равныя основанія и высоты суть равны между собою. Ибо, трехсторонныя призьмы, по предложенному теперь, равны параллелепипедамъ, у которыхъ основанія и высоты равны основаніямъ и высотамъ призьмъ; но таковые параллелепипеды суть равны между собою; слѣд. и проч.

Присовокупленіе. 2.

Всякая многосторонная призьма равна трехсторонной, у которой основаніе и высота равны основанію и высотѣ сей многосторонной.

Раздѣли многосторонную призьму на трехсторонныя, основанія оныхъ, кои суть треугольники, приведи подъ одну высоту, сдѣлай треугольникъ заключающій въ себѣ всѣ сіи основанія, составь на немъ трехсторонную призьму той же высоты, что и многосторонная, и раздѣли ее на другія трехсторонныя призьмы, такъ чтобы основанія ихъ были равны основаніямъ трехсторонныхъ призьмъ составляющихъ многосторонную; отъ чего однѣ трехсторонныя призьмы будутъ равны другимъ, и цѣлая многосторонная призьма равна цѣлой трехсторонной.

Откуда удобно уже заключить можно, что вообще всякія призьмы имѣющія равныя основанія и высоты суть равны между собою; и въ семъ то состояло V наше предложеніе. При чемъ не безполезно замѣтить, что оно доказано нами чрезъ посредство одного правила наложенія и способа предѣловъ, безъ помощи теоріи величинъ пропорціональныхъ.

Наконецъ здѣсь тѣже слѣдствія имѣютъ мѣсто, каковыя мы выше при параллелепипедахъ замѣтили.

Предложеніе VI.

Всякія пирамиды, на равныхъ основаніяхъ стоящія и равныя высоты имѣющія, суть равны между собою.

Поелику пирамиды можно раздѣлить на трехсторонныя и многосторонныя и поелику сіи послѣднія суть не иное что, какъ многія трехсторонныя во едино совокупленныя; то мы начнемъ съ трехсторонныхъ.

Пусть будетъ ABCD какая ни есть пирамида имѣющая основаніемъ треугольникъ ABC, а высотою линею AE; да будетъ сія высота раздѣлена на сколько нибудь равныхъ частей AE′, E′E″, E″E‴, E‴E; да протянутся чрезъ произшедшія точки дѣленія E, E″, E‴ параллельныя основанію плоскости E′GHR, E″LMS; E‴OPT; да впишутся въ пирамиду ABCD призмы AGHK, GLMN, LOPQ, и да опишутся около нея другія AGB′C, GLB″R, LOB‴S, ODFT; я говорю: Черт. 36.

1) Разность сихъ описанныхъ призмъ со вписанными равна призмѣ ODVX, у которой высота есть одна изъ частей, произшедшихъ отъ раздѣленія высоты пирамиды AE, а основаніе треуг. OXY, равный треуг. ABC, основанію пирамиды. Ибо, разность описанныхъ призмъ со вписанными составляютъ, какъ то само по себѣ явственно, призмы CH, RM, SP и TD, но призьма CH, равна призьмѣ XV′, призьма RM равна призьмѣ X′V″, призьма SP равна призьмѣ X″F; слѣд. и проч.

2) Когда каждая изъ частей, составляющихъ высоту AE, раздѣлится на полы и соотвѣтственно сему раздѣленію въ пирамиду впишутся и около нея опишутся

другія призьмы; и такъ далѣе, то разность между описанными и вписанными призьмами можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины. Ибо, когда сія разность равна призьмѣ имѣющей основаніемъ основаніе пирамиды, а высотою одну изъ частей, на кои раздѣлена высота пирамиды, то явствуетъ, что чрезъ раздѣленіе наполы сихъ частей, составляющихъ высоту пирамиды, и соотвѣтственное оному вписываніе тѣхъ и описываніе другихъ призьмъ, разность ихъ станетъ убывать на половину; но количество такъ убывающее можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякое по произволенію данное: слѣд. и проч.

3.) Пирамида вписаннымъ въ нее или описаннымъ около нея призьмамъ есть предѣлъ.

Для учиненія сего яснымъ стоитъ токмо повторить то, что въ концѣ каждаго изъ предъидущихъ предложеній нами предначертано было.

Черт. 37. Теперь пусть ABCD, EFGH двѣ трехсторонныя пирамиды, стоящія на равныхъ треугольникахъ ABC, EFG, и имѣющія равныя высоты AK, EL; то сіи высоты раздѣливъ на нѣсколько равныхъ частей, и въ каждую изъ пирамидъ вписавъ соотвѣтственныя раздѣленію призьмы, я говорю, что изъ оныхъ вписанныя въ одной пирамидѣ равны вписаннымъ въ другой. Ибо, пусть MNOPQR, STVXYZ будутъ однѣ изъ таковыхъ призьмъ соотвѣтствующія равнымъ частямъ $A'K'$, $E'L'$ и равнымъ сихъ частей разстояніямъ AA', EE' отъ основаній; то по причинѣ параллельныхъ $K'N$ съ KD, NP съ AC и $L'T$ съ LH, TX съ EG, учинимъ сіи пропорціи: $KK' : KA = NP : AC$, $LL' : LE = TX : EG$, изъ нихъ, попричинѣ что

KK′ = LL′ и что KA = LE, выдетъ NP : AC = TX : EG и удвоен. содер. линей NP, AC = удвоен. содер. линей TX, EG; и по сему будетъ треу. NOP : треу. ABC = треу. TVX : треу. EFG, и (за тѣмъ что по положенію треу. ABC = EFG) треу. NOP = треуг. TVX. И такъ основанія призьмъ MNOPQR, STVXYZ равны между собою и по причинѣ одной высоты, самыя сіи призьмы равны между собою. То же и такъ же докажется о всякихъ другихъ соотвѣтственныхъ призьмахъ; слѣдов. заключимъ и проч.

Положивъ же сіе, говорю на конецъ, что пирамиды ABCD, EFGH суть равны между собою. Ибо онѣ суть предѣлы одной величины, а именно вписаннымъ въ ту или другую пирамиду призьмамъ вмѣстѣ взятымъ.

Послѣ сего точно такъ же поступить надлежитъ при доказательствѣ въ общемъ смыслѣ сего предложенія, какъ поступлено было при таковомъ же доказательствѣ предъидущаго предложенія. И здѣсь точно тѣже слѣдствія имѣютъ мѣсто, какія тамъ примѣчены были.

Присовокупленіе.

Въ заключеніе обѣихъ сихъ предложеній остается замѣтить, что взаимное сравненіе призьмы и пирамиды, у которыхъ основанія и высоты равны между собою, находится въ 7 мъ предложеніи XII книги Евклидовыхъ Елементовъ. Что же принадлежитъ до сравненія усѣченной пирамиды съ цѣлою, и слѣдственно такъ же и съ призьмою, то Геометры обыкновенно сіе доказываютъ чрезъ посредство Алгебры; но Г. Камусъ подражая доводу употребленному Евклидомъ въ упомянутомъ 7 предложеніи, доказалъ то же Геометрически, и именно поступилъ тушъ почти такимъ образомъ.

Черт. 38. Пусть ABCDEF усѣченная трехсторонная пирамида; чрезъ точки, A, C и E представь себѣ плоскость ACE, ее разсѣкающую на пирамиду ABCE и пирамиду ACDEF, и чрезъ точки C, E и F еще плоскость CEF, послѣднюю пирамиду разсѣкающую на двѣ пирамиды ACFE, CDFE, имѣющія вершиною точку E, а основаніями треугольники ACF, CDF; потомъ на продолженіи FD возьми FG = AC, протяни EG и CG и вообрази плоскость CEG по симъ линеямъ проходящую; получишь пирамиду FEGC, которая, я говорю, равна пирамидѣ ACFE. Ибо пирамид. ACFE: пирамид. CDFE = треуг. ACF: треуг. CDF = AC: FD; такъ же пирамид. FEGC: пирамид. CDFE = треуг. FGE: треуг. FED = FG(= AC): FD; слѣд. и проч. И такъ теперь можно сказать, что усѣченная пирамида состоитъ изъ сихъ трехъ, изъ пирамиды ABCE, пирамид. FEDC и пирамид. FEGC, которыя имѣютъ одну высоту равную высотѣ усѣченной пирамиды, а основаніями первыя двѣ, основанія ABC, FED усѣченной пирамиды, а послѣдняя треуголь. FEG. Я говорю, сей треугольникъ есть средняя пропорціональная площадь между основаніями ABC, FED усѣченной пирамиды. Ибо, по причинѣ равныхъ угловъ BAC, EFD и равныхъ AC, FG, треуг. ABC: треуг. FEG = AB: FE = AC: FD; такъ же треуг. FEG: треуг. FED = FG (= AC): FD; слѣд. и проч. И такимъ образомъ усѣченная пирамида равна цѣлой, у которой та же высота, что и усѣченной; а основаніе площадь равная вмѣстѣ взятымъ основаніямъ усѣченной пирамиды и средней пропорціональной между ими площади.

Напослѣдокъ замѣтимъ, что сїе удобно уже разпространить можно ко всякимъ усѣченнымъ пирамидамъ.

Предложенїе VII.

Всякой Цилиндръ и всякая призьма, имѣющїя равныя основанїя и высоты, суть равны между собою.

Сїе предложенїе можетъ быть доказано или изъ одного правила наложенїя съ помощїю способа предѣловъ, или изъ правила наложенїя соединеннаго съ теорїею величинъ пропорцїональныхъ, но такъ же, съ помощїю способа предѣловъ.

Въ первомъ доказательствѣ вписыванїе въ цилиндръ призьмъ и описыванїе около онаго другихъ надлежитъ учинить подобно тому, какъ вписыванїе въ кругъ многоугольниковъ и описыванїе около онаго другихъ въ третей леммѣ перваго предложенїя при первомъ ея доказательствѣ сдѣлано было; въ другомъ же подобно тому, какъ при другомъ сея леммы доказательствѣ оное вписыванїе и описыванїе учиненно было. Въ прочемъ я не нахожу за нужное предлагать доказательства сему предложенїю во всей подробности. Ибо всякой примѣняясь къ предъидущимъ доказательствамъ, удобно самъ сїе сдѣлать можетъ.

Предложенїе VIII.

Всякой конусъ и всякая пирамида, имѣющїя равныя основанїя и высоты суть равны между собою.

Сїе предложенїе такъ же всякой, примѣняясь къ предъидущимъ предложенїямъ, удобно самъ доказать можетъ.

Предложенїе IX.

Шаръ равенъ пирамидѣ, у которой основанїе поверьхность шара, а высота радїусъ его.

Для доказательства сего предложенїя надлежитъ знать слѣдующїя леммы:

1) Естьли на данной прямой линеи составится точная половина какого ни есть правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ что бы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми, то тѣло, которое произойдетъ отъ обращенїя сея половины многоугольника около данной линеи, равно пирамидѣ, у коей основанїе площадь равная поверьхности описанной полупериметромъ сего многоугольника, а высота перпендикуляръ отъ центра онаго.

Доказательство сея леммы зависитъ отъ слѣдующихъ случаевъ:

Черт. 39 a) Ежели треугольникъ ABC около одной изъ сторонъ своихъ AC совершитъ цѣлое обращенїе, то тѣло, которое оный треугольникъ произведетъ и которое равно конусу имѣющему высотою сїю сторону AC, а основанїемъ кругъ описанный перпендикуляромъ BD, на нее изъ вершины противолежащаго угла B опущеннымъ, равно пирамидѣ, у коей основанїе площадь равная поверьхности, описанной одною изъ двухъ другихъ сторонъ AB треугольника ABC, а высота перпендикуляръ CE, на нея изъ вершины противолежащаго угла опущенной. Ибо, для подобїя треугольниковъ ACE и ABD, AC : CE = AB : BD, но AB : BD = поверьх. описан. лин. AB (= P) : круг. радїу. BD (= Q); чего ради AC : CE = P : Q, и для 9 предложенія XIIй книги Евклидовыхъ Елементовъ произведенное треугольникомъ ABC тѣло упомянутой пирамидѣ равно.

b) Ежели треугольникъ ACB вмѣсто стороны AC совершитъ цѣлое обращеніе около линеи CG преходящей чрезъ вершину одного изъ угловъ его C; то тѣло произведенное имъ равно пирамидѣ, у коей основаніе площадь равная поверьхности, описанной стороною AB противолежащею оному углу, а высота перпендикуляръ CE, изъ вершины сего угла на оную сторону опущенный. Ибо, продолжи сторону AB до пресѣченія CG въ D, выдетъ треугольникъ CBD, отъ обращенія коего около линеи CG произшедшее тѣло равно пирамидѣ, у коей основаніе площадь равная поверьхности описанной линеею BD, а высота перпендикуляръ CE; но отъ обращенія треугольника CAD около той же линеи CG произшедшее тѣло равно пирамидѣ, у коей основаніе площадь равная поверьхности описанной линеею AD, а высота тотъ же перпендикуляръ CE; слѣдовательно, поелику произшедшее отъ обращенія треугольника BAC около линеи CG тѣло есть разность сихъ тѣлъ, оно равно пирамидѣ, у коей основаніе площадь равная разности поверьхностей описанныхъ линеями BD и AD, а высота перпендикуляръ CE; и какъ сія разность поверьхностей есть поверьхность описанная линеею AB, что слѣдуетъ и проч. Черт. 40.

c) Наконецъ, ежели AB не пресѣкается съ CG и есть къ оной параллельна, то при доказательствѣ сего случая такъ поступить надлежитъ. Опусти на CG перпендикуляры AD, BF, выдетъ прямоугольникъ ABFD, и отъ обращенія коего около линеи CG произойдетъ цилиндръ; но отъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACD, Черт. 41.

BCF, на кои прямоугольникъ ABFD избыточествуетъ противъ даннаго треугольника ABC, въ тоже самое время произойдетъ два конуса, кои вмѣстѣ составляютъ треть цилиндра; чего ради тѣло произшедшее отъ обращенія треугольника ACB есть двѣ трети онаго, или равно конусу, у коего основаніе кругъ описанный линеею BF или AD, а высота линея AB въ два раза взятая. Потомъ опусти перпендикуляръ CE, которой равенъ BF или AD, означь AB чрезъ a, CE чрезъ b, площадь равную поверьхности описанной линеею AB чрезъ P и кругъ описанный перпендикуляромъ CE чрезъ Q; будетъ $P : Q = b : \frac{a}{2} = 2b : a$; откуда для упомянутаго Евклидова предложенія слѣдуетъ, что конусъ, у коего основаніе кругъ Q, а высота 2b, равенъ пирамидѣ, у коей основаніе площадь P, а высота перпендикуляръ a; но оный конусъ равенъ тѣлу произведенному треугольникомъ ABC; слѣд. и проч.

Теперь представь себѣ упомянутую половину многоугольника, состроенную на данной линеи: прямыя изъ вершинъ угловъ ея въ средину данной линеи протянутыя, раздѣлятъ ее на треугольники, у которыхъ высоты, взятыя отъ оной средины, будутъ перпендикуляры отъ центра сего многоугольника, и того для равныя между собою, почему, для предложенныхъ предъ симъ случаевъ, тѣло произведенное обращеніемъ сея половины многоугольника, будетъ дѣйствительно выше упомянутой пирамидѣ равно.

Откуда слѣдуетъ, что естьли въ полукругъ впишется половина правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ что бы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми, тѣло произшедшее отъ обращенія сея половины около діаметра полукруга меньше нежели пирамида, у коея основаніе площадь равная поверьхности шара произведеннаго обращеніемъ полукруга, а высота радіусъ его;

и что естьли около тогоже полукруга опишется половина правильнаго многоугольника, четное число сторонъ имѣющаго, такъ что бы всѣ стороны ея пребыли цѣлыми, то тѣло произшедшее отъ обращенія сея половины многоугольника больше, нежели упомянутая пирамида.

Здѣсь, не такъ какъ въ поверьхностяхъ, само по себѣ уже явственно, что первое изъ сихъ тѣлъ меньше, а другое больше, нежели шаръ, въ коемъ перьвое вписано, и около коего другое описано.

2) Разность между сими тѣлами, около шара описаннымъ и подобнымъ въ оной вписаннымъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ, ихъ произведшихъ, можетъ учиниться меньше, нежели всякая по произволенію данная величина.

Пусть ABCDEF тѣло извѣстнымъ образомъ въ шаръ вписанное и GHKLMN подобное около шара описанное; я говорю, что послѣднее къ первому въ утроенномъ содержаніи перпендикуляровъ отъ центра OQ и OP двухъ полумногоугольниковъ GHKLM и ABCDE, произведшихъ сіи тѣла, ибо выше въ IV предложеніи примѣчено, что сіи тѣла состоятъ изъ подобныхъ конусовъ цѣлыхъ и усѣченныхъ. Впрочемъ сіе слѣдуетъ изъ того, что оныя тѣла равны пирамидамъ, у коихъ высоты перпендикуляры OQ и OP, а основанія площади находящіяся въ удвоенномъ содержаніи сихъ перпендикуляровъ, и кои, хотя бы были и не подобны, всегда суть въ утроенномъ содержаніи высотъ своихъ OQ и OP. Черт. 39.

Пусть T описанное около шара тѣло, t подобное вписанное, C шаръ, r перпендикуляръ OQ, и перпендикуляръ OP и D данная величина, которой разность $T - t$ должна быть сдѣлана меньше; возьми отъ C такую частную величину $\frac{C}{n}$, чтобы оная была меньше D, и сыщи къ r и u четвертую пропорцїональную y, такъ чтобы было $r : u = u : z = z : y$; я говорю, что естьли разность $r - u$ меньше трети толико же частной величины $\frac{y}{n}$ сей четвертой пропорцїональной y, то требуемое сдѣлано.

Въ самомъ дѣлѣ, поелику T, t суть въ утроенномъ содержанїи линей r и u; то будетъ $T : t = r : y$ и $T - t : \frac{t}{n} = r - y : \frac{y}{n}$; и какъ (по причинѣ что $r - u : u - z : z - y = r : u : z$ и что $u < r$, и $z < u$) $z - y < u - z < r - u < \frac{1}{3} . \frac{y}{n}$, то выдетъ $(r - u) + (u - z) + (z - y) < \frac{y}{n}$, или, по причинѣ что сумма разностей каждыхъ двухъ величинъ сряду взятыхъ равна разности крайнихъ, $r - y < \frac{y}{n}$, и потому $T - t < \frac{t}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Естьли же $r - u$ не меньше $\frac{1}{3} \frac{y}{n}$, то чрезъ удвоенїе числа сторонъ многоугольниковъ сдѣлай $r - u' < \frac{1}{3} . \frac{y}{n}$, и пусть тогда описанное и вписанное тѣла будутъ T', t', и четвертая пропорцїональная къ r и u' будетъ y', то, поелику $y' > y$ (a), $r - u'$ будетъ и паче $< \frac{1}{3} \frac{y'}{n}$; и потому, какъ и прежде, выдетъ $T' - t' < \frac{t'}{n} < \frac{C}{n} < D$.

Положивъ сїе, не остается болѣе, какъ повторить обыкновенно при концѣ сего роду предложенїи чинимое разсужденїе. И такимъ образомъ сїе предложенїе доказано.

(a) Что $y' > y$, то потому: когда учинишь сїю пропорцїю $r : u' = z : s$, то по причинѣ пропорцїи $r : u = z : y$, выдетъ $s > y$, но по причинѣ пропорцїи $r : u' = z' : y'$ и потому что $z' > z$, какъ то выше доказано было, будетъ $y' > s$, слѣд. и проч.

Присовокупленіе.

Откуда слѣдуетъ, что шаръ равенъ конусу, у коего основаніе удвоенный большій кругъ шара, а высота діаметръ его; и какъ таковый конусъ есть двѣ трети цилиндра около шара описаннаго, то слѣдуетъ еще, что шаръ равенъ двумъ третямъ онаго цилиндра.

На конецъ точно такъ же докажется, что секторъ шара равенъ конусу, у коего высота радіусъ его, а основаніе кругъ равный части поверьхности шара, ему принадлежащей.

Что же принадлежитъ до сегмента шара; то оный равенъ разности сектора и конуса, которой останется отъ сего послѣдняго по отнятіи перваго тѣла.

Впрочемъ, когда къ отрѣзку AB, діаметру BD и радіусу CD сыщется четвертая пропорціональная, и положится сперва отъ A до E, потомъ отъ C до E′; то прямой конусъ FEG равенъ будетъ сектору шара CFDG, а прямой конусъ FE′G равенъ сегменту FDG. Ибо: 1) Понеже по положенію $AB : BD = CD : AE$, и $AB : BD =$ круг. радіу. AF : круг. радіу. DF; то будетъ круг. радіу. AF : круг. радіу. $DF = CD : AE$, и конусъ FEG равенъ конусу, у коего основаніе круг. радіу. DF, а высота CD; но сей конусъ равенъ сектору шара FDGC; слѣд. и проч. 2) Понеже по положенію $AB : BD = CD : CE'$ и прежде было $AB : BD = CD : AE$, то $AE = CE'$, и два конуса FCG и FE′G купно равны одному FEG; но конусъ FEG равенъ сектору FDGC; слѣдовательно по отнятіи общаго конуса FCG, выдетъ сегментъ FDG равенъ конусу FE′G. Черт. 42.

Примѣчаніе.

Новые Геометры слѣдуя способу не раздѣлимыхъ доказываютъ прямо, что шаръ есть двѣ трети цилиндра, около его описаннаго; но подражая имъ, мы по способу предѣловъ такъ же сіе учинить можемъ, а именно такимъ образомъ:

Черт. 43. 1) Естьли высота AB полушара CBD раздѣлится на сколько ниесть равныхъ частей AB', $B'B''$, $B''B'''$, $B'''B$, и соотвѣтственно онымъ частямъ въ оной полушаръ впишутся цилиндры ED', $E'D''$, $E''D'''$ и около его опишутся другіе CF, $C'F'$, $C''F''$, $C'''F'''$; то разность сихъ описанныхъ цилиндровъ со вписанными равна цилиндру GH, у коего высота BB''', одна изъ частей, на кои высота сегмента AB раздѣлена, а основаніе GK равное основанію CD полушара. Ибо, цилиндръ $CF =$ цилиндру GH, и цилиндръ $ED' =$ цилиндру $G'H'$; слѣд. и разность CF съ ED', или цилиндрическая крона $C'CED'FD$, $=$ разности GH съ $G'H'$, или цилиндрической кронѣ $LGG'H'HK$; такъ же докажется равенство и прочихъ; слѣд. и проч.

Отсюда слѣдуетъ, что разность между описанными и вписанными цилиндрами чрезъ раздѣленіе наполы частей, на кои высота полушара раздѣлена, и соотвѣтственное оному ихъ описаніе и вписаніе можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая по произволенію данная величина.

И понеже полушаръ больше вписанныхъ въ него цилиндровъ, а меньше описанныхъ; то присоединивъ къ сему доводы подобные тѣмъ, кои въ предъидущихъ предложеніяхъ при таковомъ обстоятельствѣ учинены были, заключимъ, что полушаръ есть предѣлъ цилиндрамъ въ него вписаннымъ.

2.) Ежели высота MP тѣла $MPOQN$, произшедшаго чрезъ отнятіе прямаго конуса POQ отъ прямаго цилиндра $MPNQ$, раздѣлится на сколько несть равныхъ частей MM', $M'M''$, $M''M'''$, $M'''P$ и соотвѣтственно онымъ частямъ въ сіе тѣло впишутся цилиндрическія кроны $MM'XRSYN'N$, $M'M''X'R'S'Y'N''N'$, $M''M'''X''R''S''Y''N'''N''$, и около его опишутся другіе $MM'N'N$, $M'M''ZXYVN''N'$, $M''M'''Z'X'Y'V'N'''N''$, $M'''PP'X''Y''Q'QN'''$; то разность сихъ описанныхъ цилиндрическихъ кронъ со вписанными равна цилиндру $M'''PQN'''$, у коего высота $M'''P$ одна изъ частей, на кои высота MP онаго тѣла раздѣлена, а основаніе PQ равное основанію того тѣла. Ибо, цилиндръ $RY =$ цилинд. $Z''Q'''$, крона $R'X'ZXYVY'S' =$ кронѣ $Z'P''P'''Z''V''Q'''Q''V'$, и проч. Черт. 44.

Отсюда слѣдуетъ, что разность между описанными и вписанными кронами чрезъ раздѣленіе напололы частей, на кои высота тѣла $MPOQN$ раздѣлена, и соотвѣтственное оному ихъ описаніе и вписаніе можетъ сдѣлаться меньше, нежели всякая данная величина.

И понеже тѣло $MPOQN$ больше вписанныхъ въ него кронъ, а меньше описанныхъ, то заключимъ, что оно есть предѣлъ вписаннымъ въ него кронамъ.

3.) Цилиндръ и цилиндрическая крона, имѣющая равныя высоты и основанія, суть равны между собою.

Пусть будетъ цилиндръ AB, и цилиндрическая крона $CEFD$, кои при равныхъ высотахъ имѣютъ равныя основанія, такъ что кругъ $P =$ кронѣ или разности Q круговъ R и S; то за тѣмъ что $Q + S = R$, будетъ $P + S = R$ и цилиндръ AB купно съ EF равенъ цилиндру CD, и по- Черт. 45.

шому цилиндръ $AB =$ цилиндру CD безъ цилиндра EF; но цилиндр. CD безъ цилиндра EF есть цилиндрическая крона $CEFD$; слѣд. и проч.

Черт. 43 и 44 4.) Полушаръ CBD, у коего основаніе наибольшій кругъ CD, а высота радіусъ AB, и тѣло $MPOQN$, у коего основаніе MN тотъ же наибольшій кругъ, а высота MP равная радіусу AB, суть равны между собою.

Раздѣли высоты AB, MP на сколько нибудь равныхъ и одинаковыхъ частей, и въ полушаръ CBD, и въ тѣло $MPOQN$ впиши цилиндры и кроны соотвѣтственныя раздѣленію высотъ; я говорю, цилиндры кронамъ равны.

Понеже $(\overline{B''D''})^2 = (\overline{AD''})^2 - (\overline{AB''})^2 = MP^2 - (\overline{MM''})^2 = (\overline{O''M''})^2 - (\overline{O''X'})^2$; то основаніе $C''D''$, цилиндра $E'D''$, $=$ основанію $M''X'Y'N''$, цилиндрической кроны $M'M''X'R'S'Y'N''N'$, и по причинѣ одинаковой оныхъ высоты, самой цилиндръ равенъ самой сей кронѣ. Такъ же докажется равенство и прочихъ. Слѣд. и проч.

Но понеже полушаръ CBD и тѣло $MPOQN$ суть предѣлы сей одной и взаимно равной величинѣ, кою или вписанныя въ полушаръ CBD цилиндры или вписанныя въ тѣло $MPOQN$ цилиндрическія кроны вмѣстѣ составляютъ; то слѣдуетъ, что полушаръ CDB тѣлу $MPOQN$ равенъ.

И такъ полушаръ CBD есть $\frac{2}{3}$ цилиндра CH, около его описаннаго.

Присовокупленіе 1.

Понеже конусъ, у коего высота радіусъ шара, а основаніе кругъ имѣющій радіусомъ линею BC, есть такъ же

$\frac{2}{3}$ цилиндра, около полушара описаннаго; то явствуетъ, что полушаръ сему конусу равенъ. И понеже кругъ, у коего радіусъ линея BC, есть поверьхность полушара; то слѣдуетъ, что полушаръ равенъ еще конусу, у коего высота радіусъ, а основаніе площадь равная выпуклой части поверьхности его.

Присовокупленіе 2.

Естьли полушаръ AMD разсѣчется плоскостью HK, параллельною основанію его, то тѣло AHKD, именуемое Зона, равно конусу, у коего высота та же что и у Зоны, а основаніе удвоенной наибольшій кругъ AD сложенный съ верхнимъ Зоны основаніемъ HK. Черт. 46.

Понеже чрезъ подобное предложенному предъ симъ доказательство найдется, что Зона AHKD равна тѣлу ABEFGCD, оставшеѣуся по отнятіи отъ цилиндра AC конуса EFG; то явствуетъ, что она будетъ равна конусу, у коего высота та же, что и высота FL зоны, цилиндра и конуса EFG, а основаніе кругъ равный тремъ кругамъ радіуса AF безъ круга радіуса EL; но (по причинѣ что кругъ радіуса EL = кругу радіуса AF безъ круга радіуса LH) 3 круга радіуса AF безъ круга радіуса EL = двумъ кругамъ радіуса AL съ кругомъ радіуса LH; слѣд. и проч.

Присовокупленіе 3.

Секторъ шара FHMK равенъ конусу, у коего высота равная высотѣ сегмента шара ML, а основаніе удвоенный наибольшій кругъ AD.

Понеже зона AHKD равна конусу, у коего высота FL, а основаніе удвоенный кругъ AD съ кругомъ HK;

то можно сказать, что она равна суммѣ двухъ конусовъ, у коихъ высота одинаковая и равная FL, а основанїе у одного удвоенный кругъ AD или кругъ радїуса AM, а у другаго кругъ HK; и какъ конусъ, у коего высота FL, а основанїе кругъ HK, есть FHK, то по отнятїи отъ зоны AHKD конуса FHK оставшееся тѣло AHFKD будетъ равно конусу, у коего высота FL, а основанїе кругъ радїуса AM; но понеже Секторъ шара FHMK есть избытокъ полушара, которой равенъ конусу, имѣющему высотою радїусъ MF, а основанїемъ кругъ радїуса AM, предъ тѣломъ AHFKD; то заключимъ и проч.

Присовокупленїе 4.

Отсюда слѣдуетъ, что секторъ шара равенъ еще конусу, у коего основанїе кругъ равный части поверьхности шара, ему принадлежащей, а высота радїусъ его.

Понеже все дѣло состоитъ токмо въ доказательствѣ, что конусъ, у коего высота ML, а основанїе кругъ радїу. AM, равенъ другому, у коего высота радїусъ сектора FM, а основанїе кругъ радїуса HM; то замѣтивъ, что кругъ радїус. AM : круг. радїу. HM = FM : LM, для 9 предл. XII книги Евклид. Елемен. заключимъ и проч.

ГЛАВА II,

содержащая точное и ясное доказательство тѣхъ первоначальной Геометрiи предложенiй, въ коихъ изъискивается пропорцiональность двухъ величинъ одной изъ трехъ родовъ протяженности съ двумя другими величинами той же или иной простѣйшей протяженности.

Поелику сiе доказательство требуетъ основательнѣйшаго знанiя общихъ свойствъ пропорцiональныхъ величинъ, то прежде, нежели къ оному приступимъ, предложимъ о пропорцiональныхъ величинахъ общее ученiе.

Ничего по видимому легче и простѣе нѣтъ сего ученiя и ничто по видимому не должно быть его совершеннѣе, поелику оно у милiона людей въ рукахъ, такъ сказать, перебывало; однако не смотря на то, оно болѣе не совершенно, нежели всѣ другiя труднѣйшiя. И чтобы сiе показать дѣйствительно, а не сказать токмо, то разсмотримъ состоянiе, въ которомъ оно по сiе время находится.

Ученiе оное, въ каковомъ по сiе время находится состоянiи, можно раздѣлить на ученiе древнихъ и ученiе новыхъ Геометровъ.

Древнiе, какъ то явственно изъ Евклидовыхъ Елементовъ, его основали на слѣдующихъ двухъ опредѣленiяхъ.

1),, Величины, говорится, суть въ томъ же содержанiи, ,,первая ко второй и третiя къ четвертой, когда равно-,,кратныя первой величины и третьей и равнократныя ,,второй величины и четвертой, взятыя всячески, равны

„суть купно каждая каждой, или купно одна другой боль-
„ше, или купно меньше. Евкли. Елемен. книга V, опредѣл. 5.

2)„ Когда же изъ равнократныхъ первой и третей вели-„чинъ и такъ же равнократныхъ второй и четвертой „кратная первой больше кратныя второй, но кратная „третьей не больше кратныя четвертой; то говорится, „первая величина имѣетъ ко второй большее содержанiе, „нежели третiя къ четвертой. Евклид. Елемен. книга V, опредѣл. 7 (a).

Многiе думаютъ, что для сего ученiя нужно такъже и слѣдующее опредѣленiе: „величины, говорится, имѣютъ „содержанiе одна другой, когда меньшая взятая кратно, „можетъ превзойти другую большую„ Евклид. Елемен. книга V, опредѣл. 4. Но сiе опредѣленiе въ самомъ дѣлѣ нужно не такъ какъ опредѣленiе, но какъ аксiома; и слова „*говорится, содержанiе*„ приложены къ оной вѣроятно не Евклидомъ, а какимъ нибудь нескуснымъ издателемъ его творенiя, ибо не входя въ дальнѣйшiя сему доказательства, довольно сказать, что содержанiю, собственно такъ называемому, вообще одного количества къ другому не возможно сдѣлать математическаго опредѣленiя (b).

(a) Г. Кестнеръ думаетъ, что сiе Евклидово ученiе основано на 6 и 8 опредѣленiяхъ, кои суть метафизическiя и помѣщены въ Евклида какимъ нибудь нескуснымъ издателемъ его творенiя; но Кестнеру по многочисленнымъ его упражненiямъ простительно такъ заблуждаться.

(b) Правда въ Евклидѣ сверьхъ сего приведеннаго находится еще иное опредѣленiе содержанiю, а именно: „*содержанiе есть взаимное нѣкое отношенiе двухъ однородныхъ величинъ по ихъ количеству*„; но оное ни къ чему не служитъ и ученiе древнихъ о про-

И хотя въ предначертанныхъ предъ симъ двухъ Евклидовыхъ определенiяхъ употреблено слово содержанiе, коего смыслъ не извѣстенъ и не полагается даже извѣстнымъ, однако сiе (когда говорится тутъ, что содержанiе, то есть то, о чемъ никакого понятiя не подано, есть тоже или равно, больше или меньше, нежели другое) не противорѣчитъ тому, что я утверждаю, ибо слова „*тоже, равно, больше и меньше*,, тутъ, какъ то замѣчаетъ Робертъ Симсонъ (въ книгѣ своей, the Elements of Euclid pag. 319), имѣютъ совсѣмъ различной смыслъ отъ того, въ коемъ онѣ приемлются при величинахъ: онѣ вмѣстѣ съ словомъ содержанiе тутъ не больше значатъ, какъ простое наименованiе, имя тѣхъ свойствъ, о коихъ въ сихъ определенiяхъ упоминается. И справедливо примѣчаетъ Жамесъ Вильямсонъ (въ книгѣ своей, the Elements of Euclid with dissertations, dissertation VI, pag. 136) что въ семъ Евклидовомъ ученiи можно даже и совсѣмъ не употреблять слово содержанiе.

И такъ сiи два токмо Евклидова опредѣленiя составляютъ истинное основанiе его ученiя о пропорцiональныхъ величинахъ.

Первое изъ нихъ не подвержено ни какому возраженiю; но противъ втораго, защищаемаго Робертомъ Симсономъ, такъ какъ и противу предложенiй, которыя на ономъ имѣютъ свое основанiе, Томасъ Симпсонъ возсталъ всѣми своими силами; и хотя возраженiя сего извѣстнаго Геоме-

---

порцiональныхъ величинахъ ни какой съ нимъ связи не имѣетъ. Славной Барро въ концѣ третьей своихъ лекцiй на 1666 годъ называетъ его метафизическимъ и мрачнымъ, и говоритъ, что математика отъ него нисколько не зависитъ и изъ него ничего выведено быть не можетъ.

тра не столько устремлены на Евклида, какъ паче на востановителя и толкователя онаго Роберта Симсона, однако довольно ясно показуютъ неудобства съ симъ Евклидовымъ ученіемъ сопряженныя. Смотри въ книгѣ его the Elements of Geometry отъ стран. 268 до 275, изданіе четвертое. — Тутъ Томасъ Симпсонъ наипаче убѣждаетъ, что бы ученіе о пропорціональныхъ величинахъ не было основано, какъ на первомъ токмо изъ приведенныхъ выше опредѣленій; и что мнѣ кажется весьма справедливо, ибо упоминаемое свойство въ другомъ опредѣленіи, какъ отличительный признакъ наименованія „одно содержаніе больше другаго„ по взятіи кратныхъ не постоянно и не всегда наблюдается. Напримѣръ пусть взяты будутъ сіи четыре величины: 8, 4, 5 и 3; то 8×4 больше 4×7, когда 5×4 не больше 3×7, но въ другомъ случаѣ 8×3 больше 4×4, когда и 5×3 больше 3×4. Правда Евклиду не нужно, какъ токмо единожды найти сіе свойство, при одномъ какомъ нибудь взятіи кратныхъ; но сія самая единственность, на удачу отысканная, дѣлаетъ, что доказательства, наономъ опредѣленіи основанныя, остаются въ умѣ нашемъ сомнительнѣйшими. Сверьхъ того противъ Евклидова ученія можно сказать еще, что оно принужденно и не прямо.

Ученіе о пропорціональныхъ величинахъ новыхъ Геометровъ прямѣе и естественнѣе; но обыкновенно тотъ недостатокъ имѣетъ, что въ немъ не приемлются въ разсужденіе количества несоизмѣримыя, коихъ бытіе столь же дѣйствительно, какъ и количествъ соизмѣримыхъ. Но скажутъ можетъ быть, говоритъ д'Аламбертъ въ Енциклопедіи въ членѣ Geometrie, что принятіе количествъ несоизмѣримыхъ учинитъ первоначальную Геометрію труднѣйшею; сіе, продолжаетъ, быть можетъ; но поелику онѣ непосредственно въ сїю Геометрїю входятъ, рано или поздно ихъ принимать должно, а ранѣе лучше, потому наипаче, что теорїя пропорцїональныхъ линей натурально влечетъ къ сему принятїю.

Между тѣмъ способъ предписанной д'Аламбертомъ, чтобы принимать въ разсужденїе сїи количества, основанъ, какъ и у другихъ новыхъ Геометровъ, на положенїи непозволительномъ. — Вотъ слова его:

„Геометрїя пропорцїональныхъ линей вся основана „на сей теоремѣ, что линея параллельная основанїю „треугольника, пресѣкаетъ его стороны пропорцїонально. „Для сего довольно показать, что естьли сїя параллельная проходитъ чрезъ средину одной изъ сторонъ, то „пройдетъ чрезъ средину и другой; ибо послѣ сего удобно докажется, что отсѣченныя части всегда пропорцїональны, когда отрѣзокъ съ цѣлою стороною соизмѣримъ; „а когда несоизмѣримъ, то тоже предложенїе докажется чрезъ доводъ къ нелѣпости, показуя, что содержанїе „не можетъ быть ни больше ни меньше, и что такимъ „образомъ равно.

Всѣ новые Геометры, не исключая и Г. Лежандра, которые приемлютъ въ разсужденїе несоизмѣримыя количества и которыхъ число, прибавить надобно, весьма не велико, поступаютъ въ ономъ принятїи симъ образомъ.

Но противъ всѣхъ ихъ я сказать осмѣливаюсь, что они поступая такимъ образомъ, предполагаютъ между несоизмѣримыми количествами содержанїе, коего дѣйствительно тутъ нѣтъ и не существуетъ, а чего нѣтъ и не существуетъ, то не можетъ быть больше или меньше.

И чтобъ сїе возраженїе было вразумительнѣе, то приведемъ то, что говоритъ самъ д' Аламбертъ въ V томѣ его сочиненїя, Melanges de litterature &c, на стран. 214 и 215.

