И. С. ГОНОРОВСКИЙ

ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Главным управлением политехнических и машиностроительных вузов Министерства высшего образования СССР в качестве учебного пособия для радиотехнических высших учебных заведений и факультетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ
ПО ВОПРОСАМ СВЯЗИ И РАДИО
МОСКВА 1957

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий учебник, написанный на основе лекций, читаемых автором на радиотехническом факультете Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе, соответствует программе по курсу „Теоретических основ радиотехники", утверждённой Министерством высшего образования СССР для радиофакультетов по специальности „Радиотехника".

Содержание курса и последовательность его изложения складывались на протяжении последних десяти лет с учётом изменений, которые непрерывно накапливались в учебных планах по подготовке радиоспециалистов и вытекали из быстрого развития радиотехники и возникновения ряда новых отраслей радиотехники и радиоэлектроники.

В книге принята следующая последовательность изложения: сначала изучаются сообщения и сигналы, подлежащие передаче и приёму по радиолинии, а затем элементы радиотехнических устройств и происходящие в них процессы и преобразования.

По сравнению с ранее издававшимися в СССР учебниками по курсу теоретических основ радиотехники в данной книге значительно более сильно развиты разделы, посвящённые спектральному анализу, теории переходных процессов при передаче и приёме радиосигналов, а также теории цепей. Впервые вводится изучение основных понятий о нерегулярных (случайных) процессах и о помехоустойчивости радиоприёма.

Наряду с этим отдельные разделы, иногда включавшиеся в некоторые учебники по основам радиотехники, в настоящей книге отсутствуют. К таким разделам относятся: волноводы и объёмные резонаторы, излучение и распространение радиоволн, электроника сверхвысоких частот.

Опыт последних нескольких лет показал, что включение этих разделов в курс теоретических основ радиотехники приводит лишь к перегрузке курса и к ненужному дублированию ряда смежных дисциплин, таких, как теория электромагнитного поля, антенно-фидерные устройства, электронные и ионные приборы и др.

В связи с принятым размежеванием материала между курсом теоретических основ радиотехники и перечисленными выше курсами изложение теории цепей с распределёнными постоянными

в данной книге базируется на теории длинных линий, без привлечения уравнений электродинамики.

На протяжении всей книги автор стремился сочетать сжатое и доходчивое изложение основных понятий, рассчитанных на первоначальное изучение, с более сложными методами анализа, необходимыми для развития у студентов навыков к самостоятельной и творческой деятельности в такой быстро развивающейся области, как радиотехника.

Автор надеется, что, помимо студентов радиофакультетов, книга будет полезна для широкого круга специалистов, аспирантов и научных работников, работающих в области радио или близких к радио отраслях техники.

Рукопись прочитали и сделали ценные замечания: проф. В. В. Огиевский, проф. Е. И. Манаев, проф. Н. Ф. Воллернер, канд. техн. наук А. И. Иванов-Цыганов, канд. техн. наук В. Н. Дулин. Ряд ценных советов был дан доцентом канд. техн. наук Ю. А. Мантейфелем и ст. преподавателем В. И. Ильиным. В обработке рукописи и подготовке её к печати большую помощь автору оказали сотрудники и аспиранты кафедры теоретических основ радиотехники Московского авиационного института, особенно: И. Н. Голуб, В. А. Корнеева, И. И. Мезенцев, Ю. В. Тронин, В. П. Дёмин, В. И. Самойленко и И. И. Андреев.

Всем перечисленным и другим лицам, способствовавшим улучшению рукописи, автор выражает большую благодарность.

Все замечания по книге следует направлять в адрес Связьиздата (Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2).

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании устранены опечатки, допущенные в первом издании, а также некоторые ошибки, исправление которых не требовало переверстки книги.

Автор

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Задачи радиотехники

Основной задачей радиотехники является передача и приём без проводов электрических сигналов. Эта задача решается с помощью излучения энергии антенной передатчика в виде электромагнитных колебаний и улавливания части этой энергии антенной приёмника. В среде, разделяющей передатчик и приёмник, излучённая энергия распространяется в виде свободных электромагнитных волн, по своей природе совпадающих с природой световых волн; различие имеется лишь в длине волны.

Излучение является главной, наиболее характерной чертой радиотехники. Отсюда и происхождение термина радио (от слова *radio* по-латыни).

Из курса физики известно, что эффективное излучение электромагнитной энергии может быть осуществлено лишь в том случае, когда длина волны колебания соизмерима с геометрическими размерами излучающей системы. Это обстоятельство привело к необходимости применять в радиотехнике колебания высокой частоты. Поэтому, хотя вопросы излучения и работы антенн, а также вопросы распространения радиоволн, составляющие содержание отдельных дисциплин, в данной книге не рассматриваются, основное содержание курса основ радиотехники подчинено особенностям высокочастотной техники.

Второй характерной чертой радиотехники является широкое использование электронных приборов.

Высокочастотная техника и электроника, первоначально развивавшиеся в качестве средств передачи и приёма радиосигналов, в настоящее время всё более приобретают также и самостоятельный характер в связи с широким их внедрением в различные области промышленности, техники и науки для решения задач, не связанных с использованием процесса излучения электромагнитных волн.

Радиотелеграфия и радиотелефония, радиовещание, фототелеграфия и телевидение, морская и авиационная навигация, радиолокация, управление на расстоянии движущимися объектами, служба времени, радиометеорология, радиоастрономия — таков да-

леко не полный перечень задач, решаемых современной радиотехникой.

Из промышленных применений высокочастотной техники отметим поверхностную закалку стали, обработку древесины и других материалов, консервирование пищевых продуктов. Всё более развивается применение высокочастотных методов измерения неэлектрических величин (давления, вибраций, небольших смещений и т. д.).

Не ограничены возможности применения техники высоких частот в науке, в частности, в медицине и при новейших исследованиях в области ядерной физики.

Широкое применение радиотехнических методов во всех областях науки и техники объясняется тем, что радиотехника накопила большой опыт в изучении и использовании быстропротекающих процессов (высокочастотные колебания, импульсные процессы).

Для выявления основных проблем радиотехники и отбора наиболее существенных вопросов, подлежащих изучению в курсе „Теоретические основы радиотехники", полезно хотя бы вкратце проследить путь, пройденный радиотехникой со дня своего зарождения и до наших дней.

§ 1.2. Краткий обзор развития радиотехники

Датой изобретения радиосвязи принято считать 7 мая 1895 г. В этот день Александр Степанович Попов сделал на заседании Русского физико-химического общества в Петербурге свой знаменитый доклад „Об отношении металлических порошков к электрическим колебаниям" и продемонстрировал разработанный им „грозоотметчик", который, как заявил изобретатель, „может быть применён к передаче сигналов на расстояние". Этому сообщению предшествовали исследования, проведённые А. С. Поповым и его сотрудниками на протяжении ряда лет в области электромагнитных колебаний.

Следует отметить, что гениальное изобретение А. С. Попова оказалось возможным и было подготовлено всем предыдущим развитием науки об электричестве и об электромагнитном поле. В первую очередь следует упомянуть об исследованиях электрических и магнитных полей, выполненных английским учёным Фарадеем. Открытый им в 1831 г. закон электромагнитной индукции подготовил почву для создания теории электромагнитного поля и распространения электромагнитных волн. Эта задача была блестяще разрешена Дж. К. Максвеллом, который к 1864 г. создал общую теорию электромагнитного поля. Работы Максвелла были опубликованы в 1873 г. Основные положения теории Максвелла, согласно которой электромагнитные волны подчиняются законам света, были встречены с недоверием. Даже после того, как в 1888 г. Г. Герц обнаружил электромагнитные волны экспериментально, практическое использование их казалось невыполнимым.

Грозоотметчик, продемонстрированный Поповым на его докладе в Русском физико-химическом обществе в 1895 г. (рис. 1.1), состоит из провода A (антенна), трубки с металлическим порошком K (когерер) и телеграфного аппарата T для записи принимаемого сигнала на движущуюся бумажную ленту.

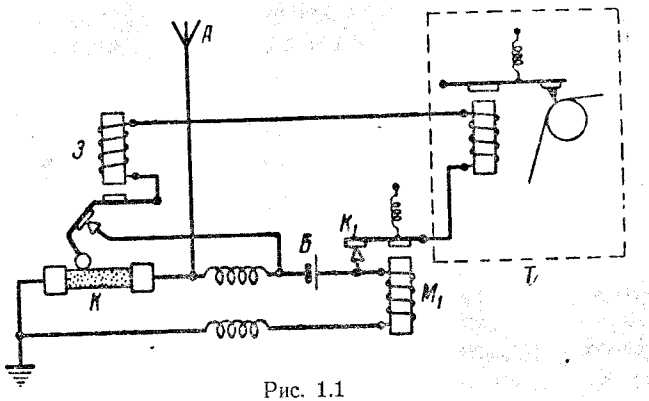


Рис. 1.1

Под действием электромагнитных волн, улавливаемых проводом A из пространства, в цепи антенна — когерер — земля возникает высокочастотный ток. При прохождении этого тока через когерер происходит „упорядочение" порошка, сопровождающееся увеличением проводимости между электродами, введёнными в трубку когерера. Это приводит к увеличению постоянного тока через обмотку электромагнита M_1 и замыканию контакта K_1, включающего телеграфный аппарат T и устройство $З$ типа звонка. Молоточек звонка периодически ударяет по когереру для встряхивания порошка и восстановления его сопротивления. На ленте телеграфного аппарата записываются чёрточки, длина которых пропорциональна длительности воздействия высокочастотных токов на когерер.

Отсюда видно, что грозоотметчик Попова содержал все элементы радиоприёмного устройства: антенну для извлечения энергии электромагнитных волн, прибор для преобразования высокочастотных токов в сигнал и устройство для регистрации сигнала.

В 1896 г. приёмник, схематически показанный на рис. 1.1, был использован А. С. Поповым для демонстрации на заседании Русского физико-химического общества приёма телеграфных сигналов по радио на расстоянии 250 *м*. Первая радиограмма состояла из слов „Генрих Герц". Этот успех, приведший к признанию практического значения электромагнитных волн как средства беспроводной связи, оказался возможным благодаря огромной

работе, проделанной А. С. Поповым по повышению чувствительности когерера, изобретению антенны и созданию остроумной схемы, обеспечивающей регистрацию очень слабых сигналов.

В качестве первых источников высокочастотных колебаний использовались искровые передатчики. Простейший искровой передатчик в таком виде, в каком он был применён А. С. Поповым (рис. 1.2), состоит из источника энергии (батарея *Б*), индукционной катушки *ИК*, разрядника *Р* и излучающего провода *А* (антенна). В цепи первичной обмотки индукционной катушки имеется прерыватель *Пр*, обеспечивающий периодическое замыкание и размыкание цепи источника тока. При каждом замыкании ток в цепи нарастает относительно медленно (из-за большой постоянной времени обмотки) и к моменту следующего размыкания в магнитном поле катушки запасается значительная энергия.

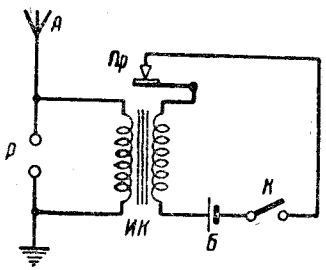


Рис. 1.2

В момент размыкания цепи происходит очень быстрое исчезновение магнитного потока, сопровождающееся индуктированием высокого напряжения на многовитковой обмотке индукционной катушки. Это приводит к заряду провода *А*, присоединённому к верхнему зажиму обмоток и обладающему по отношению к земле значительной ёмкостью. Когда напряжение на концах вторичной обмотки достигает пробивного напряжения разрядника,

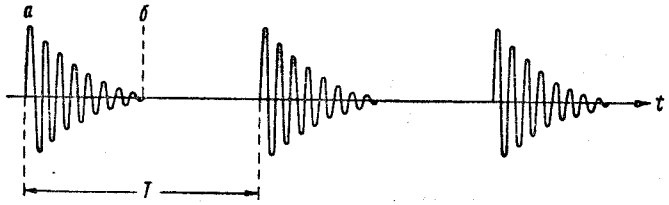


Рис. 1.3

между электродами последнего проскакивает искра и из антенного провода образуется контур, почти не связанный с индукционной катушкой, которая закорачивается малым сопротивлением искрового промежутка. В антенном контуре происходит колебательный разряд ёмкости в виде затухающего колебания (участок *а—б* на рис. 1.3). Период колебания определяется, в основном, ёмкостью и индуктивностью провода. Когда вся энергия, накопленная ёмкостью антенны к моменту пробоя разрядника, израсходуется частично в сопротивлении потерь самого контура и частично на излучение, колебания прекращаются, и процесс на этом заканчивается.

Так как прерыватель обеспечивает периодическое прерывание цепи, описанный процесс будет повторяться, и ток в антенне будет иметь вид периодической последовательности затухающих серий колебаний (рис. 1.3).

В течение примерно 15 лет со дня демонстрации Поповым своего изобретения радиосвязь осуществлялась исключительно с помощью затухающих колебаний. Единственным видом сигналов, передаваемых в то время по радио, являлся телеграфный сигнал.

Особенно велико значение радио для связи с подвижными объектами. Не случайно поэтому первые практические применения радиосвязи в России были реализованы А. С. Поповым в Балтийском флоте. В 1897 г. Попов осуществил связь между крейсером „Африка" и учебным судном „Европа" на расстоянии 5 *км*. Вскоре началось изготовление радиоаппаратуры для оснащения радиотелеграфными станциями кораблей Балтийского и Черноморского флотов. Наряду с этим усилиями русских и зарубежных учёных и инженеров стала быстро развиваться радиотелеграфная связь между городами, странами и даже материками. Это объясняется тем, что к концу прошлого столетия электрический телеграф уже получил значительное развитие и существовала весьма развитая сеть кабельных линий, в том числе и подводных кабелей через моря и океаны. Радиотелеграфия, устранявшая необходимость в дорогостоящих кабелях, сразу произвела революцию в технике связи.

К 1910 г. радиотелеграфные линии связи большой протяжённости были оснащены значительно усовершенствованными искровыми передатчиками и кристаллическими детекторными приёмниками. Приём производился на слух.

В этот период была создана развёрнутая теория генерации и приёма затухающих колебаний. В работах А. А. Петровского, Д. А. Рожанского и ряда других русских и зарубежных учёных были освещены основные проблемы радиосвязи того времени и выявлены ограничения и недостатки, присущие искровой радиотелеграфии.

Главные из этих недостатков: взаимные помехи из-за чрезмерно широкого спектра частот затухающих колебаний, невыгодное соотношение между максимальной и средней мощностью излучаемых передатчиком колебаний, трудность осуществления радиотелефонной передачи.

Переход на незатухающие колебания стал возможен после 1910 г. благодаря появлению дуговых передатчиков. Мощности дуговых передатчиков были доведены до 1500 *квт*, что позволило осуществлять радиосвязь на линиях большой протяжённости (до 10 000 *км*).

Затем дуговые передатчики были вытеснены машинными, в конструировании которых были достигнуты весьма хорошие

результаты. В 20-х годах широкую известность получили машины высокой частоты В. П. Вологдина и Э. Александерсона (США).

В последних образцах генераторов переменного тока высокой частоты, разработанных В. П. Вологдиным, обеспечивались синусоидальная форма колебания, высокая стабильность частоты и хороший кпд. Генераторы переменного тока строились на частоты порядка $20 \div 40$ *кгц* и применялись для радиосвязи на длинных волнах ($7{,}5 \div 15$ тыс. *м*).

Как уже отмечалось, приём незатухающих колебаний производился в те годы с помощью кристаллического детектора. Для получения слышимого тона использовался механический прерыватель, который периодически размыкал цепь приёмника.

Применение электронной лампы вызвало революцию в развитии радиотехники. Наличие такого прибора, представляющего собой почти безынерционное реле, открыло путь, во-первых, к эффективной генерации и к усилению колебаний в широком диапазоне частот и, во-вторых, к передаче сообщений любой формы и сложности.

Применяя современную терминологию, можно сказать, что малая инерционность электронных приборов позволяет осуществить передачу сообщений (сигналов), обладающих сколь угодно широким частотным спектром. Необходимо лишь, чтобы полоса частот передаваемого сигнала была мала по сравнению с частотой несущего колебания, используемого для осуществления излучения. Не удивительно, что в очень короткие сроки были освоены методы передачи и приёма по радио речи („коммерческая" или служебная радиотелефония) и музыки, чем было положено начало радиовещанию, затем передачи неподвижных изображений (фототелеграфия) и ряда других видов сообщений.

В дореволюционной России радиотехника и радиопромышленность развивались слабо. Царское правительство недооценивало значения изобретения А. С. Попова и не оказывало должной поддержки ведущим русским учёным-радиотехникам того времени. Однако, несмотря на отсутствие такой поддержки, к 1917 г. в России сложилась крупная научная школа радиоспециалистов, которые своими исследованиями часто опережали зарубежную научную мысль, но были лишены промышленной базы для создания и внедрения в широких масштабах радиоаппаратуры.

Лишь после Октябрьской революции в России началось бурное развитие радиотехники и промышленности. Большую роль в этом сыграли мероприятия Советского правительства и лично В. И. Ленина по организации радиовещания и по созданию радиопромышленности. Был создан научный центр (Нижегородская радиолаборатория), возглавленный М. А. Бонч-Бруевичем и сплотивший ведущих русских радиоспециалистов того времени.

Для того, чтобы проследить основные направления дальнейшего развития радиотехники, необходимо учитывать следующие

два фактора: 1) освоение новых диапазонов частот и 2) особенности распространения волн различных диапазонов.

Первый фактор, тесно связанный с развитием электронных приборов, почти неограниченно расширяет области применения высокочастотной техники.

Наряду с передачей сообщений по радио (радиосвязь) высокочастотная техника начала проникать в проводную связь, промышленность, науку, медицину и т. д.

Второй фактор, существенный только для радиосвязи, ограничивает выбор способов осуществления передачи сигналов. Из всего многообразия методов передачи сигналов пригодными оказываются только те, при которых обеспечиваются благоприятные условия распространения радиоволн и сохранение структуры сигнала при распространении.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. При распространении радиоволн в земной атмосфере имеют место явления поглощения, преломления и отражения, дифракции и интерференции волн. Все эти явления, присущие распространению света, обладают в данном случае рядом особенностей, обусловленных длиной электромагнитных волн и структурой земной атмосферы.

По современным воззрениям земная атмосфера представляет собой хороший диэлектрик лишь в нижних слоях, непосредственно прилегающих к поверхности земли. Под влиянием лучей солнца и других излучений, приходящих из космического пространства, воздух ионизируется и начинает приобретать свойства полупроводников. Наибольшая интенсивность ионизации имеет место в верхних слоях атмосферы, образующих так называемую ионосферу. Хотя распределение степени ионизации по высоте весьма неравномерно и имеет расплывчатый характер, изменяющийся в зависимости от времени года, времени суток, географического положения и т. д., можно всё же выделить несколько слоёв, окружающих землю. В результате многочисленных исследований, основанных на изучении условий радиосвязи на различных волнах и применении специальных „ионосферных" радиостанций, удалось установить, что ионосфера состоит из следующих основных слоёв: слой D, расположенный на высоте около 50 *км*, слой E на высоте $100 \div 150$ *км* и слой F на высоте $200 \div 500$ *км*.

Слой D существует только днём. В слое E плотность ионизации также сильно снижается в ночные часы, поэтому слой E влияет на распространение радиоволн в основном днём. В дневные часы слой F расщепляется на два слоя F_1 и F_2. Высота слоя F_1 порядка 200 *км*, а F_2 — 300 — 400 *км*.

Наиболее устойчивым из всех слоёв ионосферы является слой F_2, обладающий наибольшей средней плотностью ионизации.

Как уже отмечалось, высота слоёв и их толщина, а также степень ионизации изменяются по сложному закону в зависимости от ионизирующего действия солнечных и иных лучей. Поэтому

приведённая выше картина ионосферы является весьма условной. Тем не менее, основываясь на этой картине расположения слоёв в ионосфере, можно установить главные особенности распространения радиоволн различной длины.

На длинных волнах ($\lambda = 3000$ *м* и более) излучение антенн обычно ненаправленное, так как на таких длинных волнах размеры антенны малы по сравнению с длиной волны и излучаемые волны распространяются примерно одинаково по всем направлениям вдоль земной поверхности („поверхностная волна"). Главной особенностью длинных волн является их способность огибать земную поверхность.

При распространении радиоволн над земной поверхностью происходит поглощение их энергии, зависящее от электрических свойств почвы и рельефа поверхности. При распространении над хорошо проводящей поверхностью поглощение получается относительно небольшим и затухание волны очень малым. В случае же полупроводника, каковым является обычная почва, поле волны создаёт в почве токи проводимости и токи смещения, которые вызывают потери энергии. С понижением частоты потери в почве быстро убывают. Так как поверхностная волна почти не подвержена влиянию верхних ионизированных слоёв атмосферы, то связь на длинных волнах характеризуется независимостью условий распространения от суточных изменений солнечной деятельности. Вместе с тем наблюдается бóльшая дальность действия длинноволновых станций зимой и ночью, нежели летом и днём. Это объясняется меньшей ионизацией воздуха зимой и ночью.

При укорочении волны картина распространения их в пространстве, ограниченном земной поверхностью и ионизированными слоями, усложняется. Во-первых, с укорочением волны электромагнитные волны всё более принимают форму направленных лучей, наклонённых под некоторым углом к горизонту. Во-вторых, уменьшается их способность к дифракции. Поэтому наряду с поверхностной волной все бóльшую роль начинает играть *пространственная* волна, условия распространения которой в отличие от поверхностной волны определяются, в основном, структурой ионосферы.

Встречаясь с ионизированными слоями, лучи преломляются и при некоторых условиях, зависящих от угла прихода, плотности ионизации и частоты, отражаются и опять попадают на землю на значительном расстоянии от антенны передатчика, где снова отражаются и т. д. (рис. 1.4). Таким образом, на поверхностную волну накладывается пространственная и возникает явление *интерференции* волн. При сложении в фазе получается усиление приёма, при сложении в противофазе — ослабление.

Так как условия преломления и отражения в ионизированных слоях испытывают, как уже отмечалось, непрерывные изменения, то и расположение зон усиления и ослабления приёма не является

постоянным. В приёмнике, находящемся на достаточно большом расстоянии от передатчика, получается нерегулярное изменение силы приёма вплоть до полного его прекращения (замирание).

Так как плотность ионизации плавно изменяется по высоте, то условия преломления также изменяются и луч, попадая в слой *E* или *F*, искривляется.

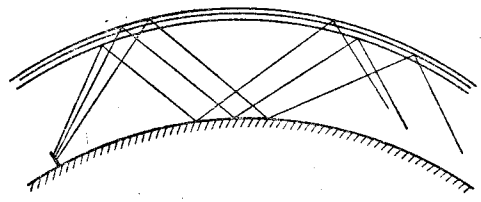


Рис. 1.4

Если луч принимает горизонтальное направление на высоте меньшей, чем высота слоя максимальной ионизации, то произойдёт отражение и луч вернётся на землю. В противном случае лучи уходят за ионосферу. Ясно, что чем меньше угол, под которым излучается волна, тем благоприятнее условия для отражения луча от ионосферы. С другой стороны, при одной и той же степени ионизации условия для отражения луча тем хуже, чем выше частота (т. е. чем короче волна).

Наконец, необходимо учитывать, что с повышением частоты поглощение энергии волны в ионосфере падает. На коротких и ультракоротких волнах ($\lambda \leqslant 50$ *м*) поглощение почти незаметно. В результате при достаточно коротких волнах основное значение приобретает пространственная волна. Наконец, при волнах настолько коротких ($\lambda = 8-9$ *м*), что отражение от ионосферы невозможно, радиосвязь осуществляется только в пределах прямой видимости.

Учитывая эти особенности распространения, можно перечислить области применения радиоволн различных диапазонов. Подразделение радиоволн на диапазоны, вошедшее в практику, дано в следующей таблице:

Диапазон волн	Волна	Частота
Длинные волны	3 000 *м* и более	Ниже 100 *кгц*
Средние волны	3 000—200 *м*	100— 1 500 „
Промежуточные волны	200—50 „	1 500— 6 000 „
Короткие волны	50—10 „	6— 30 *Мгц*
Метровые (ультракороткие волны)	10—1 „	30— 300 „
Дециметровые (ультракороткие волны)	1—0,1 „	300— 3 000 „
Сантиметровые (ультракороткие волны)	10 *см*—1 *см*	3 000—30 000 „

Длинные волны, применявшиеся на первом этапе развития радиотехники для радиотелеграфной связи, имеют два крупных недостатка: а) необходимость больших мощностей ввиду сильного поглощения поверхностной волны и б) непригодность для передачи сложных (широкополосных) сигналов.

Средние волны получили широкое применение для радиовещания. Основным преимуществом волн, длиннее 1000 *м*, является устойчивость силы приёма, недостатком — трудность обеспечения дальности действия ввиду значительного поглощения поверхностной волны. Поэтому на средних волнах осуществляется преимущественно местное радиовещание, рассчитанное на зоны с радиусом несколько сот километров. Лишь небольшое число сверхмощных радиостанций обслуживает большие районы. В СССР, обладающем огромной территорией, существует наибольшее число мощных и сверхмощных радиовещательных станций средневолнового диапазона.

Начиная с 30-х годов, стало быстро развиваться радиовещание на коротких волнах. Большую роль в этом сыграло массовое радиолюбительство. Коротковолновый диапазон, который до этого считался не пригодным для регулярной радиосвязи, был отдан радиолюбителям. Когда выяснилось, что радиолюбителям, работавшим с маломощными передатчиками, удавалось устанавливать двустороннюю связь на огромные расстояния, к особенностям распространения коротких волн было привлечено внимание учёных, специалистов и различных организаций. Накопление большого экспериментального материала по условиям распространения коротких волн позволило установить оптимальные длины волн для различных часов суток и времён года, обеспечивающие благоприятные условия распространения. Главные достоинства вещания на коротких волнах: возможность получения очень большой дальности действия при относительно малой мощности передатчика и возможность осуществления направленного излучения. Основным недостатком коротковолнового вещания являются колебания силы приёма (замирания), часто сопровождающиеся сильными искажениями передачи: при сложной структуре сигнала, состоящего из большого числа составляющих с различными частотами, условия интерференции, зависящие от частоты, могут оказаться неодинаковыми для различных составляющих спектра сигнала. Это явление, называемое избирательным (или селективным) замиранием, приводит к временным выпадениям из спектра сигнала отдельных составляющих или, наоборот, к усилению амплитуд этих составляющих. Таким образом, в точке приёма нарушается правильное соотношение между отдельными компонентами сигнала, в результате чего искажается тембр и чистота передачи. Так как явление избирательного замирания проявляется тем сильнее, чем шире спектр сигнала, то осуществлять на коротких волнах передачи таких сложных сигналов, как, например, телевизионных, практически невозможно.

Наряду с радиовещанием короткие волны исключительно широко применяются в настоящее время для радиотелеграфии на магистральных линиях связи. Телеграфный обмен на линиях Москва — Хабаровск, Москва — Ташкент и других внутренних и международных линиях большой протяжённости осуществляется

исключительно в коротковолновом диапазоне. Короткие волны применяются также для морской и авиационной радионавигации.

Появление таких отраслей радиотехники, как телевидение и радиолокация, оказалось возможным благодаря освоению ультракоротковолновых диапазонов. Здесь имеет место удачное сочетание двух факторов. Применение очень высокой частоты излучения позволяет соответственно расширить и полосу частот передаваемого сообщения, так как условия передачи и усиления сигналов в радиоаппаратуре определяются, в основном, относительной шириной спектра сигнала. Особенности же распространения укв (в пределах прямой видимости) почти полностью исключают искажения сигнала из-за интерференции волн, распространяющихся по разным путям.

То обстоятельство, что на укв регулярный приём возможен только в пределах прямой видимости является, конечно, существенным ограничением. Для увеличения дальности связи на укв обычно применяют высоко поднятые антенны. Последние десятилетия характеризуются развитием так называемых радиорелейных линий, представляющих собой цепочку приёмо-передающих укв радиостанций, расположенных вдоль линии связи через несколько десятков километров. Подобные линии позволяют осуществлять многоканальную связь, а также обмен телевизионными программами между пунктами, удалёнными на весьма значительное расстояние.

Из приведённого выше краткого обзора видно, что развитие радиотехники характеризуется непрерывным расширением используемых волновых диапазонов в сторону всё более высоких частот и расширением спектров передаваемых сигналов. Возникла так называемая техника сверхвысоких частот (свч) и импульсная техника.

Вместе с тем можно отметить, что, начиная со дня изобретения радио А. С. Поповым и до настоящего времени, центральной проблемой радиотехники была и остаётся проблема борьбы с помехами радиосвязи. Эта проблема включает в себя большое число других проблем, охватывающих все разделы радиотехники: генерирование мощных колебаний, выбор волн, обеспечивающих благоприятные условия распространения, использование антенн направленного действия, выбор способа управления колебаниями для передачи сигналов, построение схемы приёмника и др.

§ 1.3. Основные радиотехнические процессы

Общие замечания. В радиотехнике приходится иметь дело с разнообразными формами превращения электрической энергии. При этом используются процессы, основанные на различных физических явлениях и принципах. Некоторые из этих процессов являются обязательными для любого радиотехнического тракта,

независимо от его назначения, а также от характера передаваемых сигналов. Перечислим эти фундаментальные процессы и попутно отметим их основные черты, придерживаясь представленной на рис. 1.5 обобщённой блок-схемы радиопередающего и радиоприёмного устройства.

Генерация высокочастотных колебаний. Современный высокочастотный генератор состоит из следующих трёх элементов: источника энергии (генератора постоянного тока, сети переменного тока с выпрямителем, батареи и т. д.), электронного прибора (триода, тетрода, магнетрона, клистрона и т. д.) и колебательной системы. В генераторе сверхвысоких частот электронный прибор и колебательная система обычно представляют собой одно неразрывное целое.

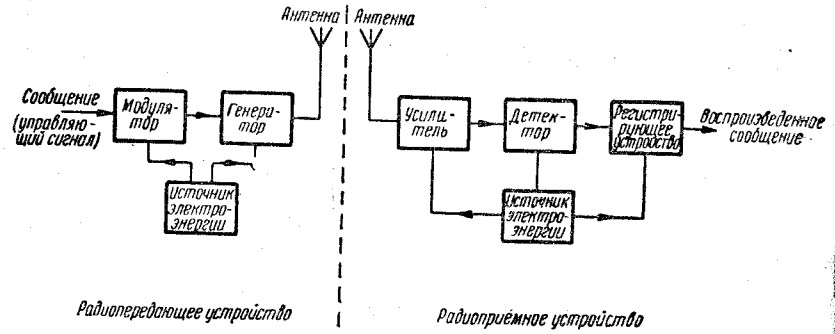


Рис. 1.5

Высокочастотный генератор часто называют электронным генератором. Подобный генератор можно рассматривать как устройство, преобразующее энергию питающего тока (напряжения) в энергию быстропеременных токов, протекающих в колебательной системе генератора.

В зависимости от назначения мощности высокочастотных генераторов изменяются в пределах от долей ватта до сотен и тысяч киловатт.

Основными характеристиками высокочастотного генератора являются: длина волны; мощность; отдача (коэффициент полезного действия); стабильность частоты генерируемых колебаний; диапазонность, т. е. возможность быстрой перестройки генератора с одной рабочей частоты (волны) на другую.

Управление колебаниями (модуляция). Процесс модуляции заключается в изменении одного (или нескольких) параметров высокочастотного колебания по закону изменения передаваемого сигнала. В зависимости от изменяемого параметра (амплитуды, частоты или фазы колебания) различают три основных вида модуляции: амплитудную, частотную и фазовую.

Частоты модулирующего сигнала, как правило, малы по сравнению с исходной частотой („несущей частотой") управляемого колебания.

Изменение одного из параметров высокочастотного колебания лишает последнее гармонического характера, придавая ему более сложную структуру. При этом в спектре модулированного колебания возникают частоты, являющиеся комбинациями из частот модулирующего сигнала и исходной частоты высокочастотного колебания. Можно поэтому считать, что процесс модуляции сопровождается трансформацией (преобразованием) частотного спектра колебания.

Для осуществления модуляции используются различные приёмы, чаще всего основанные на изменении потенциалов электродов ламп, входящих в схему радиопередающего устройства.

Процесс модуляции и модуляционное устройство характеризуются следующими основными данными: степенью соответствия между законом изменения управляемого параметра (амплитуда, частота, фаза) и модулирующим сигналом; отдачей высокочастотного генератора в режиме работы, обеспечивающем осуществление модуляции; соотношением между мощностью модулятора и мощностью управляемого генератора.

Усиление слабых сигналов в приёмнике. Антенна приёмника улавливает ничтожную долю энергии, излучаемой антенной передатчика. В зависимости от расстояния между передающей и приёмной станциями, от степени направленности излучения антенн и условий распространения радиоволн мощность на входе приёмника измеряется величинами порядка $10^{-10} \div 10^{-14}$ *вт*. На выходе же приёмника для надёжной индикации сигнала требуется мощность порядка единиц ватт и более. Отсюда видно, что усиление в приёмнике должно достигать $10^{10} \div 10^{14}$ по мощности или $10^5 \div 10^7$ по напряжению.

В современных приёмниках уверенная регистрация сигнала обеспечивается при напряжениях на входе порядка микровольта. Осуществление столь сложной задачи оказывается возможным благодаря достижениям современной электроники. Большую роль играют также специальные методы построения схем приёмников, обеспечивающие большое усиление при сохранении устойчивости работы приёмника. К таким методам относится преобразование (понижение) частоты колебания в тракте приёмника, осуществляемое так, что сохраняется структура передаваемого сигнала.

Процесс преобразования частоты, помимо приёмной техники, широко применяется в различных радиотехнических и радиоизмерительных устройствах.

Проблема усиления в приёмнике не отделима от проблемы выделения сигнала на фоне помех.

Одним из основных показателей приёмника является поэтому избирательность, под которой подразумевается способность приёмника выделять полезные сигналы из совокупности посторонних воздействий (помех), отличающихся по частоте от сигнала.

Частотная избирательность осуществляется с помощью резонансных колебательных систем.

Выделение сигнала из высокочастотного колебания (детектирование). Детектирование является процессом, обратным по отношению к модуляции. В результате детектирования должно быть выделено электрическое напряжение (ток), изменяющееся во времени по закону передаваемого сигнала, т. е. по закону, по которому изменяется один из параметров (амплитуда, частота или фаза) модулированного колебания, действующего на входе детектора. Как и при модуляции, различают три вида детектирования: амплитудное, частотное и фазовое. Детектор, как правило, включается на выходе приёмника и, следовательно, к нему подводится модулированное колебание, уже усиленное предыдущими ступенями приёмника. Поэтому перед детектором не ставится задача усиления сигналов. Основное требование к детектору — это по возможности точное воспроизведение формы сигнала.

Помимо перечисленных процессов, так или иначе связанных с преобразованием частотных спектров, в радиотехнических устройствах широчайшее применение находит процесс усиления колебаний без трансформации частоты, осуществляемый в различных усилителях.

