МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

В.В. Грушин, Е.А. Мазур, С.Л. Тимошенко

Электростатика. Постоянный ток

Пособие к решению задач

(для студентов вечернего факультета)

Под редакцией В.В. Грушина

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебно-методического пособия

Москва 2011

УДК 537.2(07)
ББК 22.33я7
Э 45

Электростатика. Постоянный ток: Пособие к решению задач (для студентов вечернего факультета) / Под ред. В.В. Грушина. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. 80 с.

Авторы: В.В. Грушин, Е.А. Мазур, С.Л. Тимошенко.

Даны методические рекомендации к решению задач по разделам "Электростатика. Постоянный ток" курса общей физики и примеры решения типовых задач. При этом внимание уделено проблеме поиска решения и обоснованию выбранного способа решения. В каждом разделе приведены теоретические сведения, необходимые для решения рассмотренных задач, примеры решения типовых задач по данной теме и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено студентам при подготовке к семинарским занятиям и контрольным работам.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

ISBN 978-5-7262-1334-7

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2011

Содержание

1. Постоянное электрическое поле в вакууме…….. 4

1.1. Примеры решения задач…… 8

1.2. Задачи для самостоятельного решения…… 12

2. Электрическое поле в диэлектриках……. 19

2.1. Примеры решения задач…… 22

2.2. Задачи для самостоятельного решения…… 27

3. Проводники в электрическом поле……... 31

3.1. Примеры решения задач…… 34

3.2. Задачи для самостоятельного решения…… 37

4. Электроемкость. Энергия электрического поля…….. 41

4.1. Примеры решения задач…… 42

4.2. Задачи для самостоятельного решения…… 47

5. Постоянный ток……... 53

5.1. Примеры решения задач…… 56

5.2. Задачи для самостоятельного решения…… 60

Ответы…….. 70

Список литературы……. 77

1. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В данном издании используется, как правило, система единиц СИ.

Единицей электрического заряда в СИ является кулон (Кл): 1 Кл – 1 А·с.

Любой электрический заряд макроскопического тела Q есть целое кратное элементарного заряда e ($e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл):

$$Q = ne\,;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Закон сохранения заряда

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i = \text{const}\,, \tag{1.1}$$

где (1.1) – алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; k – число зарядов.

В основе электростатики лежит **закон Кулона**, определяющий силу взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся в вакууме

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\,, \tag{1.2}$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1, $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2; коэффициент пропорциональности k в системе СИ $k = 1/4\pi\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Для количественной оценки электрического поля вводится силовая характеристика – напряженность электрического поля.

Напряженность электрического поля по определению

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\,, \tag{1.3}$$

где $\vec{F}$ – сила, с которой действовало бы поле на помещенный в данную точку пробный заряд q.

Напряженность поля неподвижного точечного заряда,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{1.4}$$

Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \,. \qquad (1.5)$$

Потенциал $\varphi(\vec{r})$ – это величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда q в данной точке поля. Потенциал $\varphi(\vec{r})$ численно равен работе A_∞, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом q при удалении его из данной точки на бесконечность, где потенциальная энергия заряда принимается равной нулю:

$$A_\infty = q\varphi(\vec{r}) \,. \qquad (1.6)$$

Разность потенциалов для произвольных точек 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \,, \qquad (1.7)$$

где $d\vec{l}$ – элемент траектории, соединяющей точки 1 и 2.

Для обхода по замкнутому контуру формула (1.7) переходит в соотношение

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \,. \qquad (1.8)$$

Данный интеграл по замкнутому пути называют **циркуляцией вектора** $\vec{E}$. Поэтому выражение (1.8) называют **теоремой о циркуляции вектора** $\vec{E}$.

Связь между напряженностью и потенциалом в дифференциальной форме

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \,, \; \vec{E} = -\nabla \varphi \,. \qquad (1.9)$$

Потенциал поля неподвижного точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \,. \qquad (1.10)$$

Поток Φ вектора $\vec{E}$ сквозь произвольную поверхность S

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} \,. \qquad (1.11)$$

В случае замкнутых поверхностей принято выбирать внешнюю нормаль к поверхности, т.е. брать нормаль $\vec{n}$ наружу области, охватываемой этой поверхностью.

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ (в интегральной форме): поток вектора $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности $q_{\text{внутр}}$, деленной на ε_0,

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внутр}}, \qquad (1.12)$$

где $q_{\text{внутр}} = \int \rho dV$ и интегрирование проводится только по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности S (ρ – плотность заряда внутри поверхности).

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ (в дифференциальной форме):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.13)$$

Потенциал электрического диполя с электрическим моментом $\vec{p} = q\vec{l}$ на больших расстояниях от диполя ($r \gg l$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pr}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}, \qquad (1.14)$$

где θ – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Вектор $\vec{p}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Напряженность поля точечного диполя при $r \gg l$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \qquad (1.15)$$

Энергия диполя W во внешнем электрическом поле и **момент сил** $\vec{N}$, действующих на диполь:

$$W = -\vec{p}\vec{E}, \ \vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]. \qquad (1.16)$$

Сила $\vec{F}$, действующая на диполь,

$$\vec{F} = p\frac{\partial \vec{E}}{\partial l}, \qquad (1.17)$$

где $\frac{\partial \vec{E}}{dl}$ – производная вектора $\vec{E}$ по направлению диполя, задаваемому вектором $\vec{l}$,

$$\frac{\partial E}{\partial l} = \frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial E}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial E}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (1.18)$$

Проекция силы $\vec{F}$ на ось x

$$F_x = p\frac{\partial E_x}{\partial x}\cos\alpha + p\frac{\partial E_x}{\partial y}\cos\beta + p\frac{\partial E_x}{\partial z}\cos\gamma , \qquad (1.19)$$

а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{p}$. Объемная ρ, поверхностная σ и линейная λ плотности зарядов

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \ \sigma = \frac{dq}{dS}, \ \lambda = \frac{dq}{dl} . \qquad (1.20)$$

Устойчивое равновесие зарядов в любом электростатическом поле невозможно (см. теорему Гаусса).

Если заряд распределен по поверхности, то

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma dS}{r^2} . \qquad (1.21)$$

В случае линейного распределения заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r} . \qquad (1.22)$$

Поле бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} . \qquad (1.23)$$

Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей в пространстве между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \qquad (1.24)$$

Вне этой области поле равно нулю.

Поле бесконечного круглого цилиндра, заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд λ.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > a) . \qquad (1.25)$$

Внутри такого цилиндра поля нет.

Поле сферической поверхности радиусом *a*, заряженной равномерно зарядом *q*,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > a). \tag{1.26}$$

Внутри такой сферы поля нет.

Поле равномерно заряженного шара. Если заряд q равномерно распределен по шару радиусом a, то

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^3} r \quad (r \le a); \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \ (r > a). \tag{1.27}$$

1.1. Примеры решения задач

Задача 1. В углах квадрата со стороной a помещены электрические заряды Q_i (рис. 1) . Найти силу, действующую на заряд Q_1 в левом нижнем углу, если $Q = 0{,}1$ мкКл и $a = 5$ см.

Решение. Поместим начало координат в центр квадрата и направим оси, как показано на рис. 1. Запишем радиусы-векторы углов квадрата

$$\vec{r}_1 = 0; \ \vec{r}_2 = a\vec{j}; \ \vec{r}_3 = +a\vec{i} + a\vec{j}; \ \vec{r}_4 = a\vec{i}, \tag{1.28}$$

сила, действующая на заряд Q_1 с учетом принципа суперпозиции равна

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{Q_1 Q_2}{r_{1i}^2}\frac{\vec{r}_{1i}}{r_{1i}}, \tag{1.29}$$

где $\vec{r}_{1i} = \vec{r}_1 - \vec{r}_i$. В результате подстановки получаем

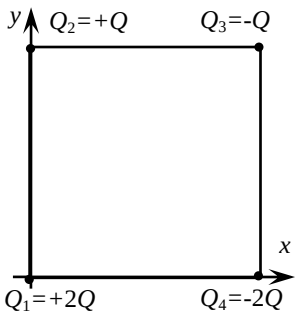


Рис. 1

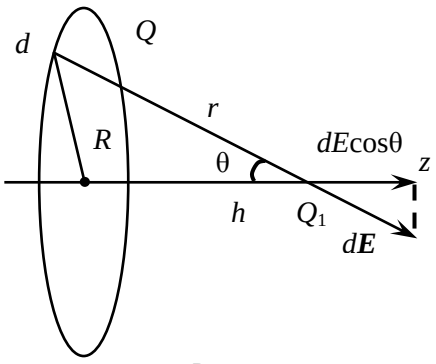


Рис. 2

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}\left\{-\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{j}\right\}. \qquad (1.30)$$

Модуль силы находим по теореме Пифагора

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{21+2\sqrt{2}}\,. \qquad (1.31)$$

Подставив сюда значения Q и a, получим $F \approx 2$ Н.

Задача 2. Кольцо радиусом R несет равномерно распределенный заряд Q. Какова сила взаимодействия кольца с точечным зарядом Q_1, расположенным на оси кольца на расстоянии h от его центра (рис. 2)?

Решение. С учетом равномерного распределения заряд Q на кольце радиусом R, после деления Q на длину окружности, получим линейную плотность заряда на кольце $\lambda = Q/(2\pi R)$. Выделим на кольце малый участок длиной dl. Величина заряда, располагающегося на такой малой длине, равна

$$dQ = \lambda dl = \frac{Q}{2\pi R}dl\,. \qquad (1.32)$$

В силу симметрии задачи при суммировании вкладов в напряженность от всех малых зарядов только z-компонента результирующего поля отлична от нуля

$$dE_z = dE\cos\theta\,, \qquad (1.33)$$

где $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$.

Учитывая (1.32), записывая косинус угла θ и величину r (рис. 2), $\cos\theta = h/r$, $r = \sqrt{R^2+h^2}$, получаем

$$dE_z = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)^{3/2}}\frac{1}{R}\frac{dl}{2\pi}. \qquad (1.34)$$

Интегрируя по dl, находим электрическое поле на оси кольца на расстоянии h от его центра. Искомую силу F определим по формуле $F = Q_1 E$:

$$F = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)^{3/2}}Qh\,. \qquad (1.35)$$

Замечание. При больших расстояниях h до кольца

$$F = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}.$$

Из (1.35) следует, что при $h = 0$ сила взаимодействия равна нулю. Исследуем поведение электрического поля в зависимости от h на наличие экстремумов. Дифференцируя F (1.35) по h и приравнивая производную к нулю, получаем значение $h = R/\sqrt{2}$, где поле максимально. Оно равно в этой точке

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Задача 3. Тонкий стержень длиной $l = 30$ см (рис. 3) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\lambda = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $Q_1 = 10$ нКл, равноудаленный от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

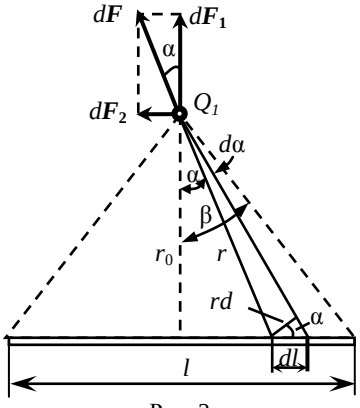


Рис. 3

Решение. Закон Кулона описывает силу взаимодействия точечных зарядов. Один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня. Однако если выделить на стержне малый участок длиной dl, то находящийся на нем заряд $dQ = \lambda dl$ можно рассматривать как точечный, и тогда по закону Кулона величина силы взаимодействия между зарядами Q_1 и dQ:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \lambda dl}{r^2}, \qquad (1.36)$$

где r – расстояние от выделенного элемента до заряда Q_1.

Из чертежа (см. рис. 3) следует, что

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha};\ dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha},$$

где r_0 – расстояние от заряда Q_1 до стержня. Подставив эти выражения r и dl в формулу (1.36), получим:

$$dF = \frac{Q_1\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha . \qquad (1.37)$$

Следует иметь в виду, что $d\vec{F}$ – вектор, поэтому, прежде чем интегрировать, разложим его на две составляющие: $d\vec{F}_1$, перпендикулярную стержню, и $d\vec{F}_2$, параллельную ему.

Из рис. 3 видно, что $dF_1 = dF\cos\alpha$, а $dF_2 = dF\sin\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (1.37) в эти формулы, найдем:

$$dF_1 = \frac{Q_1\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha , \; dF_2 = \frac{Q_1\lambda\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha . \qquad (1.38)$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим:

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{Q_1\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{Q_1\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\alpha d\alpha = \frac{Q_1\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_0} |\sin\alpha|_{-\beta}^{+\beta} ;$$

$$F_1 = \frac{Q_1\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_0} |\sin\beta - \sin(-\beta)| = \frac{Q_1\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_0} 2\sin\beta ;$$

$$F_1 = \frac{Q_1\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta . \qquad (1.39)$$

В силу симметрии расположения заряда Q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения в этих же пределах по углу α дает нуль. Таким образом, сила, действующая на заряд Q_1, по величине равна

$$F = F_1 = \frac{Q_1\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta . \qquad (1.40)$$

и направлена вертикально.

Из рис. 3 следует, что $\sin\beta = \frac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + l^2/4}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$. Подставив это выражение в формулу (1.40), получим

$$F = \frac{Q_1\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} . \qquad (1.41)$$

Численный ответ для F равен

$$F = 0,54 \text{ мН}.$$

Задача 4. Сплошной непроводящий шар радиусом R обладает неким полным зарядом, причем плотность этого заряда распределена в объеме шара по линейному закону $\rho = br$, где r – расстояние до центра шара. Снаружи шара зарядов нет. Найти напряженность электрического поля на расстоянии r от центра шара.

Решение. Выразим сначала заряд шара через параметры b и R. Полный заряд шара находим интегрированием плотности заряда по объему шара V

$$Q = \int_V \rho(r)dV = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr = 4\pi b\int_0^R r^3dr = \pi bR^4 , \qquad (1.42)$$

откуда получаем выражение для связи постоянной b и полного заряда шара

$$b = \frac{Q}{\pi R^4} . \qquad (1.43)$$

Выполнив интегрирование лишь для внутренней части шара радиусом r, найдем заряд $Q(r)$ внутри нее:

$$Q(r) = 4\pi b\int_0^r r^3dr = \pi br^4 = Q\frac{r^4}{R^4} . \qquad (1.44)$$

Напряженность поля внутри шара равна:

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} \quad (r \le R). \qquad (1.45)$$

Напряженность же поля вне шара определяется тем же выражением, что и для точечного заряда:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r \ge R). \qquad (1.46)$$

Замечание. На поверхности шара оба выражения (1.45) и (1.46) для напряженности приводят к одинаковому результату

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} .$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Сопоставить силу электростатического взаимодействия двух электронов с силой их гравитационного взаимодействия.

1.2. Два шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $l = 20$ см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что после установления равновесия нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Найти заряд каждого шарика.

1.3. Два положительных точечных заряда Q и $4Q$ закреплены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд Q_i так, чтобы он находился в равновесии. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?

1.4. Три одинаковых заряда $Q = 1$ нКл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_x нужно поместить в центре треугольника, чтобы его притяжение уравновесило силы взаимного отталкивания зарядов?

1.5. Найти силу, действующую на точечный заряд $q = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл, расположенный в центре полукольца радиусом $r = 5{,}0$ см, со стороны этого полукольца, по которому равномерно распределен заряд $q_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл.

1.6. Положительный точечный заряд $q = 50$ мкКл находится на плоскости XY в точке с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей X и Y. Найти вектор напряженности электрического поля в точке с радиусом-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$. Здесь r_0 и r даны в метрах.

1.7. В вершинах квадрата с диагональю $l = 100$ мм находятся одинаковые по модулю ($q = 2{,}5$ мкКл) точечные заряды, знаки которых при обходе квадрата расположены в порядке “+”, “+”, “–“, “–“. Найти напряженность E электрического поля в точке, отстоящей на расстоянии $x = 50$ мм от центра квадрата и расположенной симметрично относительно его вершин.