„Напримѣръ говорится, что дїагональ квадрата къ его „сторонѣ, такъ какъ корень квадратной изъ 2 къ 1, то „чтобы имѣть совершенно чистое понятїе о истиннѣ, „симъ предложенїемъ выражаемой, надлежитъ сперва замѣ„тить, что нѣтъ квадратнаго корня изъ числа 2, ни, „слѣдственно, содержанїя собственно называемаго между „симъ корнемъ и единицею, ни, слѣдственно, содержанїя „собственно называемаго между дїагональю и стороною „квадрата, ни, слѣдственно, напослѣдокъ *равенства меж„ду сими содержанїями*, кои не существуютъ. Но въ „тоже самое время надлежитъ не забыть, что хотя не „можно найти числа, которое бы умноженное само собою „производило 2; однако можно найти числа, которыя „умноженныя сами на себя, производятъ число такъ близ„кое къ 2, какъ захочешь, или избыточно, или недо„статочно. И естьли имѣешь два такїя числа, изъ ко„торыхъ одно даетъ квадратъ большїй, нежели 2, но „толь съ малою разностїю, какъ хочешь, а другое даетъ „квадратъ меньшїй, нежели 2, но толь съ малою разно„стїю, какъ хочешь; то линея, которая съ стороною „квадрата имѣетъ содержанїе изъявляемое первымъ изъ „сихъ чиселъ, будетъ всегда большая, нежели дїагональ, а „линея, которая съ тою же стороною квадрата имѣетъ „содержанїе изъявляемое чрезъ другое, будетъ меньшая, „нежели дїагональ. И вотъ развязка сего предложенїя: „*дїагональ квадрата къ его сторонѣ, такъ какъ корень „квадратной изъ 2 къ 1*. И тоже должно разумѣть о всѣхъ „другихъ предложенїяхъ, кои относятся къ содержанїямъ „несоизмѣримымъ.

Послѣ сего не остается мнѣ, какъ предложить совсѣмъ новую теорію величинъ пропорціональныхъ; но между шѣмъ, пока къ сему я не приступилъ еще, не безполезно замѣтить, что погрѣшность въ теоріи новыхъ Геометровъ наипаче отъ того начало свое получила, что думаютъ, будто возможно сдѣлать ясное и чистое математическое опредѣленіе содержанію, которое долженствуетъ сопрягать между собою двѣ величины. Сего, я повторяю, ни коимъ образомъ сдѣлать не можно. И какое ни взять изъ сдѣланныхъ по сіе время опредѣленій содержанію, найдешь его или метафизическимъ или недостаточнымъ. Напримѣръ слѣдующее опредѣленіе: „Содержаніе одного количества къ другому есть величина, которую одному количеству приписать надлежитъ „въ разсужденіи другаго,„ сверьхъ мрачности, его объемлющей, не простирается какъ токмо до количествъ соизмѣримыхъ, понеже между несоизмѣримыми предполагаемой въ семъ опредѣленіи величины, которую можно назвать отвлеченною, не имѣется; и собственно однѣ токмо соизмѣримыя количества имѣютъ между собою содержанія, и кои суть числа, опредѣляющія однѣ количества по другимъ.

Новая математическая теорія пропорціональныхъ величинъ (а.

Предварительныя изъясненія.

Величина называется *частною* другой, когда она измѣряетъ сію другую безъ остатка.

(а) Я называю свою теорію новою и математическою, потому что всѣ прочія, кромѣ Евклидовой, какъ основанныя на опредѣленіи содержанію, суть метафизическія, и что Евклидова одна токмо по сіе время есть математическая.

Величина называется *кратною* другой, когда она измѣряется сею другою безъ остатка.

Когда сколько нибудь величинъ измѣряется равномногими другими равнократно, то первыя называются *равнократными* другихъ, а другія *равночастными* первыхъ.

Величина, которая измѣряетъ многія другія безъ остатка, называется общею сихъ другихъ *мѣрою.*

Двѣ величины или имѣютъ общую мѣру или оной не имѣютъ: тѣ, которыя имѣютъ, называются *соизмѣримыми*, а тѣ, которыя не имѣютъ, именуются *несоизмѣримыми* величинами

Пусть величина A съ B несоизмѣрима и пусть величины B взята будетъ какая нибудь частная величина E; то послѣдняя кратная X величины E изъ тѣхъ, которыя меньше A, называется *меньшею приближенною* величины A, а первая кратная Y той же величины E изъ тѣхъ, которыя больше A, именуется *большею приближенною* величины A.

При чемъ не безполезно замѣтить, что никакая изъ кратныхъ величины E не можетъ быть равна A ибо въ противномъ случаѣ величина A съ B будетъ соизмѣрима; что противно положенію. (a)

Леммы.

1) Ежели будетъ сколько нибудь величинъ, которыя равнократны другихъ равномногихъ величинъ, каждая каждой;

(a) Для большей ясности въ слѣдующемъ величины буквами означаемыя читатель долженъ изображать чрезъ линеи.

то коликая есть одна кратная своей частной, толикія же будутъ и всѣ кратныя купно всѣхъ частныхъ купно.

Пусть величины A и B равнократныя величинъ E и F. то говорю, что и A + B будетъ толико же кратная E + F. Ибо, когда сколько величинъ въ A равныхъ E, столько же величинъ и въ B равныхъ F, явствуетъ, что столько же имѣется и въ A съ B купно величинъ E съ F купно,

Вообще, сколько бы ни было равнократныхъ величинъ A, B, C и проч. равномногихъ другихъ E, F, G и проч., сумма ихъ A + B + C + и проч. есть толико же кратная суммы тѣхъ другихъ E + F + G + и проч. Ибо, взявъ сперьва по три величины и положивъ A + B = M, и E + F = Q, обратишь сей случай въ первой; и такъ далѣе.

2) Ежели величина есть кратная другой, то и взятая кратно есть толико же кратная равно взятой кратно той другой. Ибо для учиненія сего яснымъ, стоитъ токмо въ предъидущей леммѣ положить A = B = C = и проч. и E = F = G = и проч.

3) Такъ же естьли величина есть кратная другой, то и взятая частно есть толико же кратная равно взятой частно той другой Пусть A какая ниесть кратная величины E и пусть отъ A и E взяты равночастныя величины M и Q; я говорю, что M будетъ толико кратная величины Q, колико A есть кратная величины E. Ибо, пусть N толико же кратная величины Q, колико A есть кратная величины E; будетъ, для второй леммы, A толико кратная величины N, колико E есть кратная величины Q; и какъ A и величины M есть толико же кратная, колико E есть кратная Q, то выдетъ N = M. Слѣдова-

шельно, поелику по положенію N есть толико кратная Q, колико A есть кратная величины E, предполагаемое въ сей леммѣ доказано.

4) Ежели двѣ величины суть равнократныя двухъ другихъ, каждая каждой, то и разность ихъ будетъ толико же кратная разности тѣхъ другихъ.

Пусть двѣ величины A и B равнократныя двухъ другихъ E и F, я говорю, что разность $A - B$ есть толико же кратная разности $E - F$.

Пусть $E - F = M$, и Z толико кратная величины M, колико A или B есть кратная величины E или F; будетъ для первой леммы, сумма $Z + B$ толико же кратная суммы $M + F$, колико A есть кратная величины E; но $M + F = E$, слѣдовательно $A = Z + B$ и $Z = A - B$; а по сему и проч.

5) Ежели величина A съ B соизмѣрима, то и всякая величины A кратная M съ B будетъ соизмѣрима же, ибо общая мѣра величинъ A и B измѣряя A, должна измѣрять такъ же и M.

6) Равнымъ образомъ, ежели величина A съ B соизмѣрима, то и всякая величины A частная величина M съ B будетъ соизмѣрима же. Ибо, пусть E общая мѣра величинъ A и B, возьми отъ E толико же частную величину G, колико M есть частная величины A; будетъ, для третей леммы, G толико частная величины M, колико E есть частная величины A, и сего ради G будетъ измѣрять M; но, поелику G есть частная величина мѣры E, G въ тоже время измѣряетъ и B; слѣд. и проч.

7) Вообще всякая величина M съ A соизмѣримая, будетъ и съ B соизмѣримая, когда A и B соизмѣримы. Ибо пусть G общая мѣра величинъ M и A, то G, какъ частная величины A, будетъ соизмѣрима съ B, и M, какъ кратная величины G, такъ же соизмѣрима съ B.

8) Но когда величина A съ B несоизмѣрима, то всякая величины A кратная или частная величина M съ B будетъ несоизмѣрима же. Ибо, буде положить, что M съ B соизмѣрима, то величины M частная или кратная величина A съ B будетъ соизмѣрима; что противно положенїю.

9) Равнымъ образомъ вообще величина M съ A соизмѣримая будетъ съ B несоизмѣримая, когда A и B несоизмѣримы. Ибо, пусть G общая мѣра величинъ M и A, то G, какъ частная величины A, будетъ съ B несоизмѣрима, и M, какъ кратная величины G, такъ же съ B будетъ несоизмѣрима.

Присовокупленїе.

На противъ же того, когда величина M съ A будетъ несоизмѣрима, такъ какъ и величина A съ B, то M съ B можетъ быть несоизмѣрима и соизмѣрима.

10) Ежели изъ двухъ предложенныхъ неравныхъ величинъ A и B, меньшая отнимется отъ большей A, столько разъ, сколько можно, и произойдетъ остатокъ C, которой меньше предложенной меньшей величины B, и ежели оной остатокъ C отнимется отъ сей меньшей величины B, столько разъ, сколько можно, и паки произойдетъ остатокъ D, которой меньше C; и такъ всегда далѣе безъ конца сїе продолжается; то двѣ предложенныя величины A и B будутъ несоизмѣримы.

Буде сїе отвергаешь, то пусть А съ В соизмѣрима и величина N общая ихъ мѣра.

Поелику отъ А отнимается В по тѣхъ поръ, пока остатокъ С не будетъ меньше В, то явствуетъ, что чрезъ то отъ А отнимается больше половины; и поелику D отнимается отъ С по тѣхъ поръ, пака остатокъ Е не будетъ меньше D, то слѣдуетъ, что и отъ оставшейся по первомъ отниманїи величины С отнимается больше половины; и такъ всегда далѣе безъ конца. Подобнымъ образомъ докажется, что здѣсь и отъ величины В и отъ остатковъ ея отнимается больше половины. Но явственно, что чрезъ таковое отниманїе можно достигнуть до величины, которая будетъ меньше всякой данной; слѣдовательно напослѣдокъ здѣсь нѣкоторой остатокъ будетъ меньше N.

Пусть остатокъ С меньше N, то поелику N измѣряетъ А и В безъ остатка, N измѣряетъ и С безъ *остатка*, ибо въ противномъ случаѣ выдетъ, что N измѣряя В и многія В безъ остатка, не измѣряетъ А безъ остатка; что противно положенїю. И такъ большая величина N измѣряетъ меньшую С; что нелѣпо. Точно такъ же докажется, что будетъ нелѣпо, когда положится остатокъ D и всякой другой меньше N.

А какъ сїе положенїе для предложеннаго выше неминуемо должно сдѣлать, и нелѣпость выводится изъ того, что положили N общею мѣрою величинъ А и В; то слѣдуетъ, что сїи величины никакой общей мѣры не имѣютъ, и потому суть несоизмѣримыя (a).

(a) Изъ сего, съ помощїю нѣкоего Геометрическаго строенїя, весьма удобно можно произвести доказательство послѣднему (117) X книги

11) Данныхъ двухъ соизмѣримыхъ величинъ А и В найти общую наибольшую мѣру.

1) Естьли меньшая величина В измѣряетъ большую безъ остатка, то явствуетъ, что наибольшая общая мѣра величинъ А и В есть самая величина В.

Евклидовыхъ Елементовъ предложенiю, а именно Дiагональ квадрата съ его бокомъ есть несоизмѣрима.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть ABCD квадратъ, проведи дiагональ Черт. 47.
AC, изъ C радiусомъ CB опиши дугу BE, и изъ A радiусомъ AE опиши другую дугу EF; я говорю, BF будетъ дiагональ квадрата, коего бокъ есть AF или AE. Сiе доказать удобно всякой можетъ: стоитъ токмо въ точкѣ E на AC возставить перпендикуляръ EH. Положивъ сiе примѣчаемъ, что оное строенiе не иное что доказываетъ намъ, какъ естьли бокъ отнимется отъ дiагонали квадрата и произшедшiй остатокъ отнимется отъ бока, то останется дiагональ другаго квадрата, коего бокъ есть прежнiй отъ дiагонали оставшiйся остатокъ. Почему, ежели дiагональ даннаго квадрата означимъ чрезъ A, а бокъ онаго чрезъ B, мы можемъ производить слѣдующее дѣйствiе, никогда его не окончивъ: Отнимемъ бокъ B отъ дiагонали A, выдетъ остатокъ C меньшiй, нежели B, которой остатокъ отнятый единожды отъ B даетъ дiагональ другаго квадрата, коего бокъ C; паки отнимемъ бокъ C отъ соотвѣтственной дiагонали B — C, выдетъ остатокъ D меньшiй, нежели C, которой остатокъ D отнятый единожды отъ C даетъ дiагональ другаго квадрата, коего бокъ D; паки отнимемъ бокъ D отъ соотвѣтственной дiагонали C — D, выдетъ остатокъ E, меньшiй, нежели D; которой остатокъ E отнятый единожды отъ D даетъ дiагональ другаго квадрата, коего бокъ E; и такъ далѣе безъ конца сiе дѣйствiе продолжать можемъ. И поелику оно есть точно такое, какое въ предложенной предъ симъ леммѣ предполагалося, то заключимъ и проч.

Такъ же, съ помощiю Геометрическаго строенiя извѣстнаго подъ раздѣленiемъ линеи въ крайнемъ и среднемъ содержанiи, докажется, что дiагональ правильнаго пятиугольника съ стороною онаго есть несоизмѣрима.

2) Естьли же меньшая величина B не измѣряетъ большую A безъ остатка, то отнявъ B отъ A столько разъ, сколько можно, происшедшій остатокъ C отними отъ B, происшедшій остатокъ D отъ C и такъ далѣе, доколѣ не выдешъ остатокъ, который бы измѣрялъ точно предъидущій; и что неминуемо напослѣдокъ должно случиться, ибо въ противномъ случаѣ величины A и B будутъ несоизмѣримыя.

Я говорю, сей послѣдній остатокъ есть общая наибольшая мѣра величинъ A и B. Ибо положимъ, что D есть послѣдній остатокъ, такъ что D измѣряетъ C безъ остатка; то D измѣряетъ безъ остатка и многія C купно съ D; и потому D измѣряетъ безъ остатка B; равнымъ образомъ D измѣряя безъ остатка B и C, измѣряетъ безъ остатка и многія B пупно съ C, и потому D измѣряетъ безъ остатка A, и D есть общая мѣра величинъ A и B. Но что наибольшая изъ всѣхъ, то положи, что величина G большая, нежели D, измѣряетъ какъ A такъ и B безъ остатка; то разсуждая какъ въ 10й леммѣ *учинено* было, найдешь, что большая величина G измѣряетъ меньшую D; что нелѣпо; слѣд. и проч.

Отсюда слѣдуетъ еще, что всякая иная общая мѣра двухъ величинъ измѣряетъ наибольшую безъ остатка.

Присовокупленіе.

Подобнымъ образомъ поступить надлежитъ при сысканіи наибольшей мѣры трехъ соизмѣримыхъ величинъ.

Пусть A, B и C три данныя соизмѣримыя величины; то двухъ первыхъ A и B сыскавъ общую наибольшую мѣру D, примѣчаю, что оная мѣра D или измѣряетъ въ въ тоже время и C, или не измѣряетъ C безъ остатка, и потому нахожу, что здѣсь два случая имѣютъ мѣсто:

1) Пусть D измѣряетъ C, то, говорю, D будетъ общая наибольшая мѣра всѣхъ трехъ величинъ A, B и C. Ибо, что D общая мѣра, то сїе явственно; но что наибольшая, то положи, что величина E большая, нежели D, измѣряетъ всѣ три величины A, B и C; откуда, для предложеннаго выше, выдетъ, что большая величина E должна измѣрять меньшую D; что нелѣпо; слѣд. и проч.

2) Пусть D не измѣряетъ C; то, поелику A или B съ C соизмѣрима, и D есть нѣкая частная величина отъ A или B, D съ C для предложенной выше 6 леммы соизмѣрима. И такъ величинъ D и C сыщи общую наибольшую мѣру E; я говорю, что E будетъ общая наибольшая мѣра всѣхъ трехъ величинъ A, B и C. Ибо, что общая мѣра, то сїе явственно; но что наибольшая, то положи, что величина F большая, нежели E, измѣряетъ всѣ три величины A, B и C; то F измѣряя A и B, измѣряетъ и общую наибольшую ихъ мѣру D; потомъ измѣряя D и C, измѣряетъ такъ же и общую наибольшую ихъ мѣру E; что нелѣпо; слѣд. и проч.

Опредѣленїе.

Четыре величины A, B, C *и* D *называются пропорцїональными, когда, въ случаѣ соизмѣримости* A *съ* B *и* C *съ* D, *сами* A *и* C *суть равнократныя какихъ нибудь изъ равночастныхъ* E *и* F *величинъ* B *и* D, *а въ случаѣ не соизмѣримости, приближенныя ихъ* X, Y *и* Z, V, *по всякимъ равночастнымъ* E *и* F *величинъ* B *и* D *взятыя, суть равнократныя оныхъ равночастныхъ* E *и* F. (a)

(a) Вотъ чрезъ какое разсужденїе я приведенъ былъ къ сему опредѣленїю.

Присовокупленіе 1.

Величины A, B, C и D написанныя симъ образомъ. $A : B = C : D$, составляютъ то, что *пропорціею* называется и произносится тако: A содержится къ B, какъ C къ D, или еще, содержаніе A къ B равно или тоже, что и содержаніе C къ D, гдѣ слово содержаніе отнюдъ не должно разумѣть въ собственномъ его смыслѣ: оно вмѣстѣ съ словомъ равно или тоже тутъ замѣняетъ токмо слово пропорція.

Приемля обыкновенное опредѣленіе пропорціональнымъ величинамъ, а именно „*четыре величины* A, B, C *и* D *называются пропорціональными, когда содержаніе* A *къ* B *равно содержанію* C *къ* D„ разсуждалъ я, что въ случаѣ соизмѣримости A съ B и C съ D, смыслъ сего опредѣленія чистъ и явственъ, ибо оное тогда значитъ, что величины A и C суть равнократныя или равночастныя величинъ B и D, или равнократныя равночастныхъ оныхъ величинъ B и D; но когда A съ B и C съ D несоизмѣримы, тогда вопрошалъ я самъ у себя, что значитъ содержаніе A къ B равно содержанію C къ D? Въ семъ случаѣ содержанія A къ B и C къ D нѣтъ и не существуетъ, и коихъ содержаній нѣтъ, между тѣми нѣтъ и равенства. Но вѣдая, что несоизмѣримыя пропорціональныя величины не могутъ иному подвержены быть закону, какъ и соизмѣримыя, я предположилъ мысленно, что между несоизмѣримыми имѣется содержаніе, и искалъ неможетъ ли изъ сего положенія выведенъ быть чистой и точно математической смыслъ, въ которомъ обыкновенное опредѣленіе пропорціональнымъ величинамъ при несоизмѣримыхъ величинахъ разумѣть надлежитъ.

И такъ продолжалъ я, да возьмутся отъ B и D какія нибудь равночастныя E и F, и по онымъ величинъ A и C приближенныя X, Y и Z, V, и пусть Z', V' толикоже кратныя F, колико X, Y суть кратныя E; будетъ $X : B = Z' : D$, $Y : B = V' : D$, и по причинѣ что $X < A$, $Y > A$, будетъ $X : B \; (= Z' : D) < A : B$, и $Y : B \; (= V' : D) > A : B$; но $A : B = C : D$; слѣдовательно $Z' : D < C : D$ и $V' : D > C : D$, и слѣдовательно $Z' < C$ и $V' > C$, и (по причинѣ что Z', V' разнятся на одну токмо величину F)

Присовокупленіе 2.

Изъ предложеннаго опредѣленія пропорціи явствуетъ, что изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ A, B, C и D двѣ напримѣръ первыя A и B не могутъ быть несоизмѣримы, когда другія двѣ C и D соизмѣримы, и обратно. Ибо:

Буде сіе возможно, то должно быть или чтобы сами A и C были равнократныя какихъ ниесть изъ равночастныхъ величинъ B и D, или чтобы взятыя по всякимъ равночастнымъ оныхъ величинъ B и D приближенныя ихъ были равнократныя тѣхъ равночастныхъ; почему: 1) положимъ, что A и C суть равнократныя какихъ ниесть равночастныхъ E и F величинъ B и D, то величины A и B будутъ имѣть общую мѣру E и одна съ другою соизмѣрима; что противно положенію; 2) положимъ, что при всякихъ равночастныхъ E и F величинъ B и D, величины

оныя Z′, V′ суть приближенныя величины C; но поелику и Z, V суть приближенныя величины C, то Z′ = Z и V′ = V, ибо въ противномъ случаѣ C съ Z или Z′ будетъ разниться болѣе нежели на величину F; что противно положенію.

И такъ изъ положенія содержаній A къ B и C къ D существующими и равными произвелъ я, что приближенныя X, Y и Z, V величинъ A и C, взятыя по всякимъ равночастнымъ E и F величинъ B и D, суть равнократныя оныхъ равночастныхъ E и F. И потому заключилъ я, что вотъ каковъ есть, въ случаѣ несоизмѣримости A съ B и C съ D, точный и настоящій смыслъ словъ: *содержаніе A къ B равно содержанію C къ D.*

И какъ сей смыслъ чистъ и явственъ, то вмѣсто обыкновеннаго опредѣленія пропорціональнымъ величинамъ, основаннаго на метафизическомъ опредѣленіи содержанію, я принялъ начертанное выше опредѣленіе, которое совершенно есть математическое.

А и С имѣютъ приближенныя, то никакая частная величины D не будетъ измѣрять С безъ остатка, и С съ D будетъ несоизмѣрима; что противно положенію. И такъ, поелику ни то ни другое опредѣленіемъ пропорціи предписываемое здѣсь мѣста имѣть не можетъ, величина А съ В не можетъ быть несоизмѣрима, когда С съ D будетъ соизрима, и обратно.

Присовокупленіе 3.

Когда въ случаѣ соизмѣримости пропорціональныхъ величинъ А, В, С и D сыщутся величинъ А и В, С и D общія наибольшія мѣры Е и F; то оныя мѣры будутъ равночастныя величинъ В и D, а величины А и С равнократныя оныхъ равночастныхъ Е и F.

Поелику величины А, В, С и D пропорціональны и А съ В и С съ D соизмѣримы, то А и С суть равнократныя какихъ нибудь изъ равночастныхъ G и H величинъ В и D; и поелику Е и F суть наибольшія мѣры А и В, С и D, то G и H, какъ мѣры же А и В, С и D, измѣряютъ F и F безъ остатка. Сверьхъ того говорю, Е и F суть равнократныя G и H, ибо буде нѣтъ, то которая нибудь изъ величинъ Е и F своихъ содержитъ въ себѣ больше нежели другая: пусть Е своихъ величинъ G содержитъ въ себѣ больше, нежели F своихъ H, и пусть F′ толико же кратная величины H, колико Е есть кратная G; будетъ F′ > F; но когда Е и F′ суть равнократныя G и H, то равнократныя величинъ Е и F′ будутъ равнократныя и G и H; пусть K и L толикоже кратныя F′, колико А и В суть кратныя Е, то K и L будутъ равнократныя съ С и D одной и тойже величины H и слѣдственно равны между собою, и F′ будучи больше наибольшей мѣры F величинъ С и D, есть мѣра же оныхъ величинъ C и D; что нелѣпо. И такъ E и F суть равнократныя G и H. Потомъ возьми величины F толико же кратныя M и N, колико A и B суть кратныя E; M и N будутъ съ C и D равнократныя одной и той же величины H и слѣдственно суть равны между собою; и такимъ образомъ A и B съ C и D суть равнократныя наибольшихъ ихъ мѣръ E и F; что и доказать надлежало.

Присовокупленіе 4.

Когда $A:B = C:D$ и $C:D = M:N$; то будетъ $A:B = M:N$. Ибо:

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то, по 1 присовокупленію для пропорціи $A:B = C:D$, будетъ и C съ D соизмѣрима; и потому, для пропорціи $C:D = M:N$ потому же присовокупленію, будетъ такъ же и M съ N соизмѣрима. Сыщи величинъ A и B, C и D, и M и N общія наибольшія мѣры E, F и G; выдетъ по 3 присовокупленію, что, для пропорціи $A:B = C:D$, E и F суть равночастныя B и D, а A и C суть равнократныя оныхъ равночастныхъ E и G и что, для пропорціи $C:D = M:N$, F и G суть равночастныя D и N, а C и M суть равнократныя оныхъ равночастныхъ F и G; откуда слѣдуетъ, что E и G такъ же суть равночастныя B и N, а A и M суть равнократныя оныхъ равночастныхъ E и G, и потому, для опредѣленія пропорціи, будетъ $A:B = M:N$.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то, по 1 присовокупленію для пропорціи $A:B = C:D$, будетъ и C съ D несоизмѣрима, и потому, для пропорціи $C:D = M:N$ потомужъ присовокупленію, будетъ такъ же и M съ N не соизмѣрима. Возьми величинъ B, D и N какія ниесть равно-

частныя E, F и G и по онымъ равночастнымъ E, F и G величинъ A, C и M приближенныя X и Y, Z и V, T и U; выдетъ, что, для пропорціи $A : B = C : D$, X и Y съ Z и V суть равнократныя E и F, и что, для пропорціи $C : D = M : N$, Z и V съ T и U суть равнократныя F и G; откуда слѣдуетъ, что X и Y съ T и U суть такъ же равнократныя E и G; и какъ E и G по произволенію взятыя равночастныя B и N, то слѣдуетъ и проч.

Предложеніе I.

Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ *первой членъ* A *равенъ второму* B, *то и третій* C *равенъ четвертому* D.

Пусть $A = B$, то величина A съ B соизмѣрима, и потому такъ же и C съ D соизмѣрима; и какъ здѣсь величинъ A и B общая наибольшая мѣра есть B, то и величинъ C и D общая наибольшая мѣра будетъ D, ибо въ противномъ случаѣ сіи мѣры не будутъ равночастныя величинъ B и D; но A и C суть равнократныя общихъ наибольшихъ мѣръ, слѣдовательно, поелику $A = B$, будетъ $C = D$.

Предложеніе II.

Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ *первой членъ* A *больше втораго* B, *то и третій* C *больше четвертаго* D.

Пусть $A > B$, то, поелику величина A съ B можетъ быть соизмѣрима и несоизмѣрима, здѣсь два случая имѣютъ мѣсто.

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя вели-

чинъ B и D, коихъ A и C, по опредѣленію пропорціи, суть равночастныя; то будетъ на сколько величинъ E величина A больше B, на столько же величинъ F и величина C больше D.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D несоизмѣрима; возьми величинъ B и D такія равночастныя E и F, что бы одна изъ нихъ E была меньше разности $A - B$; потомъ по онымъ равночастнымъ E и F возми величинъ A и C меньшія приближенныя X и Z; онѣ по опредѣленію пропорціи будутъ равнократныя величинъ E и F, и потому $X : B = Z : D$; но (по причинѣ что $A - X < E < A - B$) $X > B$; чего ради для перваго случая выдетъ $Z > D$; и какъ $Z < C$, то C будетъ и паче $> D$.

Предложеніе III.

Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ первой членъ A меньше втораго B, то и третій C меньше четвертаго D.

Пусть $A < B$, то, поелику величина A съ B можетъ быть соизмѣрима и несоизмѣрима, здѣсь такѣ же два случая имѣютъ мѣсто; которые докажутся точно такъ же какъ предъ симъ учинено было, когда $A > B$, съ тою только разностію, что въ случаѣ несоизмѣримости A съ B здѣсь вмѣсто меньшихъ надлежитъ взять большія величинъ A и C приближенныя.

Предложеніе IV.

Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ предъидущихъ членовъ A и C возмутся равнократныя M и N, то оныя съ послѣдующими B и D паки составятъ пропорцію.

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ A и C, по опредѣленію пропорціи, суть равнократныя, то, поелику M и N суть равнократныя A и C, оныя M и N будутъ равнократныя E и F; кои же суть равночастныя величинъ B и D; слѣдовательно, для опредѣленія пропорціи, будетъ $M : B = N : D$.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то и C съ D будетъ несоизмѣрима, и для 8й леммы M и N съ B и D несоизмѣримы. Возьми величинъ B и D какія ниесть равночастныя E и F; я говорю, что взятыя по E и F величинъ M и N приближенныя суть равнократны оныхъ E и F. Ибо возьми E и F толико же частныя G и H, колико A и C суть частныя M и N, и по онымъ G и H величинъ A и C приближенныя x, y и z, v; потомъ сихъ приближенныхъ x, y и z, v возьми толико же кратныя X, Y и Z, V, колико M и N суть кратныя A и C; будетъ X и Z меньше M и N (потому что x и z меньше A и C), а Y и V больше M и N (потому что y и v больше A и C) и $Y - X$ и $V - Z$, для 4 леммы, толикоже кратныя $y - x$ $(= G)$ и $v - z$ $(= H)$, колико M и N суть кратныя A и C, и потому такъ же толико же кратныя, колико E и F суть кратныя G и H; откуда слѣдуетъ, что $Y - X = E$ и $V - Z = F$, и что X, Y и Z, V суть приближенныя величинъ M и N, по E и F взятыя. И какъ онѣ суть равнократныя E и F, кои же суть равночастныя величинъ B и D по произволенію взятыя, то, для опредѣленія пропорціи, будетъ $M : B = N : D$.

Предложенїе V.

Равнымъ образомъ ежели въ пропорцїи $A:B=C:D$ *предъидущихъ членовъ возмутся и равночастныя* M *и* N*; то оныя съ послѣдующими паки составятъ пропорцїю.*

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ A и C, по опредѣленїю пропорцїи, суть равнократныя, то величинъ E и F взявъ толико же частныя G и H, колико M и N суть частныя величинъ A и C, выдетъ, для третей леммы, что M и N суть толико же кратныя G и H, колико A и C суть кратныя E и F; и потому M и N суть равнократныя G и H; кои же будучи равночастныя E и F, суть равночастныя и B и D; слѣдовательно, для опредѣленїя пропорцїи, будетъ $M:B=N:D$.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то и C съ D будетъ несоизмѣрима, и для 8 леммы, M и N съ B и D несоизмѣримы. Возьми величинъ B и D как:я ниесть равночастныя E и F; я говорю, что взятыя по E и F величинъ M и N приближенныя суть равнократны оныхъ E и F. Ибо, пусть X, Y приближенныя M, по E взятыя, и Z, V толико же кратныя F, колико X, Y кратныя E, и пусть x, y и z, v приближенныя A и C, по E и F взятыя, и X', Y' и Z', V' толико же кратныя X, Y и Z, V, колико A и C суть кратныя M и N; то (поелику, для пропорцїи $A:B=C:D$, x, y и z, v суть равнократныя E и F, кои же будучи величинъ X, Y и Z, V равночастныя, суть равночастныя и ихъ равнократныхъ X', Y' и Z', V) будетъ $x:X'=z:Z'$ и $y:Y'=v:V'$; но поелику $X<M$, то и $X'<A$, и поелику x есть по-

слѣдняя изъ кратныхъ величины E которыя меньше A, то X', какъ кратная же E и меньшая нежели A, должна быть или меньше x или равна x; чего ради, для пропорціи $x : X' = z : Z'$, и величина Z' будетъ или меньше z или равна z; и какъ $z < C$, то и $Z' < C$, и потому также $Z < N$, понеже Z и N суть равночастныя Z' и C; такъ же, поелику $Y > M$, то и $Y' > A$, и поелику y есть первая изъ кратныхъ величины E которыя больше A, то Y', какъ кратная же E и большая нежели A, должна быть или больше y или равна y; чего ради, для пропорціи $y : Y' = v : V'$, будетъ и величина V' или больше v или равна v; и какъ $v > C$, то и $V' > C$, потому такъ же $V > N$, понеже V и N суть равночастныя V' и C. И такъ Z и V суть приближенныя величины N, по F взятыя, и толико же кратныя F, колико X и Y суть кратныя E; чего ради и проч.

Предложеніе VI.

Въ пропорціи $A : B = C : D$ *послѣдующіе члены* B *и* D *взятые за предыдущіе, а предыдущіе* A *и* C *за послѣдующіе, паки составляютъ пропорцію.*

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ A и C, по опредѣленію пропорціи, суть равнократныя, то обратно E и F суть равночастныя A и C, а B и D суть равнократныя оныхъ равночастныхъ E и F, и потому по опредѣленію пропорціи будетъ $B : A = D : C$.

2) Пусть A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D не соизмѣрима. Возьми величинъ A и C какія ни есть равночастныя E и F; я говорю, что взятыя по E и F величинъ B и D приближенныя суть равнократны оныхъ

E и F. Ибо, пусть X, Y приближенныя B, по E взятыя, и Z, V толико же кратныя величины F, колико X, Y суть кратныя E; то, по причинѣ что $A : B = C : D$ и что для V предложенія $E : B = F : D$, будетъ для IV предложенія $X : B = Z : D$ и $Y : B = V : D$; но $X < B$, а $Y > B$; того ради и $Z < D$, а $V > D$; и такъ Z, V суть приближенныя D, по F взятыя, и толико же кратныя F, колико приближенныя X, Y величины B, по E взятыя, суть кратныя E; почему заключимъ и проч.

Предложеніе VII.

Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ *послѣдующихъ членовъ* B *и* D *возьмутся равнократныя или равночастныя величины* M *и* N, *то предъидущіе* A *и* C *съ оными паки составятъ пропорцію.*

Ибо, когда $A : B = C : D$, то для VI предложенія будутъ $B : A = D : C$; но для IV или V предложенія должно быть $M : A = N : C$; почему для VI выдетъ $A : M = C : N$.

Присовокупленіе.

И такъ заключимъ изъ сего, что когда изъ предъидущихъ и послѣдующихъ членовъ пропорціи возьмутся равнократныя или равночастныя, и еще сихъ равнократныхъ какія нибудь равночастныя, или сихъ равночастныхъ какія нибудь равнократныя; то оныя паки составятъ пропорцію.

Изъ чего и купно первыхъ трехъ предложеній Евклидово опредѣленіе пропорціональнымъ величинамъ непосредственно слѣдуетъ, и потому можемъ мы сказать, что сіе Евклидово опредѣленіе въ нашемъ содержится; но никто не можетъ сказать, что бы въ Евклидовомъ наше заключалося; и такъ наше опредѣленіе пропорціональнымъ величинамъ естественнѣе и первоначальнѣе, нежели Евклидово.

Лемма.

Ежели въ пропорціи $A:B = C:D$ послѣдующіе члены B и D равны между собою, то и предъидущіе A и C равны между собою, и взаимно.

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима, и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ A и C, по опредѣленію пропорціи, суть равнократныя; то, поелику $B = D$, будетъ $E = F$ и $A = C$.
2) Пусть A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D несоизмѣрима; и ежели A не равна C, то пусть одна которая нибудь изъ сихъ величинъ другой больше; пусть $A > C$ на величину K; возьми равныхъ величинъ B и D такія равночастныя E и E, что бы оныя были меньше K, и опредѣли по нимъ величинъ A и C приближенныя X, Y и Z, V; то, поелику въ A содержится величина C и еще K и поелику E меньше K, меньшая приближенная X величины A, по E взятая, будетъ содержать въ себѣ меньшую приближенную Z величины C и еще по крайней мѣрѣ величину E; чего ради приближенныя X и Z не суть равнократныя E и E, а потому и Y, V такъ же. И такъ приближенныя X, Y и Z, V величинъ A и C, по равночастнымъ величинамъ E и E равныхъ величинъ B и D взятыя, не суть равнократныя оныхъ равночастныхъ E и E; что противно опредѣленію пропорціи, и слѣдственно положенію; слѣд. и проч.

И взаимно, когда въ пропорціи $A:B = C:D$, $A = C$, то будетъ и $B = D$, ибо, по перемѣненіи пропорціи

A : B = C : D, на сїю B : A = D : C, обращается сей случай въ первой, и по тому будетъ B = D.

Предложенїе VIII.

Когда величины M *и* N *съ предъидущими членами* A *и* C *пропорцїи* A : B = C : D *составляютъ пропорцїю* M : A = N : C; *то оныя и съ послѣдующими* B *и* D *составятъ пропорцїю* M : B = N : D, *и взаимно.*

1) Пусть величина M съ A соизмѣрима, то будетъ и N съ C соизмѣрима, и пусть E и F тѣ равночастныя A и C, коихъ, по опредѣленїю пропорцїи, M и N суть равнократныя; то по причинѣ пропорцїи A : B = C : D, для V предложенїя будетъ E : B = F : D, откуда для IV выдетъ M : B = N : D.

2) Пусть величина M съ A несоизмѣрима, то будетъ и N съ C несоизмѣрима, и поелику при семъ положенїи величина A съ B можетъ быть соизмѣрима и несоизмѣрима, пусть A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима. Пропорцїи M : A = N : C и A : B = C : D перемѣни на сїи A : M = C : N и B : A = D : C; отъ чего сей случай обратится въ первой, и потому будетъ B : M = D : N, и слѣдственно такъ же M : B = N : D.

3) Пусть величина M съ A и величина A съ B несоизмѣримы, будутъ и N съ C и C съ D несоизмѣримы, и поелику величина M съ B, или N съ D можетъ быть соизмѣрима и не соизмѣрима, пусть M съ B соизмѣрима и пусть ихъ общая мѣра E, возми величины D толико же частную F, колико E есть частная B, и величины F толико же кратную P, колико M есть кратная E; будетъ M : B = P : D; и какъ

(по причинѣ что $A : B = C : D$) $B : A = D : C$; то по первому случаю сего предложенія выдетъ $M : A = P : C$; но по положенію $M : A = N : C$; чего ради $P : C = N : C$, и для предложенной предъ симъ леммы $P = M$. И такъ, поелику $M : B = P : D$, будетъ $M : B = N : D$.

Откуда слѣдуетъ, что когда M съ B соизмѣрима, то и N съ D такъ же будетъ соизмѣрима; равнымъ образомъ докажется, что когда N съ D соизмѣрима, то и M съ B такъ же будетъ соизмѣрима.

4) Пусть величина M съ B несоизмѣрима, то и N съ D будетъ несоизмѣрима, ибо въ противномъ случаѣ по доказанному предъ симъ M съ B должна быть соизмѣрима. Возьми величинъ B и D какія ниесть равночастныя E и F, я говорю, что взятые по E и F приближенныя величинъ M и N суть равнократны оныхъ E и F. Ибо, пусть X, Y приближенныя M, по E взятыя, и Z, V толикоже кратныя F, колико X, Y суть кратныя E; возьми величины A такую частную G, что бы оная была меньше какъ $M - X$ такъ и $Y - M$, и величины C равночастную H, и опредѣли по G и H величинъ M и N приближенныя x, y и z, v; будетъ, для пропорціи $M : A = N : C$, $x : A = z : C$ и $y : A = v : C$ и для пропорціи $A : B = C : D$, по первому случаю сего предложенія, $x : B = z : D$ и $y : B = v : D$, потомъ, для VII предложенія, $x : E = z : F$ и $y : E = v : F$, и наконецъ для того же VII предложенія $x : X = z : Z$ и $y : Y = v : V$; положивъ же сіе, я примѣчаю, что $x > X$, и $y < Y$; ибо G, какъ частная величины A, содержится въ X, которая съ B есть соизмѣрима, съ остаткомъ, которой меньше G, и G, какъ меньшая нежели $M - X$ содержась такъ въ X, содержится въ M еще по крайней мѣрѣ одинъ разъ съ остаткомъ, и того для меньшая приближенная x величины M, по G взятая, будетъ больше X; такъ же

поелику M съ A несоизмѣрима, G содержится въ M съ остаткомъ, которой меньше G, и G какъ меньшая, нежели Y — M, содержась такъ въ M, содержится въ Y еще по крайней мѣрѣ одинъ разъ съ остаткомъ, и того для большая приближенная у величины M, по G взятая, будетъ меньше Y; откуда по второму и третьему предложеніямъ заключаю, что, для пропорцій $x : X = z : Z$ и $y : Y = v : V$, такъ же и $z > Z$, а $v < V$; и какъ $z < N$, а $v > N$, то слѣдуетъ, что $Z < N$, а $V > N$, и что, поелику Z и V разнствуютъ токмо на одну величину F, Z и V суть приближенныя N, по F взятыя. И такъ, поелику Z и V съ приближенными X и Y величины M суть равнократныя F и E, кои же суть равночастныя D и B по произволенію взятыя, заключаю наконецъ и проч.