К таким усилителям относятся:

„низкочастотные" усилители управляющих сигналов, используемые для усиления сигналов перед подачей на модулятор передатчика, а также на выходе приёмника (после детектирования);

усилители коротких импульсов, применяемые в телевизионной и радиолокационной технике, а также в импульсных системах радиосвязи;

высокочастотные усилители больших амплитуд, применяемые в радиопередающих устройствах;

высокочастотные усилители малых амплитуд, применяемые в радиоприёмных устройствах и измерительных схемах.

Помимо перечисленных процессов, присущих, как уже отмечалось, любой радиотехнической линии, в ряде специальных случаев широко применяются многие другие процессы: умножение и деление частоты, генерация коротких импульсов, различные виды импульсной модуляции и др.

Некоторые, наиболее существенные из перечисленных процессов рассматриваются в соответствующих главах данной книги.

§ 1.4. Линейные и нелинейные системы

Перечисленные в предыдущем параграфе радиотехнические процессы и преобразования осуществляются с помощью сочетания большого числа линейных и нелинейных элементов.

К линейным элементам относятся элементы колебательных систем (катушки индуктивности, конденсаторы, отрезки линий и волноводов), сопротивления, воздушные трансформаторы и другие детали, параметры которых не зависят от величины токов или напряжений.

К нелинейным элементам радиотехнических устройств относятся электронные и ионные, а также полупроводниковые приборы, параметры которых зависят от величины протекающих через приборы токов или от величины действующих на них напряжений.

Из дальнейшего рассмотрения будет видно, что приведённые выше определения линейных и нелинейных элементов являются условными. В зависимости от величины токов и напряжений одни и те же элементы могут вести себя как линейные или как нелинейные. Например, трансформаторы со стальным сердечником при работе с малыми амплитудами токов в обмотках, когда изменение индукции пропорционально изменению тока, могут рассматриваться как линейные элементы. Если же амплитуды тока достигают величины, соответствующей магнитному насыщению стали, трансформатор ведёт себя как сугубо нелинейное устройство; аналогично и электронные приборы при очень малых амплитудах напряжений, в пределах которых вольтамперные характеристики электронных приборов линейны, можно рассматривать как линейные устройства. С другой стороны, такие линейные элементы, как катушки индуктивности или конденсаторы, при некоторых условиях могут обладать нелинейными свойствами. Так, например, при пропускании токов очень большой величины через недостаточно жёсткую обмотку размеры последней могут изменяться под действием электродинамических сил, пропорциональных величине тока. В результате индуктивность катушки оказывается зависимой от тока, что является признаком нелинейности устройства. В случае конденсатора фактором нелинейности может оказаться, например, нарушение электрической прочности при очень больших напряжениях. Чрезмерное нагревание элементов электрических цепей, зависящее от величины токов и напряжений, также зачастую придаёт нелинейный характер элементам, которые при иных, нормальных, условиях могут рассматриваться как вполне линейные.

Несмотря на отмеченную особенность реальных устройств, разделение их на линейные и нелинейные является в технике вполне оправданным и весьма удобным. Необходимо лишь условиться под линейными устройствами подразумевать такие устройства, в которых факторы нелинейности при нормальном режиме работы являются исчезающе малыми. Под нелинейными же устройствами следует подразумевать такие устройства, в которых факторы нелинейности сопутствуют нормальному режиму работы.

Имея в виду эти ограничения понятий о линейных и нелинейных элементах, обратимся к рассмотрению основных свойств линейных и нелинейных систем.

Можно дать следующее общее определение: система линейна, если её поведение описывается линейными интегро-дифференциальными уравнениями. В противном случае, т. е. если для описания поведения системы требуется применение нелинейных уравнений, то система нелинейна.

Для раскрытия физического содержания приведённых математических формулировок рассмотрим сперва свойства линейных систем. С этой целью обратимся к цепи, состоящей из трёх линейных элементов: индуктивности L, ёмкости C и сопротивления r, и допустим, что последовательно в контур включена электродвижущая сила произвольной формы $e(t)$.

Для тока в контуре $i(t)$ можно написать следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}\int idt=e(t). \tag{1.1}$$

Это уравнение является линейным, если коэффициенты L, r и $\frac{1}{C}$ не зависят от величины тока i или, что то же самое, от величины внешней силы $e(t)$.

При выполнении этого условия напряжения на каждом из элементов контура линейно связаны с величиной тока i. Действительно, обозначая эти напряжения соответственно через u_r, u_L и u_C, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= ri \\ u_L &= L\frac{di}{dt} \\ u_C &= \frac{1}{C}\int idt \end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

При любом законе изменения тока во времени, меняя в n раз величину тока, получим такие же (в n раз) изменения величин напряжений на всех элементах контура. Таким образом, в линейных системах обеспечивается прямая пропорциональность между величинами напряжений u_r, u_L и u_C и тока i.

В частности, при изменении тока по закону

$$i=I\sin\omega t,$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= rI\sin\omega t \\ u_L &= L\omega I\cos\omega t \\ u_C &= -\frac{1}{\omega C}I\cos\omega t \end{aligned}\right\}. \tag{1.2'}$$

Изменение амплитуды тока I в n раз даёт такое же изменение амплитуды напряжения на элементах r, L и C.

Это свойство линейных элементов можно толковать как результат линейности их вольтамперных характеристик. Для элемента r вольтамперная характеристика представлена рис. 1.6, на котором по осям координат можно откладывать как мгновенные, так и амплитудные значения u_r и i, а для элементов L и C—рис. 1.7, где по осям отложены соответственно амплитуды U_L, I или U_C, I.

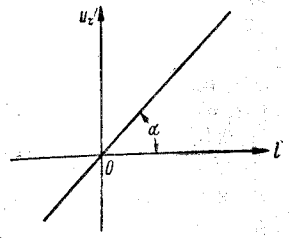


Рис. 1.6

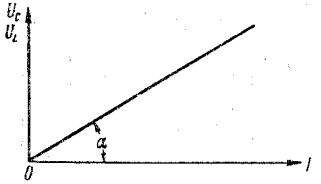


Рис. 1.7

Заметим, что частотные зависимости вольтамперными характеристиками не учитываются. Здесь важна только связь между амплитудами рассматриваемых величин U_L, U_C и I. В случае же элемента r функции $u_r(t)$ и $i(t)$, как известно, могут отличаться только постоянным коэффициентом r.

Угловой коэффициент вольтамперных характеристик при гармоническом изменении тока во времени равен:

для сопротивления—$\operatorname{tg}\alpha=\frac{U_r}{I}=r$,

для индуктивности—$\operatorname{tg}\alpha=\frac{U_L}{I}=\omega L$,

для ёмкости—$\operatorname{tg}\alpha=\frac{U_C}{I}=\frac{1}{\omega C}$.

Другим важным свойством линейных систем, также вытекающим из линейности дифференциального уравнения, описывающего поведение (ток, напряжение) системы, является справедливость принципа независимости или наложений (суперпозиции).

Суть этого принципа может быть сформулирована следующим образом:

При действии на линейную систему нескольких внешних сил поведение системы (ток, напряжение) можно определять путём наложения (суперпозиции) решений, найденных для каждой из сил в отдельности.

Можно применить ещё и такую формулировку: В линейной системе сумма эффектов от различных воздействий совпадает с эффектом от суммы воздействий.

Принцип наложения лежит в основе исследования поведения линейных систем под действием сложных внешних сил (несинусоидальные токи и напряжения, импульсные процессы и т. д.).

Пусть, например, требуется найти ток в цепи, на которую действует электродвижущая сила $e(t)$ в виде сложной функции, график которой показан на рис. 1.8 сплошной линией. Разобьём ось времени на равные интервалы Δt и обозначим через e_1, $e_2 \cdots e_n$ ординаты кривой $e(t)$ в моменты времени $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$, $\ldots t_n = n\Delta t$, а через Δe_1, $\Delta e_2 \ldots \Delta e_n$ и т. д. соответственно приращения эдс. Находим, далее, ток i_0 от включения постоянной эдс e_0 в момент $t = 0$, ток i_1 от включения постоянной эдс Δe_1 в момент $t = \Delta t$, ток i_2 от включения эдс Δe_2 в момент $t = 2\Delta t$ и т. д. Тогда в силу принципа наложения суммарный ток в момент времени t определится как предел суммы

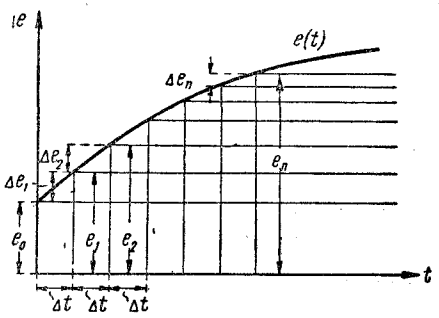


Рис. 1.8

$$\sum_{k=0}^{\infty} i_k(t) \text{ при } \Delta t \to 0, \qquad (1.3)$$

где суммирование ведётся по всем интервалам от 0 до t.

Удобство этого метода, позволяющего сколь угодно сложное воздействие разложить на более простые (элементарные) воздействия, для которых определение реакции системы обычно не представляет труда, очевидно.

В данном примере использовано разложение на постоянные электродвижущие силы, возникающие в различные моменты времени. Можно было бы разложить $e(t)$ на гармонические эдс, действующие при $-\infty < t < +\infty$, по отношению к которым применимы обычные методы теории переменных токов (например, метод комплексных амплитуд). Последний приём, особенно употребительный в радиотехнике, подробно излагается в гл. 2.

Изложенные выше свойства линейных систем справедливы и в том случае, когда параметры цепи — L,C или r являются функциями времени (конечно, при условии, что $L(t)$, $C(t)$ или $r(t)$ не зависят от токов и напряжений).

Если же параметры цепи являются постоянными величинами, то линейная система обладает ещё одним важным свойством: при сколь угодно сложном воздействии в линейной системе с постоянными параметрами не возможно возникновение новых частот.

Для доказательства этого положения достаточно представить сколь угодно сложную внешнюю силу, стоящую в правой части ур-ния (1.1), в виде суммы гармонических слагаемых, действующих в пределах $-\infty < t < +\infty$. Тогда суммарный ток (или напряжение) в цепи можно в силу принципа независимости искать в виде суммы частных решений, соответствующих отдельным гармоническим составляющим сложной эдс.

Так как по условию последние действуют при $-\infty < t < +\infty$, то и вызываемые ими токи представляют собой гармонические функции времени, действующие при $-\infty < t < +\infty$. Следовательно, частотный спектр тока состоит из тех же частот, что и спектр вынуждающей эдс.

Поясним это положение на следующем примере. Пусть действующая в контуре L, C, r эдс e (t) имеет вид последовательности

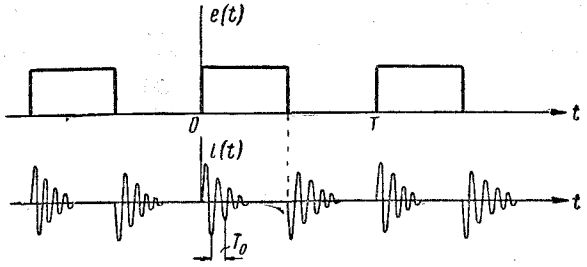


Рис. 1.9

прямоугольных импульсов; тогда ток в контуре будет представлять собой серии затухающих колебаний, возникающих в моменты разрывов функции e (t) (рис. 1.9). Эти серии представляют собой собственные колебания контура и характеризуются периодом T_0, который связан с параметрами контура следующим соотношением (влиянием сопротивления r пренебрегаем):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Таким образом, частота возбуждаемых в контуре колебаний (тока) определяется параметрами системы и совершенно не зависит от периода следования импульсов вынуждающей эдс $e(t)$, что на первый взгляд противоречит положению о невозможности возникновения новых частот в линейной системе с постоянными параметрами. Нетрудно, однако, показать, что это противоречие только кажущееся. В действительности показанный на рис. 1.9 ток является сложной периодической функцией времени, состоящей из тех же гармоник, что и эдс $e(t)$. Резкое отличие формы тока от формы эдс обусловлено изменением амплитудных и фазовых соотношений между отдельными гармониками тока ввиду неодинаковой реакции контура на различные гармоники эдс. Эта реакция тем сильнее, чем ближе частота гармоники к собствен-

ной частоте контура. Этим и объясняется, что на отдельных отрезках времени (вблизи скачков эдс) кривая $i(t)$ имеет период T_0, хотя в составе тока нет частот, которых бы не было в составе эдс.

Итак, с помощью одних лишь линейных систем с постоянными параметрами принципиально невозможно осуществить преобразование электрической энергии, сопровождающееся трансформацией частотных спектров.

Иначе обстоит дело в случае линейных систем с переменными параметрами. Изменяя по определённому закону один из параметров системы, находящейся под воздействием внешней эдс, можно осуществить то или иное преобразование тока или напряжения в цепи, сопровождающееся появлением новых частот. Простейшим примером подобной системы является угольный микрофон, в котором изменение сопротивления, обусловленное колебаниями мембраны, приводит к изменению тока в цепи, питаемой от источника постоянной эдс. Таким образом, в цепи микрофона возникают токи звуковой частоты, которой нет в составе эдс. Можно привести также пример и из области высокочастотной техники. Изменяя по определённому закону индуктивность или ёмкость колебательного контура, находящегося под воздействием гармонической эдс, можно осуществить модуляцию тока в контуре, что сопровождается возникновением новых частот.

Обратимся к рассмотрению нелинейных систем. Если хотя бы один из коэффициентов дифференциального уравнения системы является функцией действующих в системе токов или напряжений, то уравнение становится нелинейным. Строгих методов интегрирования нелинейных уравнений, как известно, не существует. Поэтому в технике широкое распространение получили приближённые методы, основанные на различных приёмах сведения нелинейных систем к ,,почти" линейным.

Некоторые из этих методов будут рассмотрены в соответствующих частях данного курса. Здесь же нам важно отметить главные, принципиальные особенности нелинейных систем. Эти особенности заключаются в следующем:

— между токами и напряжениями в нелинейной системе нет прямой пропорциональности; иными словами, вольтамперные характеристики нелинейных элементов обладают кривизной;

— для нелинейных элементов и систем принцип суперпозиции не применим;

— при воздействии внешней эдс в нелинейной системе обязательно возникают токи, имеющие новые частоты, не содержащиеся в составе внешней эдс.

Первые два свойства после того, что было сказано выше в отношении линейных систем, не требуют дополнительных пояснений. Для иллюстрации же третьего свойства рассмотрим следующий простой пример. Пусть на цепь, состоящую из электрического вентиля (например, диода) и сопротивления (рис. 1.10), действует синусоидальная эдс с частотой Ω.

Так как через диод проходит ток только в течение одной полуволны, то напряжение $u(t)$ на сопротивлении R будет иметь вид, показанный на нижней диаграмме рис. 1.11.

Это напряжение, представляющее собой сложную периодическую функцию времени, содержит, помимо частоты Ω, ряд гармоник с частотами, кратными Ω. Таким образом, в рассматриваемом простейшем примере нелинейность системы (диода) приводит к по-

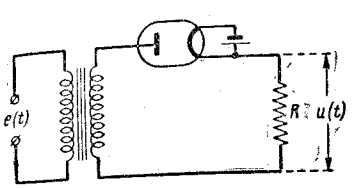


Рис. 1.10

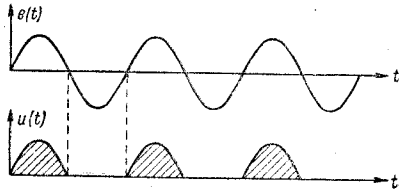


Рис. 1.11

явлению новых частот, которых не было в составе эдс. В дальнейшем будет показано, что при сложной форме внешней силы в нелинейной системе, помимо гармоник, возникают ещё и комбинационные частоты, являющиеся результатом взаимодействия отдельных частот, входящих в состав внешней силы.

Особенный интерес для радиотехники представляют свободные колебания в нелинейных системах.

Подобные колебания называются автоколебаниями, поскольку они возникают и могут устойчиво существовать в отсутствие внешнего периодического воздействия. Расход энергии при колебаниях покрывается в подобных системах за счёт источника энергии постоянного тока.

Упомянутые в предыдущем параграфе основные радиотехнические процессы — генерация, модуляция, детектирование и преобразование частоты, — как правило, сопровождаются трансформацией частотного спектра. Поэтому осуществление этих процессов возможно либо с помощью нелинейных систем, либо систем линейных, но с изменяющимися параметрами.

Принцип действия подобных систем рассмотрен в соответствующих частях курса.

§ 1.5. Задачи и содержание курса

Основной задачей курса ,,Основы радиотехники" является изучение физических явлений, происходящих в радиотехнических устройствах и овладение методами метематического описания этих явлений. Вопросы расчёта и проектирования радиоустройств освещаются в последующих специальных дисциплинах, теоретический же фундамент для этих дисциплин должен быть заложен в данном курсе.

Содержание курса и подход к ряду вопросов определяются теми задачами, которые стоят перед современной радиотехникой. Как отмечалось в § 1.2, направление развития радиотехники характеризуется расширением диапазонов используемых частот, использованием разнообразных методов управления колебаниями, особенно импульсных методов, и непрерывными поисками методов повышения помехоустойчивости радиосвязи.

В соответствии с этими направлениями некоторые вопросы теории работы радиоустройств приобретают особенно большое значение.

К таким вопросам относятся: а) спектральный анализ управляющих сигналов и модулированных колебаний, б) теория переходных процессов в радиоцепях при передаче сигналов, в) теория линейных цепей с сосредоточенными и распределёнными постоянными, г) теория устойчивости систем с обратной связью, д) статистические явления в радиоустройствах и ряд других вопросов.

В данной книге материал расположен в следующем порядке:

В гл. 2 и 3 рассматриваются основные виды передаваемых по радиолинии сигналов и свойства высокочастотных колебаний, промодулированных передаваемыми сигналами. Главы 4—8 посвящены линейным цепям: колебательным системам, основным положениям теории линейных цепей с сосредоточенными и распределёнными постоянными, многозвенным цепям и фильтрам. В гл. 9 рассматривается прохождение управляющих сигналов и модулированных колебаний через линейные системы с сосредоточенными и с распределёнными постоянными.

Таким образом, гл. 2—9 составляют „линейную“ часть курса „Основ радиотехники“.

В гл. 10—15, составляющих „нелинейную“ часть курса, рассматриваются основные радиотехнические процессы и преобразования: усиление, генерация, модуляция, детектирование, преобразование частоты, а также воздействие внешней электродвижущей силы на линейные и нелинейные системы с обратной связью.

Главы 16 и 17 посвящены изучению элементов импульсной техники и применению импульсных методов для целей радиосвязи.

Наконец, в последней, гл. 18 рассматривается действие помех при приёме радиосигналов с различными видами модуляции.

ГЛАВА 2

УПРАВЛЯЮЩИЕ СИГНАЛЫ

§ 2.1. Основные характеристики управляющих сигналов

Одним из основных требований, предъявляемых к радиолинии (радиотракту), является требование неискажённой передачи управляющих сигналов. Под последними подразумевается электрическое возмущение (напряжение, ток), отображающее передаваемое по линии сообщение.

В соответствии с приведённым в предыдущей главе перечнем радиотехнических преобразований можно считать, что управляющие сигналы представляют собой напряжения (или токи), модулирующие передатчик и выделяемые в результате детектирования в приёмнике радиолинии. В дальнейшем управляющие сигналы будут именоваться просто сигналами (кроме некоторых случаев, оговоренных особо).

Под радиолинией подразумевается совокупность всех элементов и узлов, осуществляющих передачу сигналов от источника сигнала до устройства, регистрирующего сигнал.

Выбор параметров основных звеньев радиолинии должен производиться с учётом особенностей структуры передаваемого сигнала. Существенную роль при этом играет способ индикации (регистрации) сигнала.

В зависимости от того, используется ли слуховая индикация (наушники, динамики), визуальная (экран электронно-лучевой трубки) или иная индикация (например, прибор, регистрирующий максимальное, среднее или среднеквадратичное значение сигнала), роль одних характеристик сигнала может быть основной, а других — второстепенной. Так обстоит дело, например, с сигналами речи и музыки, при воспроизведении которых важно сохранить лишь правильное соотношение между уровнями отдельных тонов; фазовые соотношения при этом, как известно, роли не играют, так как ухо человека не чувствительно к фазам отдельных тонов. При передаче изображений, наоборот, сохранение фазовых соотношений между отдельными составляющими имеет решающее значение для неискажённого воспроизведения, в то время как некоторое изменение амплитудных соотношений может быть допущено.

Требования к радиотехническому тракту с достаточной полнотой могут быть выявлены на основе следующих двух характеристик сигнала:

а) спектральная характеристика,

б) распределение уровней сигнала.

Спектральная характеристика определяет частотное распределение сигнала. Для регулярного[1]) сигнала спектральная характеристика в общем случае является комплексной функцией частоты. Модуль спектральной характеристики определяет амплитуды, а аргумент — фазы отдельных гармонических составляющих, в сумме образующих сложный сигнал.

В случае нерегулярного (хаотического) сигнала спектральная характеристика даёт распределение средней мощности по частотам. Фазы отдельных составляющих являются случайными и спектральной характеристикой при этом не учитываются.

Задание спектральной характеристики сигнала позволят сформулировать требования к полосе пропускания цепи, а также к равномерности частотной и линейности фазовой характеристик в полосе пропускания.

Вторая характеристика — распределение по уровням — играет существенную роль по отношению к сигналам нерегулярным. На основе этого распределения можно найти относительную длительность пребывания величины сигнала в определённом интервале уровней, среднее и среднеквадратичное значения сигнала, отношение максимальных значений к среднеквадратичному (пикфактор) и ряд других важных параметров сигнала.

Все эти параметры определяют требования к линейности амплитудной характеристики отдельных звеньев радиотехнических устройств, а также энергетический режим некоторых элементов этих устройств (источников питания, электронных ламп и т. д.).

В данной главе сперва будут рассмотрены спектральные характеристики важнейших регулярных сигналов, а затем спектральные характеристики и законы распределения уровней некоторых нерегулярных сигналов.

§ 2.2. Периодические сигналы

Простейшим периодическим сигналом является гармоническое колебание (тока или напряжения), определяемое законом:

$$f(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t - \psi\right) = A\cos(\Omega t - \psi), \qquad (2.1)$$

при $-\infty < t < +\infty$.

[1]) Под регулярным сигналом подразумевается такая функция времени, для которой задание поведения функции на каком либо отрезке времени однозначно определяет поведение функции для всех последующих моментов времени. В случае нерегулярного сигнала такая определённость отсутствует; имеется лишь бо́льшая или меньшая вероятность того, что случайная функция в последующие моменты будет принимать те или иные значения.

Здесь A, T, Ω и ψ — постоянные амплитуда, период, частота[1]) и начальная фаза.

Реальные сигналы имеют начало и конец. В дальнейшем под гармоническим сигналом иногда будет подразумеваться сигнал, определяемый функцией, совпадающей с выражением (2.1) в конечном интервале, причём этот интервал полагается достаточно большим по сравнению с временем, необходимым для установления стационарного состояния в системе.

Гармонический сигнал находит широкое применение в практике, в частности, при регулировке радиопередатчиков и приёмников и снятии их амплитудных и частотных характеристик.

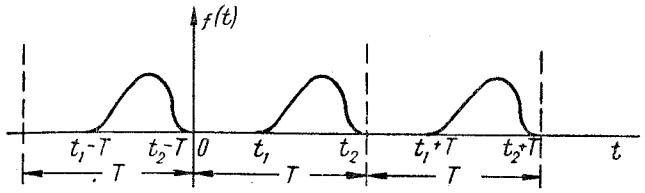


Рис. 2.1

Любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы элементарных гармонических сигналов. Это представление, как известно, осуществляется с помощью ряда Фурье.

Пусть заданная в интервале $t_1 < t < t_2$ функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения (рис. 2.1), причём выполняются следующие условия (условия Дирихле):

1) в любом конечном интервале функция $f(t)$ должна быть непрерывна или должна иметь конечное число разрывов первого рода[2]);

2) в пределах одного периода функция $f(t)$ должна иметь конечное число максимумов и минимумов.

Подобная функция может быть представлена рядом Фурье, который может быть записан в тригонометрической или комплексной форме:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_1 t + b_n\sin n\Omega_1 t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos(n\Omega_1 t - \psi_n), \qquad (2.2)$$

[1]) Здесь и в дальнейшем знак Ω используется для обозначения частот „управляющих“ („низкочастотных“) сигналов.

[2]) То есть при стремлении t к точкам разрыва непрерывности как справа (от бо́льших значений времени), так и слева (от меньших значений), функция $f(t)$ должна иметь конечные пределы.

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\cdot e^{i(n\Omega_1 t-\psi_n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n e^{in\Omega_1 t}. \tag{2.3}$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая (среднее значение), а a_n и b_n — амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов разложения $f(t)$. Эти величины определяются выражениями:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt, \tag{2.4}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\cos n\Omega_1 t\,dt, \tag{2.5}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\sin n\Omega_1 t\,dt. \tag{2.6}$$

Амплитуда (модуль) и фаза n-й гармоники выражаются через a_n и b_n следующим образом:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \tag{2.7}$$

$$\psi_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n}. \tag{2.8}$$

Входящая в выражение (2.3) комплексная амплитуда $\vec{A}_n$, в свою очередь, связана с a_n и b_n следующими очевидными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_n&=A_n\cdot e^{-i\psi_n}=a_n-ib_n\\ \vec{A}_{-n}&=A_n\cdot e^{i\psi_n}=a_n+ib_n\end{aligned}\right\}. \tag{2.9}$$

Комплексные амплитуды $\vec{A}_n$ и $\vec{A}_{-n}$ являются взаимно сопряжёнными комплексными величинами.

В дальнейшем нам понадобится следующее очевидное выражение для квадрата модуля амплитуды:

$$\vec{A}_n\cdot\vec{A}_{-n}=(a_n-ib_n)(a_n+ib_n)=a_n^2+b_n^2=A_n^2. \tag{2.10}$$

В соответствии с выражениями (2.5) и (2.6) можно также написать

$$\vec{A}_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,e^{-in\Omega_1 t}\,dt. \tag{2.11}$$

Нетрудно убедиться, что фазовый угол ψ_n есть функция, нечётная относительно n (т. е. относительно частоты), а модуль комплексной амплитуды — чётная функция. Действительно, непосредственно из выражений (2.5) и (2.6) видно, что действительная часть амплитуды a_n есть функция чётная, а мнимая b_n — нечётная относительно n. Отсюда, в соответствии с ф-лой (2.8), получаем

$$\psi_n=-\psi_{-n}. \tag{2.12}$$

Чётность модуля A_n вытекает непосредственно из выражения (2.7).

Сопоставление ф-л (2.2) и (2.3) показывает, что фигурирующие в последней „отрицательные" частоты (при отрицательных n) имеют формальный характер и связаны с применением комплексной формы для представления вещественной функции времени.

Гармонической составляющей с какой-либо „физической" частотой Ω_1 соответствует следующая пара слагаемых, входящих в выражение (2.3):

$$\frac{1}{2}A_1 e^{i(\Omega_1 t-\psi_1)}+\frac{1}{2}A_{-1}e^{i[(-\Omega_1)t-\psi_{-1}]}.$$

В силу чётности модуля и нечётности фазы относительно n эта пара слагаемых даёт в сумме гармоническую вещественную функцию, выраженную через положительную частоту:

$$\frac{1}{2}A_1[\cos(\Omega_1 t-\psi_1)+i\sin(\Omega_1 t-\psi_1)]+$$

$$\frac{1}{2}A_{-1}[\cos(-\Omega_1 t+\psi_1)+i\sin(-\Omega_1 t+\psi_1)]=$$

$$=A_1\cos(\Omega_1 t-\psi_1).$$

Таким образом, при использовании удобной для анализа ф-лы (2.3) всегда можно освободиться от отрицательных частот путём перехода к тригонометрической форме.

Следует отметить, что приведённым выше условиям Дирихле удовлетворяют все физически осуществимые сигналы. Поэтому при представлении периодических сигналов в виде рядов Фурье эти условия в практике не приходится специально оговаривать.

В тех случаях, когда сигнал представляет собой функцию чётную относительно t, т. е. $f(t)=f(-t)$, в тригонометрической записи остаются только косинусоидальные члены, так как коэффициенты b_n в соответствии с ф-лой (2.6) обращаются в нуль. Для нечётной относительно t функции $f(t)$, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n [см. ф-лу (2.5)] и ряд состоит только из синусоидальных членов.

Структура частотного спектра периодического сигнала полностью определяется двумя характеристиками: амплитудной и фазовой, т. е. модулем и аргументом комплексной амплитуды [см. ф-лы (2.7) и (2.8)]. Наглядное представление о „ширине" спектра и относительной величине отдельных его составляющих даёт графическое изображение спектра (рис. 2.2). По оси ординат отложены модули амплитуды, по оси абсцисс — частоты гармоник. Для исчерпывающей характеристики спектра подобное изображение должно быть дополнено заданием фазовой характеристики.

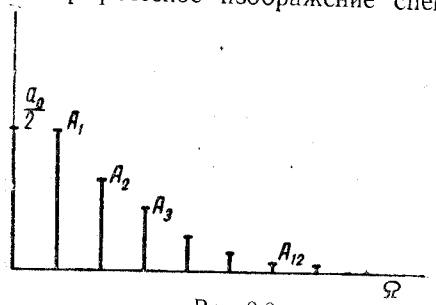


Рис. 2.2

Спектр периодической функции состоит из отдельных „линий", соответствующих дискретным частотам 0, Ω_1, $\Omega_2 = 2\Omega_1$, $\Omega_3 = 3\Omega_1$ и т. д. Отсюда и название: „линейчатый" или дискретный спектр.

Значение рядов Фурье в современной технике и особенно в радиотехнике очень велико. Основанный на ф-лах (2.2) и (2.3) гармонический анализ сложных периодических функций в сочетании с принципом наложения (см. § 1.4) представляет собой эффективное средство для изучения влияния линейных систем на прохождение сигналов.

Если под $f(t)$ подразумевается периодическая электродвижущая сила $e(t)$ на входе линейного четырёхполюсника, характеристики которого известны, то для нахождения выходного сигнала достаточно учесть амплитудные и фазовые изменения, претерпеваемые каждой из гармонических составляющих сигнала при прохождении через рассматриваемую систему. Оговоренное выше условие линейности цепи позволяет рассматривать прохождение каждой из гармоник сигнала независимо от всех остальных гармоник.

Пусть комплексный коэффициент передачи четырёхполюсника, представляющий собой отношение комплексных амплитуд выходного и входного напряжений и определяемый характером четырёхполюсника и способом включения генератора и нагрузки (некоторые общие свойства коэффициентов передачи реальных цепей рассмотрены в гл. 6), задан в форме

$$K(i\Omega) = |K(i\Omega)|\, e^{i\varphi(\Omega)}. \qquad (2.13)$$

Тогда для учёта амплитудных и фазовых изменений комплексная амплитуда каждой из гармоник эдс должна быть умножена на $K(i\Omega)$.

Следовательно, сигнал $e(t)$ на входе и сигнал $u(t)$ на выходе линейного четырёхполюсника, в соответствии с ф-лой (2.3) и на основании принципа наложения, определяются выражениями:

$$e(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{E}_n e^{i\Omega_n t}, \qquad (2.14)$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{E}_n \cdot K(i\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+n} \vec{U}_n e^{i\Omega_n t}. \qquad (2.15)$$

Здесь $\vec{E}_n$ и $\vec{U}_n = \vec{E}_n \cdot K(i\Omega_n) = E_n \cdot |K(i\Omega_n)|\, e^{-i(\psi-\varphi)}$ представляют собой соответственно комплексные амплитуды сигнала на входе и выходе четырёхполюсника. Таким образом, для получения решения задачи о прохождении сигнала через систему потребовалось только умножить $\vec{E}_n$ на комплексный коэффициент передачи $K(i\Omega_n)$.

Ясно, однако, что такое решение имеет практическую ценность только при условии быстрой сходимости рядов Фурье. Между тем, наиболее распространённые в радиотехнике сигналы этому условию не отвечают, и для удовлетворительного воспроизведения формы сигналов обычно необходимо суммировать большое число гармоник. Следует поэтому считать, что в случае сложных периодических сигналов ряды Фурье пригодны более для их анализа, чем для синтеза. Способы, позволяющие обойти это затруднение, излагаются в § 10.5.

Ниже приводятся примеры разложения в ряд Фурье некоторых важных периодических функций. Попутно рассматривается вопрос о сходимости рядов и о влиянии фаз отдельных гармоник на форму сигнала.

§ 2.3. Примеры периодических сигналов

2.3.1. *Последовательность прямоугольных импульсов* (рис. 2.3). Амплитуда импульсов равна E, длительность равна τ. Применяя

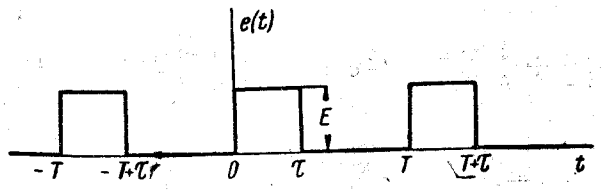


Рис. 2.3

ф-лы (2.4), (2.5) и (2.6), находим среднее значение („постоянн составляющую")

$$E_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} E\,dt = \frac{\tau}{T}E; \qquad (2.$$

амплитуду косинусоидальной составляющей n-й гармоники

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} E\cos n\Omega_1 t\,dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{E}{n\Omega_1}\,[\sin n\Omega_1 t]_0^{\tau} =$$

$$= \frac{E}{\pi n}\sin n\Omega_1\tau; \qquad (2.3.2)$$

амплитуду синусоидальной составляющей n-й гармоники

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} E\sin n\Omega_1 t\,dt = -\frac{2}{T}\cdot\frac{E}{n\Omega_1}\,[\cos n\Omega_1 t]_0^{\tau} =$$

$$= \frac{E}{\pi n}(1-\cos n\Omega_1\tau). \qquad (2.3.3)$$

С помощью ф-л (2.7) и (2.8) находим амплитуду и фазу n-й гармоники

$$A_n = \frac{E}{\pi n}\sqrt{(\sin n\Omega_1\tau)^2+(1-\cos n\Omega_1\tau)^2} =$$

$$= \frac{E}{\pi n}\sqrt{2(1-\cos n\Omega_1\tau)} = \frac{2E}{\pi n}\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}; \qquad (2.3.4)$$

$$\psi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-\cos n\Omega_1\tau}{\sin n\Omega_1\tau}. \qquad (2.3.5)$$

Подставляя найденные коэффициенты в ф-лу (2.2), получаем

$$e(t) = E\left[\frac{\tau}{T}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\Omega_1\tau}{n}\cos n\Omega_1 t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\Omega_1\tau)}{n}\sin n\Omega_1\tau\right] =$$

$$= E\left[\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\cos(n\Omega_1 t-\psi_n)\right]. \qquad (2.3.6)$$

При использовании комплексной формы ряда Фурье с помощью ф-лы (2.11) сразу находим комплексную амплитуду

$$\vec{A}_n = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} E\,e^{-in\Omega_1 t}\,dt = -\frac{2}{T}\cdot\frac{E}{in\Omega_1}\left[e^{-in\Omega_1 t}\right]_0^{\tau} =$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{E}{in\Omega_1}\left(1-e^{-in\Omega_1\tau}\right) = \frac{2}{T}\cdot\frac{E}{in\Omega_1}(1-\cos n\Omega_1\tau+i\sin n\Omega_1\tau) =$$

$$= \frac{E}{\pi n}[\sin n\Omega_1\tau - i(1-\cos n\Omega_1\tau)]. \qquad (2.3.7)$$

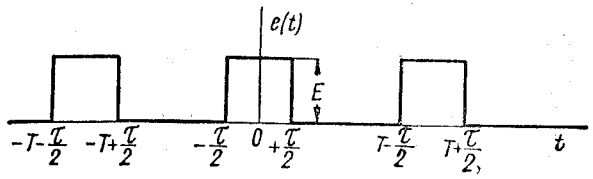


Рис. 2.4

Аргумент комплексной амплитуды определяет фазу ψ_n, совпадающую с выражением (2.3.5). При ином выборе начала отсчёта времени (рис. 2.4) функция $e(t)$ является чётной относительно t и для неё имеем:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{E}{\pi n}\left[\sin n\Omega_1 t\right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{2E}{\pi n}\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2} \\ b_n &= \frac{E}{\pi n}\left[\cos n\Omega_1 t\right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.3.8)$$

Поэтому тригонометрический ряд принимает вид

$$e(t) = E\left[\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\cos n\Omega_1 t\right]. \qquad (2.3.9)$$

Последовательность прямоугольных импульсов часто встречается в радиотехнических задачах. В дальнейших примерах рассматриваются некоторые характерные частные случаи.