1.8. Тонкое полукольцо радиусом $R = 20$ см заряжено равномерно зарядом $q = 0{,}70$ нКл. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

1.9. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a помещаются точечные заряды одинаковой величины q. Найти потенциал φ и модуль напряженности поля E в центре шестиуголь-

ника при условии, что: а) знак всех зарядов одинаков; б) знаки соседних зарядов противоположны.

1.10. По вершинам правильного шестиугольника со сторонами $a = 5 \cdot 10^{-2}$ м расположены равные точечные заряды $q = 7 \cdot 10^{-9}$ Кл. Определить работу электрических сил при перенесении заряда $q_1 = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл из центра шестиугольника в середину одной из сторон. Чему равна эта работа, если заряды равны между собой по абсолютной величине, но соседние заряды противоположны по знаку?

1.11. Тонкий стержень длиной $2a$ равномерно заряжен зарядом q. Определить напряженность электрического поля в точках, лежащих на оси стержня вне его, как функцию расстояния r от центра стержня.

1.12. По тонкому проволочному кольцу радиусом $r = 60{,}0$ мм, находящемуся в вакууме, равномерно распределен заряд $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Приняв ось кольца за ось x, найти потенциал φ и вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ на оси кольца как функцию координаты x (начало координат поместить в центр кольца). Исследовать случаи $x = 0$ и $x \gg r$. Определить максимальное значение модуля напряженности $E_{\max}$ и координаты точек $x_{\max}$, в которых оно наблюдается. Построить примерные графики функций $\varphi(x)$, $E_x(x)$ ($E_x(x)$ – проекция вектора напряженности на ось x). Выяснить, чем для кривой $\varphi(x)$ являются точки $x_{\max}$.

1.13. Находящийся в вакууме очень тонкий прямой стержень длиной $2a$ заряжен с постоянной линейной плотностью λ. Для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его центр, найти модуль напряженности поля E как функцию расстояния r от центра стержня. Исследовать случай $a \to \infty$.

1.14. Находящаяся в вакууме бесконечная тонкая прямая нить заряжена с постоянной линейной плотностью $\lambda = 2{,}0 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти модуль напряженности поля E и потенциал φ как функцию расстояния r от нити. Вычислить E и φ для $r = 10{,}0$ м.

1.15. Даны два длинных коаксиальных цилиндра $R_1 < R_2$, заряженных равными разноименными зарядами. Поверхностная плотность заряда на внутреннем цилиндре равна σ_1. Определить модуль вектора напряженности электрического поля E в зависимости от расстояния *r* до оси цилиндров.

1.16. По сферической поверхности радиусом R равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность электрического поля и потенциал в зависимости от радиуса внутри и вне сферы.

1.17. По находящейся в вакууме круглой очень тонкой пластинке радиусом $r = 120$ мм равномерно распределен заряд $q = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ Кл. Приняв ось пластинки за ось *x*: а) найти потенциал φ и проекцию напряженности поля E_x для точек, лежащих на оси, как функцию *x*, исследовать полученное выражение для $x \ll r$ и $x \gg r$; б) вычислить φ и E_x в точке $x = 80{,}0$ мм.

1.18. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии $a = 10$ см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-7}$ Кл/см. Найти величину и направление напряженности результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $b = 10$ см от каждой нити.

1.19. С какой силой электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на каждый метр заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити $\lambda = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл/см, поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/см^2.

1.20. Дано, что потенциал поля в некоторой области зависит только от координаты x следующим образом: $\varphi \approx ax^2/2 + C$. Какова напряженность поля? При каком распределении заряда получится такое поле?

1.21. С какой силой f на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\lambda = 3{,}0$ мкКл/м, находящиеся в вакууме на расстоянии $b = 20{,}0$ мм друг от друга? Какую работу A на единицу длины нужно совершить, чтобы сблизить эти нити до расстояния $a = 10{,}0$ мм?

1.22. Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q. На единицу длины нити приходится заряд λ. Найти силу взаимодействия кольца и нити.

1.23. Тонкое кольцо радиусом $R = 25$ см имеет заряд $q = 5,0$ мкКл, неравномерно распределенный по кольцу. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда $q' = 1,0$ мкКл из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии $a = 50$ см от его центра.

1.24. Найти потенциал φ и напряженность поля E в центре полусферы радиусом R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ. Положить $\varepsilon = 1$.

1.25. Заряд $q = 2,0 \cdot 10$ Кл распределен равномерно по объему шара радиусом $R = 40,0$ мм. Найти потенциал: а) в центре шара φ_0; б) внутри шара как функцию расстояния r от его центра. Диэлектрическая проницаемость внутри и вне шара равна единице.

1.26. Начертить (примерно) графики, показывающие, как меняется напряженность поля и потенциал в зависимости от расстояния в следующих случаях: а) поле двух плоскостей, заряженных равными разноименными зарядами (плоский конденсатор); б) поле двух сферических поверхностей, заряженных равными разноименными зарядами (сферический конденсатор). Внутренняя сфера заряжена положительно.

1.27. Разность потенциалов между длинными коаксиальными цилиндрами радиусами R_1 и R_2, заряженными равными разноименными зарядами, равна U. Определить: а) заряд на единицу длины цилиндров; б) поверхностную плотность зарядов на каждом цилиндре; в) напряженность поля между цилиндрами в зависимости от радиуса.

1.28. Имеются два тонких проволочных кольца радиусом R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны Q и $-Q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстояние a, если $R = 30$ см, $a = 52$ см и $Q = 0,40$ мкКл.

1.29. Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0,40$ мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1, в $n = 2,0$ раза.

1.30. Металлический шар радиусом $R_1 = 2$ см окружен сферической металлической оболочкой радиусом $R_2 = 4$ см, концентрической с шаром. На шаре находится заряд $q_1 = +2 \cdot 10^{-8}$ Кл, на оболочке – заряд $q_2 = -4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определить напряженность электрического поля на расстоянии: а) $r_1 = 3$ см; б) $r_2 = 5$ см от центра шара.

1.31. Тонкое непроводящее кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, где λ_0 – постоянная; φ – азимутальный угол. Найти модуль напряженности электрического поля: а) в центре кольца; б) на оси кольца в зависимости от расстояния x до его центра. Исследовать полученное выражение при $x \gg R$.

1.32. Пространство между двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстояние *2d*, заполнено зарядом, объемная плотность которого зависит только от координаты x оси, перпендикулярной этим плоскостям, как $\rho = ax$, где a – постоянная. Начало координат ($x = 0$) находится посередине между этими плоскостями. Найти зависимость от x $E_x(x)$ и $E(x)$. Изобразить примерные графики этих зависимостей.

1.33. Две длинные параллельные нити равномерно заряжены, каждая с линейной плотностью $\lambda = 0,50$ мкКл/м. Расстояние между нитями $a = 45$ см. Найти максимальное значение напряженности электрического поля в плоскости симметрии этой системы.

1.34. Имеется аксиально-симметричное электрическое поле, напряженность которого зависит от расстояния r до его оси как $E = ar/r^2$, где a – постоянная. Найти заряд внутри сферы радиусом R с центром на оси этого поля.

1.35. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра как $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где ρ_0 – постоянная. Пренебрегая влиянием вещества шара, найти: а) модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию r; б) максимальное значение модуля напряженности $E_{\max}$ и соответствующее ему значение r.

1.36. Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ, имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара. Вектор $\vec{a}$ – вектор, соединяющий центр шара с центром полости. Найти напряженность $\vec{E}$ поля внутри полости.

1.37. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = \vec{a}\vec{r}$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля.

1.38. Два коаксиальных кольца радиусом R из тонкой проволоки находятся на малом расстоянии l друг от друга ($l \ll R$) и имеют заряды q и $-q$. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси системы как функции координаты x (рис. 4). Изобразить примерные графики этих зависимостей. Исследовать эти функции при $x \gg R$.

1.39. Какую работу против сил электрического поля надо совершить, чтобы перенести диполь с электрическим моментом $\vec{p}$ из положения 1, где напряженность поля равна E_1, в положение 2 с напряженностью E_2 (рис. 5).

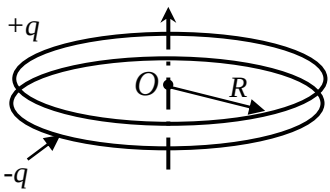


Рис. 4

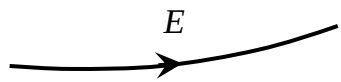


Рис. 5

1.40. Диполь с электрическим моментом $\vec{p}$ находится на расстоянии r от длинной прямой нити, заряженной равномерно с линейной плотностью λ. Найти силу $\vec{F}$, действующую на диполь, если вектор $\vec{p}$ ориентирован: а) вдоль нити; б) по радиусу-вектору $\vec{r}$; в) перпендикулярно нити и радиусу-вектору $\vec{r}$.

1.41. Найти потенциал следующих электрических полей:

а) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$;

б) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$;

в) $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$.

Здесь a и b – постоянные, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты осей X, Y, Z.

1.42. Определить вектор напряженности электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону: а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$, где a – постоянная. Изобразить примерный вид этих полей с помощью линий вектора $\vec{E}$ (в плоскости x, y).

1.43. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра как $\varphi = ar^2 + b$, где a и b – постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Всякая молекула представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю, и часто может быть признана эквивалентной диполю. Под действием внешнего электрического поля происходит поляризация диэлектрика. На его поверхности, а в случае неоднородного диэлектрика также и в его объеме, появляются **нескомпенсированные заряды**.

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}}{\Delta V}, \qquad (2.1)$$

где в числителе – сумма дипольных моментов, заключенных в объеме ΔV молекул; $\vec{p}$ – дипольный момент отдельных молекул, заключенных в этом объеме. У изотропных диэлектриков поляризованность связана с напряженностью поля в той же точке

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (2.2)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика. Единицей поляризованности является Кл/м^2. Всегда $\chi > 0$, χ – безразмерная величина.

Макрополе в диэлектрике $\vec{E}$ является суперпозицией поля $\vec{E}_0$ сторонних зарядов и поля $\vec{E}'$ связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (2.3)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$ (в интегральной форме): поток вектора $\vec{P}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью S, т.е.

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}} \ . \qquad (2.4)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$ (в дифференциальной форме): дивергенция поля вектора $\vec{P}$ равна с обратным знаком объемной плотности избыточного связанного заряда в той же точке

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho' \ . \qquad (2.5)$$

На границе раздела диэлектриков, где появляется поверхностная плотность связанных зарядов σ', нормальная составляющая вектора $\vec{P}$ испытывает разрыв, величина которого зависит от σ' (рис. 6)

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \ . \qquad (2.6)$$

В частности, если среда 2 – вакуум, то $P_{2n} = 0$, и условие (2.6) приобретает более простой вид

$$\sigma' = P_n = \chi \varepsilon_0 E_n \ , \qquad (2.7)$$

где P_n – проекция вектора P на внешнюю нормаль к поверхности данного диэлектрика.

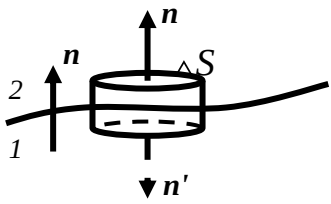


Рис. 6

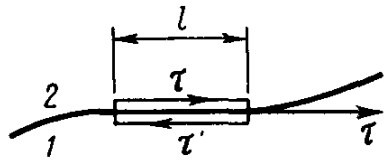


Рис. 7

Вектор $\vec{D}$, иногда определяемый как вектор **электрического смещения** (вектор электрической индукции), определяется как

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \ . \qquad (2.8)$$

Безразмерную величину $\varepsilon = 1 + \chi$ называют относительной диэлектрической проницаемостью или просто **диэлектрической**

проницаемостью среды. Таким образом, определение вектора D можно переписать в виде

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} . \qquad (2.9)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$ (в интегральной форме): поток вектора $\vec{D}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью,

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр}} . \qquad (2.10)$$

Единицей $\vec{D}$ служит Кл/м^2.

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$ (в дифференциальной форме):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho , \qquad (2.11)$$

т.е. дивергенция поля вектора $\vec{D}$ равна объемной плотности стороннего заряда в той же точке.

На границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков (в общем случае на такой границе может находиться поверхностный сторонний заряд σ) поля E и D подчиняются следующим граничным условиям:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} , \qquad (2.12)$$

т.е. тангенциальная составляющая $\vec{E}$ оказывается одинаковой по обе стороны границы раздела (рис. 7). Нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ в случае наличия зарядов на границе претерпевает скачок при переходе границы раздела

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma . \qquad (2.13)$$

Условия для составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков означают, что линии этих векторов испытывают на этой границе излом, преломляются. Закон преломления линий $\vec{E}$ и $\vec{D}$ (рис. 8)

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} . \qquad (2.14)$$

В диэлектрике с большим значением ε линии $\vec{E}$ и $\vec{D}$ будут составлять больший угол с нормалью к границе раздела. Линии вектора $\vec{E}$ испытывают преломление и, кроме того, терпят разрыв

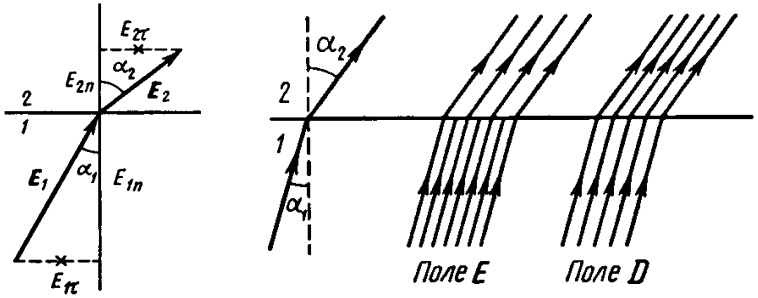


Рис. 8

из-за наличия связанных зарядов, линии же вектора $\vec{D}$ испытывают только преломление, без разрыва, поскольку, по предположению, сторонних зарядов на границе раздела нет.

На границе раздела проводник-диэлектрик

$$D_n = \sigma, \tag{2.15}$$

где $\vec{n}$ – внешняя по отношению к проводнику нормаль.

2.1. Примеры решения задач

Задача 5. Даны две бесконечные параллельные разноименно заряженные плоскости. Пусть создаваемое ими в вакууме поле создается разноименно заряженными пластинами с плотностью заряда σ. В поле пластин находится вставка из однородного изотропного диэлектрика, расположенная так, как показано на рис. 9. Найти плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика.

Решение. Под действием поля диэлектрик поляризуется, и на его поверхностях появятся связанные заряды плотности σ'. Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле, величина напряженности которого равна $E' = \sigma'/\varepsilon_0$. Вне диэлектрика в данном случае $E' = 0$. Величина напряженности поля E_0 равна σ/ε_0.

Оба поля направлены навстречу друг другу, следовательно, внутри диэлектрика величина напряженности поля E равна

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma'). \tag{2.16}$$

Вне диэлектрика $E = E_0$.