И взаимно, когда будетъ $M : B = N : D$, то для пропорціи $A : B = C : D$, выдетъ $M : A = N : C$; ибо, пропорцію $A : B = C : D$ перемѣни на сію $B : A = D : C$, то для доказаннаго предъ симъ будетъ $M : A = N : C$.

Предложеніе IX.

Изъ пропорціи $A : B = C : D$ *чрезъ сложеніе и вычитаніе происходятъ слѣдующія:* 1) $A \pm B : B = C \pm D : D$, 2) $A \pm B : A = C \pm D : C$, и 3) $A + B : A - B = C + D : C - D$.

Здѣсь надлежитъ наипаче доказать первой случай, ибо остальные два изъ него слѣдуютъ. И такъ:

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя B и D, коихъ, по опредѣленію пропорціи, A и C суть равнократныя; то само по себѣ видно, что $A \pm B$ и $C \pm D$ суть такъ же равнократныя оныхъ E и F; и какъ E и F величинъ B и D суть равночастныя, то слѣдуетъ и проч.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D несоизмѣрима; такъ же $A \pm B$ съ B и $C \pm D$ съ D суть несоизмѣримы, ибо въ противномъ случаѣ A съ B и C съ D должны быть соизмѣримы. Возьми величинѣ B и D какія имѣеть равночастныя E и F; я говорю, что приближенныя величинъ $A \pm B$, $C \pm D$, по E и F взятыя, суть равнократныя оныхъ E и F. Ибо, пусть X, Y и Z, V приближенныя A и C, по E и F взятыя, то $X \pm B$, $Y \pm B$ и $Z \pm D$, $V \pm D$ будутъ приближенныя $A \pm B$ и $C \pm D$, по E и F взятыя; что ясно. И какъ по причинѣ пропорціи $A:B = C:D$, X, Y и Z, V суть равнократныя E и F, кои же величинъ B и D суть равнократныя, то для перваго случая слѣдуетъ и проч. И такъ $A \pm B : B = C \pm D : D$.

Второй случай изъ сего такъ произвести можно. Понеже, когда $A:B = C:D$, доказано, что $A \pm B : B = C \pm D : D$, то для VIII предложенія будетъ $A \pm B : A = C \pm D : C$.

Наконецъ, поелику $A - B : B = C - D : D$ и $A + B : B = C + D : D$, то для того же предложенія выдетъ $A + B : A - B = C + D : C - D$. И такъ всѣ три случая доказаны.

Предложеніе X.

Ежели многія однородныя величины къ другимъ равномногимъ того же роду величинамъ имѣютъ одинаковое содержаніе (a), *каждая къ каждой; то сумма первыхъ къ суммѣ другихъ будетъ имѣть тоже содержаніе.*

(a) Здѣсь слово содержаніе, какъ то мы выше предъувѣдомили, приемлется не въ собственномъ его смыслѣ, но въ смыслѣ пропорціи. — Смотри опредѣленіе оной.

Пусть двѣ однородныя величины A и C къ двумъ того же роду величинамъ B и D имѣютъ одинаковое содержаніе, такъ что $A:B = C:D$; я говорю, что $A+C: B+D = A:B$ или $C:D$.

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ, по опредѣленію пропорціи, A и C суть равнократныя; то, для первой леммы, сумма $A+C$ будетъ толико же кратная суммы $E+F$, колико A или C есть кратная E или F, и сумма $E+F$ толикоже частная суммы $B+D$, колико E или F есть частная B или D; чего ради сумма $A+C$ съ $B+D$ соизмѣрима и $A+C: B+D = A:B$ или $C:D$.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D несоизмѣрима; возьми суммы $B+D$ какую ни есть частную величину G, и величинъ B и D равночастныя съ оною E и F; будетъ, по первой леммѣ, $E+F = G$; и поелику, для пропорціи $A:B = C:D$, приближенныя X, Y и Z, V величинъ A и C, по E и F взятыя, суть равнократныя E и F, то по той же леммѣ будутъ $X+Z$ и $Y+V$ толико же кратныя G, колико X и Y или Z и V суть кратныя E или F; и какъ $X < A$ и $Z < C$, а $Y > A$ и $V < C$, и X съ Y и Z съ V разнятся на одну токмо величину E и F, то $X+Z < A+C$, а $Y+V > A+C$ и $X+Z$ съ $Y+V$ разнится на одну токмо величину $G (= E+F)$; и того ради, понеже по произволенію взятая частная величина G суммы $B+D$ точно сумму $A+C$ не измѣряетъ, сумма $A+C$ съ $B+D$ есть несоизмѣрима, и $X+Z$, $Y+V$ суть ея приближенныя, по частной величинѣ G суммы $B+D$ взятыя; и какъ оныя приближенныя $X+Y$ и $Z+V$ съ приближенными X или Z и Y или V суть равнократныя равночастныхъ G и E или F суммы $B+D$ и величины B или D, то заключимъ и проч.

Вообще, когда многія однородныя величины A, C, E и проч. имѣютъ одинаковое содержаніе къ другимъ равномногимъ того же роду величинамъ B, D, F и проч. такъ что $A:B = C:D = E:F =$ и проч.; то будетъ $A + C + E +$ и проч.: $B + D + F +$ и проч. $= A : B$. Ибо, возьми сперва по три величины A, C, E, и B, D, F; то по предложенному предъ симъ будетъ $A + C : B + D = C : D$; и какъ $C : D = E ; F$, то выдетъ $A + C : B + D = E : F$; и потому для предложеннаго будетъ $A + C + E : B + D + F = A + C : B + D$; но $A + C : B + D = A : B$; чего ради $A + C + E : B + D + F = A : B$; и такъ далѣе.

Предложеніе XI.

Равнократныя или равночастныя двухъ величинъ такъ содержатся, какъ самыя сіи величины.

Для учиненія перваго случая яснымъ, стоитъ токмо въ предъидущемъ предложеніи положить $A = C = E =$ и проч.; отъ чего, для леммы предъ VIII предложеніемъ положенной, будетъ такъ же и $B = D = F =$ и проч., и потому суммы $A + C + E +$ и проч., $B + D + F +$ и проч. будутъ величинъ A и B равнократныя; и какъ оныя суммы суть въ содержаніи $A : B$, то слѣдуетъ и проч.

Чтоже принадлежитъ до втораго случая, то истинна его послѣ сего перваго очевидна.

Предложеніе XII.

Вообще, когда какія нибудь двѣ величины A и C къ двумъ другимъ B и D одинаково содержатся, такъ что $A : B = C : D$, то оныя величины A и C тоже содержаніе имѣютъ, что и тѣ двѣ другія, то есть $A : C = B : D$.

1) Пусть величина A съ B соизмѣрима, то будетъ и C съ D соизмѣрима; и пусть E и F тѣ равночастныя величинъ B и D, коихъ, по опредѣленію пропорціи, A и C суть равнократныя; то для XI предложенія будетъ $E:F=B:D$, и для него же выдетъ $A:C=B:D$.

2) Пусть величина A съ B несоизмѣрима, то будетъ и C съ D несоизмѣрима; и поелику A съ C или B съ D можетъ быть соизмѣрима и несоизмѣрима, пусть величина A съ C соизмѣрима; возьми величинъ A и C общую мѣру E и величины D толико же частную F, колико E есть частная C, и паки величины F толико кратную P, колико A есть кратная E; будетъ $A:C=P:D$, и для перваго случая $A:P=C:D$; но $C:D=A:B$; чего ради $A:P=A:B$ и $P=B$. И такъ, поелику $A:C=P:D$, будетъ $A:C=B:D$.

Откуда слѣдуетъ, что когда A съ C соизмѣрима, то и C съ D также соизмѣрима; и обратно.

3) Пусть величина A съ C несоизмѣрима, то будетъ и B съ D не соизмѣрима, ибо въ противномъ случаѣ A съ C должна быть соизмѣрима. Возьми величинъ C и D какія ниесть равночастныя E и F; я говорю, что взятыя по E и F приближенныя величинъ A и B суть равнократныя оныхъ E и F. Ибо пусть X, Y приближенныя величины A, по E взятыя и Z, V толикоже кратныя F, колико X, Y кратныя E; то, по причинѣ пропорціи $A:B=C:D$, будетъ $A:B=E:F$ и $A:B=X:Z$, $A:B=Y:V$, и потому что A съ B не соизмѣрима, будутъ X съ Z и Y съ V несоизмѣримы же; возьми величины B такую частную H, что бы оная была меньше какъ $A-X$ такъ и $Y-A$, и величинъ Z и V съ оною G равночастныя H и K; и опредѣли по G, H и K величинъ

A, X и Y приближенныя x и y, z и v, t и u; будетъ, для пропорцій $A:B = X:Z$ и $A:B = Y:V$, $x:B = z:Z$ и $y:B = u:V$, и для перваго случая сего предложенія $x:z = B:Z$, $y:u = B:V$; положивъ же сіе я примѣчаю, что $x > z$, а $y < u$; ибо, по причинѣ что $A - x < G < A - X$, будетъ $x > X$ и потому паче $> z$; такъ же, по причинѣ что $y - A < G < Y - A$, будетъ $y < Y$, и потому паче $< u$; откуда, для втораго и третьяго предложеній слѣдуетъ, что, въ пропорціяхъ $x:z = B:Z$ и $y:u = B:V$, такъ же и $Z < B$, а $V > B$, и что, поелику Z и V разиствуютъ на одну токмо величину, F, Z и V суть приближенныя B, по F взятыя. И такъ, поелику Z и V съ приближенными X и Y величины A суть равнократныя F и E, кои же суть равночастныя D и C, по произволенію взятыя, заключаю наконецъ и проч.

Предложеніе XIII.

Когда, въ пропорціи $A:B = C:D$, $A = C$ *или* $A > C$ *или* $A < C$, *то будетъ* $B = D$ *или* $B > D$ *или* $B < D$; *и обратно.*

Первой случай есть та лемма, которая доказанъ выше предъ VIII предложеніемъ; прочіе же слѣдуютъ изъ послѣдняго, предъ симъ доказаннаго, и втораго и третьяго предложеній.

Наконецъ упомянемъ о содержаніяхъ удвоенныхъ, утроенныхъ и такъ далѣе.

Опредѣленіе.

Когда $A:B = B:X$ *и* $P:Q = A:X$, *то для краткости говорится* P *и* Q *суть въ удвоенномъ содержаніи* *величинъ* A *и* B; *равнымъ образомъ, когда* $A:B = B:C = C:X$ *и* $P:Q = A:X$, *то для краткости говорится* P *и* Q *суть въ утроенномъ содержаніи величинъ* A *и* B; *и такъ далѣе.*

Предложеніе XIV.

Когда содержаніе A *къ* B *равно* C *къ* D, *то удвоенныя, утроенныя и такъ далѣе, содержанія ихъ равны же между собою.*

Пусть $A:B = B:K$ и $C:D = D:L$, то, по причинѣ что $A:B = C:D$, будетъ $B:K = D:L$; потомъ по VIII предложенію для той же пропорціи $A:B = C:D$ выдетъ $A:K = C:L$.

Пусть еще $A:B = B:K = K:M$ и $C:D = D:L = L:N$, то, по причинѣ что $A:B\ (= B:K) = C:D\ (= D:L)$, будетъ $K:M = L:N$, и потому что $A:K = C:L$, выдетъ $A:M = C:N$. И такъ далѣе.

Примѣчаніе.

Мы здѣсь тщательно старались, что бы опредѣленіе четвертой пропорціональной по тремъ даннымъ величинамъ не предполагать извѣстнымъ, поелику сіе, какъ то замѣчаетъ Робертъ Симсонъ въ Геометрическихъ и критическихъ своихъ примѣчаніяхъ на Евклида, не можетъ быть показано, какъ послѣ теоріи величинъ пропорціональныхъ; а такимъ образомъ мы избѣгнули сего возраженія, которое онъ дѣлалъ противъ всѣхъ издателей Евклидовыхъ Елементовъ. Но можетъ быть скажутъ, что мы вмѣсто того предположили частное величины взятіе, которое въ нѣкоторыхъ случаяхъ чрезъ геометрическое строеніе безъ теоріи пропорціональныхъ величинъ такъ же учинить не можно; на сіе я отвѣтствую: 1) когда въ теоріи параллельныхъ линей еще можно показать, какъ данной линеи взять такую частную величину, какую хочешь; то послѣ можно показать будетъ, безъ помощи теоріи величинъ пропорціональныхъ, какъ взять параллелограмма, треуюльника и всякой прямолинейной фигуры такую частную величину, какую хочешь; такъ же параллелепипеда и всякой призьмы; 2) поелику же ясно, что имѣется квадратъ равный кругу, квадратъ равный поверьхности цилиндра, конуса и шара, и параллелепипедъ равный цилиндру, конусу и шару; то для сказаннаго выше безъ всякаго сомнѣнія можно дозволить предполагать взятую отъ сихъ протяженностей такую частную величину, какую хочешь. И самъ Робертъ Симсонъ для сей причины во 2мъ предложеніи XII книги Евклид. Елемен. дозволяетъ предполагать четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ величинамъ, хотя оную Геометрически тутъ опредѣлить еще и неможно (a). И такъ сіе возраженіе противъ нашей теоріи пропорціональныхъ величинъ не имѣетъ никакой силы, тѣмъ паче, что вобразить себѣ частную величину какой либо протяженности всякой удобно можетъ, и что предположеніе, дабы взять оную, ничемъ не разнится отъ предположенія допускаемаго Евклидомъ и Робертомъ Симсономъ, дабы взять кратную.

Приложеніе сея теоріи къ Геометріи.

Предложеніе XV.

Естьли двѣ стороны треугольника разсѣкутся прямою линеею параллельно основанію онаго, то сіи двѣ

(a) Смотри примѣчаніе его на оное 2 е предложеніе XII книги, стран. 356 и 357.

стороны сб отрѣзками своими составятб пропорцію. (b)

Для доказательства сего предложенія надлежитъ вѣдать слѣдующую лемму.

Ежели на одной AB изъ сторонъ AB и AC угла BAC отъ вершины его A возьмутся многія равныя величины AE, EF, FG, GH и проч. и чрезъ концы ихъ протянутся взаимно параллельныя линеи, пресѣкающія другую того угла сторону AC; то оными параллельными линеями на сей другой сторонѣ отсѣкутся такъ же равныя и равномногія величины AK, KL, LM, MN и проч. Черт. 48.

Откуда слѣдуетъ, что естьли одной изъ двухъ сторонъ треугольника, отъ вершины его, возмется какая нибудь кратная или частная величина и изъ конца оной кратной или частной протянется параллельная основанію, то сею параллельною на другой сторонѣ треугольника, отъ той же вершины, отсѣчется толико же кратная или частная величина оной другой стороны.

Положивъ сіе, пусть стороны AB, AC треугольника BAC разсѣчены линеею EF параллельно основанію BC; то, поелику сторона AB съ отрѣзкомъ AE можетъ быть соизмѣрима и не соизмѣрима, здѣсь два случая имѣютъ мѣсто. Черт. 49.

1) Пусть сторона AB съ отрѣзкомъ AE соизмѣрима, и AG общая ихъ мѣра, которая въ прочемъ по 11 леммѣ най-

---

(b) Сіе важное вѣ Геометріи предложеніе первый примѣтилѣ Ѳалесѣ Милетскій. Онѣ будучи вѣ Египтѣ употребилѣ его при опредѣленіи высоты извѣстныхѣ пирамидѣ чрезѣ отбрасываемыя ими тѣни.

дена быть можетъ; изъ G протяни GH параллельно BC, и потому такъ же параллельно и EF; будутъ, для приведенной предъ симъ леммы, AB и AC равнократныя AG и AH, а оныя AG и AH равночастныя AE и AF; и сего ради, по причинѣ опредѣленія пропорціи, AB : AE = AC : AF.

Откуда слѣдуетъ, что когда одна сторона съ своимъ отрѣзкомъ соизмѣрима, то и другая такъ же съ своимъ соизмѣрима.

2) Пусть сторона AB съ отрѣзкомъ AE несоизмѣрима, то и сторона AC съ отрѣзкомъ AE будетъ несоизмѣрима, ибо въ противномъ случаѣ сторона AB съ отрѣзкомъ AE должна быть соизмѣрима; что противно положенію. Возьми отрѣзковъ AE и AF какія ниесть равночастныя величины; я говорю что взятыя по онымъ сторонъ AB и AC приближеныя суть равнократныя оныхъ равночастныхъ. Ибо, пусть AG какая ниестъ частная величина отрѣзка AE, то протянувъ GH параллелно AE, для приведенной предъ симъ леммы будетъ AH равночастная отрѣзка AF; возьми по AG стороны AB приближенныя AX, AY и протяни XZ, YV параллельно BC, будутъ для той же леммы AX, AY и AZ, AV равнократныя AG и AH; и какъ AX, AY суть приближенныя стороны AB, по AG взятыя, то, поелику AZ < AC, а AY > AC, AZ, AV суть такъ же приближенныя стороны AC, по AH взятыя. И такъ, поелику AG и AH суть равночастныя отрѣзковъ AE и AF, для опредѣленія пропорціи будетъ AB : AE = AC : AF.

Присовокупленіе.

Отсюда удобно выведешь обратное сему предложеніе и всѣ отъ 3 до 14 предложенія VIй книги Евклидовыхъ

Елементовъ; сверьхъ того найдешь еще, что периметры подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ суть пропорціональны радіусамъ или діаметрамъ круговъ, въ кои оные многоугольники вписаны или около коихъ описаны.

Предложеніе XVI.

Естьли параллелограммъ разсѣчется прямою линеею, параллельно которымъ иметь двумъ сторонамъ его, то онъ такъ будетъ содержатся къ одному изъ своихъ отрѣзковъ, какъ одна изъ разсѣченныхъ тою же прямою сторонъ его содержится къ соотвѣтственному своему отрѣзку.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ вѣдать слѣдующую лемму.

Ежели на одной изъ двухъ параллельныхъ линей AB и CD, разсѣченныхъ третьею AC, отъ пресѣченія A возмутся многія равныя величины AE, EF, FG и проч. и изъ концовъ оныхъ протянутся параллельныя къ третьей AC, то оными отъ неопредѣленнаго пространства BACD отсѣкутся также равные и равномногіе параллелограмы AK, EL, FM и проч. Черт. 50.

Откуда слѣдуетъ, что естьли одной изъ сторонъ параллелограмма, отъ начала ея, возмется какая нибудь кратная или частная величина и изъ конца оной кратной или частной протянется прямая параллельная сторонамъ параллелограмма, то получится параллелограммъ, толикоже кратный или частный перваго.

Положивъ сіе, пусть параллелограммъ ABCD разсѣченъ прямою EF параллельно сторонамъ его AD и BC; то, поелику сторона AB съ отрѣзкомъ своимъ AE можетъ Черт. 51.

быть соизмѣрима и несоизмѣрима • здѣсь два случая имѣють мѣсто.

1) Пусть сторона AB съ своимъ отрѣзкомъ AE соизмѣрима, и AG общая ихъ мѣра; изъ G протяни GH параллельно сторонамъ AD и BC; будутъ, для приведенной предъ симъ леммы, параллелограммъ AC и сторона его AB равнократныя параллелограмма AH и стороны его AG, а оныя AH и AG равночастныя AF и стороны его AE; и сего ради, по причинѣ опредѣленія пропорціи, парал. AC : AF = стор. AB : AE.

Откуда слѣдуетъ, что когда параллелограммъ AC съ своимъ отрѣзкомъ AF соизмѣримъ, то и сторона его AB съ своимъ отрѣзкомъ AE такъ же соизмѣрима.

2) Пусть сторона AB съ своимъ отрѣзкомъ AE несоизмѣрима, то будетъ и параллелограммъ AC съ своимъ отрѣзкомъ AF несоизмѣримъ, ибо въ противномъ случаѣ сторона его AB съ своимъ отрѣзкомъ AE должна быть соизмѣрима; что противно положенію. Возми отрѣзка AF и его стороны AE какія ниесть равночастныя величины и по онымъ параллелограмма AC и его стороны AB приближенныя; я говорю, что сіи приближенныя суть равнократныя оныхъ равночастныхъ. Ибо, пусть AG какая ниесть частная величина отрѣзка AE, то протянувъ GH параллельно сторонамъ AD и BC, для приведенной предъ симъ леммы будетъ параллелограммъ AH равночастный AF; возми по AG стороны AB параллелограмма AC приближенныя AX, AY и протяни XZ, YV параллельно AD и BC, будутъ, для той же леммы, параллелограммы AZ, AV и ихъ стороны AX, AY равнократныя параллелограмма AH и его стороны AG; и какъ AX, AY суть приближенныя стороны AB, по AG взятыя, то, поелику парал. AZ < AC, а парал. AV > AC, AZ, AV суть такъ же приближенныя

параллелограмма AC, по AH взятыя. И такъ, поелику AH, AG равночастныя AF и AE, для опредѣленія пропорціи будетъ парал. AC : AF = сторон. AB : AE.

Присовокупленіе.

Отсюда слѣдуетъ, что вообще всякіе параллелограммы и треугольники имѣющіе равныя высоты содержатся такъ какъ основанія, а имѣющіе равныя основанія содержатся такъ какъ высоты, и обратно.

Откуда выведутся всѣ остальныя предложенія VI й книги Евклид. Елементовъ. Причемъ надлежитъ не забыть, что предложенія 14, 15, 16 и 17, какъ слѣдствія сего общаго,, *параллелограммы, коихъ высоты обратно пропорціональны основаніямъ, суть равны между собою, и когда они равны между собою, то высоты ихъ суть обратно пропорціональны основаніямъ*,, должны быть имъ предшествуемы и послѣ изъ него выведены.

Примѣчаніе.

Въ предложеніи 19 и 20 сея книги Евклид. Елемен. новые Геометры вмѣсто удвоеннаго содержанія двухъ сходственныхъ сторонъ подобныхъ фигуръ обыкновенно употребляютъ содержаніе квадратовъ на оныхъ линеяхъ сдѣланныхъ; но сіе употребленіе произошло паче отъ приложенія числительной науки къ Геометріи, нежели какъ отъ натуры вещей: квадраты сами суть подобныя фигуры, и находятся такъ же, какъ и прочія, въ удвоенномъ содержаніи сторонъ своихъ; и потому приноравливать ихъ къ другимъ фигурамъ столь же прилично, какъ сіи другія фигуры къ нимъ. — Въ прочемъ, когда кто пожелаетъ сообразоваться съ симъ употребленіемъ, тотъ долженъ основаться или на предложеніи 20 мъ или на слѣдующемъ, которое непосредственно выходитъ изъ 17 го: *Изъ трехъ линей находящихся въ непрерывной пропорціи квадратъ первой къ квадрату второй, какъ первая къ послѣдней.*

Такъ же, когда четыре линеи пропорціональны, то новые Геометры обыкновенно доказываютъ, что и квадраты на нихъ сдѣланные суть пропорціональны; но сіе есть токмо частной случай общаго предложенія, которое простирается ко всѣмъ подобнымъ фигурамъ и которое изъ 20 предложенія VI й книги Евклидов. Елементовъ и XIV нашего непосредственно слѣдуетъ. — Смотри 22 е предложеніе VI й книги Евклид. Елементовъ.

Предложеніе XVII.

Естьли параллелепипедъ разсѣчется плоскостію параллельно которымъ нибудь двумъ противолежащимъ сторонамъ его, то онъ такъ будетъ содержаться къ одному изъ своихъ отрѣзковъ, какъ одно изъ разсѣченныхъ тою же плоскостію ребръ его содержится къ соотвѣтственному своему отрѣзку.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ вѣдать слѣдующую лемму.

Черт. 52. Естьли двѣ параллельныя плоскости ABCD, EFGH и двѣ другія параллельныя AEHD, BFGC, первыя разсѣкающія, разсѣкутся пятою ABFE и на одномъ изъ взаимныхъ пресѣченій первыхъ четырехъ плоскостей отъ пресѣченія его A возмутся многія равныя величины AK, KL, LM и проч.; то чрезъ концы оныхъ равныхъ величинъ протянутыми плоскостями KP, LQ

MR и проч., параллельно ABFE, отъ неопредѣленнаго пространства DBEGC отсѣкутся такъ же равные и равномногіе параллелепипеды AP, KQ, LR и проч.

Откуда слѣдуетъ, что естьли одного изъ реберъ параллелепипеда, отъ начала его, возмется кратная или частная величина и изъ конца оной кратной или частной протянется плоскость параллельная сторонамъ параллелепипеда, то получится параллелепипедъ толико же кратный или частный перваго.

Положивъ сіе, пусть параллелепипедъ AC разсѣченъ плоскостію EF параллельно AD и BC; то, поелику ребро AB съ отрѣзкомъ своимъ AE можетъ быть соизмѣримо и несоизмѣримо, здѣсь два случая имѣютъ мѣсто: Черт. 53.

1) Пусть ребро AB съ отрѣзкомъ своимъ AE соизмѣримо и пусть AG общая ихъ мѣра; изъ G протяни плоскость GH параллельно сторонамъ AD и BC параллелепипеда AC; будутъ, для приведенной предъ симъ леммы, параллелепипедъ AC и ребро его AB равнократныя параллелепипеда AH и ребра его AG, а оныя AH и AG равночастныя отрѣзка AF и ребра его AE; и сего ради, по причинѣ опредѣленія пропорціи, параллелеп. AC : AF = реб. AB : AE.

Откуда слѣдуетъ, что когда параллелепипедъ AC съ своимъ отрѣзкомъ AF соизмѣримъ, то и всякое ребро его AB съ своимъ отрѣзкомъ AE такъ же соизмѣримо.

2) Пусть ребро AB съ своимъ отрѣзкомъ AE несоизмѣримо, то будетъ и параллелепипедъ AC съ своимъ отрѣзкомъ AF несоизмѣримъ, ибо въ противномъ случаѣ ребро его AB съ своимъ отрѣзкомъ AE должно быть соизмѣримо; что противно положенію. Возьми отрѣзка AF и его

ребра АЕ какія нибудь равночастныя величины и по онымъ параллелепипеда AC и его ребра AB приближенныя; я говорю, что сіи приближенныя суть равнократныя оныхъ равночастныхъ. Ибо, пусть AG какая нибудь частная величина отрѣзка AE, то протянувъ плоскость GH параллельно сторонамъ AD и BC, для приведенной предъ симъ леммы, будетъ параллелепипедъ AH равночастный AF; возьми по AG ребра AB приближенныя AX, AY и протяни плоскости XZ, YV параллельно AD и BC, будутъ, для той же леммы, параллелепипеды AZ, AV и ихъ ребра AX, AY равнократныя параллелеп. AH и его ребра AG; и какъ AX, AY суть приближенныя ребра AB, по AG взятыя, то, поелику параллелеп. $AZ < AC$, а параллелеп. $AV > AC$, AZ, AV суть такъ же приближенныя параллелепипеда AC, по AH взятыя. И такъ, поелику AH, AG равночастныя AF и AE, для опредѣленія пропорціи будетъ параллелеп. $AC : AF =$ ребр. $AB : AE$.

Присовокупленіе.

Откуда слѣдуетъ, что параллелепипеды имѣющіе равныя высоты содержатся такъ какъ основанія, а имѣющіе равныя основанія содержатся такъ какъ высоты. И вообще слѣдуетъ, что призмы, а потому такъже и пирамиды, имѣющія равныя высоты содержатся такъ какъ основанія, а имѣющія равныя основанія содержатся такъ какъ высоты.

Примѣчаніе 1.

Послѣ сего теорія наша пропорціональныхъ величинъ удобно приложена быть можетъ ко всѣмъ тѣмъ предложеніямъ, до тѣлъ относящимся, которыя отъ пропорціональности величинъ зависятъ. Между тѣмъ не безполезно замѣтить, что 33 предложеніе XIй книги Евклид. Елементовъ гораздо лучше произвести изъ 34го, нежели безъ посредства онаго его доказывать, поелику самъ Евклидъ въ VIй книгѣ тѣхъ же Елементовъ произвелъ 19е предложеніе изъ 15 или лучше изъ 14, въ общемъ смыслѣ приемлемаго.

И такъ пусть ABC, EFG двѣ подобныя трехсторонныя призмы; то, поелику подобныя призмы могутъ быть прямыя и косыя, здѣсь два случая имѣютъ мѣсто: Черт. 54.

1) Пусть призмы ABC, EFG прямыя; отдѣли AL равную четвертой пропорціональной къ AB и EF, такъ чтобы было AB : EF = EF : HK = HK : AL, и протянувъ ML и еще LN, параллельно ребрамъ призмы ABC, представь себѣ плоскость LC; я говорю, что призьма ALC, оною плоскостію отъ призмы ABC отдѣленная, равна призьмѣ EFG. Ибо треуг. AMB : EZF = AB : HK; и треуг. AMB : AML = AB : AL; чего ради треуг. EZF : AML = HK : AL; но HK : AL = AB : EF и для подобія призьмъ ABC и EFG, AB : EF = AP : ER; слѣдовательно, поелику оныя призьмы суть прямыя, будетъ, для упомянутаго 34 предложенія, призьма ALC равна EFG. И такъ, поелику приз. ABC : ALC = AB : AL, напослѣдокъ выдетъ, что призьма ABC къ призьмѣ EFG есть въ утроенномъ содержаніи ихъ размѣреній AB и EF.

2) Пусть подобныя призьмы ABC и EFG косыя; то изъ вершинъ которыхъ нибудь сходственныхъ угловъ P, R верхнихъ ихъ основаній опусти на нижнія перпендикуляры PQ и RS, я говорю, что PQ : RS = AP : ER. Ибо изъ доказаннаго нами въ V предложеніи первой главы сея книги о равенствѣ двухъ толстыхъ угловъ, содержимыхъ тре-

мя равными и одинаково расположенными плоскими, слѣдуетъ, что наклоненія линей AP и ER къ плоскостямъ AMB и EZF суть равны между собою. И такъ для учиненія послѣдняго заключенія не остается болѣе, какъ повторить доказательство перваго случая. Здѣсь мы могли бы сослаться на 35 предложеніе XI книги Евклид. Елементовъ; но поелику оно слѣдуетъ изъ того, на которомъ мы основались, и притомъ доказано тутъ не во всемъ пространствѣ, а чрезъ изчисленіе нѣкоторыхъ токмо случаевъ, мы за лучшее нашли основаться на ономъ нашемъ предложеніи. При чемъ не безполезно замѣтить еще, что 35 предложеніе находится въ Евклидѣ какъ лемма къ 36му, которое же само есть лемма къ слѣдующему весьма употребительнѣйшему предложенію: когда четыре линеи находятся въ прогрессіи, то кубъ сдѣланный изъ второй линеи равенъ параллелепипеду сдѣланному изъ квадрата первой, какъ основанія, и послѣдней, какъ высоты.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть четыре линеи A, B, C и D находятся въ прогрессіи, то для 36 Евклидова предложенія будетъ $B^3 =$ параллеле п. изъ прямоуг. $A \times C$ и линеи B; но поелику $A^2 : A \times C = A : C$ и $A : C = B : D$, то будетъ оной параллелепипедъ равенъ другому сдѣланному изъ A^2 и линеи D; слѣд. и проч.

Въ прочемъ сіе прямо доказано быть можетъ: поелику $A^2 : B^2 = A : C$, то будетъ параллелеп. изъ A^2 и линеи D къ параллелеп. изъ B^2 и линеи D какъ A къ C, и потому такъ же какъ B къ D; но и кубъ изъ B къ параллелеп. изъ B^2 и линеи D такъ какъ B къ D, слѣд. и проч.

Но какъ бы сіе доказано ни могло быть, изъ сказаннаго выше явствуетъ, что 35 Евклидово предложеніе послѣ показаннаго нами въ V предложеніи первой главы не должно остаться въ Елементахъ Геометріи; и естьли доказанная выше теорема о равенствѣ тѣлъ, какъ утверждаетъ Робертъ Симсонъ, принята за 10 опредѣленіе не Евклидомъ, а какимъ нибудь неискуснымъ издателемъ его творенія, то вѣроятно, что и сіе 35 предложеніе поставлено на занимаемое имъ нынѣ мѣсто не Евклидомъ, а какимъ нибудь неискуснымъ издателемъ его творенія; такъ же всеобщность, которая придана 36му предложенію и для которой единственно токмо нужно 35е предложеніе, не есть дѣло Евклидово, а какого нибудь мѣлочнаго его толкователя.

Примѣчаніе 2.

Робертъ Симсонъ основываясь на помѣщеніи въ Евклидѣ 23го предложенія VI книги, помѣщаетъ въ XI книгу тѣхъ же Елементовъ между 33 и 34 слѣдующее предложеніе: *параллелепипеды содержимые равноугольными параллелограммами находятся въ сложномъ содержаніи сторонъ оныхъ параллелограммовъ.* Но сіе предложеніе, такъ какъ и 23 VI книги, собственно не принадлежитъ къ Елементамъ Геометріи, и не нужно какъ токмо ко измѣренію тѣлъ, о коемъ Евклидъ ни единаго слова въ своихъ Елементахъ не говорилъ, и говорить не былъ намѣренъ; и по тому вѣроятно, что упомянутое 23 предложеніе VI книги помѣщено въ Евклида не самимъ имъ, а какимъ нибудь издателемъ его творенія.

Примѣчаніе 3.

Г. Лежандръ находя обыкновенное для подобныхъ многогранныхъ тѣлъ опредѣленіе заключающимъ въ себѣ много излишняго, даетъ вмѣсто онаго другое раздѣленное на двѣ части (a): сперва онъ опредѣляетъ подобіе трехсторонныхъ пирамидъ, а потомъ, полагая прочіе многогранники состоящими изъ сихъ пирамидъ, даетъ опредѣленіе подобнымъ многогранникамъ. Но предложенное выше нами доказательство о содержаніи подобныхъ призьмъ совершенно прилагается къ доказательству содержанія подобныхъ пирамидъ; и потому мы на семъ не останавливаемся.

Вторая основательная истинна способа предѣловъ и приложеніе ея къ главнымъ предложеніямъ отъ нея зависящимъ.

Естьли двѣ возрастающія или убывающія величины X и Y имѣя предѣлы A и B, всегда такъ содержатся, какъ двѣ непремѣнныя величины C и D; то и предѣлы ихъ A и B будутъ содержаться какъ сіи непремѣнныя величины C и D. (b).

1) Пусть величины X, Y возрастающія; положимъ, что $K : B = C : D$; что допустить можно, послику уже показано, какъ находить четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ величинамъ; я говорю, что K есть предѣлъ растущей величины X. Ибо:
a) Между тѣмъ какъ X растетъ безъ конца, величина K пребываетъ непремѣнна и всегда больше X, понеже, для

(a) Смотри первое и послѣднее примѣчаніе его, стран. 282, 283, 324 и 325.

(b) Сія истинна начало свое получила отъ 2 го предложенія XII й книги Евклидовыхъ Елементовъ, то есть,, *круги суть такъ какъ квадраты діаметровъ*,, Маклоренъ, сколько мнѣ извѣстно, въ введеніи къ превосходному своему сочиненію о флюксіяхъ первый привелъ ее во всеобщность. См. стран. V, VI и VII сего его сочиненія.

пропорціи $X:Y=C:D$, $K:X=B:Y$ и по причинѣ что B всегда больше Y, для втораго предложенія сея главы и K всегда больше X. b) Растущая величина X можетъ имѣть разность съ K меньше всякой по произволенію данной величины; въ самомъ дѣлѣ, пусть взята какая нибудь величина D, которой разность $K-X$ надлежитъ сдѣлать меньше; возьми величины K такую частную $\frac{K}{n}$, чтобы оная была меньше D, и сдѣлай $B-Y$ меньше равночастной $\frac{B}{n}$ величины B; тогда, для пропорціи $K:X=B:Y$, выдетъ $K-X:\frac{K}{n}=B-Y:\frac{B}{n}$; и какъ $B-Y<\frac{B}{n}$, то для сей послѣдней пропорціи будетъ $K-X<\frac{K}{n}<D$. c) Совсѣмъ тѣмъ растущая величина X никогда величиною K не сдѣлается; понеже когда положить $X=K$, то для пропорціи $K:X=B:Y$ выдетъ и $B=Y$; что не возможно.

И такъ, поелику A есть такъ же предѣлъ величины X, для первой основательной истинны будетъ $K=A$; и какъ $K:B=C:D$, то и $A:B=C:D$.

2) Пусть величины X, Y убывающія, то разсуждая такъ, какъ въ первомъ случаѣ, докажешь и въ семъ тоже самое.

Но въ доказательствѣ поступилъ такъ какъ и Евклидъ въ частномъ своемъ предложеніи, говоря, что буде содержаніе A къ B неравно содержанію C къ D, то пусть больше, потомъ пусть меньше; изъ чего слѣдуетъ, что онъ сіе учинилъ основываясь на 7 опредѣленіи V й книги Евклидовыхъ Елементовъ, которое для сказанныхъ выше причинъ не можетъ быть принято. Потомъ Г. Кузенъ приемлетъ оную истинну безъ всякаго доказательства, какъ второе начало способа предѣловъ. Смотри его сочиненія, Traité de calcul differentiel & de calcul integral, pag. 84. И такъ здѣсь можетъ быть въ первые сія истинна получитъ надлежащее свое доказательство.

Примѣчаніе.

Мы могли бы сію истинну доказать и безъ предположенія четвертой пропорціональной къ тремъ даннымъ величинамъ, но избѣгая длинности сопровождающей сіе доказательство, мы разсудили ограничить себя показаннымъ здѣсь доказательствомъ, тѣмъ паче, что мы не могли бы избѣгнуть другаго предположенія дозволяющаго взять всякую частную или кратную какой либо величины, кое съ первымъ основано на одномъ и томъ же положеніи. Смотри примѣчаніе, въ концѣ теоріи пропорціональныхъ величинъ нами сдѣланное.

Предложеніе XVIII.

Окружности круговъ суть такъ какъ ихъ діаметры.

Для доказательства сего предложенія надлежитъ вѣдать слѣдующія леммы.

1) Разность между периметрами двухъ правильныхъ многоугольниковъ описаннаго около круга и вписаннаго въ оной чрезъ удвоеніе числа сторонъ сихъ многоугольниковъ можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины.

Сія лемма доказана была во II мъ предложеніи первой главы сея книги, чрезъ посредство одного токмо правила наложенія; но здѣсь, поелику теорія пропорціональныхъ величинъ предполагается, нѣтъ нужды избѣгать сея теоріи; и такъ докажемъ сію лемму помощью оной теоріи.

Пусть P, p периметры описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ, C окружность круга и D данная величина, которой разность $P - p$ должна быть сдѣлана меньше; и пусть еще r радіусъ круга или перпендикуляръ отъ центра описаннаго около онаго многоугольника и u перпендикуляръ отъ центра вписаннаго; будетъ $P : p = r : u$ и $P - p : p = r - u : u$. Возьми отъ C такую частную величину $\frac{C}{n}$, что бы оная была меньше D, и естьли $r - u$ будетъ меньше толико же частной величины $\frac{u}{n}$ перпендикуляра u, то требуемое сдѣлано. Ибо, когда $P - p : p = r - u : u$, то будетъ $P - p : \frac{p}{n} = r - u : \frac{u}{n}$, и по причинѣ что $r - u < \frac{u}{n}$, выдетъ $P - p < \frac{p}{n} < \frac{C}{n} < D$. Естьли же $r - u$ не меньше u, то чрезъ удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ сдѣлай $r - u' < \frac{u}{n}$; и пусть тогда периметры многоугольниковъ будутъ P', p', то по причинѣ что u возрастаетъ и что слѣдственно $r - u'$ паче меньше $\frac{u'}{n}$, выдетъ, какъ и прежде, $P' - p' < \frac{p'}{n} < \frac{C}{n} < D$.