2.3.2. *Последовательность прямоугольных импульсов при* $\tau = T/2$ (рис. 2.5). Этот случай часто встречается в практике. Например,

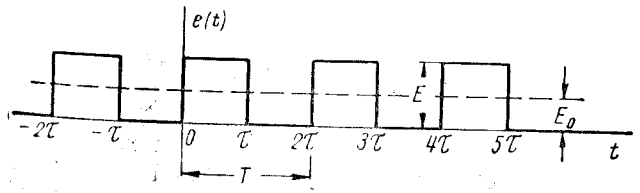


Рис. 2.5

в телеграфии при использовании кода Морзе в перерывах между сообщениями передаются одни лишь точки, длительность которых равна интервалам между знаками.

Подставляя $\tau=\frac{T}{2}$ в ф-лы (2.3.1)—(2.3.5), находим

$$E_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}E;$$

$$a_n=\frac{E}{\pi n}\sin n\pi=0 \text{ при любых значениях } n;$$

$$b_n=\frac{E}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\frac{2E}{\pi n} \text{ при } n=1, 3, 5, \ldots$$

$$=0 \text{ при } n=2, 4, 6, \ldots$$

$$\psi_n=\frac{\pi}{n} \text{ при } n=1, 3, 5, \ldots$$

Таким образом, при $\frac{\tau}{T}=\frac{1}{2}$ импульсная последовательность (рис. 2.5), кроме постоянной составляющей, содержит одни лишь нечётные гармоники:

$$e(t)=E\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\Omega_1 t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\Omega_1 t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\Omega_1 t+\ldots\right]=$$

$$=E\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1, 2, 3, \ldots \infty}\frac{\sin(2k-1)\Omega_1 t}{2k-1}\right], \quad (2.3.10)$$

где $2k-1=n$.

При отсчёте времени относительно середины одного из импульсов (рис. 2.4) получим косинусоидальный ряд, так как по ф-лам (2.3.8):

$$a_n=\frac{2E}{\pi n}\sin n\frac{\pi}{2}=+\frac{2E}{\pi n} \text{ при } n=1, 5, 9, \ldots$$

$$=-\frac{2E}{\pi n} \text{ при } n=3, 7, \ldots$$

$$=0 \text{ при } n=2, 4, 6, \ldots$$

$$b_n=0 \text{ при любых значениях } n.$$

Таким образом, получаем

$$e(t)=E\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\Omega_1 t-\frac{2}{3\pi}\cos 3\Omega_1 t+\frac{2}{5\pi}\cos 5\Omega_1 t-\ldots\right]=$$

$$=E\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos(2k-1)\Omega_1 t}{2k-1}\right]. \quad (2.3.11)$$

2.3.3. Последовательность знакопеременных прямоугольных импульсов одинаковой длительности (рис. 2.6). Ряд Фурье для этой функции отличается от выражения (2.3.10) отсутствием постоянной составляющей. Кроме того, так как в данном случае через E обозначена амплитуда импульса, составляющая половину полного скачка функции $e(t)$ в точках $t=0$, τ, $2\tau\ldots$, то получим

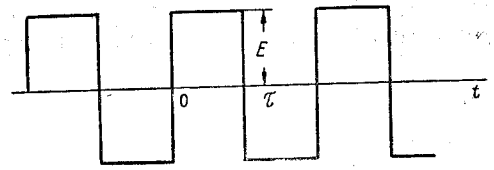


Рис. 2.6

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}\left[\sin\Omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega_1 t+\ldots\right] \quad (2.3.12)$$

Для чётной функции соответственно

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}\left[\cos\Omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\Omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\Omega_1 t-\ldots\right]. \quad (2.3.13)$$

Из выражений (2.3.10)—(2.3.13) видно, что в случае прямоугольных импульсов при $\tau=T/2$ амплитуды гармоник убывают по закону:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2k-1},$$

$$k=1, 2, 3\ldots \quad (2.3.14)$$

Для получения формы импульсов, приближающейся к разрывной функции, показанной на рис. 2.6, требуется суммирование очень большого числа гармоник. Постепенное приближение к этой разрывной функции с увеличением числа учитываемых гармоник показано на рис. 2.7.

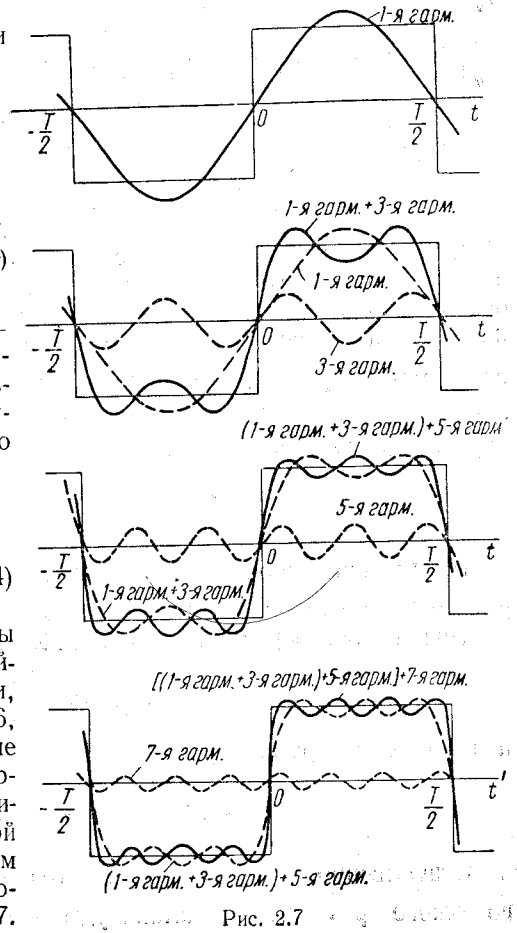


Рис. 2.7

Из этого графического построения наглядно выявляется роль высших гармоник в образовании скачка функции в точках $t=0,\ \tau,\ 2\tau\ \ldots$ и т. д. Чем больше число учитываемых гармоник, т. е. чем шире используемый спектр частот, тем больше получается крутизна импульсов на фронтах. Срезание гармоник низких порядков, наоборот, сильно искажает „верхушку" импульсов.

2.3.4. *Радиолокационная последовательность прямоугольных импульсов.* Этот случай (рис. 2.3) характеризуется очень малым отношением длительности импульса к периоду повторения, т. е. $\frac{\tau}{T}\ll 1$. Величина, обратная этому отношению

$$N=\frac{T}{\tau}\gg 1,$$

получила название „скважности" импульсов. В зависимости от назначения радиолокатора скважность изменяется в пределах $200 \div 2500$.

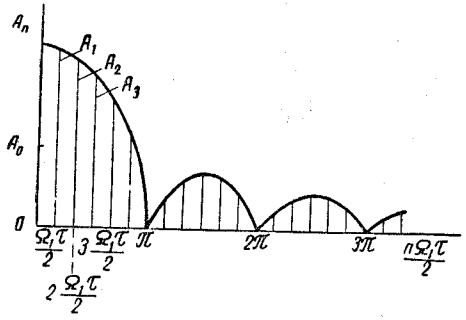


Рис. 2.8

Большая, по сравнению с длительностью импульса, величина периода повторения приводит к необходимости учитывать очень большое число гармоник. Спектр в этом случае имеет вид, показанный на рис. 2.8. Расстояние между спектральными линиями очень мало $\left(\Omega_1=\frac{2\pi}{T}\right)$, а амплитуды соседних гармоник близки по величине. Это наглядно видно из ф-лы (2.3.4), которую в данном случае удобно записать в несколько видоизменённом виде

$$A_n=\frac{2E}{\pi n}\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right). \qquad (2.3.4')$$

Ввиду ничтожной величины отношения $\frac{\tau}{T}$ аргумент синуса с ростом n изменяется медленно.

При низких порядках n приближённо можно считать

$$\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)\approx n\pi\frac{\tau}{T},$$

а амплитуды гармоник равными

$$A_n\approx\frac{2E}{\pi n}\cdot\frac{\pi n\tau}{T}=E\cdot\frac{2\tau}{T}. \qquad (2.3.15)$$

Существенно, что постоянная составляющая ряда $A_0=E\frac{\tau}{T}$ во много раз меньше амплитуды импульса E. Это свойство

импульсной последовательности с большой скважностью определяет ряд особенностей режима работы импульсных систем, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

2.3.5. *Последовательность пилообразных импульсов* (рис. 2.9). Подобные функции часто встречаются на практике в устройствах для развёртки изображения в осциллографах. Так как эта функция является нечётной, ряд Фурье для неё содержит только синусоидальные члены. С помощью ф-л (2.5)—(2.7) нетрудно определить коэффициенты ряда Фурье. Опуская эти выкладки, напишем окончательное выражение для ряда:

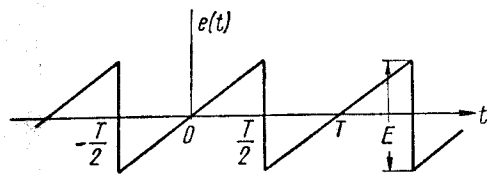


Рис. 2.9

$$e(t)=2E\left(\sin\Omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\Omega_1 t+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t-\frac{1}{4}\sin 4\Omega_1 t+\ldots\right). \qquad (2.3.16)$$

Как видим, амплитуды гармоник убывают по закону $\frac{1}{n}$, где $n=1, 2, 3\ldots$

На рис. 2.10 показан график суммы первых пяти гармоник.

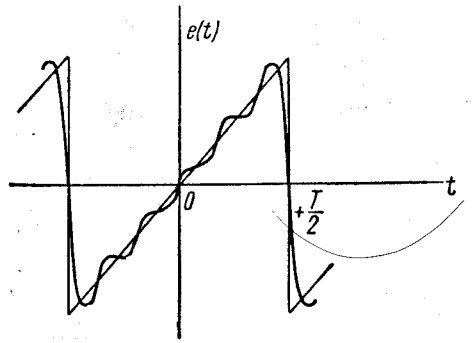


Рис. 2.10

2.3.6. *Последовательность треугольных импульсов* (рис. 2.11). Ряд Фурье имеет для данной функции следующий вид:

$$e(t)=E\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos\Omega_1 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\Omega_1 t+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{5^2}\cos 5\Omega_1 t+\ldots\right)\right]. \qquad (2.3.17)$$

Сумма первых трёх членов этого ряда изображена на рис. 2.12. Отметим более быстрое убывание амплитуд гармоник, чем в предыдущих примерах. Это объясняется отсутствием разрывов (скачков) в функции.

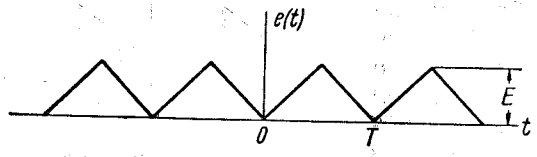


Рис. 2.11

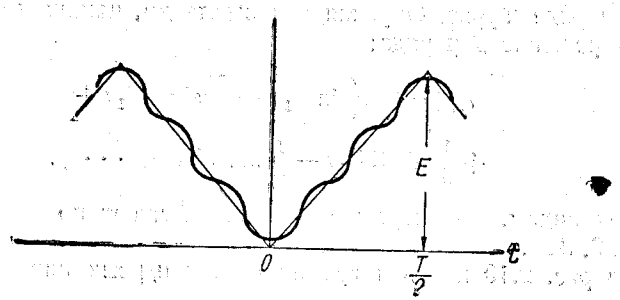


Рис. 2.12

§ 2.4. Распределение мощности в спектре периодического сигнала

Пусть электрический ток $i(t)$ представляет собой сложную периодическую функцию времени с периодом T.

Средняя за этот период мощность, выделяемая током в активном сопротивлении, пропорциональна среднему квадрату тока, который может быть определён выражением

$$\overline{i^2(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt, \qquad (2.16)$$

где черта над функцией обозначает операцию усреднения по времени.

Как известно, эта мощность равна сумме средних мощностей, выделяемых в сопротивлении отдельными гармониками тока.

Действительно, рассмотрим сперва два периодических тока i и i', обладающих одинаковым периодом T, и разложим их в ряды Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{I}_n\cdot e^{jn\Omega_1 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t),$$

$$i'(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{I}'_n e^{jn\Omega_1 t} = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n\cos n\Omega_1 t + b'_n \sin n\Omega_1 t). \qquad (2.17)$$

При вычислении среднего значения произведения $i\cdot i'$ нужно учитывать только слагаемые, образуемые перемножением двух членов с косинусом или двух членов с синусом одной и той же частоты, так как среднее значение произведения двух гармонических функций с несовпадающими частотами равно нулю. Можно поэтому написать

$$\overline{i\cdot i'} = \frac{1}{T}\int_0^T i\cdot i'\,dt = \frac{a_0 a'_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n a'_n + b_n b'_n). \qquad (2.18)$$

Приравнивая токи i и i', на основании (2.18) и (2.7) получаем

$$\overline{i^2(t)} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2, \qquad (2.19)$$

где I_n — амплитуда n-й гармоники тока, $I_0 = \frac{a_0}{2}$ — постоянная слагающая.

При использовании комплексного ряда Фурье этот результат, в соответствии с ф-лой (2.10), может быть представлен в форме

$$\overline{i^2(t)} = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{I}_n\vec{I}_{-n} = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n^2 = I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2. \qquad (2.20)$$

Таким образом, полная мощность, выделяемая в сопротивлении r (среднее значение),

$$\overline{P} = r\cdot\overline{i^2(t)} = r\left[I_0^2 + \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + \cdots\right]. \qquad (2.21)$$

Существенно, что эта мощность не зависит от фазировки отдельных гармоник. Это означает, что изменение формы сигнала,

получающееся при нарушении фазовых соотношений внутри спектра, не связано с изменением средней мощности сигнала.

По виду функции, представляющей собой огибающую величин I_n^2, можно судить о распределении мощности в спектре периодического сигнала. Это позволяет выбирать полосу пропускания цепи, обеспечивающую достаточно полное использование мощности сигнала. Подробнее этот вопрос рассматривается в § 2.10.

§ 2.5. Непериодические сигналы

Пусть задан сигнал в виде функции времени, удовлетворяющей условиям Дирихле (см. § 2.2) во всяком конечном интервале и, кроме того, абсолютно интегрируемой.

Последнее условие означает, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt,$$

где $|f(t)|$ — абсолютное значение функции $f(t)$, должен сходиться. Смысл этого добавочного требования к функции $f(t)$ выяснится ниже (см. § 9.2).

Для удобства рассуждений примем пока, что сигнал $f(t)$ действует в конечном интервале $t_1 < t < t_2$. Из дальнейшего будет видно, что при выполнении упомянутого выше условия абсолютной интегрируемости функции $f(t)$, это допущение не ограничивает общности рассмотрения.

Для проведения гармонического анализа непериодической функции поступим следующим образом. Превратим нашу функцию в периодическую путём повторения её с произвольным периодом $T > t_2 - t_1$. Тогда для этой новой функции применимо разложение в ряд Фурье, причём входящие в выражение (2.2) коэффициенты $\frac{a_0}{2}$, a_n и b_n, в соответствии с ф-лами (2.4)—(2.6), будут тем меньше, чем больше интервал T, выбранный в качестве периода. Устремляя T к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию $f(t)$, заданную в интервале $t_1 < t < t_2$ (рис. 2.13).

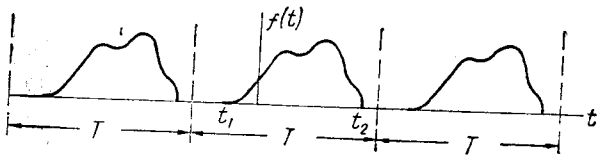


Рис. 2.13

Число гармонических составляющих, входящих в ряд Фурье, будет при этом бесконечно большим, так как при $T \to \infty$ основная частота функции $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T} \to 0$. Иными словами, расстояние между спектральными линиями (рис. 2.2), равное основной частоте Ω_1, становится бесконечно малым и спектр становится сплошным.

Отсюда следует, что при гармоническом анализе непериодической функции получается сплошной спектр, состоящий из бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами.

Математически это можно выразить следующим образом. Подставив ф-лы (2.5) и (2.6) в ф-лу (2.9), получаем

$$\vec{A}_n = a_n - \mathrm{i}\,b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,[\cos n\Omega_1 t - \mathrm{i}\sin n\Omega_1 t]\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega_1 t}\,dt. \qquad (2.22)$$

Теперь воспользуемся комплексной формой ряда Фурье [см. ф-лу (2.3)] и подставим вместо $\vec{A}_n$ выражение (2.22)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega_1 t}\,dt\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega_1 t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega_1 t}\,dt\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega_1 t}\Omega_1. \qquad (2.23)$$

Здесь учтено, что $T = \frac{2\pi}{\Omega_1}$.

Если теперь устремить T к бесконечности, то в пределе получим исходную непериодическую функцию $f(t)$, заданную в интервале $t_1 < t < t_2$.

При $T \to \infty$ частота Ω_1 превращается в $d\Omega$, $n\Omega_1$ — в текущую частоту Ω, а операция суммирования — в операцию интегрирования. Таким образом, получаем двойной интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,d\Omega \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\,dt. \qquad (2.24)$$

Внутренний интеграл, являющийся функцией Ω, обозначим

$$\vec{F}(\Omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt. \qquad (2.25)$$

$\vec{F}(\Omega)$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой функции $f(t)$.

В общем виде, когда не уточнены пределы t_1 и t_2, спектральную плотность представляют выражением

$$\vec{F}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt, \qquad (2.26)$$

а после подстановки (2.26) в выражение (2.24) получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega. \qquad (2.27)$$

Пара выражений (2.26)—(2.27) называется прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Выражение (2.27) представляет непериодическую функцию $f(t)$ в виде суммы (интеграла) гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами. Из сравнения выражения (2.27) с рядом Фурье (2.3.) видно, что амплитуды этих составляющих равны

$$\frac{1}{\pi} \vec{F}(\Omega)\, d\Omega.$$

Сравнение (2.26) с выражением (2.11) для комплексной амплитуды соответствующей гармоники периодической функции позволяет в наглядной форме пояснить смысл спектральной плотности $\vec{F}(\Omega)$.

Именно, выделив какую-либо дискретную частоту $\Omega_n = n\Omega_1$, соответствующую в случае периодической функции $f(t)$ n-й гармонике, получим для амплитуды этой гармоники выражение

$$\vec{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt.$$

В случае же непериодической функции, совпадающей с $f(t)$ в интервале $t_1 < t < t_2$, получим для спектральной плотности,

соответствующей той же частоте $\Omega = \Omega_n$, следующее выражение

$$\vec{F}(\Omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt.$$

Отсюда видно, что

$$2\vec{F}(\Omega_n) = T \cdot \vec{A}_n = \frac{\vec{A}_n}{F_1}. \qquad (2.28)$$

Таким образом, $2\vec{F}(\Omega_n)$ получается путём деления амплитуды $\vec{A}_n$ n-й гармоники на полосу частот F_1, отделяющую соседние линии дискретного спектра (рис. 2.2), т. е. $\vec{F}(\Omega)$ имеет смысл плотности амплитуд и размерность $\left[\frac{\text{амплитуда}}{\text{герц}}\right]$.

Из выражения (2.28) вытекает также следующее важное положение: огибающая сплошного спектра (модуль спектральной плотности) непериодической функции и огибающая линейчатого спектра периодической функции (полученной из непериодической путём продолжения её с периодом T) совпадают по форме и отличаются только масштабом.

Итак,

$$\vec{F}(\Omega_n) = \frac{T}{2} \vec{A}_n = \frac{\pi}{\Omega_1} \vec{A}_n. \qquad (2.29)$$

Отметим, что для нулевой частоты (постоянной составляющей) в соответствии с определением (2.4) можно написать

$$F(0) = T \cdot A_0 = \frac{2\pi}{\Omega_1} A_0. \qquad (2.29')$$

Спектральная плотность $\vec{F}(\Omega)$ обладает всеми основными свойствами комплексной амплитуды $\vec{A}_n$.

По аналогии с выражением (2.9) можно написать следующее соотношение

$$\vec{F}(\Omega) = A(\Omega) - iB(\Omega) = F(\Omega)\, e^{-i\psi(\Omega)}, \qquad (2.30)$$

где $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ — соответственно действительная (вещественная) и мнимая части спектральной плотности, а $F(\Omega)$ и $\psi(\Omega)$ — амплитудная и фазовая характеристики спектральной плотности.

Непосредственно из ф-лы (2.26) вытекают следующие выражения для $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$, аналогичные ф-лам (2.5) и (2.6):

$$A(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \Omega t \, dt, \tag{2.31}$$

$$B(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \Omega t \, dt. \tag{2.32}$$

Очевидно так же, что модуль и фаза спектральной плотности определяются выражениями:

$$F(\Omega) = \sqrt{[A(\Omega)]^2 + [B(\Omega)]^2}, \tag{2.33}$$

$$\psi(\Omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Как и в случае ряда Фурье (см. § 2.2), модуль спектральной плотности есть функция чётная, а фаза — нечётная относительно частоты Ω.

На основании ф-лы (2.30) нетрудно привести интегральное преобразование (2.27) к тригонометрической форме.

Имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) \, e^{i(\Omega t - \psi)} \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) \cos(\Omega t - \psi) \, d\Omega + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) \, d\Omega.$$

Из упомянутых выше свойств модуля и фазы следует, что подинтегральная функция в первом интеграле является чётной, а во втором интеграле нечётной относительно Ω. Следовательно, второй интеграл равен нулю, и окончательно

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) \cos(\Omega t - \psi) \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\Omega) \cos(\Omega t - \psi) \, d\Omega. \tag{2.35}$$

Как видим, при переходе от комплексной формы (2.27) к тригонометрической (2.35) отпадает необходимость интегрирования

в области отрицательных значений Ω. Обычно этот переход целесообразен в конце анализа; все промежуточные выкладки при применении интеграла Фурье удобнее и проще производить на основе комплексной формы (2.27).

Интегральные преобразования (2.26) — (2.27) очень удобны для исследования прохождения непериодических сигналов через линейные цепи. По аналогии с выражениями (2.14) — (2.15) можно написать следующие очевидные соотношения для сигнала $e(t)$ на входе и сигнала $u(t)$ на выходе линейного четырёхполюсника:

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\Omega) \, e^{i\Omega t} \, d\Omega, \tag{2.36}$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\Omega) \, K(i\Omega) \, e^{i\Omega t} \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{U}(\Omega) \, e^{i\Omega t} \, d\Omega, \tag{2.37}$$

где $\vec{E}(\Omega) = E(\Omega) \, e^{-i\psi}$ — спектральная плотность напряжения на входе, а $\vec{U}(\Omega) = \vec{E}(\Omega) \, K(i\Omega) = E(\Omega) \, |K(i\Omega)| \, e^{-i(\psi - \varphi)}$ — на выходе четырёхполюсника, коэффициент передачи которого есть $K(i\Omega) = |K(i\Omega)| e^{i\varphi}$.

Прикладное значение интегральных преобразований (2.26) и (2.27), позволяющих осуществить гармонический анализ непериодических сигналов ещё более велико, чем значение рядов Фурье, так как непериодические сигналы встречаются в практике чаще, чем периодические.

Большим облегчением при использовании интеграла Фурье является возможность получения выражения для выходного сигнала в замкнутой форме, а не в виде медленно сходящегося ряда, как это имеет место, например, в случае периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. § 2.3). Подробно этот вопрос будет разобран в гл. 9 при изучении воздействия сигналов на линейные системы.

§ 2.6 Некоторые свойства преобразования Фурье

Из рассмотрения прямого и обратного преобразований Фурье (2.26) и (2.27) можно сделать некоторые общие заключения о характере $\vec{F}(\Omega)$ при заданной функции $f(t)$ и, наоборот, о функции $f(t)$ — при заданной функции $\vec{F}(\Omega)$.

Если в обратном преобразовании (2.27) заменить $\vec{F}(\Omega)$ на $\vec{F}(\Omega)\, e^{\pm i\Omega t_0}$, где t_0 — постоянная величина, имеющая размерность времени, то $f(t)$ переходит в $f(t \pm t_0)$.

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\Omega)\, e^{\pm i\Omega t_0} \cdot e^{i\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\Omega)\, e^{i\Omega(t \pm t_0)}\, d\Omega = f(t \pm t_0). \qquad (2.38)$$

Это означает, что если всем составляющим спектра функции $f(t)$ дать фазовый сдвиг $\psi = \pm\Omega t_0$, линейно связанный с частотой Ω, то функция $f(t)$ сдвигается во времени на $\pm t_0$. Очевидно и обратное положение: сдвиг во времени функции $f(t)$ на величину $\pm t_0$ означает изменение фазовой характеристики спектральной плотности $\vec{F}(\Omega)$ на величину $\pm \Omega t_0$.

Из указанных свойств преобразований (2.26) и (2.27) вытекают требования к линейным системам: для устранения искажений сигнала амплитудная (частотная) характеристика системы должна быть равномерна, а фазовая характеристика линейна в пределах всего спектра сигнала (или, по крайней мере, той части спектра, в которой сосредоточена подавляющая часть общей энергии сигнала). Если это требование выполнено, то запаздывание или так называемое „время пробега" сигнала равно наклону фазовой характеристики цепи

$$t_0 = \left|\frac{d\varphi}{d\Omega}\right|. \qquad (2.39)$$

Отметим, что в физически выполнимых (реальных) цепях наклон фазовой характеристики $\varphi(\Omega)$ всегда отрицателен в полосе пропускания, так что непериодический сигнал на выходе, естественно, не может опережать сигнал на входе цепи. Подробнее этот вопрос рассматривается в гл. 6.

Обратимся теперь к рассмотрению $\vec{F}(\Omega)$ при разном характере функции $f(t)$.

1. Пусть $f(t)$ есть функция, чётная относительно t. Переписав выражение (2.26) в виде

$$\vec{F}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\Omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\Omega t\, dt,$$

убеждаемся, что при чётной $f(t)$ второй интеграл равен нулю, так как произведение $f(t)\sin\Omega t$ является функцией нечётной относительно t.

Следовательно, при $f(t)$ чётной относительно t функция $\vec{F}(\Omega)$, определяемая первым интегралом, есть функция вещественная и чётная относительно Ω.

2. Если $f(t)$ нечётна относительно t, то в нуль обращается первый интеграл и

$$\vec{F}(\Omega) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\Omega t\, dt.$$

Следовательно, в этом случае $\vec{F}(\Omega)$ — нечётная и чисто мнимая функция Ω.

3. Если, наконец, $f(t)$ является ни чётной, ни нечётной функцией относительно t, то $f(t)$ можно разложить на две функции: чётную $f_1(t)$ и нечётную $f_2(t)$.

В этом случае $\vec{F}(\Omega)$ представляет собой комплексную функцию Ω.

Из первого доказанного свойства вытекает, что в случае чётной функции $f(t)$ в выражении (2.26) можно произвольно из-

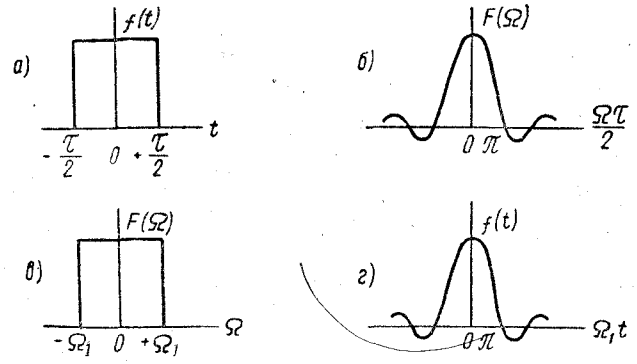


Рис. 2.14

менять знак перед Ω. Следовательно, в этом случае интегралы в выражениях (2.26) и (2.27) совершенно подобны и переменные Ω и t взаимно заменимы.

Из этого, в частности, следует, что если прямоугольному импульсу $f(t)$ (рис. 2.14*а*) соответствует спектр, показанный на рис. 2.14*б*, то спектру $\vec{F}(\Omega)$ с прямоугольной огибающей (рис. 2.14*в*) должна соответствовать функция времени $f(t)$, изображённая на рис. 2.14*г*.

Так как в области частот $\Omega \ll \frac{2\pi}{\tau}$ (рис. 2.14*б*) спектр $\vec{F}(\Omega)$ можно считать почти неизменным, то рис. 2.14*г* непосредственно характеризует искажения, претерпеваемые прямоугольным импульсом при отбрасывании всех частот вне полосы $0 \div \Omega_1 \left(\text{при } \Omega_1 \ll \frac{2\pi}{\tau}\right)$.

§ 2.7. Частотные спектры некоторых распространённых функций

Структура частотного спектра полностью определяется двумя характеристиками: амплитудной и фазовой, т. е. модулем и аргументом спектральной плотности $\vec{F}(\Omega)$.

Определение указанных характеристик для функций $f(t)$, отвечающих условию абсолютной интегрируемости, легко производится с помощью ф-л (2.26), (2.33) (2.34) и не требует каких-либо пояснений. Спектральные плотности — модуль $F(\Omega)$ и фаза $\psi(\Omega)$ — для некоторых наиболее распространённых непериодических функций приведены ниже в таблице. Остановимся лишь на некоторых частных случаях, существенных для дальнейшего изложения.

Рассмотрим, прежде всего, единичный скачок, т. е. функцию, определяемую условиями:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1 \text{ при } t > 0 \\ f(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.40)$$

Для этой функции $\int_0^\infty |f(t)|\,dt \to \infty$, ввиду чего ф-лы (2.26) и (2.27) не могут быть применены непосредственно. Можно, однако, легко обойти это затруднение, если искомую спектральную плотность функции $f(t)$, заданной выражением (2.40), представить как предел $\vec{F}(\Omega)$ для функции $f(t)\,e^{-ct}$ при $c \to 0$. Тогда в соответствии с выражением (2.26) искомая спектральная плотность для единичного скачка определится выражением:

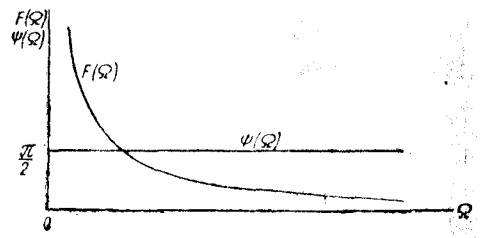


Рис. 2.15

$$\vec{F}(\Omega) = \lim_{c \to 0} \frac{1}{c + i\Omega} =$$

$$= \frac{1}{i\Omega} = \frac{1}{\Omega}\, e^{-i\pi/2}, \quad (2.4$$

т. е.

$$F(\Omega) = \frac{1}{\Omega},$$

$$\psi(\Omega) = \pi/2. \quad (2.42$$

Графики $F(\Omega) = \frac{1}{\Omega}$ и $\psi(\Omega)$ изображены на рис. 2.15. При нулевой частоте кривая спектральной плотности уходит в бесконечность. Это обстоятельство указывает на наличие в составе сплошного спектра функции $f(t)$ дискретного колебания с конеч-

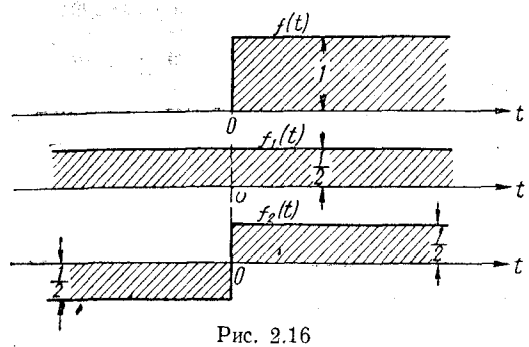


Рис. 2.16

ной амплитудой, в данном случае при нулевой частоте. Это следует понимать таким образом, что при $\Omega \to 0$, $F(\Omega) \to \infty$, а $\lim_{\Delta\Omega \to 0} \int_0^{\Delta\Omega} F(\Omega)\,d(\Omega)$ принимает конечное значение.

Сказанное поясняется рис. 2.16, на котором единичный скачок $f(t)$ представлен в виде суммы двух функций:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \text{ при } -\infty < t < +\infty,$$

и

$$f_2(t) = -\frac{1}{2} \text{ при } t < 0$$

$$f_2(t) = +\frac{1}{2} \text{ при } t > 0.$$

Подставив выражение (2.41) в ф-лу (2.27), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\Omega t}}{i\Omega}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \Omega t}{\Omega}\, d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega}\, d\Omega. \qquad (2.43)$$

Второй интеграл в правой части выражения (2.43)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega}\, d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega}\, d\Omega$$

ввиду чётности функции $\frac{\sin \Omega t}{\Omega}$ относительно Ω равен:

$$+\frac{1}{2} \text{ при } t>0,$$

$$-\frac{1}{2} \text{ при } t<0.$$

Этот интеграл соответствует функции $f_2(t)$ на рис. 2.16.

Первый интеграл при учёте особой точки (полюса) подинтегральной функции при $\Omega=0$ равен 1/2 (см. § 9.2). Очевидно, это слагаемое соответствует функции $f_1(t)$ на рис. 2.16. Итак, единичный скачок может быть наряду с выражением (2.43) представлен формулой

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin \Omega t}{\Omega}\,d\Omega, \qquad (2.44)$$

аналогичной интегралу Фурье.

Последнее выражение в наглядной форме выявляет смысл постоянства фазовой характеристики $\psi(\Omega)=\frac{\pi}{2}$. Из тригонометрической формы интеграла Фурье (2.35) можно сделать заключение: равенство $\psi(\Omega)=\frac{\pi}{2}=\text{const}$ означает, что для образования в момент $t=0$ скачка с бесконечно крутым фронтом требуется суммирование синусоид всех гармонических составляющих спектра с одинаковым знаком наклона в точке $t=0$.