Поляризация диэлектрика обусловлена полем $\vec{E}$. В рассматриваемой задаче это поле перпендикулярно поверхностям пластины. Поэтому $E_n = E$ и $\sigma' = \chi\varepsilon_0 E$. Подставив это значение в формулу (2.16), получим

$$E = E_0 - \chi E\,,\ E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \qquad (2.17)$$

Итак, в рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость ε показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Умножив (2.17) на $\varepsilon\varepsilon_0$, получим модуль вектора D внутри пластины

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E. \qquad (2.18)$$

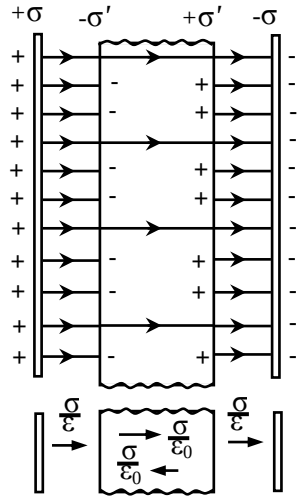


Рис.9

Таким образом, модуль вектора D внутри пластины совпадает с модулем вектора D внешнего поля D_0. Заменив в (2.18) E_0 через σ/ε_0, получим, что

$$D = \sigma. \qquad (2.19)$$

Чтобы найти σ', выразим в (2.17) E и E_0 через плотности зарядов:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma. \qquad (2.20)$$

Рисунок выполнен в предположении, что $\varepsilon = 3$. В соответствии с этим густота линий E в диэлектрике в три раза меньше, чем вне пластины. Линии проведены на одинаковых расстояниях друг от друга. Полученный результат имеет качественное объяснение. Действительно, если напряженность поля внутри пластины в три раза меньше, чем вне ее, то из трех линий напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на сторонних зарядах, две должны заканчиваться (соответственно, начинаться) на связанных зарядах. Отсюда вытекает, что плотность связанных зарядов должна быть равна 2/3 плотности сторонних зарядов.

Задача 6. Бесконечная плоская пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε равномерно заряжена с однородной плотностью ρ. Толщина пластины $2a$. Диэлектрическая проницаемость вне пластины равна 1. Направить координатную ось x перпендикулярно к пластине; начало координат поместить в середине пластины. Найти потенциал φ и $E_x(x)$ (проекцию напряженности поля на ось x) как функцию x (потенциал в середине пластины положить равным нулю). Построить графики φ и $E_x(x)$ в зависимости от x.

Решение. Пластина – бесконечная, следовательно, поле обладает плоской симметрией. Электрическая индукция поля может быть найдена по теореме Гаусса для вектора $\vec{D}$. Для этого следует выбрать вспомогательную замкнутую поверхность в форме цилиндра, основания которого параллельны пластине (рис. 10). Для поверхности S, отвечающей $|x \le a|$, запишем

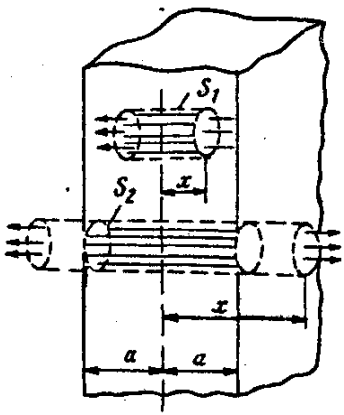


Рис. 10

$$\oint_{S_1} D_n dS = \rho \Delta S 2x, \qquad (2.21)$$

где ΔS – площадь основания цилиндра; $\rho = dq/dV$ – объемная плотность заряда. Интеграл по поверхности сведется к интегралу по двум основаниям, так как поток вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность цилиндра равен нулю. На основаниях цилиндра D_n постоянна, следовательно,

$$\oint_{S_1} D_n dS = D_n \oint_{S_1} dS = D_n 2\Delta S = 2\rho \Delta S x. \qquad (2.22)$$

Окончательно получаем, учитывая, что $D_n = D_x$,

$$D_x = \rho x. \qquad (2.23)$$

Используя (2.9), найдем проекцию напряженности

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon \varepsilon_0}. \qquad (2.24)$$

Для выбранной замкнутой поверхности с торцами вне пластины аналогичные рассуждения приведут к результату при $|x| \geq a$

$$D_x = \rho a \frac{x}{|x|}, \; E_x = \frac{\rho a}{\varepsilon_0} \frac{x}{|x|}. \qquad (2.25)$$

Как видим, на границе пластины вектор электрического смещения не терпит разрыва, а вектор напряженности испытывает скачок

$$|\Delta E_x| = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (2.26)$$

Потенциал φ можно найти из уравнения:

$$\varphi(0) - \varphi(x) = \int_0^x E_x dx. \qquad (2.27)$$

Полагая, что при $x = 0$ $\varphi = 0$, получаем:

$$\varphi(x) = \int_x^0 E_x dx. \qquad (2.28)$$

Внутри слоя при $|x| < a$

$$\varphi(x) = \int_x^0 \frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2.29)$$

Вне слоя с диэлектриком при $|x| > a$ область интегрирования следует разбить на две, в соответствии с различным аналитическим поведением напряженности в этих областях.

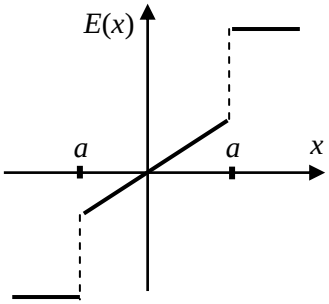
$$\varphi(x) = \int_x^0 E_x dx = \int_a^0 \frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0} dx + \int_{|x|}^a \frac{\rho a}{\varepsilon_0} dx. \qquad (2.30)$$

Отсюда

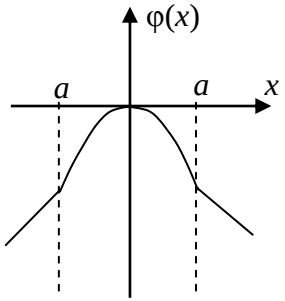
$$\varphi(x) = -\left[\frac{\rho a^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\rho a(|x| - a)}{\varepsilon_0}\right]. \qquad (2.31)$$

График $E(x)$ дан на рис.11, *а*, а график $\varphi(x)$ – на рис. 11, *б*.

Задача 7. Две пластины, площадь которых равна *S*, находятся в жидком диэлектрике на малом расстоянии *d* друг от друга. С какой силой *F* они взаимодействуют, если они заряжены до разности потенциалов *U*? Диэлектрическая проницаемость ε известна.



а



б

Рис. 11

Решение. Искомая сила может быть выражена как $F = Q_2 E_1$, где Q_2 – заряд одной пластины, например 2; E_1 – напряженность поля, создаваемого пластиной 1.

При условии малости *d* и достаточной протяженности пластин с некоторым приближением можно пользоваться формулами для поля бесконечных пластин, и напряженность поля может быть найдена по теореме Гаусса для вектора $\vec{D}$. Для этого следует выбрать вспомогательную замкнутую поверхность в виде цилиндра, основания которого параллельны пластине 1 (рис. 12).

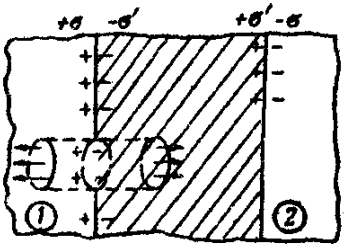


Рис. 12

Поток вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность цилиндра равен нулю, поскольку линии вектора $\vec{D}$ не пересекают боковую поверхность, а через торцы цилиндра $D_1 2\Delta S = \sigma_1 \Delta S$, где $\sigma_1 = Q/S$ – поверхностная плотность заряда. Отсюда

$$D_1 = \frac{\sigma_1}{2}, \quad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}. \qquad (2.32)$$

Напряженность поля, созданного двумя пластинами, $E = 2E_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \dfrac{U}{d}$. Отсюда получаем

$$Q_2 = Q_1 = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (2.33)$$

А для силы взаимодействия пластин $F = Q_2 E_1$ записываем

$$F = \frac{U^2 \varepsilon\varepsilon_0 S}{2d^2}. \qquad (2.34)$$

2.2. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Две пластинки, площадь которых равна $S = 2\,\text{см}^2$, находятся в керосине на расстоянии $d = 4\,\text{см}$ друг от друга. С какой силой они взаимодействуют, если они заряжены до разности потенциалов $U = 150\,\text{В}$ ($\varepsilon = 2$)?

2.2. Пространство между пластинами конденсатора заполнено маслом ($\varepsilon = 5$). Расстояние между пластинами $a = 1\,\text{см}$. Какую разность потенциалов надо подать на пластины этого конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на масле была $\sigma' = 6 \cdot 10^{-10}\,\text{Кл/см}^2$.

2.3. Определить плотность связанных зарядов на поверхностях слюдяной ($\varepsilon = 7$) пластинки толщиной $d = 100\,\text{мкм}$, которая служит изолятором в плоском конденсаторе, заряженном до разности потенциалов $U = 400\,\text{В}$.

2.4. В плоском воздушном конденсаторе, заряженном до некоторой разности потенциалов, пластины притягиваются с силой F_0. Во сколько раз изменится сила притяжения пластин, если конденсатор опустить в керосин, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 2$? Рассмотреть два случая: а) конденсатор отключен от батареи до опускания в керосин; б) конденсатор остается все время подключенным к батарее.

2.5. Две плоские пластины площадью $S = 200\,\text{см}^2$, заряженные равными зарядами, притягиваются, находясь в керосине, с силой $F = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{Н}$. Расстояние между пластинами столь мало, что можно рассматривать их как бесконечные плоскости. Определить: а) находящиеся на пластинах заряды q; б) индукцию поля в керосине *D*.

2.6. Стеклянная пластинка внесена в однородное электрическое поле напряженностью $E_1 = 10{,}0\,\text{В/м}$ и расположена так, что угол между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен $\alpha_1 = 30°$. Найти напряженность поля E_2 в пластинке, угол α_2,

который это поле образует с нормалью к пластинке, а также плотность σ' связанных зарядов, возникших на поверхностях пластинки. Диэлектрическую проницаемость среды вне пластинки ε_1 положить равной единице.

2.7. Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом. В этом случае напряженность поля в зазоре равна E, а электрическое смещение D. Затем половина зазора заполняется так, как показано на рис. 13, однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти возникающие после этого значения напряженности поля E_1 и электрического смещения D_1 в части зазора 1 и E_2 и D_2 в части зазора 2. Рассмотреть два случая: а) остается постоянным напряжение между обкладками; б) остаются неизменными заряды на обкладках. Изобразить примерный ход линий E и D в зазоре.

2.8. Решить задачу, аналогичную предыдущей, с тем отличием, что диэлектриком заполняется половина зазора так, как показано на рис. 14.

Рис. 13

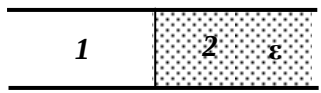


Рис. 14

2.9. Конденсатор, состоящий из пластин, разделенных воздушным промежутком, заряжен и помещен в сосуд. Затем в сосуд наливают керосин. Как меняются при этом напряженность E и электрическое смещение D в следующих случаях: а) конденсатор отсоединен от источника; б) конденсатор подключен к источнику?

2.10. Показать, что на границе однородного диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, где ε – диэлектрическая проницаемость; σ – поверхностная плотность зарядов на проводнике.

2.11. В некоторой точке A внутри однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5$ плотность стороннего заряда $\rho = 50$ мКл/м^3. Найти в этой точке плотность связанных зарядов.

2.12. Однородный диэлектрик имеет вид сферического слоя радиусами a и b, причем $a < b$. Изобразить примерные графики мо-

дуля напряженности электрического поля E и потенциала φ как функций расстояния r от центра системы, если диэлектрик имеет положительный сторонний заряд, распределенный равномерно: а) по внутренней поверхности слоя; б) по объему слоя.

2.13. Вблизи точки A (рис. 15) границы раздела стекло-вакуум напряженность электрического поля в вакууме $E_0 = 10{,}0$ В/м, причем угол между вектором $\vec{E}_0$ и нормалью $\vec{n}$ к границе раздела $\alpha_0 = 30°$. Найти напряженность E поля в стекле вблизи точки A, угол α между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$, а также поверхностную плотность связанных зарядов в точке A.

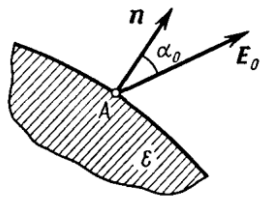


Рис. 15

2.14. Диэлектрик с проницаемостью ε граничит с вакуумом. На его поверхности имеются сторонние заряды с плотностью σ. У поверхности диэлектрика в вакууме напряженность электрического поля равна E, причем вектор $\vec{E}$ составляет такой угол θ с нормалью к поверхности раздела, что линии вектора $\vec{E}$ не терпят излома при переходе границы раздела. Найти угол θ. Каков должен быть знак σ?

2.15. У плоской поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью ε напряженность электрического поля в вакууме равна E_0, причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол θ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 16). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти: а) поток вектора $\vec{E}$ через сферу радиусом R с центром на поверхности диэлектрика; б) циркуляцию вектора $\vec{D}$ по контуру Г длины l (см. рис. 16), плоскость которого перпендикулярна поверхности диэлектрика и параллельна вектору $\vec{E}_0$.

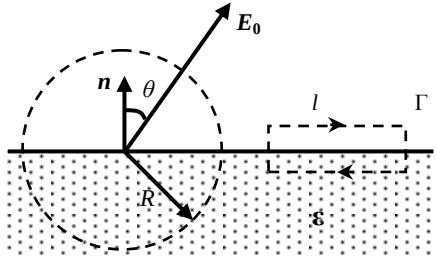


Рис.16

2.16. Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью ρ. Толщина пластины *2d*. Найти: а) модуль напряженности электрического поля и потенциал как функции расстояния *l* от середины пластины (потенциал в середине пластины $\varphi = 0$); взяв ось *X* перпендикулярно пластине, изобразить примерные графики зависимостей проекции $E(x)$ и потенциала $\varphi(x)$; б) поверхностную и объемную плотности связанного заряда.

2.17. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару радиусом *R* из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти: а) модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния *r* от центра шара; изобразить примерные графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$; б) объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

2.18. Точечный заряд *q* находится в вакууме на расстоянии *l* от плоской поверхности однородного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика ε. Найти: а) поверхностную плотность связанных зарядов как функцию расстояния *r* от точечного заряда *q*; б) суммарный заряд на поверхности диэлектрика.

2.19. Точечный заряд *q* находится на плоскости, отделяющей вакуум от безграничного однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти модули векторов *D* и *E* и потенциал φ как функции расстояния *r* от заряда *q*.

2.20. Эбонитовый сплошной шар радиусом $R = 5$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность *E* и смещение *D* электрического поля в точках: а) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы; б) на поверхности сферы; в) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра сферы. Построить график зависимости $E(r)$ и $D(r)$.

2.21. Длинный парафиновый цилиндр радиусом $R = 2$ см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность *E* и смещение *D* электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстоянии: а) $r_1 = 1$ см; б) $r_2 = 3$ см. Обе точки равноудалены от концов цилиндра. Построить график зависимости $E(r)$ и $D(r)$.

2.22. Небольшой проводящий шарик, имеющий заряд q, находится в однородном изотропном диэлектрике с проницаемостью ε на расстоянии l от безграничной плоскости, отделяющей диэлектрик от вакуума. Найти поверхностную плотность связанных зарядов на границе диэлектрик-вакуум как функцию расстояния r от шарика. Исследовать полученный результат при $l \to 0$.

2.23. Сплошной парафиновый шар радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м^3. Определить потенциал φ электрического поля в центре шара и на его поверхности, считая потенциал на бесконечности равным нулю.

2.24. Длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован так, что вектор $\vec{P} = \alpha\vec{r}$, где α – положительная постоянная; $\vec{r}$ – вектор длины r, выходящий из оси цилиндра перпендикулярно этой оси. Найти объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию расстояния r от оси.

2.25. Диэлектрический шар поляризован однородно и статически. Его поляризованность равна $\vec{P}$. Имея в виду, что так поляризованный шар можно представить как результат малого сдвига всех положительных зарядов диэлектрика относительно всех отрицательных зарядов: а) найти напряженность $\vec{E}$ поля внутри шара; б) показать, что поле вне шара является полем диполя и потенциал поля $\varphi = \vec{p}_0\vec{r}/4\pi\varepsilon_0 r^3$, где $\vec{p}_0$ – электрический момент шара; $\vec{r}$ – расстояние от его центра.

3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Носители заряда внутри однородного проводника способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому напряженность поля внутри такого проводника в случае равновесного распределения зарядов равна нулю:

$$\vec{E} = 0. \qquad (3.1)$$

Таким образом, потенциал внутри однородного проводника постоянен $\varphi = \text{const}$.