2) *Окружность круга есть предѣлъ периметра вписаннаго многоугольника.* Ибо:

a) Между тѣмъ какъ периметеръ вписаннаго многоугольника чрезъ удвоеніе числа сторонъ, которое безъ конца продолжаться можетъ, возрастая перемѣняется, окружность круга непремѣнна пребываетъ и слѣдственно есть величина непремѣнная. b) Оной периметеръ вписаннаго многоугольника чрезъ сіе удвоеніе приближается къ окружности такъ, что разность оной съ нимъ можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины; въ самомъ дѣлѣ, когда окружность круга меньше периметра описаннаго многоугольника, а больше периметра вписаннаго, и когда разность сихъ периметровъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины, то явствуетъ, что разность окружности круга съ периметромъ вписаннаго многоугольника и паче меньше всякой по произволенію данной величины учиниться можетъ. c) Совсѣмъ тѣмъ периметръ вписаннаго многоугольника никогда окружностію круга не сдѣлается.

Положивъ сіе, возьми два круга и впиши въ нихъ одинакаго числа сторонъ правильные многоугольники. Поелику сіи многоугольники подобны, то периметры ихъ будутъ содержаться какъ діаметры круговъ; но поелику по доказанному предъ симъ окружности круговъ суть предѣлы оныхъ периметровъ, то для второй основательной истинны способа предѣловъ окружности круговъ будутъ содержаться такъ же какъ діаметры круговъ.

Предложеніе XIX.

Самые круги суть въ удвоенномъ содержаніи своихъ діаметровъ.

Возьми два какіе нибудь круга и впиши въ нихъ одинаковаго числа сторонъ правильные многоугольники. Поелику сіи многоугольники подобны, то для 20 предложенія VI й книги Евклид. Елементовъ они будутъ содержаться въ удвоенномъ содержаніи діаметровъ круговъ; но поелику по доказанному въ первомъ предложеніи первой главы круги суть предѣлы оныхъ многоугольниковъ, то для второй основательной истинны способа предѣловъ круги будутъ такъ же въ удвоенномъ содержаніи ихъ діаметровъ.

Примѣчаніе.

Сіи предложенія суть взаимныя, такъ что чрезъ посредство перваго первой главы сея книги одно изъ другаго выведено быть можетъ.

Предложеніе XX.

Поверьхности подобныхъ цилиндровъ суть въ удвоенномъ содержаніи діаметровъ ихъ оснований.

Сіе предложеніе требуетъ слѣдующихъ леммъ. Черт. 55.
1) Естьли линеи AB и GH имѣютъ равныя наклоненія къ плоскостямъ, съ коими онѣ встрѣчаются въ A и G, то онѣ составляютъ равные углы, со всѣми тѣми линеями EF и MN, которыя на сихъ плоскостяхъ находятся и чрезъ A и G проходятъ и которыя сами дѣлаютъ равные углы съ линеями DAC и LGK проходящими чрезъ A и G и концы C и K перпендикуляровъ BC и HK, изъ какихъ ниесть точекъ линей AB и GM на оныя плоскости опущенныхъ.

Поелику наклоненія линей AB и GH къ плоскостямъ равныя, то углы BAC, HGK суть равны между собою, и потому, для прямыхъ угловъ ACB и GKH, треугольники ABC и GHK подобны; изъ C и K на EF и MN опусти перпендикуляры CF и KN и протяни BF и HN; оныя BF и HN будутъ къ EF и MN перпендикулярны; что слѣдуетъ изъ 11 предложенія XI книги Евклид. Елементовъ; я говорю, что такъ же и треугольники AFC и GKN подобны, ибо углы FAC и NGK по положенію равные, а AFC, GNK прямые; и такъ будетъ, для подобія первыхъ треугольниковъ, AC : GK = BC : HK, и для подобія другихъ, AC : GK = CF : KN; откуда слѣдуетъ, что BC : HK = CF : KN, и поелику углы BCF и HKN прямые, то слѣдуетъ еще, что треугольники BCF, HKN суть подобные. И такъ будетъ, для подобныхъ треугольниковъ AFC, GKN, CF : KN = AF : GN, и для подобныхъ треугольн. FCB, NKH, CF : KN =

BF : HN; чего ради выдетъ AF : GN = BF : HN; и какъ для послѣднихъ подобныхъ треугольниковъ BF : HN = BC : HK и для подобныхъ треугольниковъ ABC, GHK, BC : HK = AB : GH, то будетъ AF : GN = BF : HN = AB : GH. Почему для 5 предложенія VI й книги Евклидовыхъ Елементовъ наконецъ выдетъ уголъ BAF равенъ HGN, и потому такъ же уголь BAE равенъ HGM.

2) Ежели каждой изъ двухъ толстыхъ угловъ будетъ содержимъ въ трехъ плоскихъ, и два плоскіе угла одного равны двумъ плоскимъ угламъ другаго, каждой каждому, и наклоненія плоскостей сихъ равныхъ угловъ суть такъ же равныя; то и остальной плоской уголъ одного толстаго будетъ равенъ остальному углу другаго толстаго.

Сїе докажется чрезъ наложенїе, и точно поступить надлежитъ такъ, какъ поступлено было въ V предложеніи первой главы при доказательствѣ равенства двухъ толстыхъ угловъ, когда доказавши, что наклоненїе плоскостей какихъ иместь двухъ плоскихъ угловъ одного толстаго равно наклоненію плоскостей двухъ равныхъ плоскихъ угловъ другаго толстаго, доказывали равенство и совмѣщенїе самыхъ толстыхъ угловъ.

Положивъ сїе, приступимъ къ доказательству самаго предложенія. И поелику никакой нѣтъ трудности въ доказательствѣ его, когда цилиндры прямые, то здѣсь довлѣетъ токмо доказать оное въ случаѣ цилиндровъ косыхъ.

Черт. 56. Пусть AC и ac два косые подобные цилиндра; изъ концовъ E и e осей EG и eg цилиндровъ опусти на основанія ихъ перпендикуляры EF и ef; чрезъ оси EG и eg и перпендикуляры EF и ef проходящими плоскостями ABCD и abcd разсѣки цилиндры; въ основанія ихъ впиши правилбные многоугольники AHK и проч. и ahk и проч. равное и четное число сторонъ имѣющіе, такъ чтобы діаметры AB и ab раздѣляли многоугольники на двѣ равныя части; на оныхъ многоугольникахъ сострой призьмы, которыя будутъ тѣ, что въ цилиндры вписанными называются; и наконецъ сіи призьмы раздѣли на трехсторонныя AHGELD, HKGEML и проч. и ahgeld, hkgeml и проч. подобно какъ многоугольники, ихъ основанія, раздѣлены радіусами на треугольники. И учинивъ сіе, говори: Посльку для подобія цилиндровъ углы BGE и bge, наклоненіями осей къ основаніямъ называемые, суть равны между собою, и поелику для правильности и равнаго числа сторонъ многоугольниковъ радіусы HG, KG и проч. и hg, kg и проч. съ діаметрами AB и ab составляютъ углы равные; то для предложенной предъ симъ первой леммы оси EG и eg съ радіусами AG, HG, KG и проч. и ag, hg, kg и проч. дѣлаютъ такъ же углы равные; и потому толстые углы при G трехсторонныхъ призьмъ будутъ равны толстымъ угламъ при g другихъ трехсторонныхъ призьмъ; и потому такъ же наклоненія плоскостей AGED, HGEL, KGEM и проч. къ плоскости, основанія равны наклоненіямъ плоскостей aged, hgel, kgem и проч. къ плоскости основанія. Откуда для второй выше приведенной леммы слѣдуетъ, что толстыхъ угловъ A, H, и проч. плоскіе DAH, LHK и проч. равны плоскимъ угламъ dah, lhk и проч. толстыхъ a, h и проч.; а такимъ образомъ стороны вписанныхъ въ цилиндры призьмъ суть равноугольныя; но поелику для подобія цилиндровъ EG : eg = AB : ab = AG : ag = AH : ah, то оныя стороны вписанныхъ призьмъ будутъ еще и подобныя; и потому поверьхность одной изъ сихъ призьмъ къ поверьхности другой есть въ удвоенномъ содержаніи осей цилиндровъ EG и eg, и слѣдственно такъ же въ удвоенномъ содержанiи дiаметровъ AB и ab ихъ оснований; но по доказанному во II предложенiи первой главы сея книги поверьхности цилиндровъ суть предѣлы поверьхностямъ вписанныхъ въ нихъ призьмъ; слѣдовательно для второй основательной истинны способа предѣловъ поверьхности сихъ цилиндровъ суть такъ же въ удвоенномъ содержанiи дiаметровъ ихъ оснований.

Предложенiе XXI.

Поверьхности подобныхъ конусовъ суть въ удвоенномъ содержанiи дiаметровъ ихъ оснований.

Сiе предложенiе такъ же должно доказать токмо въ случаѣ косыхъ конусовъ.

Черт. 57. И такъ пусть ABC и abc два косые подобные конуса; изъ вершинъ ихъ C и c на плоскости оснований опусти перпендикуляры CE и ce; чрезъ оси CD и cd и сiи перпендикуляры проходящими плоскостями разсѣки конусы; въ основанiя ихъ впиши правильные многоугольники AFG и проч. и afg и проч. равное и четное число сторонъ имѣющiе, такъ чтобы дiаметры AB и ab раздѣляли многоугольники на двѣ равныя части; на оныхъ многоугольникахъ сострой пирамиды, которыхъ бы вершины были въ C и c и которыя будутъ тѣ, что въ конусы вписанными называются; и наконецъ сiи пирамиды раздѣли на трехсторонныя ADFC, FDGC и проч. и adfc, fdgc и проч., подобно какъ многоугольники, ихъ основанiя, раздѣлены радiусами на треугольники. И учинивъ сiе, говори: Поелику для подобiя конусовъ углы BDC и bdc, наклоненiями осей къ основанiямъ называемые, суть равны между собою, и поелику для правильности и равнаго числа стороны многоугольниковъ радїусы FD, GD и проч. и fd, gd и проч. съ дїаметрами AB и ab составляютъ углы равные; то для первой леммы XX предложенїя оси CD и cd съ радїусами AD, FD, GD и проч. и ad, fd, gd и проч. дѣлаютъ такъ же углы равные; и потому толстые углы при D трехсторонныхъ пирамидъ равны толстымъ угламъ при d другихъ трехсторонныхъ пирамидъ; и потому такъ же наклоненїя плоскостей ADC, FDC, GDC и проч. къ плоскости основанїя равны наклоненїямъ плоскостей adc, fdc, gdc и проч. къ плоскости основанїя; откуда для второй леммы XX предложенїя слѣдуетъ, что толстыхъ угловъ A, F, G и проч. плоскїе FAC GFC и проч. равны плоскимъ угламъ fac, gfc и проч. толстыхъ a, f, g и проч.; а такимъ образомъ, какъ то удобно усмотришь, стороны вписанныхъ пирамидъ суть равноугольныя и слѣдственно подобныя; и потому цѣлая поверьхность одной изъ сихъ пирамидъ къ цѣлой поверьхности другой есть въ удвоенномъ содержанїи дїаметровъ AB и ab; но по доказанному въ III предложенїи первой главы цѣлыя поверьхности конусовъ суть предѣлы цѣлымъ поверьхностямъ вписанныхъ въ нихъ пирамидъ; слѣдовательно, для второй основательной истинны способа предѣловъ, цѣлыя поверьхности подобныхъ конусовъ суть такъ же въ удвоенномъ содержанїи дїаметровъ ихъ основанїй. И какъ основанїя равнымъ образомъ въ удвоенномъ содержанїи своихъ дїаметровъ, то заключимъ то же и о простыхъ поверьхностяхъ конусовъ.

Симъ я оканчиваю вторую главу сея книги, поелику все прочее, къ сей главѣ относящееся, послѣ предложеннаго здѣсь не заключаетъ въ себѣ уже ни какой трудности.

ОБЩЕЕ ЗАКЛЮЧЕНІЕ

и

ПРИБАВЛЕНІЯ.

Сіи предначертанныя двѣ главы соединенныя съ Евклидовыми Елементами составляютъ достаточной матеріалъ, такъ сказать, къ сочиненію желаемыхъ д'Аламбертомъ Елементовъ Геометріи, Елементовъ полныхъ и самыхъ строжайшихъ. Онъ начертавъ планъ, въ Енциклопедіи въ членѣ Geometrie, котораго по его мнѣнію держаться должно при сочиненіи сихъ Елементовъ, говоритъ: „Сей „планъ и общія разсужденія, которыя мы сдѣлали въ „концѣ члена Elemens des Sciences, достаточны, дабы заставить возчувствовать, что нѣтъ никакого Геометра, „которой бы былъ выше таковаго предпріятія, что оное „не можетъ быть даже хорошо выполнено, какъ токмо ма„тематиками перваго классу, и что наконецъ дабы сдѣ„лать совершенно хорошіе Елементы Геометріи, Декартъ, „Нютонъ, Лейбницъ, Бернулліи и другіе не были чрезъ „мѣру велики. Между тѣмъ нѣтъ можетъ быть науки, „коей бы Елементовъ столько умножено было, какъ сей, „не считая тѣхъ, которые намъ безъ сомнѣнія выдадутъ „еще. Сіи Елементы большею частію суть творенія ма„тематиковъ посредственныхъ, которыхъ знанія въ Гео„метріи не далѣе ихъ книги простираются, и которые „для сего самаго не способны хорошо предлагать сію ма„терію.„ Ничего не можетъ быть справедливѣе, какъ сіи д' Аламбертовы слова; но я не могу сказать, чтобы планъ имъ начертанный былъ система избраннѣйшая. Система Евклидова мнѣ болѣе нравится. „Вотще старались, говорит Монтукла, разные Геометры, коимъ расположенїе „Евклидово не нравилось, перемѣнить его порядокъ. Безсильныя (и суетныя) ихъ покушенїя доказали, сколь „трудно преобразить связь древнимъ симъ Геометромъ „устроенную, не ослабляя силы доказательствъ. Таково было мнѣнїе славнаго Лейбница, котораго знаменитость въ семъ дѣлѣ должна имѣть полный вѣсъ; и Г. „Вольфъ объявляющїй намъ сїе (a), признается, что онъ „напрасно усиливался привести Геометрическїя истинны „въ совершеннѣйшїй порядокъ, и что сего сдѣлать не „возможно, не предположивъ чего нибудь недоказаннаго или „не ослабивъ много твердости доказательствъ. Аглинскїе „Геометры, которые вкусъ къ Геометрической точности „кажется болѣе другихъ соблюли, были всегда токоваго „мнѣнїя; и Евклидъ имѣлъ между ими изъ искусившихся „Геометровъ ревностныхъ себѣ защитниковъ; почему у „нихъ и немного такихъ книгъ, которыя облегчаютъ путь „къ сей наукѣ токмо къ ея ослабленїю. Они не имѣютъ „иного почти руководства къ Геометрїи, кромѣ Евклида; „и потому довольно всегда у нихъ Геометровъ.

Но между тѣмъ, послѣ толикихъ похвалъ приписуемыхъ системѣ Евклидовой и послѣ собственнаго нашего признанїя, что она есть избраннѣйшая, да позволено будетъ намъ сдѣлать на нее нѣкїя замѣчанїя.

Елементы Геометрїи, какая бы въ нихъ система наблюдаема ни была, неминуемо требуютъ слѣдующихъ началъ:

(a) Elemen. Math. t. V, c. 3, art. 8.

правила наложенія, теоріи величинъ пропорціональныхъ и способа предѣловъ. Сколько первое и второе начала въ сихъ Елементахъ нужны и необходимы, о томъ всякому извѣстно. Между тѣмъ не безполезно замѣтить, что отъ втораго начала не можно имѣть ни какого успѣха, доколѣ чрезъ первое не положится доброе основаніе; и потому первое можно назвать главнымъ и источникомъ нашихъ въ Геометріи познаній. Что же принадлежитъ до третьяго начала, то надобность и необходимость его не столь извѣстна, и потому мы здѣсь изъяснимъ оную. Въ Геометріи сверьхъ прямой линеи приемлется еще *кривая, круговою* называемая, и какъ сія линея совсѣмъ отмѣнна отъ прямой, то ни сравненіе пространства, ею содержимаго, съ прямолинейнымъ, ни опредѣленіе взаимнаго круговъ соотношенія въ пространствахъ прямолинейныхъ не посредственно чрезъ правило наложенія и теорію величинъ пропорціональныхъ, учинено быть не можетъ; ибо какъ бы кругъ ни раздѣлять, никогда до пространствъ *прямолинейныхъ* достигнуть не можно. И такъ для сего нужно было ввести въ Геометрію, сверьхъ правила наложенія и теоріи величинъ пропорціональныхъ, особое начало. *Сіе* особое начало есть способъ предѣловъ: всѣ доводы, какіе токмо при упомянутомъ сравненіи и опредѣленіи употреблены быть могутъ, естьли приведены будутъ во всеобщность, обращятся въ способъ предѣловъ. *Я* разумѣю здѣсь доводы истинные, а не основанные на какомъ либо положеніи. И изъ доводовъ, которые употреблялъ Архимедъ и Евклидъ при упомянутомъ сравненіи и опредѣленіи, произведены тѣ двѣ истинны, которыя мы выше назвали основательными истиннами способа предѣловъ, и которыя суть не иное что, какъ самые сіи доводы во всеобщность приведенные.

Сверхъ того польза и необходимость способа предѣловъ оказывается еще въ тѣлахъ, не токмо отъ круга произходящихъ, но и прямолинейныхъ, ибо ни равенства трехсторонной призьмы съ параллелепипедомъ, ни равенства двухъ пирамидъ безъ способа предѣловъ утвердить не можно.

Новые Геометры къ симъ началамъ прибавили еще такъ называемыя вторыя, а именно: измѣреніе угловъ дугами, и измѣреніе поверьхностей и тѣлъ квадратами и кубами; но Елементы Геометріи собственно такъ называемыя въ сихъ послѣднихъ началахъ не имѣютъ ни малѣйшей надобности; и потому изъ сихъ Елементовъ оныя начала исключены быть должны, тѣмъ паче, что чемъ какая либо наука имѣетъ менѣе началъ, тѣмъ доказательства ея должны быть простѣе и естественнѣе.

Евклидъ въ своихъ Елементахъ употребилъ токмо три первыя начала: изъ главнаго, то есть правила наложенія, произвелъ опредѣленіе линеи прямой и поверьхности прямой; что однакожъ отъ худыхъ переводовъ съ трудомъ примѣтить можно было. Изъ новыхъ Геометровъ Робертъ Симсонъ и Жамесъ Вильямсонъ первые сіе замѣтили, какъ то ниже показано будетъ. Потомъ прилагая оное начало ко взаимному сопряженію прямыхъ линей и круговой съ прямыми, шествовалъ съ симъ свѣтильникомъ доколѣ могъ, и истощивши такъ сіе начало, принялъ въ помощь другое; отъ чего произошли первые шесть книгъ его Елементовъ. Я говорю; шествовалъ доколѣ могъ, потому что еще въ концѣ первой и второй книгъ онъ имѣлъ надобность во второмъ началѣ, но употребить его тутъ не хотѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда онъ тутъ предлагаетъ о превращеніи прямолинейной фигуры въ параллелограммъ и квадратъ, то послѣ сего натурально представляется слѣдующій вопросъ: какъ превратить прямолинейную фигуру въ равносторонной треугольникъ? Ибо, что квадратъ между четвероугольниками, то равносторонной треугольникъ есть между треугольниками. Или лучше, поелику тутъ содержатся всѣ нужныя правила для превращенія всякой прямолинейной фигуры въ треугольникъ, то натурально раждается любопытство разрѣшить обратный сему вопросъ, то есть, какъ превратить треугольникъ во всякую прямолинейную фигуру подобную данной? Понятіе же о подобіи фигуръ весьма естественно: стоитъ токмо представить себѣ двѣ одинакаго числа сторонъ фигуры, въ коихъ бы, когда одинаковымъ образомъ раздѣлятся на треугольники, углы треугольниковъ одной были равны угламъ треугольниковъ другой. И разрѣшеніе сего вопроса въ семъ мѣстѣ, или справедливѣе помѣщеніе тутъ пятой и шестой книгъ Евклидовыхъ сохранило бы то правило, которое онъ столь строго соблюсти старался, а именно, чтобы обратное предложеніе непосредственно шло послѣ прямаго. И такъ видно, что здѣсь, то есть въ первыхъ шести книгахъ, система Евклидова соображена болѣе съ началами нежели съ предметами, для коихъ оныя приемлются. Но послѣ, то есть въ XI книгѣ, Евклидъ нарушилъ сію систему: 1) потому что кромѣ 17, 25, 32, 33, 34, 36, 37, 39 и 40 предложеній, всѣ прочія выведены, или могутъ быть выведены, естьли Евклидъ сего не сдѣлалъ, изъ перваго начала; а такимъ образомъ въ системѣ сообразованной съ началами, а не съ предметами, для чего бы сіи предложенія не показать непосредственно послѣ первыхъ четырехъ книгъ, а не послѣ V й и VI й, гдѣ употреблено уже второе начало? 2) потому что сіи прочія предложенія соединены съ 17, 25, 32, 33, 34, 36, 37, 39 и 40;

изъ которыхъ однѣ основаны на первомъ и купно второмъ, а другія на первомъ и купно третьемъ началѣ; чего въ системѣ сообразованной съ началами сдѣлать не позволяется. Наконецъ въ XII й книгѣ Евклидъ наблюдаетъ паки прежнюю систему сообразованную съ началами, а не съ предметами: 1) потому что въ каждомъ почти предложеніи сея книги употребляется способъ предѣловъ, 2) потому что въ системѣ, сообразованной съ предметами, первое и второе предложенія, которыя единыя токмо къ площадямъ относятся, не могли бы быть помѣщены вмѣстѣ съ тѣлами.

И такъ послѣ сихъ замѣчаній весьма ясно видно, что система Евклидова требуетъ многихъ поправленій, и не есть столь совершенна, какъ панегиристамъ ея она кажется. Такъ же видно, что система вообще всякихъ Елементовъ Геометріи не можетъ быть, какъ токмо двоякая, или сообразованная съ началами, или сообразованная съ предметами. — Откуда раждается вопросъ, которая изъ сихъ системъ есть полезнѣйшая и превосходнѣйшая? Для разрѣшенія его надлежитъ самыхъ людей раздѣлить на два рода: на способныхъ изобрѣтать новыя истинны, и не способныхъ, какъ токмо понимать уже изобрѣтенныя. Первымъ полезна система сообразованная съ началами, а другимъ сообразованная съ предметами; потому что первые, не могутъ ограничить себя предметами, къ которымъ упомянутыя три начала приложены были ихъ предшественниками, но будутъ сами прилагать оныя, какъ нѣкія орудія къ новымъ изъисканіямъ; напротивъ же того другіе не способны будучи дѣйствовать сими орудіями, отъ усталости, такъ сказать, захотятъ увидѣть конецъ своему напряженію, которой не можно иначе означить, какъ когда предметы разположены будутъ въ сходственнѣйшемъ порядкѣ; и какъ сего втораго роду людей гораздо болѣе, нежели перваго, то система сообразованная съ предметами есть превосходнѣйшая, тѣмъ паче, что люди перваго роду слѣдуя оной, не преминутъ усмотрѣть пружины ея, которыя тѣ же самыя, что и системы сообразованной съ началами.

Изъ математиковъ перваго классу Г. Лежандръ въ своихъ Елементахъ Геометріи, изданныхъ 1794 году, вознамѣрился исправить сію сообразованную съ предметами систему Геометріи и доставить ей все возможное совершенство, со строгостію превосходящею Евклидову и Архимедову; и можно сказать, что никогда первоначальная Геометрія отъ новыхъ Геометровъ не получала таковаго пособія; но отдавая всю справедливость Г. Лежандру, мы не должны забыть то, чемъ обязанны истиннѣ. И такъ безъ всякаго пристрастія размотримъ его твореніе.

Но прежде нежели къ сему мы приступить можемъ, надлежитъ подать читателю истинное понятіе о намѣреніи и разположеніи сочиненія Г. Лежандра; что не можно лучше исполнить, какъ приведеніемъ собственныхъ его словъ, относительно сего въ предисловіи имъ начертанныхъ.

„Обыкновенная укоризна Елементамъ Геометріи, что „они мало точны. Многія изъ сихъ сочиненій имѣя частныя „выгоды удовлетворяютъ достаточно намѣренію, съ коимъ „онѣ сдѣланы; но нѣтъ никакого изъ нихъ, въ коемъ бы „доказаны были всѣ предложенія совершенно удовлетво„рительно. Иногда сочинители полагаютъ то, что не со„держится въ опредѣленіяхъ, иногда самыя сіи опредѣле„нія исполнены погрѣшностей, а иногда предполагаютъ „свидѣтельство очей нашихъ. Сверьхъ того сочинители упо„требляютъ начала, которыя сами по себѣ истинны, но

„которыя влекутъ за собою небреженіе, отъ коего умъ нашъ „остается не удовлетвореннымъ (1). Вообще весьма „трудно сдѣлать строгіе Елементы, не только Геомет-„ріи, но и всякой другой науки: предложенія наипро-„стѣйшія суть въ тоже самое время и наизатруднитель-„нѣйшія и таковыя, которыя доказываютъ съ наимень-„шимъ успѣхомъ. Но трудность однакожъ не есть при-„чина долженствующая останавливать, что бы предпри-„нимать толико полезныя сочиненія. Поелику пред-„метъ Геометріи простъ и ко уразумѣнію удобенъ, то „наипаче сея науки можно надѣяться сдѣлать хоро-„шіе Елементы. И чтобы достигнуть къ сему намѣренію, „то не должно страшиться, что покажешься длиннымъ „и скучнымъ: лишь бы былъ ясенъ, точенъ и не подвер-„женъ укоризнѣ въ излишности, намѣреніе будетъ выпол-„нено; и длинности, естьли оныя случатся, должны быть „приписуемы натурѣ предметовъ, которая не позволяетъ „быть краткимъ, буде не пожертвуешь важнѣйжимъ преи-„муществомъ науки, кое есть ея точность. И такъ я ду-„маю, что нѣкоторой родъ способа употребляемаго древ-„ними Геометрами есть паки тотъ способъ, которой наи-„болѣе приближаетъ къ совершенству и которой наи-„лучше приличествуетъ къ Геометрическимъ доказатель-„ствамъ. Новые нашли для себя сей способъ чрезмѣру за-„трудвительнымъ, и вмѣсто онаго приняли другіе про-„стѣйшіе и наискоряе къ концу ведущіе; но надобно „признаться, что сіи способы ни столь строги ни столь „удовлетворительны, какъ бы надлежало.

---

(1) „Смотри то, что говоритъ д'Аламбертъ относительно Елемен-„товъ Геометріи въ IV и V томахъ de ses Melanges de Philosophie.

„Занимаясь преподаванiемъ наукъ, я имѣлъ случай при-
„мѣтишь, назадъ тому долгое время, несовершенства имѣю-
„щiяся въ извѣстнѣйшихъ первоначальныхъ сочиненiяхъ;
„мало по малу я собралъ машерiалы служащiе ко усовер-
„шенiю Елементовъ; на конецъ я рѣшился сiи машерiалы
„обрашишь на самое дѣло; и отъ того произошло сочи-
„ненiе, которое я теперь публикѣ представляю.

„Изъ того, что я сказалъ уже, видно, что мое на-
„мѣренiе было сдѣлать Елементы весьма строгiе. Я слѣ-
„довалъ довольно близко пуши избранному Евклидомъ въ
„своихъ Елеменшахъ и Архимедомъ въ своей книгѣ de Sphae-
„ra et Cylindro; но стараяся сравняться или даже пре-
„взойти своихъ образцевъ въ точности, я хотѣлъ такъ
„же пощадить читателя, сколько мнѣ возможно была, и
„я употребилъ всѣ мои силы, дабы придашь доказатель-
„ствамъ всю ясносшь и кратксть, каковую токмо пред-
„метъ возпрiять можетъ.

„Я предполагаю, что читатель знаетъ теорiю про-
„порцiй, которая изъяснена въ обыкновенныхъ сочиненiяхъ
„Ариѳметики и Алгебры; и я предполагаю даже знанiе
„первыхъ правилъ Алгебры, каковы суть сложенiе, вычи-
„танiе и наипростѣйшiя дѣйствiя употребляемыя при
„уравненiяхъ первой степени. Древнiе, которые не зна-
„ли Алгебры, вмѣсто оной на помощь свою призывали
„разсужденiе и пропорцiи, которыми они дѣйствовали съ
„великимъ искусствомъ. Намъ же, имѣющимъ сiе орудiе,
„непростительно бы было не употреблять его, когда отъ
„того можетъ произойти большая удобность. И такъ я
„не колебался, что бы употребить знаки и дѣйствiя Ал-
„гебраическiя, когда я находилъ то нужнымъ; но я имѣлъ
„осторожность, чтобы не приводить въ сложность чрезъ

„трудныя дѣйствія то, что по своей натурѣ должно „быть просто; и все употребленіе, которое я сдѣлалъ „въ сихъ Елементахъ Алгебрѣ, состоитъ, какъ то я уже „сказалъ, въ нѣкоторыхъ весьма простыхъ правилахъ, ко-„торыя можно знать, не учась Алгебрѣ.

„Сверьхъ того мнѣ кажется, что естьли ученіе Гео-„метріи должно быть предшествуемо нѣкоторымъ наста-„вленіемъ объ Алгебрѣ, то не будетъ безполезно, чтобы „вести ученіе сихъ двухъ наукъ вмѣстѣ и мѣшать одну „изъ нихъ съ другою. По мѣрѣ шествія въ Геометріи, при-„нужденъ будешь дѣлать соединеніе большему и большему „числу соотношеній; и Алгебра тутъ можетъ быть весь-„ма полезна, ведя къ заключенію скорѣйшимъ и удобнѣй-„шимъ образомъ. Естьли бы къ симъ Елементамъ я при-„соединилъ Тригонометрію, то бы основательныя пред-„ложенія я старался доказать по обыкновенному способу, „которой извѣстенъ подъ именемъ *синтетическаго*, но пос-„лѣ, при взаимномъ соединеніи сихъ предложеній и выводѣ „изъ нихъ разрѣшенія различныхъ случаевъ, я бы употре-„билъ Алгебру. Когда предложенія Елементовъ единожды „поставлены на твердыхъ основаніяхъ, то ихъ различныя „соединенія, приложенія и слѣдствія, которыя изъ того „извлечь можно, содѣлываются предметомъ Алгебры; и „было бы ребячество употреблять всегда способъ много-„трудный, когда замѣнить его можетъ гораздо простѣйшій „и толико же вѣрный.

„Сочиненіе сіе раздѣлено на восемь книгъ, изъ коихъ „первыя четыре за предметъ имѣютъ Геометрію пло-„скостей, а другія Геометрію тѣлъ.

„Первая книга, подъ заглавіемъ *начало*, содержитъ въ „себѣ свойства линей прямыхъ, взаимно встрѣчающихся,

„свойства линей перпендикулярныхъ и параллельныхъ, „случаи, въ коихъ треугольники равны между собою, и проч.

„Вторая книга есть *слѣдствіе началъ*; она предлагаетъ о простѣйшихъ свойствахъ круга, свойствахъ хордъ „и касательныхъ, и о мѣрѣ угловъ дугами круга. Сіи двѣ „первыя книги заключены разрѣшеніемъ нѣкоторыхъ вопросовъ относящихся къ Геометрическому строенію фи„гуръ.

„Третія книга, подъ заглавіемъ *пропорціональности „фигуръ*, заключаетъ въ себѣ мѣру поверьхностей, ихъ „сравненіе, свойства прямоугольнаго треугольника, свойства равноугольныхъ треугольниковъ и фигуръ подобныхъ, „и проч. Здѣсь можетъ быть встрѣтятъ насъ, что мы „перемѣшали свойства линей съ свойствами поверхностей; „но въ семъ мы почти слѣдовали Евклиду, и сей распорядокъ не можетъ быть худъ, когда однѣ предложенія „будутъ хорошо сцѣплены съ другими. Сія книга заключается такъ же собраніемъ вопросовъ относительныхъ „къ предметамъ, въ ней предлагаемымъ.

„Четвертая книга предлагаетъ *о правильныхъ многоугольникахъ и измѣреніи круга.* Двѣ леммы служатъ „основаніемъ сего измѣренія, которое въ прочемъ доказано способомъ подобнымъ Архимедову; потомъ показуются два приближенныя средства находить квадратуру „круга, изъ коихъ одно принадлежитъ Якову Григори. За „симъ слѣдуетъ прибавленіе, въ которомъ доказывается, „что кругъ есть больше всякой прямолинейной фигуры, „равную окружность имѣющей.

„Пятая книга заключаетъ въ себѣ свойства *плоскостей и толстыхъ угловъ.* Сія часть Геометріи весьма

,,полезна для уразумѣнія тѣлъ и фигуръ, въ коихъ при-
,,емлюшся въ разсужденіе различныя плоскости. Мы
,,щщилися предложить се яснѣе и строжае, нежели какъ
,,она была изложена въ обыкновенныхъ сочиненіяхъ.

,,Шестая книга предлагаетъ *о многогранникахъ и о
,,ихъ измѣреніи.* Она должна показаться весьма различною
,,отъ изданнаго по сіе время писателями Елементовъ,
,,ибо мы старалися представить ее совсѣмъ въ новомъ
,,видѣ.

,,Седьмая книга есть сокращенное изслѣдованіе *о ша-
,,рѣ и треугольникахъ на поверьхности онаго представ-
,,ляемыхъ.* Сіе изслѣдованіе обыкновенно не входитъ въ
,,Елементы Геометріи; но мы почли за полезное помѣ-
,,стить его въ оные, поелику не служитъ, какъ токмо вве-
,,деніемъ въ Тригонометрію Сферическую.

,,Прибавленіе къ шестой и седьмой книгамъ имѣетъ
,,за предметъ *правильные многогранники*, дѣло о коемъ
,,довольно пространно толковано въ Евклидѣ и кое мо-
,,жетъ доставить любопытныя приложенія къ Тригоно-
,,метріи.

,,Осьмая книга предлагаетъ *о трехъ круглыхъ тѣ-
,,лахъ,* кои суть шаръ, конусъ и цилиндръ; тутъ пока-
,,зуется измѣреніе поверьхностей и толщинъ сихъ тѣлъ
,,по способу сходственному съ Архимедовымъ и основанному,
,,относительно поверьхностей, на тѣхъ же началахъ, ко-
,,торыя мы тщилися доказать *въ предварительныхъ лем-
,,махъ.*

,,Сначала мы думали для сихъ измѣреній, такъ какъ
,,и для измѣренія круга, употребить *способъ предѣловъ*,
,,которой въ прочемъ былъ бы изрядное приуготовленіе
,,къ дифференціальному вычисленію; но кромѣ что въ

„теоріи предѣловъ долженствовало бы предложить нѣко-
„торыя общія начала, кои суть паче предметъ Алгебры,
„нежели Геометріи, употребленіе сего способа требуетъ
„принятія въ разсужденіе безконечнаго ряда вписанныхъ
„и описанныхъ фигуръ; что влечетъ за собою длинности
„и трудности. И такъ мы предпочли способъ Архиме-
„довъ, какъ простѣйшій и совершенно почти исключаю-
„щій понятіе о безконечности. Не преминутъ насъ встрѣ-
„тить здѣсь, что доказательства относящіяся къ поверь-
„хности цилиндра и шара весьма длинны; но кажется,
„что трудность не раздѣльна съ самымъ предметомъ и
„что невозможно сократить сіи доказательства, не учи-
„нивъ ихъ слабыми.

„Таковъ есть планъ и раздѣленіе сего сочиненія. Что
„же принадлежитъ до выполненія, то я чувствую, что
„оно еще очень несовершенно и что можетъ быть испра-
„влено во многихъ мѣстахъ. Геометрамъ я предоставляю
„говорить о введеніи тѣхъ новостей, которыхъ въ сихъ
„Елементахъ довольно много: я ожидаю ихъ сужденія и
„пособія отъ ихъ просвѣщенія, дабы придать сему сочи-
„ненію совершенство, каковому токмо оно подлежать мо-
„жетъ.

Послѣ сихъ послѣднихъ словъ Г. Лежандра не долж-
но опасаться, что бы сказать всю правду о его сочине-
ніи. И такъ сначала мы сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія
на средства принятыя Г. Лежандромъ, дабы усовершить
и исправить Елементы Геометріи; потомъ учинимъ при-
мѣчанія на самое выполненіе его предпріятія; и наконецъ
подъ именемъ прибавленій, исправимъ и перемѣнимъ то,
что найдемъ за нужное.

Замѣчанія на средства принятыя Г. Лежандромъ, дабы усовершить и исправить Елементы Геометріи.

I.

Г. Лежандръ при усовершеніи и исправленіи Елементовъ Геометріи почелъ за лучшее, и можетъ быть за необходимое, предположить онымъ Ариѳметику, Ариѳметическую теорію пропорцій и часть Алгебры; но въ самомъ дѣлѣ сіе и не нужно и допущено быть не можетъ:

1) Потому что въ Елементы Геометріи, собственно такъ называемые, коихъ предметъ есть главныя свойства трехъ родовъ протяженности и тѣ Геометрическія строенія, кои для изслѣдованія сихъ свойствъ необходимо потребны, никакія вычисленія непосредственно и прямо не входятъ и войти не могутъ. И дѣйствительно числительная наука не иначе новыми Геометрами введена въ Елементы Геометріи, какъ чрезъ посредство тѣхъ предложеній, кои собственно къ Елементамъ Геометріи не принадлежатъ, а именно чрезъ посредство предложеній, ко измѣренію прямоугольника и параллелепипеда относящихся; что, какъ ни свойство сихъ протяженностей, ниже Геометрическое строеніе для изслѣдованія свойствъ потребное, совсѣмъ къ Елементамъ Геометріи не принадлежитъ, но относится паче къ числительной наукѣ.