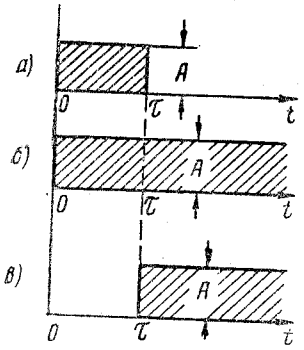


Рис. 2.17

Выражения (2.38) и (2.41) позволяют получить формулу для спектральной плотности прямоугольного импульса. Представим импульс в виде разности двух скачков: одного в момент $t=0$ и другого в момент $t=\tau$ (рис. 2.17). Для первого скачка получим спектральную плотность

$$\vec{F}_1(\Omega)=\frac{A}{i\Omega},$$

а для второго, в соответствии с выражением (2.38),

$$\vec{F}_2(\Omega)=\frac{A}{i\Omega}e^{-i\Omega\tau}.$$

Таким образом, спектральная плотность прямоугольного импульса:

$$\vec{F}(\Omega)=\vec{F}_1(\Omega)-\vec{F}_2(\Omega)=\frac{A}{i\Omega}(1-e^{-i\Omega\tau}). \qquad (2.45)$$

Нетрудно определить модуль этого выражения:

$$F(\Omega)=\frac{A}{\Omega}\sqrt{(1-\cos\Omega\tau)^2+\sin^2\Omega\tau}=\left|\frac{2A}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right|. \qquad (2.46)$$

Наложение спектров двух скачков при сдвиге одного относительно другого на величину τ (рис. 2.17) должно приводить к компенсации тех гармонических составляющих, для которых фазовый сдвиг $\Omega\tau=n\cdot 2\pi$, где n — любое целое число. У составляющих, которым соответствует $\Omega\tau=(2n-1)\pi$, наоборот, модуль спектральной плотности удваивается.

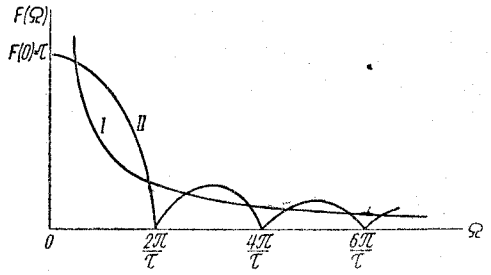


Рис. 2.18

Результат суммирования спектров поясняется рис. 2.18, на котором совмещены графики модулей спектральной плотности единичного скачка (кривая *I*) и прямоугольного импульса с длительностью τ и амплитудой, равной единице (кривая *II*).

Если начало отсчёта времени совместить с серединой импульса (рис. 2.19), т. е. сдвинуть $f(t)$ на величину $\tau/2$ в сторону опережения, то для полученной функции, чётной относительно t, согласно выражениям (2.45) и (2.38) можно написать

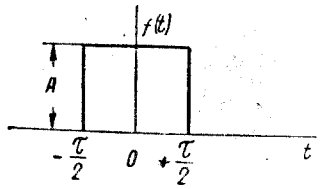


Рис. 2.19

$$\vec{F}(\Omega)=\frac{A}{i\Omega}\left(e^{+i\frac{\Omega\tau}{2}}-e^{-i\frac{\Omega\tau}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2A}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}=\left|\frac{2A}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right|e^{-i\psi}. \qquad (2.47)$$

Графики модуля $F(\Omega)$ и фазы $\psi(\Omega)$ для прямоугольного импульса изображены на рис. 2.20.

При перемене знака $\sin\frac{\Omega\tau}{2}$, т. е. при $\pi<\frac{\Omega\tau}{2}<2\pi$, $3\pi<\frac{\Omega\tau}{2}<4\pi$ и т. д., фазовая характеристика равна π для импульса, симметричного относительно оси $t=0$ [рис. 2.20*б*].

С удлинением импульса (рис. 2.17*а*) расстояние между нулевыми значениями $F(\Omega)$

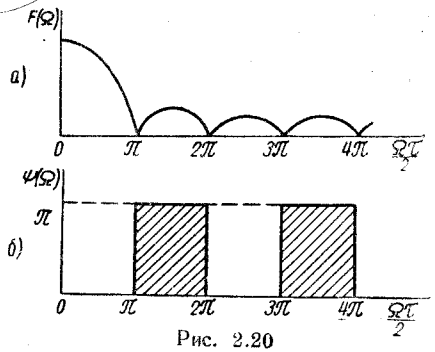


Рис. 2.20

сокращается, а начальное значение $F(\Omega)$ (т. е. при $\Omega=0$) возрастает. В пределе при $\tau\to\infty$

$$\lim_{\tau\to\infty}\overrightarrow{F_2}(\Omega)=\lim_{\tau\to\infty}A\int_{\tau}^{\infty}e^{-i\Omega t}\,dt=0$$

и спектр $\overrightarrow{F}(\Omega)$ вырождается в спектр $\overrightarrow{F_1}(\Omega)$ скачка при $t=0$.

При укорочении импульса (и постоянстве амплитуды) $F(\Omega)$ падает. В пределе при $\tau\to 0$ точка $\Omega_1=\frac{2\pi}{\tau}$, соответствующая $F(\Omega)=0$, удаляется в бесконечность и спектральная плотность, бесконечно малая по величине, становится равномерной в полосе частот от 0 до ∞.

Если одновременно с уменьшением τ увеличивать амплитуду A по закону $\frac{1}{\tau}$, т. е. так, чтобы площадь импульса оставалась постоянной, то согласно ф-ле (2.47) спектральная плотность, одинаковая для всех частот, окажется равной $A\tau$.

Таким образом, приходим к понятию об единичном импульсе, под которым подразумевается предел при $\tau\to 0$ функции, заданной условиями:

$$\left.\begin{aligned} f(t)&=0 \quad \text{при} \quad t<0\\ f(t)&=\frac{1}{\tau} \quad \text{при} \quad 0<t<\tau\\ f(t)&=0 \quad \text{при} \quad t>\tau \end{aligned}\right\}. \tag{2.48}$$

Часто единичный импульс определяется как функция $\delta(t)$, отличная от нуля лишь при $t=0$

$$\delta(t)=0 \quad \text{при} \quad t\neq 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$$

Площадь такого импульса равна единице и, следовательно, спектральная плотность для всех частот также равна единице.

Особенно удобно пользоваться единичным импульсом при исследовании действия коротких (по сравнению с постоянной времени цепи) импульсов на линейные системы.

§ 2.8. Гармоническое колебание в заданном интервале времени

Пусть функция времени $f(t)$ задана в интервале $0<t<\tau$ выражением

$$f(t)=\cos(\Omega_0 t+\beta)=\frac{1}{2}e^{i(\Omega_0 t+\beta)}+\frac{1}{2}e^{-i(\Omega_0 t+\beta)}. \tag{2.49}$$

Подстановка выражения (2.49) в (2.26) и интегрирование дают следующую формулу для спектральной плотности:

$$\overrightarrow{F}(\Omega)=\frac{i\Omega\cos\beta-\Omega_0\sin\beta}{\Omega_0^2-\Omega^2}+$$

$$+e^{-i\Omega\tau}\,\frac{\Omega_0\sin(\Omega_0\tau+\beta)-i\Omega\cos(\Omega_0\tau+\beta)}{\Omega_0^2-\Omega^2}. \tag{2.50}$$

В частном случае $\beta=-\frac{\pi}{2}$ (синусоида), ф-ла (2.50) принимает вид:

$$\overrightarrow{F}(\Omega)=\frac{\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}\left[1-e^{-i\Omega\tau}\cos\Omega_0\tau\right]-\frac{i\Omega e^{-i\Omega\tau}\sin\Omega_0\tau}{\Omega_0^2-\Omega^2}. \tag{2.51}$$

Эта формула ещё больше упрощается, если длительность импульса τ кратна периоду высокочастотного заполнения T_1, т. е.

$$\tau=nT_1=n\frac{2\pi}{\Omega_0},$$

где n — целое положительное число.

В этом случае $\sin\Omega_0\tau=0$, а $\cos\Omega_0\tau=1$, ввиду чего можно написать:

$$\overrightarrow{F}(\Omega)=\frac{\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}\left[1-e^{-i\Omega\tau}\right]. \tag{2.52}$$

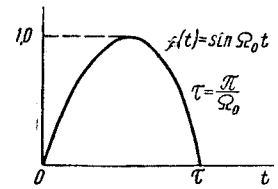


Рис. 2.21

Учитывая, что модуль выражения $1-e^{-i\Omega\tau}$ равен $2\sin\frac{\Omega\tau}{2}$, находим модуль спектральной плотности

$$F(\Omega)=\left|\frac{2\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right|. \tag{2.53}$$

Из ф-лы (2.51) нетрудно также получить спектральную плотность для однополупериодного импульса $f(t)=\sin\Omega_0 t$ с длительностью $\tau=\frac{\pi}{\Omega_0}$ (рис. 2.21). Подставив $\tau=\frac{\pi}{\Omega_0}$, получим

$$\overrightarrow{F}(\Omega)=\frac{\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}\left[1+e^{-i\Omega\tau}\right].$$

Таким образом, модуль спектральной плотности рассматриваемого импульса определяется выражением

$$F(\Omega)=\left|\frac{2\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}\cos\frac{\Omega\tau}{2}\right| \tag{2.54}$$

или

$$\Omega_0\cdot F(\Omega)=\left|\frac{2}{1-\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)\right|.$$

График $\Omega_0 \cdot F(\Omega)$ для однополупериодного импульса изображён на рис. 2.22.

С увеличением числа периодов в отрезке τ спектр группируется всё в более узкой области частот вблизи Ω_0. Это видно из

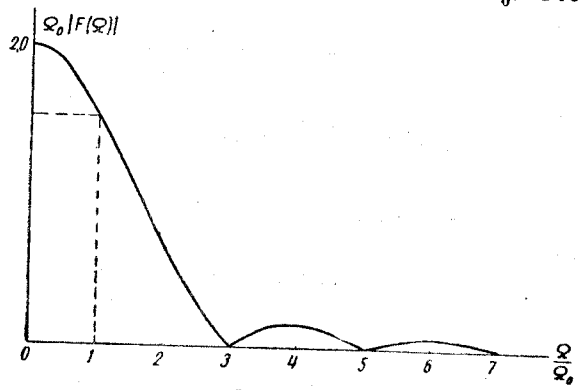


Рис. 2.22

рис. 2.23, построенного для $n=10$. При $\tau \to \infty$ получается функция, абсолютно не интегрируемая. Воспользовавшись, как и в случае единичного скачка (см. § 2.7), множителем сходимости $e^{-\alpha}$, получим затухающее колебание:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= e^{-\alpha} \sin \Omega_0 t \quad \text{при} \quad t > 0 \\ f(t) &= 0 \qquad\qquad\ \ \text{при} \quad t < 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

По ф-ле (2.26) находим

$$\vec{F}(\Omega) = \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 + (c + i\Omega)^2}. \tag{2.56}$$

При $c \to 0$ получим

$$\lim_{c \to 0} \vec{F}(\Omega) = \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Omega_0 - \Omega} + \frac{1}{\Omega_0 + \Omega}\right). \tag{2.57}$$

Аналогично, если $f(t)$ задана условиями:

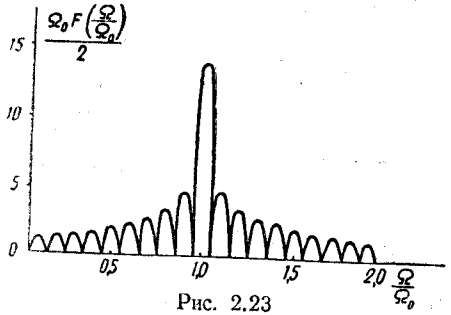


Рис. 2.23

$$f(t) = e^{-\alpha} \cos \Omega_0 t \quad \text{при} \quad t > 0,$$
$$f(t) = 0 \qquad\qquad\ \ \text{при} \quad t < 0,$$

получим

$$\lim_{c \to 0} \vec{F}(\Omega) = \frac{i\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\Omega - \Omega_0} + \frac{1}{\Omega + \Omega_0}\right). \tag{2.58}$$

В общем случае для

$$f(t) = \cos(\Omega_0 t + \beta) \quad \text{при} \quad t > 0,$$
$$f(t) = 0 \qquad\qquad\ \ \text{при} \quad t < 0$$

спектральная плотность определяется выражением:

$$\vec{F}(\Omega) = \frac{i\Omega \cos\beta}{\Omega_0^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega_0 \sin\beta}{\Omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{2.59}$$

Это выражение совпадает с первым слагаемым правой части ф-лы (2.50).

§ 2.9. Спектральная плотность группы равноотстоящих импульсов

Рассмотрим сперва две одинаковые функции $f_1(t)$ и $f_2(t) = f_1(t+T)$, разделённые интервалом T (рис. 2.24).

При одинаковых модулях их спектральные плотности будут отличаться фазовыми характеристиками. В соответствии с § 2.6 можем написать

$$\vec{F}_2(\Omega) = \vec{F}_1(\Omega)\, e^{+i\Omega T}.$$

Рассматривая группу $f_1(t)$ и $f_2(t)$ как один сигнал, получим для спектральной плотности следующее выражение:

$$\vec{F}(\Omega) = \vec{F}_1(\Omega) + \vec{F}_2(\Omega) =$$
$$= \vec{F}_1(\Omega)\left[1 + e^{+i\Omega T}\right] =$$
$$= 2\cos\frac{\Omega T}{2} F_1(\Omega)\, e^{+i\psi(\Omega)}, \tag{2.60}$$

где

$$\operatorname{tg}\psi(\Omega) = \frac{\sin\Omega T}{1 + \cos\Omega T}.$$

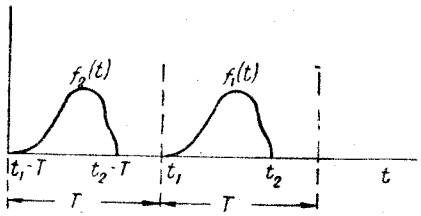


Рис. 2.24

Таким образом, суммирование сплошных спектров двух одинаковых функций, разделённых интервалом T, приводит к изменению модуля $F_1(\Omega)$ по закону $2\cos\frac{\Omega T}{2}$ и фазы на угол $\psi(\Omega) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\Omega T}{1+\cos\Omega T}$.

Особенно простой результат получается в случае двух единичных импульсов, когда $F_1(\Omega) = F_2(\Omega) = 1$ и модуль спектральной плотности $F(\Omega)$ изменяется (рис. 2.25) по закону $2\left|\cos\frac{\Omega T}{2}\right|$. Это справедливо для любых функций, если рассматривать $F(\Omega)$ в области частот, где спектральная плотность $F_1(\Omega)$ близка к равномерной.

С увеличением числа повторяющихся через одинаковые промежутки функций модуль $F(\Omega)$ всё более и более увеличивается вблизи точек $\Omega = n \cdot \frac{2\pi}{T}$. При бесконечном повторении функции $f(t)$ с периодом T (влево и вправо от $t=0$) получим периодическую последовательность, которую можно представить рядом Фурье. Коэффициенты этого ряда в соответствии с выражением (2.11) определяются формулой:

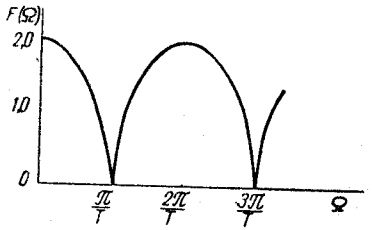


Рис. 2.25

$$\overrightarrow{A}_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, e^{i\Omega_n t}\, dt.$$

Связь между $\overrightarrow{A}_n$ и $\overrightarrow{F}(\Omega)$ устанавливается ф-лой (2.28).

§ 2.10. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала

Пусть протекающий в электрической цепи ток является непериодической функцией времени. Энергия, выделяемая в активном сопротивлении за всё время действия этого тока, пропорциональна величине

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} [i(t)]^2\, dt. \qquad (2.61)$$

Так как функция $i(t)$ предполагается абсолютно интегрируемой (см. § 2.5), то этот интеграл сходится. Выразим A через модуль спектральной плотности тока $F(\Omega)$. Для этого поступим так же, как при выводе ф-лы (2.20) для случая периодического тока. Именно, представим квадрат модуля спектральной плотности в виде:

$$[F(\Omega)]^2 = \overrightarrow{F}(\Omega)\overrightarrow{F}(-\Omega),$$

где $\overrightarrow{F}(\Omega)$ определяется ф-лой (2.26), а сопряжённая ей функция $\overrightarrow{F}(-\Omega)$ формулой:

$$F(-\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\Omega t}\, dt.$$

Полагая спектр функции $f(t)$ простирающимся от 0 до бесконечности, проинтегрируем $[F(\Omega)]^2$ в пределах от $\Omega = -\infty$ до $\Omega = +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\Omega)]^2\, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{F}(\Omega)\,\overrightarrow{F}(-\Omega)\, d\Omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{F}(\Omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\Omega t}\, dt\right] d\Omega.$$

Меняя местами порядок интегрирования по t и Ω, последнее выражение можно записать в несколько иной форме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\Omega)]^2\, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{F}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega\right] dt.$$

Но в соответствии с ф-лой (2.27)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{F}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega = 2\pi f(t).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\Omega)]^2\, d\Omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\, dt$$

и окончательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\Omega)]^2\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [F(\Omega)]^2\, d\Omega. \qquad (2.62)$$

Эта формула иногда называется теоремой Релея, а также равенством Парсеваля.

В отличие от выражения (2.20), ф-ла (2.62) определяет не среднюю мощность (которая для любой непериодической, абсолютно интегрируемой функции равна нулю), а полную энергию, выделяемую сигналом $f(t)$ за всё время его действия.

По виду функции $[F(\Omega)]^2$ можно судить о распределении энергии в спектре непериодической функции, и поэтому ф-ла (2.62) может быть использована для выбора полосы пропускания электрической цепи, обеспечивающей достаточно полное использование энергии сигнала. В частности, при действии сигнала $f(t)$ на фильтр нижних частот с затуханием, равным нулю в полосе частот от 0

до Ω_1 и равным бесконечности вне этой полосы, энергия на выходе фильтра равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_{вых}(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_1} [F(\Omega)]^2\,d\Omega, \qquad (2.63)$$

где $f_{вых}(t)$ — сигнал на выходе цепи.

Так, например, в случае электродвижущей силы в виде прямоугольного импульса с амплитудой E, действующей на входе фильтра с полосой пропускания от 0 до Ω_1, согласно ф-ле (2.47) получим

$$\frac{[2E]^2}{\pi}\int_0^{\Omega_1} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\Omega^2}\,d\Omega = \frac{2E^2\tau}{\pi}\int_0^{\frac{\Omega_1\tau}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx, \qquad (2.$$

где $x = \frac{\Omega\tau}{2}$.

Произведя интегрирование[1]), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_{вых}(t)]^2\,dt = E^2\cdot\tau\,\frac{2}{\pi}\left[\mathrm{si}\,(\Omega_1\tau) - \frac{2\sin^2\frac{\Omega_1\tau}{2}}{\Omega_1\tau}\right] =$$

$$= E^2\cdot\tau\cdot\psi\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right). \qquad (2.65)$$

Множитель $E^2\tau$ есть полная энергия входного импульса, выделяемая в сопротивлении, равном 1 *ом*.

Функция

$$\psi\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{si}\,(\Omega_1\tau) - \frac{2\sin^2\frac{\Omega_1\tau}{2}}{\Omega_1\tau}\right], \qquad (2.66)$$

характеризующая используемую часть энергии, изображена на рис. 2.26. Из этого рисунка видно, что при $\frac{\Omega_1\tau}{2} \geqslant \pi$, т. е. при $\Omega_1 \geqslant \frac{2\pi}{\tau}$, используется более 0,9 полной энергии импульса.

Аналогично устанавливается связь между Ω_1 и степенью использования энергии импульсов различной формы.

---

[1]) Заменив сперва пределы 0 и $\frac{\Omega_1\tau}{2}$ на x_1 и x_2, а также подставив $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, после интегрирования получим $\frac{1-\cos 2x_1}{2x_1} - \frac{1-\cos 2x_2}{2x_2} + \mathrm{si}\,2x_2 - \mathrm{si}\,2x_1$. При $x_1 \to 0$ первое и четвёртое слагаемые обращаются в нуль, а второе и третье дают (2.65).

Для единичного импульса полная энергия, равномерно распределённая по бесконечно широкому спектру, очевидно, равна бесконечности. В полосе частот от 0 до Ω_1 сосредоточена энергия, пропорциональная $\frac{\Omega_1}{\pi}$.

Это положение может быть распространено на импульсы произвольной формы, но столь малой длительности, что в выделяемой полосе частот от 0 до Ω_1 спектральную плотность можно считать постоянной и равной площади импульса.

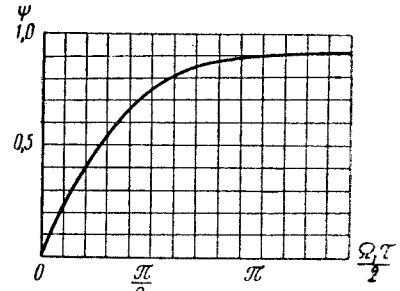


Рис. 2.26

В частности, для рассмотренного выше прямоугольного импульса, при $\Omega_1\tau \ll 1$ энергию выходного сигнала можно считать пропорциональной величине $\frac{E^2\tau^2\Omega_1}{\pi}$.

Для ,,колокольного'' импульса (№ 9 в нижеследующей таблице) в соответствии с ф-лой (2.63) находим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_1} [F(\Omega)]^2\,d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_1} \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}\right|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\,\Phi\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}\right), \qquad (2.67)$$

где $\Phi\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}} e^{-x^2}\,dx$ — интеграл вероятности.

Поскольку полная энергия импульса (т. е. при $\Omega_1 = \infty$) равна $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\,\Phi(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$, то отношение энергии в полосе частот от 0 до Ω_1 к полной энергии определяется табличной функцией[1]) $\Phi\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}\right)$.

---

[1]) Подробная таблица $\Phi(x)$ приводится в книге Б. Н. Сегала и К. А. Семендяева. Пятизначные математические таблицы, изд. АН СССР, 1948 г. В указанной книге для $\Phi(x)$ принято обозначение $\mathrm{erf}\,x$. Иногда $\Phi(x)$ называется также функцией Лапласа или функцией Крампа.

Если длительность импульса определять по уровню $f(t)$, равному, например, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимального, т. е. из условия

$$e^{-\frac{\alpha\tau^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то

$$\tau=\frac{2\sqrt{\ln 1{,}41}}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{и} \quad \sqrt{2\alpha}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\sqrt{\ln 1{,}41}}{\tau}=\frac{1{,}62}{\tau}.$$

Таким образом, интересующее нас отношение энергий определяется функцией $\Phi\left(\frac{\Omega_1\tau}{1{,}62}\right)$. В частности, при $\frac{\Omega_1\tau}{1{,}62}\geqslant 1{,}17$ функция $\Phi\left(\frac{\Omega_1\tau}{1{,}62}\right)\geqslant 0{,}9$.

Следовательно, для 90-процентного использования энергии импульса требуется полоса частот $\Omega_1\approx\frac{1{,}86}{\tau}$. Само собой разумеется, что в зависимости от способа определения длительности колокольного импульса аргумент $\Phi\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{2\alpha}}\right)$ может несколько отличаться от $\frac{\Omega_1\tau}{1{,}62}$.

Следует отметить, что хотя между используемой долей энергии входного сигнала и искажениями, вносимыми системой, существует прямая связь, энергетический подход к выбору полосы пропускания цепи (фильтра) не всегда является исчерпывающим. Так, например, в случае прямоугольного импульса на входе фильтра, значительное увеличение полосы пропускания сверх определённой величины, достаточной для достижения максимальной амплитуды, лишь в слабой степени влияет на используемую энергию, хотя для повышения крутизны фронтов выходного импульса это расширение полосы необходимо. Это положение можно пояснить и на обратном примере: если при заданной полосе фильтра неограниченно удлинять импульс, то величина используемой энергии стремится к единице, а искажения фронтов импульса остаются неизменными.

Отсюда видно, что более наглядное и непосредственное суждение о влиянии цепи при передаче импульсов можно получить путём нахождения и анализа формы сигнала на выходе цепи. Эти вопросы рассматриваются в гл. 9.

Спектральные плотности для некоторых импульсов даны в таблице на стр. 64—67.

§ 2.11. Нерегулярные сигналы. Основные характеристики

Реальные сигналы, с которыми приходится иметь дело в радиотехнике, представляют собой более или менее хаотические функции времени. Такой функцией является, например, электрическое напряжение, соответствующее речи, музыке, последовательности знаков телеграфного кода при передаче неповторяющегося текста и т. д. Рассмотренные в § 2.2 строго периодические последовательности импульсов являются лишь абстракцией, полезной при изучении некоторых важных для практики свойств сигналов реальных, непериодических. Упомянутые выше хаотические сигналы, образующие так называемый случайный или стохастический процесс, в дальнейшем будем называть нерегулярными. Если длительность действия подобных сигналов достаточно велика, чтобы в пределах рассматриваемого отрезка времени успевали проявиться все существенные для практики свойства сигнала (например, среднеквадратичное значение сигнала), то при расчётах и проектировании радиоаппаратуры подобные сигналы можно рассматривать как длящиеся бесконечно долго.

Для анализа нерегулярных сигналов необходимо применять статистический подход.

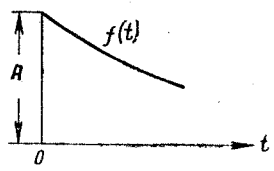
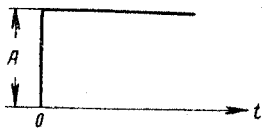
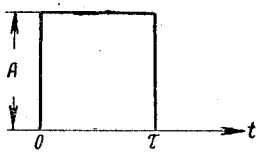
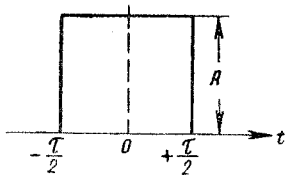
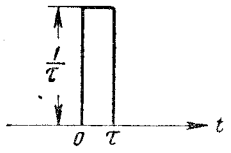
Для облегчения анализа целесообразно исходить из допущения, что статистические свойства сигнала не зависят от времени, т. е. что нерегулярный сигнал представляет собой стационарный случайный процесс.

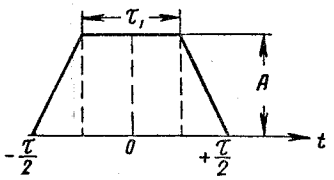
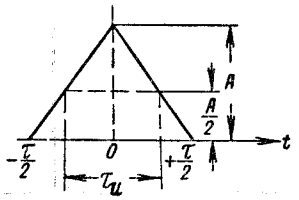
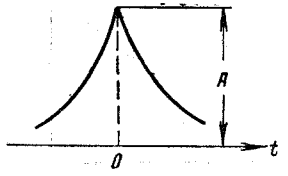
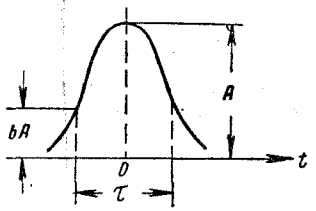
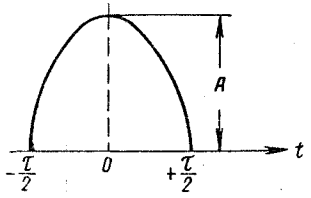
В качестве основных характеристик нерегулярного сигнала, как отмечалось ранее, следует принять: а) спектральное распределение мощности сигнала и б) вероятностные распределения для параметров сигнала, имеющих случайный характер.

Говоря о спектральной характеристике, следует иметь в виду, что ни ряд Фурье, ни интегральные преобразования Фурье к нерегулярным функциям, заданным при t, меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$, неприменимы. Невозможно найти спектральную плотность $\overrightarrow{F}(\Omega)$ для функции, соответствующей, например, неопределённо долго передаваемой речи. Само понятие спектральной плотности в смысле определений, данных в § 2.5, по отношению к нерегулярным сигналам теряет своё содержание.

Можно, однако, ввести понятие[1]) спектральной плотности среднего (по времени) квадрата случайной функции $g(t)$. Если под случайной функцией $g(t)$ подразумевается электрическое напряжение или ток, то средний квадрат этой функции можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую в сопротивлении, равном 1 *ом*. Спектральную плотность среднего квадрата $g(t)$ можно рассматривать как усреднённую по времени мощность, содержащуюся в полосе частот $\Delta F=1$ *гц*. Введённую таким образом спектральную плотность $W(\Omega)$ в дальнейшем будем называть энергетической спектральной плотностью или просто энергетическим спектром функции $g(t)$.

[1]) Это понятие не следует смешивать с понятием спектральной плотности в смысле преобразования Фурье.

№ пп.	Функция времени (импульс) $f(t)$		Спектральная плотность $f(t)$		
			$\vec{F}(\Omega)$	Модуль $F(\Omega)$	Фаза $\psi(\Omega)$
1	$f(t) = Ae^{-\beta t}$ при $t > 0$ $f(t) = 0$ при $t < 0$		$\frac{A}{\beta + i\Omega}$	$\frac{A}{\sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{\Omega}{\beta}$
2	$f(t) = A$ при $t > 0$ $f(t) = 0$ при $t < 0$		$\frac{A}{i\Omega}$	$\frac{A}{\Omega}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$f(t) = A$ при $0 < t < \tau$ $f(t) = 0$ при $t < 0$ или $t > \tau$		$A \frac{e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{\frac{-i\Omega\tau}{2}}}{i\Omega} e^{-i\frac{\Omega\tau}{2}}$	$\frac{2A}{\Omega} \left\lvert \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right\rvert$	$\frac{\Omega\tau}{2} - \pi n$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
4	$f(t) = A$ при $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$ $f(t) = 0$ при $t < -\frac{\tau}{2}$ или $t > +\frac{\tau}{2}$		$A \frac{e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{\frac{-i\Omega\tau}{2}}}{i\Omega}$	$\frac{2A}{\Omega} \left\lvert \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right\rvert$	0 при $2\pi n < \frac{\Omega\tau}{2} < (2n+1)\pi$ π при $(2n+1)\pi < \frac{\Omega\tau}{2} < (2n+2)\pi$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
5	$f(t) = \frac{1}{\tau}$ при $\tau \to 0$		1	1	0

№ пп.	Функция времени (импульс) $f(t)$	
6	$f(t)=\frac{2A}{\tau-\tau_1}\left(\frac{\tau}{2}+t\right)$ при $-\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau_1}{2}$. $f(t)=A$ при $-\frac{\tau_1}{2}<t<\frac{\tau_1}{2}$. $f(t)=\frac{2A}{\tau-\tau_1}\left(\frac{\tau}{2}-t\right)$ при $\frac{\tau_1}{2}<t<\frac{\tau}{2}$.	
7	$f(t)=\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right)$ при $-\frac{\tau}{2}<t<0$. $f(t)=\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right)$ при $0<t<\frac{\tau}{2}$	
8	$f(t)=A\,e^{\alpha t}$ при $-\infty<t<0$ $f(t)=A\,e^{-\alpha t}$ при $0\leqslant t<+\infty$	
9	$f(t)=A\,e^{-\alpha t^2}$ при $-\infty<t<+\infty$ где $\alpha=\frac{4\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\tau^2}$ при $b=0{,}78$	
10	$f(t)=A\cos\frac{\pi}{\tau}t$ при $-\frac{\tau}{2}<t<+\frac{\tau}{2}$	

Спектральная плотность для $f(t)$		
$\overrightarrow{F(\Omega)}$	Модуль $F(\Omega)$	Фаза $\phi(\Omega)$
$\frac{8A}{(\tau-\tau_1)\Omega^2}\sin\frac{\Omega(\tau+\tau_1)}{4}\times$ $\times\sin\frac{\Omega(\tau-\tau_1)}{4}$	$\frac{8A}{(\tau-\tau_1)\Omega^2}\left\lvert\sin\frac{\Omega(\tau+\tau_1)}{4}\right\rvert\times$ $\times\left\lvert\sin\frac{\Omega(\tau-\tau_1)}{4}\right\rvert$	0 при $\frac{n2\pi}{\tau-\tau_1}<\Omega<\frac{(n+1)2\pi}{\tau+\tau_1}$ π при $\frac{(n+1)2\pi}{\tau+\tau_1}<\Omega<\frac{(n+1)2\pi}{\tau-\tau_1}$
$A\tau_u\left(\frac{\sin\frac{\Omega\tau_u}{2}}{\frac{\Omega\tau_u}{2}}\right)^2$	$A\tau_u\left\lvert\frac{\sin\frac{\Omega\tau_u}{2}}{\frac{\Omega\tau_u}{2}}\right\rvert^2$	0 при $\frac{2n2\pi}{\tau_u}<\Omega<\frac{(2n+1)2\pi}{\tau_u}$ π при $\frac{(2n+1)2\pi}{\tau_u}<\Omega<$ $<\frac{(2n+2)2\pi}{\tau_u}$.
$\frac{2A\alpha}{\alpha^2+\Omega^2}$	$\frac{2A\alpha}{\alpha^2+\Omega^2}$	0
$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}A\,e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}$ $\sqrt{\pi}A\tau\,e^{-\frac{(\tau\Omega)^2}{4}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}A\,e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}$ $\sqrt{\pi}A\tau\,e^{-\frac{(\tau\Omega)^2}{4}}$	0
$\frac{A\tau\pi}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\Omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2}$	$\frac{A\tau\pi}{2}\left\lvert\frac{\cos\frac{\Omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2}\right\rvert$	0 при $0<\frac{\Omega\tau}{2}<\frac{3}{2}\pi$ π при $\frac{3}{2}\pi<\frac{\Omega\tau}{2}<\frac{5}{2}\pi$

Рассматривая $W(\Omega)$ как среднюю (по времени) мощность в полосе 1 *гц*, можно написать

$$\overline{g^2(t)} = \int_0^\infty W(\Omega)\, dF = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W(\Omega)\, d\Omega. \qquad (2.68)$$

Здесь и далее черта над функцией означает операцию усреднения по времени.

Более строгое определение понятия „энергетический спектр" может быть дано с помощью следующих рассуждений.

Имея в виду стационарный случайный процесс, выделим конечный интервал времени T и условимся рассматривать нерегулярный сигнал $e(t)$ в этом интервале изолированно от левого и правого продолжений.

Такой отрезок функции $e(t)$, удовлетворяющий требованию абсолютной интегрируемости, может быть в принципе представлен в виде интеграла Фурье:

$$e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{F}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega,$$

где, очевидно,

$$\overrightarrow{F}(\Omega) = \int_0^T e(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt. \qquad (2.69)$$

Энергия сигнала в интервале времени T согласно ф-ле (2.62) определяется выражением:

$$\int_0^T [e(t)]^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [F(\Omega)]^2\, d\Omega.$$

Относя эту энергию к интервалу T получим среднюю в этом интервале мощность:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [e(t)]^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[F(\Omega)]^2}{T}\, d\Omega. \qquad (2.70)$$

Если устремить T к бесконечности, то в пределе левая часть выражения (2.70) будет определять мощность, среднюю за всё время действия $e(t)$.

Следовательно,

$$\overline{[e(t)]^2} = \overline{e^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [e(t)]^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\left[\frac{[F(\Omega)]^2}{T}\right] d\Omega. \qquad (2.7$$

Из сравнения выражений (2.71) и (2.68) заключаем, что энергетический спектр $W(\Omega)$ может быть представлен в следующей форме:

$$W(\Omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{2[F(\Omega)]^2}{T}, \qquad (2.72)$$

где $F(\Omega)$ определяется выражением (2.69).