Напряженность поля на поверхности однородного проводника в каждой точке направлена по нормали к поверхности:

$$\vec{E} = \vec{E}_n. \qquad (3.2)$$

Это означает, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника является эквипотенциальной. Величина напряженности поля вблизи поверхности такого проводника равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3.3}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник; σ – поверхностная плотность заряда на проводнике. В случае, когда заряженный участок поверхности граничит с вакуумом, а поле у поверхности проводника равно $\vec{E}$, сила, действующая на единицу поверхности проводника, равна:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\sigma\vec{E}. \tag{3.4}$$

Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля (электростатическая защита или экранировка). Замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении не зависящие друг от друга.

Общая задача электростатики: задача нахождения потенциала φ как функции пространственных координат. Если диэлектрик однороден (ε не зависит от координат), то

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{3.5}$$

где ρ – объемная плотность свободных зарядов; Δ – оператор Лапласа или лапласиан,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.6}$$

Равенство (3.5) называется **уравнением Пуассона**. При отсутствии сторонних зарядов ($\rho = 0$) оно переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{3.7}$$

Общая электростатическая задача сводится к нахождению решения дифференциального уравнения (3.5), если известны: либо потенциалы всех проводников (иногда математически это выражается в виде граничных условий к дифференциальному уравнению (3.5)), либо заряды всех проводников, либо заряды некоторых проводников и потенциалы всех остальных проводников. Можно пока-

зать, что такая задача не может иметь более одного решения (теорема единственности). Нахождение самого решения – задача очень сложная. Аналитические решения известны лишь для немногих частных случаев. Однако, если удалось угадать функцию φ, удовлетворяющую всем условиям задачи, то можно утверждать, что она и будет искомым (единственным) решением задачи. В этом и состоит значение теоремы единственности.

Метод электрических изображений заключается в подборе фиктивных (реально не присутствующих) электрических зарядов, которые только в нужной нам области пространства создают электрическое поле, совпадающее с реальным полем задачи. Правильность такого подбора обычно обеспечивается созданием правильных граничных условий полем фиктивных зарядов и применением теоремы единственности. Такие фиктивные заряды называются зарядами изображения. Метод изображений основан, таким образом, на нахождении такой конфигурации зарядов, реально отсутствующей, у которой конфигурация поля в интересующей нас части пространства была бы совпадающей с истинным полем задачи.

3.1. Примеры решения задач

Задача 8. Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра O незаряженного сферического проводящего слоя, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно a и b. Найти потенциал в точке O, если $r < a$. Изменится ли поле вне оболочки, если проводник перемещать внутри оболочки?

Решение. Заряд $+q$, находящийся внутри металлической оболочки, создаст поле, под действием которого на обеих поверхностях оболочки индуцируется заряд той же величины, в чем легко убедиться, воспользовавшись теоремой Гаусса.

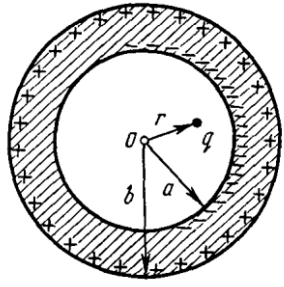


Рис. 17

Вспомогательную поверхность следует выбрать так, чтобы она лежала внутри металла, где $E = 0$. Если заряд q – положительный, то на внутренней поверхности оболочки, например сфере, (рис. 17) индуцируется отрицательный заряд, распределение плотности

которого зависит от положения заряда q внутри оболочки. На внешней поверхности положительный индуцированный заряд распределится равномерно по сфере (внутри металла поле отсутствует). Следовательно, поле вне оболочки не зависит от положения заряда q. Его напряженность может быть определена по теореме Гаусса, для этого вспомогательную замкнутую поверхность следует выбрать с радиусом большим радиуса внешней сферы. Согласно принципу суперпозиции искомый потенциал в точке O можно представить как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \oint\frac{\sigma_- dS}{a} + \oint\frac{\sigma_+ dS}{b}\right), \qquad (3.8)$$

где первый интеграл берется по всем индуцированным зарядам на внутренней поверхности слоя, а второй интеграл – по всем зарядам на внешней поверхности слоя. Из этого выражения следует:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \qquad (3.9)$$

Заметим, что таким способом потенциал в полости можно найти только в точке O, поскольку только от этой точки все индуцированные заряды одного знака находятся на одинаковом расстоянии и их распределение (нам не известное) не играет роли.

Задача 9. Система состоит из двух концентрических проводящих сфер, причем на внутренней сфере радиусом R_1 находится заряд q_1. Какой заряд q_2 следует поместить на внешнюю сферу радиусом R_2, чтобы потенциал внутренней сферы стал равным нулю? Как будет зависеть при этом потенциал φ от расстояния r до центра системы? Изобразить примерный график этой зависимости, если $q_1 < 0$.

Решение. Запишем выражения для потенциала при $r > R_2$ и при $R_1 < r < R_2$, т.е.

$$\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{r}, \quad \varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} + \varphi_0. \qquad (3.10)$$

где φ_0 – некоторая постоянная. Ее значение находится из условия непрерывности потенциала на границе этих областей:

$$\varphi_0 = q_2 / 4\pi\varepsilon_0 R_2. \qquad (3.11)$$

Из условия равенства нулю φ_1 при $r = R_1$ находим

$$q_2 = -q_1 R_2 / R_1 . \qquad (3.12)$$

С учетом найденного значения q_2 поведение потенциалов $\varphi(r)$ в двух областях приобретает окончательный вид, изображенный на рис. 18 и описываемый формулами

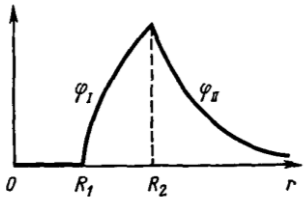


Рис. 18

$$\varphi_{II} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1 - R_2/R_1}{r}, \quad R_1 \le r \le R_2,$$

$$\varphi_I = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right), \qquad r > R_2 .$$

Задача 10. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии a от заземленной плоской металлической стенки. Найти силу f, с которой взаимодействуют заряд и стенка. Найти также работу, которую совершит электрическая сила, действующая на заряд, при его очень медленном удалении на очень большое расстояние от плоскости.

Решение. В поле точечного заряда на металлической стенке индуцируется заряд той же величины, но противоположного знака. Из условия равновесия зарядов на проводнике следует, что поле внутри металла, являясь суперпозицией поля заряда и поля индуцированных на стенке зарядов, равно нулю (рис. 19).

Заземление пластинки означает, что пришедшие из земли отрицательные заряды скомпенсировали положительный заряд, возникающий при перераспределении зарядов в металле, находящемся в поле положительного точечного заряда. Потенциал заземленной стенки равен нулю. Поле справа не изменится, если индуцированный заряд, распределенный по стенке, заменить точечным фиктивным зарядом $-q$, расположенным на расстоянии a симметрично заряду $+q$. Потенциал каждой точки поверхности в этом случае

$$\varphi = \frac{q}{a} + \left(-\frac{q}{a}\right) = 0 . \qquad (3.13)$$

По этому методу сила взаимодействия заряда и стенки может быть определена как сила взаимодействия двух точечных зарядов: действительного и фиктивного (метод изображений), т.е.

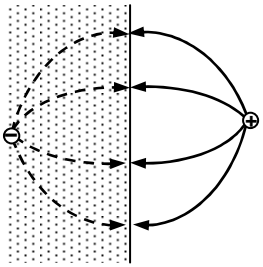


Рис. 19

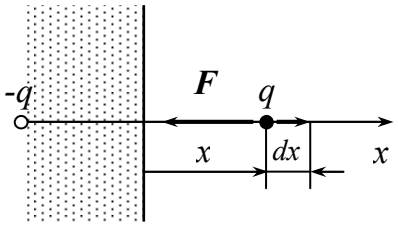


Рис. 20

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4a^2}. \qquad (3.14)$$

По определению работа этой силы при элементарном перемещении dx (рис. 20)

$$\delta A = F_x dx = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}dx. \qquad (3.15)$$

Проинтегрировав это уравнение по x от a до ∞, найдем

$$A = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}. \qquad (3.16)$$

Попытка решить эту задачу другим способом – через потенциал – приводит к неверному результату (он вдвое отличается от полученного нами). Это связано с тем, что соотношение $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ справедливо только для потенциального поля. В системе же отсчета, связанной с проводящей плоскостью, электрическое поле индуцированных зарядов не потенциально, поскольку зависит от развития во времени процесса перемещения заряда q.

Задача 11. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда q на плоскость.

Решение. Поверхностная плотность зарядов на проводнике связана с электрическим полем вблизи проводника (в вакууме), как $\sigma = \varepsilon_0 E_n$. Следовательно, задача сводится к нахождению поля E вблизи проводящей плоскости. Методом изображений получаем,

что в точке P (рис. 21), находящейся на расстоянии r от точки O, поле вблизи плоскости:

$$E = 2E_q \cos\alpha = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{l}{x}. \quad (3.17)$$

Отсюда

$$\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}, \qquad (3.18)$$

где знак «минус» показывает, что индуцированный заряд противоположен по знаку точечному заряду q.

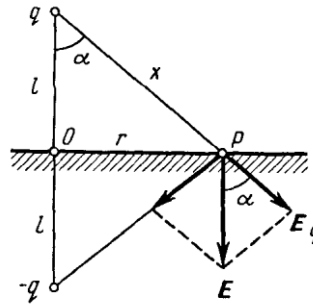


Рис. 21

3.2. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис.22). Полный заряд на единицу площади, т.е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки, равен q_1 для первой пластинки и q_2 для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

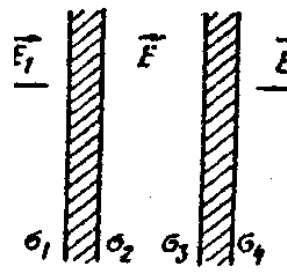


Рис. 22

3.2. Заряженный проводник находится внутри замкнутой металлической оболочки. Определить: а) изменится ли электрическое поле внутри оболочки, если извне поднести к ней заряженный проводник; б) будет ли изменяться поле внутри и вне оболочки, если внутренний проводник перемещать внутри оболочки?

3.3. Внутри металлической сферы, внутренний радиус которой R_1, внешний R_2, помещен точечный заряд q на расстоянии r от центра. Найти потенциал в центре сферы, считая потенциал на бесконечности равным нулю.

3.4. Вблизи заземленной плоской металлической стенки находится точечный заряд q на расстоянии a от нее. Определить поверхностную плотность σ' зарядов, индуцированных на стенке,

как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на стенку. Вычислить суммарный индуцированный заряд q', полагая размеры стенки бесконечно большими.

3.5. Точечный заряд $q = 2,0 \cdot 10^{-8}$ Кл находится в вакууме на расстоянии $a = 50$ мм от заземленной плоской металлической стенки. Найти силу f, с которой стенка притягивает к себе заряд.

3.6. Точечный заряд $q = 100$ мкКл находится на расстоянии $l = 1,5$ см от проводящей плоскости. Какую работу надо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд на очень большое расстояние от плоскости?

3.7. Два точечных заряда, q и $-q$, расположены на расстоянии l друг от друга и на одинаковом расстоянии $l/2$ от проводящей плоскости с одной стороны от нее. Найти модуль электрической силы, действующей на каждый заряд.

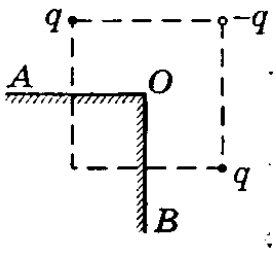


Рис. 23

3.8. Три разноименных точечных заряда расположены в вершинах квадрата с диагональю $l = 50$ см, как показано на рис. 23, где точка O – центр квадрата, AOB – прямой угол, образованный двумя проводящими полуплоскостями. Найти силу, действующую на заряд $-q$, если $q = 11$ мкКл.

3.9. Точечный заряд $q = 2,0$ мкКл находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями. Расстояние от заряда до каждой полуплоскости $a = 5,0$ см. Найти модуль силы, действующей на заряд.

3.10. Точечный диполь с электрическим моментом p находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Найти силу, действующую на диполь, если вектор $\vec{p}$ перпендикулярен плоскости.

3.11. Прямая бесконечно длинная нить имеет заряд λ на единицу длины и расположена параллельно проводящей плоскости на расстоянии l от нее. Найти: а) модуль силы, действующей на единицу длины нити; б) распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(x)$ на плоскости (здесь x – расстояние от точки плоскости до прямой на плоскости, где σ максимально).

3.12. Очень длинная нить расположена перпендикулярно проводящей плоскости и не доходит до нее на расстояние *l*. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ. Пусть точка *O* – ближайшая к концу нити точка плоскости. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости: а) в точке *O*; б) на расстоянии *r* от точки *O*.

3.13. Тонкое проволочное кольцо радиусом $R = 7,5$ см имеет заряд $q = 5,2$ мкКл. Кольцо расположено параллельно проводящей плоскости на расстоянии $l = 6,0$ см от нее. Найти поверхностную плотность заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца.

3.14. Найти потенциал незаряженной проводящей сферы, вне которой на расстоянии $l = 30$ см от ее центра находится точечный заряд $q = 0,50$ мкКл.

3.15. Точечный заряд $q = 3,4$ нКл находится на расстоянии $r = 2,5$ см от центра *O* незаряженного сферического слоя проводника, радиусы которого $R_1 = 5,0$ см и $R_2 = 8,0$ см. Найти потенциал в точке *O*.

3.16. Система состоит из двух концентрических проводящих сфер. На внутренней сфере радиусом *a* находится положительный заряд q_1. Какой заряд q_2 следует поместить на внешнюю сферу радиусом *b*, чтобы потенциал внутренней сферы стал $\varphi = 0$? Как будет зависеть при этом φ от расстояния *r* до центра системы? Изобразить примерный график $\varphi(r)$.

3.17. Четыре большие металлические пластины расположены на малом расстоянии *d* друг от друга (рис. 24). Внешние пластины соединены проводником, а на внутренние пластины подана разность потенциалов $\Delta\varphi$. Найти: а) напряженность электрического поля между пластинами; б) суммарный заряд на единицу площади каждой пластины.

3.18. Между пластинами накоротко замкнутого плоского конденсатора находится металлическая пластина с зарядом *q* (рис. 25). Пластину переместили на расстояние *l*. Какой заряд Δq прошел при этом по закорачивающему проводнику? Расстояние между пластинами конденсатора *d*.

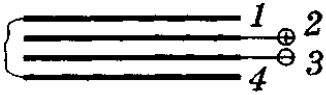


Рис. 24

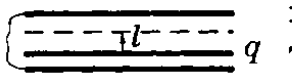


Рис. 25

3.19. На расстоянии $a = 10$ см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $Q = 20$ нКл. Вычислить напряженность E электрического поля в точке, удаленной от плоскости на расстояние a и от заряда Q на расстояние $2a$.

3.20. Точечный заряд $Q = 40$ нКл находится на расстоянии $a = 30$ см от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность E электрического поля в точке A (рис. 26)?

3.21. Большая металлическая пластина расположена в вертикальной плоскости и соединена с землей (рис. 27). На расстоянии $a = 10$ см от пластины находится неподвижная точка, к которой на нити длиной $l = 12$ см подвешен маленький шарик массой $m = 0{,}1$ г. При сообщении шарику заряда Q он притянулся к пластине, в результате чего нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30°$. Найти заряд Q шарика.