2) Потому что Ариѳметическая теорія пропорцій, какъ до соизмѣримыхъ токмо величинъ простирающаяся, для Геометріи недостаточна, и потому въ оной употреблена быть не должна, поелику надобна общая, въ коей бы какъ соизмѣримыя, такъ и несоизмѣримыя величины могли быть приняты въ разсужденіе. Мы о семъ говорили въ началѣ

второй главы; но здѣсь еще скажемъ относительно неудачнаго ухищренія Г. Лежандра. Онъ въ началѣ третей книги своей Геометріи (стр. 58) дѣлаетъ одно замѣчаніе, которое, по его мнѣнію, *весьма важно, дабы утвердить истинной смыслъ пропорціи и разогнать весь мракъ могущій быть или въ предложеніи или въ доказательствѣ онаго.* Вотъ сіе важное замѣчаніе. „Естьли имѣешь пропорцію „$A : B = C : D$, то извѣстно, что произведеніе крайнихъ „$A \times D$ равно произведенію среднихъ $B \times C$. Сія истинна въ „числахъ неоспорима; она равно неоспорима и при всякихъ другихъ величинахъ, лишь бы только оныя изображалися или воображалися изображенными чрезъ числа; и „что всегда положить можно: Напримѣръ естьли A, B, C, D, „суть четыре линеи, то можно вообразить, что одна „изъ нихъ, или естьли хочешь, особая пятая служитъ всѣмъ „общею мѣрою и взята за единицу; тогда каждая изъ линей „A, B, C, D представитъ нѣкоторое число единицъ, цѣлое „или дробное, соизмѣримое или несоизмѣримое, и пропор„ція между линеями сдѣлается пропорціею чиселъ. Но въ семъ замѣчаніи, въ самомъ дѣлѣ, кромѣ противорѣчія, ничего важнаго нѣтъ. Ибо, Г. Лежандръ у линей A, B, C, D положивъ сперва общую мѣру и слѣдственно положивъ ихъ соизмѣримыми, говоритъ потомъ, что каждая изъ нихъ можетъ представить число и несоизмѣримое. Сверхъ того я примѣчу еще, что несоизмѣримыя или лучше глухія числа не суть собственно числа (дѣйствительныя и натуральныя опредѣленія величинъ какого нибудь роду количества по одной изъ нихъ за единицу взятой), но суть токмо произвольные знаки принятые для означенія величины происходящей отъ нѣкотораго учиниться долженствуемаго или уже учиненнаго Геометрическаго строенія: онѣ, не такъ какъ цѣлыя и дробныя, величинъ, ими означенныхъ, по единицѣ не опредѣляютъ ниже въ мыслахъ нашихъ начершываюшъ объ нихъ понятіе; но то и другое дѣлается чрезъ строеніе Геометрическое. И справедливо примѣчаетъ д'Аламбертъ (Melanges de litterature &c. t. V, p. 216), что „ наименованіе числа разпростер„то къ содержаніямъ несоизмѣримымъ несвойственно, ибо „въ словахъ *число* и *изчислять* предполагается означеніе „точное и ясное; чему сей родъ содержаній не подле„житъ; и собственно не имѣется, какъ токмо два рода „чиселъ; цѣлыя, какъ 2, 3, 4 и проч. и ломанныя или дро„би, какъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, и проч. или $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ и проч. Первыя „представляютъ содержанія двухъ величинъ, изъ коихъ „одна содержитъ въ себѣ другую нѣсколько разъ точно „безъ остатка, какъ то 2 раза, 3 раза, 4 раза и проч. „Другія же изображаютъ содержанія двухъ величинъ, ког„да одна изъ нихъ содержитъ въ себѣ нѣсколько разъ безъ „остатка половину, треть, четверть, пятину и такъ „далѣе другой „. Да естьли и положить, что такъ называемыя глухія числа опредѣляютъ нѣкоторымъ образомъ несоизмѣримыя величины, то и тогда не избѣгнешь неудобства, ибо не извѣстно еще, да и едва ли когда нибудь будетъ извѣстно, что ихъ довлѣетъ для всѣхъ сего роду величинъ, какія токмо быть и существовать могутъ. Объ окружности круга навѣрное сказать можно, что она съ своимъ діаметромъ несоизмѣрима, однако никоимъ образомъ утвердительно сказать нельзя, что она можетъ изобразиться чрезъ какое нибудь число глухое.

3) Потому что Алгебра разсматриваемая во всей ея обширности сама нѣкоторымъ образомъ предполагаетъ Геометрію и основана на общей теоріи пропорціональныхъ величинъ. Она таковымъ образомъ разсматриваемая подчиняетъ вычисленію или лучше виду вычисленія какъ величины съ единицею соизмѣримыя и числами изобразимыя,

такъ и тѣ, которыя съ единицею несоизмѣримы и числами не изобразимы, но развѣ токмо чрезъ линеи, опредѣленныя помощію Геометрическаго строенія. Послѣ сего объ Алгебрѣ понятія гораздо лучше Елементы Геометріи предположить Алгебрѣ, нежели Алгебру Елементамъ Геометріи, тѣмъ паче, что Алгебраическое вычисленіе, какъ то замѣчаетъ д'Аламбертъ, нисколько Елементовъ Геометріи не облегчаетъ, и слѣдственно въ оные войти не должно. И сіе весьма согласно съ тѣмъ, что послѣ самъ сказалъ Г. Лежандръ о Елементахъ Тригонометріи, а „именно: естьли бы я присоединилъ къ симъ Елементамъ, говоритъ онъ, Тригонометрію, то бы основательныя предложенія я старался доказать по обыкновенному способу, которой извѣстенъ подъ именемъ Синтетическаго, но послѣ, продолжаетъ, при взаимномъ соединеніи сихъ предложеній и выводѣ изъ нихъ разрѣшенія различныхъ случаевъ, я бы употребилъ Алгебру„. И такъ основательныя предложенія Геометріи надлежитъ вывести и доказать по способу Синтетическому; чего иначе и сдѣлать не можно и что составитъ то, что собственно Елементами Геометріи называется; а потомъ должно вступить въ Алгебру и соединить ее съ Геометріею, какъ сдѣлалъ великій Нютонъ въ превосходномъ своемъ сочиненіи, Arithmetica Universalis. Напримѣръ, когда дойдешь до уравненій, то по разрѣшеніи уравненія Алгебраически можно положить сперва, что буквы означаютъ извѣстныя числа; и тогда учинивъ дѣйствительное вычисленіе, получишь рѣшеніе ариѳметическаго вопроса; потомъ можно положить, что буквы означаютъ извѣстныя линеи; и тогда учинивъ Геометрическое строеніе, получишь рѣшеніе Геометрическаго вопроса. И вотъ то смѣшеніе или соединеніе Алгебры съ Геометріею, и естьли хочешь съ Ариѳметикою, о которомъ говоритъ Г. Лежандръ, но въ пристойнѣйшемъ мѣстѣ, нежели въ каковомъ онъ сїе полагаетъ, и гдѣ въ точности не потерпитъ ни та ни другая наука, и окажется сверьхъ того само собою истинное понятїе, которое объ Алгебрѣ имѣть должно, ибо многїе не почитаютъ ее, какъ токмо Ариѳметикою о числахъ неопредѣленныхъ или извѣстнаго значенїя неимѣющихъ, когда въ самомъ дѣлѣ она есть наука различныхъ соединенїй всѣхъ возможныхъ величинъ, какъ съ единицею соизмѣримыхъ и числами изобразимыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ и никакими числами неизобразимыхъ. Послѣ сего я могу повторить слѣдующїя Г. Лежандра слова, какъ будто собственныя свои, но съ большимъ правомъ, нежели онъ: „Когда предложенїя Елементовъ Геометрїи единожды поставлены на твердыхъ основанїяхъ, то ихъ различныя соединенїя, приложенїя и слѣдствїя, которыя изъ того извлечь можно, содѣлываются предметомъ Алгебры; и было бы ребячество (педантство, я прибавлю) употреблять всегда способъ многотрудный, когда замѣнить его можетъ *гораздо простѣйшїй* и толико же вѣрный„.

II.

Г. Лежандръ при измѣренїи или лучше при сравненїи круга и поверьхностей трехъ круглыхъ тѣлъ съ треугольникомъ или прямоугольникомъ, такъ какъ и при сравненїи самыхъ сихъ тѣлъ съ параллелепипедомъ, старался избѣгнуть способа предѣловъ, для того, что въ теорїи онаго надобно бы было, по его мнѣнїю, предложить нѣкоторыя общїя начала, кои суть паче предметъ Алгебры, нежели Геометрїи, и что сверьхъ того употребленїе сего способа требуетъ принятїя въ разсужденїе безконечнаго множества вписанныхъ и описанныхъ фигуръ; что, продолжаетъ, влечетъ за собою длинности и трудности; и того ради онъ предпочелъ способъ Архимедовъ, какъ простѣйшій и совершенно почти исключающій понятіе о безконечности. Но въ самомъ дѣлѣ Г. Лежандръ принявъ способъ Архимедовъ, способа предѣловъ не избѣгнулъ, и общихъ Алгебраическихъ началъ онаго, какъ совсѣмъ безполезныхъ для Елементовъ Геометріи, страшился напрасно, такъ какъ и того, что будто сей способъ требуетъ принятія въ разсужденіе безконечнаго множества вписанныхъ и описанныхъ фигуръ.

1) Потому что способъ предѣловъ, какъ то мы показали (а), есть не иное что, какъ способъ Архимедовъ же во всеобщность приведенный. — Правда Г. Лежандръ употребилъ способъ Архимедовъ съ нѣкоторою отмѣною и тѣмъ учинилъ его простѣе; но отмѣна и простота сія состоитъ не въ способѣ, а въ леммахъ. Возмемъ напримѣръ слѣдующее предложеніе и докажемъ его по способу Г. Лежандра.

Черт. 58. Кругъ равенъ треугольнику, коего основаніе *окружность* сего круга, а высота радіусъ его.

Пусть ABC кругъ и DEF треугольникъ, коего основаніе DF окружность сего круга, а высота DE радіусъ его; то буде кругъ треугольнику не равенъ, онъ долженъ быть или больше или меньше его.

Пусть больше, то имѣется другой кругъ меньшій, нежели ABC, которой равенъ треуг. DEF; пусть кругъ HKL, описанный радіусомъ GH изъ того же центра G,

(а) Смотри въ первой главѣ статью о способѣ предѣловъ и исправленіи его, стран. 28.

равенъ треуг. DEF; то протянувъ въ точкѣ H касательную MN до пресѣченія съ окружностію перваго круга, и вписавъ въ оной первой кругъ какой ниесть правильной многоугольникъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ впиши другой такой, чтобы уголъ его при центрѣ PGQ былъ меньше угла MGN; стороны сего многоугольника не будутъ прикасаться къ окружности другаго круга HKL, и потому сей многоугольникъ будетъ заключать въ себѣ кругъ HKL, и слѣдовательно будетъ больше треугол. DEF; что нелѣпо; слѣд. и проч.

Пусть кругъ ABC меньше треуг. DEF, то имѣется другой, большій цежели ABC, которой равенъ треуг. DEF; пусть кругъ hkl, описанный радіусомъ Gh изъ того же центра G, равенъ треуг. DEF; то протянувъ въ точкѣ A касательную mn до пресѣченія съ окружностію сего другаго круга и описавъ около перваго круга какой ниесть правильной многоугольникъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ опиши такой другой правильной многоугольникъ, что бы уголъ его при центрѣ pGq былъ меньше угла mGn; вершины угловъ сего многоугольника не будутъ прикасаться къ окружности другаго круга hkl, и потому сей многоугольникъ будетъ заключаться въ кругѣ hkl, и слѣдовательно будетъ меньше треуг. DEF, что нелѣпо; слѣд. и проч.

И такъ кругъ ABC треугольнику DEF равенъ. Отсюда ясно видно, что доказательство сіе не разнится отъ Архимедова, какъ токмо доказательствомъ слѣдующихъ леммъ: когда кругъ больше какой либо площади, то возможно въ него вписать правильной многоугольникъ, которой такъ же будетъ больше сей площади; и когда кругъ меньше какой либо площади, то возможно около него описать правильной многоугольникъ, которой такъ же будетъ меньше сей площади (а).

Въ первомъ предложенiи первой главы мы приемля доказательство Евклидово и Архимедово, сiи двѣ леммы привели въ одну; то же самое можемъ учинить съ ними, приемля доказательство и Г. Лежандра. Въ самомъ дѣлѣ, Черт. 59. пусть ABC кругъ, въ которой вписать и около котораго описать надлежитъ такiе два правильные многоугольника, что бы разность ихъ была меньше данной площади D; то взявъ площадь E меньшую нежели D, я примѣчаю, что имѣется площадь равная разности круга ABC и площади E; откуда заключаю, что имѣется такъ же и кругъ abc, описанный изъ тогоже центра G, которой равенъ сей разности и которой будучи меньше круга ABC, заключается въ кругѣ ABC; потомъ паки примѣчаю, что имѣется площадь, которая превосходитъ кругъ abc на D; откуда заключаю, что имѣется такъ же и кругъ a′b′c′, описанный изъ центра G, которой превосходитъ кругъ abc на площадь D, и которой, поелику D > E, заключаетъ въ себѣ кругъ ABC. И такъ ничего болѣе не остается, какъ въ кругъ ABC вписать и около него описать такiе два правильные многоугольника, что бы стороны перваго не прикасались къ окружности круга abc, а вершины угловъ другаго не лежали на окружности круга a′b′c′; что по предложенному предъ симъ удобно уже сдѣлать можно и

(а) Причемъ не безполезно замѣтить, что Евклиду и Архимеду свое доказательство симъ леммамъ было весьма извѣстно, ибо убѣдительнѣйшимъ свидѣтельствомъ служитъ тому 16 предложенiе XII книги; но ни тотъ ни другой изъ нихъ употребить его тутъ не хотѣлъ, потому что основано на предположенiи, безъ коего обойтись можно; чему и я послѣдовалъ.

что основано, такъ какъ и наше сей леммѣ доказательство, на 1 мъ предложеніи X книги Евклид. Елементовъ. Наконецъ, хотя Маклоренъ въ введеніи въ превосходное свое сочиненіе о флюкціяхъ и показалъ, что Архимедовъ способъ приведенный во всеобщность обращается въ способъ предѣловъ (a); однако, для вящшаго убѣжденія читателя въ тщетномъ стараніи Г. Лежандра, дабы избѣгнуть способа предѣловъ, не безполезно здѣсь показать тожество его доказательсшва съ доказательствомъ первой основательной истинны сего способа. И такъ пусть кругъ ABC = A, треугольникъ DEF = B, многоугольникъ вписанной въ кругъ = X и многоугольникъ описанной около онаго = Y; то слѣдуя слово въ слово предложенному выше доказательству Г. Лежандра, я говорю, что буде кругъ A не равенъ треугольнику B, онъ долженъ быть или больше или меньше его. Черт. 58.

Пусть кругъ A больше треугольника B, то многоугольникъ X чрезъ удвоеніе числа сторонъ напослѣдокъ превзойдетъ кругъ равный треугольнику B, и слѣдственно будетъ больше треугольника B; что нелѣпо, слѣд. и проч.

Пусть кругъ A меньше треугольника B, то многоугольникъ Y чрезъ удвоеніе числа сторонъ напослѣдокъ сдѣлается меньше круга равнаго треугольнику B и слѣдственно будетъ меньше треугольника B; что нелѣпо, слѣд. и проч.

После сего я надѣюсь всякой увидитъ, что доказательство Г. Лежандра совершенно почти тоже, что и доказательство первой основательной истинны въ первой главѣ нами предложенное; вся разность состоитъ

(a) Смотри стран. X и XI сего введенія.

токмо въ томъ, что тамъ не приемлется, какъ *одна* токмо возрастающая или убывающая величина, а здѣсь та и другая. И что не приемлется, какъ одна токмо возрастающая или убывающая величина, то для того, что въ томъ состоитъ одно изъ важнѣйшихъ преимуществъ способа предѣловъ предъ Архимедовымъ.

2) Потому что въ общихъ и Алгебраическихъ началахъ способа предѣловъ (каковы суть: когда двѣ перемѣнныя величины X и Y имѣютъ предѣлы A и B, то сумма ихъ X+Y имѣетъ предѣломъ сумму предѣловъ A+B, разность ихъ X—Y имѣетъ предѣломъ разность предѣловъ A—B, произведеніе ихъ XY имѣетъ предѣломъ произведеніе предѣловъ AB, и такъ далѣе) Елементы Геометріи не имѣютъ ни малѣйшей надобности; ибо въ предложенныхъ нами двухъ главахъ, мы непрестанно употребляя способъ предѣловъ, нигдѣ, какъ то видѣли, *сихъ* началъ не употребили и употребить ни какой надобности не имѣли, но довольствовались токмо двумя *истиннами*, которыя мы назвали основательными и которыя ни сколько отъ Алгебры не зависятъ. Въ прочемъ видно, что Г. Лежандръ вовлеченъ былъ въ сію погрѣшность предположеніемъ Алгебры, которой пособіемъ не извѣстно для чего здѣсь пользоваться не захотѣлъ.

Такъ же, будто способъ предѣловъ требуетъ безконечнаго множества вписанныхъ и описанныхъ фигуръ, Г. Лежандръ погрѣшаетъ потому, что въ немъ, какъ то видѣли въ упомянутыхъ двухъ главахъ, не требуется какъ токмо показать, что разность между сими фигурами чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ убываетъ болѣе, нежели на половину, и потому можетъ учиниться меньше всякой по произволенію данной величины, или лучше, не требуется, какъ того же самаго что нужно и Г. Лежандру. Напримѣръ въ доказанномъ выше предложенiи Г. Лежандру нужно продолжить удвоенiе числа сторонъ вписаннаго или описаннаго многоугольника по тѣхъ поръ, пока стороны или углы онаго не будутъ совсѣмъ прикасаться къ окружности внутренняго или внѣшняго круга по произволенiю взятого заравный треугольнику; равнымъ образомъ и въ способѣ предѣловъ нужно продолжить сiе удвоенiе по тѣхъ поръ, пока разность между описаннымъ и вписаннымъ многоугольниками сдѣлается меньше по произволенiю взятой величины. Что же принадлежитъ до того, что оное удвоенiе числа сторонъ безъ конца продолжаться можетъ, то тутъ я ничего ни метафизическаго ни глубокомысленнаго не вижу: сiе есть необходимое слѣдствiе натуры той фигуры, около коей однѣ описаны и въ коей другiя вписаны; и дѣйствiе сiе ни чѣмъ почти не разнится отъ раздѣленiя линеи на полы, половины ея паки на полы, и такъ далѣе, гдѣ никто не сомнѣвается, и ни для кого не странно, что оное раздѣленiе никогда окончить не можно.

И такъ Г. Лежандръ вотще старался избѣгнуть способа предѣловъ и найти въ немъ неудобства, коимъ онъ не подверженъ. И естьли сверьхъ того способъ предѣловъ есть общiй и приложенiе его къ Елементамъ Геометрiи служитъ изряднымъ приуготовленiемъ къ дифференцiальному и интегральному изчисленiю, то кажется, что Г. Лежандръ отверженiемъ онаго не иное что хотѣлъ сдѣлать, какъ отступить отъ общаго всѣхъ математиковъ стремленiя, что бы знанiя человѣческiя по сей части привести къ общимъ началамъ.

Послѣ сихъ уже вмѣстѣ взятыхъ замѣчанiй видно, что Елементы Геометрiи Г. Лежандра не могутъ быть столь близки къ совершенству, какъ по видимому онъ думаетъ. Но вотъ еще другія примѣчанія, которыя соединенныя съ предъидущими полнымъ образомъ должны удостовѣрить читателя въ реченномъ нами.

Примѣчанія на самое выполненіе Лежандрова предпріятія.

Въ первой книгѣ Елементовъ Геометріи сего писателя намъ наипаче важны кажутся слѣдующіе недостатки и неудобства:

1) Въ нихъ не показано, какимъ образомъ отъ тѣлъ естественныхъ въ умѣ нашемъ раждается понятіе о поверхностяхъ и линеяхъ. Сей недостатокъ важенъ по двумъ причинамъ: потому что чрезъ сіе токмо средство можно получить ясное и истинное понятіе о сихъ въ мысляхъ нашихъ представляемыхъ протяженностяхъ; и *потому* что чрезъ оное токмо можно опредѣлить то мѣсто, которое Геометрія между прочими человѣческими познаніями занимать долженствуетъ.

2) Тутъ за опредѣленіе прямой линеи взята первая Архимедова аксіома. Сіе неудобство мы изъяснили въ первой главѣ на страницѣ 41. Но Г. Лежандръ думалъ его избѣгнуть прибѣгнувъ къ предположенію, которое изъ опредѣленія не слѣдуетъ, и наименовавъ оное аксіомою. Смотри опредѣленіе 8, стран. 6, и примѣчаніе на I и III предложенія первой книги, стран. 286, его Елементовъ Геометріи.

3) Углу онъ далъ слѣдующее опредѣленіе: „ Когда двѣ прямыя линеи встрѣчаются, то большее или меньшее

количество, на которое одна линея отдалена отъ другой, называется уголъ„. Но я не вижу изъ сего какое количество Г. Лежандръ тутъ разумѣетъ? самое ли пространство между двумя линеями содержащееся или другое какое либо? Сiе казалось бы нужно было ясно и точно выразить, дабы знать почему должно судить о большемъ или меньшемъ отдаленiи одной линеи отъ другой.

Сiи неудобства мы охотно исправить постараемся, тѣмъ паче, что онѣ суть почти общiя съ первою книгою Евклидовыхъ Елементовъ. Оное исправленiе составитъ первое прибавленiе.

4) Поелику въ Лежандровомъ опредѣленiи линеи прямой предполагается то, что Евклидъ доказываетъ, само по себѣ видно, что сiя первая книга Г. Лежандра должна чувствительно разниться отъ первой Евклидовой; но Г. Лежандръ выпустивъ нѣкоторые къ Геометрическому строенiю относящiеся вопросы, учинилъ ее паче различною нежели какъ бы думать можно было; и отъ того принужденъ былъ предполагать то, что на самомъ дѣлѣ показать тутъ было бы можно и должно. Вѣроятно, что сiе онъ сдѣлалъ для того, что бы оными вопросами не прервать связь, которою соединены между собою главныя предложенiя; но сiю связь сохранить можно бы было не впадая въ неудобство: стоило бы токмо сiи вопросы поставить подъ именемъ леммъ; и тѣмъ единымъ токмо они къ Елементамъ Геометрiи принадлежатъ, какъ то уже мы выше замѣтили.

5) Въ теорiи параллельныхъ линей Г. Лежандръ старается доказать пятую Евклидову постулату, и на сей конецъ предлагаетъ слѣдующую лемму, которая есть одинъ изъ случаевъ сея постулаты.

„Естьли линея BD перпендикулярна къ AB, а дру-
„гая AC съ оною. AB составляетъ острой уголъ BAC;
„то линеи AC и BD достаточно продолженныя взаимно
„встрѣчаются. Вотъ какъ Г. Лежандръ сію лемму доказы-
„ваетъ.

„Изъ какой ниесть точки F взятой на направленіи
„AC опусти на AB перпендикурялъ FG; точка G не мо-
„жетъ упасть въ A, понеже уголъ BAF не есть прямой;
„она тѣмъ паче не можетъ упасть въ какую ниесть точку
„линеи AL; ибо, естьли бы упала напримѣръ въ H, то поло-
„живъ AE перпендикулярною къ AB и встрѣчающею FH въ K,
„вышло бы что изъ одной точки K на ту же линею AL мо-
„гутъ быть опущены два перпендикуляра KH и KA;
„что не возможно; слѣдовательно надобно, что бы то-
„чка G упала въ какую ниесть точку линеи AI. Да возь-
„мется на линіи AC новая точка въ какомъ ниесть раз-
„стояніи AC, которое больше AF, и да опустится изъ
„точки C на MI перпендикуляръ CM; точка M не мо-
„жетъ упасть въ G, потому что уголъ CGI былъ бы пря-
„мой, такъ какъ и FGI, и часть была бы равна цѣлому;
точка M тѣмъ паче не можетъ упасть въ какую ниесть
„точку линеи GL, ибо какъ то видѣли при линеи FH, могли
„бы быть два перпендикуляра изъ одной точки на ту же
„линею опущенные; слѣдовательно перпендикуляръ CM дол-
„женъ упасть въ какую ниесть точку линеи GI, отстоя-
„щую отъ A въ разстояніи AM, большемъ нежели AG.
„И такъ взявъ величину AC большую нежели AF, пер-
„пендикуляръ CM бываетъ болѣе отъ A отдаленъ не-
„жели FG; откуда слѣдуетъ, что взявъ на линеи AC бо-
„лѣе и болѣе отдаленныя отъ A точки, перпендикуляры изъ
„нихъ протянутые такъ же долженствуютъ отъ A болѣе
„и болѣе отдаляться. И нелѣпо бы было положить грани-

„цу увеличиванію разстоянія AM, по мѣрѣ какъ точка C
„отъ A отдаляется. Ибо естьли напримѣръ положимъ,
„что CM есть послѣдній или наиотдаленнѣйшій отъ A
„перпендикуляръ, то тѣмъ же образомъ можно бы было
„доказать, что по взятіи на продолженіи AC точки P,
„перпендикуляръ PN долженъ упасть въ разстояніи AN,
„большемъ нежели AM; что противорѣчитъ положенію,
„поелику CM есть наиотдаленнѣйшій отъ A перпенди-
„куляръ.

„И такъ перпендикуляры изъ различныхъ точекъ ли-
„неи AC на AI опущенные могутъ падать отъ точки
„A въ разстояніяхъ столь великихъ, какъ хочешь; слѣдова-
„тельно изъ нихъ можетъ быть такой, которой упадетъ
„въ B и которой соединится съ BD, и слѣдовательно
„линеи AC, BD достаточно продолженныя долженству-
„ютъ взаимно встрѣтиться.

Но противъ сего доказательства не безъ основанія возражать можно, что хотя по мѣрѣ отдаленія точки C отъ A разстояніе AM перпендикуляра CM отъ той же точки A безъ конца прибавляться можетъ, однако изъ того не слѣдуетъ ни какой нелѣпости, что бы положить границу разстоянію AM, и Г. Лежандръ доказываетъ невозможность не границѣ сей, но послѣднему перпендикуляру, изъ взятой на линеи AC точки на AI опущенному; въ чемъ ни кто не сомнѣвался и что ни мало не служитъ къ доказательству. Что же изъ безконечнаго прибавленія линеи AM не слѣдуетъ никакой нелѣпости положить границу разстоянію AM, то сіе нужно изъяснить: поелику не извѣстно еще, что равнымъ величинамъ AF, FC, CP и проч., которыя взяты на AP, соотвѣтствуютъ такъ же равныя AG, GM, MN и проч., которыя отсѣчены на AI опущенными на нее перпендикулярами; то скажутъ, что можетъ быть AM увеличивается такъ какъ величина содержащаяся, напримѣръ въ семъ ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ и проч.; и тогда, поелику сей рядъ, сколь бы далеко продолженъ ни былъ, всегда меньше 2, чрезъ непосредственное слѣдствіе скажутъ еще, что сколь бы далеко точка C отъ A ни отдалилася, перпендикуляръ CM изъ оной на AI опущенный всегда отъ AI отсѣкаетъ величину меньшую, нежели AG въ два раза взятая, и потому и проч.

Между тѣмъ сколь ни слабо и ни безосновательно сіе Г. Лежандра доказательство, оно мнѣ доставило случай совершенно окончить сіе дѣло, на которое положили много труда какъ въ древности такъ и въ новыя времена знаменитѣйшіе мужи. Г. Кастилонъ въ Memoires de l'Academie de Berlin на 1788 и 1789 годъ сдѣлалъ изложеніе наилучшимъ слѣдствіямъ сего труда, а именно доказательству Прокла, Персидскаго Астронома Нассиръ-Еддина, Клавія и Роберта Симсона; и потому, дабы видѣть, что сіе дѣло не было еще окончено, любопытной читатель можетъ прибѣгнуть къ онымъ меморіямъ. Наше же доказательство найдетъ ниже во второмъ прибавленіи, гдѣ увидитъ сверьхъ того, что толь простая истинна должна была получить и простое доказательство.

Вторая книга Геометріи Г. Лежандра сверьхъ предположенія многихъ необходимо потребныхъ вопросовъ, отъ Геометрическаго строенія зависящихъ, подчинена еще измѣренію угловъ дугами; что нисколько не облегчаетъ тѣ предложенія, къ которымъ сіе такъ называемое второе начало приложено быть можетъ.

Третья книга, какъ основанная на Ариѳметикѣ и Ариѳметической теоріи пропорцій, совсѣмъ должна быть передѣлана; и что съ помощію предложеннаго нами во второй главѣ и Евклидомъ въ VI книгѣ его Елементовъ удобно уже учинено быть можетъ. Причемъ нужно замѣтить, что Авторъ весьма не основательно помѣстилъ тутъ 35, 36, 41 и 47 предложенія первой Евклидовой книги, ибо сіи предложенія непосредственно слѣдуютъ изъ теоріи параллельныхъ линей и естественно составляютъ 3 отдѣленіе сей первой книги, какъ то въ первомъ прибавленіи ясно показано будетъ. Такъ же несправедливо помѣщены тутъ 4, 5, 7, 12 и 13 предложенія второй Евклидовой книги, которыя слѣдуютъ и преудобно выводятся изъ того же источника.

Наконецъ Г. Лежандръ въ сей книгѣ принявъ сперва Евклидово опредѣленіе подобнымъ фигурамъ, послѣ въ первомъ своемъ примѣчаніи (на стран. 282 и 283) отвергаетъ оное; что и въ самомъ дѣлѣ сдѣлать должно; но не потому, какъ думаетъ Г. Лежандръ, что сіе опредѣленіе заключаетъ въ себѣ излишнія условія, ибо Евклидъ не употребляя еще онаго, въ 18 предложеніи VI своей книги доказываетъ возможность его; а потому что оно основано на пропорціональности величинъ, ибо мы не имѣя еще никакого понятія о пропорціональности, можемъ чувствовать и понимать нѣкоторымъ образомъ подобіе фигуръ. Между тѣмъ другое опредѣленіе сдѣланное Лежандромъ со многими новыми Геометрами подвержено тому неудобству, что раздѣлено на двѣ части. Чтобы избѣгнуть сего, я бы думалъ дать подобнымъ фигурамъ слѣдующее опредѣленіе.

Фигуры называются подобными, когда имѣютъ стороны равномногія, и оныя стороны въ одной фигурѣ дѣлаютъ углы равные угламъ въ другой, какъ взаимно меж-

ду собою, такѣ и со всѣми линеями отѣ вершинѣ однихѣ равныхѣ угловѣ до вершинѣ прочихѣ протянутыми.

Сіе опредѣленіе, какъ то всякой видѣтъ можетъ, заключаетъ въ себѣ оба случая Лежандрова опредѣленія не заключая въ прочемъ излишняго, какъ токмо то, чего возможность очевидна. Но скажутъ можетъ быть, что сіе опредѣленіе все еще не достаточно, потому что не заключаетъ въ себѣ подобія фигуръ криволинейныхъ; но натура кривыхъ линей съ натурою прямыхъ толь различна, что едва ли когда либо возможно будетъ соединить сіи два понятія во едино. Между тѣмъ, пока сего не сдѣлали еще, вотъ опредѣленіе криволинейнымъ подобнымъ фигурамъ: *Онѣ называются подобными, когда одинаковымѣ образомѣ вписанныя вѣ нихѣ или описанныя около нихѣ прямолинейныя фигуры всегда суть подобныя* (a).

Предметъ четвертой книги Геометріи Г. *Лежандра* есть тотъ же почти, что и предметъ четвертой Евклидовой; но самое выполненіе совершенно различно: Евклидъ всю сію книгу основалъ на одномъ токмо главномъ началѣ, а Лежандръ употребилъ сверьхъ того теорію пропорцій. Тотъ и другой способъ хорошъ, но къ совершенству Евклидова надобно произвести изъ одного правила наложенія доказательство слѣдующей теоремѣ: квадратъ стороны правильнаго десятиугольника, въ кругѣ вписаннаго, съ квадратомъ радіуса сего круга равенъ квадрату стороны пра-

---

(a) Сіе опредѣленіе нѣкоторымъ образомъ сходствуетъ съ опредѣленіемъ пропорціи въ случаѣ величинъ несоизмѣримыхъ; что дѣйствительно и быть должно, ибо кривыя линеи въ разсужденіи прямыхъ почти тоже самое, что и несоизмѣримыя величины въ разсужденіи соизмѣримыхъ.

вильнаго пятиугольника въ томъ же кругѣ вписаннаго; что и учинено удобно быть можетъ.

Я говорю, предметъ сея книги Геометрїи Г. Лежандра есть почти тотъ же, что и IV Евклидовой, потому, что Лежандръ сверьхъ правильныхъ многоугольниковъ тутъ предлагаетъ еще о измѣренїи круга. Мы выше говорили о способѣ, при ономъ измѣренїи имъ употребленномъ; и потому о семъ здѣсь умалчиваемъ; между тѣмъ должно замѣтить, что перьвая онаго способа лемма, заключающая доказательство второй Архимедовой аксїомы, требуетъ лучшаго изъясненїя; что купно съ изъясненїемъ подобной леммы, къ поверхностямъ относящейся, составитъ третїе прибавленїе.

Приближенныя средства въ сей книгѣ Лежандромъ предложенныя, чтобы находить квадратуру круга, довольно хороши, но въ Елементы Геометрїи войти не должны, поелику основаны на числительной наукѣ.

На конецъ прибавленїе заключающее въ себѣ доказательство, что кругъ есть больше нежели всякой многоугольникъ тотъ же периметеръ имѣющїй, достойно всякой похвалы.

Пятая книга Геометрїи Г. Лежандра есть для меня тщетное напряженїе сего писателя переиначить то, что учинилъ Евклидъ въ XI книгѣ своихъ Елементовъ съ толикою простотою, точностїю и ясностїю. И чтобы въ семъ удостовѣриться, довлѣетъ токмо сравнить Евклидово доказательство 4 му предложенїю съ доказательствомъ Лежандровымъ: Евклидъ доказалъ оное предложенїе чрезъ посредство одного токмо равенства треугольниковъ, а Лежандръ предположилъ двѣ леммы и доказалъ его помощію Пиѳагоровой теоремы. Статья о толстыхъ углахъ тутъ почерпнута Лежандромъ изъ Евклида съ нѣкоторыми своими не весьма хорошо доказанными прибавленіями, какъ то о равенствѣ толстыхъ угловъ содержимыхъ тремя плоскими и проч. И здѣсь то положилъ онъ начало симметрическому равенству упоминаемому нами въ V предложеніи первой главы на стран. 82.

Шестая книга Геометріи Г. Лежандра есть продолженіе XI Евклидовой соединенное съ нѣкоторыми предложеніями XII; и кромѣ Симметріи, измѣренія, предлиннаго доказательства о равенствѣ пирамидъ и предложеній къ подобію тѣлъ относящихся, ничего ему не принадлежитъ. И поелику о неудобствахъ Симметріи и измѣренія мы уже говорили, а относительно равенства пирамидъ предложили краткое и ясное доказательство; то остается токмо намъ сказать нѣчто о подобіи тѣлъ.

Евклидъ называетъ подобными многогранниками тѣ, которые суть содержимы въ равномногихъ подобныхъ плоскостяхъ (опред. 11, книга XI). Но Робертъ Симсонъ нашедъ, что содержимые равномногими, равными и подобными плоскостями многогранники могутъ быть и неравны между собою (а), заключилъ, что сіе Евклидово опредѣленіе не-

(а) Въ самомъ дѣлѣ, вообрази, что къ какому ни есть многограннику на основаніи его приставлена какая нибудь пирамида, а въ другой многогранникъ, совершенно первому равный, на равномъ основаніи вставлена другая пирамида, такъ же совершенно первой равная; то тѣло, которое есть сумма многогранника и пирамиды, достаточно (b), и потому сверхъ подобія плоскостей присовокупилъ еще равенство толстыхъ угловъ. Лежандръ же видя, что Робертъ Симсонъ наипаче приведенъ былъ къ сему заключенію тѣмъ, что у одного изъ взятыхъ имъ многогранниковъ всѣ углы изходящіе, а у другаго одинъ входящій, говоритъ въ послѣднемъ своемъ примѣчаніи, на стран. 323: „болѣе нежели вѣроятно, что Евклидъ дѣлалъ „изключеніе тѣламъ неправильнымъ имѣющимъ вогнутости „или углы входящіе, и что онъ ограничилъ себя многогранниками выпуклыми. И по принятіи сего изключенія, безъ „котораго въ прочемъ другія предложенія были бы не-„справедливы, приводимый Робертомъ Симсономъ примѣръ „противъ 10 опредѣленія или теоремы Евклидовой ни-„чего уже не доказываетъ„.

Но на сіе Лежандру сказать должно, что изъ другихъ предложеній, которыя безъ сего изключенія не могутъ быть справедливы, въ Евклидѣ не находится, какъ одно токмо 21 е одиннатцатой книги и которое не нужно, какъ токмо для 23, гдѣ толстой уголъ состоитъ изъ трехъ плоскихъ, и еще для правильныхъ многогранниковъ, гдѣ оное изключеніе само собою уже дѣлается.

Сверхъ того я не думаю, чтобы кто захотѣлъ ограничить себя подобіемъ однихъ токмо выпуклыхъ тѣлъ; и самъ Г. Лежандръ сдѣлавъ обширнѣйшее опредѣленіе, кажется не

съ другимъ, которое есть разность равнаго многогранника и равной пирамиды, будетъ содержимо равномногими равными и подобными плоскостями, но совсѣмъ тѣмъ одно съ другимъ не равно будетъ.

(b) Смотри примѣчаніе его на 9 и 11 опредѣленія XI книги, стран. 341.

приемлетъ сего ограничиванія. Но не входя въ дальнѣйшія возраженія, довольно прочесть слѣдующія, послѣ Лежандромъ начертанныя, слова, которыми онъ самъ отвергаетъ Евклидово опредѣленіе.

„Робертъ Симсонъ уничтожаетъ опредѣленіе тѣламъ „равнымъ; что и въ самомъ дѣлѣ не можетъ быть помѣщено, „какъ токмо между теоремами; и называетъ *подобными* „тѣ, которыя суть содержимы равномногими подобными „плоскостями и имѣютъ толстые углы равные, каждой „каждому. Сіе опредѣленіе справедливо, но подвержено „неудобству, что содержитъ излишнія условія. Отнявъ „же условіе заключающее равенство толстыхъ угловъ, сіе „опредѣленіе обратится въ Евклидово, котораго погрѣш„ность состоитъ въ томъ, что оно предполагаетъ тео„рему о равенствѣ многогранниковъ (a). Чтобы избѣгнуть

(a) Изъ чего видно, что предначертанными выше словами *Лежандръ* устремляется на Роберта Симсона не столько въ разсужденіи опредѣленія подобнымъ тѣламъ, какъ паче въ разсужденіи сихъ словъ „онаго: Равенство фигуръ не должно быть опредѣлено, а „доказано; слѣдовательно, хотя бы было и истинно, что тѣла „содержимыя одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ плоско„стей суть равны между собою, однако справедливаго тотъ порицанія „заслуживаетъ, которой обратилъ во опредѣленіе предложеніе, „кое доказать надлежитъ. *Но естьли сіе предложеніе не есть „истинно, то Геометры столькихъ столѣтій не должны ли „признаться, что они погрѣшили толь въ первоначальномъ „знаніи?* И сіе должно заставить насъ быть кроткими, и показать „сколь мало, по слабости ума нашего, мы способны избѣгать по„грѣшностей даже въ тѣхъ наукахъ, которыя по справедливости по„читаются точнѣйшими; ибо, что *сіе предложеніе не есть вообще „справедливо, то можно показать чрезъ многіе примѣры.*

Г. Лежандръ сдѣлавъ упомянутое изключеніе, въ концѣ XII своего примѣчанія старается доказать нѣкоторыми примѣрами, что сіе предложеніе вообще справедливо; но сколь онъ далекъ еще

„всѣхъ затрудненій, мы нашли заблаго опредѣленіе подоб-„нымъ тѣламъ раздѣлить на двѣ части. Вотъ сіи части:

„Двѣ трехстороннія пирамиды суть подобныя, когда „имѣютъ двѣ стороны подобныя, подобно разположенныя „ и равно между собою наклоненныя.

„Два многогранника суть подобные, когда имѣютъ „основанія подобныя, и сходственныхъ угловъ вершины, „которыя суть внѣ сихъ основаній, опредѣлены вершина-„ми подобныхъ трехстороннихъ пирамидъ.

Но сіе опредѣленіе, сверьхъ неудобства, что раздѣлено на двѣ части, имѣетъ еще то, что весьма принуждено и что вторая часть его сомнительна; причемъ въ самомъ употребленіи требуетъ многихъ теоремъ, какъ то видѣть можно изъ предложенныхъ на сей конецъ Г. Лежандромъ. И такъ я бы думалъ или принять Симсоново опредѣленіе, доказавъ его возможность, или дать другое опредѣленіе сходное съ сдѣланнымъ нами выше для плоскихъ подобныхъ фигуръ, а именно:

Многогранники называются подобными, когда имѣютъ грани и ребра равномногія, и оныя ребра въ одномъ многогранникѣ дѣлаютъ углы равны угламъ въ другомъ, какъ взаимно между собою, такъ и со всѣми линеями отъ вершинъ однихъ какихъ нибудь сходственныхъ угловъ до вершинъ прочихъ протянутыми.