Следует отметить, что энергетический спектр $W(\Omega)$, являющийся весьма важной характеристикой сигнала, всё же имеет более ограниченное значение, чем спектральная плотность $\overrightarrow{F}(\Omega)$ непериодического сигнала с конечной энергией (т. е. абсолютно интегрируемого). По заданному энергетическому спектру $W(\Omega)$ нельзя восстановить исходную функцию $g(t)$, как это возможно сделать по заданной спектральной плотности $G(\Omega)$ для сигналов, представимых в виде интеграла Фурье. Иначе говоря, в случае случайного сигнала возможен анализ функций, но не синтез. Это обстоятельство является результатом утери фаз всеми составляющими спектра сигнала при усреднении их мощности. Обратное преобразование Фурье, применённое к $W(\Omega)$, позволяет найти не самую функцию $g(t)$, а лишь функцию корреляции для исходной функции $g(t)$ (см. приложение 2).

Обратимся к второй важнейшей характеристике случайного процесса — вероятностному распределению. Выделив произвольный момент t_1, можем рассматривать $g(t_1)$ как случайную величину x, причём вероятность пребывания этой величины в интервале значений x и $x+dx$ равна $p(x)\, dx$, где $p(x)$ так называемая плотность вероятности или дифференциальный закон распределения случайной[1]) величины x.

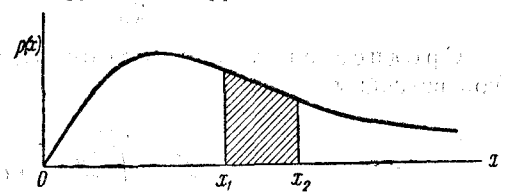


Рис. 2.27

Вероятность пребывания x в конечном интервале $x_1<x<x_2$ или интегральная вероятность определяется интегралом:

$$P(x_1<x<x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx. \qquad (2.73)$$

Таким образом, вероятность пребывания случайной величины x в интервале от x_1 до x_2 равна площади кривой $p(x)$ на участке $x_1<x<x_2$ (рис. 2.27).

[1]) Имеются в виду случайные величины „непрерывного" типа.

При любом непрерывном распределении существует равенство

$$\int_{x_{мин}}^{x_{макс}} p(x)\,dx = 1,$$

где $x_{мин}$ и $x_{макс}$ — нижний и верхний пределы возможных значений.

Это очевидно, так как имеется полная гарантия (стопроцентная вероятность) того, что случайная величина x принимает одно из значений в пределах $x_{мин} < x < x_{макс}$.

Зная плотность вероятности $p(x)$, можно определить основные параметры случайной величины: среднее статистическое значение, среднеквадратичное значение и средний квадрат отклонения от среднего значения (дисперсия).

В теории вероятностей доказываются следующие положения.

Среднее статистическое значение случайной величины (или „математическое ожидание"):

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx. \qquad (2.74)$$

Среднее статистическое значение квадрата случайной величины

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,p(x)\,dx. \qquad (2.75)$$

Средний квадрат отклонения случайной величины от её среднего значения (дисперсия):

$$\sigma_x^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}. \qquad (2.76)$$

Соотношение (2.76) может быть приведено к виду:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - 2\overline{x\bar{x}} + \overline{(\bar{x})^2}.$$

Учитывая[1]), что $\overline{2x\bar{x}} = 2(\bar{x})^2$, получим

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \qquad (2.77)$$

В выражениях (2.74)—(2.77) черта над случайной величиной обозначает усреднение по системам. Это нужно понимать следующим образом: повторяя много раз случайный процесс $g(t)$ и определяя каждый раз значение $x = g(t_1)$ в момент t_1, получим последовательность независимых случайных величин x. Усреднение x и x^2 по указанным процессам при числе испытаний, стремящемся к бесконечности, приводит к выражениям (2.74)—(2.77).

[1]) Величина $\bar{x}$ уже не является случайной величиной и при усреднении произведения $x\bar{x}$ может рассматриваться как постоянный множитель.

Важность выражений (2.74)—(2.77) для характеристики случайных сигналов определяется следующим свойством стационарных процессов: усреднение случайной величины по системам эквивалентно усреднению случайного процесса по времени.

На основании этого свойства в случае стационарного случайного процесса выражение (2.74) можно применить для определения постоянной составляющей сигнала, т. е. среднего по времени значения $g(t)$, а выражение (2.75) — для определения средней мощности сигнала.

Ясно также, что выражение (2.77) определяет среднюю мощность флуктуаций в виде разности среднего квадрата и квадрата постоянной составляющей функции $g(t)$.

Энергетический спектр $W(\Omega)$ совместно с плотностью вероятности для $g(t)$ (или для параметра этой функции, представляющего собой случайную величину) полностью характеризует случайный сигнал.

§ 2.12. Совокупность гармонических колебаний с случайными фазами

Начнём с простейшего сигнала — гармонического колебания:

$$e(t) = E\sin(\Omega t + \beta) = E\sin\lambda.$$

Если фазу λ колебания рассматривать как случайную величину, равновероятную в интервале от 0 до 2π, то и мгновенные

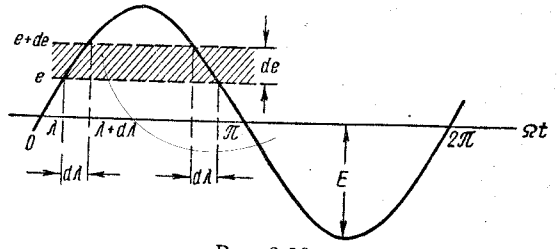


Рис. 2.28

значения e, соответствующие случайно выбранным λ, образуют последовательность случайных величин.

Плотность вероятности $p(e)$ для случайной величины e может быть определена следующим образом.

Выделив полоску de, ограниченную значениями e и $e+de$ (рис. 2.28), на основании выражения (2.73) можем считать, что

вероятность попадания e в полоску de равна $p(e)\,de$. С другой стороны, для того, чтобы e приняло одно из возможных значений в области e и $e+de$, фаза λ должна быть заключена в одном из двух интервалов $d\lambda$.

Ввиду равновероятности фаз в интервале от 0 до 2π вероятность попадания случайной фазы в интервал $d\lambda$ очевидно равна отношению отрезка $2d\lambda$ к 2π.

Отсюда следует, что

$$p(e)\,de=\frac{d\lambda}{\pi}.$$

Таким образом, плотность вероятности

$$p(e)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{d\lambda}{de}.$$

Поскольку при $e=E\sin\lambda$,

$$\frac{de}{d\lambda}=E\cos\lambda=E\sqrt{1-\left(\frac{e}{E}\right)^2},$$

окончательно получаем

$$p(e)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{E\sqrt{1-\left(\frac{e}{E}\right)^2}} \tag{2.78}$$

или

$$p\left(\frac{e}{E}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{E}\right)^2}}. \tag{2.78'}$$

График $p\left(\frac{e}{E}\right)$ представлен на рис. 2.29. Формула (2.78) и рис. 2.29 характеризуют, в частности, распределение яркости на экране электронного осциллографа при подаче на отклоняющие пластины гармонического колебания, не синхронизованного с частотой развёртки. Зависимость яркости свечения экрана от вертикального отклонения $B(y)$ совпадает с зависимостью $p\left(\frac{e}{E}\right)$.

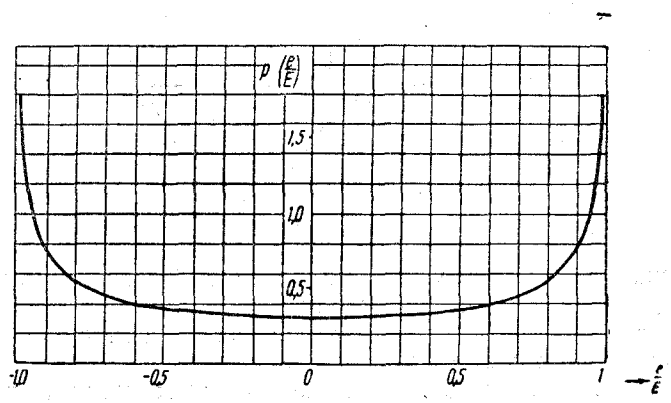


Рис. 2.29

Особо следует подчеркнуть независимость $p(e)$ от частоты колебания.

Среднее статистическое значение случайной величины e в соответствии с ф-лой (2.74) определится выражением:

$$\bar{e}=\int_{-E}^{+E}ep(e)\,de=\frac{1}{\pi E}\int_{-E}^{+E}\frac{e}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{E}\right)^2}}de=$$

$$=\frac{1}{\pi E}\int_{\lambda=-\pi/2}^{\lambda=+\pi/2}\frac{E\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\lambda}}\,d(E\sin\lambda)=0. \tag{2.79}$$

Подобным же образом находим дисперсию:

$$\sigma^2=\overline{(e-\bar{e})^2}=\int_{-E}^{+E}e^2p(e)\,de=\frac{E^2}{2}. \tag{2.80}$$

Полученные выражения для $\bar{e}$ и σ^2 совпадают с результатами усреднения $e(t)$ и $e^2(t)$ по времени. Это совпадение, являющееся не случайным, вытекает из упомянутого выше свойства стационарных случайных процессов.

Рассмотрим теперь совокупность гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и частотами, но со случайными фазами:

$$e(t)=E\sum_{i=1}^{k}\cos(\Omega t+\beta_i). \tag{2.81}$$

Как и ранее, фаза β_i считается равновероятной в интервале от 0 до 2π.

Величина e, соответствующая какому-либо фиксированному моменту времени t_1, зависит от соотношения фаз β_i слагаемых вида $E\cos(\Omega t_1+\beta_i)$.

Если многократно выделять момент t_1 каждый раз при новом случайном соотношении фаз, то получаемая при этом последовательность случайных величин $e(t_1)$ будет обладать вероятностным распределением, отличным от распределения вида (2.78). Задача сводится, следовательно, к отысканию закона распределения суммы:

$$e(t_1)=\sum_{i=1}^{k}e_1(t_1,\beta_i) \tag{2.82}$$

при заданном распределении для слагаемых $e_1(t_1,\beta_i)$.

Эта задача в теории вероятностей решается с помощью центральной предельной теоремы, доказанной русским математиком Ляпуновым А. М.

Согласно этой теореме распределение для суммы независимых случайных величин с увеличением числа слагаемых, при некоторых оговоренных ниже условиях, стремится к так называемому нормальному (гауссовому) закону:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где $\bar{x}$ — математическое ожидание, равное сумме математических ожиданий слагаемых, а $\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$ — дисперсия, равная сумме дисперсий слагаемых. Графики функций $p(x)$ для некоторых значений σ представлены на рис. 2.30.

Условия применимости центральной предельной теоремы сводятся к следующим:

число слагаемых велико,

слагаемые являются величинами одинакового порядка.

Из этих двух условий вытекает и третье: каждое из слагаемых мало по сравнению с суммой.

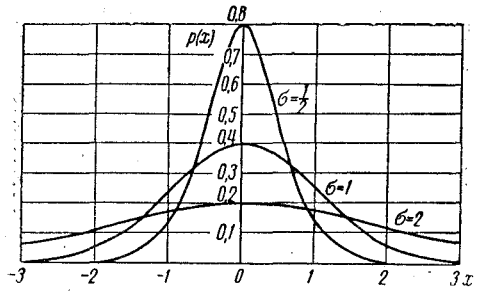


Рис. 2.30

Упомянутая теорема справедлива при любом законе распределения для слагаемых. Если же распределение самих слагаемых подчинено нормальному закону, то приведённые выше ограничения отпадают. Иными словами, при сложении нормально распределённых и независимых случайных величин сумма распределена также по нормальному закону при любом числе слагаемых и при любом соотношении их дисперсий.

Применительно к выражению (2.82), учитывая, что в соответствии с ф-лами (2.79) и (2.80) значения $\overline{e_1} = 0$, $\overline{e_1^2} = \frac{E^2}{2}$, можем написать:

$$\overline{e} = k \cdot \overline{e_1} = 0,$$

$$\overline{e^2} = k \cdot \overline{e_1^2} = k\frac{E^2}{2}.$$

Отметим, что последний результат совпадает с усреднённым (по времени) квадратом суммы гармонических колебаний с неодинаковыми частотами (см. § 2.10). Это и естественно, поскольку в энергетическом отношении совокупность гармонических колебаний с разными частотами эквивалентна такой же совокупности гармонических колебаний с одинаковыми частотами, но с случайными фазами. Допущение о случайности фазы вообще исключает влияние частоты колебания на величину, вносимую данной составляющей в общую сумму. Это значение определяется только законом распределения для слагаемых колебаний, который не зависит от частоты [см. ф-лу (2.78)].

Из всего хода приведённых выше рассуждений, а также из второго условия применимости центральной предельной теоремы следует, что для приближения распределения к нормальному сделанное выше допущение об одинаковости амплитуд отдельных слагаемых вовсе не обязательно. Достаточно, чтобы в составе $e(t)$ отсутствовали гармонические колебания с дискретной частотой, соизмеримые по амплитуде с среднеквадратичным значением $\sqrt{\overline{e^2(t)}}$, а фазы различных составляющих были взаимно независимы.

§ 2.13. Хаотическая последовательность импульсов

Пусть задана случайная функция $e(t)$, образованная беспорядочным повторением импульсов $g(t)$ произвольной, но одинаковой формы, в промежутке времени T. Говоря об импульсах, мы имеем в виду произвольные функции, удовлетворяющие требованию

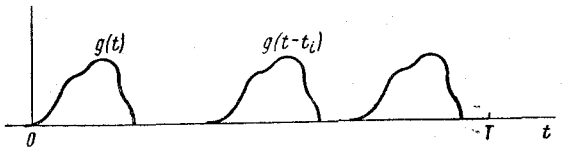


Рис. 2.31

абсолютной интегрируемости (иными словами, обладающие конечной энергией). Модуль спектральной плотности $G(\Omega)$, одинаковый для всех импульсов $g(t-t_i)$, независимо от моментов их возникновения, предполагается заданным. Моменты времени t_i считаем случайными и равновероятными в заданном промежутке T (рис. 2.31).

Таким образом, в выражении для спектральной плотности i-го импульса

$$\vec{G}_i(\Omega) = \vec{G}(\Omega)\, e^{-i\Omega t_i} = \vec{G}(\Omega) \cdot e^{-i\beta_i} \qquad (2.84)$$

фаза β_i может рассматриваться как случайная величина, равновероятная в интервале от 0 до 2π.

Желательно установить связь между энергетическим спектром $W(\Omega)$ результирующей случайной функции $e(t)$ и спектральной плотностью $\vec{G}(\Omega)$ элементарного импульса $g(t)$ при заданном среднем за 1 секунд числе импульсов K_1.

С этой целью образуем для каждого i-го импульса периодическую последовательность, взяв за период длину интервала T.

Амплитуда составляющей с частотой $n\frac{2\pi}{T}$ этой последовательности [см. § 2.5, ф-лу (2.28)] равна $\frac{2}{T}\,G(\Omega)$, а мгновенное значение этой составляющей выразится в виде:

$$g_n(t-t_i)=\frac{2}{T}\,G\left(n\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(n\frac{2\pi t}{T}-\beta_{in}\right). \tag{2.85}$$

Суммируя подобные составляющие периодических последовательностей для всех индексов i от 1 до K (где K — число импульсов в интервале T) и учитывая случайность фаз β_{in}, получим при достаточно большом K (см. предыдущий параграф) нормально распределённую случайную величину с дисперсией

$$\sigma_n^2=\frac{K}{2}\left[\frac{2}{T}\,G(\Omega)\right]^2.$$

Учитывая, что среднее число импульсов в 1 секунду равно $K_1=\frac{K}{T}$, найдём

$$\sigma_n^2=\frac{2K_1}{T}\left[G\left(n\frac{2\pi}{T}\right)\right]^2. \tag{2.86}$$

Полученная величина имеет смысл усреднённой по времени мощности, связанной с составляющей $\Omega_n=n\frac{2\pi}{T}$. Для определения $W(\Omega)$ остаётся перейти от линейчатого спектра, возникшего из-за периодического повторения каждого импульса (с периодом T), к сплошному спектру, соответствующему хаотической последовательности импульсов $g(t-t_i)$. Учитывая, что периоду T соответствует частотный интервал между соседними гармониками n и $n+1$, равный $\Delta F=\frac{1}{T}$, и относя σ_n^2 к полосе ΔF, найдём энергетический спектр функции $e(t)$:

$$W(\Omega)=\frac{\sigma_n^2}{\Delta F}=2K_1[G(\Omega)]^2. \tag{2.87}$$

Полученная формула показывает, что структура энергетического спектра хаотической последовательности импульсов совпадает с структурой квадрата модуля спектральной плотности отдельных импульсов, образующих $e(t)$.

Из вышеизложенного можно также придти к заключению, что из хаотической последовательности импульсов принципиально возможно выделить гармоническое колебание с дискретной частотой $F\neq 0$ и конечной амплитудой. Действительно, как это вытекает из ф-лы (2.86), при конечном K_1 и $T\to\infty$, значение $\sigma_n^2\to 0$.

Иначе обстоит дело с постоянной составляющей ($\Omega=0$), которая может не равняться нулю. Величина этой составляющей равна[1]) $K_1G(0)$.

Обратимся к вопросу о законе распределения для величины $e(t)$. Учитывая, что $e(t)$ представляет собой сумму независимых случайных величин, соответствующих нормально распределённым суммам $g_n(t-t_i)$ с дисперсиями σ_n^2 [см. ф-лу (2.86)], приходим к выводу, что и результирующая функция $e(t)$ подчиняется нормальному закону распределения. Дисперсия величины $e(t)$, равная сумме дисперсий слагаемых, на основании ф-л (2.68) и (2.87) определяется выражением:

$$\sigma^2=\overline{(e-\bar{e})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}W(\Omega)\,\Delta\Omega_n.$$

В пределе при $T\to\infty$ получим

$$\sigma^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}W(\Omega)\,d\Omega. \tag{2.88}$$

Учитывая сделанное выше замечание о тождественности усреднения по системам и по времени, средний квадрат отклонения от его среднего значения (флуктуации) можно также найти с помощью выражения:

$$\sigma^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}[e(t)-\overline{e(t)}]^2\,dt. \tag{2.89}$$

В радиотехнической практике нормальный закон распределения наиболее полно реализуется в электрических флуктуациях, свя-

[1]) При определении суммарной постоянной слагающей можно не интересоваться положением импульсов на оси t. Поэтому хаотическую последовательность можно заменить периодической при периоде повторения $T_1=\frac{1}{K_1}$. На основании ф-лы (2.29′) постоянная составляющая:

$$\frac{1}{T_1}\,G(0)=K_1G(0).$$

занных с тепловым движением частиц в проводниках и с дробовым эффектом в электронных лампах.

Однако ряд сигналов, например речь, музыку и некоторые другие сигналы часто удобно трактовать как случайные процессы с распределением, близким к нормальному.

§ 2.14. Характеристики некоторых реальных сигналов

Одним из наиболее распространённых электрических сигналов является телеграфный сигнал, используемый для передачи сообщений как в проводной, так и в радиотелеграфной связи.

При телеграфной работе отдельные буквы, цифры и знаки препинания, образующие сообщение, передаются с помощью специальных кодов, получаемых при различных комбинациях из импульсов. Каждой букве, а также интервалам между буквами и словами соответствует определённая комбинация импульсов. В настоящее время наибольшее распространение имеют два кода: Морзе и равномерный пятизначный. Последний применяется при буквопечатающем приёме.

В коде Морзе каждая буква образуется комбинацией коротких и длинных знаков („точки" и „тире"), причём тире по длительности равно трём точкам. Интервал между соседними знаками равен длительности точки, между группами знаков, образующих букву — трём точкам, а между словами — пяти точкам. Таким образом, при передаче сообщения (текста) по коду Морзе электрический сигнал выглядит как последовательность коротких (точки) и длинных (тире) импульсов, разделённых интервалами, равными длительности коротких импульсов (рис. 2.32). На рис. 2.32 показана последовательность таких импульсов при передаче слова Москва.

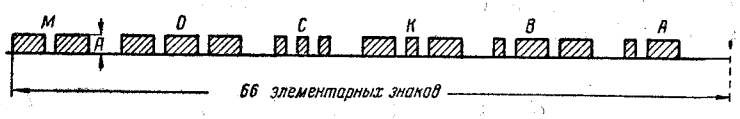


Рис. 2.32

При передаче сложных сообщений чередование точек и тире имеет нерегулярный характер. При рассмотрении записи на ленту заранее незнакомого по содержанию и смыслу сообщения, невозможно с уверенностью предсказать, что последует после заданного знака: точка, тире или пауза.

Таким образом, сигнал в любом из последующих интервалов является случайной величиной, могущей принимать одно из двух дискретных значений: A или 0.

Для определения средней длительности передачи одного слова и распределения времени между знаками и паузами, необходимо исходить из статистических закономерностей, присущих данному

языку и характеру сообщения (слова, цифры, служебные знаки и т. д.). Установлено, что при длительной передаче разнообразного текста, на одно слово в среднем приходится пять букв, для передачи которых требуется время, равное 48 точкам. Из этого времени только 22 точки соответствуют знакам, а остальные 26 — интервалам между знаками и буквами, включая и паузу в конце слова.

Спектральная характеристика подобного случайного процесса может быть дана лишь в форме энергетического спектра (см. § 2.11). Практическое значение такой характеристики не очень велико, так как для выбора параметров цепей, обеспечивающих удовлетворительное воспроизведение телеграфных сигналов, необходимо исходить из наиболее коротких импульсов при наиболее неблагоприятных условиях их чередования.

Такие условия имеют место при непрерывной передаче одних лишь точек, как это практикуется в перерывах между сообщениями. Так как при этом сигнал принимает характер периодической последовательности прямоугольных импульсов, длительность которых равна интервалам, то при определении полосы частот сигнала можно исходить из дискретного спектра, состоящего из нечётных гармоник (пример 2.3.2). Для хорошего воспроизведения прямоугольной формы импульсов требуется передача 1, 3, 5 и 7-й гармоник. В практике часто удовлетворяются передачей 1 и 3-й гармоник.

Нетрудно установить связь между скоростью телеграфирования и требуемой полосой частот. Для передачи в одну минуту N стандартных пятибуквенных слов требуется за одну секунду передавать $\frac{N}{60}48 = 0{,}8 \cdot N$ знаков. Следовательно, длительность одного знака (точки) равна $\tau_1 = 1{,}25/N$, а длительность периода повторения точек равна $T = 2T_1 = 2{,}5/N$. Отсюда, частота первой гармоники $F = 0{,}4 \cdot N$ сл/мин, а третьей $F = 1{,}2 \cdot N$ сл/мин. При ручной манипуляции телеграфным ключом ($N = 20 \div 25$ сл/мин) требуется полоса до 30 *гц*, а при быстродействующей телеграфии, использующей специальные реле ($N = 300 \div 400$ сл/мин), до 500 *гц*.

Необходимо иметь в виду, что эти цифры характеризуют минимальные требования, обеспечивающие воспроизведение сигнала в приёмной части радиолинии. Телеграфный радиопередатчик, проманипулированный прямоугольными импульсами, посылает в „эфир" значительно более широкий спектр частот. Поэтому при определении полосы частот, занимаемой телеграфным каналом, с учётом помех, которые могут создаваться в соседних каналах, необходимо принимать во внимание и более высокие гармоники, входящие в спектр импульсной последовательности (см. § 2.3, пример 2).

При использовании равномерного пяти- или шестизначного кода соотношение между скоростью передачи и полосой частот

сигнала получается приблизительно таким же, как и в случае кода Морзе.

Значительно более сложны характеристики звукового сигнала — речи, музыки, шума и др. В акустике принято следующее подразделение звуков.

Музыкальные тона, близкие к периодическим процессам. При чисто синусоидальной форме колебаний звук называется простым тоном. Сложный музыкальный тон, как и всякий сложный периодический процесс, может быть охарактеризован линейчатым спектром. Фазовая характеристика интереса не представляет, так как изменение фазировки простых тонов ухом человека не воспринимается.

Звуковые удары или импульсы, имеющие характер отдельных кратковременных возмущений. Как и всякий непериодический процесс, электрические напряжения или токи, соответствующие звуковому импульсу, полностью характеризуются заданием спектральной плотности (см. § 2.5).

Шумы или длительные звуки, возникающие при беспорядочном наложении большого числа звуковых импульсов или при беспорядочном наложении большого числа простых тонов. Если фазы отдельных тонов взаимно независимы, то шум представляет собой случайный процесс, подчиняющийся нормальному закону распределения (см. § 2.12). Спектральная характеристика электрических напряжений или токов, соответствующих шуму, может быть задана в форме энергетического спектра (см. § 2.11). В зависимости от длительности импульсов, образующих шум, основная часть мощности шума может быть сосредоточена в области более высоких или более низких частот.

Соответствующее шуму электрическое колебание имеет сложную форму, в которой нельзя усмотреть какой-либо закономерности. Наблюдаемые в отдельные моменты выбросы (пики) в 2—3 раза превышают среднеквадратичное значение шума.

Электрические сигналы соответствующие передаче речи, пения и музыки не могут быть отнесены ни к одному из перечисленных выше звуков. В отдельные моменты — при произнесении гласных звуков — речь имеет характер музыкальных тонов, при произнесении согласных — разнообразную и сложную структуру.

Для разборчивости речи требуется воспроизведение частот в полосе от 300 до 2000 *гц*. Поэтому в служебной (коммерческой) радиотелефонии нормализована полоса частот $300 \div 2400$ *гц*. Наибольшее значение имеют частоты в области $500 \div 1000$ *гц*. Для сохранения же тембра каждого индивидуального голоса необходимо передавать обертоны (гармоники), в виду чего для высококачественной передачи речи требуется полоса частот от 80 примерно до 10 000 *гц*.

Для очень хорошей передачи пения и музыки требуется полоса от 30 до 15 000 *гц*.

Реализация этих требований в практике ограничивается ,,теснотой в эфире'' из-за большого числа радиостанций и взаимными помехами между станциями, работающими на близких частотах (особенно на длинных и средних волнах). Кроме того, стоимость приёмников быстро растёт с расширением полосы акустических частот, подлежащих воспроизведению. Поэтому в радиовещании принята полоса частот от 50 до 4500 *гц*. На ультракоротких волнах используется более широкая полоса, примерно $30 \div 10\,000$ *гц* (звуковое сопровождение в телевидении).

Электрическое напряжение, соответствующее передаче речи, характеризуется очень большим отношением выбросов (пиков) к среднеквадратичному значению. Для среднего голоса это отношение с учётом пауз примерно равно 5—7. При пении это отношение может быть ещё в несколько раз больше. Из этого вытекает необходимость проектировать радиолинии с большим запасом линейного участка амплитудных характеристик или применять специальные устройства для автоматического сужения динамического диапазона акустических сигналов.

Рассмотрим теперь основные характеристики телевизионных сигналов. Структура этих сигналов сильно зависит от характера передаваемых изображений. Современные методы передачи изображений основаны на построчном ,,прочитывании'' с помощью электронного луча экрана специальной трубки, на который (экран) нанесён потенциальный рельеф, соответствующий данному изображению. В электрической цепи, связанной с экраном трубки, ток изменяется в соответствии с величиной потенциала отдельных элементов экрана, т. е. в соответствии с яркостью отдельных элементов передаваемого изображения.

Для точного воспроизведения изображения число строк должно быть достаточно велико. По стандарту, принятому в СССР, число строк равно 625. Для того, чтобы изображение воспринималось глазом слитно, в одну секунду передаётся 25 кадров. Таким образом, время, отводимое для пробега электронным лучом одной строки, равно $\frac{1}{625 \cdot 25} = 64 \cdot 10^{-6}$ *сек*. За это время ток в цепи, связанной с экраном, изменяется по сложному закону: на участках строки с примерно одинаковой яркостью ток почти не изменяется, в местах резкого перехода от ,,чёрного'' поля к ,,белому'' требуется почти мгновенное изменение тока от максимального до минимального значения. Для точного воспроизведения мелких деталей изображения полное изменение тока должно происходить за время, очень малое по сравнению с длительностью одной строки, примерно $\frac{1}{500} \div \frac{1}{1000}$. Это равносильно требованию передачи очень коротких импульсов с длительностью порядка долей микросекунды.

С другой стороны, для передачи медленных изменений яркости требуются очень длинные импульсы, вплоть до передачи

постоянного тока. Поэтому телевизионные сигналы характеризуются очень широкой полосой частот от 0 примерно до 6 *Мгц*. С этим связана также необходимость применения очень коротких волн (метровых и дециметровых) для передачи телевизионных сигналов.

Телевизионная техника ещё усложняется необходимостью передачи специальных сигналов для синхронизации работы приёмника и передатчика, а также звукового сопровождения.

ГЛАВА 3

МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 3.1. Общие определения

Пусть задано высокочастотное колебание (напряжение, ток), мгновенное значение которого определяется выражением

$$a(t) = A \sin(\omega t + \Theta) = A \sin \psi, \qquad (3.1)$$

где амплитуда A, частота ω и фаза Θ могут быть либо постоянными, либо медленно изменяющимися величинами, а ψ — фаза колебания в момент времени t.

Если A, Θ и ω — постоянные величины, то выражение (3.1) определяет простое немодулированное (гармоническое) колебание; частота $\omega = \omega_0$ этого колебания обычно называется „несущей" частотой.

Если A или ψ подвергаются принудительному изменению с целью передачи сигналов, то колебание $a(t)$ становится *модулированным*.

Процесс управления одним из параметров колебания называется *модуляцией*.

В зависимости от того, изменяется ли при модуляции амплитуда A или угол ψ, различают два основных вида модуляции: *амплитудную* и *угловую модуляцию*.

Угловая модуляция, в свою очередь, подразделяется на два вида: *частотную* и *фазовую* модуляцию. Эти два вида модуляции между собой тесно связаны и различие между ними проявляется лишь в характере изменения во времени угла ψ при одной и той же модулирующей функции.

Изменяемые по закону передаваемого сигнала параметры — амплитуда, частота или фаза — могут обычно рассматриваться как *медленные функции* времени. Это означает, что спектр модулирующего сигнала группируется в области низких по сравнению с ω_0 частот.

Изменение хотя бы одного из параметров — амплитуды, частоты или фазы — лишает высокочастотное колебание гармонического характера и превращает его в колебание сложное, состоящее из бо́льшего или меньшего числа простых гармонических колебаний. Таким образом, модулированное колебание обладает

спектром частот. Структура спектра зависит как от характера передаваемого сигнала (сообщения), так и от вида модуляции.

В практике часто приходится встречаться со смешанной модуляцией, например амплитудно-фазовой или амплитудно-частотной. При этом, однако, обычно один из видов модуляции является полезным (рабочим), а другие паразитными, сопровождающими основную модуляцию из-за несовершенства технических способов осуществления модуляции или из-за деформации спектра модулированного колебания при его прохождении через электрические цепи.

Перечисленные выше способы модуляции основаны на прямом изменении одного из параметров высокочастотного колебания. Достигнутые за последнее десятилетие успехи в освоении сверхвысоких частот и развитие импульсной техники способствовали созданию новых видов управления колебаниями, а именно импульсной модуляции. При такой модуляции передаваемый сигнал (сообщение) тем или иным способом накладывается на вспомогательную импульсную последовательность, которая, в свою очередь, модулирует высокочастотное колебание.

В зависимости от того, какой параметр изменяется при первичной модуляции — амплитуда, длительность или положение импульсов — различают амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), модуляцию по длительности (ДИМ), частотно-импульсную (ЧИМ), фазово-импульсную модуляцию (ФИМ) и др.

По отношению к высокочастотному колебанию модуляция (вторичная) является при этом амплитудной, так как излучаемое колебание имеет вид импульсов с неизменными частотой и фазой высокочастотного заполнения.

В данной главе под модуляцией подразумевается процесс управления одним из параметров непосредственно высокочастотного колебания.

§ 3.2. Амплитудно-модулированные колебания

При чисто амплитудной модуляции огибающая амплитуд высокочастотного колебания изменяется по закону изменения передаваемого сигнала. Пусть этот сигнал представляет собой заданную функцию времени $e(t)$, показанную на рис. 3.1*а*.

Тогда амплитудно-модулированное колебание, изображённое на рис. 3.1*б*, можно представить выражением

$$a(t) = [A_0 + k \cdot e(t)] \sin(\omega_0 t + \Theta_0) = A(t) \sin(\omega_0 t + \Theta_0), \qquad (3.2)$$

где k — коэффициент пропорциональности,
Θ_0 — начальная фаза колебания (при $t = 0$), а
A_0 — амплитуда несущего колебания (в отсутствие модуляции).

Для полного использования мощности передатчика относительное изменение амплитуды при модуляции выгодно доводить до наибольшей возможной величины. Если в качестве исходного уровня выбрать амплитуду A_0, то изменение огибающей „вниз" не может превышать A_0, т. е. относительное изменение не может быть больше единицы. Изменение же „вверх" может быть, в принципе, и больше A_0.

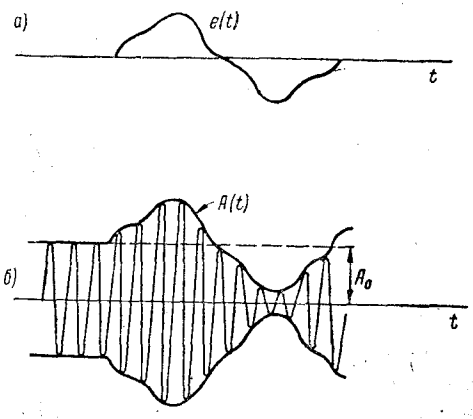


Рис. 3.1

Определение понятия глубины модуляции удобно производить для случая тональной модуляции, когда модулирующая функция $e(t)$ является гармоническим колебанием. В этом случае огибающую высокочастотного колебания можно записать в виде

$$A(t) = A_0 + \Delta A_m \sin(\Omega t + \gamma), \qquad (3.3)$$

где Ω — частота модулирующей функции,
γ — начальная фаза огибающей, а
ΔA_m — амплитуда изменения огибающей (рис. 3.2).

Отношение

$$M = \frac{\Delta A_m}{A_0}$$

называется коэффициентом глубины модуляции или просто коэффициентом модуляции.

Таким образом, мгновенное значение модулированного колебания можно записать в форме

$$a(t) = A_0 [1 + M \sin(\Omega t + \gamma)] \sin(\omega_0 t + \Theta_0). \qquad (3.4)$$

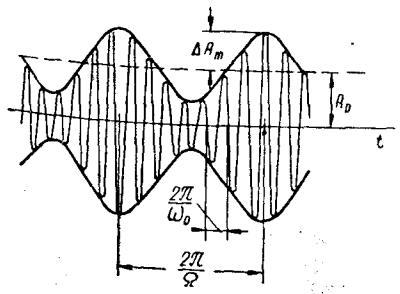


Рис. 3.2

При неискажённой модуляции ($M \leqslant 1$) амплитуда колебания изменяется в пределах от минимальной

$$A_{мин} = A_0(1 - M),$$

до максимальной

$$A_{макс} = A_0(1 + M).$$

В соответствии с изменением амплитуды изменяется и средняя

за период высокой частоты мощность модулированного колебания. Если $A(t)$ — амплитуда тока в колебательном контуре, то выделяемая в сопротивлении потерь r мощность (средняя за период несущей)

$$P(t)=\frac{A^2(t)r}{2}.$$

Это выражение справедливо при условии, что $\Omega \ll \omega_0$, так что в пределах одного периода $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ форму тока можно считать синусоидальной.