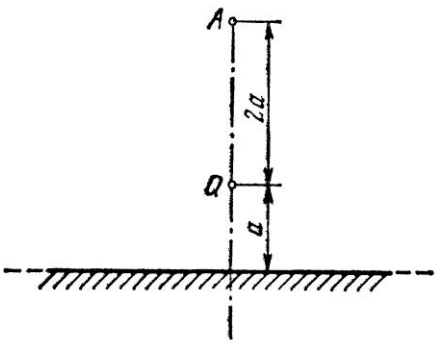


Рис. 26

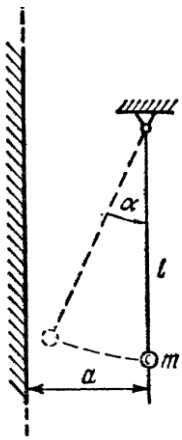


Рис. 27

4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Емкость уединенного проводника заряженного зарядом q и имеющего потенциал φ:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{4.1}$$

Емкость уединенного проводящего шара радиусом R, погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \tag{4.2}$$

Емкость конденсатора C – величина, пропорциональная заряду q на обкладках конденсатора и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (q > 0,\ \varphi_1 > \varphi_2), \tag{4.3}$$

разность потенциалов в знаменателе может быть обозначена как U – напряжение на конденсаторе.

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{4.4}$$

где S – площадь обкладки конденсатора; d – величина зазора между обкладками; ε – диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.

Емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)}, \tag{4.5}$$

где l – длина конденсатора; R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок.

Емкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \tag{4.6}$$

R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней сфер.

Емкость *N* конденсаторов:

- при параллельном соединении

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i \; ; \qquad (4.7)$$

- при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \; . \qquad (4.8)$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \; , \qquad (4.9)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в той точке, где помещается заряд q_i. В случае непрерывного распределения зарядов с плотностью заряда ρ полная электрическая энергия имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV \; , \qquad (4.10)$$

где φ – потенциал, создаваемый всеми (кроме находящегося в элементе объема dV) зарядами системы в элементе объема dV.

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \; , \qquad (4.11)$$

где U – напряжение на конденсаторе; q – заряд на обкладках конденсатора; C – емкость конденсатора.

В случае неоднородного поля для изотропных диэлектриков плотность энергии электрического поля имеет вид

$$\omega = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \; . \qquad (4.12)$$

Полная энергия электрического поля при этом

$$W = \int \omega dV \; . \qquad (4.13)$$

4.1. Примеры решения задач

Задача 12. Определить электрическую емкость C плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм, если площадь S пластин равна 100 см^2.

Решение. Заменяя в выражении для емкости конденсатора $C = Q/U$ общую разность потенциалов U на пластинах конденсатора суммой $U_1 + U_2$ напряжений на слоях диэлектриков, получим

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2}. \qquad (4.14)$$

Учитывая, что

$$Q = \sigma S,\ U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 \text{ и } U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2,$$

равенство (4.14) можно переписать в виде

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}, \qquad (4.15)$$

где σ – поверхностная плотность заряда на пластинах; E_1 и E_2 – напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика соответственно; D – электрическая индукция поля в диэлектриках.

Подставляя $D = \sigma$, окончательно получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}. \qquad (4.16)$$

Численный ответ

C = 98,3 пФ.

Задача 13. Два плоских конденсатора одинаковой емкости $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$. Как изменится разность потенциалов U_1 на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$?

Решение. До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = \mathcal{E}/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε раз:

$$C_2' = \varepsilon C_2 = \varepsilon C. \qquad (4.17)$$

Электроемкость первого конденсатора не изменилась.

Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами. На первом конденсаторе

$$U_1' = Q / C_1' = Q / C\,, \qquad (4.18)$$

где Q – заряд на пластинах конденсатора. Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков, то

$$Q = C'_{\text{бат}}\mathcal{E}\,, \qquad (4.19)$$

где $C'_{\text{бат}} = \dfrac{C_1'C_2'}{C_1' + C_2'} = \dfrac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \dfrac{\varepsilon C}{1+\varepsilon}$.

Таким образом,

$$Q = \frac{\varepsilon C}{1+\varepsilon}\mathcal{E}\,. \qquad (4.20)$$

Подставив это выражение заряда в формулу (4.18), найдем

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon C\mathcal{E}}{(1+\varepsilon)C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{E}\,. \qquad (4.21)$$

Чтобы определить, как изменилась разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, вычислим отношение:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\varepsilon\mathcal{E} \cdot 2}{(1+\varepsilon)\mathcal{E}} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,. \qquad (4.22)$$

Численный результат

$$U_1' / U_1 = 1{,}75\,.$$

Следовательно, разность потенциалов на пластинах первого конденсатора после заполнения второго конденсатора диэлектриком возросла в 1,75 раза.

Задача 14. Как изменится энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ($\varepsilon = 1$) при уменьшении расстояния между его пластинами? Рассмотреть два случая:

а) конденсатор отключен от источника напряжения;

б) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

Решение. а) В первом случае, когда источник напряжения отключен, заряд на пластинах конденсатора остается постоянным:

$$Q = \text{const}\,.$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{4.23}$$

где S – площадь пластин; d – расстояние между пластинами.

Энергию конденсатора удобно записать через значение его заряда и емкости:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2S\varepsilon_0} d\ . \tag{4.24}$$

Следовательно, энергия плоского конденсатора при сближении его пластин убывает пропорционально расстоянию между пластинами.

б) Во втором случае, когда на обкладках конденсатора поддерживается постоянное напряжение U, энергию конденсатора удобно выразить по формуле:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d}\ . \tag{4.25}$$

В первом случае за счет убыли энергии конденсатора совершается работа сил притяжения пластин при их сближении:

$$\triangle A = -\triangle W\ .$$

Во втором случае емкость конденсатора возрастает за счет увеличения заряда на его пластинах. При переносе на пластины заряда $\triangle q$ источник напряжения совершает работу:

$$\triangle A_{\text{ист}} = \triangle qU = \triangle(CU)U = \triangle CU^2\ . \tag{4.26}$$

Энергия конденсатора при этом увеличится на

$$\triangle W = \triangle C\frac{U^2}{2}\ . \tag{4.27}$$

Сравнивая правые части равенств (4.26) и (4.27), видим, что работа источника в два раза больше, чем приращение энергии конденсатора при сближении его пластин. За счет энергии источника напряжения увеличивается энергия конденсатора, а также совершается работа A сил притяжения пластин

$$\triangle A_{\text{ист}} = \triangle W + A\ . \tag{4.28}$$

Следовательно,

$$\triangle A = A_{\text{ист}} - \triangle W = \triangle CU^2 - \frac{\triangle CU^2}{2} = \frac{\triangle CU^2}{2}\ ; \tag{4.29}$$

$$\triangle A = \triangle W\ . \tag{4.30}$$

Можно сделать вывод, что при сближении пластин конденсатора электрические силы совершают работу, равную убыли энергии конденсатора в случае постоянства заряда на его пластинах и равную приращению энергию конденсатора в случае постоянства напряжения на пластинах.

Задача 15. Металлический шар радиусом R несет заряд Q. Шар окружен слоем диэлектрика толщиной d. Определить энергию электрического поля, заключенного в слое диэлектрика, проницаемость которого ε.

Решение. Энергию в слое диэлектрика можно определить по формуле (4.13). Объемную плотность энергии поля можно записать в виде (4.12)

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (4.31)$$

Напряженность поля в диэлектрике вне заряженной сферы равна напряженности поля, созданного точечным зарядом, расположенным в центре сферы,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}. \qquad (4.32)$$

Элемент объема удобно взять в форме сферического слоя радиусом r толщиной dr (рис. 28)

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (4.33)$$

Тогда энергия электрического поля, заключенного в слое диэлектрика, может быть определена, как

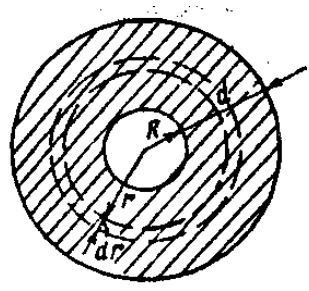


Рис. 28

$$W = \int_R^{R+d} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_R^{R+d} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr;$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right). \qquad (4.34)$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Как изменится энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ($\varepsilon = 1$) при увеличении расстояния между его пластинами? Рассмотреть два случая: а) конденсатор отключен от источника напряжения; б) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

4.2. Определить емкость плоского конденсатора с площадью обкладок $S = 2 \cdot 10^2$ см^2. Между обкладками находится стекло толщиной $d_1 = 1$ мм, покрытое с обеих сторон слоем парафина. Толщина каждого слоя $d_2 = 0,2$ мм.

4.3. Найти емкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер радиусами $R_1 = 10,0$ см и $R_2 = 10,5$ см. Пространство между сферами заполнено маслом ($\varepsilon = 5$).

4.4. Определить электроемкость *C* Земли, принимая ее за проводящий шар радиусом $R = 6400$ км.

4.5. Сферический конденсатор с радиусами обкладок *a* и *b*, где $a < b$, заполнен изотропным, но неоднородным диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния *r* до центра системы как $\varepsilon = \alpha / r$, α – постоянная. Найти емкость такого конденсатора.

4.6. Коаксиальный электрический кабель состоит из центральной жилы и концентрической по отношению к ней цилиндрической оболочки, между которыми находится изоляция. Найти емкость единицы длины такого кабеля, если радиус жилы $R_1 = 1,3$ см, радиус оболочки $R_2 = 3,0$ см и диэлектрическая проницаемость изоляции $\varepsilon = 3,2$.

4.7. Показать, что формулы для емкости цилиндрического и сферического конденсаторов переходят в формулу для емкости плоского конденсатора при малых разностях между радиусами внутренней и внешней обкладок.

4.8. Конденсатор состоит из трех полосок станиоля площадью по $S = 6$ см^2 каждая, разделенных двумя слоями слюды по $d = 0,1$ мм толщиной. Крайние полоски станиоля соединены между собой. Какова емкость такого конденсатора?

4.9. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0,2$ мкКл/м^2. Расстояние d между пластинами равно 1 мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния d между пластинами до 3 мм?

4.10. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов ($C_1 = 300$ пФ и $C_2 = 500$ пФ) заряжена до напряжения $U = 12 \cdot 10^3$ В. Определить: а) разность потенциалов на первом и втором конденсаторах; б) заряд на обкладках.

4.11. Каковы емкости батарей конденсаторов, соединенных по схемам, показанным на рис. 29 и 30?

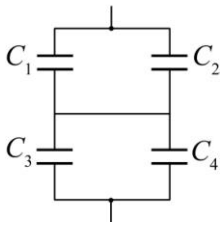


Рис. 29

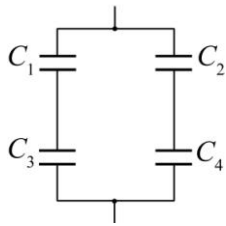


Рис. 30

4.12. К напряжению $U = 100$ В подключили батарею из двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов, каждый емкости $C = 40$ пФ. Затем один из них заполнили диэлектриком проницаемости $\varepsilon = 3$. Во сколько раз уменьшилась напряженность электрического поля в этом конденсаторе? Какой заряд пройдет в цепи?

4.13. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0,2$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 320$ В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 450$ В, напряжение U на нем изменилось до 400 В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора.

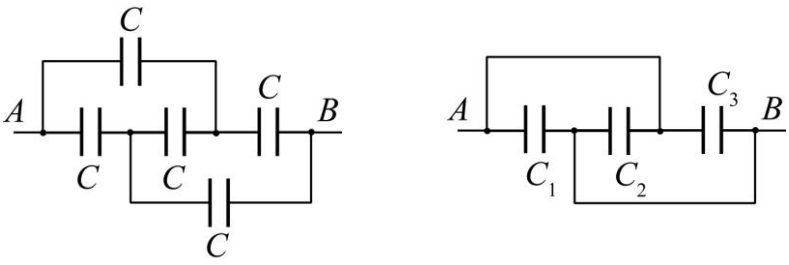
4.14. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщины d_1 и d_2 и проницаемости ε_1 и ε_2. Площадь каждой обкладки равна S. Найти: а) емкость конденсатора; б) плотность связанных зарядов на границе раздела слоев, если напряжение на кон-

денсаторе равно U и электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2.

4.15. Два длинных прямых провода одинакового кругового сечения радиусом a расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями равно b. Найти взаимную емкость проводов C_1 на единицу их длины при условии $a \ll b$. Вычислить C_1, если $a = 1$ мм и $b = 50$ мм.

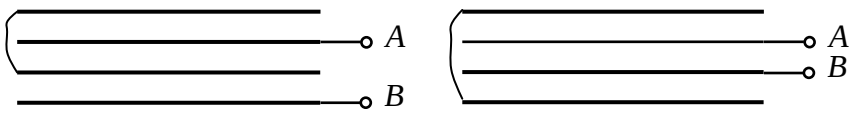
4.16. Найти емкость между точками A и B двух систем из одинаковых конденсаторов показанных: а) на рис. 31, *а*; б) на рис. 31, *б*.

4.17. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на расстоянии $d = 1{,}00$ мм друг от друга. Площадь каждой пластины $S = 220$ см^2. Найти емкость системы между точками A и B, если пластины соединены так, как показано: а) на рис. 32, *а*; б) на рис. 32, *б*.



а *б*

Рис. 31



а *б*

Рис. 32

4.18. Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ выдерживает напряжение не более $U_1 = 6{,}0$ кВ, а конденсатор емкости $C_2 = 2{,}0$ мкФ – не более $U_2 = 4{,}0$ кВ. Какое напряжение может выдержать система из этих двух конденсаторов при последовательном соединении?

4.19. Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 110$ В, подключили параллельно к концам системы из двух последовательно соединенных конденсаторов, емкости которых $C_2 = 2{,}0$ мкФ и $C_3 = 3{,}0$ мкФ. Какой заряд протечет при этом по соединительным проводам?

4.20. В схеме (рис. 33) найти разность потенциалов между точками *A* и *B*, если ЭДС = 110 В и отношение емкостей $C_2 / C_1 = n = 2{,}0$.

4.21. В схеме (рис. 34) найти направление электрического поля в конденсаторах и напряжения на них, если $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 15$ В, $C_1 = 4{,}0$ мкФ и $C_2 = 6{,}0$ мкФ.

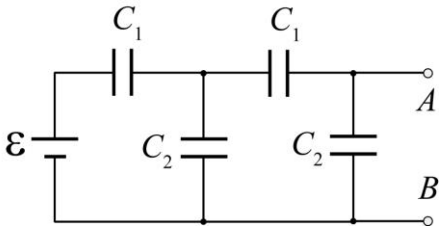


Рис. 33

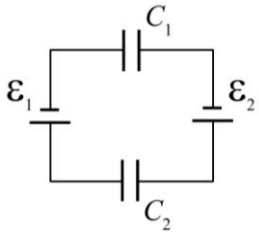
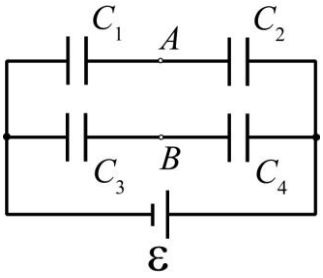
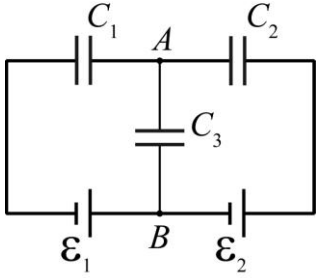


Рис. 34



а



б

Рис. 35

4.22. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками *A* и *B* системы, показанной: а) на рис. 35, *а*; б) на рис. 35, *б*.

4.23. Определить работу *A*, которую нужно затратить, чтобы увеличить на $\Delta x = 0{,}200$ мм расстояние *x* между пластинами плоского конденсатора, заряженными разноименными зарядами вели-

чиной $q = 0,200$ мкКл. Площадь каждой пластины $S = 400$ см^2. В зазоре между пластинами находится воздух.

4.24. Плоский конденсатор имеет в качестве изолирующего слоя стеклянную пластинку толщиной $d = 2$ мм и площадью $S = 3 \cdot 10^2$ см^2. Конденсатор заряжен до напряжения $U = 100$ В, после чего отключен от источника напряжения. Определить механическую работу, которую нужно произвести, чтобы вынуть стеклянную пластинку из конденсатора. Трение в расчет не принимать.