Отсюда уже непосредственно и само собою слѣдуетъ, что подобные многогранники состоятъ изъ подобныхъ трехстороннихъ пирамидъ. (a)

отъ успѣху, о томъ я судить предоставляю читателю, будучи удостовѣренъ, что отъ того на существенную пользу важнаго вліянія произойти не можетъ.

(a) Въ самомъ дѣлѣ, пусть ABCD, abcd двѣ грани двухъ подобныхъ многогранниковъ и M, m вершины двухъ сходственныхъ ихъ угловъ; протяни прямыя AM, BM, CM, DM и am, bm, cm, dm и представь себѣ плоскости MAB, MBC, MCD, MDA, MAC и mab, mbc Черт. 61.

Подобные же цилиндры и конусы можно опредѣлить такъ:

Цилиндры или конусы называются подобными, когда одинаковымъ образомъ вписанныя въ нихъ или описанныя около нихъ призьмы или пирамиды всегда суть подобныя.

Обыкновенное или Евклидово опредѣленіе послѣ сего есть уже теорема, которую доказать надлежитъ и которую удобно доказать можно.

Сіе опредѣленіе простирается и ко всѣмъ криволинейнымъ тѣламъ, только вмѣсто призьмъ или пирамидъ надлежитъ тутъ употребить вообще многогранники.

И такимъ образомъ съ помощію 17 предложенія XII книги Евклидовыхъ Елементовъ отсюда заключить можемъ, что шары суть тѣла подобныя; каковаго заключенія доселѣ сдѣлать было не можно.

Седьмая книга Геометріи Г. Лежандра достойна всякой похвалы; но она, какъ заключающая въ себѣ особую теорію о сферическихъ треугольникахъ, къ Елементамъ Геометріи не принадлежитъ, потому что изъ свойствъ сихъ треугольниковъ ни какихъ свойствъ принадлежащихъ собственно шару или поверьхности его не слѣдуетъ и произвести не можно. И буде дозволить помѣщеніе сея теоріи въ Елементы Геометріи, то по всякому праву должно по-

---

mcd, mda, mac; отъ чего произойдутъ въ каждомъ тѣлѣ по двѣ трехстороннія пирамиды ABCM, ACDM, и abcm, acdm; я говорю, что онѣ суть подобныя, ибо: для подобія многогранниковъ, по предложенному выше нами опредѣленію, будетъ уголъ BAM $=$ bam, ABM $=$ abm, и сего ради AB : BM $=$ ab : bm; такъ же докажется, что CB : BM $=$ cb : bm; откуда, по причинѣ что уголъ ABC $=$ abc, слѣдуетъ, что треуг. ABC треуг. abc подобенъ, а изъ сего слѣдуетъ, что и треуг. ACM треуг. acm подобенъ; и такимъ образомъ пирамида ABCM пирамидѣ abcm подобна; потомъ, поелику уголъ BCD $=$ bcd, ACB $=$ acb и слѣдственно ACD $=$ acd, точно такъ же докажется, что и пирамида ACDM пирамидѣ acdm подобна; и такъ далѣе.

мѣстить въ оные и коническія сѣченія, а потомъ и всю теорію кривыхъ линей; и тогда выдутъ не Елементы, но собраніе различныхъ теорій.

Прибавленіе къ сей книгѣ, содержащее въ себѣ статью о правильныхъ многогранникахъ, довольно изрядно; но кто читалъ Евклида, тотъ не захочетъ слѣдовать въ семъ дѣлѣ Г. Лежандру. Между тѣмъ, поелику правильные многогранники въ разсужденіи шара суть тоже самое, что правильные многоугольники въ разсужденіи круга, и къ предложенному о семъ Евклидомъ, для соблюденія единообразности, надлежитъ учинить прибавленіе о вписываніи въ шаръ и описываніи около онаго правильныхъ многогранниковъ; что мы и сдѣлаемъ, потому паче что о сей матеріи на Россійскомъ языкѣ ничего порядочнаго нѣтъ. Сіе составитъ четвертое прибавленіе.

Наконецъ осьмая книга о трехъ круглыхъ тѣлахъ предложена по способу, о неудобствахъ котораго мы уже говорили. Между тѣмъ весьма хорошо сдѣлано, что въ ней предложено вмѣстѣ о всѣхъ сихъ тѣлахъ, ибо цилиндръ, конусъ и шаръ между тѣлами то же самое, что кругъ между площадями. И къ ней же принадлежитъ статья о правильныхъ многогранникахъ и нѣкоторыя предложенія, въ седьмой книгѣ Лежандромъ помѣщенныя, относительно разсѣченія шара, плоскостей касательныхъ и проч., точно такъ какъ къ одной же книгѣ принадлежитъ, свойства линей въ кругѣ проведенныхъ и къ нему касающихся, вписываніе правильныхъ многоугольниковъ, сравненіе круга съ треугольникомъ и наконецъ взаимное круговъ соотношеніе; что Лежандръ разсѣялъ по разнымъ книгамъ, перемѣшавъ сіи предметы съ свойствами прямыхъ линей и фигуръ прямолинейныхъ.

Изъ всего сего здравомыслящій читатель, или лучше читатель философъ, долженъ видѣть ясно, сколь справедливо я не доволенъ Елементами Геометріи Г. Лежандра, хотя въ прочемъ они превосходятъ все то, что токмо о семъ предметѣ выдано было новыми Геометрами.

ПРИБАВЛЕНІЕ I,

Содержащее въ себѣ введеніе въ Елементы Геометріи и краткое начертаніе сообразованной съ предметами системы оныхъ.

Протяженность тѣлъ естественныхъ подала случай къ Геометріи. Вотъ какимъ образомъ оная изъ сея протяженности произтекаетъ.

Поелику всякое тѣло, чувствамъ нашимъ подлежащее, имѣетъ шесть извѣстныхъ сторонъ, верьхнюю и нижнюю, переднюю и заднюю, правую и лѣвую, изъ коихъ каждыя двѣ суть сопротивныя, то явствуетъ, что протяженность тѣлъ естественныхъ имѣетъ три распространенія отъ верьхней стороны къ нижней, отъ передней къ задней и наконецъ отъ правой къ лѣвой. Сіи распространенія суть то, что тремя *Размѣреніями* тѣла называется, изъ коихъ одно, отъ правой стороны къ лѣвой, *длиною*, другое, отъ передней къ задней, *шириною*, и третіе, отъ верьхней къ нижней, *толщиною* или *высотою* его именуется. По чему протяженность тѣлъ естественныхъ имѣетъ три размѣренія, длину, ширину и высоту; и какъ она съ тѣлами не разлучно пребываетъ, то обыкновенно говорится, что все то, что имѣетъ три размѣренія, есть тѣло; но сіе тѣло для отличія отъ естественнаго, Геометрическимъ называется; ибо тѣла естественныя сверьхъ протяженности, непроницаемы, тяжелы, тверды и проч.; но такъ называемыя Геометрическія суть токмо протяженны: Онѣ не иное что, какъ мѣста естественными тѣлами занимаемыя, не иное что, какъ нѣкоторыя части въ предѣлахъ содержимыя неизмѣримаго пространства, весь міръ въ себѣ заключающаго.

Черт. 62. Пусть ABCDHEFG будетъ какое ни есть Геометрическое тѣло; то для предложеннаго объ немъ понятія, оно имѣетъ края или границы, ибо въ противномъ случаѣ было бы пространство весь міръ въ себѣ заключающее. Разсмотримъ въ чемъ состоитъ натура сихъ краевъ; для сего возьмемъ на примѣръ край верьхній EFGH; то, поелику тѣло простирается отъ правой стороны къ лѣвой, оной край, какъ содержащійся между сими сторонами, такъ же простиратъся долженствуетъ, и слѣдственно имѣетъ длину; потомъ, поелику тѣло простирается отъ передней стороны къ задней, упомянутой край такъ же простиратъся долженъ, и слѣдственно имѣетъ *ширину*; и сіе все, что токмо онъ имѣть можетъ, ибо съ высотою или толщиною, сколь бы въ прочемъ оная мала ни была, онъ не будетъ уже край тѣла, но самое тѣло. И такъ край тѣла есть протяженность два токмо размѣренія имѣющая. Оная есть то, что *поверьхностію* называется.

Черт. 63. Пусть EFGH будетъ какая ни есть поверьхность, то для предложеннаго объ ней понятія, она имѣетъ края или границы, ибо въ противномъ случаѣ тѣло, коего она есть край, оныхъ не имѣло бы. Разсмотримъ въ чемъ состоитъ натура сихъ краевъ; для сего возмемъ на примѣръ передній край EF; то, поелику поверьхность простирается отъ правой стороны къ лѣвой, оной край, какъ содержащійся между сими сторонами, такъ же простиратъся долженствуетъ, и слѣдственно имѣетъ длину; и сіе все, что токмо онъ имѣть можетъ; ибо, когда сама поверьхность толщины не имѣетъ, то и край ея того имѣть не можетъ; и когда длина съ шириною есть поверьхность, то край поверьхности съ шириною, сколь бы въ прочемъ оная мала ни была, не будетъ уже край, но самая поверьхность. И такъ край поверьхности есть протяженность имѣющая одно токмо размѣренїе. Оная есть то, что *линеею* называется.

Пусть EF будетъ линея, то край ея не будетъ имѣть ни какого размѣренїя, и слѣдственно ни какой величины. Между тѣмъ, поколику есть край дѣйствительной величины, въ Геометрїи называется *точкою*. И такъ Геометрическая точка есть край или конецъ линеи, такъ какъ и всякой оной части, которая какъ бы мала ни была, есть линея же. Черт. 64.

Отсюда видно, что не можетъ быть, какъ токмо три рода протяженности: линеи, поверьхности и тѣла.

Наука, которая предметомъ имѣетъ свойства всѣхъ сихъ протяженностей, есть Геометрїя. Но сїе опредѣленїе не подаетъ еще яснаго понятїя о Геометрїи, и пока не познаемъ главныхъ родовъ каждой изъ сихъ трехъ протяженностей, по тѣхъ поръ предмета ея ясно представить себѣ не можемъ. И такъ учинимъ изчисленїе симъ родамъ. И поелику очевидно явствуетъ, что линеи простяе поверьхностей, а поверьхности простяе тѣлъ, то начнемъ изчисленїемъ главныхъ родовъ линей, потомъ обратимся къ изчисленїю главныхъ родовъ поверьхностей.

Линеи во первыхъ раздѣляются на прямыя и кривыя.

Прямая линея, говоритъ Евклидъ, есть та, которая *одинаково* лежитъ между своими краями или концами. (a).

Но что сіе значитъ? Безъ сомнѣнія не иное что, какъ что другая прямая лежа на тѣхъ же концахъ, лежитъ вся на первой, ибо въ противномъ случаѣ прямая лежала бы не одинаково между своими концами. (b).

И такъ явствуетъ, что въ семъ Евклидовомъ опредѣленіи предполагается скрытно *наложеніе* (le principe de la ſuperpoſition), которое есть начало и источникъ всѣхъ нашихъ въ Геометріи познаній.

(a) A ſtraight line is that which lies *evenly* between its extreme points. Переводъ Роберта Симсона.

(b) Though Euclid in the arrangement of his preciples has placed the common notions after the definitions, yet they are prior to them in the order of coception; and indeed if this is not attended to, ſome of his definitions will be unintelligible; for inſtance his definition of a ſtraight iine. He ſays a ſtratght line is that which lies eventy to the points in itſelf. Now if j am to conceive nothing previous to this, reſpecting a ſtraight line; what can J underſtand by this definition; or what can J infer from it? The reader will be juſt as much at a loſs to conceive the meaning of the word *aven'y*, as of the ſtraight line itſelf. But if we conſider this definition as an improvement upon the common notion of a ſtrsight line, (ſee com not. 12.) every thing is very intelligible: for after a proper axamination of this principle, that two ſtraight cannot incloſe a ſpace; every body will infer, though not ſcientifically nevertheleſs very confidentally, that every ſtraight line muſt lie evenly to all the points in itſelf; otherwiſe he certainly might have hopes at leaſt of making two of them incloſe a ſpace. J would be rightly underſtood upon this point; nobody can imagine that it is my opinion, that Euclid intended that the one of theſe ſhould be inferred from the other ſcientifically; but only that the definition expreſſes the conception, derived from two lines, reduced into a more ſimple form; though indeed he himſelt reaſons from the common notion as will appear in the fourth propoſition. Толкованіе Жамеса Вильямсона, стран. 10 сочиненія его, the Elements of Euclid with diſſertations.

Чтобы освободить сїе Евклидово опредѣленїе отъ всякїя скрытности, то надлежитъ его перемѣнить на слѣдующее: Когда двѣ точки одной линеи лежа на двухъ точкахъ другой, дѣлаютъ, что и самыя линеи лежатъ одна на другой; то каждая изъ оныхъ называется прямая. (а).

Изъ сего опредѣленїя прямой линеи можно произвести многїя слѣдствїя, а именно:

1) Двѣ прямыя линеи не пресѣкаются какъ токмо на одной точкѣ. Ибо, что на точкѣ, то по тому, что край или конецъ линеи, такъ какъ и всякой оной части, есть точка; а что на одной токмо, то по тому, что положивъ болѣе нежели на одной, выдетъ, что двѣ точки одной прямой лежа на двухъ точкахъ другой, не дѣлаютъ, чтобы и самыя линеи лежали одна на другой; что противно опредѣленїю линеи прямой.

(а) Здѣсь безъ сомнѣнїя не преминутъ насъ встрѣтить тѣмъ, что двѣ точки одной дуги круга положенныя на двѣ точки другой дуги круга того же радїуса, дѣлаютъ, что и самыя дуги лежатъ одна на другой, хотя ни которая изъ нихъ не есть прямая линея. Но на сїе возраженїе отвѣтствовать весьма не трудно, ибо самое условїе „ *дуги того же радїуса* „ показываетъ, что тутъ не двѣ ихъ точки дѣлаютъ, что дуги лежатъ одна на другой, но присоединяется къ нимъ еще третья внѣ дугъ находящаяся, то есть ихъ центръ. И когда дуги будутъ разныхъ радїусовъ, тогда двѣ ихъ точки не могутъ уже сдѣлать того, что бы одна изъ дугъ на другой лежала. Тоже отвѣчать должно въ случаѣ закрытїя и другихъ правильныхъ кривыхъ линей; въ случаѣ же закрытїя неправильныхъ кривыхъ линей, коихъ точки ни какому общему опредѣленїю не подчинены, должно сказать, что каждая ихъ точка къ тому способствуетъ, посляку имѣетъ особое и независящее отъ другихъ опредѣленїе.

2) Двѣ прямыя линеи не могутъ заключить собою какого ни есть опредѣленнаго пространства. Ибо, буде сіе возможно, то двѣ точки одной прямой линеи лежа на двухъ точкахъ другой, не дѣлаютъ, чтобы и самыя линеи лежали одна на другой; что противно опредѣленію прямой линеи.

3) На конецъ двѣ прямыя линеи не могутъ имѣть общей части. Ибо, въ противномъ случаѣ выйдетъ противное опредѣленію прямой линеи.

Примѣчаніе.

Поелику всякая линея есть протяженность, въ мысляхъ нашихъ токмо представляемая, то прямую линею начертить или протянуть отъ точки къ другой въ самомъ дѣлѣ нѣтъ возможности. Между тѣмъ, поелику можно представлять ее въ мысляхъ нашихъ, дозволяется употреблять сіи выраженія. И такъ дозволяется отъ всякой точки до всякой другой протягивать прямую линею, и слѣдственно имѣть ихъ столь много, какъ хочешъ, всякой величины.

Откуда слѣдуетъ, что прямую линею можно продолжать въ прямъ въ ту и другую сторону безпредѣльно, такъ что она превзойдетъ всякую другую данную прямую. Въ самомъ дѣлѣ, пусть надобно продолжить AB въ
Черт. 65. сторону AB такъ, что бы она превзошла данную прямую CD; для сего положи CD на AB такъ, что бы точка C лежала на AB, между A и B въ какой ни есть точкѣ E, и CD падала на какую ни есть точку B прямой EB; тогда произойдетъ одна прямая AF, которая превосходитъ CD; ибо, для прямыхъ AB и CD, или EF, всякая прямая GH могущая лежать на точкахъ E и B, съ AF

соединяется совершенно; что ясно доказываетъ, что AF есть одна прямая; потомъ поелику AF состоитъ изъ AE и EF или CD, оная AF есть превозходящая CD. Слѣд. и проч. Отсюда же слѣдуетъ, что прямая линея заключающаяся въ какомъ ни есть опредѣленномъ пространствѣ, по довольномъ продолженіи должна наконецъ изъ онаго выдти. Въ самомъ дѣлѣ, пусть прямая AB заключается въ какомъ ни есть опредѣленномъ пространствѣ, содержимомъ обводомъ CDE, которой можетъ быть поверьхность, естьли хочешь; я примѣчаю, что здѣсь имѣются два случая: или прямыя изъ точекъ обвода до A протянутыя суть всѣ равны между собою, или неравны между собою. 1) Когда равны между собою, то прямая AB продолженная до F такъ, чтобы была больше нежели какая ни есть одна изъ тѣхъ равныхъ прямыхъ AC, по необходимости выдетъ изъ пространства CDE; ибо помысли, что прямая AC обращаясь на точкѣ A упала на прямую AB, то поелику прямая изъ каждой точки обвода до A протянутая равна AC, точка C въ тоже время должна упасть на обводъ въ G; и какъ AF больше AC и слѣдственно такъ же AG, то слѣдуетъ и проч. 2) Когда же прямыя изъ точекъ обвода до A протянутыя не равны между собою, то имѣется одна или многія равныя, кои всѣхъ другихъ болѣе; пусть AC одна изъ сихъ наибольшихъ прямыхъ, то AB продолженная до F такъ, чтобы была больше нежели AC, такъ же выдетъ изъ пространства CDE; ибо помысли, что AC обращаясь на точкѣ A упала на AB, то, поелику AC нѣкоторымъ другимъ равна и каждой изъ прочихъ болѣе, точка C въ тоже время должна упасть или на обводъ въ G или внѣ онаго въ H; а какъ AF больше AC и слѣдственно такъ же AG или AH, то слѣдуетъ и проч. Черт. 66.

Зная существо линеи прямой, не трудно будетъ опредѣлить существо линеи кривой.

Когда на какія бы то ни было двѣ точки данной линеи положенная прямая не лежитъ на оной, какъ токмо нѣкоторыми своими точками, и слѣдственно никакою своею частію: то сія данная линея есть то, что собственно *кривою* называется.

Чрезъ сіе опредѣленіе изключается изъ кривыхъ линей совокупленіе прямыхъ съ прямыми и кривыхъ съ прямыми. Первое изъ сихъ совокупленій, разсматриваемое какъ одна линея, называется *ломаною линеею*, а другое въ таковомъ разсматриваніи именуется *смѣшенною линеею.*

Какъ линеи раздѣляются на два главные рода, такъ точно и поверьхности, а именно: на *прямыя* или *плоскости* и *кривыя поверьхности.*

Прямая поверьхность или плоскость есть такая поверьхность, что лежащая на какихъ бы то ни было двухъ ея точкахъ прямая линея, лежитъ вся на ней.

Отсюда произвести можно многія слѣдствія, а именно:

1) Прямая линея не можетъ пресѣчь плоскость, какъ въ одной токмо точкѣ. Ибо, что въ точкѣ, то потому, что край или конецъ линеи, такъ какъ и всякой оной части, есть точка; а что въ одной токмо, то потому, что положивъ болѣе, нежели въ одной, выдетъ противное опредѣленію плоскости.

2) Ежели часть прямой линеи лежитъ на плоскости, то и вся оная линея лежитъ на той же плоскости. Ибо, положивъ противное, выдетъ, что прямая лежа на двухъ точкахъ плоскости, не лежитъ вся на оной.

3) Двѣ прямыя линеи AB и CD взаимно въ E пресѣкающіяся, находятся на одной и той же плоскости. Ибо, пусть чрезъ одну изъ нихъ AB пройдетъ какая нибудь плоскость, и да обернется, пока не упадетъ на точку D другой прямой CD; тогда точки E и D будутъ находиться на сей плоскости; и потому такъ же часть DE прямой CD и вся оная CD будетъ находиться на той же самой плоскости. Черт. 67.

4) Продолженіе FD прямой CE, пресѣкающей прямую AB въ E съ одной стороны сея AB, должно находиться съ другой стороны оной AB. Ибо, буде сіе отвергаешь, положи, что съ той же стороны, какъ лежитъ EF; на CE и AE возьми какія ни есть точки G и H и соедини ихъ прямою GH; оная прямая не можетъ лежать на GEH, ибо въ противномъ случаѣ двѣ прямыя будутъ имѣть общую часть HE; таже прямая не можетъ лежать, какъ лежитъ HKG, ибо въ противномъ случаѣ EB находясь въ опредѣленномъ пространствѣ GEHKG, по довольномъ продолженіи выдетъ напослѣдокъ изъ онаго и пресѣчетъ прямую GKH въ нѣкоторой точкѣ K, а такимъ образомъ двѣ точки H и K прямой HKG лежа на двухъ точкахъ H и K прямой AB не дѣлаютъ, чтобы и самыя прямыя лежали одна на другой, что не возможно; слѣдовательно прямая GH лежитъ съ другой стороны ломаной HEG, а именно, какъ лежитъ HLG. Теперь EF находясь въ опредѣленномъ пространствѣ GEH, по довольномъ продолженіи выдетъ на послѣдокъ изъ онаго и пресѣчетъ HG въ нѣкоторой точкѣ L,

ибо EF будучи продолженіе прямой CE, находится на той же плоскости, на которой суть AE, CE и HG; а такимъ образомъ двѣ точки G и L прямой CEF лежа на двухъ точкахъ G и L прямой HG, не дѣлаютъ, чтобы и самыя прямыя лежали одна на другой, что не возможно; слѣд. и проч.

5) Плоскость лежащая на трехъ точкахъ, другой
Черт. 68. плоскости, не въ прямой линеи находящихся, вся лежитъ на сей другой плоскости. Ибо, пусть плоскость PQ лежитъ на трехъ точкахъ A, B и C другой RS; я говорю, что на плоскости PQ не имѣется ни какой точки, которая бы въ то же самое время не лежала и на плоскости RS. Протяни чрезъ A изъ B и C прямыя EF, GH; оныя будутъ въ A пресѣкающіяся и на той и другой плоскости находящіяся; возми на плоскости PQ гдѣ ниесть точку; оная не можетъ быть, какъ или на общемъ линей EF и GH пресѣченіи A или на одной изъ нихъ, *или между* двумя какими ниесть ихъ отрѣзками; въ перьвыхъ двухъ случаяхъ очевидно, что точка будетъ находиться на той и другой плоскости; почему остается доказать сіе токмо въ послѣднемъ случаѣ; и такъ пусть точка M взята между отрѣзками AF и AH; возьми на нихъ еще двѣ точки K и L, соедини оныя линеею KL, и изъ M чрезъ A протяни прямую AMN; сія находясь въ опредѣленномъ пространствѣ KAL, по довольномъ продолженіи, выдетъ напослѣдокъ изъ онаго и пресѣчетъ прямую KL въ нѣкоторой точкѣ N; и какъ точки K и L и потому такъ же прямая KL находятся на той и другой плоскости, то и точка N, а потому вся прямая AN и находящаяся на ней точка M будутъ находиться на той и другой плоскости. Ч. И Д. Н.

И такъ плоскости можно дать слѣдующее опредѣленіе сходное съ опредѣленіемъ линеи прямой: Когда три точки одной поверьхности, не въ прямой линеи находящіяся, лежа на трехъ точкахъ другой, дѣлаютъ, что и самыя поверьхности лежатъ одна на другой; то каждая изъ оныхъ есть то, что плоскостію называется.

6) Двѣ плоскости не пресѣкаются, какъ на одной токмо прямой линеи. Ибо, что на линеи, то потому что край поверьхности, какъ и всякой оной части, есть линея; а что на одной токмо, то потому, что положивъ болѣе нежели на одной, выдетъ противное предъ симъ доказанному; наконецъ что на прямой, то потому что прямая соединяющая какія ни есть двѣ точки сѣченія должна находиться на той и другой плоскости, что не можетъ иначе быть, какъ токмо когда оная прямая падаетъ на самое сѣченіе.

7) Двѣ плоскости не могутъ заключить собою какого ни есть опредѣленнаго пространства и имѣть общей части. Ибо, буде сіе возможно, то выдетъ, что три точки, не въ прямой линеи находящіяся, одной плоскости лежа на трехъ точкахъ другой, не дѣлаютъ, чтобы и самыя плоскости лежали одна на другой; что противно предъ симъ доказанному.

8) Такъ же докажется, что и три плоскости не могутъ заключить собою какого ниесть опредѣленнаго пространства.

Зная существо плоскости, или прямой поверьхности, не трудно будетъ опредѣлить и существо кривой поверьхности.

Кривая поверьхность есть такая поверьхность, что лежащая на какихъ бы то нибыло трехъ ея точкахъ плоскость, не лежитъ на ней, какъ нѣкоторыми токмо точками и линеями, и слѣдственно никакою своею частїю.

Чрезъ сїе опредѣленїе ломаныя и смѣшанныя поверьхности изъ кривыхъ изключаются.

Кривыя линеи и поверьхности, равно ломаныя и смѣшенныя линеи и поверьхности, раздѣляются обыкновенно на *вогнутыя* или *выпуклыя съ одной и той же стороны, и на вогнутыя* или *выпуклыя съ той и другой.*

Кривая линея на плоскости лежащая называется *вогнутою* или *выпуклою* съ одной и той же стороны, когда прямыя лежащїя между какими бы то ни взятыми *двумя* ея точками, всегда падають по одну и ту же сторону и ни какая по другую не падаетъ. Кривая вогнутая съ той стороны, по которую падають сїи прямыя, а выпуклая со стороны противной.

Такъ же ломаная и смѣшенная линеи, на *плоскости* лежащїя, называются *вогнутыми* или *выпуклыми*, съ одной и той же стороны, когда нѣкоторыя токмо прямыя лежащїя между двумя ихъ точками падають по одну и ту же сторону, а другїя по самымъ симъ линеямъ, но никакая по другую сторону не падаетъ. Онѣ вогнутыя съ той стороны, по которую падають нѣкоторыя прямыя, а выпуклыя со стороны противной. (а)

(а) Г. Лежандръ послѣдуя Барро называетъ вогнутою или выпуклою линеею ту, которую прямая не можетъ разсѣчь какъ токмо въ двухъ точкахъ. Но въ семъ опредѣленїи не извѣстнымъ остается, съ которой стороны оная линея есть выпуклая и съ которой вогнутая; что однакожъ различать всегда нужно бываетъ; и для того мы предпочли опредѣленїе Архимедово, раздѣливъ его на двѣ части.

Кривая поверьхность называется *вогнутою* или *выпуклою* съ одной и той же стороны, когда плоскости лежащія между какими бы то ни взятыми тремя ея точками, падаютъ всегда по одну и ту же сторону. Она вогнутая съ той стороны, по которую падаютъ плоскости, а выпуклая со стороны противной.

Такъ же поверьхности ломаная и смѣшенная называются *вогнутыми* или *выпуклыми*, когда нѣкоторыя токмо плоскости лежащія между тремя ихъ ~~точками~~ падаютъ по одну и ту же сторону ихъ, а другія по самымъ симъ поверьхностямъ, но никакая по другую не падаетъ. Онѣ вогнутыя съ той стороны, по которую падаютъ нѣкоторыя плоскости, а выпуклыя со стороны противной.

Отсюда явствуетъ, что значатъ линеи и поверьхности вогнутыя или выпуклыя съ той и другой стороны.

Изъ всѣхъ кривыхъ линей и поверьхностей въ первоначальной Геометріи не приемлются, какъ токмо слѣдующія: изъ линей такъ называемая *круговая*, а изъ поверьхностей тѣ, которыя чрезъ посредство оной произведены быть могутъ, какъ то: поверьхность *цилиндрическая, коническая и сферическая*.

Линея круговая есть та, которая лежа на плоскости дѣлаетъ равными всѣ прямыя выходящія до нея изъ одной точки пространства, ею содержимаго. Сіе пространство есть то, что *кругомъ* называется; точка же, изъ которой выходятъ равныя прямыя, центромъ именуется, а сіи равныя прямыя радіусами называются.

Линея круговая обыкновенно называется окружностію круга; чему и мы послѣдуемъ.

Изъяснимъ теперь существо упомянутыхъ трехъ поверьхностей, которыя чрезъ посредство круга производятся.

Когда поверьхность объемлющая окружность круга огибаетъ собою какую ни есть прямую чрезъ центръ круга проходящую и внѣ его плоскости пребывающую такимъ образомъ, что всякая прямая, къ окружности круга прилежащая и въ одной плоскости съ упомянутою прямою находящаяся, но ни по которую сторону съ нею не встрѣчающаяся, вся лежитъ на сей поверьхности; то оная поверьхность есть то, что цилиндрическою поверьхностію называется.

Сія поверьхность обыкновенно ограничивается плоскостію, ни по которую сторону невстрѣчающеюся съ тою, на которой кругъ находится. Пространство же содержащееся между сими плоскостями и цилиндрическою поверьхностію есть то, что *цилиндромъ* называется.

Когда же поверьхность обьемля окружность круга, вся смыкается въ одну точку, такимъ образомъ что всякая прямая чрезъ оную проходящая и къ окружности круга прилежащая, вся лежитъ на сей поверьхности; то оная есть то, что коническою поверьхностію называется.

Пространство, которое она съ кругомъ заключаетъ, есть то, что *конусомъ* именуется.

Наконецъ поверьхностію сферическою называется та, которая дѣлаетъ равными всѣ прямыя выходящія до нея изъ одной точки пространства ею содержимаго. Сіе пространство есть то, что *сферою* или *шаромъ* именуется.

Послѣ сего общаго изчисленія родовъ линей и поверьхностей удобно уже представить себѣ можно настоящій предметъ Геометріи: *Оный не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ познаніи свойствъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи на плоскости протянутыхъ линей съ линеями, и поверьхностей съ линеями и поверьхностями.*

По чему Геометрію весьма пристойно раздѣлить на двѣ части: 1) на сопряженіе на плоскости протянутыхъ линей съ линеями и 2) на сопряженіе поверьхностей съ линеями и поверьхностями.

Поелику же выше замѣтили, что наложеніе есть главное начало и источникъ всѣхъ нашихъ въ Геометріи познаній, и все до сего нами предложенное, произведено изъ онаго наложенія; то прежде всего надлежитъ знать различные случаи, коимъ оно подвержено: Ограниченныя и въ предѣлахъ содержимыя линеи, поверьхности и тѣла, однѣ на другія и однѣ въ другія положенныя, или совершенно совмѣщаются, или однѣ другія въ себѣ содержатъ или на конецъ сами въ другихъ содержатся: Въ первомъ случаѣ сіи линеи, поверьхности и тѣла однѣ другимъ называются *равными*, въ другомъ однѣ другихъ именуются *большими*, и наконецъ въ третьемъ однѣ другихъ называются *меньшими*.

Вся Геометрія не состоитъ какъ токмо въ доказательствѣ сего равенства и большаго или меньшаго неравенства.

И таково есть введеніе въ Елементы Геометріи, которое мы въ семъ перьвомъ прибавленіи предложить обѣщали. Но что бы окончить сіе прибавленіе, остается намъ сказать еще нѣчто объ углахъ и сообразованной съ предметами системѣ Геометріи.

Объ углахъ.

Углы, которые столь много споровъ и разныхъ толковъ причинили, по моему понятію, не иное что суть, какъ дѣйствительныя *пространства*, двумя пресѣкающимися прямыми линеями содержимыя, пространства, при сравнени которыхъ не приемлется въ разсужденіе длина оныхъ линей; по крайней мѣрѣ сіе объ нихъ понятіе удовлетворяетъ всѣмъ нуждамъ Геометріи. И такъ углу я даю слѣдующее опредѣленіе:

Когда двѣ прямыя встрѣчаются и не лежатъ въ прямъ, то неопредѣленное пространство, между ими содержащееся, котораго часть можно заключить прямою, первыя соединяющею, называется уголъ.

Чрезъ сіе опредѣленіе исключается изъ угловъ такъ называемой уголъ входящій; что и быть должно, ибо оный одинъ самъ по себѣ взятый не можно назвать угломъ.

При случаѣ угловъ прямыхъ надлежитъ доказать 4 Евклидову Постулату; что помощію наложенія и удобно учинено быть можетъ.

Краткое начертаніе сообразованной съ предметами Системы Геометріи.

Выше показалъ я, что весьма пристойно Геометрію раздѣлить на двѣ части, а именно: на сопряженіе на плоскости протянутыхъ линей съ линеями, и на сопряженіе поверьхностей съ линеями и поверьхностями; и такъ да раздѣлится она таковымъ образомъ; я примѣчаю, что каждая изъ сихъ частей весьма естественно дѣлится еще на двѣ части, а именно: первая часть дѣлится на сопряженіе прямыхъ линеи съ прямыми, и на сопряженіе круговой линеи, какъ одной кривой, о которой говорится въ Елементахъ Геометріи, съ прямыми линеями; потомъ вторая часть дѣлится на сопряженіе прямыхъ поверьхностей или плоскостей съ прямыми линеями и прямыми поверьхностями или плоскостями, и на сопряженіе трехъ извѣстныхъ кривыхъ поверьхностей съ прямыми линеями и прямыми поверьхностями или плоскостями. И такъ Елементы Геометріи естественно состоятъ изъ четырехъ книгъ.

Первая книга, коея предметъ есть сопряженіе на плоскости протянутыхъ прямыхъ линей съ прямыми, занимается сначала сопряженіемъ двухъ прямыхъ линей; откуда происходятъ перпендикулярныя и косвенныя линеи, прямые и косые углы; потомъ натурально уму представляется сопряженіе большаго числа прямыхъ линей, и во первыхъ сопряженіе трехъ прямыхъ; гдѣ Геометръ наипаче различаетъ сіи два случая: двѣ какія нибудь изъ трехъ на плоскости протянутыхъ прямыхъ, или встрѣчаются по которую нибудь сторону, или не встрѣчаются ни по ту ни по другую, какъ бы въ прочемъ далече продолжены ни были; въ перьвомъ случаѣ сіи двѣ прямыя сопряженныя третьею могутъ заключить или содержать нѣкоторое опредѣленное на плоскости пространство, которое *треугольникомъ* называется; въ другомъ же оныя прямыя именуемыя *параллельными*, отъ сопряженія третьею не могутъ заключить или содержать опредѣленнаго пространства. Геометръ ясно понимаетъ, что для достиженія сего, надобно употребить еще четвертую линею параллельныя сопрягающую: Оная съ перьвою, параллельныя сопрягающею, такъ же или встрѣчается по которую нибудь сторону или не встрѣчается ни по ту ни по другую; въ перьвомъ случаѣ пространство сими линеями заключаемое называется *трапеція*, а въ другомъ *параллелограммъ*. И такъ непосредственно и натурально изслѣдованію Геометра представляются послѣ угловъ слѣдующіе три предмета: треугольники, параллельныя линеи, третьею сопряженныя, и параллелограммы. Трапеція же можетъ быть разсматриваема, или какъ часть треугольника, или какъ часть параллелограмма, и потому въ сихъ упомянутыхъ трехъ предметахъ содержится.

Прежде нежели Геометръ приступитъ ко изслѣдованію сихъ предметовъ, поступитъ далѣе въ сопряженіи прямыхъ линей. И во первыхъ при сопряженіи четырехъ линей, сверьхъ трапеціи и параллелограмма, представляется ему сопряженіе двухъ прямыхъ не параллельныхъ съ двумя прямыми непараллельными же. Пространству таковымъ образомъ прямыми линеями содержимому дается общее наименованіе *четвероугольника*, котораго трапеція и параллелограммъ суть токмо частные случаи. Потомъ сопряженіе пяти, шести, и такъ далѣе, прямыхъ линей занимать Геометра долженствуетъ; откуда произойдутъ пятиугольники, шестиугольники и такъ далѣе; то есть пространства, содержимыя пятью, шестью и такъ далѣе, прямыми линеями, изъ коихъ каждая не сопрягаетъ, какъ токмо двѣ другія. Сіи пространства вообще *многоугольниками* называются; цѣлость же прямыхъ, ихъ содержащихъ, *периметромъ* именуется.

И такъ Геометръ первую книгу Елементовъ Геометріи, раздѣлитъ на главы, кои суть: 1) о углахъ, 2) о треугольникахъ, 3) о параллельныхъ линеяхъ, 4) о параллелограммахъ и 5) вообще о многоугольникахъ.

Разсмотримъ теперь, въ чемъ состоятъ должны подробности сихъ главъ.

Первую главу, заключать въ себѣ долженствующую опредѣленіе угла, перпендикулярной линеи и угла прямаго, доказательство о постоянной величинѣ сего послѣдняго угла, и наконецъ опредѣленіе тупаго и остраго угла, мы за краткостію прейдемъ, и начнемъ вторую главою.

Поелику мы выше примѣтили, что вся Геометрія не состоитъ, какъ токмо въ доказательствѣ равенства и большаго или меньшаго неравенства каждой изъ трехъ родовъ образованной протяженности, то перьвой предметъ сея вторыя главы есть случаи равенства треугольниковъ и большаго или меньшаго неравенства частей ихъ; а такимъ образомъ Геометръ составитъ слѣдующія предложенія, которыя можно назвать главными:

1) Ежели двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго, каждая каждой, и уголъ одного равенъ углу другаго, а именно, которые содержатся между оныхъ равныхъ сторонъ; то и основаніе будетъ равно основанію, прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждой каждому, и треугольникъ будетъ равенъ треугольнику.

2) И обратно, ежели двѣ стороны одного треугольника равны двумъ другаго, каждая каждой, и основаніе одного равно основанію другаго; то и уголъ одного равенъ будетъ углу другаго, а именно, которыя, содержатся между оныхъ равныхъ сторонъ.

3) Ежели двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго, каждая каждой, но уголъ содержимый между сторонъ одного больше угла содержи-

маго между равныхъ сторонъ другаго; то и основанïе треугольника, въ которомъ оный большïй уголъ, будетъ больше основанïя другаго.

4) И обратно, ежели двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго, каждая каждой, но основанïе одного больше основанïя другаго; то и уголъ содержимый въ сторонахъ треугольника, въ которомъ большее основанïе, будетъ больше угла содержимаго въ равныхъ сторонахъ другаго треугольника.

5) Ежели двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго, каждая каждой, и уголъ одного равенъ углу другаго, а именно, которые лежатъ противъ равныхъ сторонъ, и ежели каждой изъ остальныхъ равныхъ угловъ лежащихъ противъ равныхъ сторонъ, или меньше прямаго или больше, или равенъ прямому; то и остальная сторона одного треугольника будетъ равна остальной сторонѣ другаго, и прочïе углы равны прочимъ угламъ, каждой каждому.

6) Ежели два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, каждой каждому, и одна сторона одного равна одной сторонѣ другаго, а именно, которыя или суть при равныхъ углахъ, или лежатъ противъ равныхъ угловъ; то и прочïя стороны одного будутъ равны прочимъ сторонамъ другаго, каждая каждой, и остальной уголъ равенъ остальному.

Сïи шесть главныхъ предложенïй, кромѣ пятаго, котораго въ Евклидѣ не находится, составляютъ 4, 8, 24, 25 и 26 предложенïя перьвой книги Евклидовыхъ Елементовъ; прочïя же, предъ ними, или между ними въ сей книгѣ находящïяся, суть или леммы ихъ, или слѣдствïя, изъ нихъ извлеченныя.