Различают следующие характерные значения $P(t)$:

1) мощность режима несущей волны (в отсутствие модуляции)

$$P_0=\frac{A_0^2\cdot r}{2};$$

2) мощность в максимальном режиме

$$P_{макс}=\frac{A_{макс}^2\cdot r}{2}=\frac{A_0^2(1+M)^2}{2}\,r=P_0(1+M)^2;$$

3) мощность в минимальном режиме

$$P_{мин}=\frac{A_{мин}^2}{2}\;r=\frac{A_0^2(1-M)^2r}{2}=P_0(1-M)^2;$$

4) мощность, средняя за период модуляции („среднетелефонная" мощность). Эту мощность можно определить следующим образом[1])

$$\overline{P(t)}=\frac{\overline{A^2(t)}}{2}\;r=\frac{r}{2}\;A_0^2\overline{[1+M\sin(\Omega t+\gamma)]^2}=P_0(1+0{,}5\,M^2). \qquad (3.5)$$

Таким образом, при стопроцентной модуляции

$$P_{макс}=4P_0,$$

$$\overline{P(t)}=1{,}5\,P_0.$$

Из последнего выражения видно, что полезное приращение средней мощности колебания, в основном и определяющее условия выделения сигнала при приёме, не превышает половины мощности режима молчания.

В максимальном же режиме передатчик должен развивать мощность, вчетверо превышающую P_0. Эта особенность амплитудной модуляции является существенным недостатком, ухудшающим использование ламп передатчика и удорожающим его стоимость.

[1]) Среднее значение $\sin(\Omega t+\gamma)$ за период модулирующей частоты равно нулю, а среднее значение $\sin^2(\Omega t+\gamma)$ равно $^1/_2$. Черта над функцией означает операцию усреднения по времени.

§ 3.3. Спектр амплитудно-модулированного колебания

Во введении к данной главе (§ 3.1) отмечалось, что изменение одного из параметров высокочастотного колебания, в данном случае амплитуды, приводит к образованию новых частот. Проще всего это можно показать для случая тональной (гармонической) модуляции. Обращаясь к выражению (3.4), перепишем его следующим образом

$$a(t)=A_0[\sin(\omega_0 t+\Theta_0)+M\sin(\Omega t+\gamma)\,\sin(\omega_0 t+\Theta_0)]. \qquad (3.4')$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения, являющееся продуктом модуляции, может быть приведено к виду

$$M\sin(\Omega t+\gamma)\,\sin(\omega_0 t+\Theta_0)=$$
$$=-\frac{M}{2}\cos[(\omega_0+\Omega)\,t+(\Theta_0+\gamma)]+\frac{M}{2}\cos[(\omega_0-\Omega)\,t+(\Theta_0-\gamma)],$$

в соответствии с чем развёрнутое выражение для $a(t)$ принимает следующую форму:

$$a(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\Theta_0)-\frac{MA_0}{2}\cos[(\omega_0+\Omega)\,t+\Theta_0+\gamma]+$$
$$+\frac{MA_0}{2}\cos[(\omega_0-\Omega)\,t+\Theta_0-\gamma]. \qquad (3.6)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с „несущей" частотой ω_0. Второе и третье слагаемые соответствуют новым колебаниям (гармоническим), появляющимся в процессе модуляции амплитуды. Частоты этих колебаний $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$ называются „верхней" и „нижней" боковыми частотами модуляции.

Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{M}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания, а их фазы симметричны относительно фазы несущего колебания. Это положение в наглядной форме иллюстрируется векторной диаграммой, представленной на рис. 3.3.

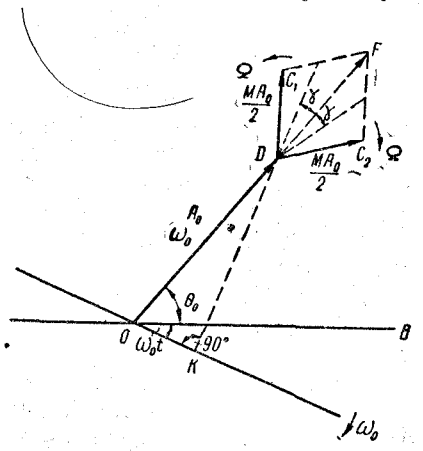


Рис. 3.3

На этой диаграмме ось времени вращается по часовой стрелке с угловой частотой ω_0, причём отсчёт угла $\omega_0 t$ ведётся от линии OB. Поэтому несущее колебание $A_0\sin(\omega_0 t+\Theta_0)$ изображается

на этой диаграмме в виде неподвижного вектора длиной A_0, составляющего с горизонталью угол Θ_0. Мгновенное значение несущего колебания в момент t равно проекции вектора A_0 на линию, перпендикулярную к оси времени (отрезок DK).

Для представления на этой же диаграмме колебания с частотой $\omega_0+\Omega$, превышающей угловую частоту оси времени на величину Ω, необходимо воспользоваться вектором, вращающимся с угловой частотой Ω против часовой стрелки (вектор DC_1). Для изображения колебания с частотой $\omega_0-\Omega$ потребуется вектор, вращающийся с такой же скоростью Ω по часовой стрелке (вектор DC_2). Поэтому колебания боковых частот — верхней и нижней — изображаются двумя векторами длиной $\frac{MA_0}{2}$, вращающимися во взаимно противоположных направлениях. Фазировка этих векторов симметрична относительно вектора несущего колебания A_0. Это следует из выражения (3.6).

Для бóльшей наглядности последнее выражение целесообразно записать в несколько видоизменённой форме. С помощью соотношений:

$$\cos\alpha = -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right);\quad \cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

выражение (3.6) можно привести к виду

$$a(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\Theta_0)+\frac{MA_0}{2}\sin\left[(\omega_0+\Omega)t+\Theta_0-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right]+$$
$$+\frac{MA_0}{2}\sin\left[(\omega_0-\Omega)t+\Theta_0+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right].$$

Из этого выражения видно, что при любой начальной фазе огибающей γ векторы DC_1 и DC_2, соответствующие колебаниям верхней и нижней боковой частоты, занимают симметричное относительно вектора OD положение. На рис. 3.3 начала векторов DC_1 и DC_2 перенесены из точки O в точку D. Равнодействующий вектор DF, являющийся геометрической суммой векторов DC_1 и DC_2 и называемый вектором модуляции, всегда располагается на линии OD, вследствие чего сумма всех трёх колебаний — несущей и двух боковых частот — может рассматриваться как колебание с постоянной фазой и частотой, но с модулированной амплитудой.

Попутно можно отметить, что если в результате прохождения через электрические цепи нарушится равенство амплитуд колебаний боковых частот или нарушится симметрия их фаз относительно фазы несущего колебания, то возникнет качание вектора, представляющего результирующее колебание, относительно направления OD. Это равносильно возникновению паразитной фазовой модуляции.

Остановимся на вопросе о фазе огибающей амплитуд при чисто амплитудной модуляции. Допустим, что начальная фаза высокочастотного колебания $\Theta_0=90°$. Тогда векторная диаграмма примет вид, показанный на рис. 3.4. Если при $\Omega t=0$ векторы боковых частот DC_1 и DC_2 направлены оба вверх (положение I на рис. 3.5), то огибающая амплитуд проходит в этот момент через своё максимальное значение $A_0(1+M)$. Этот случай отвечает начальной фазе огибающей $\gamma=\frac{\pi}{2}$ [см. ур-ние (3.4)] и уравнение огибающей будет

$$A(t)=A_0(1+M\cos\Omega t).$$

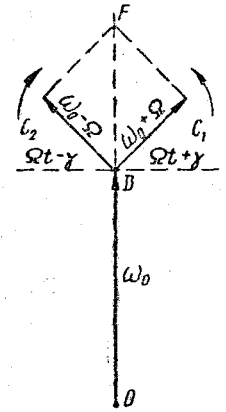


Рис. 3.4

Если же в момент $\Omega t=0$ векторы DC_1 и DC_2 занимают горизонтальное положение, то равнодействующая проходит через значение, равное A_0. В этом случае начальная фаза огибающей $\gamma=0$ и уравнение для огибающей будет

$$A(t)=A_0(1+M\sin\Omega t).$$

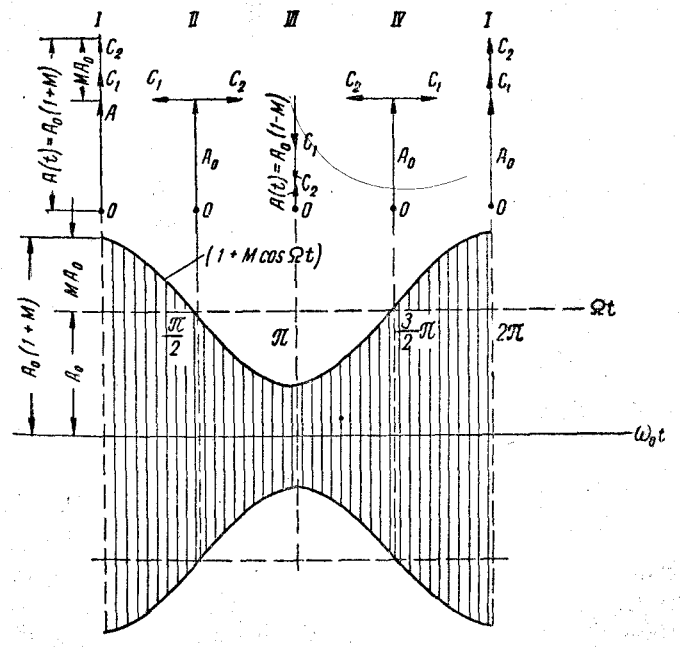


Рис. 3.5

Спектральная диаграмма колебания при тональной модуляции показана на рис. 3.6. Ширина спектра в этом случае равна удвоенной частоте модуляции 2Ω, а амплитуды колебаний боковых частот не могут превышать половины амплитуды немодулированного колебания (при $M \leqslant 1$).

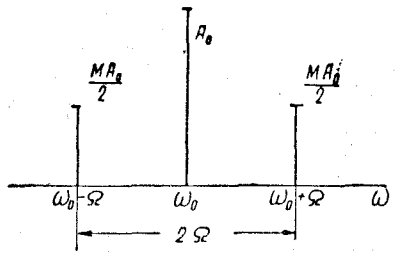


Рис. 3.6

Полученные результаты не трудно распространить на случай модуляции сложным сигналом.

Пусть модулирующий сигнал $u(t)$ представляет собой произвольную непериодическую функцию, которую можно представить в виде интеграла Фурье (см. § 2.5)

$$u(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty U(\Omega)\cos(\Omega t - \beta)\, d\Omega.$$

По условию основная часть энергии сигнала сосредоточена в области частот Ω, низких по сравнению с ω_0. Это означает, что модуль спектральной плотности сигнала $U(\Omega)$ практически равен нулю при значениях Ω, соизмеримых с ω_0.

Подставляя это выражение в ур-ние (3.2), получим

$$a(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta_0) + k\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty U(\Omega)\cos(\Omega t - \beta)\, d\Omega\right]\sin(\omega_0 t + \Theta_0).$$

Так как множитель $\sin(\omega_0 t + \Theta_0)$ не зависит от переменной Ω, его можно написать под знаком интеграла. Таким образом, получаем

$$a(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta_0) + k\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty U(\Omega)\cos(\Omega t - \beta)\sin(\omega_0 t + \Theta_0)\, d\Omega\right] =$$

$$= A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta_0) + k\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{U(\Omega)}{2}\sin[(\omega_0 + \Omega)\, t + \Theta_0 - \beta]\, d\Omega +$$

$$+ k\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{U(\Omega)}{2}\sin[(\omega_0 - \Omega)\, t + \Theta_0 + \beta]\, d\Omega.$$

Сравнивая это выражение с ф-лой (3.6), заключаем, что в случае модуляции непериодическим сигналом, обладающим сплошным спектром, по обе стороны от несущей частоты ω_0 образуются две сплошные полосы боковых частот $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, причём амплитуды колебаний этих частот пропорциональны амплитудам составляющих Ω, входящих в модулирующий сигнал $u(t)$.

В качестве примера можно привести выражение (2.57) для спектральной плотности синусоидального колебания с огибающей в виде единичного скачка (рис. 3.7).

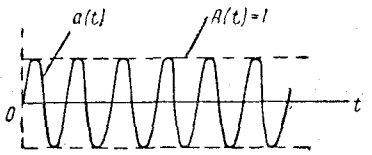


Рис. 3.7

Переходя от обозначения Ω к ω, перепишем это выражение в виде

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega}\right) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (3.7)$$

Модуль спектральной плотности показан на рис. 3.8, где на оси ординат отложена величина

$$\omega_0\, A(\omega) = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|}.$$

В области частот, близких к ω_0, величина $A(\omega)$ определяется, в основном, первым слагаемым правой части выражения (3.7). Можно поэтому считать

$$\vec{A}(\omega) \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega_0 - \omega}. \qquad (3.7')$$

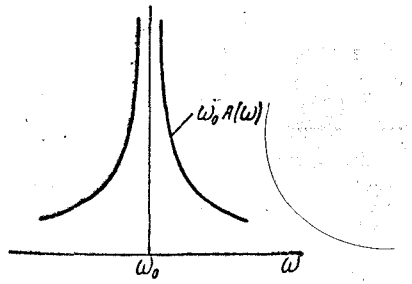


Рис. 3.8

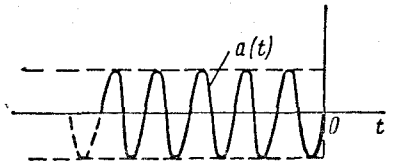


Рис. 3.9

Аналогично для колебания, обрывающегося в момент $t=0$ (рис. 3.9), можно получить следующее выражение[1])

$$\vec{A}(\omega) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega}\right) \approx -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega_0 - \omega}. \qquad (3.8)$$

[1]) Представив $a(t)$ в форме:
$a(t) = e^{ct}\sin\omega_0 t$ при $t<0$,
$a(t) = 0$ при $t>0$,
где $c>0$, и применяя ф-лу (2.27), получим

$$\vec{A}(\omega) = \lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{ct}\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Произведя интегрирование, придём к ф-ле (3.8).

Если спектр сигнала состоит из дискретных частот в полосе от $\Omega_{мин}$ до $\Omega_{макс}$ с конечными амплитудами E_n отдельных составляющих (рис. 3.10*а*), то каждой спектральной линии модулирующего сигнала будут соответствовать две линии в спектре модулированного колебания — одна для верхней боковой частоты $\omega_0+\Omega$ и другая для нижней $\omega_0-\Omega$. Таким образом, при модуляции сложным сигналом спектр амплитудно-модулированного колебания состоит из колебания несущей частоты и двух боковых полос от $\omega_0-\Omega_{макс}$ до $\omega_0-\Omega_{мин}$ и от $\omega_0+\Omega_{мин}$ до $\omega_0+\Omega_{макс}$ (рис. 3.10*б*), симметричных по отношению к несущей частоте. Симметрия распространяется на амплитуды и фазы.

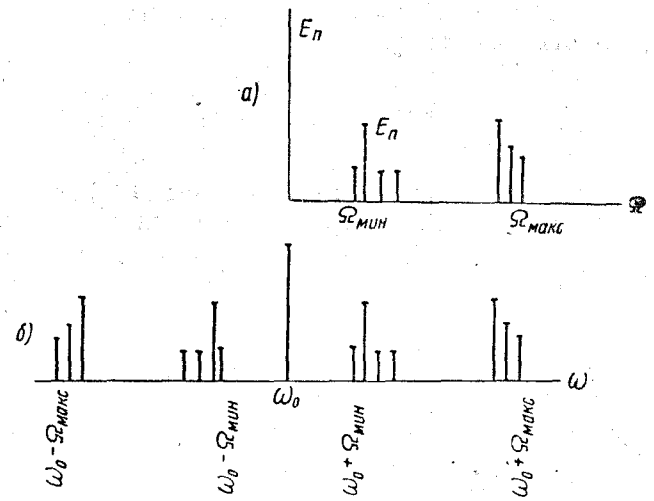


Рис. 3.10

Основные положения теории амплитудно-модулированных колебаний можно распространить и на импульсную модуляцию. Рассмотрим, например, периодическую последовательность импульсов с высокочастотным заполнением (рис. 3.11*б*), получающуюся при изменении амплитуды колебания по закону, показанному на рис. 3.11*а* в виде функции $e(t)$.

Представим периодическую функцию $e(t)$ в виде ряда Фурье [см. § 2.3, ф-ла (2.3.9)]:

$$e(t)=E\left[\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\cos n\Omega_1 t\right].$$

Считая амплитуду высокочастотного колебания пропорциональной величине $e(t)$, можем представить мгновенное значение колебания в форме[1]):

$$a(t)=k\,e(t)\sin\omega_0 t=kE\left[\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\cos n\Omega_1 t\right]\sin\omega_0 t. \quad (3.9)$$

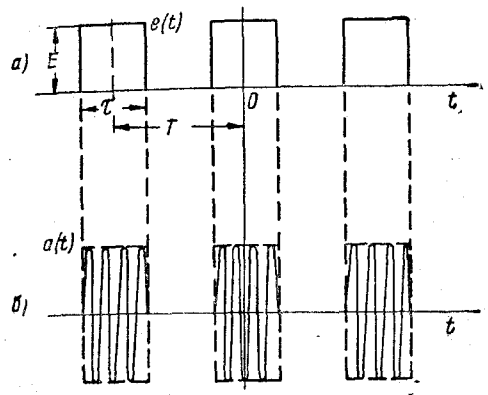


Рис. 3.11

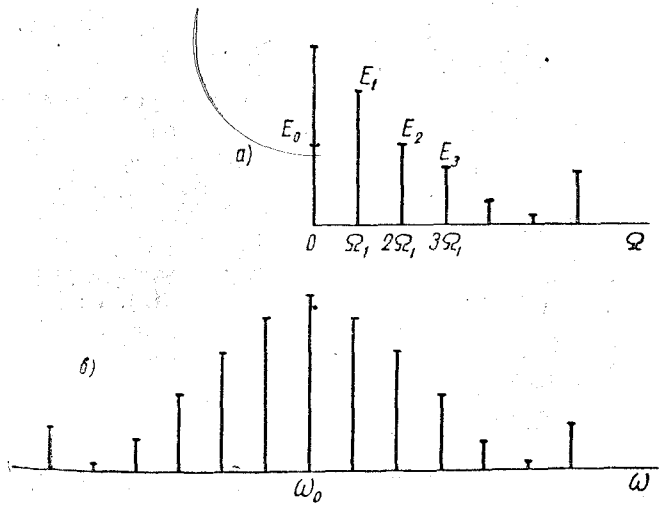


Рис. 3.12

[1]) Начальная фаза θ_0 высокочастотного колебания здесь опущена.

Раскрывая в правой части квадратные скобки и проделав при выводе тригонометрические преобразования, аналогичные произведённым ранее при выводе выражения (3.6), получим

$$a(t) = kE\left[\frac{\tau}{T}\sin\omega_0 t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\sin(\omega_0 + n\Omega_1)\,t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega_1\tau}{2}}{n}\sin(\omega_0 - n\Omega_1)\,t\right]. \qquad (3.10)$$

Спектральная диаграмма этого колебания показана на рис. 3.12*б*. Спектр модулирующей функции, показанный на рис. 3.12*а*, совпадает с рис. 2.2.

§ 3.4. Угловая модуляция. Связь между частотной и фазовой модуляцией

Пусть заданы два гармонических колебания с постоянными, но разными частотами ω_1 и ω_2:

$$\left.\begin{aligned} a &= A_0\sin\omega_1 t = A_0\sin\psi_1 \\ b &= B_0\sin\omega_2 t = B_0\sin(\omega_1 t + \Delta\omega\, t) = B_0\sin\psi_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (3.11)$$

причём

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0.$$

Если представить оба колебания в виде векторов на диаграмме, ось времени которой вращается по часовой стрелке с угловой скоростью, равной ω_1, то вектор OA, соответствующий колебанию a, будет неподвижен, а вектор OB, соответствующий колебанию b с частотой $\omega_2 > \omega_1$, будет равномерно вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (рис. 3.13). Угол Θ между векторами OA и OB будет непрерывно возрастать и по истечении времени t достигнет величины $\Theta = \Delta\omega\, t$. Подставив это значение Θ во второе ур-ние (3.11), получим:

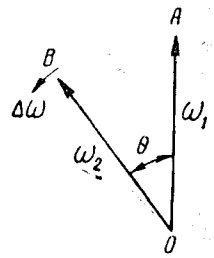


Рис. 3.13

$$\left.\begin{aligned} a &= A_0\sin\omega_1 t \\ b &= B_0\sin[\omega_1 t + \Theta(t)] \end{aligned}\right\}. \qquad (3.11')$$

Отсюда видно, что колебание с постоянной частотой ω_2 можно рассматривать как колебание с частотой $\omega_1 < \omega_2$, но с линейно возрастающей начальной фазой $\Theta(t) = \Delta\omega\, t$.

Можно, конечно, и колебание с частотой ω_1 трактовать как колебание с частотой $\omega_2 > \omega_1$, но с непрерывно убывающей фазой $\Theta = -\Delta\omega\, t$.

Таким образом, если известно, что за время t колебание b опередило по фазе колебание a на угол Θ, то можно утверждать, что на протяжении указанного отрезка времени частота ω_2 превышала частоту ω_1 на величину $\Delta\omega = \frac{\Theta}{t}$.

Допустим теперь, что на протяжении времени t частота колебания b не оставалась постоянной, так что разность $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ являлась функцией времени. Тогда для определения фазового сдвига к моменту времени t мы уже не вправе больше умножать $\Delta\omega$ на t, а должны искать Θ в виде интеграла:

$$\Theta = \int_0^t \Delta\omega(t)\,dt. \qquad (3.12)$$

Полная фаза колебания b будет при этом

$$\psi_2 = \omega_1 t + \int_0^t \Delta\omega(t)\,dt.$$

Это выражение справедливо, если ω_1 — постоянная величина. В общем случае, если задан закон изменения мгновенной частоты колебания в виде функции

$$\omega = \omega(t),$$

то полный набег фазы за время от 0 до t следует определять с помощью выражения

$$\psi = \int_0^t \omega(t)\,dt. \qquad (3.13)$$

Очевидно и обратное положение: если за момент времени dt набегающий фазовый сдвиг колебания b относительно колебания a равен $d\Theta$, то частотное отклонение (разность) в этот момент равно

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\Theta}{dt}. \qquad (3.14)$$

В общем случае, если задана полная фаза колебания в виде функции

$$\psi = \psi(t),$$

то мгновенное значение частоты в момент t определяется выражением

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}. \qquad (3.15)$$

Эти свойства колебания можно сформулировать следующим образом.

Изменение частоты во времени по закону $\omega(t)$ эквивалентно изменению полной фазы по закону интеграла от $\omega(t)$, а изменение полной фазы по закону $\psi(t)$ эквивалентно изменению частоты по закону производной от $\psi(t)$.

Это положение, являющееся основным в теории угловой модуляции, определяет связь между изменениями частоты и фазы и указывает на общность, существующую между двумя разновидностями угловой модуляции — модуляцией частоты и модуляцией фазы.

Приложим полученные результаты к тональной модуляции, т. е. к случаю, когда модулирующая функция задана в виде

$$u(t) = U \cos \Omega t. \tag{3.16}$$

Не уточняя пока способа осуществления модуляции, допустим, что частота генератора изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + K_{\text{ЧМ}} \cdot U \cos \Omega t = \omega_0 + \omega_\text{д} \cos \Omega t. \tag{3.17}$$

Здесь $\omega_0 = 2\pi f_0$ — средняя частота колебания (в отсутствие модуляции),

$K_{\text{ЧМ}}$ — коэффициент пропорциональности, определяющий связь между модулирующим напряжением и изменением частоты генератора,

$\Omega = 2\pi F$ — частота модуляции,

$\omega_\text{д} = 2\pi f_\text{д}$ — амплитуда частотного отклонения.

Для краткости $\omega_\text{д}$ в дальнейшем будем называть девиацией частоты или просто девиацией.

Составим выражение для мгновенного значения колебания (тока или напряжения), частота которого изменяется по закону (3.17). Для этого записываем выражение высокочастотного колебания в общей форме

$$a = A_0 \sin \psi. \tag{3.18}$$

Полную фазу колебания определяем по ф-ле (3.13), подставив в неё вместо $\omega(t)$ выражение (3.17)

$$\psi = \int_0^t \omega(t)\, dt = \int_0^t [\omega_0 + \omega_\text{д} \cos \Omega t]\, dt = \omega_0 t + \frac{\omega_\text{д}}{\Omega} \sin \Omega t. \tag{3.19}$$

Таким образом,

$$a = A_0 \sin \left[\omega_0 t + \frac{\omega_\text{д}}{\Omega} \sin \Omega t\right]. \tag{3.20}$$

Рассматривая это выражение, убеждаемся, что периодическая модуляция частоты в пределах $\pm \omega_\text{д}$ чистым тоном Ω эквивалентна гармонической вариации фазы с той же частотой в пределах угла $\pm \frac{\omega_\text{д}}{\Omega}$. Таким образом, амплитуда получаемой при этом вариации фазы равна

$$\Theta_{макс} = \frac{\omega_\text{д}}{\Omega}. \tag{3.21}$$

Отношение

$$m = \frac{\omega_\text{д}}{\Omega} = \Theta_{макс}, \tag{3.22}$$

называемое часто индексом модуляции, является основным параметром угловой модуляции. Существенно, что индекс модуляции не зависит от средней (немодулированной) частоты ω_0, а определяется исключительно величиной девиации и модулирующей частотой.

Допустим теперь, что генератор даёт колебание со стабильной частотой ω_0, но фаза этого колебания с помощью специального модулятора, не связанного с генератором, варьируется по закону:

$$\Theta = K_{\text{ФМ}} \cdot U \sin \Omega t = \Theta_{макс} \sin \Omega t. \tag{3.23}$$

Здесь $K_{\text{ФМ}}$ — коэффициент пропорциональности, определяющий связь между модулирующим напряжением и изменением фазы колебания,

$\Theta_{макс}$ — амплитуда изменения фазы при модуляции.

В данном случае полная фаза колебания (тока или напряжения) определяется суммой:

$$\psi = \omega_0 t + \Theta = \omega_0 t + \Theta_{макс} \sin \Omega t = \omega_0 t + m \sin \Omega t \tag{3.24}$$

и мгновенное значение колебания:

$$a(t) = A_0 \sin \psi = A_0 \sin [\omega_0 t + \Theta_{макс} \sin \Omega t]. \tag{3.25}$$

Мгновенная частота этого колебания в соответствии с выражением (3.15) будет

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \Theta_{макс}\, \Omega \cos \Omega t. \tag{3.26}$$

Итак, модулируя фазу в пределах $\pm \Theta_{макс}$ с частотой Ω, мы получили колебание, мгновенная частота которого изменяется с той же частотой Ω в пределах $\pm \Theta_{макс}\, \Omega$.

Учитывая, что по определению (3.22)

$$\Theta_{макс} = m = \frac{\omega_\text{д}}{\Omega},$$

можно выражение (3.26) переписать в форме:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_\text{д} \cos \Omega t.$$

Таким образом, при модуляции чистым тоном, по характеру колебания и его свойствам нельзя вывести никакого заключения о том, с какой модуляцией мы имеем дело — частотной или фазовой. В обоих случаях вектор, изображающий на круговой диаграмме модулированное колебание, качается относительно своего исходного положения таким образом, что угол Θ (рис. 3.14) изменяется во времени по закону:

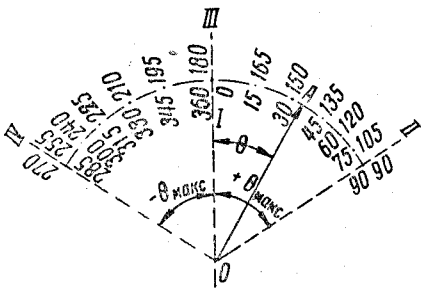


Рис. 3.14

$\Theta = \Theta_{макс} \sin \Omega t$ — при фазовой модуляции,

$\Theta = \frac{\omega_д}{\Omega} \sin \Omega t = \Theta_{макс} \sin \Omega t$ — при частотной модуляции (по закону $\Delta\omega = \omega_д \cos \Omega t$).

В то же время различие между частотной и фазовой модуляцией проявляется при изменении частоты модуляции или же при одновременной модуляции полосой частот.

При частотной модуляции величина девиации $\omega_д$ пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения U и не зависит от частоты модуляции Ω.

При фазовой же модуляции величина $\Theta_{макс}$ пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения и не зависит от частоты модуляции.

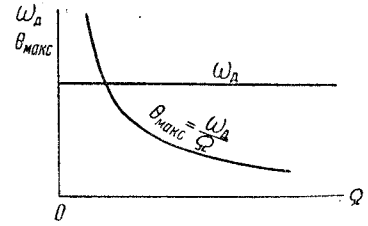


Рис. 3.15

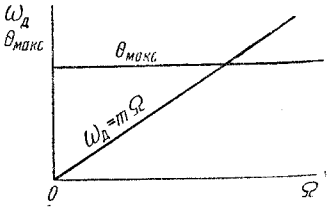


Рис. 3.16

Эти положения поясняются рис. 3.15 и 3.16, на которых показаны частотные характеристики для величин $\omega_д$ и $\Theta_{макс}$ при частотной и фазовой модуляции. В обоих случаях предполагается, что на вход модулятора подаётся модулирующее напряжение с неизменной амплитудой, а частота Ω изменяется от $\Omega_{мин}$ до $\Omega_{макс}$.

В первом случае, т. е. при частотной модуляции, величина $\omega_д$, зависящая, как указывалось выше, только от амплитуды U,

будет постоянной величиной. Величина же индекса модуляции, т. е. $m = \frac{\omega_д}{\Omega} = \Theta_{макс}$, с увеличением частоты будет убывать (рис. 3.15).

Во втором случае, т. е. при фазовой модуляции, $\Theta_{макс}$ не зависит от Ω, а $\omega_д = \Theta_{макс}\,\Omega$ изменяется пропорционально частоте модуляции (рис. 3.16).

Если на вход модулятора подаётся не гармоническое, а сложное напряжение, то структура модулированного колебания будет различной для ЧМ и ФМ. В первом случае медленным изменениям сигнала (т. е. низким частотам) будут соответствовать очень большие значения $\Theta_{макс}$ (рис. 3.15), а во втором, т. е. при фазовой модуляции, очень малые значения $\omega_д$ (рис. 3.16).

Поясним это на примере. Пусть на вход частотного и на вход фазового модулятора подаётся одинаковое напряжение, частота которого изменяется в пределах от $F_{мин} = 200$ *гц* до $F_{макс} = 2000$ *гц*. При частотной модуляции $f_д = 20$ *кгц*, а при фазовой модуляции $\Theta_{макс} = 0{,}5$ *рад*, причём эти величины, при заданной и неизменной амплитуде U, остаются неизменными в полосе от 200 до 2000 *гц*. Тогда при ЧМ максимальное значение фазового отклонения будет при $F_{мин}$; оно равно

$$\Theta_{макс} = \frac{f_д}{F_{мин}} = \frac{20\,000}{200} = 100 \ рад.$$

Минимальное же значение фазового отклонения при $F_{макс}$ будет

$$\Theta_{мин} = \frac{f_д}{F_{макс}} = 10 \ рад.$$

При фазовой модуляции минимальная девиация, равная $f_{д\ мин} = \Theta_{макс}\ F_{мин} = 100$ *гц*, будет при наинизшей частоте модуляции $F_{мин}$. Максимальная же девиация, равная $f_{д\ макс} = \Theta_{макс}\ F_{макс} = 1000$ *гц*, будет при наивысшей частоте модуляции $F_{макс}$.

Помимо различия в структуре колебания (при модуляции сложным сигналом), частотная и фазовая модуляции различаются по способу осуществления. В первом случае обычно применяется прямое воздействие на частоту колебаний генератора. В случае же фазовой модуляции генератор даёт стабильную частоту, а фаза колебания модулируется в одном из последующих элементов устройства.

Вместе с тем рассмотренные особенности колебания при ЧМ и ФМ указывают на возможность преобразования одного вида модуляции в другой. Так, например, если требуется осуществить частотную модуляцию с помощью фазового модулятора, то достаточно на входе модулятора включить корректирующее устройство, обладающее частотной характеристикой вида $\frac{1}{\Omega}$. Благодаря этому устройству амплитуда модулирующего напряжения, а следова-

тельно, и индекс модуляции будет убывать обратно пропорционально частоте Ω, как это и требуется для частотной модуляции. В простейшем виде схема корректора представляет собой последовательное соединение активного сопротивления и ёмкости, как это показано на рис. 3.17. При выполнении условия $R \gg \frac{1}{\Omega_{мин} C}$, где $\Omega_{мин}$ наименьшая модулирующая частота, получается требуемая частотная характеристика коэффициента передачи цепи:

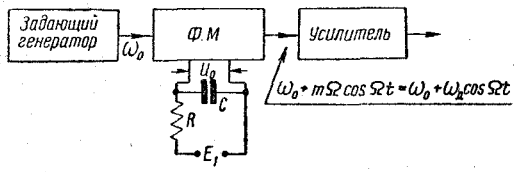


Рис. 3.17

$$\frac{U_\Omega}{U_1} \approx \frac{1}{RC\Omega}.$$

Можно осуществить также и фазовую модуляцию с помощью частотного модулятора. Подробнее этот вопрос рассматривается в гл. 13.

§ 3.5. Спектр колебания при гармонической угловой модуляции

Запишем выражение[1]) для мгновенного значения колебания, модулированного по частоте или фазе чистым тоном Ω,

$$a = A_0 \sin(\omega_0 t + m \sin \Omega t), \qquad (3.27)$$

в несколько видоизменённой форме:

$$a = A_0 [\cos(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t + \sin(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t]. \qquad (3.28)$$

Рассмотрим сперва свойства колебания при „неглубокой" модуляции, характеризующейся относительно небольшим значением фазового отклонения, т. е. индексом $m \ll 1$.

В этом случае можно считать:

$$\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t,$$
$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1.$$

Подставляя эти приближённые равенства в выражение (3.28), получим

$$a \approx A_0 [\sin \omega_0 t + m \sin \Omega t \cos \omega_0 t] =$$
$$= A_0 \left[\sin \omega_0 t + \frac{m}{2} \sin(\omega_0 + \Omega) t - \frac{m}{2} \sin(\omega_0 - \Omega) t\right]. \qquad (3.29)$$

[1]) Для упрощения письма начальная фаза высокочастотного колебания принята $\Theta_0 = 0$. То же самое относится и к начальной фазе γ модулирующей функции.

Сравним этот результат с случаем амплитудной модуляции. С этой целью воспользуемся выражением (3.4) и подставим в него $\Theta_0 = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. приведём уравнение амплитудно-модулированного колебания к виду:

$$a(t) = A_0 [1 + M \cos \Omega t] \sin \omega_0 t.$$

При этом амплитуда колебания модулируется по закону, совпадающему с законом изменения частоты в выражении (3.27).