4.25. Какие заряды протекут после замыкания ключа *K* в схеме (рис. 36) через сечения 1 и 2 в направлениях, указанных стрелками?

4.26. В схеме (рис. 37) $\mathcal{E} = 60$ В, $C_1 = 2,0$ мкФ и $C_2 = 3,0$ мкФ. Найти заряды, которые протекут после замыкания ключа *K* через сечения 1 и 2 в направлениях, указанных стрелками.

4.27. Найти емкость схемы, показанной на рис. 38, между точками *A* и *B*.

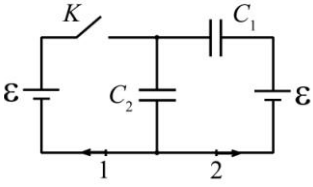


Рис. 36

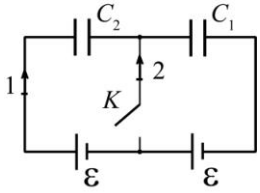


Рис. 37

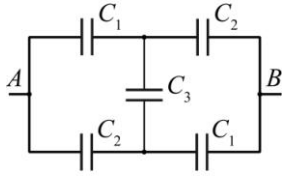


Рис. 38

4.28. Обкладки заряженного конденсатора соединяются с обкладками такого же незаряженного, причем заряд поровну распределяется на обоих конденсаторах. Показать, что энергия системы будет вдвое меньше, и обсудить это.

4.29. Определить, как изменятся напряженность электрического поля, напряжение на обкладках и энергия плоского конденсатора после заполнения пространства между пластинами диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Рассмотреть два случая: а) конденсатор отключен от источника напряжения; б) конденсатор подключен к источнику напряжения.

4.30. Заряд *q* равномерно распределен по объему шара радиусом *R*. Принимая диэлектрическую проницаемость вещества шара и окружающей среды равной ε, определить: а) энергию электрического поля внутри шара; б) вне шара; в) во всем пространстве.

4.31. Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов $\pm q$, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, в системах, которые показаны на рис. 39.

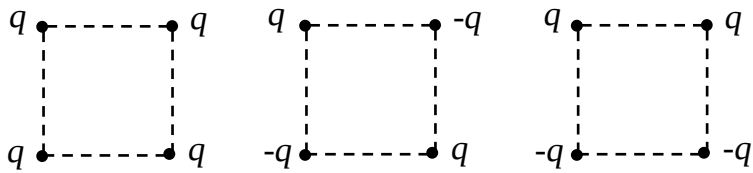
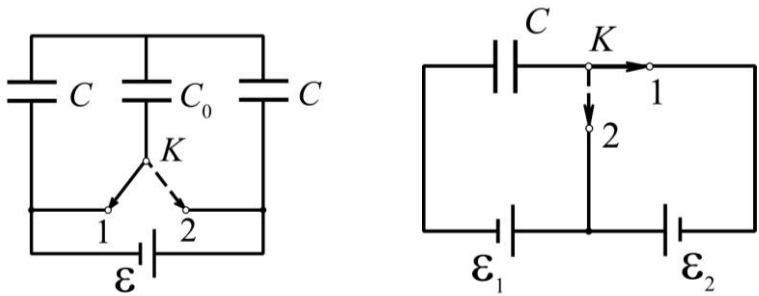


Рис. 39

4.32. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Найти: а) энергию взаимодействия этого заряда с зарядами, индуцированными на плоскости; б) собственную энергию зарядов на плоскости.

4.33. Сколько теплоты выделится при переключении ключа K из положения 1 в положение 2 в цепи, показанной: а) на рис. 40, *а*; б) на рис. 40, *б*?



а *б*

Рис. 40

4.34. Система состоит из двух концентрических тонких металлических оболочек с радиусами R_1 и R_2 и соответствующими зарядами q_1 и q_2. Найти собственную энергию W_1 и W_2 каждой оболочки, энергию взаимодействия W_{12} оболочек и полную электрическую энергию W системы.

4.35. Заряд q распределен равномерно по объему шара радиусом R. Считая проницаемость $\varepsilon = 1$, найти: а) собственную электрическую энергию шара; б) отношение энергии W_1 внутри шара к энергии W_2 в окружающем пространстве.

4.36. Точечный заряд $q = 3,0$ мкКл находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика проницаемости $\varepsilon = 3,0$. Внутренний радиус слоя $a = 250$ мм, внешний $b = 500$ мм. Найти электрическую энергию в данном слое.

4.37. Сферическую оболочку радиусом R_1, равномерно заряженную зарядом q, расширили до радиуса R_2. Найти работу, совершенную при этом электрическими силами.

4.38. В центре сферической оболочки, равномерно заряженной зарядом $q = 5,0$ мкКл, расположен точечный заряд $q_0 = 1,50$ мкКл. Найти работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении ее радиуса от $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

4.39. Между обкладками плоского конденсатора помещена параллельно им металлическая пластинка, толщина которой составляет $\nu = 0,60$ зазора между обкладками. Емкость конденсатора в отсутствие пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В и пластинку извлекли из конденсатора. Найти: а) приращение энергии конденсатора; б) механическую работу, совершенную против электрических сил при извлечении пластинки.

4.40. Стеклянная пластинка целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В и пластинку извлекли из зазора. Найти приращение энергии конденсатора и механическую работу, совершенную против электрических сил при извлечении пластинки.

5. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Если за время dt через поперечное сечение проводника переносится заряд dq ,то **сила тока** в проводнике равна

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (5.1)$$

Вектор плотности тока $\vec{j}$ численно равен силе тока dI через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению

движения носителей площадку $dS_{\perp}$, отнесенной к величине этой площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \qquad (5.2)$$

За направление $\vec{j}$ принимается направление вектора скорости $\vec{u}^{+}$ упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости $\vec{u}^{-}$ отрицательных носителей).

Сила тока *I* через любую поверхность *S*

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \qquad (5.3)$$

Если концентрации положительных носителей n^{+} и отрицательных носителей n^{-}, то

$$\vec{j} = e^{+} n^{+} \vec{u}^{+} + e^{-} n^{-} \vec{u}^{-}. \qquad (5.4)$$

Уравнение непрерывности для плотности тока

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (5.5)$$

Уравнение непрерывности в интегральном виде

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}, \qquad (5.6)$$

где справа в данной формуле стоит убыль заряда в единицу времени внутри объема *V*, ограниченного поверхностью *S*.

Для однородного цилиндрического проводника величина сопротивления

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (5.7)$$

где *l* – длина проводника; *S* – площадь его поперечного сечения; ρ – удельное электрическое сопротивление вещества.

Общее сопротивление участков цепи:

- при последовательном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i; \qquad (5.8)$$

- при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}. \qquad (5.9)$$

Закон Ома: сила тока, протекающего по однородному (не содержащему электродвижущих сил) проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению U)

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (5.10)$$

Закон Ома в локальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}, \qquad (5.11)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводимость среды, измеряемая в сименсах на метр (См/м).

Закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащего электродвижущие силы,

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \qquad (5.12)$$

знаки алгебраических величин I и $\mathcal{E}_{12}$ выбираются по правилам, изложенным в решение задачи 18 (с. 59–60); $\mathcal{E}_{12}$ – электродвижущая сила (ЭДС), действующая на данном участке цепи:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}. \qquad (5.13)$$

Эта величина, как и сила тока, является алгебраической, $\vec{E}^*$ – напряженность поля сторонних сил.

Обобщенный закон Ома в локальной форме:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*). \qquad (5.14)$$

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и в результате

$$IR = \mathcal{E}, \qquad (5.15)$$

где R – полное сопротивление цепи.

Правила Кирхгофа.

- **Первое правило Кирхгофа**: алгебраическая сумма токов I, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0, \qquad (5.16)$$

при этом токи, идущие к узлу, и токи, выходящие из узла, следует считать величинами разных знаков.

- **Второе правило Кирхгофа**: алгебраическая сумма произведений токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i \,. \qquad (5.17)$$

Мощность P, развиваемая током на рассматриваемом участке цепи,

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12} I \,. \qquad (5.18)$$

Удельная мощность $P_{\text{уд}} = \dfrac{\Delta P}{\Delta V}$ равна

$$P_{\text{уд}} = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*) \,. \qquad (5.19)$$

Закон Джоуля–Ленца: вся работа постоянного тока при протекании его по проводнику целиком идет на нагревание проводника. Тепло Q, выделяющееся в проводнике при протекании тока за время t,

$$Q = \int_0^t UIdt = \int_0^t RI^2 dt \,. \qquad (5.20)$$

Удельная тепловая мощность тока (количество тепла, выделяющееся в единице объема в единицу времени)

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 \,. \qquad (5.21)$$

5.1. Примеры решения задач

Задача 16. К потенциометру, сопротивление которого R_0 и соединенному с ним амперметру, подключен источник постоянного напряжения U (рис. 41). Между движком потенциометра (точка 2) и его концом (точка 1) включено сопротивление r. Как изменяются показания амперметра при перемещении движка от одного конца потенциометра к другому? Сопротивление амперметра предполагается ничтожно малым.

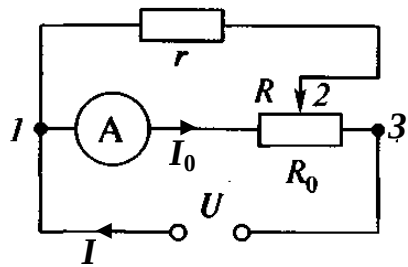


Рис. 41

Решение. Пусть R – сопротивление потенциометра между точками 1 и 2. При этом сопротивление между точками 2 и 3 равно $R_0 - R$. Полное сопротивление цепи, состоящей из параллельно включенных сопротивлений R и r и подключенного к ним последовательно сопротивления $R_0 - R$, равно

$$R_0 - R + \frac{rR}{r+R}. \tag{5.22}$$

Ток в цепи равен

$$I = U\frac{r+R}{R_0 r + R_0 R - R^2}. \tag{5.23}$$

Напряжение U_{23} между точками 2 и 3, а также напряжение U_{12} между точками 1 и 2

$$\begin{aligned} U_{23} &= I(R_0 - R); \\ U_{12} &= U - U_{23}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Сила тока, протекающего через амперметр,

$$I_0 = \frac{U_{12}}{R} = U\frac{r}{R_0 r + R_0 R - R^2}. \tag{5.25}$$

Из условия экстремума тока в зависимости от R находим значение R, соответствующее такому экстремуму $R = R_0/2$. Подставляя найденное значение сопротивления в (5.25), находим минимальное значение тока

$$I_{0,\min} == \frac{U}{R_0}\frac{1}{(1+R_0/4r)}. \tag{5.26}$$

При смещении движка потенциометра влево ($0 < R < R_0/2$) ток через амперметр монотонно растет и достигает значения $I_0 = U/R_0$. При смещении движка вправо ($R_0/2 < R < R_0$) ток также растет и достигает того же значения $I_0 = U/R_0$. Таким образом, максимально возможное значение тока в цепи равно $I_{0,\max} = I_0$. Отношение значений токов равно

$$\frac{I_{0,\max}}{I_{0,\min}} = 1 + \frac{R_0}{4r}. \tag{5.27}$$

Задача 17. Пусть имеется большое число N источников тока с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Из них со-

ставляется батарея, содержащая несколько параллельных групп, состоящих из последовательно соединенных элементов. При каком соединении элементов получаем наибольшую мощность на нагрузке сопротивлением R?

Решение. Из соображений симметрии можно сделать вывод, что каждая из параллельных групп должна содержать одинаковое число элементов, которое обозначим η. При этом в цепи будет $\eta = N/n$ таких групп источников тока.

Каждая группа состоит из последовательно соединенных источников тока, что эквивалентно источнику тока с ЭДС $E = \eta\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{внутр}} = \eta r$. Такие мысленно созданные группы источников тока соединены параллельно, так что они эквивалентны элементу с ЭДС $E = \eta\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{полн}} = r_{\text{внутр}}/n = \eta^2 r/N$. При замыкании на внешнюю нагрузку R сила тока в цепи будет равна

$$I = \frac{\mathcal{E}N\eta}{(RN + \eta^2 r)}. \qquad (5.28)$$

Выделяемая на нагрузке мощность $P = I^2 R$. Найдем, при каком η достигается максимальное значение тока в цепи. Для этого приравниваем нулю производную тока по η:

$$\frac{dI}{d\eta} = \frac{\mathcal{E}N(RN - \eta^2 r)}{(RN + \eta^2 r)^2} = 0. \qquad (5.29)$$

откуда следует, что максимум тока и мощности достигается при $\eta = \eta_m$, где

$$\eta_m = \sqrt{N\frac{R}{r}}. \qquad (5.30)$$

Задача 18. Источники тока с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в цепь, как показано на рис. 42. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 4$ В, а $R_1 = R_4 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлениями источников тока пренебречь.

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью законов Кирхгофа. Чтобы найти четыре значения силы токов, следует составить четыре уравнения. Перед составлением уравнений Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать произвольно направления токов, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже, и, во-вторых, выбрать направление обхода контуров. Выберем направления токов, как они показаны на рис. 42, и условимся обходить контуры по часовой стрелке. Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: *A* и *B*. Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

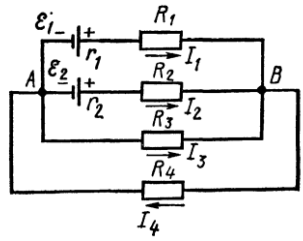


Рис. 42

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла, – со знаком «минус». Возможно и обратное определение знаков токов.

По первому закону Кирхгофа для узла *B* имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0\,. \qquad (5.31)$$

Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, меньше числа контуров (в нашем случае контуров шесть, а независимых уравнений три). Чтобы найти необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение *IR* входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае произведение *IR* входит в уравнение со знаком «минус»;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус».

По второму закону Кирхгофа имеем, соответственно, для контуров AR_1BR_2A, AR_1BR_3A, AR_3BR_4A:

$$\begin{aligned} &I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ &I_1R_1 - I_3R_3 = \mathcal{E}_1, \\ &I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Подставив в равенства (5.31)-(5.32) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ &2I_1 - 4I_2 = 6, \\ &2I_1 - 4I_3 = 10, \\ &4I_3 + 2I_4 = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Решая данную систему, получаем:

$$I_2 = 0, \; I_3 = -1 \text{ А}.$$

Знак «минус» у значения силы тока свидетельствует о том, что при произвольном выборе направления токов направление тока на рисунке было указано противоположным истинному. На самом деле ток течет от узла *B* к узлу *A*.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

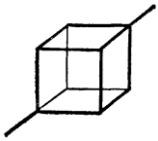
5.1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд *Q*, прошедший в проводнике.

5.2. Определить плотность тока *j* в железном проводнике длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 6$ В.

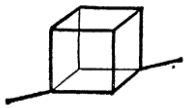
5.3. Вычислить сопротивление *R* графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса высотой $h = 20$ см и радиусами оснований $r_1 = 12$ мм и $r_2 = 8$ мм. Удельное сопртивление графита $3 \cdot 10^{-3}$ Ом·см.

5.4. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление *r* каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 1 Ом. Вычислить сопротивление *R* этого куба, если он включен в электрическую цепь, как показано на рис. 43, *а*.

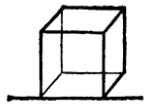
5.5. То же (см. задачу 5.4), если куб включен в цепь, как показано на рис. 43, *б*.



а



б



в

Рис. 43

5.6. То же (см. задачу 5.4), если куб включен в цепь, как показано на рис. 43, *в*.

5.7. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до $I = 10$ А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление R_A амперметра равно $0,02$ Ом и сопротивление $R_{ш}$ шунта равно 5 мОм?