Такъ первое и второе Евклидовы предложенія суть леммы служащія для разрѣшенія слѣдствія, которое послѣ перьваго главнаго или Евклидова 4 го предложенія непосредственно уму представляется, и которое состоитъ въ построеніи треугольника, у коего бы стороны и между ими содержащійся уголъ были равны даннымъ, линеямъ и углу; а потому сіи два Евклидова предложенія послѣ перваго главнаго или Евклидова 4 го поставлены быть долженствуютъ, такъ какъ и 3 е Евклидово предложеніе, которое есть непосредственное слѣдствіе втораго. Потомъ 5 е и 7 е Евклидовы предложенія суть леммы втораго главнаго или Евклидова 8 го предложенія, а потому они на своемъ мѣстѣ остаться должны, такъ какъ и 6 е, которое есть обратное предложеніе 5 му. Послѣ онаго втораго главнаго предложенія натурально представляется то слѣдствіе его, которое въ 22 мъ Евклидовомъ предложеніи заключается; но какъ для разрѣшенія онаго потребно знать многія леммы, кои содержатся въ 9, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19 и 20 Евклидовыхъ предложеній, то оныя леммы разрѣшеніе сіе должны предшествовать; и поелику 12 предложеніе есть обратное 11 му, а 17 и 21 е (а) непосредственныя слѣдствія 16 и 20 го, то и оныя такъ же должны предшествовать. е го; сверьхъ того, поелику 5 я постулата есть обратное предложеніе 17 му, она доказанная должна имѣть свое мѣсто сряду за симъ 17 мъ. Наконецъ 23 Евклидово предложеніе есть лемма служащая для доказательства третьяго

(а) 21 е предложеніе должно быть разпространено вообще до многоугольниковъ на одномъ основаніи стоящихъ и другъ друга въ себѣ заключающихъ.

главнаго или Евклидова 24 го предложенія, такъ же и для разрѣшенія слѣдствій натурально представляющихся изъ перьвaго случая шестаго главнаго или Евклидова 26 го предложенія; разрѣшеніе же слѣдствія, представляющагося изъ втораго случая сего предложенія, требуетъ теоріи параллельныхъ линей, къ которой теперь и приступить должно.

Въ сей теоріи, коя есть 3 глава первой книги Елементовъ Геометріи, Геометръ составитъ слѣдующія главныя предложенія:

1) Ежели прямая падая на двѣ прямыя, дѣлаетъ углы на крестъ взаимно равные, или уголъ внѣшній равенъ внутреннему, что насупротивъ, или два внутренніе, по одну сторону прямой лежащіе, равные двумъ прямымъ; то оныя прямыя будутъ параллельныя.

2) И обратно, прямая падающая на двѣ параллельныя, дѣлаетъ углы на крестъ взаимно равные, или уголъ внѣшній равенъ внутреннему, что насупротивъ, или два угла, кои въ нутри и по одну сторону прямой, равные двумъ прямымъ.

3) Прямыя параллельныя одной и той же прямой, и взаимно между собою суть параллельныя.

4) Прямыя сопрягающія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ, суть и сами равныя и параллельныя.

Чрезъ первое изъ сихъ главныхъ предложеній Геометръ разрѣшитъ вопросъ заключающійся въ 31 Евклидовомъ предложеніи, которой послѣ сего перьвaго предложенія натурально уму представляется; потомъ чрезъ второе изъ главныхъ предложенiй и оной вопросъ, Геометръ разрѣшитъ тотъ, которой остался нерѣшенымъ во второй главѣ; наконецъ изъ того же источника произведетъ, какъ слѣдствiе, 32 Евклидово предложенiе и распространитъ его ко опредѣленiю суммы, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ угловъ во обще всякаго многоугольника.

Предъ третьимъ изъ тѣхъ главныхъ предложенiй поставитъ сiю лемму: когда прямая пресѣкаетъ одну изъ параллельныхъ, то по довольномъ продолженiи пресѣчетъ и другую; ибо безъ того оное подвержено будетъ затрудненiю.

Напослѣдокъ изъ послѣдняго главнаго предложенiя произведетъ сiе слѣдствiе: Когда на одной прямой возставятся два равные перпендикуляра, и концы оныхъ соединятся прямою, то оная будетъ параллельная первой, и обратно, когда двѣ линеи параллельныя, то возставленные на одной изъ нихъ перпендикуляры до пресѣченiя съ другою будутъ равные между собою.

Въ четвертой главѣ, коя за предметъ имѣетъ параллелограммы, Геометръ составитъ слѣдующiя главныя предложенiя:

1) Въ параллелограммахъ какъ стороны, такъ и углы, что насупротивъ, суть равны между собою, и дiагоналiю дѣлятся на двѣ равныя части.

2) И обратно, когда въ четвероугольникѣ противолежащiя стороны или противолежащие углы равны между собою; то оный есть параллелограммъ.

3) Параллелограммы стоящiе на равныхъ основанiяхъ и имѣющiе равныя высоты суть равны между собою:

4) И обратно равные параллелограммы стоящие на равныхъ основанiяхъ или имѣющiе равныя высоты, имѣютъ равныя высоты или основанiя.

5) Во всякомъ параллелограммѣ такъ называемыя дополненiя параллелограммовъ, что около дiагонали, суть равны между собою.

Геометръ зная, какъ взять данной прямой такую кратную величину, какую хочешь, первымъ изъ сихъ главныхъ предложенiй возпользуется, дабы взять данной прямой такую частную величину, какую хочешь; и на сей конецъ поставитъ упомянутую нами на стран. 141 лемму.

Такъ же третьимъ главнымъ предложенiемъ возпользуется, дабы даннаго параллелограмма взять такую кратную или частную величину, какую хочешь. Потомъ изъ сего третьяго предложенiя соединеннаго съ первымъ Геометръ произведетъ, какъ слѣдствiе, что треугольники имѣющiе равныя основанiя и высоты, суть такъ же равны между собою, и обратно, и что всякой треугольникъ имѣющiй съ параллелограммомъ равныя основанiя и высоты, есть половина сего параллелограмма. Наконецъ изъ послѣдняго главнаго предложенiя Геометръ имѣетъ средство, какъ параллелограммъ или треугольникъ обратить въ параллелограммъ или треугольникъ, которой бы имѣлъ данное основанiе или высоту, и естьли хочешь еще, данный уголъ при основанiи. Потомъ слѣдствiе, произведенное изъ третьяго и купно перваго главныхъ предложенiй, и послѣднее главное предложенiе, приложенное вмѣсто параллелограмма къ квадрату, ведутъ Геометра къ Пиѳагоровой теоремѣ и подобнымъ, до косоугольныхъ треугольниковъ относящимся, теоремамъ; что Геометръ разпространитъ, прилагая къ параллелограмму и вообще четвероугольнику.

Напослѣдокъ въ пятой главѣ, которой предметъ есть вообще многоугольники, Геометру, которой изслѣдовалъ уже въ предъидущихъ главахъ свойства ихъ, относящіяся къ периметру и угламъ, не остается, какъ токмо искать средства, какъ многоугольникъ, которой всегда есть большее или меншее совокупленіе треугольниковъ, обратить въ одинъ треугольникъ? Къ сему онъ достигаетъ двумя различными образами, а именно: или помощію проведенія параллельныхъ линей къ діагоналямъ многоугольника, основываясь на выведенномъ выше слѣдствіи изъ третьяго главнаго предложенія 4 й главы, относительно равенства треугольниковъ, или помощію приведенія треугольниковъ, изъ коихъ состоитъ многоугольникъ, къ одной высотѣ.

Потомъ Геометръ, которой достигъ сего и которой предъ симъ всегда разрѣшалъ и доказывалъ обратныя прямымъ предложенія, безъ сомнѣнія и здѣсь сдѣлаетъ сей вопросъ: Какъ треугольникъ обратить въ многоугольникъ? Но какъ сей вопросъ заключаетъ въ себѣ чрезмѣру много неопредѣленнаго, то Геометръ ограничитъ его видомъ, который бы въ искомомъ имъ многоугольникѣ былъ совершенно тотъ же, что и видъ какого ни есть по произволенію взятаго многоугольника; что должно заставить Геометра точно опредѣлить, въ чемъ состоитъ существенный признакъ сея одновидности многоугольниковъ, которая обыкновенно ихъ *подобіемъ* называется.

И онъ для повѣренія себя въ семъ дѣлѣ имѣетъ верное средство, состоящее въ томъ, что естьли одна изъ сторонъ одного многоугольника положится равною сходственной сторонѣ другаго подобнаго многоугольника, то надлежитъ, что бы слѣдовало изъ того совершенное равенство и закрытіе сихъ многоугольниковъ. Пользуясь симъ средствомъ. Геометръ удобно находитъ упомянутой признакъ, и тако составляетъ опредѣленіе подобнымъ многоугольникамъ. Но составивши сіе опредѣленіе, Геометръ чувствуетъ и видитъ ясно недостатокъ и безсиліе употребляемаго до селѣ начала и слѣдствій, изъ него извлеченныхъ, при семъ новомъ предметѣ; и для того приемлетъ другое, подъ именемъ теоріи величинъ пропорціональныхъ извѣстное. Подробно изслѣдовавши сіе начало, онъ прилагаетъ его къ Геометріи и составляетъ слѣдующія главныя предложенія:

1) Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны.
2) И обратно, когда два треугольника имѣютъ стороны пропорціональныя, то они суть подобные.

3) Треугольники такъ же суть подобные, когда одинъ уголъ треугольника равенъ одному углу другаго треугольника, и стороны, сіи углы содержащія, пропорціональны.

4) Еще треугольники суть подобные, когда одинъ уголъ треугольника равенъ одному углу другаго треугольника, и стороны, другіе углы содержащія, пропорціональны, и при томъ каждой изъ остальныхъ угловъ или меньше прямаго, или больше, или равенъ прямому.

5) Въ подобныхъ многоугольникахъ, углы одного равны угламъ другаго, каждой каждому, и стороны, сіи углы содержащія, пропорціональны.

6) И обратно, когда въ двухъ многоугольникахъ углы одного равны угламъ другаго, каждой каждому, и стороны, сіи углы содержащія, пропорціональны; то многоугольники суть подобные.

7) Периметры подобныхъ многоугольниковъ содержатся какъ однѣ изъ сходственныхъ сторонъ ихъ.

8) Подобные треугольники суть въ удвоенномъ содержаніи какихъ ни есть сходственныхъ сторонъ своихъ.

9) Вообще подобные многоугольники суть въ удвоенномъ содержаніи какихъ ни есть сходственныхъ сторонъ своихъ.

Для произведенія всѣхъ сихъ предложеній Геометру не нужно, какъ токмо слѣдующихъ двухъ леммъ, и натурально представляющихся изъ нихъ слѣдствій.

a) Естьли двѣ стороны треугольника разсѣкутся прямою линеею параллельно основанію онаго, то сіи двѣ стороны съ отрѣзками своими составятъ пропорцію; и обратно.

b) Естьли параллелограммъ разсѣчется прямою линеею параллельно которымъ ни есть двумъ противолежащимъ сторонамъ его; то онъ такъ будетъ содержаться къ одному изъ своихъ отрѣзковъ, какъ одна изъ разсѣченныхъ тою же прямою сторонъ его содержится къ соотвѣтственному своему отрѣзку.

Слѣдствія же натурально представляющіяся изъ сихъ леммъ суть:

Изъ первой: aa) какъ двумъ даннымъ прямымъ найти третью пропорціональную; и bb) какъ тремъ даннымъ прямымъ найти четвертую пропорціональную.

Изъ второй: cc) Параллелограммы и треугольники имѣющіе равныя высоты или основанія, содержатся какъ основанія или высоты; и обратно; и dd) когда въ параллелограммахъ или треугольникахъ основанія обратно пропорціональны высотамъ; то параллелограммы или треугольники равны между собою; и обратно.

Изъ первой леммы первыя 7 главныхъ предложеній непосредственно слѣдуютъ; а изъ слѣдствій второй леммы съ слѣдствіями первой происходятъ послѣднія два главныя предложенія. Оныя послѣднія два предложенія служатъ основаніемъ къ разрѣшенію упомянутаго выше вопроса, которой сверьхъ нихъ не требуетъ еще, какъ токмо средства находить между двухъ данныхъ прямыхъ среднюю пропорціональную; къ чему Геометръ удобно достигнетъ, разсматривая прямоугольной треугольникъ, въ которомъ изъ вершины прямаго угла на гипотенузу опущенъ перпендикуляръ; и что, какъ обратное предложеніе перьвому слѣдствію первой леммы, сколь возможно скоряе послѣ онаго слѣдствія показано быть должно.

Сверьхъ приведенныхъ здѣсь, къ главнымъ предложеніямъ можно причислять еще 22е предложеніе шестой книги Евклидовыхъ Елементовъ; прочія же всѣ, къ сей главѣ относящіеся, не иное что суть, какъ или слѣдствія или прибавленія къ онымъ главнымъ предложеніямъ.

Симъ я заключаю начертаніе предметовъ первой книги Елементовъ Геометріи.

Вторая книга, коея предметъ состоитъ въ сопряженіи круговой линеи съ прямыми, можетъ быть раздѣлена на слѣдующія три главы: 1) О сопряженіи круговой линeи съ прямыми, не заключающими собою пространства; 2) О сопряженіи круговой линеи съ прямыми, заключающими собою пространство, то есть о вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около круга многоугольникахъ; и 3) О сравненіи круга съ треугольникомъ, о подобіи круговъ и о взаимномъ соотношеніи какъ окружностей, такъ и самыхъ круговъ.

Перьвая глава можетъ раздѣлиться на два главные члена: a) о свойствѣ прямыхъ, сопрягающихъ круговую линею, и b) о свойствѣ угловъ, составляемыхъ оными прямыми.

Къ первому члену принадлежатъ слѣдующія 3й книги Евклидовыхъ Елементовъ предложенія: 1, 2, 3, 16, 17, 18 и 19, кои происходятъ отъ сопряженія круговой линеи съ одною прямою; потомъ слѣдующія: 4, 14, 15, 7, 9, 8, 35, 36 и 37, кои происходятъ отъ сопряженія круговой линеи со многими прямыми. Причемъ примѣтить надлежитъ, что 35 и 36 предложенія требуютъ леммъ, кои заключаются въ 5 и 6 предложеніяхъ второй книги Евклидовыхъ Елементовъ.

Ко второму же члену принадлежатъ сіи 3 й книги Евклидовыхъ Елементовъ предложенія: 20, 21, 22, 31, 32, 34, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 и предложеніе 33 е шестой книги.

Упомянутыя 35 и 36 предложенія 3 книги Евклидовыхъ Елементовъ, и многія другія онымъ подобныя, послѣ сего втораго члена могутъ быть выведены чрезъ подобіе треугольниковъ, какъ слѣдствія.

Наконецъ предложенія 5, 6, 10, 11, 12, и 13 третьей книги Евклидовыхъ Елементовъ могли бы составить особую главу, подъ именемъ взаимнаго сопряженія круговой линеи съ круговою линеею; но ради малочисленности, лучше разсматривать ихъ какъ слѣдствія предложеній перваго члена; и такъ предложеніе 5 будетъ слѣдствіе 1 го, предложеніе 10 слѣдствіе 9 го, которое само есть слѣдствіе 7 го, предложеніе 11 и 12 слѣдствія 7 и 8 го. Предложеніе же 13 е совсѣмъ выпущено быть должно, потому что Евклидово опредѣленіе взаимно касающимся кругамъ, на которомъ сіе предложеніе основано, не простирается какъ токмо до круга. Но съ другой стороны принявъ общее опредѣленіе взаимно касающимся кривымъ линеямъ, надобно будетъ составить новое предложеніе доказывающее, что круги, взаимно касающіеся, не пресѣкаются; что и удобно сдѣлать можно, поелику оное предложеніе есть непосредственное слѣдствіе 7 и 8 го.

Такъ же, поелику Евклидово опредѣленіе и касательной къ кругу подлежитъ изъятію, 18 предложеніе, по принятіи общаго касательной къ кривымъ линеямъ опредѣленія, хотя и не выпущено, но иначе доказано быть должно. (a).

(a) Вотъ въ чемъ состоитъ общее опредѣленіе касательной къ кривымъ линеямъ, и иное зависящее отъ сего опредѣленія доказательство 18 го предложенія:

Прямая линея есть касательная къ кругу, когда со внѣшней стороны прилежитъ къ нему столь близко, что чрезъ точку прикосновенія между ею и дугою круга, внутри смѣшеннолинейнаго угла, ими составляемаго, никакую прямую провести не можно.

Сіе есть опредѣленіе касательной къ кругу; вотъ доказательство 18 го предложенія, основанное на ономъ опредѣленіи.

Черт. 69 Естьли касательная AB не перпендикулярна къ радіусу CA, то перпендикуляръ на немъ поставленный, падаетъ по ту или дру

И симъ мы заключаемъ вторую книгу Елементовъ Геометрiи, поелику предметы и разположенiе второй и третей главъ оной очевидны.

Третья книга, коея предметъ состоитъ въ сопряженiи прямыхъ поверьхностей или плоскостей съ прямыми линеями и плоскостями, можетъ быть разделена на двѣ следующiя главы: 1) На сопряженiе плоскостей съ прямыми линеями и плоскостями, чрезъ которое определеннаго пространства заключить не можно; и 2) на сопряженiе плоскостей съ плоскостями, чрезъ которое определенное пространство дѣйствительно заключается.

Къ первой главѣ принадлежатъ слѣдующiя предложенiя XIй книги Евклидовыхъ Елементовъ: 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 18, 19, 14, 10, 15 и 16, и еще нѣкоторыя слѣдствiя, кои изъ 11, 19, 14, 15 и 16 предложенiй, всякой удобно произвести можетъ; потомъ той же книги сiи предложенiя 20, 21, 22, 23 и предложенiе на стр. 76 и 77 нами показанное. (а).

гую сторону касательной АВ. Пусть падаетъ по сю сторону, какъ лежитъ АЕ, то въ углѣ составляемомъ имъ съ дугою круга можно будетъ провести многiя прямыя; что противно доказанному въ 16 предложенiи; пусть же падаетъ по другую, какъ лежитъ АF, то въ углѣ составляемомъ касательною АВ съ дугою круга можно будетъ провести многiя прямыя; что противно определенiю касательной; слѣд. и проч.

(а). При чемъ не безполезно замѣтить, что определенiе толстому углу предполагается здѣсь слѣдующее:

Ежели болѣе нежели два плоскiе углы вершинами своими совокупляются въ одной точкѣ, сторонами своими взаимно прикаса-

Вторую же главу составляютъ слѣдующія предложенія:
1) Призьмы и пирамиды, содержимыя равномногими, равными, подобными и одинаково разположенными плоскостями, суть равны между собою, призьмы призьмамъ, и пирамиды пирамидамъ,

2) Параллелепипеды, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, суть равны между собою.

3) Такъ же трехсторонныя и вообще всякія призьмы, стоящія на равныхъ основаніяхъ и имѣющія равныя высоты, суть равны между собою.

4) Трехсторонныя и вообще всякія пирамиды, стоящія на равныхъ основаніяхъ и имѣющія равныя высоты, суть равны между собою.

5) Поверьхности подобныхъ пирамидъ и вообще всѣхъ подобныхъ многогранниковъ суть въ удвоенномъ содержаніи сходственныхъ ихъ ребръ.

6) Подобныя пирамиды и вообще всѣ подобные многогранники суть въ утроенномъ содержаніи сходственныхъ своихъ ребръ.

ются и находятся въ разныхъ плоскостяхъ; то неопредѣленное пространство, между ими содержащееся, котораго часть можно заключить плоскостію, плоскіе углы пресѣкающею, называется толстый уголъ.

И естьли сверьхъ того хочешь изключить изъ толстыхъ угловъ тѣ, которые имѣютъ вогнутости; то прибавить только надобно, что продолженія плоскостей, на которыхъ находятся плоскіе углы, въ оное пространство не входятъ, и простираются внѣ его.

Сіи суть главныя предложенія второй главы третьей книги Елементовъ Геометріи. Первое изъ нихъ слѣдуетъ непосредственно изъ наложенія; второе есть слѣдствіе перваго; третіе, основанное выше на леммѣ, которая предполагаетъ способъ предѣловъ, есть слѣдствіе перьваго и втораго, какъ то послѣ оказалося, когда доказательство 28 му предложенію XI й книги Евклид. Елементовъ произведено было изъ одного токмо наложенія (a); четвертое предложеніе основано на 3 мъ и способѣ предѣловъ; изъ него удобно выводится сія истинна: пирамида есть третья часть призьмы, когда основанія и высоты ихъ равны между собою; пятое предложеніе, по крайней мѣрѣ второю своею частію, основано на сей леммѣ: подобные многогранники могутъ быть раздѣлены на подобныя пирамиды; откуда слѣдуетъ обыкновенное или Роберта Симсона подоб-

(a) Вотъ въ чемъ состоитъ сіе доказательство, за которое мы обязаны Г. Вильбрехту, математику Горнаго Училища. Пусть параллелепипедъ AB разсѣченъ діагональною плоскостію CDFE; произойдутъ двѣ трехсторонныя призьмы CEHFDA, CEB FDG, которыхъ въ случаѣ наклонности параллелепипеда надлежитъ доказать равенство; на сей конецъ сдѣлай уголъ AHK = CEH и AHL = DFH; будетъ HK = EH, HL = HF; вообрази себѣ плоскость PHQ перпендикулярную къ ребру AH, будетъ HP перпендикулярна къ EK, HQ перпендикулярна къ FL и PQ перпендикулярна къ EK и FL; и того ради будетъ трапеція PKLQ = PEFQ, KL = EF и уголъ KHL = EHF = FBE; проведи плоскость MAN параллельную KHL, будетъ пирамида EKLFH = MCDNA; что докажется чрезъ наложеніе; почему и призьма CEHFDA = MKHLNA; но понеже плоской уголъ AHK = CEH = GBF, AHL = DFH = GBE и KHL = FBE; то и толстой уголъ H призьмы MKHLNA будетъ равенъ толстому углу B призьмы CEBFDG, и самая призьма MKHLNA = CEBFDG, поелику равныя и подобныя плоскости въ нихъ одинаково расположены; и какъ призьма MKHLNA = CEHFDA, то заключимъ и проч. Черт. 70.

нымъ многогранникамъ опредѣленіе; наконецъ шестое предложеніе зависитъ отъ слѣдующей леммы и сихъ ея слѣдствій:

Естьли параллелепипедъ разсѣчется плоскостію параллельно которымъ ниесть двумъ противолежащимъ сторонамъ его, то онъ такъ будетъ содержаться къ одному изъ своихъ отрѣзковъ, какъ одно изъ разсѣченныхъ тою же плоскостію ребръ его содержится къ соотвѣтственному своему отрѣзку.

Слѣдствія же изъ сей леммы произтекающія суть:

(a) Параллелепипеды, и вообще призьмы, и пирамиды имѣющія равныя высоты содержатся между собою какъ основанія, а имѣющія равныя основанія содержатся какъ высоты.
b) Призьмы или пирамиды, у которыхъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, суть равны между собою; и обратно.

Симъ послѣднимъ слѣдствіемъ Геометръ возпользуется, дабы призьму или пирамиду превратить въ другую, которая бы имѣла данную высоту или основаніе.

Потомъ самымъ предложеніемъ возпользуется, дабы призьму или пирамиду превратить въ другую подобную данной; для чего потребно знать, какъ между двухъ данныхъ прямыхъ найти двѣ среднія пропорціональныя; къ чему Геометръ удобно достигнетъ, приемля Декартовы наугольники, и что въ прочемъ можетъ быть предложено еще въ первой книгѣ. И такъ сія третія книга Елементовъ Геометріи будетъ окончена.

Четвертая книга, коея предметъ состоитъ въ сопряженіи трехъ извѣстныхъ поверьхностей съ прямыми линеями и плоскостями, естественно дѣлится на три слѣдующія главы: 1) О сопряженіи цилиндрической поверьхности съ прямыми линеями и плоскостями; 2) о сопряженіи конической поверьхности съ прямыми линеями и плоскостями и 3) о сопряженіи сферической поверьхности съ прямыми линеями и плоскостями.

Въ первой главѣ Геометръ вопервыхъ ограничиваетъ, сказаннымъ выше образомъ, цилиндрическую поверьхность, и производитъ оттуда самой цилиндръ; потомъ проводитъ въ немъ ось, раздѣляетъ его на прямой и косой, разсѣкаетъ плоскостями, удостовѣряется, что цилиндрическая поверьхность есть кривая, что всякое сѣченіе параллельное основанію цилиндра есть кругъ и что всякое сѣченіе параллельное оси его есть параллелограммъ; что ведетъ Геометра ко вписыванію въ цилиндръ и описыванію около онаго призьмъ, а сіе къ сравненію поверьхности цилиндра съ прямоугольникомъ, и самаго цилиндра съ параллелепипедомъ; откуда обращается онъ къ подобію цилиндровъ, и окончиваетъ тѣмъ сію первую главу четвертой и послѣдней книги Елементовъ Геометріи.

Точно такъ же Геометръ поступитъ и во второй главѣ.

Откуда обращается къ третьей, гдѣ вопервыхъ разсѣкаетъ шаръ плоскостями, удостовѣряется, что поверьхность его есть кривая и что всякое сѣченіе есть кругъ; потомъ примѣчая, что шаръ между тѣлами есть то же самое, что кругъ между плоскими фигурами, вписываетъ въ оной и описываетъ около онаго многогранники, правильными называемые; но видя, что сіи многогранники не ведутъ его къ тому, къ чему привели въ цилиндръ или конусъ вписанныя и около онаго описанныя призьмы или пирамиды, вмѣсто многогранниковъ вписываетъ въ шаръ и описываетъ около онаго конусы и цилиндры; что прямо ведетъ Геометра къ сравненію поверьхности шара съ прямоугольникомъ и самаго шара съ параллелепипедомъ или инымъ прямолинейнымъ тѣломъ; откуда обращается онъ къ подобію шаровъ, и окончиваетъ тѣмъ сію послѣднюю главу послѣдней книги Елементовъ Геометріи.

Таковъ есть планъ Елементамъ Геометріи, разсматриваемымъ во всемъ ихъ совершенствѣ; планъ, который по естественности своей дѣлаетъ и самое выполненіе удобнымъ; что однакожъ я предоставляю другимъ, которые имѣютъ болѣе свободнаго времени нежели я. Но въ предосторожность ихъ сказать я долженъ, что не можно ожидать совершеннаго успѣха, какъ токмо отъ такого человѣка, которой долговременнымъ упражненіемъ, или лучше преподаваніемъ, приобрѣлъ способность ясно и точно выражать свои мысли, и которой знаетъ притомъ уже всѣ трудности, кои съ помощію сего сочиненія преодолѣть имѣетъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ II,

Содержащее въ себѣ доказательство 5 й Евклидовой Постулатѣ.

Заключающееся въ сей постулатѣ предложеніе можетъ быть раздѣлено на три случая: или оба упоминаемые тутъ угла суть острые, или одинъ токмо острой, а другой тупой, или одинъ острой, а другой прямой. Мы начнемъ доказательствомъ послѣдняго случая.

И такъ пусть двѣ прямыя AC и BD пресѣкаются третьею AB такъ, что одинъ уголъ CAB острой, а другой ABD прямой. Возьми на AC многія точки E, F и опусти изъ нихъ на AB перпендикуляры EP, FQ; изъ 16 предложенія первой книги Евклидовыхъ Елементовъ слѣдуетъ, что оные перпендикуляры упадутъ по ту же сторону прямой AC, съ которой находится и перпендикуляръ BD. Теперь обратно изъ точекъ P, Q и между ими взятыхъ R, S возставь перпендикуляры PE′, QF′ и RG, SH: первые пойдутъ по опущеннымъ прежде перпендикулярамъ EP, FQ, и потому съ прямою AC въ точкахъ E, F пресѣкутся; а другіе находясь въ опредѣленныхъ пространствахъ AEP, PEFQ, по довольномъ продолженіи должны напослѣдокъ изъ оныхъ выдти; и какъ они перпендикуляровъ PE QF, для упомянутаго Евклидова предложенія, пресѣчь не могутъ, то пресѣкутся съ линеею AC въ нѣкоторыхъ ея точкахъ G′, H′; и такъ отсюда явствуетъ, что имѣются весьма многіе перпендикуляры, которые на AB отъ A къ Z поставленные пресѣкаются съ AC; и положивъ сіе, я говорю, что нѣтъ ни единаго перпендикуляра, на AB отъ A къ Z поставленнаго, которой бы не пресѣкъ прямую AC. Ибо буде сіе отвергаешь, то долженъ согласиться, что изъ перпендикуляровъ на AB отъ A къ Z поставленныхъ имѣются одни, которые пресѣкаются съ AC, и другіе, которые не пресѣкаются съ AC; и согласясь на сіе, долженъ согласиться еще, что имѣется общій предѣлъ, гдѣ одни перпендикуляры кончаются, а другіе начинаются, ибо безъ сего предѣла всѣ перпендикуляры были бы съ AC пресѣкающіеся; что противорѣчитъ тому, что отвергая допускаешь; и такъ да положится сей предѣлъ; я говорю, Черт. 71.

что его не имѣется, ибо, гдѣ бы ни положить его, всегда найти можно будетъ перпендикуляры преходящіе сей предѣлъ и AC пресѣкающіе: такъ пусть перпендикуляръ KT есть сей предѣлъ, то на продолженной AC взявъ точку L за точкою K и опустивъ изъ нея на AB перпендикуляръ LU, найдешь, что имѣются весьма многіе перпендикуляры, на AB между T и U поставленные, которые пресѣкаются съ AC и преходятъ положенной предѣлъ TK. И такъ нѣтъ сего предѣла; а потому не имѣется такъ же двухъ родовъ перпендикуляровъ; и какъ выше ясно показали, что имѣются многіе перпендикуляры, отъ A къ Z на AB поставленные, которые съ AC пресѣкаются; то заключимъ изъ сего, что всѣ перпендикуляры отъ A къ Z на AB поставленные суть пресѣкающіеся съ AC. Слѣдовательно BD, какъ одинъ изъ сихъ перпендикуляровъ, съ AC взаимно пресѣкаются. Теперь докажемъ другіе два случая.

Черт. 72. Пусть прямыя AC и BD пресѣкаются третьею AB такъ, что углы CAB, DBA оба острые, то по первому случаю возставленный на AB перпендикуляръ BE съ AC долженствуетъ пресѣчься, и да пресѣчется въ какой нибудь точкѣ F; прямая BD будетъ находиться въ опредѣленномъ пространствѣ ABF, изъ котораго по довольномъ продолженіи она напослѣдокъ должна выдти и по тому такъ же пресѣчь периметръ его; но поелику единожды пресѣкши AB и BF, другой разъ съ ними того учинить не может; то не остается какъ токмо одна AF, которую продолженная BD пресѣчь долженствуетъ; слѣд. и проч.

Черт. 73. Наконецъ пусть прямыя AC и BD пресѣкаются третьею AB, такъ что одинъ изъ угловъ CAB, ABD, которые вмѣстѣ взятые меньше двухъ прямыхъ, есть острой, а другой тупой. Сдѣлай уголъ BAE равный ABF, прямая AE пойдетъ но лѣвую сторону прямой AC, поелику уголъ ABF > уг. BAC; раздѣли AB въ G пополамъ и опусти изъ G на AE и FD перпендикуляры GK и GH; для 25 предложенія первой книги Евк. Елем. будетъ уголъ AGK = уг. BGH, и HGK будетъ одна прямая линея, которую AC по довольномъ продолженіи пресѣчетъ въ нѣкоторой точкѣ L; и какъ для 17 предложенія той же книги Евкл. Елем. уголъ ALK и слѣдственно такъ же HLC есть острый; то по причинѣ угла прямаго DHL, сей случай обращается въ первой выше нами доказанной; слѣд. и проч.

ПРИБАВЛЕНІЕ III,

Заключающее въ себѣ доказательство Архимедовымъ Аксіомамъ.

Доказательство первой изъ сихъ аксіомъ во всемъ ея пространствѣ, сверьхъ 20 го и 21 го предложеній первой книги Евклид. Елем. требуетъ еще слѣдующихъ.

1) Всякая ломаная линея, хотя бы и съ обѣихъ сторонъ вогнутая всегда больше прямой тѣ же концы съ нею имѣющей. Ибо, пусть сія ломаная будетъ ACDEB то изъ одного конца ея A протянувъ прямыя AD, AE, выдетъ $AC + CD + DE + EB > AD + DE + EB > AE + EB > AB$. Черт. 74.

2) Всякая кривая съ одной и той же стороны вогнутая или выпуклая больше прямой тѣ же концы съ нею имѣющей. Ибо, пусть ACB будетъ таковая кривая; раздѣли AB въ M пополамъ, возставь перпендикуляръ MC и протяни прямыя AC, BC; оныя, по опредѣленію съ одной и той же стороны вогнутой кривой, будутъ находиться Черт. 75.

съ одной и той же стороны ея; а такимъ образомъ въ кривую будетъ вписана ломаная линея ACB; раздѣли AM въ P и BM въ Q пополамъ, возставь перпендикуляры PE, QF и проведи прямыя AE, CE и BF, CF; отъ чего для той же причины будетъ въ кривую вписана другая ломаная AECFB; и такъ сїе продолжать можно далѣе безъ конца; я примѣчаю, что всякая послѣдующая, въ кривую вписанная ломаная есть больше и ближае въ состоянїю закрытїя съ кривою, нежели предъидущая; въ самомъ дѣлѣ, по причинѣ что $AE + EC > AC$ и $CF + FB > CB$, ломаная AECFB больше лом. ACB; такъ же, гдѣ бы ни разсѣчь сїи ломаныя перпендикулярно къ прямой AB, изключая общихъ ихъ точекъ, будетъ всегда пресѣченїе T, послѣдующей ломаной далѣе отстоять отъ AB, нежели пресѣченїе U предъидущей ломаной и слѣдственно, поелику ломаныя никогда кривую не преходятъ, послѣдующая ломаная будетъ всегда ближае къ кривой, нежели предъидущая; а такимъ образомъ чрезъ показанное выше вписыванїе ломаныхъ въ кривую, ломаная растетъ и приближается къ состоянїю закрытїя съ кривою; но какъ приближаться къ сему состоянїю, значитъ приближаться къ равенству, то заключимъ изъ сего, что оная ломаная есть меньше кривой, ибо въ противномъ случаѣ она возрастая не приближалася бы къ кривой, но отдалялася бы отъ оной; и какъ ломаная больше прямой AB, то кривая ACB и паче больше прямой AB. И. С. Д. Н.

Примѣчанїе.

Всякая часть кривой, имѣющая съ одной и той же стороны вогнутость или выпуклость, обыкновенно называется дугою; а по тому такъ же можно назвать дугою и самую кривую вогнутую или выпуклую съ одной и той же стороны; и такъ по сему названiю доказанное теперь нами предложенiе можно изобразить такъ: дуга всегда больше своей хорды.

Лемма

Всякая кривая есть или дуга или совокупленiе дугъ.

Доказательство.

Прямыя, на двухъ точкахъ кривой лежащiя, падаютъ или всегда по одну и туже сторону сей кривой, или по ту и другую: естьли всегда по одну и ту же, то кривая есть то, что мы назвали дугою; но естьли по ту и другую, то кривая состоитъ изъ двухъ или болѣе дугъ.

Но чтобы въ семъ послѣднемъ случаѣ удостовѣриться совершенно, то приведемъ его къ понятiямъ наипростѣйшимъ, какъ токмо возможно будетъ.

Пусть AB будетъ дуга, съ которой ни есть стороны вогнутость имѣющая; то она отъ прямыхъ AC, CD, DB, протянутыхъ чрезъ какiя бы то ни было ея точки A, C, D, B, будетъ уклоняться въ одну сторону; ибо, естьли бы она уклонялась въ разныя стороны, какъ кривая ACDE, то бы она не была дуга, понеже CD, CE лежатъ съ разныхъ сторонъ кривой ACDE. Черт. 76.

И обратно, пусть AB кривая, которая уклоняется всегда въ одну сторону; то какiя бы то двѣ точки ни соединить прямою линеею, оная всегда будетъ лежать съ одной стороны сей кривой; ибо когда бы напримѣръ CD лежала съ другой стороны, какъ CE въ кривой ACEDB, то бы кривая уклонялась не въ одну сторону, но въ разныя, понеже часть кривой CE лежитъ по одну сторону прямой AC, а часть ED по другую прямой CE. Черт. 77.

Положивъ сiе, пусть AB будетъ кривая, у которой прямыя лежащiя на двухъ изъ ея точекъ падаютъ по ту Черт. 78.

и другую ея сторону; то я примѣчаю: во первыхъ, что сія кривая AB, для предложеннаго выше, уклоняется въ ту и другую сторону; во вторыхъ, что начиная отъ какой ни есть точки A, не можетъ не уклоняться въ которую нибудь сторону, ибо естьли бы сіе было, то бы она была прямая; въ третьихъ, что она не можетъ уклоняться вдругъ въ ту и другую сторону; откуда я заключаю, что кривая AB, начиная отъ точки A, уклоняется сколько ни есть въ одну сторону; но линея уклоняющаяся въ одну сторону есть дуга; слѣдовательно нѣкая часть AC взятая отъ A кривой AB есть дуга; такъ же докажется, что нѣкая часть взятая и отъ C есть дуга; слѣд. и проч:

3) Всякая кривая есть больше прямой, тѣ же концы съ нею имѣющей. Ибо, когда по предложенной предъ симъ леммѣ всякая кривая есть или дуга или совокупленіе дугъ, то здѣсь имѣется два случая; и послику первой есть второе предложеніе предъ симъ доказанное, то остается
Черт. 79. удостовѣриться токмо въ другомъ; и такъ пусть ACDEB будетъ кривая изъ многихъ дугъ AC, CD, DE и BE состоящая, то протянувъ ихъ хорды AC, CD, DE, BE, будетъ для перваго случая дуг. AC + дуг. CD + дуг. DE + дуг. BE > AC + CD + DE + BE; но для перваго предложенія, AC + CD + DE + BE > AB; слѣд. и проч.

Отсюда съ помощію упомянутаго 20 Евклидова предложенія удобно уже всякой заключить можетъ, что и всякая смѣшенная линея больше прямой тѣ же концы съ нею имѣющей. И такъ первая Архимедова Аксіома доказана во всемъ ея пространствѣ.

Вторая его Аксіома послѣ сего такъ доказана быть можетъ:

Пусть AMB какая ни есть вогнутая линея; она, говорю, будеть наименьшая изъ всѣхъ и всякихъ ея объемлющихъ и тѣ же концы A и B съ нею имѣющихъ. Ибо, буде сїе отвергаешь, то или имѣется изъ нихъ кромѣ AMB, другая наименьшая, одна или многїя, или совсѣмъ не имѣется наименьшей, такъ что всѣ онѣ равны между собою, и каждая равна AMB; я говорю, что ни то ни другое не возможно; ибо, когда положить первое возможнымъ и линею ACDEFB наименьшею; то между AMB и ACDEFB протянувъ прямую PQ, которая бы не пресѣкала AMB (что всегда возможно сдѣлать), получишь линею APQB, которая объемлетъ AMB и которая, по причинѣ что PQ меньше PCDEFQ, будетъ меньше наименьшей ACDEFB; что нелѣпо; и сїя нелѣпость равно получается, когда положатся и многїя изъ объемлющихъ AMB наименьшими; такъ же когда положить, что изъ нихъ вмѣстѣ съ AMB не имѣется наименьшей, то есть, что онѣ всѣ равны между собою и каждая равна AMB, то протянувъ PQ, какъ и прежде, выдетъ, что имѣется изъ нихъ меньшая, нежели ACDEFB; что противно положенїю. И такъ заключимъ изъ сего, что изъ всѣхъ и всякихъ линей, объемлющихъ вогнутую линею, и тѣ же концы съ нею имѣющихъ, наименьшая есть сїя вогнутая линея. Черт. 80.