Спектр колебания при АМ в соответствии с (3.6) будет

$$a(t) = A_0 \left[\sin \omega_0 t + \frac{M}{2} \sin(\omega_0 + \Omega) t + \frac{M}{2} \sin(\omega_0 - \Omega) t\right].$$

Из сравнения этого выражения с ур-нием (3.29) видно, что спектр колебания, модулированного по частоте или по фазе, при малом значении m состоит, как и спектр амплитудно-модулированного колебания, из несущей частоты ω_0 и двух боковых частот — верхней $\omega_0 + \Omega$ и нижней $\omega_0 - \Omega$. Единственное отличие заключается в сдвиге колебания нижней боковой частоты на 180° (знак минус) относительно того положения, какое оно занимает при амплитудной модуляции. Это положение иллюстрируется векторной диаграммой (рис. 3.18). В результате вектор модуляции DF всегда перпендикулярен к направлению вектора OD. Вектор OF, изображающий результирующее колебание, изменяется по фазе и по амплитуде; однако, при $m = \Theta_{макс} \ll 1$, амплитудными изменениями можно пренебрегать, вследствие чего модуляция может, в первом приближении, рассматриваться как чисто фазовая.

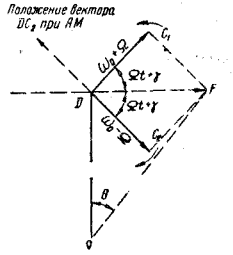


Рис. 3.18

Спектральная диаграмма угловой модуляции при $m \ll 1$ показана на рис. 3.19. Так как фазы отдельных составляющих колебаний этой диаграммой не учитываются, то характер диаграммы получается такой же, как и в случае амплитудной модуляции (рис. 3.6). Амплитуды колебаний боковых частот равны $\frac{mA_0}{2}$; таким образом, в данном случае индекс модуляции m совпадает по величине с коэффициентом M, характеризующим глубину изменения амплитуды в случае амплитудной модуляции. Полезно отметить, что ширина спектра при $m \ll 1$ равна 2Ω, как и в случае АМ.

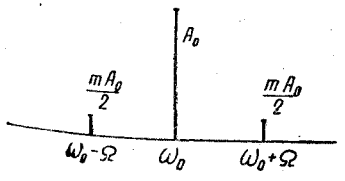


Рис. 3.19

Этот результат показывает, что при очень малых девиациях $\omega_д$ (по сравнению с Ω), ширина спектра от величины $\omega_д$ не зависит.

При увеличении фазового отклонения, т. е. при возрастании величины m, ур-ние (3.29) и диаграмма рис. 3.18 не дают правильного представления о действительной картине явлений при частотной или фазовой модуляции. Это объясняется тем, что с помощью колебания несущей частоты и всего лишь одной пары колебаний боковых частот невозможно представить колебание, частота или фаза которого изменяются в широких пределах по синусоидальному закону, а амплитуда остаётся строго постоянной. Действительно, анализ выражения (3.28) показывает, что периодическая вариация фазы или частоты колебания приводит к появлению большого числа дополнительных частот, и что при одинаковой модулирующей частоте спектр колебания, модулированного по частоте или фазе, оказывается значительно шире, чем спектр колебания, модулированного по амплитуде.

Чтобы в этом убедиться, достаточно разложить в ряд Фурье функции $\sin(m\sin\Omega t)$ и $\cos(m\sin\Omega t)$. В теории бесселевых функций доказываются следующие соотношения:

$$\sin(m\sin\Omega t) = 2J_1(m)\sin\Omega t + 2J_3(m)\sin 3\Omega t + 2J_5(m)\sin 5\Omega t + \ldots \quad (3.30)$$

$$\cos(m\sin\Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\Omega t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t + \ldots \quad (3.31)$$

$$\sin(m\cos\Omega t) = 2J_1(m)\cos\Omega t - 2J_3(m)\,3\Omega t + 2J_5(m)\cos 5\Omega t - \ldots \quad (3.32)$$

$$\cos(m\cos\Omega t) = J_0(m) - 2J_2(m)\cos 2\Omega t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t - \ldots, \quad (3.33)$$

где $J_n(m)$ — бесселева функция первого рода n-го порядка от аргумента m.

С помощью соотношений (3.30) и (3.31) ур-ние (3.27) может быть представлено в виде:

$$a = A_0\sin(\omega_0 t + m\sin\Omega t) = A_0\{J_0(m)\sin\omega_0 t + 2J_1(m)\sin\Omega t\cos\omega_0 t + 2J_2(m)\cos 2\Omega t\sin\omega_0 t + 2J_3(m)\sin 3\Omega t\cos\omega_0 t + \ldots\ldots\}$$

или в более развёрнутом виде:

$$a = A_0\sin(\omega_0 t + m\sin\Omega t) = A_0\{J_0(m)\sin\omega_0 t + J_1(m)[\sin(\omega_0+\Omega)t - \sin(\omega_0-\Omega)t] + J_2(m)[\sin(\omega_0+2\Omega)t + \sin(\omega_0-2\Omega)t] + J_3(m)[\sin(\omega_0+3\Omega)t - \sin(\omega_0-3\Omega)t] + \ldots\ldots\}. \quad (3.34)$$

Таким образом, при частотной и фазовой модуляции спектр колебания состоит из бесконечного числа боковых частот, отличающихся от несущей частоты на $n\Omega$, где n — любое целое число. Амплитуда n-й боковой частоты равна $A_n = J_n(m)\,A_0$, где A_0 — амплитуда немодулированного колебания, а m — индекс модуляции.

Существенно отметить, что амплитуды колебаний боковых частот определяются исключительно отношением $\frac{\omega_д}{\Omega} = m$ и совершенно не зависят от абсолютного значения несущей частоты ω_0.

Слагаемые вида $J_n(m)\sin n\Omega t\cos\omega_0 t$ или $J_n(m)\cos n\Omega t\sin\omega_0 t$, представляющие собой равнодействующие двух боковых частот $\omega_0 + n\Omega$ и $\omega_0 - n\Omega$, по аналогии с амплитудной модуляцией могут рассматриваться как векторы модуляции. Фазировка этих векторов относительно вектора несущей частоты $\sin\omega_0 t$ неодинакова: те из векторов модуляции, которые определяются множителем $\cos\omega_0 t$, повёрнуты на 90° относительно вектора несущей, а векторы вида $J_n(m)\cos n\Omega t\sin\omega_0 t$ — в фазе с вектором несущей частоты.

Само собой разумеется, что если несущая частота будет выражена через $\cos\omega_0 t$, то вектор $J_n(m)\sin n\Omega t\cos\omega_0 t$ будет в фазе с вектором несущей, а вектор $J_n(m)\cos n\Omega t\sin\omega_0 t$ сдвинут на 90° относительно вектора несущей частоты. Ориентировка векторов модуляции поясняется диаграммой рис. 3.20, построенной для двух значений Ωt ($\Omega t = 0$ и $\Omega t = 90°$) при индексе модуляции $m = 1$.

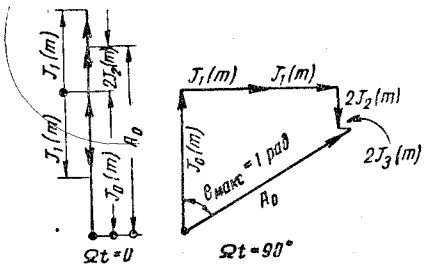


Рис. 3.20

При дальнейшем возрастании m приходится учитывать бо́льшее число боковых частот. Это видно из рис. 3.21 и 3.22, представляющих амплитудные спектры для ряда значений m от 0,5 до 24. Амплитуды всех составляющих спектра представлены на этих чертежах в виде вертикальных отрезков, длина которых равна $J_n(m)$, а расстояния от отрезка $J_0(m)$, соответствующего амплитуде колебания несущей частоты, равны $n\Omega$, где Ω — частота модуляции, а n — порядковый номер боковой частоты. Амплитуда немодулированного колебания принята за 100%; обозначенные на чертежах величины $J_n(m)$ дают амплитуды колебаний соответствующих частот в процентах от амплитуды немодулированного колебания. Рисунок 3.22 построен для неизменной модулирующей частоты Ω, а рис. 3.21 для неизменной девиации $\omega_д$. Для изменения индекса модуляции m от 0,5 до 24 в первом случае требуется изменять $\omega_д$ в пределах от $\omega_{д\,мин} = 0{,}5\Omega$ до $\omega_{д\,макс} = 24\,\Omega$; во

втором случае необходимо изменять Ω от $\Omega_{макс} = \frac{\omega_д}{0{,}5}$ до $\Omega_{мин} = \frac{\omega_д}{24}$. Графики некоторых коэффициентов $J_n(m)$ приводятся на рис. 3.23.

Рассмотрение рис. 3.21—3.23 показывает, что при малых значениях индексов m (а именно $m \leqslant 0{,}5$) ширина спектра определяется, как и в случае амплитудной модуляции, одной парой боковых частот и равна, следовательно, 2Ω. При значениях индекса m от 0,5 до 1 приобретает некоторое значение вторая пара боковых частот, ввиду чего ширина спектра должна быть приравнена 4Ω. Далее, при значениях индекса m от 1 до 2 приходится считаться с третьей и четвёртой парой боковых частот, соответственно чему ширина спектра доходит до $(6 \div 8)\Omega$. При бо́льших значениях индекса модуляции ширина спектра приближается к величине

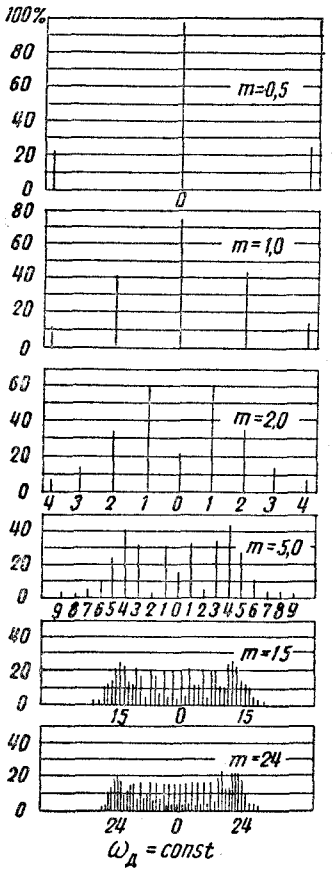


Рис. 3.21

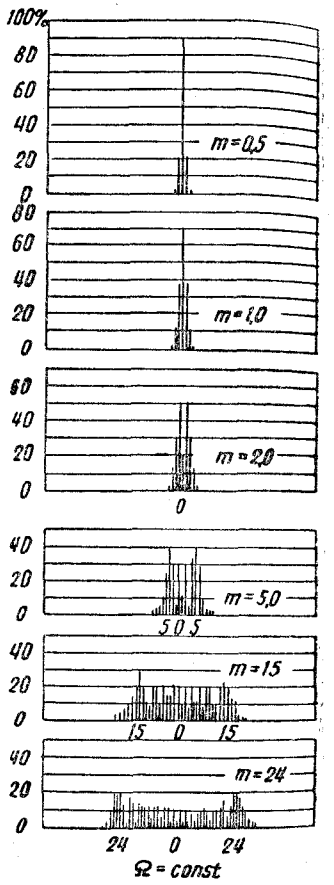


Рис. 3.22

$2m\Omega$. Это означает, что наивысший номер n боковой частоты, с амплитудой которой необходимо считаться, приближается к индексу модуляции m. Так, например, при $m = 5$ (рис. 3.24) амплитуды всех частот выше $n = 6$ не превышают 10%; при $m = 7$ этому

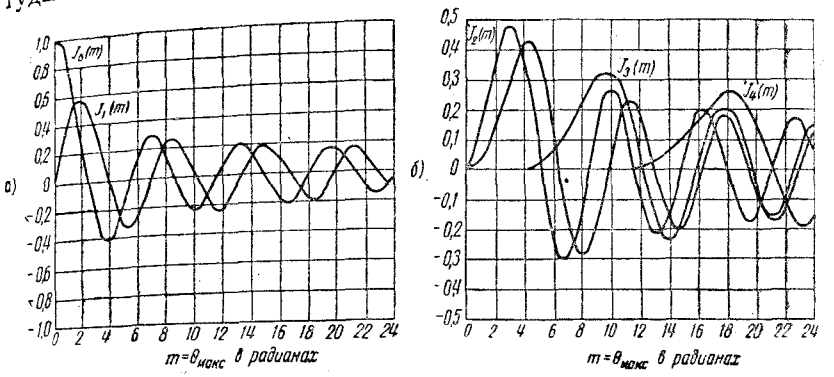


Рис. 3.23

условию удовлетворяют все боковые частоты, соответствующие $n \geqslant 8$; при m 15 — боковые частоты, соответствующие $n \geqslant 16$ и т. д.

На этом основании ширину спектра при больших индексах модуляции можно считать приближённо равной удвоенной амплитуде частотного отклонения, поскольку

$$2n_{макс}\ \Omega \approx 2m\Omega = 2\omega_д.$$

Для облегчения суждения о ширине спектра при различных величинах m, а также для выяснения характера распределения мощности между отдельными составляющими внутри спектра, на рис. 3.24 приводятся графики зависимости бесселевых функций $J_n(m)$ от номера боковой частоты n для ряда значений m от 1 до 7.

Изменение бесселевых функций в зависимости от порядка n при больших значениях аргумента m иллюстрируются рис. 3.25. На рис. 3.25*а* представлена зависимость J_n от n для постоянного значения $m = 10$, а на рис. 3.25*б* для $m = 1000$.

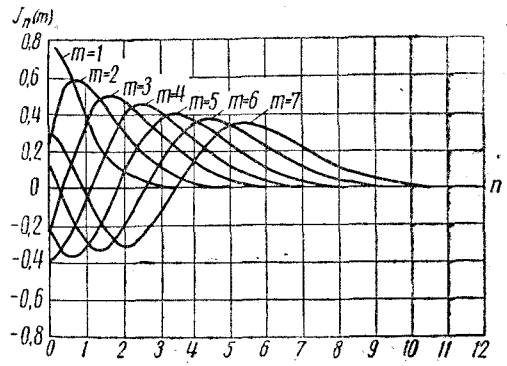


Рис. 3.24

Кривые рис. 3.25 показывают, что при больших значениях индекса модуляции m огибающая спектра амплитуд боковых частот представляет собой осциллирующую кривую с постоянно возрастающими амплитудой и периодом колебаний, причём последний максимум кривой соответствует боковой частоте, порядковый номер которой n немного меньше индекса модуляции m. При дальнейшем увеличении n амплитуды боковых частот быстро убывают до нуля.

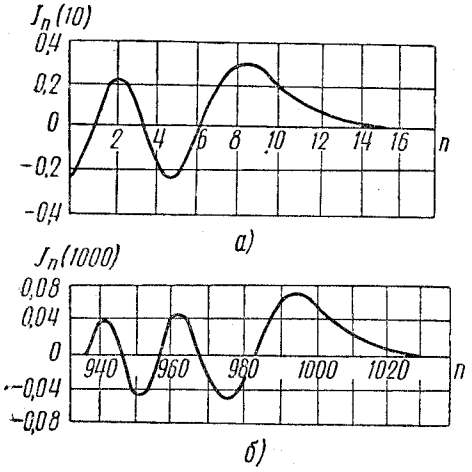


Рис. 3.25

Порядковый номер n, при котором наступает максимум $J_n(m)$, а также величина этого максимума могут быть при заданном значении m вычислены по следующим формулам (при $m > 5 \div 8$):

$$n = m - 0{,}8\sqrt[3]{m}, \quad (3.35)$$

$$J_n(m) = \frac{0{,}67}{\sqrt[3]{m}} + \frac{0{,}07}{m}. \quad (3.36)$$

Нахождение амплитуд боковых частот с помощью таблиц бесселевых функций при больших значениях m для практических расчётов весьма затруднительно и неудобно. Эта задача может быть сильно облегчена с помощью найденного академиком В. А. Фоком представления бесселевых функций в виде следующей суммы:

$$J_n(m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3}\left\{\nu(t) - \frac{1}{60}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}\left[t^2\nu'(t) + 4\cdot t\nu(t)\right] + \ldots\right\}, \quad (3.37)$$

где

$$t = \frac{n-m}{\sqrt[3]{m/2}}, \quad (3.38)$$

$\nu(t)$ — функция Эйри,

$\nu'(t)$ — производная $\nu(t)$ по t.

Применительно к исследованию спектра частотно-модулированного колебания наибольший интерес представляют большие и близкие друг к другу значения m и n. При этом можно ограничиться первым членом в ассимптотическом представлении Фока и пользоваться простой формулой:

$$J_n(m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3}\nu(t) = \frac{0{,}71\cdot\nu(t)}{(m)^{1/3}}$$

или

$$m^{1/3}\cdot J_n(m) = 0{,}71\cdot\nu(t).$$

График функции $m^{1/3}\cdot J_n(m)$ от t при изменении t от -9 до $+3$, построенный по таблице В. А. Фока, приведён на рис. 3.26.

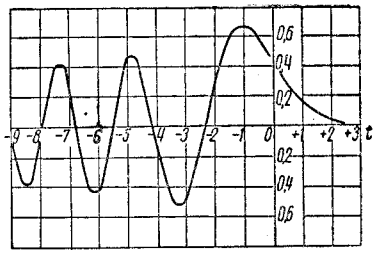


Рис. 3.26

Приведённые выше соображения о фактической ширине спектра частотно-модулированного колебания, вполне исчерпывающие вопрос с точки зрения определения требований к полосе пропускания высокочастотных трактов передатчика и приёмника, оказываются недостаточными для оценки ширины полосы, занимаемой в „эфире". Дело в том, что даже относительно слабые колебания боковых частот высокого порядка, попадая в канал соседней станции, способны создать значительные помехи. В особенности приходится считаться с интерференцией между боковыми частотами соседних станций в случае близкого расположения частотно-модулированных передатчиков, зоны обслуживания которых взаимно перекрываются. С этой точки зрения ширину канала необходимо определять из условия вполне определённого превышения амплитудой немодулированного колебания амплитуды боковой частоты на границе канала. Эта задача может быть разрешена с помощью графика (рис. 3.27), дающего отношение

$$\frac{\text{амплитуда девиации частоты}}{\text{половина ширины канала}}$$

в функции от отношения

$$\eta = \frac{\text{половина ширины канала}}{\text{частота модуляции}}$$

для различных уровней боковых частот на границах канала.

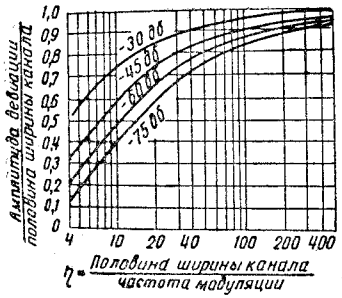


Рис. 3.27

Так, например, если исходить из заданной ширины канала, скажем 150 *кгц*, при максимальной модулирующей частоте 7,5 *кгц*, получим $\eta = \frac{75}{7{,}5} = 10$. Задаваясь условием, чтобы уровень боковой частоты на границах канала не превышал — 60 *дб*, найдём отношение:

$$\frac{f_д}{\frac{1}{2}\text{ ширины канала}} = 0{,}48,$$

откуда максимально допустимая девиация частоты $f_д = 0{,}48\cdot 75 = 36$ *кгц*.

При той же ширине канала, но при частоте модуляции 400 *гц*, получим $\eta = \frac{75}{0{,}4} = 190$ и при уровне — 60 *дб* отношение $\frac{2f_д}{\text{ширина канала}} \approx 0{,}92$, откуда $f_д \approx 0{,}92\cdot 75 \approx 70$ *кгц*.

Отсюда видно, что при постоянной ширине канала и уменьшении частоты модуляции девиация частоты может быть увеличена и, наоборот, при сохранении постоянства девиации ширина полосы частот (при заданном уровне боковых частот на границах канала) будет тем больше, чем выше частота модуляции. В действительности, однако, при передаче речи или музыки уровень модуляции на высоких модулирующих частотах значительно меньше, чем на низких, ввиду чего полная девиация, соответствующая наиболее глубокой модуляции, на высоких модулирующих частотах обычно не достигается.

В заключение данного параграфа отметим, что в отношении максимальной мгновенной мощности и ширины полосы частот между амплитудной и частотной модуляцией существует следующее принципиальное различие. При АМ пиковая мощность в $(1+M)^2$ раз больше мощности немодулированного колебания, а полоса частот равна удвоенной частоте модуляции 2Ω. При частотной модуляции, наоборот, мощность колебания всегда постоянна и равна мощности немодулированного колебания, но зато полоса частот весьма велика и (при $m \gg 1$) приблизительно в m раз шире, чем при амплитудной модуляции.

Эти особенности определяют преимущества и недостатки, области применения, а также формы практической реализации каждого из этих видов модуляции.

§ 3.6. Спектр колебания при угловой модуляции сложным сигналом

Ранее было показано (§ 3.3), что при амплитудной модуляции сложным сигналом каждая гармоническая составляющая сигнала образует в модулированном колебании пару колебаний, амплитуды и частоты которых не зависят от остальных составляющих сигнала. Иными словами, между спектром сигнала и спектром модулированного колебания при АМ существует линейная связь.

При ЧМ или ФМ структура спектра получается значительно более сложная. При добавлении новой модулирующей частоты не только изменяются амплитуды колебаний боковых частот от остальных составляющих сигнала, но появляются ещё и новые комбинационные частоты, сильно усложняющие структуру спектра модулированного колебания.

Рассмотрим это явление на относительно простом примере модуляции частоты двумя тонами, когда мгновенная частота может быть записана в виде:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_{д1} \sin \Omega_1 t + \omega_{д2} \sin \Omega_2 t. \qquad (3.39)$$

Полная фаза колебания в момент t в соответствии с ур-нием (3.19) будет

$$\psi = \int_0^t \omega(t)\, dt = \omega_0 t - m_1 \cos \Omega_1 t - m_2 \cos \Omega_2 t, \qquad (3.40)$$

где $$m_1 = \frac{\omega_{д1}}{\Omega_1}, \text{ а } m_2 = \frac{\omega_{д2}}{\Omega_2}.$$

Уравнение для колебания, модулированного по частоте двумя тонами, можно записать в форме:

$$\begin{aligned} a &= A_0 \sin(\omega_0 t - m_1 \cos \Omega_1 t - m_2 \cos \Omega_2 t) = \\ &= A_0 \{\sin \omega_0 t\, [\cos(m_1 \cos \Omega_1 t) \cos(m_2 \cos \Omega_2 t) - \\ &\quad - \sin(m_1 \cos \Omega_1 t) \sin(m_2 \cos \Omega_2 t)] - \\ &\quad - \cos \omega_0 t\, [\sin(m_1 \cos \Omega_1 t) \cos(m_2 \cos \Omega_2 t) + \\ &\quad + \cos(m_1 \cos \Omega_1 t) \sin(m_2 \cos \Omega_2 t)]\}. \end{aligned} \qquad (3.41)$$

С помощью ф-л (3.30) — (3.33) выражение (3.41) может быть представлено в следующей более развёрнутой форме:

$$\begin{aligned} a = A_0 \{ & J_0(m_1)\, J_0(m_2) \sin \omega_0 t - J_1(m_1)\, J_0(m_2) \cos(\omega_0 \pm \Omega_1) t \\ & - J_2(m_1)\, J_0(m_2) \sin(\omega_0 \pm 2\Omega_1) t \\ & + J_3(m_1)\, J_0(m_2) \cos(\omega_0 \pm 3\Omega_1) t \\ & + J_4(m_1)\, J_0(m_2) \sin(\omega_0 \pm 4\Omega_1) t \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - J_1(m_2)\, J_0(m_1) \cos(\omega_0 \pm \Omega_2) t \\ & - J_2(m_2)\, J_0(m_1) \sin(\omega_0 \pm 2\Omega_2) t \\ & + J_3(m_2)\, J_0(m_1) \cos(\omega_0 \pm 3\Omega_2) t \\ & + J_4(m_2)\, J_0(m_1) \sin(\omega_0 \pm 4\Omega_2) t \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + J_1(m_1)\, J_1(m_2) [\sin(\omega_0 + \Omega_1 \pm \Omega_2) t + \sin(\omega_0 - \Omega_1 \pm \Omega_2) t] \\ & + J_1(m_1)\, J_2(m_2) [\sin(\omega_0 + \Omega_1 \pm 2\Omega_2) t + \sin(\omega_0 - \Omega_1 \pm 2\Omega_2) t] \\ & + J_1(m_1)\, J_3(m_2) [\sin(\omega_0 + \Omega_1 \pm 3\Omega_2) t + \sin(\omega_0 - \Omega_1 \pm 3\Omega_2) t] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + J_2(m_1)\, J_1(m_2) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_1 \pm \Omega_2) t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_1 \pm \Omega_2) t] \\ & + J_2(m_1)\, J_2(m_2) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_1 \pm 2\Omega_2) t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_1 \pm 2\Omega_2) t] \\ & + J_2(m_1)\, J_3(m_2) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_1 \pm 3\Omega_2) t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_1 \pm 3\Omega_2) t] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}. \end{aligned} \qquad (3.42)$$

Таким образом, при одновременной модуляции двумя частотами Ω_1 и Ω_2 спектр содержит следующие компоненты:

а) несущую частоту ω_0 с амплитудой, пропорциональной произведению бесселевых функций нулевого порядка от аргументов m_1 и m_2;

б) боковые частоты $\omega_0 \pm n\Omega_1$ с амплитудами, пропорциональными произведениям $J_n(m_1)\,J_0(m_2)$;

в) дополнительные боковые частоты вида $[\omega_0 \pm (p\Omega_1 \pm n\Omega_2)]$, где p и n — любые целые числа; амплитуды этих частот пропорциональны произведению бесселевых функций от m_1 и m_2, причём порядок этих функций определяется коэффициентами p и n.

На первый взгляд может показаться, что общая ширина полосы частот при модуляции двумя или несколькими частотами всегда значительно превосходит полосу при модуляции одной частотой (наибольшей). В действительности, однако, этого нет в тех случаях, когда при добавлении новых частот модуляции соответственно уменьшаются величины девиации, приходящиеся на каждую из частот в отдельности. Как раз такие условия мы имеем при передаче сложных сигналов, когда ширина канала определяется, исходя из максимальной девиации $\omega_д$, являющейся суммой девиаций от всех модуляционных частот, образующих сигнал. При распределении суммарной девиации по большому числу тонов индекс m для каждого тона, а следовательно, и общее число компонент, сокращается; что же касается комбинационных частот, то амплитуды их с уменьшением m быстро убывают.

Поясним сказанное путём сравнения амплитуд колебаний, частоты которых расположены на границе канала, при следующих двух режимах модуляции: 1) модуляция одной частотой $F = 10$ *кгц* при полной девиации $f_д = 60$ *кгц* и 2) модуляция двумя частотами $F_1 = 9$ *кгц* при $f_{д1} = 30$ *кгц* и $F_2 = 10$ *кгц* при $f_{д2} = 30$ *кгц*. Ширину канала примем равной $2f_д = 120$ *кгц*.

В случае простой тональной модуляции с индексом $m = \frac{60}{10} = 6$ шестая боковая частота, расположенная на границе канала, имеет амплитуду, пропорциональную $J_n(m)\,A_0 = J_6(6)\,A_0 \approx 0{,}25\,A_0$. При модуляции двумя частотами с индексами $m_1 \approx m_2 \approx 3$ амплитуды шестых боковых частот от каждой из частот модуляции Ω_1 и Ω_2 пропорциональны произведению:

$$J_n(m_1)\;J_0(m_2) = J_6(3)\;J_0(3) \approx 0{,}02 \cdot 0{,}3 = 0{,}006,$$

т. е. более чем в сорок раз меньше, чем амплитуда соответствующей боковой частоты при модуляции одним тоном с той же полной девиацией.

Амплитуды комбинационных частот вида $\omega_0 \pm (3\Omega_1 + 3\Omega_2)$, пропорциональные произведению $J_3(m_1)\;J_3(m_2) \approx (0{,}35)^2 \approx 0{,}12$, приблизительно вдвое меньше амплитуд боковых частот при модуляции одним тоном.

Аналогично при одновременной модуляции более, чем двумя тонами, амплитуды комбинационных частот, выходящих за пределы канала $2f_д$, убывают настолько быстро, что могут не приниматься во внимание.

Если модулирующий сигнал обладает широким спектром частот, определение компонент спектра модулированного колебания приведённым выше способом оказывается трудной или даже неразрешимой задачей. В таких случаях необходимо использовать иные приёмы. Так, например, рассмотрим изменение частоты по закону, изображённому на рис. 3.28. Такое изменение применяется в настоящее время в радиотелеграфии, работающей по принципу частотной манипуляции, при которой „нажатию" ключа (знаку) соответствует одна частота, а „отжатию" (интервал между знаками) — другая частота. Изменение частоты и фазы имеет в данном случае сложный периодический характер.

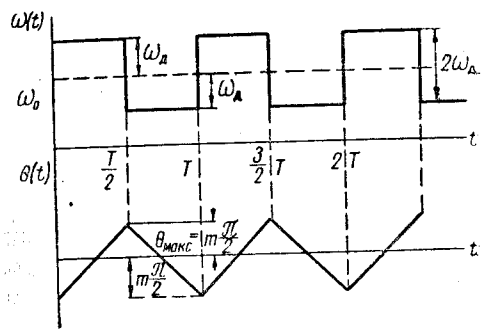


Рис. 3.28

В пределах одного периода модуляции величина частотного отклонения равна:

$$\Delta\omega = +\omega_д \quad \text{на участке} \quad 0 < t < \frac{T}{2},$$

$$\Delta\omega = -\omega_д \quad ,, \quad ,, \quad \frac{T}{2} < t < T.$$

Изменение фазы колебания также должно быть периодическим, причём на участке с положительным значением $\Delta\omega$ фаза должна расти, а на участке с отрицательным $\Delta\omega$ убывать по линейному закону. Приращение фазы на первом участке очевидно равно $+\omega_д \frac{T}{2}$, а на втором — $\omega_д \frac{T}{2}$.

Так как приращение фазы за полный период модуляции равно нулю, то изменение фазы должно иметь форму треугольной волны, показанной на рис. 3.28. Амплитуда этой волны:

$$\Theta_{макс} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_д T}{2} = \frac{\omega_д}{4} \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{2}\, m, \tag{3.43}$$

где

$$m = \frac{\omega_д}{\Omega}.$$

Таким образом, изменение фазы определяется выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \Theta_{макс}\left(\frac{4t}{T} - 1\right) \text{ на участке } 0 < t < \frac{T}{2} \\ \theta &= \Theta_{макс}\left(3 - \frac{4t}{T}\right) \;,, \quad ,, \quad \frac{T}{2} < t < T \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Подставив вместо $\Theta_{макс}$ выражение (3.43) можем записать эти условия в форме:

$$\left.\begin{aligned}\Theta &= m\left(\Omega t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ на участке } 0<\Omega t<\pi\\ \Theta &= m\left(\frac{3\pi}{2}-\Omega t\right) \text{ ,, } \quad \text{ ,, } \quad \pi<\Omega t<2\pi\end{aligned}\right\}. \tag{3.44'}$$

Выяснив характер изменения Θ, обратимся теперь к уравнению для модулированного колебания, которое представим в форме:

$$a(t)=A_0\sin\psi=A_0\sin(\omega_0 t+\Theta)=$$
$$=A_0[\sin\omega_0 t\cos\Theta+\cos\omega_0 t\sin\Theta]. \tag{3.45}$$

Так как Θ периодическая функция, то $\cos\Theta$ и $\sin\Theta$ также являются периодическими функциями времени. Разложив эти функции в ряды Фурье и подставив в выражение (3.45), найдём структуру спектра колебания $a(t)$.

Задача вычисления коэффициентов ряда Фурье для $\cos\Theta$. $\sin\Theta$ облегчается тем, что на участках $0\div\pi$ и $\pi\div 2\pi$ Θ изменяется линейно. Применяя ф-лы (2.4) — (2.7), находим следующие выражения:

$$\cos\Theta=\frac{B_0}{2}+B_2\cos 2\Omega t+B_4\cos 4\Omega t+\ldots \tag{3.46}$$

$$\sin\Theta=C_1\cos\Omega t+C_2\cos 3\Omega t+\ldots, \tag{3.47}$$

где

$$B_n=\frac{4m}{\pi(m^2-n^2)}\sin\frac{m\pi}{2},$$

$$C_n=\frac{4m}{\pi(m^2-n^2)}\cos\frac{m\pi}{2}.$$

Подставив ур-ния (3.46) и (3.47) в выражение (3.45), найдём развёрнутое выражение для колебания a:

$$a=A_0\cdot\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{m}\sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)\sin\omega_0 t+\right.$$
$$+\frac{m}{m^2-1}\cos\frac{\pi}{2}m[\cos(\omega_0+\Omega)t+\cos(\omega_0-\Omega)t]+$$
$$\left.+\frac{m}{m^2-2^2}\sin\frac{\pi}{2}m[\sin(\omega_0+2\Omega)t+\sin(\omega_0-2\Omega)t]+\ldots\right. \tag{3.48}$$

Анализ полученного выражения показывает, что при больших значениях n амплитуды колебаний боковых частот убывают гораздо быстрее, чем в случае амплитудной манипуляции. Действительно, при АМ амплитуда n-й боковой частоты пропорциональна $\frac{1}{\pi n}$ [см. ф-лу (3.10)], а в случае ЧМ — $\frac{2}{\pi}\frac{m}{m^2-n^2}\sin\frac{\pi}{2}m$ (для чётных n).

Если $n\gg m$, то

$$\frac{2m}{\pi(m^2-n^2)}:\frac{1}{n}\approx\frac{2m}{n}\ll 1.$$

Более быстрое убывание амплитуд боковых частот можно объяснить тем, что при ЧМ отсутствуют скачки (разрывы) в функции $a(t)$ в точках $t=0$, $\frac{T}{2}$, T и т.д., т. е. в точках, где имеются скачки частоты.

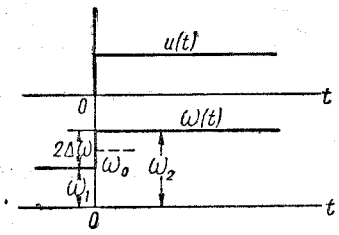


Рис. 3.29

В заключение рассмотрим спектр колебания в случае, когда модулирующая функция $u(t)$ представляет собой скачок (рис. 3.29), а мгновенная частота $\omega(t)$ колебания изменяется также скачком от значения ω_1 до ω_2. Так как сигнал $u(t)$ в данном случае является непериодической функцией, то высокочастотное колебание $a(t)$ должно обладать сплошным спектром. Для определения спектральной плотности $\vec{A}(\omega)$ этого колебания поступим следующим образом. Представим колебание $a(t)$ как сумму двух функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ с частотами ω_1 и ω_2, причём колебание $a_1(t)$ действует при $-\infty<t<0$, а колебание $a_2(t)$ при $0<t<\infty$ (рис. 3.30). Для этих функций спектральные плотности $\vec{A}_1(\omega)$ и $\vec{A}_2(\omega)$, в соответствии с ф-лами (3.7) и (3.8), напишем в виде:

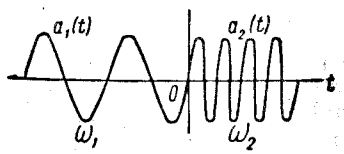


Рис. 3.30

$$\vec{A}_1(\omega)\approx-\frac{1}{2(\omega_1-\omega)},$$

$$\vec{A}_2(\omega)\approx\frac{1}{2(\omega_2-\omega)}.$$

Таким образом, спектральная плотность для $a(t)$ равна

$$\vec{A}(\omega)=\vec{A}_1(\omega)+\vec{A}_2(\omega)\approx-\frac{\omega_2-\omega_1}{2(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}.$$

Обозначим

$$\omega_0=\frac{\omega_1+\omega_2}{2},$$

$$\Delta\omega_0=\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

$$\Delta\omega=\omega-\omega_0.$$

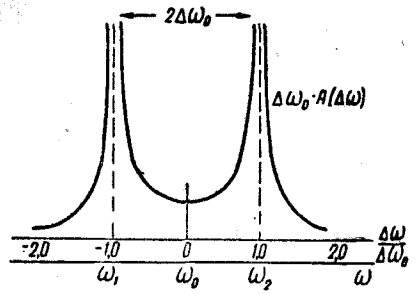


Рис. 3.31

Тогда спектральную плотность удобно представлять в виде функции от $\Delta\omega$

$$\overrightarrow{A}(\Delta\omega)=\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_0^2-\Delta\omega^2}=\frac{\frac{1}{\Delta\omega_0}}{1-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}. \qquad (3.49)$$

На рис. 3.31 представлены график изменения модуля величины $\Delta\omega_0\overrightarrow{A}(\Delta\omega)$, являющейся функцией отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}$.