5.8. Сколько ламп мощностью $P = 300$ Вт каждая, предназначенных для напряжения $U = 110$ В, можно установить в здании, если проводка от магистрали сделана медным проводом общей длиной $l = 100$ м и сечением $S = 9$ мм^2 и если напряжение в магистрали поддерживается равным $U_0 = 122$ В.

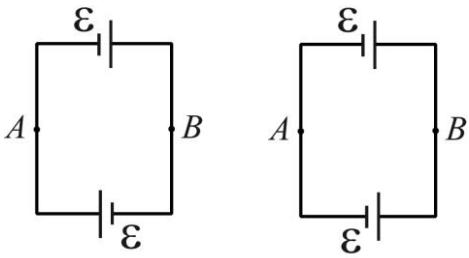
5.9. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R = 0,1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1 = 0,5$ А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I_2 в той же катушке оказалась равной $0,4$ А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

5.10. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС каждого элемента равна $\mathcal{E} = 1,2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1,5$ Ом. Найти силу тока *I* во внешней цепи.

5.11. Имеется *N* одинаковых гальванических элементов с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r_i каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по *n* последовательно соединенных элементов. При каком значении *n* сила тока *I* во внешней цепи, имеющей сопротивление *R*, будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_i батареи при этом значении *n*?

5.12. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0{,}3$ Ом? Определить максимальную силу тока $I_{\max}$.

5.13. Два одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены, как показано на рис. 44. Определить силу тока *I* в цепи и разность потенциалов *U* между точками *A* и *B* в первом и втором случаях.



а *б*

Рис. 44

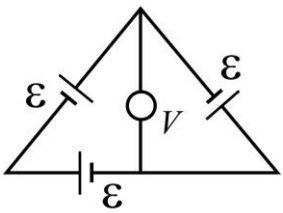


Рис. 45

5.14. Два элемента ($\mathcal{E}_1 = 1{,}2$ В, $r_1 = 0{,}1$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 0{,}9$ В, $r_2 = 0{,}3$ Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление *R* соединительных проводов равно $0{,}2$ Ом. Определить силу тока *I*.

5.15. Что покажет вольтметр, если его включить с тремя одинаковыми гальваническими элементами так, как показано на рис. 45? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

5.16. *N* одинаковых источников тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением *r* и такое же количество одинаковых сопротивлений *R* образуют замкнутую цепь из *N* звеньев, изображенную на рис. 46. Найти разность потенциалов между точками *A* и *B*, делящими цепь на *n* и *N*-*n* звеньев. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

5.17. На рис. 47 изображена цепь постоянного тока, состоящая из трех источников тока и трех сопротивлений, включенных последовательно. Определить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

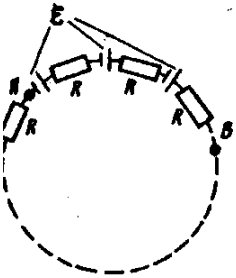


Рис. 46

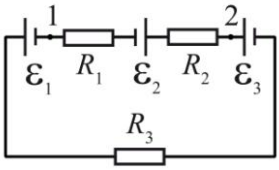


Рис. 47

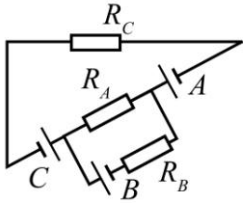


Рис. 48

5.18. ЭДС элементов, показанных на рис. 48, равны $\mathcal{E}_A = 4$ В, $\mathcal{E}_B = 2$ В, $\mathcal{E}_C = 3$ В; их внутренние сопротивления, соответственно, равны $r_A = 11$ Ом, $r_B = 15$ Ом, $r_C = 13$ Ом, а внешние сопротивления $R_A = 5$ Ом, $R_B = 7$ Ом, $R_C = 10$ Ом. Найти величину и направление тока через сопротивление R_C.

5.19. Три гальванических элемента и три вольтметра соединены по схеме, показанной на рис. 49. ЭДС гальванических элементов $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 1{,}5$ В. Сопротивления вольтметров $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_3 = 4$ кОм. Сопротивлениями элементов можно пренебречь. Каковы показания вольтметров?

5.20. Генератор постоянного тока дает ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом. Он заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}6$ Ом. Параллельно батарее подключена лампа с сопротивлением $R = 3$ Ом. Определить ток в батарее аккумуляторов и в лампе.

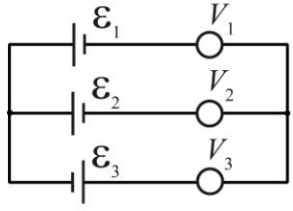


Рис. 49

5.21. На рис. 50 показана бесконечная цепь, образованная повторением одного и того же звена – сопротивлений $R_1 = 4{,}0$ Ом и $R_2 = 3{,}0$ Ом. Найти сопротивление между точками *A* и *B*.

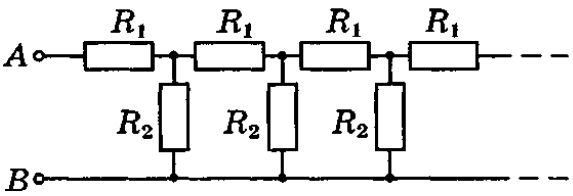


Рис. 50

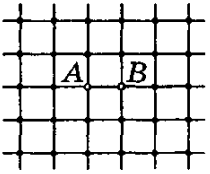


Рис. 51

5.22. Имеется безграничная проволочная сетка с квадратными ячейками (рис. 51). Сопротивление каждого проводника между соседними узлами равно R_0. Найти сопротивление R этой сетки между точками A и B. Указание: воспользоваться принципами симметрии и суперпозиции.

5.23. Зазор между пластинами плоского конденсатора заполнен неоднородной слабо проводящей средой, удельная проводимость которой изменяется в направлении, перпендикулярном пластинам, по линейному закону от $\sigma_1 = 1{,}0$ пСм/м до $\sigma_2 = 2{,}0$ пСм/м. Площадь каждой пластины $S = 230\ \text{см}^2$, ширина зазора $d = 2{,}0$ мм. Найти ток через конденсатор при напряжении на нем $U = 300$ В.

5.24. Три гальванических элемента ($\mathcal{E}_1 = 1{,}3$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}3$ В, $\mathcal{E}_3 = 2$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = 0{,}2$ Ом) включены, как показано на рис. 52, $R = 0{,}55$ Ом. Определить токи в I_1, I_2, I_3 элементах.

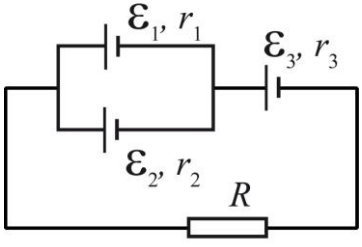


Рис. 52

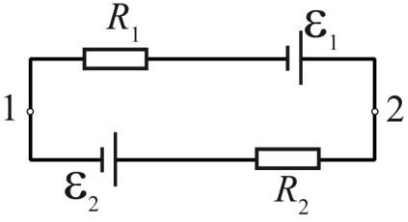


Рис. 53

5.25. Найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 схемы (рис. 53), если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 5$ В и $\mathcal{E}_2 = 2{,}0$ В. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

5.26. С помощью потенциометра (рис. 54) можно менять напряжение U, подаваемое на некоторый прибор с сопротивлением R. Потенциометр имеет длину l, сопротивление R_0 и находится под напряжением U_0. Найти зависимость $U(x)$. Исследовать отдельно случай $R \gg R_0$.

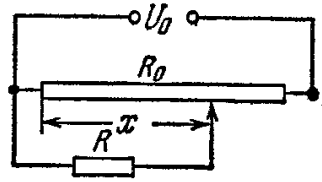


Рис. 54

5.27. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями R_1 и R_2.

5.28. Найти значение и направление тока через резистор с сопротивлением R в схеме (рис. 55), если $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathcal{E}_2 = 3{,}7$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R = 5$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

5.29. В схеме (рис. 56) $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2{,}0$ В, $\mathcal{E}_3 = 2{,}5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти: а) ток через резистор с сопротивлением R_1; б) разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B.

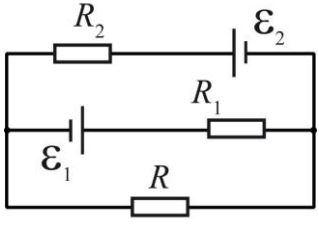


Рис. 55

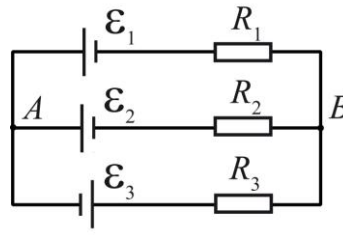


Рис. 56

5.30. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора C схемы (рис. 57). Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

5.31. Найти ток через резистор R_1 участка цепи (рис. 58), если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и потенциалы точек 1, 2, 3 равны $\varphi_1 = 10$ В, $\varphi_2 = 6$ В, $\varphi_3 = 5$ В.

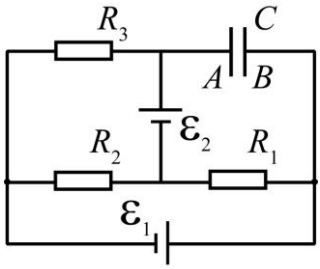


Рис. 57

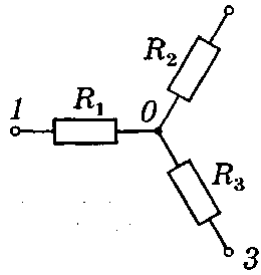


Рис. 58

5.32. Между точками A и B цепи (рис. 59) поддерживают напряжение $U = 20$ В. Найти ток и его направление в участке 1–2, если $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 10$ Ом.

5.33. В схеме (рис. 60) найти сопротивление между точками A и B, если $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 50$ Ом.

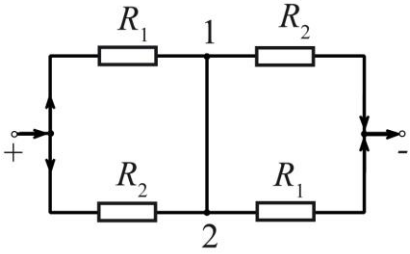


Рис. 59

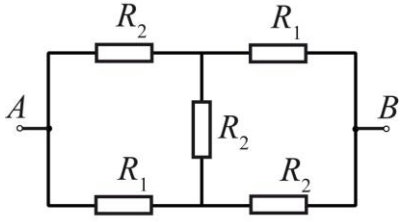


Рис. 60

5.34. Две батареи аккумуляторов ($\mathcal{E}_1 = 10$ В; $r_1 = 1$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 8$ В; $r_2 = 2$ Ом) и реостат ($R = 6$ Ом) соединены, как показано на рис. 61. Найти силу тока в батареях и реостате.

5.35. Два источника тока ($\mathcal{E}_1 = 8$ В, $r_1 = 2$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 6$ В; $r_2 = 1{,}5$ Ом) и реостат ($R = 10$ Ом) соединены, как показано на рис. 62. Вычислить силу тока I, текущего через реостат.

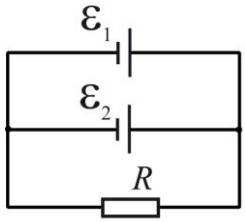


Рис. 61

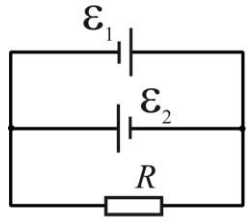


Рис. 62

5.36. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 (рис. 63) и напряжение U_3 на концах резистора, если $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

5.37. Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе *C* (рис. 64) после замыкания в момент $t = 0$ ключа *K*.

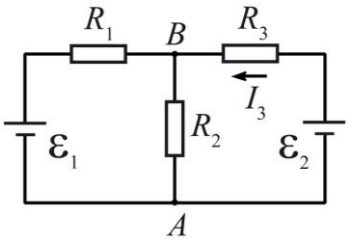


Рис.63.

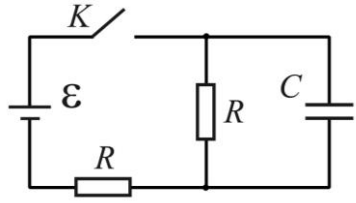


Рис.64.

5.38. Три батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В и $\mathcal{E}_3 = 10$ В и одинаковыми внутренними сопротивлениями *r*, равными 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов *I*, идущих через каждую батарею.

5.39. Три источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 11$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В и $\mathcal{E}_3 = 6$ В и три реостата с сопротивлениями $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом соединены, как показано на рис. 65. Определить силу токов *I* в реостатах. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало.

5.40. Три сопротивления $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 1$ Ом и $R_3 = 3$ Ом, а также источник тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1{,}4$ В соединены, как показано на

рис. 66. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, который надо подключить в цепь между точками *A* и *B*, чтобы в сопротивлении R_3 шел ток силой $I = 1$ А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь.

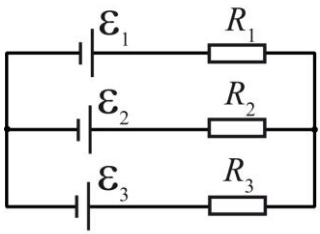


Рис. 65

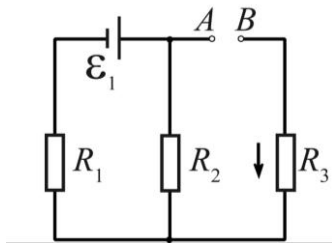


Рис. 66

5.41. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение *U* на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление *R* реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 120$ Вт. Найти силу тока *I* в цепи.

5.42. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12$ В, сила тока *I* короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

5.43. К батарее аккумуляторов, ЭДС $\mathcal{E}$ которой равна 2 В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление *R* проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность *P*, которая при этом выделяется в проводнике.

5.44. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС $\mathcal{E}$ батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $P = 80$ Вт. Вычислить силу тока *I* в цепи и КПД η нагревателя.

5.45. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1 = 15$ мин, если только вторая, то через $t_2 = 30$ мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно, параллельно?

5.46. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А – со-

ответственно, $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

5.47. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 100$ Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 10$ А в течение времени $\tau = 30$ с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

5.48. По проводнику сопротивлением $R = 3$ Ом течет ток, сила которого возрастает линейно в зависимости от времени. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время $\tau = 8$ с, равно 200 Дж. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В момент времени, принятый за начальный, сила тока в проводнике равна нулю.

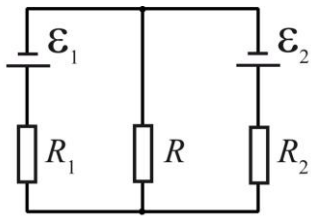


Рис. 67

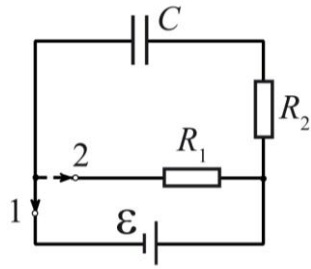


Рис. 68

5.49. В схеме (рис. 67) известны R_1, R_2, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. При каком сопротивлении R выделяемая на нем тепловая мощность максимальна? Чему она равна?

5.50. Конденсатор емкости $C = 5{,}00$ мкФ подключили к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В (рис. 68). Затем переключатель K перевели с контакта 1 на контакт 2. Найти количество теплоты, выделившееся на резисторе с сопротивлением $R_1 = 500$ Ом, если $R_2 = 330$ Ом.

5.51. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}6$ В, замкнутый на внешнее сопротивление, дает ток $I = 1{,}0$ А. При этом разность потенциалов между его полюсами $U = 2{,}0$ В. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе, и мощность, которую развивают в нем электрические силы.

5.52. Электромотор постоянного тока подключили к напряжению U. Сопротивление обмотки якоря равно R. При каком токе через обмотку полезная мощность мотора будет максимальной? Чему она равна? Каков при этом КПД мотора?

5.53. В схеме (рис. 69) $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 30$ Ом. При каком сопротивлении R_x выделяемая на нем тепловая мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Напряжение между точками A и B – постоянное.