Чтобы удостовѣриться полнымъ образомъ, что между вогнутою линеею AMB и всякою другою, ее объемлющею, можно протянуть прямую PQ непресѣкающую вогнутую линею AMB, то надлежитъ знать нѣкоторыя лемы, а именно:

1) Въ ломаной или смѣшенной съ одной и той же стороны вогнутой линеѣ AMNB продолженїе NR одной изъ прямыхъ MN, составляющихъ сїю ломаную или смѣшенную Черт. 81.

линею, не пресѣкаетъ ея, и находится внѣ, или съ выпуклой стороны. Ибо пусть пресѣкаетъ, какъ дѣлаетъ прямая NHR′, то будетъ AMNB съ той и другой стороны вогнутая линея; что противно положенію; такъ же пусть оное продолженіе находится внутри, какъ лежитъ линея NR″, то взявъ двѣ точки E и F между M и N и между N и R″, выдетъ, что прямая ихъ соединяющая падаетъ съ выпуклой стороны линеи AMNB; что невозможно; слѣд. и проч.

2) Въ кривой съ одной и той же стороны вогнутой линеѣ продолженіе прямой, соединяющей какія ни есть двѣ точки оной вогнутой кривой, не пресѣкаетъ уже болѣе ея и находится внѣ или съ выпуклой стороны кривой. Сіе докажется точно такъ же, какъ доказана первая лемма.

3) Въ той же кривой изъ всякой точки ея можно протянуть такую прямую, которая къ кривой не будетъ прикасаться, какъ токмо въ сей точкѣ, и продолженная въ ту и другую сторону будетъ находиться внѣ или съ выпуклой стороны кривой. Черт. 82. Пусть на кривой ACB взята будетъ гдѣ ни есть точка C; протяни чрезъ нея и какую ниесть другую точку D прямую DCE; часть CE будетъ находиться внѣ или съ выпуклой стороны кривой; возьми на кривой по ту и другую сторону точки D многія другія точки F и H и протяни изъ нихъ чрезъ C прямыя FCG и CHK; получишь на линеѣ ECD многія изъ C протянутыя прямыя CG и CK, изъ коихъ однѣ не пресѣкаютъ дугу CD, а другія пресѣкаютъ оную; я говорю, что между сими не пресѣкающими и пресѣкающими прямыми необходимо долженъ быть общій предѣлъ, гдѣ однѣ кончатся, а другія начинаются, ибо безъ сего предѣла всѣ линеи, изъ C на ECD протянутыя, были бы не пресѣкающія дугу CD; что не возможно; и такъ имѣется

сей предѣлъ; пусть оный будетъ линея CR, то въ углѣ ECR будутъ содержаться всѣ прямыя не пресѣкающія дугу CD, а въ углѣ DCR всѣ пресѣкающія оную; а такимъ образомъ линея CR находится вся съ выпуклой стороны дуги CD и прилежитъ къ ней столь близко, что между ею и *дугою* CD чрезъ точку C ни какой не пресѣкающей оную дугу прямой провести не можно; что просто говорится, *ни какой прямой провести не можно.* Оная прямая CR есть та, что касательною къ дугѣ CD въ точкѣ C называется. Я говорю, что она продолженная въ другую сторону RC будетъ вся внѣ или съ выпуклой стороны кривой; ибо, буде нѣтъ, пусть пресѣчетъ кривую въ какой ни есть точкѣ L; то между C и L взявъ какую ни есть точку M, протяни чрезъ C прямую MCH, которая по свойству касательной CR къ дугѣ CD долженствуетъ пресѣчь оную дугу въ нѣкоторой точкѣ H; потомъ на дугахъ MC и HC взявъ еще двѣ какія ни есть точки m и h, соедини ихъ съ точкою B прямыми линеями; тогда по причинѣ что MCH есть одна прямая линея, оныя съ MCH составятъ нѣкоторые углы; а потому линея соединяющая точки m и h будетъ находиться внѣ или съ выпуклой стороны кривой ACB; что противно опредѣленію вогнутости съ одной и той же стороны, и слѣдственно такъ же положенію. Слѣд. и проч.

Теперь, естьли вогнутая линея есть ломаная или смѣшенная, продолжи одну изъ прямыхъ MN въ ту и другую сторону до пресѣченія съ объемлющею линеею ACDEFB; возьми между сею продолженною прямою и отсѣченною ею частію объемлющей линеи какую ниесть точку Z и протяни чрезъ оную параллельно продолженной MN прямую PQ; оная будетъ та самая, о возможности кото- Черт. 81.

рой мы удостовѣриться хотѣли; что изъ первой леммы очевидно явствуетъ.

Черт. 20. Есть ли же вогнутая линея есть кривая, какъ AMB; то изъ какой ни есть ея точки M протянувъ къ ней касательную, о бытiи которой выше доказано, возьми между оною касательною и отсѣченною ею частiю объемлющей линеи ACDEFB какую ниесть точку Z и протяни чрезъ нея параллельно касательной прямую PQ; оная будетъ та самая, которой возможность доказать хотѣли; что съ помощiю третьей леммы всякой удобно усмотрѣть можетъ.

И такимъ образомъ Лежандрово доказательство второй Архимедовой Аксiомѣ исправлено.

Третья Архимедова Аксiома, которая есть тоже самое въ разсужденiи поверьхностей, что первая въ разсужденiи линей, не столь удобно во всемъ ея пространствѣ доказана быть можетъ, какъ оная первая. Г. Лежандръ мнитъ ея доказать чрезъ слѣдующее разсужденiе:

„Поелику поверьхность, говоритъ онъ, есть протяженность въ длину и ширину простирающаяся, то не можно вообразить себѣ поверьхность большую другой, буде „размѣренiя перьвой въ нѣкоторыя стороны не превосходятъ размѣренiя другой; и естьли случится, продолжаетъ, „что размѣренiя одной поверьхности во всѣ стороны менѣе размѣренiй другой, то явствуетъ, что первая поверьхность будетъ меньшая изъ нихъ.

Но всякой безъ труда согласится, что сiе разсужденiе есть паче остроумно, нежели удовлетворительно.

Для настоящаго доказательства сея Аксїомы надлежало бы составить подобныя тѣмъ предложенїя, которыя мы выше показали при доказательствѣ первой; но сїе влечетъ за собою длинности и трудности; мы преодоленїе оныхъ оставляемъ любопытному читателю, тѣмъ паче, что мы будемъ имѣть случай говорить о семъ предметѣ въ другомъ сочиненїи, гдѣ оный нуженъ. Въ прочемъ на стран. 57, 58 и 67 мы положили изрядное къ достиженїю сего начало.

ПРИБАВЛЕНІЕ IV,

Заключающее въ себѣ вписыванїе въ шаръ и описыванїе около онаго правильныхъ многогранниковъ.

Поелику шаръ между тѣлами есть тоже самое, что кругъ между плоскими фигурами, то при разсѣченїи шара плоскостями натурально уму представляется вписыванїе въ него и описыванїе около него тѣлъ, которыя имѣютъ подобныя условїя, что и вписуемыя въ кругъ и описуемыя около круга многоугольники. И какъ изъ сихъ многоугольниковъ наипаче достойны любопытства тѣ, которые правильными называются, то такъ же и изъ оныхъ тѣлъ наиболѣе должны насъ привлекать къ себѣ тѣ, которыя сверьхъ вписуемости и описуемости имѣютъ подобныя условїя, что и правильные многоугольники, а именно тѣ, у которыхъ грани суть равные и одинаковые правильные многоугольники и толстые углы, углами оныхъ многоугольниковъ содержимые, всѣ равные между собою. Сїи тѣла по сходству условїй съ условїями правильныхъ многоугольниковъ, *правильными многогранниками* называются. Ихъ не можетъ быть какъ токмо пять. Ибо:

1) Пусть грани будутъ правильные или равносторонные треугольники; то толстой уголъ многогранника не можетъ быть составленъ, какъ или изъ трехъ угловъ сихъ треугольниковъ, или изъ четырехъ или наконецъ изъ пяти; ибо шесть угловъ оныхъ треугольниковъ составляютъ уже 4 прямыхъ; и потому изъ треугольниковъ не можно составить, какъ токмо три правильные многогранника, кои суть тетраедръ, октаедръ и икосаедръ.

2) Пусть грани будутъ правильные четвероугольники или квадраты, то толстой уголъ многогранника не можетъ быть составленъ, какъ токмо изъ трехъ угловъ сихъ квадратовъ, ибо четыре оныхъ угла составляютъ уже 4 прямыхъ; и такъ изъ квадратовъ или правильныхъ четвероугольниковъ не можно составить, какъ токмо одинъ правильной многогранникъ, которой есть гексаедръ или кубъ.

3) Наконецъ пусть грани будутъ правильные пятиугольники, то толстой уголъ многогранника не можетъ быть составленъ, какъ токмо изъ трехъ угловъ сихъ пятиугольниковъ; ибо четыре оныхъ угла составляютъ уже болѣе 4 прямыхъ; и такъ изъ правильныхъ пятиугольниковъ не можно составить, какъ токмо одинъ правильной многогранникъ, которой есть додекаедръ.

И болѣе сихъ правильныхъ многогранниковъ уже быть не можетъ, ибо три угла правильныхъ шестиугольниковъ составляютъ 4 прямыхъ, а три угла прочихъ правильныхъ многоугольниковъ составляютъ всегда больше 4 прямыхъ.

Предложенїе I.

Въ данной шаръ вписать и около даннаго шара описать тетраедръ.

1) Въ данномъ шарѣ протяни дїаметръ AB; отдѣли отъ онаго треть BC; разсѣки шаръ перпендикулярно къ AB проходящею чрезъ точку C плоскостїю; въ произшедшемъ отъ того кругѣ впиши равносторонной треугольникъ DEF; и изъ вершинъ угловъ онаго протяни къ A прямыя DA, EA и FA; плоскостями DEF, ADE, AEF и AFD содержимое тѣло будетъ вписанный въ шаръ тетраедръ. Ибо, $\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = AB : BC = 3 : 1$; откуда слѣдуетъ, что $\overline{AD}^2 = 3\overline{DC}^2$; но и по свойству равностороннаго треугольника DEF, $\overline{DE}^2 = 3 . \overline{DC}^2$; слѣдоват. $AD = DE$, и по причинѣ что $AD = AE$, треугольникъ ADE есть равносторонной: такъ же докажется, что и остальные два треугольника AEF и AFD суть равносторонные; слѣд. и проч. Черт. 83.

И почти точно такъ же поступить надлежитъ при составленїи тетраедра, когда данъ будетъ одинъ токмо дїаметръ шара, которой бы оный тетраедръ содержать въ себѣ могъ; вся разность состоитъ токмо въ томъ, что здѣсь вмѣсто разсѣченїя шара плоскостїю перпендикулярно къ дїаметру AB, надлежитъ описать на ономъ дїаметрѣ AB полкруга ADB и ордонатою его CD, проходящею чрезъ ту же точку, описать кругъ DEF, который бы плоскостїю своею былъ перпендикуляренъ къ дїаметру AB.

Изъ того и другаго сихъ Геометрическихъ строеній слѣдуетъ, что квадратъ изъ ребра вписаннаго въ шаръ тетраедра есть двѣ трети квадрата изъ діаметра онаго шара. Ибо $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = AC : AB = 2 : 3$.

Такъ же слѣдуетъ, что тетраедръ состоитъ изъ четырехъ равныхъ пирамидъ, у которыхъ вершины въ центрѣ шара, а основанія стороны или грани тетраедра. Ибо сіи пирамиды содержимы суть равномногими, равными, подобными и одинаково расположенными плоскостями.

И посему перпендикуляры опущенные изъ центра шара на стороны или грани тетраедра суть всѣ равны между собою. Ибо сіи перпендикуляры суть высоты оныхъ равныхъ пирамидъ.

2) Теперь, чтобы около даннаго шара описать тетраедръ, поставь на діаметрѣ AB въ плоскости BGD перпендикуляръ Bd; продолжи какъ его, такъ и радіусъ GD, пока взаимно не пресѣкутся въ d; и линеею Gd опиши полкруга adb; я говорю, что по діаметру ab составленный тетраедръ будетъ описанный около даннаго шара. Чтобы удостовѣриться въ семъ дѣйствительно, состроимъ самымъ дѣломъ одну грань или сторону его; на сей конецъ отдѣлимъ отъ діаметра ab третью часть; оная будетъ bB, ибо, по причинѣ что $GB : GC = Gd : GD$, $GB - GC : GB + GC = GD - GD : Gd + GD$ и слѣдственно $BC : AC = bB : aB$; потомъ опишемъ линеею Bd кругъ перпендикулярный къ діаметру ab; оный будетъ касательный къ данному шару, что ясно и удобно всякой доказать можетъ; впишемъ въ него равносторонной треугольникъ def; оный по доказанному выше будетъ одна изъ граней или сторонъ тетраедра, содержимаго шаромъ, коего діаметръ есть линея ab; и такъ

одна изъ сторонъ составленнаго по діаметру ab тетраедра есть касательная къ данному шару и изъ центра онаго опущенный на нее перпендикуляръ равенъ радіусу его; но какъ по доказанному выше въ тетраедрѣ опущенные изъ центра или средины G діаметра ab на всѣ стороны его перпендикуляры равны между собою; то заключимъ, что и остальныя стороны онаго тетраедра суть касательныя къ данному шару. И С. Д. Н.

Предложеніе II.

Въ данный шаръ вписать и около даннаго шара описать октаедръ.

1) Въ данномъ шарѣ протяни діаметръ AB; раздѣли оный въ C пополамъ; разсѣки шаръ перпендикулярно къ AB проходящею чрезъ C плоскостію; въ произшедшемъ отъ того большемъ кругѣ впиши квадратъ DEFG, и изъ вершинъ угловъ онаго протяни къ A и B прямыя DA, EA, FA, GA, DB, EB, FB и GB; треугольниками ADE, AEF, AFG, AGD, BDE, BEF, BFG и BGD содержимое тѣло будетъ вписанной въ шаръ октаедръ. Ибо, $\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,DC$, и по свойству квадрата DEFG $\overline{DE}^2 = 2\overline{DC}^2$; чего ради $AD = DE$, и по причинѣ что $AD = AE$, треугольникъ ADE есть равносторонний; такъ же докажется, что и остальные треугольники суть равносторонные; слѣд. и проч. Черт. 84.

И почти точно такъ же поступить надлежитъ при составленіи октаедра, когда данъ будетъ одинъ токмо діаметръ шара, который бы оный октаедръ содержать въ себѣ могъ; вся разность состоитъ токмо въ томъ, что здѣсь вмѣсто разсѣченія шара плоскостію перпендикулярно къ діаметру AB, надлежитъ описать на ономъ діаметрѣ AB полкруга и ординатою его CD, проходящею чрезъ центръ C, описать кругъ DEFG, которой бы плоскостію своею былъ перпендикуляренъ къ діаметру AB.

Изъ того и другаго сихъ Геометрическихъ строеній слѣдуетъ, что квадратъ изъ ребра октаедра есть половина квадрата изъ діаметра. Ибо $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, и по причинѣ что $BD = AD$, $2\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$.

Такъ же слѣдуетъ, что октаедръ состоитъ изъ осьми равныхъ пирамидъ, у которыхъ вершины въ центрѣ шара, а основанія стороны или грани октаедра. Ибо сіи пирамиды содержимы суть равномногими, равными, подобными и одинаково разположенными плоскостями.

И посему перпендикуляры опущенные изъ центра шара на стороны или грани октаедра суть всѣ равны между собою. Ибо сіи перпендикуляры суть высоты оныхъ равныхъ пирамидъ.

2) Теперь, что бы около даннаго шара описать октаедръ, опусти изъ центра C на одну изъ сторонъ вписаннаго въ шаръ октаедра перпендикуляръ CH и продолжи оный до пресѣченія въ h съ поверьхностію шара; проведи въ плоскости ACHh къ шару касательную или къ HA параллельную линею ha; продолжи какъ ha, такъ и радіусъ CA, пока въ a взаимно не пресѣкутся, и линеею Ca опиши полкруга adb; я говорю, что по діаметру ab составленный октаедръ будетъ описанный около даннаго шара. Что бы удостовѣриться въ семъ дѣйствительно,

состроимъ самымъ дѣломъ одну грань или сторону его; на сейконецъ отдѣлимъ отъ діаметра ab половину aC; опишемъ оною полкруга adb и ордонатою его dC кругъ перпендикулярный къ діаметру ab; впишемъ въ сей кругъ квадратъ, коего сторона пусть будетъ de, и протянемъ прямую ae; треугольникъ ade по доказанному выше будетъ одна изъ сторонъ октаедра содержимаго шаромъ, котораго діаметръ есть ab; я примѣчаю, что оная сторона есть касательная къ данному шару; ибо, по причинѣ параллельныхъ ad, de съ AD и DE, плоскость ade параллельна ADE, и слѣдственно перпендикулярна къ радіусу Ch, и по причинѣ параллельныхъ ah и AH, конецъ h сего радіуса находится въ оной плоскости ade; но какъ по доказанному выше въ октаедрѣ опущенные изъ центра или средины C діаметра ab на всѣ стороны его перпендикуляры равны между собою; то заключимъ, что и остальныя стороны онаго октаедра суть касательныя къ данному шару. И С. Д. Н.

Предложеніе III.

Въ данной шаръ вписать и около даннаго шара описать икосаедръ.

1) Въ данномъ шарѣ протяни діаметръ AB; возставь на немъ перпендикуляръ AD равный AB; протяни изъ конца D сего перпендикуляра чрезъ центръ C прямую линею; чрезъ точки E и F, въ коихъ оная пресѣкаетъ поверьхность шара, разсѣки шаръ плоскостями перпендикулярно къ діаметру AB; въ произшедшихъ отъ того кругахъ впиши правильные пятиугольники EKLMN и FPQRS, и протяни прямыя линеи, какъ изъ концовъ A и B діаметра AB къ вершинамъ угловъ сихъ пятиугольниковъ, такъ и изъ вершинъ угловъ одного пятиугольника къ вершинамъ угловъ другаго; тре- Черт. 85.

угольниками AEK, AKL, ALM, MLF, LFP, LPK, KPQ, KEQ, QBP, BPF и еще толикими же съ другой стороны содержимое тѣло будетъ вписанный въ шаръ икосаедръ. Ибо, по причинѣ что AB = AD, CG = CH = $\frac{1}{2}$ GE; а сего ради AE есть сторона пятиугольника вписаннаго въ кругѣ, коего радїусъ есть GE; и какъ EK есть сторона пятиугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ, то будетъ AE = EK = KL = LM = MN = NE; по причинѣ же, что дїаметръ AB перпендикуляренъ къ плоскости того круга, будетъ AE = AK = AL = AM = AN; слѣдоват. треугольники AEK, AKL, ALM, AMN, ANE суть всѣ между собою равные равносторонные треугольники; такъ же докажется, что и треугольники BFP, BPQ, BQR, BRS, BSF суть всѣ между собою и перьвымъ равные равносторонные треугольники. Теперь остается то же доказать о прочихъ треугольникахъ; на сей конецъ края T и F дїаметровъ двухъ параллельныхъ круговъ соедини прямою FT; оная будетъ параллельна и равна GH, коя же равна радїусу GE; и какъ GH перпендикулярна къ плоскости круговъ, то FT перпендикуярна къ линеямъ LT и MT; и потому, по причинѣ что LT и MT суть стороны десятиугольника вписаннаго въ кругѣ, коего радїусъ есть GE, прямыя LF и MF суть стороны пятиугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ; и такъ треугольникъ FML есть равносторонный и равный каждому изъ прежнихъ; протяни въ верьхнемъ кругѣ радїусъ GL и вообрази себѣ плоскость проходящую чрезъ GH и GL; оная разсѣчетъ нижнїй кругъ такъ что дуга FU будетъ равна TL; и какъ дуга TL = $\frac{1}{2}$ LTM, коя же = $\frac{1}{2}$ FUP, то будетъ FU = PU; и того ради чрезъ подобное предъидущему разсужденїе найдешь, что треугольникъ FLP есть равносторонной и равный каждому изъ прежнихъ; проведи теперь радїусъ HP въ нижнемъ кругѣ и вообрази себѣ плоскость проходящую чрезъ GH и HP;

оная разсѣчетъ верьхній кругъ такъ что дуга LV будетъ равна PU; и какъ дуга $PU = \frac{1}{2} PUF$, коя же $= \frac{1}{2} LVK$, то будетъ $KV = LV$, и того ради чрезъ подобное предъидущему разсужденіе найдешь, что треугольникъ PKL есть равносторонный и равный каждому изъ прежнихъ; и такъ далѣе. Слѣд. и проч.

И почти точно такъ же поступить надлежитъ при составленіи икосаедра, когда данъ будетъ одинъ токмо діаметръ шара, которой бы оный икосаедръ содержать въ себѣ могъ; вся разность состоитъ токмо въ томъ, что здѣсь вмѣсто разсѣченія шара плоскостями перпендикулярно къ діаметру AB, надлежитъ описать на ономъ діаметрѣ кругъ и ордонатами его GE и HF описать еще два круга, кои бы плоскостями своими были перпендикулярны къ діаметру AB.

Изъ того и другаго сихъ Геометрическихъ строеній слѣдуетъ, что квадратъ изъ радіуса круга, въ коемъ сторона вписаннаго пятиугольника равняется ребру икосаедра, есть пятая часть квадрата изъ діаметра. Ибо, $\overline{ET}^2 + \overline{TF}^2 = \overline{EF}^2$, и по причинѣ что $ET = 2GE$ и $TF = GE$, $5\overline{GE}^2 = \overline{EF}^2$.

Такъ же слѣдуетъ, что икосаедръ состоитъ изъ двадцати равныхъ пирамидъ, у которыхъ вершины въ центрѣ шара, а основанія стороны или грани икосаедра. Ибо сіи пирамиды содержимы суть равномногими, равными, подобными и одинаково разположенными плоскостями.

И по сему перпендикуляры опущенные изъ центра шара на стороны или грани икосаедра суть всѣ равны между собою, ибо сіи перпендикуляры суть высоты оныхъ равныхъ пирамидъ.

Черт. 86.2) Теперь, чтобы около даннаго шара описать икосаедръ, опусти изъ центра C на одну изъ сторонъ вписаннаго въ шаръ икосаедра перпендикуляръ CZ и продолжи оный до пресѣченія въ z съ поверьхностію шара; проведи въ плоскости ACEz къ шару касательную или къ ZA параллельную линею za; продолжи какъ za такъ и діаметръ BA, пока въ a взаимно не пресѣкутся, и линеею Ca опиши кругъ aebf; я говорю, что по діаметру ab составленный икосаедръ будетъ описанный около даннаго шара. Чтобы удостовѣриться въ семъ дѣйствительно, состроимъ самымъ дѣломъ одну грань или сторону его; на сей конецъ возставимъ на діаметрѣ ab перпендикуляръ ad равный діаметру ab; что сдѣлается, когда CD и сей перпендикуляръ ad продолжатся, пока не пресѣкутся; изъ d протянемъ чрезъ центръ C прямую decf; изъ перваго пресѣченія e сей прямой съ окружностію круга aebf опустимъ перпендикуляръ eg; онымъ опишемъ кругъ, перпендикулярный къ діаметру ab; впишемъ въ сей кругъ правильной пятиугольникъ, котораго одна изъ сторонъ пусть будетъ ek, и протянемъ прямую ka; треугольникъ aek по доказанному выше будетъ одна изъ сторонъ икосаедра содержимаго шаромъ, котораго діаметръ есть ab; я примѣчаю, что оная сторона есть касательная къ данному шару; ибо, по причинѣ параллельныхъ ae и ek съ AE и EK, плоскость aek параллельна AEK, и слѣдственно перпендикулярна къ радіусу Cz, и по причинѣ параллельныхъ az и AZ конецъ z сего радіуса находится въ оной плоскости aek: но какъ по доказанному выше въ икосаедрѣ опущенные изъ центра или средины C діаметра ab на всѣ стороны его перпендикуляры равны между собою, то заключимъ, что и остальные стороны онаго икосаедра суть касательныя къ данному шару. И С. Д. Н.

Предложенiе IV.

Въ данномъ шарѣ вписать и около даннаго шара описать гексаедръ или кубъ.

1) Въ данномъ шарѣ протяни дiаметръ AB; возставь на немъ перпендикуляръ AC, равный сторонѣ AE квадрата, вписаннаго въ большемъ кругѣ; протяни изъ конца D сего перпендикуляра чрезъ центръ C прямую линею; чрезъ точки G и H, въ коихъ оная пресѣкаетъ поверьхность шара, разсѣки шаръ плоскостями перпендикулярно къ дiаметру AB; въ произшедшихъ отъ того кругахъ впиши квадраты GKLM и HNPQ, и протяни изъ вершинъ угловъ одного къ вершинамъ угловъ другаго прямыя линеи GP, KN, LH и MQ, кои будутъ между собою равны и параллельны, ибо каждая равна и параллельна RS; я говорю, что плоскостями PK, NL, HM, QG, GKLM и PNHQ содержимое тѣло будетъ вписанный въ шаръ кубъ. Ибо по причинѣ что $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{GR}^2 : \overline{RC}^2$ и что $\overline{AD}^2 = 2\overline{AC}^2$, будетъ $\overline{GR}^2 = 2\overline{RC}^2$, и по причинѣ что $\overline{GM}^2 = 2\overline{GR}^2$, выдетъ $\overline{GM}^2 = 4\overline{RC}^2$; но и $\overline{RS}^2 = 4\overline{RC}^2$, слѣд. $GM = RS$; и какъ GP и MQ равны и параллельны RS, то будетъ GP къ MQ параллельна, и каждая изъ нихъ перпендикулярна къ GM и PQ и каждой изъ сихъ послѣднихъ равна; а такимъ образомъ плоскость PM есть квадратъ; то же и такъ же докажется о прочихъ изъ упомянутыхъ выше плоскостей; слѣд. и проч. Черт. 87.

И почти точно такъ же поступить надлежитъ при составленiи куба, когда данъ будетъ одинъ токмо дiаметръ шара, которой бы оный кубъ содержать въ себѣ могъ; вся разность состоитъ токмо въ томъ, что здѣсь вмѣсто разсѣченія шара плоскостями перпендикулярно къ діаметру AB, надлежитъ описать на ономъ діаметрѣ кругъ и ордонатами его GR и HS еще два круга, кои бы плоскостями своими были перпендикулярны къ діаметру AB.

Изъ того и другаго сихъ Геометрическихъ строеній слѣдуетъ, что квадратъ изъ ребра куба есть третья часть квадрата изъ діаметра шара. Ибо $\overline{GL}^2 + \overline{LH}^2 = \overline{GH}^2$, и по причинѣ что $\overline{GL}^2 = 2\overline{GM}^2$ и $LH = GM$, $3\overline{GM}^2 = \overline{GH}^2$.

Такъ же слѣдуетъ, что кубъ состоитъ изъ шести равныхъ пирамидъ, у которыхъ вершины въ центрѣ шара, а основанія стороны куба. Ибо сіи пирамиды содержимы суть равномногими, равными, подобными и одинаково расположенными плоскостями.

И посему перпендикуляры опущенные изъ центра шара на стороны куба суть всѣ равны между собою. Ибо сіи перпендикуляры суть высоты оныхъ равныхъ пирамидъ.

ь) Теперь чтобы около даннаго шара описать кубъ, линеею CD опиши кругъ aDbhl; я говорю, что по діаметру ab составленный кубъ будетъ описанный около даннаго шара. Что бы удостовѣриться въ семъ дѣйствительно, состроимъ самымъ дѣломъ одну сторону его; на сей конецъ на діаметрѣ ab возставимъ перпендикуляръ ad равный сторонѣ ac вписаннаго въ кругъ aDbhl квадрата; что сдѣлается продолженіемъ того перпендикуляра и радіуса CD, пока взаимно не встрѣтятся въ d; изъ пресѣченія D линеи dCh съ окружностію круга aDhl, опустимъ на діаметръ ab перпендикуляръ DA и опишемъ онымъ кругъ перпендикулярный къ діаметру ab;

оный будетъ касательный къ данному шару; впишемъ въ него квадратъ Dklm; оный по доказанному выше будетъ одна изъ сторонъ куба содержимаго шаромъ, коего діаметръ есть линея ab; и такъ одна изъ сторонъ составленнаго по діаметру ab куба есть касательная къ данному шару и изъ центра онаго опущенный на нее перпендикуляръ CA равенъ радіусу его; но какъ по доказанному выше въ кубѣ опущенные изъ центра или средины C діаметра ab на всѣ стороны его перпендикуляры равны между собою; то заключимъ, что и остальныя стороны онаго куба суть касательныя къ данному шару. И. С. Д. Н.

Предложеніе V.

Въ данной шаръ вписать и около даннаго шара описать додекаедръ.

1) Въ данномъ шарѣ впиши кубъ, котораго двѣ взаимно прилежащія стороны пусть будутъ ABCD и BEFC; разсѣки края сихъ сторонъ на поли и протяни прямыя GK, HL, NO, и HM; половины оныхъ NP, PO и HQ разсѣки въ R, S и T въ крайнемъ и среднемъ содержаніи; возставь на сторонахъ куба изъ точекъ R, S и T перпендикуляры RV, SX и TY равные RP, PS и QT, соедини B съ V, V съ X, X съ C, C съ Y, Y съ B прямыми BV, VX, XC, CY, YB; я говорю что оныя составляютъ правильной пятиугольникъ, которой есть одна изъ сторонъ вписаннаго въ шаръ додекаедра. Ибо, по свойству линеи раздѣленной въ среднемъ и крайнемъ содержаніи $\overline{PN}^2 + \overline{NR}^2 = 3\overline{RP}^2$; и какъ $PN = BN$ и $RP = RV$, то будетъ $\overline{BN}^2 + \overline{NR}^2 = 3\overline{RV}^2$, и протянувъ BR, выдетъ Черт. 88.

$\overline{BR}^2 = 3\overline{RV}^2$, $\overline{BR}^2 + \overline{RV}^2 = 4\overline{RV}^2$ и $BV = 2RV$; почему $BV = RS = VX$. Подобнымъ образомъ докажется, что CX, BY и CY равны VX; и такъ всѣ линеи BV, VX, XC, CY и YB равны между собою. Теперь протяни PZ параллельно RV или SX, соедини H съ Z и Y прямыми ZH и HY; то, понеже $HQ : QT = QT : TH$, и $HQ = HP$, $QT = PZ = TY$, будетъ $HP : PZ = TY : TH$; и какъ HP и TY перпендикулярны къ одной плоскости $ABCD$, и линеи PZ и TH находятся въ одной съ ними плоскости, то ZHY есть одна прямая, и находится съ BC и VX, которая параллельна BC, въ одной плоскости; а потому такъ же BY, CY, BV, CX и VX суть всѣ въ той же плоскости; и такъ оныя линеи составляютъ пятиугольникъ равносторонной. Чтобы удостовѣриться, что онъ есть и равноугольной, протяни BS и BX; понеже по причинѣ прибавленной къ NP средней пропорціональной PS, $\overline{NS}^2 + \overline{SP}^2 = 3\overline{NP}^2$; то будетъ $\overline{NS}^2 + \overline{SX}^2 = 3\overline{NB}^2$, $\overline{NS}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{SX}^2 = 4\overline{NB}^2$, $\overline{BS}^2 + \overline{SX}^2 = 4\overline{NB}^2$, $\overline{BX}^2 = 4\overline{NB}^2$ и $BX = 2NB = BC$; чего ради въ треугольникахъ BVX, BYC уголъ BVX будетъ равенъ углу BYC; подобно докажется, что уголъ VXC будетъ равенъ BYC; слѣдовательно пятиугольникъ $BYCXV$ есть правильный. И такъ естьли при каждомъ изъ 12 ребръ куба сдѣлается то же Геометрическое строеніе, что здѣсь при ребрѣ BC; то составится тѣло, двенадцатью правильными пятиугольниками содержимое, и слѣдственно будетъ то, что додекаедромъ называется.

Теперь остается доказать, что вершины угловъ додекаедра, такъ состроеннаго, находятся на поверьхности шара; на сей конецъ да продолжится ZP внутрь куба; она пройдетъ чрезъ центръ шара, оный кубъ содержащаго, и сей центръ отъ P будетъ находиться въ разстоянїи равномъ половинѣ ребра куба; ибо все сїе непосредственно слѣдуетъ изъ предъидущаго предложенїя. И такъ пусть W центръ шара; будетъ $WP = NP$, $WZ = NS$, и по причинѣ что $\overline{NS}^2 + \overline{PS}^2 = 3\overline{NP}^2$, выдетъ $\overline{ZW}^2 + \overline{ZX}^2$ или $\overline{WX}^2 = 3\overline{NP}^2$; откуда слѣдуетъ, что WX есть радїусъ, ибо доказано выше, что квадратъ изъ радїуса шара въ три раза больше квадрата изъ половины ребра куба; и потому точка X находится на поверьхности шара; такъ же докажется, что и точки V и Y находятся на поверьхности шара; точки же B и C по тому находятся на поверьхности шара, что онѣ суть вершины угловъ куба. И такъ все ко вписыванїю додекаедра въ шаръ относящееся сдѣлано и доказано.

И почти точно такъ же поступить надлежитъ при составленїи додекаедра по данному дїаметру или радїусу шара, которой бы оной додекаедръ содержать въ себѣ могъ; вся разность состоитъ токмо въ томъ, что здѣсь вмѣсто вписыванїя въ шаръ куба, надлежитъ по данному радїусу составить кубъ.

Изъ того и другаго сихъ Геометрическихъ строенїй слѣдуетъ, что дїагональ пятиугольника, которой есть сторона додекаедра, равна ребру куба содержимаго тѣмъ же шаромъ.

Такъ же слѣдуетъ, что додекаедръ состоитъ изъ двенадцати равныхъ пирамидъ, у которыхъ вершины въ центрѣ шара, а основанїя стороны додекаедра. Ибо сїи пирамиды содержимы суть равномногими, равными, подобными и одинаково разположенными плоскостями.

И посему перпендикуляры опущенные изъ центра шара на стороны додекаедра суть всѣ равны между собою. Ибо сіи перпендикуляры суть высоты оныхъ равныхъ пирамидъ.

Черт. 89. 2) Теперь, что бы около даннаго шара описать додекаедръ, изъ центра шара W опусти на одну изъ сторонъ вписаннаго въ шаръ додекаедра перпендикуляръ WU и продолжи оный до пресѣченія въ u съ поверьхностію шара; проведи въ плоскости BWU къ шару касательную или къ BU параллельную линею ub и продолжи какъ ее, такъ и радіусъ шара WB пока взаимно не пресѣкутся въ b.; я говорю, что по радіусу Wb составленный додекаедръ будетъ описанный около даннаго шара. Что бы удостовѣриться въ семъ дѣйствительно, состроимъ самымъ дѣломъ одну грань или сторону его; на сей конецъ изъ центра W чрезъ остальные углы V, X, C и Y пятиугольника BVXCY протянемъ прямыя Wv, Wx, Wc и Wy и начиная отъ b проведемъ до пресѣченія съ ними параллельныя линеи bv, vx, xc, cy и yb къ сторонамъ онаго пятиугольника BVXCY; сіи параллельныя будутъ всѣ въ одной плоскости, и составляемой ими пятиугольникъ bvxcy будетъ правильный и касательный къ данному шару; что очевидно и преудобно всякой доказать можетъ; я примѣчаю сверьхъ того, что оный пятиугольникъ есть сторона додекаедра содержимаго шаромъ, коего радіусъ есть линея Wb. Ибо изъ W чрезъ A, D, E и F протяни прямыя WAa, WDd, WEe и WFf, и начиная отъ b проведи до пресѣченія съ ними параллельныя линеи ba, ad, dc, bc, be, ef и cf къ сторонамъ двухъ квадратовъ ABCD и BEFC; ими составятся два квадрата abcd, befc, кои будутъ стороны куба содержимаго шаромъ, котораго радіусъ есть Wb; сіе ясно и удобно всякой доказать можетъ; и такъ остается доказать, что пятиугольникъ bvxcy зависитъ точно отъ такого же строенія, на квадратахъ abcd, befc учиненнаго, каково есть строеніе на квадратахъ ABCD, BEFC произведенное для полученія пятиугольника BVXCY; для сего продолжи WPZ до пресѣченія квадрата befc въ p; точка p будетъ центръ квадрата befc; что удобно всякой доказать можетъ; проведи чрезъ N и R прямыя WNn и WRr до пресѣченія стороны be квадрата befc въ n и плоскости его въ r; и протяни прямыя nrp и rv; первая будетъ одна прямая, потому что есть общее сѣченіе плоскости nWp съ плоскостію befc, и равна половинѣ стороны квадрата befc, какъ NRP равна половинѣ стороны своего квадрата BEFC; что удобно доказать можно; другая же, то есть rv, будетъ параллельна RV, потому что $WB : Wb = WN : Wn = WR : Wr$, и что $WB : Wb = WV : Wv$, и потому перпендикулярна къ плоскости befc, и по причинѣ, что $WR : Wr = RP : rp$ и $WR : Wr = RV : rv$, равна rp; поелику же $NR : RP = nr : rp$, то будетъ $RP : NR + RP = rp : nr + rp$ или $RP : NP = rp : np$; и какъ $NR : RP = RP : NP$, то видетъ $nr : rp = rp : np$; и такъ np въ r раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ содержаніи, и точка v по квадрату befc точно чрезъ то же строеніе опредѣляется, чрезъ какое опредѣлена точка V по квадрату BEFC; то же и такъ же докажется о точкахъ x и y; слѣдовательно по доказанному выше пятиугольникъ bvxcy есть сторона додекаедра, содержимаго тѣмъ же шаромъ, которой содержитъ въ себѣ кубъ, имѣющій сторонами квадраты abcd, befc, и слѣдственно сторона додекаедра содержимаго шаромъ, коего радіусъ есть линея Wb; но какъ по предложенному выше сей пятиугольникъ есть и касательный къ данному шару; то, поелику въ додекаедрѣ опущенные изъ центра W на всѣ стороны перпендикуляры равны между собою, заключимъ изъ сего, что и остальныя стороны онаго додекаедра суть касательныя къ данному шару. И С. Д. Н.

КОНЕЦЪ.

ПОГРѢШНОСТИ.

Напечатано			читай.
Стран	строк.		
43,	23,	изъ C - - - - -	и изъ C
48,	30,	откука - - - - -	оттуда
58,	5,	DF, DG, DH катеты	DF, DG, DH гипотенузы, а EF, EG, EH катеты
69,	18,	числа сторонъ можетъ учиниться - - -	числа сторонъ полумногоугольниковъ, сіи тѣла производящихъ можетъ учиниться
73,	12,	Толщины призьмъ имѣющихъ - - -	Призьмы имѣющія
75,	9,	Оное не индѣ - -	Оное не индѣ сначала
75,	10,	и способъ - - -	вымарай
75,	11,	предѣловъ - - -	вымарай
76,	22,	толщины призьмъ -	Призьмы
76,	23,	имѣющихъ - - -	имѣющія
96,	29,	тѣло - - - - -	то тѣло
143,	7,	двумъ сторонамъ -	двумъ противолежащимъ сторонамъ
166,	25,	17, 25, 32, - -	17, 25, 28, 32,
166,	33,	17, 25, 32, - - -	17, 25, 28, 32,
187,	14,	видно, - - - -	слѣдуетъ,
197,	21,	равны - - - -	равные

Таковыя суть существенныя погрѣшности, кои читатель прежде чтенія сея книги исправить долженъ; прочія же, какъ удобопримѣтныя, онъ можетъ исправить во время чтенія.