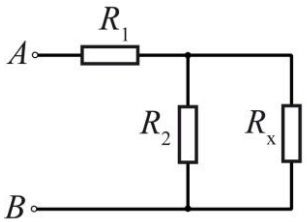


Рис. 69

Ответы

1.1. $\dfrac{f_e}{f_g} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{e}{m_e}\right)^2 = 4,2\cdot 10^{42}$.

1.2. $Q = 4l\sin(\alpha/2)\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}(\alpha/2)} = 50,1$ нКл.

1.3. Между зарядами на расстоянии $x = 40$ см от заряда $4Q$.

1.4. $Q_1 = Q\sqrt{3}/3 = -0,577$ нКл. 1.5. $F = \dfrac{q_1 q_2}{2\pi^2\varepsilon_o r_0^2} = 1,1$ мН.

1.6. $\vec{E} = 2,7\vec{i} - 3,6\vec{j}$. 1.7. $E = \dfrac{ql}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 (l^2 + x^2)^{3/2}}$.

1.8. $E = \dfrac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$. 1.9. а) $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{6q}{\varepsilon a}$, $E = 0$; б) $\varphi = 0$, $E = 0$.

1.10. $A = -2,5\cdot 10^{-6}$ Дж; $A = 0$. 1.11. $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2 - a^2}$.

1.12. $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{r^2 + x^2}}$, $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(r^2 + x^2)^{3/2}}\vec{e}_x$;

для $x = 0$: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$, $E = 0$;

для $|x| \gg r$: $\varphi \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x|}$, $\vec{E} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}\frac{x}{|x|}\vec{e}_x$;

$E_{\max} = 1{,}93 \cdot 10^4$ В/м, $x_{\max} = \pm r/\sqrt{2} = \pm 42{,}2$ мм;

для кривой потенциала точки $x_{\max}$ являются точками перегиба.

1.13. $E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2 + r^2}}$; $\lim\limits_{a\to\infty} E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

1.14. $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$, $\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$; $E = 3{,}6 \cdot 10$ кВ/м,

$\varphi = 0{,}83 \cdot 10^5$ В.

1.15. $E = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}$, где $R_1 \le r \le R_2$; при $r > R_2$ и $r < R_1$ $E = 0$.

1.16. $r > R$: $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$; $r < R$: $E = 0$, $\varphi = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$.

1.17. а) $\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}(\sqrt{r^2 + x^2} - \sqrt{x^2})$,

$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right)$. При $|x| \ll r$ – поле бесконечной

заряженной плоскости: $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r - |x|)$, $E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}$, где $\sigma = \frac{q}{\pi r^2}$.

При $|x| \gg r$ – поле точечного заряда: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x|}$, $E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}\frac{x}{|x|}$;

б) $\varphi = 1{,}4 \cdot 10^5$ В, $E_x = 1{,}0$ МВ/м.

1.18. $E = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 a}\cos(\pi/6) = 3 \cdot 10^6$ В/м. 1.19. 3 В/м.

1.20. $E_x = ax$. Заряд распределен равномерно по объему плоского

бесконечного слоя. 1.21. $f = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 b} = 8{,}1$ Н/м,

$A = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = 112$ МДж/м. 1.22. $F = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

1.24. $\varphi = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$.

1.27. а) $\lambda = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln(R_2/R_1)}$; б) $\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_0 U}{R_1 \ln(R_2/R_1)}$, $\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_0 U}{R_2 \ln(R_2/R_1)}$;

в) $E = \dfrac{U}{r\ln(R_2/R_1)}$. 1.28. $\Delta\varphi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+(a/R)^2}}\right)$.

1.29. $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln n = 5$ кВ. 1.30. а) $E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r_1^2} = 2\cdot 10^5$ В/м;

б) $E_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1+q_2}{r_1^2} = -7{,}2\cdot 10^5$ В/м.

1.31. а) $E = \dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$; б) $E = \dfrac{\lambda_0 R}{4\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$, при $x \gg R$ напряжен-

ность $E \approx \dfrac{\pi R^2 \lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$. 1.33. $E_{\max} = \lambda/\pi\varepsilon_0 l$.

1.35. а) $E = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{3r}{4R}\right)$ при $r \le R$, $E = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$ при $r \ge R$;

б) $E_{\max} = \dfrac{1}{9}\dfrac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}$ при $r_{\max} = \dfrac{2}{3}R$.

1.36. $\vec{E} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\vec{a}\rho}{\varepsilon_0}$. 1.37. $\vec{E} = -\vec{a}$. 1.38. $\varphi = \dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$,

$E_x = -\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R^2-2x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}$. При $|x| \gg R$: $\varphi \approx \dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ и $E_x \approx \dfrac{ql}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$.

1.40. а) $\vec{F} = 0$; б) $\vec{F} = -\dfrac{\lambda\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$; в) $\vec{F} = \dfrac{\lambda\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$.

1.41. а) $\varphi = -axy + \text{const}$; б) $\varphi = ay(y^2/3 - x^2) + \text{const}$;

в) $\varphi = -y(ax+bz) + \text{const}$. 1.42. а) $\vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j})$;

б) $\vec{E} = -(y\vec{i} + x\vec{j})$. 1.43. $\rho = -6\varepsilon_0 a$. 2.1. $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d^2} = 5\cdot 10^4$ Н.

2.2. $U = \dfrac{\sigma' d}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$. 2.3. $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U}{d} = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$ Кл/м^2.

2.4. а) $F = F_0 / 2$; б) $F = 2F_0$. 2.5. а) $q = 1{,}33 \cdot 10^{-7}$ Кл;

б) $D = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. 2.7. а) $E_1 = E_2 = E$, $D_1 = D$, $D_2 = \varepsilon D$;

б) $E_1 = E_2 = \dfrac{2}{1+\varepsilon} E$, $D_1 = \dfrac{2}{1+\varepsilon} D$, $D_2 = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D$.

2.8. а) $E_1 = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} E$, $E_2 = \dfrac{2}{1+\varepsilon} E$, $D_1 = D_2 = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D$;

б) $E_1 = E_2 = E/\varepsilon$, $D_1 = D_2 = D$. 2.9. Электрическое смещение остаётся без изменения, а напряженность уменьшается в два раза;
б) электрическое смещение увеличивается в два раза, а напряженность остается без изменения.

2.13. $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0} = 5{,}2$ В/м, $\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon \operatorname{tg}\alpha_0$, отсюда

$\alpha = 74°$, $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} E_0 \cos\alpha_0 = 64$ пКл/м^2.

2.15. а) $\oint \vec{E} d\vec{S} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos\theta$; б) $\oint \vec{D} d\vec{r} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) l E_0 \sin\theta$.

2.21. а) $E_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_1 = 2{,}83$ В/м, $D_1 = 50$ пКл/м^2;

б) $E_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = 7{,}55$ В/м, $D_2 = 66{,}7$ пКл/м^2.

2.22. $\sigma' = ql(\varepsilon - 1)/2\pi r^3 \varepsilon(\varepsilon + 1)$; при $l \to 0$ $\sigma' \to 0$. 2.24. $\rho' = -2\alpha$.

3.1. $\sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{1}{2}(q_1 - q_2)$, $\sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{1}{2}(q_1 + q_2)$, $E = \dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0}$,

$E_1 = \dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0}$. 3.2. а) нет; б) внутри изменится, снаружи нет.

3.3. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$. 3.4. $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{qa}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, $q' = q$.

3.5. $f = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(2a)^2} = 0{,}36$ Н. 3.7. $F = \dfrac{(2\sqrt{2} - 1)q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}$.

3.12. а) $\sigma = \dfrac{\lambda}{2\pi l}$, б) $\sigma(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\sqrt{l^2 + r^2}}$.

3.13. $\sigma = \dfrac{lq}{2\pi(l^2 + R^2)^{3/2}}$. 3.14. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$.

3.15. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$.

3.16. $q_2 = -\dfrac{b}{a}q_1$, $\varphi = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} 1/r - 1/a, & a \le r \le b; \\ (1 - b/a)/r, & r \ge b. \end{cases}$

3.17. а) $E_{23} = \Delta\varphi / d$, $E_{12} = E_{34} = 1/2E_{23}$; б) $|\sigma_1| = \sigma_4 = 1/2\,\varepsilon_0\Delta\varphi / d$, $|\sigma_2| = \sigma_3 = 3/2\,\varepsilon_0\Delta\varphi / d$. 3.19. $E = \dfrac{Q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = 3{,}32$ кВ/м.

3.20. $E = \dfrac{3Q}{64\pi\varepsilon_0 a^2} = 750$ В/м.

3.21. $Q = 2(a - l\sin\alpha)\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 20$ нКл.

4.2. $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} = 0{,}5$ нФ. 4.3. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1{,}17$ нФ.

4.6. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} = 0{,}21$ нФ/м. 4.8. $C = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon S}{d} = 0{,}7$ нФ.

4.10. а) $U_1 = 7{,}5$ кВ/м, $U_2 = 4{,}5$ кВ/м; б) $q = 2{,}3$ мкКл.

4.11. а) $C = \dfrac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}$;

б) $C = \dfrac{C_1C_3(C_2 + C_4) + C_2C_4(C_1 + C_3)}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}$. 4.14. а) $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}$;

б) $\sigma' = \varepsilon_0 U\dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1)}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2}$. 4.15. $C_1 \approx \pi\varepsilon_0 / \ln(b/a)$.

4.16. а) $C = C_1 + C_2 + C_3$; б) $C = C$. 4.17. а) $C = 2\varepsilon_0 S / 3d$;

б) $C = 3\varepsilon_0 S / 2d$.

4.18. $U \le U_1(1 + C_1/C_2) = 9$ кВ.

4.19. $q = \dfrac{U}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3} = 0{,}06$ мКл.

4.20. $U = \mathcal{E}/(1+3n+n^2) = 10$ В.

4.22. а) $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}\dfrac{C_2C_3 - C_1C_4}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}$ при условии $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{C_3}{C_4}$;

б) $\varphi_A - \varphi_B = \dfrac{(C_2\mathcal{E}_2 - C_1\mathcal{E}_1)}{C_1+C_2+C_3}$. 4.23. $A = \dfrac{q\Delta x}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = 11$ мкДж.

4.24. $A = \dfrac{\varepsilon_0 U^2 S}{2d}(\varepsilon^2 - 1) = 28$ мкДж.

4.25. $q_1 = \mathcal{E}C_2$, $q_2 = -\mathcal{E}C_1C_2/(C_1+C_2)$.

4.27. $C = \dfrac{2C_1C_2 + C_3(C_1+C_2)}{C_1+C_2+2C_3}$. 4.28. Энергия может расходоваться на электромагнитное излучение, уменьшение потенциальной энергии взаимодействия зарядов, нагрев проводов.

4.29. а) $E_2 = E_1/\varepsilon$, $U_2 = U_1/\varepsilon$, $W_2 = W_1/\varepsilon$; б) $E_2 = E_1$, $U_2 = U_1$, $W_2 = \varepsilon W_1$. 4.30. а) $W_{ш} = q^2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$; б) $W_{ср} = q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon R$.

4.31. а) $W = \dfrac{(\sqrt{2}+4)q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$; б) $W = \dfrac{(\sqrt{2}-4)q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$; в) $W = -\dfrac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

4.32. $W = -\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l}$. 4.33. а) $Q = \mathcal{E}^2 CC_0(2C + C_0)$; б) $Q = 0{,}5C\mathcal{E}_2^2$.

4.34. $W = W_1 + W_2 + W_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1^2}{2R_1} + \dfrac{q_2^2}{2R_2} + \dfrac{q_1q_2}{R_2}\right)$.

4.35. а) $W = \dfrac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$; б) $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{1}{5}$. 4.36. $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) = 27$ мДж.

4.37. $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$. 5.1. $Q = 15$ Кл. 5.2. $j = 6{,}1$ МА/м^2.

5.3. $R = 2{,}58$ мОм. 5.4. $R = 5/6$ Ом. 5.5. $R = 3/4$ Ом.

5.6. $R = 7/12$ Ом. 5.7. $I = 10$ А. 5.8. $N = \dfrac{(U_0 - U)US}{P\rho l} = 23$.

5.9. а) $r_1 = 2{,}9$ Ом; б) $r_2 = 4{,}5$ Ом. 5.10. $I = 2$ А.

5.11. $n=\sqrt{NR/r_i}$, $R_i=R$. 5.12. Четыре параллельно соединенных группы по три последовательно соединенных элемента в каждой; $I_{\max}=7{,}5$ А. 5.13. а) $I=3$ А, $U=0$ В; б) $I=0$ А, $U=1{,}2$ В.

5.15. $\Delta\varphi=0$. 5.16. $\varphi_A-\varphi_B=0$. 5.17. $\varphi_1-\varphi_2=-4{,}5$ А.

5.18. $I=0{,}036$ А. 5.19. $U_1=0{,}27$ В, $U_2=1{,}27$ В, $U_3=-2{,}23$ В.

5.20. $I_б=1{,}59$ А, $I_п=3{,}65$ А.

5.21. $R=(1+\sqrt{1+4R_2/R_1})R_1/2=6$ Ом. 5.22. $R=R_0/2$.

5.23. $I=US(\sigma_2-\sigma_1)/d\ln(\sigma_2/\sigma_1)5$ нА. 5.24. $I_1=1{,}5$ А, $I_2=2{,}5$ А, $I_3=4$ А. 5.25. $\varphi_1-\varphi_2=(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)R_1/(R_1+R_2)-\mathcal{E}_1=-4$ В.

5.26. $U=U_0Rx/[Rl+R_0(l-x)x/l]$, при $R\gg R_0$ $U\approx U_0x/l$.

5.27. $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1)/(R_1+R_2)$, $R_i=R_1R_2/(R_1+R_2)$.

5.28. $I=(\mathcal{E}_2R_1-\mathcal{E}_1R_2)/(RR_1+R_1R_2+R_2R)=0{,}02$ А.

5.33. $R_{AB}=r(r+3R)/(R+3r)$. 5.34. 1,6 А; 0,2 А; 1,4 А. 5.35. 0.

5.36. $I_3=0$, $U_3=0$. 5.37. $U=0{,}5\mathcal{E}(1-\exp(-2t/RC))$.

5.38. 3 А; 4 А; 1 А. 5.39. 0,8 А. 5.40. 3,6 В. 5.41. 2 А. 5.42. 15 Вт.

5.43. 0,5 Ом; 2 Вт. 5.44. $I_1=20$ А, $\eta=0{,}17$; $I_2=4$ А, $\eta_2=0{,}83$.

5.45. 45 мин, 10 мин. 5.46. 12 В, 20 м.

5.47. $Q=\dfrac{I_{\max}^2r}{\tau^2}\int\limits_0^\tau t^2dt=\dfrac{1}{3}I_{\max}^2R\tau=100$ кДж.

5.48. $q=\dfrac{1}{2}\sqrt{3Q\tau/R}=20$ Кл.

5.49. $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$, $Q_{\max}=(\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1)^2/4R_1R_2(R_1+R_2)$.

5.50. $Q=\dfrac{1}{2}\dfrac{C\mathcal{E}^2R_1}{R_1+R_2}=60$ мДж.

5.51. $Q=I(\mathcal{E}-U)=0{,}6$ Вт, $P=-IU=-2{,}0$ Вт. 5.52. $I=U/2R$, $P_{\max}=U^2/4R$, $\eta=1/2$. 5.53. $R_x=R_1R_2(R_1+R_2)=12$ Ом.

Список литературы

1. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., стереотип. – М.: Высш. школа, 1991. – 288 с.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. – М., СПб: Лань, 2004.
3. Чертов А. Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., прераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1988. – 526 с.

В.В. Грушин, Е.А. Мазур, С.Л. Тимошенко

Электростатика. Постоянный ток

Пособие к решению задач

(для студентов вечернего факультета)

Под редакцией В.В. Грушина

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 15.02.2011. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 5,0. Печ.л. 5,0. Тираж 210 экз.
Изд. № 002-1 Заказ № 51

Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42