§ 3.7. Спектр колебания при смешанной модуляции — частотной и амплитудной

Пусть амплитуда и частота колебания модулируются одновременно по законам:

$$A(t)=A_0(1+M\cos\Omega t),$$
$$\omega(t)=\omega_0+\omega_д\cos\Omega t;\quad m=\frac{\omega_д}{\Omega}.$$

Тогда уравнение модулированного колебания, с учётом выражения (3.34), принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}a(t)&=A_0(1+M\cos\Omega t)\sin(\omega_0 t+m\sin\Omega t)=\\&=A_0(1+M\cos\Omega t)\{J_0(m)\sin\omega_0 t+\\&+J_1(m)[\sin(\omega_0+\Omega)t-\sin(\omega_0-\Omega)t]+\\&+J_2(m)[\sin(\omega_0+2\Omega)t+\sin(\omega_0-2\Omega)t]+\\&+J_3(m)[\sin(\omega_0+3\Omega)t-\sin(\omega_0-3\Omega)t]+\ldots\}. \qquad (3.50)\end{aligned}$$

Отличие колебания, изображаемого ур-нием (3.50), от случая простой частотной модуляции заключается в том, что каждая из составляющих спектра частотно-модулированного колебания подвергается амплитудной модуляции по закону $(1+M\cos\Omega t)$ и даёт, следовательно, дополнительно пару боковых частот вида:

$$M J_0(m)\cos\Omega t\cdot\sin\omega_0 t=\frac{MJ_0(m)}{2}\sin(\omega_0+\Omega)t+\frac{MJ_0(m)}{2}\sin(\omega_0-\Omega)t,$$
$$M J_1(m)\cos\Omega t\sin(\omega_0+\Omega)t=\frac{MJ_1(m)}{2}\sin(\omega_0+2\Omega)t+\frac{MJ_1(m)}{2}\sin\omega_0 t,$$
$$M J_1(m)\cos\Omega t\sin(\omega_0-\Omega)t=\frac{MJ_1(m)}{2}\sin\omega_0 t+\frac{MJ_1(m)}{2}\sin(\omega_0-2\Omega)t$$

и т. д.

Эти колебания накладываются на составляющие спектра, соответствующего частотной модуляции. В результате, после группировки слагаемых с одинаковыми частотами, придём к следующему выражению для модулированного колебания:

$$\begin{aligned}a(t)=A_0\{&J_0(m)\sin\omega_0 t+\\&+\left[J_1(m)+\frac{MJ_0(m)}{2}+\frac{MJ_2(m)}{2}\right]\sin(\omega_0+\Omega)t-\\&-\left[J_1(m)-\frac{MJ_0(m)}{2}-\frac{MJ_2(m)}{2}\right]\sin(\omega_0-\Omega)t+\\&+\left[J_2(m)+\frac{MJ_1(m)}{2}+\frac{M}{2}J_3(m)\right]\sin(\omega_0+2\Omega)t+\\&+\left[J_2(m)-\frac{MJ_1(m)}{2}-\frac{MJ_3(m)}{2}\right]\sin(\omega_0-2\Omega)t+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}. \qquad (3.51)\end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что при одновременной модуляции по амплитуде и частоте амплитуды верхних и нижних боковых частот в каждой паре получаются неодинаковые. Это объясняется тем, что при АМ колебания боковых частот симметричны относительно несущего колебания как по амплитудам, так и по фазам, а при частотной модуляции только по амплитудам.

Поэтому при наложении спектров от обоих видов модуляции некоторые из колебаний боковых частот складываются в фазе, а другие в противофазе.

Разобранное явление наблюдается в практике в устройствах, где изменение амплитуды колебания сопровождается изменением частоты генерации (например, в магнетронах). При осуществлении частотной модуляции в обычных генераторах асимметрия спектра относительно несущей частоты может служить признаком того, что рабочая модуляция (частотная) сопровождается значительной амплитудной модуляцией (паразитной).

ГЛАВА 4

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ОДИНОЧНЫЙ КОНТУР

§ 4.1. Введение

Колебательная система является неотъемлемой частью любого радиотехнического (высокочастотного) устройства. Под колебательными системами с сосредоточенными параметрами подразумеваются линейные электрические цепи, составленные из индуктивностей и ёмкостей, способные резонировать на одной или нескольких частотах. Сопротивления могут содержаться в колебательных системах либо в виде сопротивлений потерь в катушках и конденсаторах, либо в виде специальных нагрузочных сопротивлений.

Системы с распределёнными постоянными — отрезки линий, используемые в качестве колебательных систем на сверхвысоких частотах, рассматриваются в гл. 7.

Для радиотехнических применений основное значение имеют резонансные свойства колебательных систем. Явление резонанса встречается в различных областях техники и физики и нередко рассматривается как явление вредное, опасное для целости устройства или сооружения (например, пробои изоляции трансформаторов и электрических машин, связанные с перенапряжениями в электрических сетях, разрушение мостов при раскачивании их с частотой, совпадающей с частотой собственных колебаний моста и т. д.).

В радиотехнических устройствах явление резонанса лежит в основе большинства процессов и преобразований и используется для решения разнообразных задач.

Изучение колебательных систем с сосредоточенными постоянными проводится в данной книге в трёх главах, посвящённых одиночному колебательному контуру, двухконтурным связанным системам и основным положениям общей теории линейных цепей. Все эти системы рассматриваются сперва в режиме вынужденных колебаний под действием гармонической внешней силы. В гл. 9 изучается поведение колебательных систем при сложных воздействиях (модулированные колебания, импульсы и т. д.). В данной главе рассматривается одиночный колебательный контур.

§ 4.2. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Рассмотрим контур, образованный последовательным соединением индуктивности L, ёмкости C и активного сопротивления r (рис. 4.1), находящийся под действием гармонической электродвижущей силы

$$e(t) = E\sin(\omega t + \Theta_0). \qquad (4.1)$$

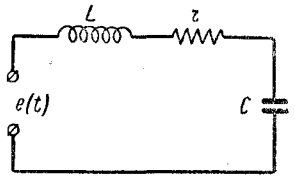


Рис. 4.1

Внутреннее сопротивление генератора, которое здесь мы считаем независимым от величины тока в контуре, входит в величину r.

Определим ток в контуре. Применяя символический метод, представим комплексную амплитуду тока в виде следующего выражения:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\vec{E}}{Z} = \frac{E}{z} e^{i(\Theta_0 - \varphi)}, \qquad (4.2)$$

где $\vec{E} = Ee^{i\Theta_0}$ — комплексная амплитуда эдс,

$Z = r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + iX$ — комплексное сопротивление последовательного контура,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \operatorname{arc\,tg}\frac{X}{r} \qquad (4.3)$$

— сдвиг фазы тока относительно фазы эдс, а

E и $z = \sqrt{r^2 + X^2}$ — модули, соответственно, амплитуды эдс и полного сопротивления контура при частоте ω.

Положительные значения угла φ соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные — опережению. Переходя к тригонометрической форме, находим для мгновенного значения тока в контуре следующее выражение:

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \Theta_0 - \varphi) =$$

$$= I\sin(\omega t + \Theta_0 - \varphi). \qquad (4.4)$$

Здесь Θ_0 — фаза внешней эдс [см. выражение (4.1)].

Для комплексных амплитуд напряжений на реактивных элементах контура — индуктивности L и ёмкости C — имеем:

$$\vec{U}_L = \vec{I}\, i\omega L = \vec{E}\,\frac{i\omega L}{r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = E\frac{\omega L}{z}\, e^{i(\Theta_0 - \varphi + \pi/2)}; \quad (4.5)$$

$$\vec{U}_C = \vec{I}\cdot\frac{1}{i\omega C} = \vec{E}\,\frac{1}{i\omega C\left[r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} =$$

$$= E\frac{1}{\omega C z}\, e^{i(\Theta_0 - \varphi - \pi/2)}. \quad (4.6)$$

Мгновенные значения этих напряжений можно записать в виде:

$$u_L(t) = \frac{E\omega L}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \Theta_0 - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.7)$$

$$u_C(t) = \frac{E}{\omega C\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \Theta_0 - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.8)$$

При „резонансной" частоте внешней силы

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_p, \quad (4.9)$$

отвечающей условию

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0, \quad (4.10)$$

амплитуда тока в контуре достигает наибольшей возможной (при данной амплитуде эдс E) величины:

$$I_p = \frac{E}{r}. \quad (4.11)$$

Амплитуды напряжений на индуктивности L и ёмкости C, пропорциональные току, при резонансной частоте $\omega = \omega_p$ достигают величины:

$$U_{Lp} = E\frac{\omega_p L}{r}, \quad (4.12)$$

$$U_{Cp} = E\frac{\frac{1}{\omega_p C}}{r}. \quad (4.13)$$

Одинаковые по величине сопротивления $\omega_p L$ и $\frac{1}{\omega_p C}$ обозначаются через ρ и называются характеристическими или волновыми сопротивлениями:

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L_{гн}}{C_ф}} = 30\sqrt{\frac{L_{см}}{C_{см}}}. \quad (4.14)$$

Иногда ρ называют также характеристикой контура.

В радиотехнических колебательных контурах волновое сопротивление ρ, как правило, во много раз больше, чем активное сопротивление r. Из этого следует, что и одинаковые по величине амплитуды резонансных напряжений на индуктивности и ёмкости

$$U_{Lp} = U_{Cp} = E\frac{\rho}{r} \quad (4.15)$$

могут во много раз превышать амплитуду E внешней эдс, действующей на контур.

Отсюда и происходит название резонанс напряжений или последовательный резонанс.

Величина

$$Q = \frac{U_{Lp}}{E} = \frac{U_{Cp}}{E} = \frac{\rho}{r}, \quad (4.16)$$

равная отношению характеристического сопротивления ρ к активному r и определяющая коэффициент повышения напряжения на реактивных элементах контура по отношению к внешней эдс, называется добротностью контура.

В зависимости от качества деталей контура, степени его нагруженности полезным сопротивлением, а также от условий, определяющих характеристическое сопротивление[1]) ρ, добротность контура изменяется в широких пределах. В радиотехнической практике встречаются величины Q примерно от 10 до нескольких сотен и выше. Чаще всего величина Q лежит в пределах от 50 до 200. Величина, обратная Q, называется затуханием и обозначается

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho}. \quad (4.17)$$

§ 4.3. Резонансная кривая и фазовая характеристика для последовательного контура

Помимо определения резонансных значений амплитуд тока и напряжений, большой интерес представляет характер зависимости этих амплитуд, а также фаз, от частоты внешней эдс. Знание

[1]) Особенно на сверхвысоких частотах, когда величина ρ определяется ёмкостью контура, обусловленной междуэлектродными ёмкостями лампы.

этих зависимостей необходимо для суждения об избирательности[1]) контура, играющей основную роль в большинстве применений колебательного контура. Считая амплитуду эдс E и параметры контура неизменными, рассмотрим сперва зависимости $I(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Первая из этих зависимостей определяется модулем выражения (4.2):

$$I(\omega)=\frac{E}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

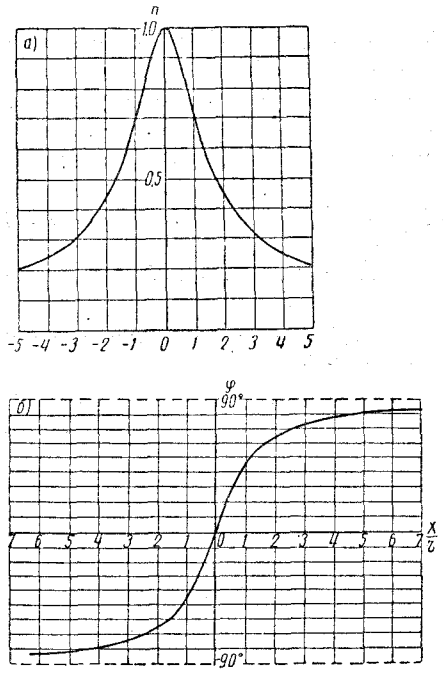


Рис. 4.2

Фазовая характористика определяется выражением (4.3).

Амплитуду $I(\omega)$ удобно выразить через максимальную амплитуду при резонансе I_p. Используя выражение (4.11), получаем

$$I(\omega)=\frac{I_p}{\sqrt{1+\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2}}}.$$

Безразмерное отношение

$$n=\frac{I(\omega)}{I_p}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{X}{r}\right)^2}}. \quad (4.18)$$

можно рассматривать как уравнение резонансной кривой колебательного контура. Из определения (4.18) очевидно, что $n\leqslant 1$.

Графики резонансной кривой и фазовой характеристики, построенные по ур-ниям (4.18) и (4.3), приведены на рис. 4.2.

Эти графики имеют обобщённый характер, так как аргумент $\frac{X}{r}$ функций $n\left(\frac{X}{r}\right)$ и $\varphi\left(\frac{X}{r}\right)$ включает в себя, помимо величины расстройки, все возможные соотношения между реактивными и активными сопротивлениями контура.

[1]) Под избирательностью колебательного контура понимают его способность к выделению сигналов заданной частоты и ослаблению сигналов всех других частот.

Если в качестве независимого переменного принять отношение $\frac{\omega}{\omega_p}$, то, задавая различные соотношения между r и ρ, получим два семейства кривых n и φ.

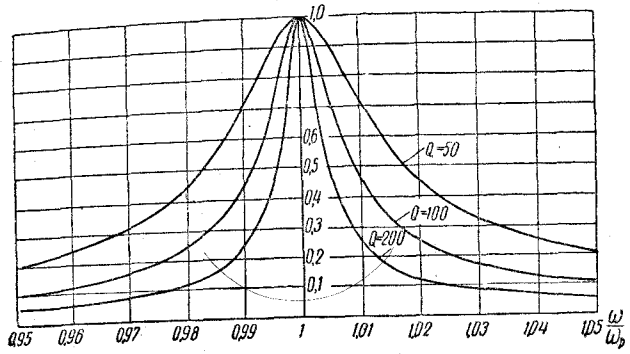


Рис. 4.3

Уравнения этих кривых можно привести к виду (учитывая, что $LC=\frac{1}{\omega_p^2}$ и $\frac{\omega_p L}{r}=\frac{\rho}{r}=Q$):

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\omega_p L}{r}\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{1}{\omega_p\omega LC}\right)\right]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}, \quad (4.19)$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]. \quad (4.20)$$

Графики $n\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$ и $\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$ для некоторых значений Q приведены на рис. 4.3 и 4.4.

Из рассмотрения этих графиков видно, что с повышением добротности резонансные кривые становятся более острыми, а фазовые характеристики в области частот, близких к резонансу, более крутыми. Максимальная ордината n, независимо от Q, равна единице, а $\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$ при отклонении $\frac{\omega}{\omega_p}$ от единицы стремится к $+\frac{\pi}{2}$ в области $\frac{\omega}{\omega_p}>1$ и к $-\frac{\pi}{2}$ в области $\frac{\omega}{\omega_p}<1$.

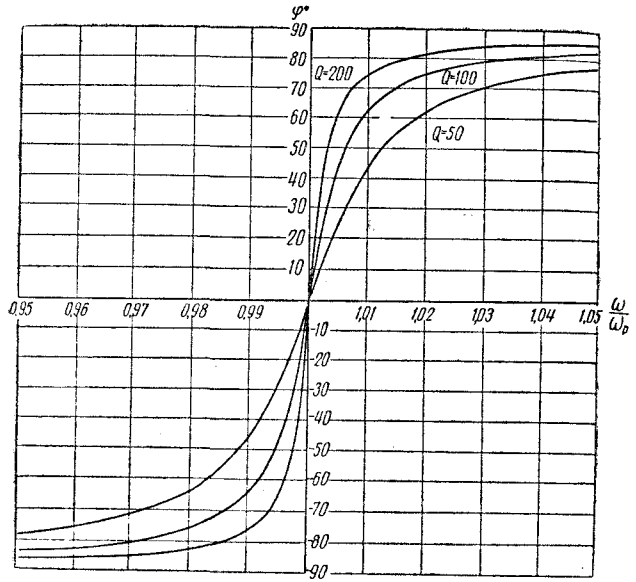


Рис. 4.4

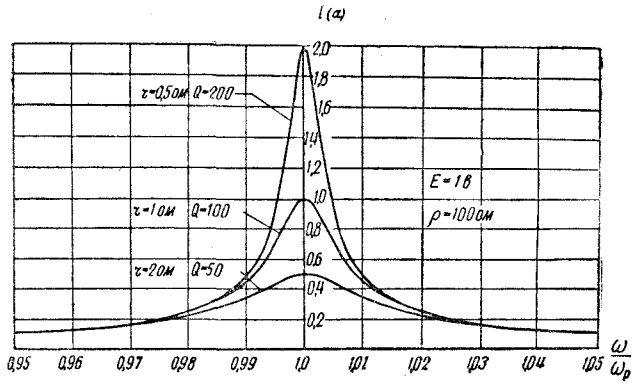


Рис. 4.5

Если по оси ординат откладывать не относительную величину $n = \frac{I}{I_{\omega_p}}$, а абсолютную величину амплитуды I и изменять величину r (при неизменном ρ), то семейство резонансных кривых для различных сопротивлений примет вид, показанный на рис. 4.5.

Если активное сопротивление r поддерживать неизменным, а изменять величину ρ, то получится семейство резонансных кривых, изображённых на рис. 4.6. Здесь максимальная ордината I_p, равная $\frac{E}{r}$, остаётся неизменной. Рисунок 4.6 отличается от рис. 4.3 только масштабом по оси ординат.

В радиотехнической практике часто приходится иметь дело с малыми расстройками частоты ω_p относительно внешней частоты ω. В тех случаях, когда на контур действует модулированная электродвижущая сила, ширина спектра этой эдс, как

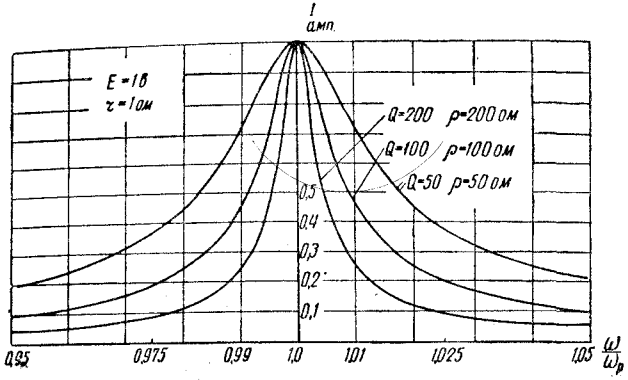


Рис 4.6

правило, составляет небольшую долю от средней частоты спектра (см. § 3.3). Если контур настроить на эту среднюю (несущую) частоту, то по отношению к любой другой частоте ω, входящей в спектр модулированного колебания, величина $\frac{\omega}{\omega_p}$ близка к единице.

Это обстоятельство позволяет существенно упростить и сделать более удобными для практического применения выражения (4.19) и (4.20). С этой целью введём величину:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_p, \tag{4.21}$$

которую в дальнейшем будем называть расстройкой частоты ω внешней эдс по отношению к резонансной частоте контура. Тогда можно написать:

$$\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega_p \omega} = \frac{(\omega_p + \Delta\omega)^2 - \omega_p^2}{\omega_p \omega} = \frac{2\,\Delta\omega}{\omega_p} \cdot \frac{1 + 0{,}5\frac{\Delta\omega}{\omega_p}}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}.$$

Нетрудно видеть, что в тех случаях, когда относительная расстройка достаточно мала, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} \ll 1,$$

можно считать

$$\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\approx\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}. \tag{4.22}$$

Подставляя выражение 4.22 в ф-лы (4.19) и (4.20), получим:

$$n\approx\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q\right)^2}}, \tag{4.23}$$

$$\varphi\approx\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q\right). \tag{4.24}$$

Входящая в эти выражения величина $\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q$ может быть названа обобщённой расстройкой контура, так как она учитывает все основные параметры: расстройку $\Delta\omega$, резонансную частоту контура ω_p и добротность Q.

Для краткости обобщённую расстройку в дальнейшем будем обозначать

$$a=\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q. \tag{4.25}$$

В этих обозначениях резонансная кривая и фазовая характеристика записываются в наиболее сжатой форме:

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \tag{4.23'}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}a. \tag{4.24'}$$

Графики $n(a)$ и $\varphi(a)$ совпадают с кривыми, показанными на рис. 4.2, поскольку в области частот, близких к резонансной, справедливо приближённое равенство:

$$a\approx\frac{X}{r}. \tag{4.25'}$$

Приведём, наконец, ещё одну форму записи уравнений резонансной кривой и фазовой характеристики, получаемую с помощью следующих очевидных преобразований:

$$a=\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}\cdot\frac{\omega_p L}{r}=\Delta\omega\cdot\frac{2L}{r}=\Delta\omega\tau, \tag{4.26}$$

где $\tau=\frac{2L}{r}$ — „постоянная времени“ контура. Смысл этой величины проясняется из рассмотрения свободных колебаний в контуре (§ 9.5).

Подставляя ф-лу (4.26) в выражения (4.23') и (4.24'), получаем:

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta\omega\tau)^2}}, \tag{4.23''}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}(\Delta\omega\tau). \tag{4.24''}$$

На рис. 4.7 сплошными линиями показаны графики, построенные по приближённым ф-лам (4.23) и (4.24), а пунктирными — по точным ф-лам (4.19) и (4.20), при подстановке в них $\omega=\omega_p+\Delta\omega$. Добротность контура принята $Q=100$. При одной и той же от-

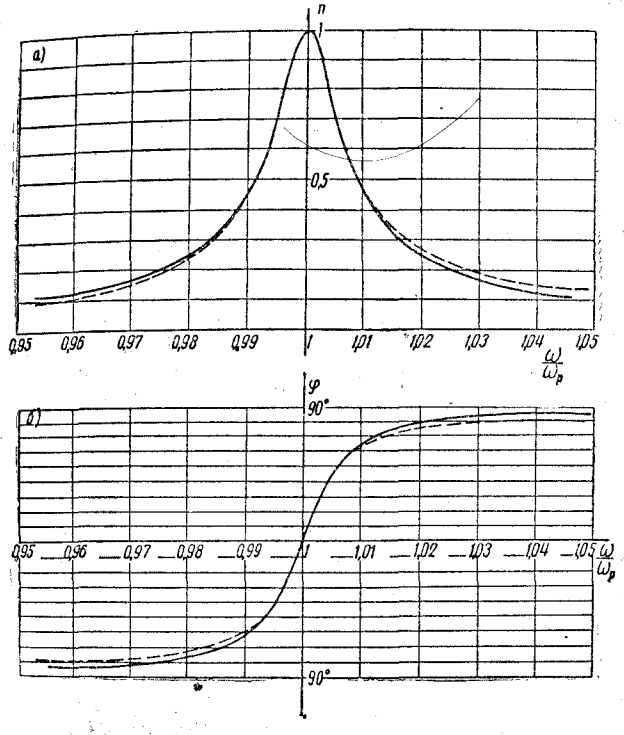


Рис. 4.7

носительной расстройке расхождение между кривыми, построенными по точным и приближённым формулам, получается тем меньше, чем выше добротность.

Отметим, что при введённых выше обозначениях входное сопротивление последовательного контура при расстройке удобно выражать следующими формулами:

$$Z=r+\mathrm{i}X=r(1+\mathrm{i}a)=r\,[1+\mathrm{i}(\omega-\omega_p)\tau]=$$
$$=r(1+\mathrm{i}\Delta\omega\tau]. \tag{4.27}$$

В радиотехнических схемах выходное напряжение снимается обычно с реактивных элементов контура, как это показано, например, на рис. 4.8. При этом контур используется как четы-

рёхполюсник, к входным зажимам которого подключается генератор эдс, а к выходным зажимам — внешняя схема, в данном случае электронная лампа. Входная ёмкость этой лампы входит в ёмкость C.

Коэффициент передачи такого четырёхполюсника (отношение амплитуды напряжения на выходе к амплитуде эдс на входе) определяется следующим образом:

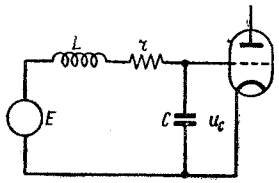


Рис. 4.8

$$K_C(i\omega)=\frac{\overrightarrow{U_C}}{\overrightarrow{E}}=\frac{\frac{1}{i\omega C}}{i\omega L+r+\frac{1}{i\omega C}}.$$

Заменяя знаменатель правой части выражением (4.27), можно привести $K_C(i\omega)$ к виду:

$$K_C(i\omega)=\frac{\frac{1}{\omega_p C}\cdot\frac{\omega_p}{\omega}}{ri(1+ia)}=\frac{Q\frac{\omega_p}{\omega}}{i(1+ia)}=\frac{Q\frac{\omega_p}{\omega}}{\sqrt{1+a^2}}e^{-i\varphi_C}, \qquad (4.28)$$

где

$$\varphi_C=\operatorname{arc\,tg} a+\frac{\pi}{2} \qquad (4.29)$$

представляет собой сдвиг фазы ёмкостного напряжения относительно фазы эдс, вводимой в контур от генератора.

При съёме выходного напряжения с индуктивности, нетрудно вывести аналогичное выражение для коэффициента передачи:

$$K_L(i\omega)=\frac{iQ\frac{\omega}{\omega_p}}{1+ia}=\frac{Q\frac{\omega}{\omega_p}}{\sqrt{1+a^2}}e^{-i\varphi_L}, \qquad (4.28')$$

где

$$\varphi_L=\operatorname{arc\,tg} a-\frac{\pi}{2}. \qquad (4.29')$$

При резонансе получим:
при съёме напряжения с ёмкости

$$K_{Cp}(i\omega)=Qe^{-i\pi/2},\quad \varphi_C=\frac{\pi}{2};$$

при съёме напряжения с индуктивности

$$K_{Lp}(i\omega)=Qe^{+i\frac{\pi}{2}},\quad \varphi_L=-\frac{\pi}{2}.$$

Разделив модули выражений (4.28) и (4.28′) на $|K_p(i\omega)|=Q$, получим уравнения резонансных кривых для ёмкостного и индуктивного напряжений:

$$\left.\begin{aligned} n_C&=\frac{|K_C(i\omega)|}{|K_{Cp}(i\omega)|}=\frac{\frac{\omega_p}{\omega}}{\sqrt{1+a^2}}\\ n_L&=\frac{|K_L(i\omega)|}{|K_{Lp}(i\omega)|}=\frac{\frac{\omega}{\omega_p}}{\sqrt{1+a^2}}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.30)$$

Сравнение этих выражений с ф-лой (4.23′) показывает, что резонансные кривые напряжений на L и C отличаются от резонансной кривой тока только множителями $\frac{\omega}{\omega_p}$ или соответственно $\frac{\omega_p}{\omega}$:

$$n_C=\frac{\omega_p}{\omega}n,$$

$$n_L=\frac{\omega}{\omega_p}n.$$

Это различие обычно не проявляется сколько-нибудь заметно, так как отклонение множителя $\frac{\omega}{\omega_p}$ от единицы, как отмечалось выше, чаще всего не превышает нескольких процентов.

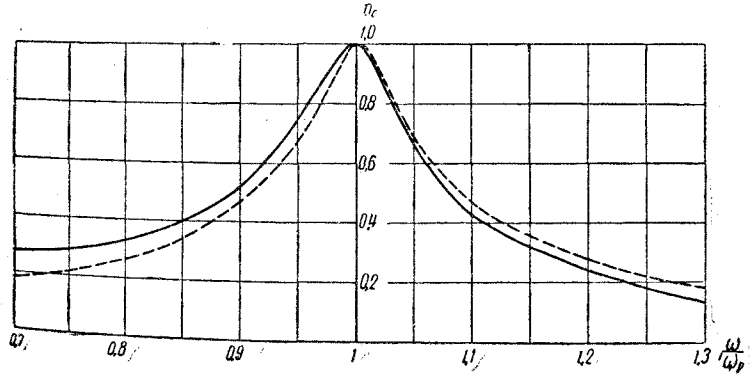


Рис. 4.9

В тех же случаях, когда это отклонение значительно (а Q относительно мало), необходимо учитывать несимметричность формы резонансных кривых для n_L и n_C. На рис. 4.9 и 4.10 эти кривые построены для $Q=10$. Пунктиром на этих рисунках показаны резонансные кривые для n.

Фазовые характеристики для напряжений U_L и U_C, в соответствии с выражениями (4.5) — (4.6) и (4.29) — (4.29′) отличаются от фазы тока на угол $\pm\frac{\pi}{2}$.

Напомним, что как φ, так φ_L и φ_C введены в исходные выражения (4.2). (4,5) и (4.6) со знаком минус. Поэтому положительные значения этих углов соответствуют отставанию, а отрицательные — опережению фазы соответственно $\vec{I}$, $\vec{U}_L$ и $\vec{U}_C$ относительно фазы внешней эдс $\vec{E}$.

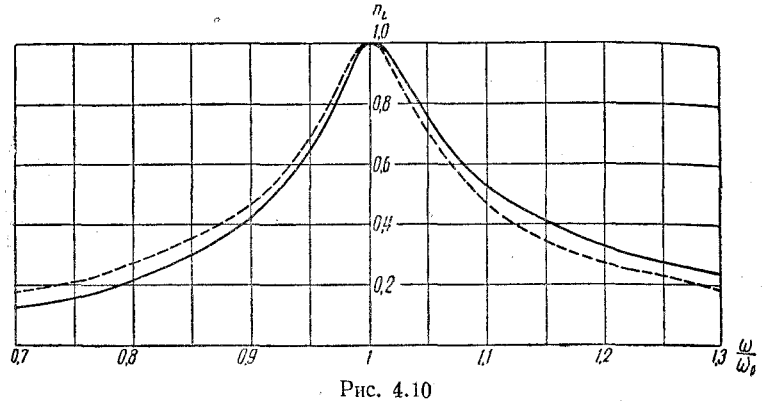


Рис. 4.10

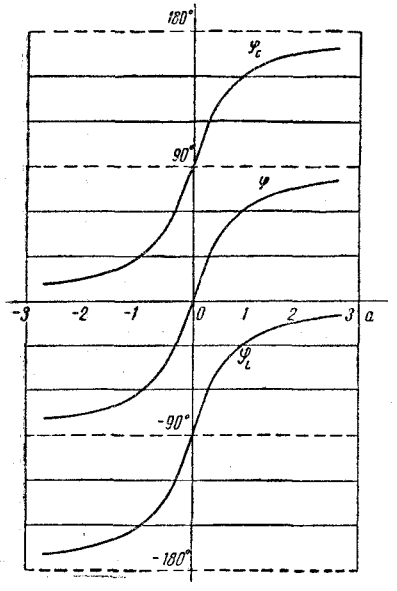


Рис. 4. 11

Взаимное расположение фазовых характеристик $\varphi_C(a)$, $\varphi_L(a)$ и $\varphi(a)$ показано на рис. 4.11. При резонансе выходное напряжение, снимаемое с индуктивности, на 90° опережает, а с ёмкости — на 90° отстаёт от фазы эдс $\vec{E}$.

При наличии активной слагающей проводимости нагрузки (рис. 4.12), сдвиг фазы напряжения на выходных зажимах по отношению к фазе эдс может несколько отличаться от $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим в заключение этого параграфа вопрос о наклоне фазовых характеристик контура вблизи резонансной частоты ω_p. Ввиду параллельности кривых φ, φ_C и φ_L достаточно рассмотрения одной из них, например $\varphi(\omega)$. Обращаясь к основному уравнению фазовой характеристики (4.3) и дифференцируя его по частоте ω, получаем:

$$\frac{d\varphi}{d\omega}=\frac{1}{1+\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2}}\cdot\frac{1}{r}\left(L+\frac{1}{C\omega^2}\right). \qquad (4.31)$$

В точке $\omega=\omega_p$ будем иметь:

$$\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_p}=\frac{L+\frac{1}{C\omega_p^2}}{r}=\frac{2L}{r}=\tau. \qquad (4.32)$$

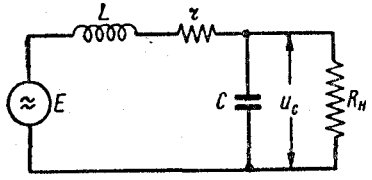


Рис. 4.12

Итак, наклон фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ при резонансной частоте контура имеет размерность времени и равен постоянной времени контура τ.

Это важное положение играет большую роль при определении задержки сигналов, пропускаемых через колебательные контуры.

§ 4.4. Полоса пропускания последовательного контура

При действии на контур модулированной эдс принципиально неизбежны искажения формы сигнала, обусловленные неравномерностью резонансной и кривизной фазовой характеристики контура, так как частоты различных составляющих спектра эдс отличаются от резонансной частоты контура. Для ослабления искажений необходимо так выбирать параметры контура, чтобы в полосе частот, содержащей основную часть энергии модулированного колебания, указанные выше характеристики были достаточно удовлетворительными. Эта полоса частот называется полосой пропускания контура.

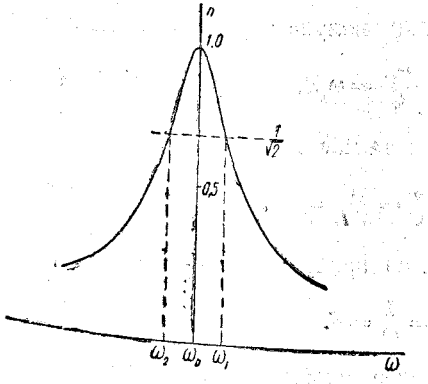


Рис. 4.13

В радиотехнике установилось определение полосы пропускания колебательного контура как полосы частот вблизи резонанса, на границах которой амплитуда тока (или напряжения) снижается

до $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от резонансного значения. При этом амплитуда действующей на контур эдс считается неизменной.

Положение полосы пропускания на резонансной кривой показано на рис. 4.13. При достаточно высокой добротности полоса пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты ω_p, так что граничные частоты ω_1 и ω_2 отвечают условию:

$$\omega_1 - \omega_p = \omega_p - \omega_2.$$

При таком определении полосы пропускания, относительное ослабление мощности колебаний на граничных частотах ω_1 и ω_2, равное квадрату ослабления амплитуд, достигает $^1/_2$. Это ослабление не позволяет, конечно, считать амплитудно-частотную характеристику достаточно равномерной для совершенно неискажённой передачи сигналов, особенно при использовании нескольких контуров.

Полосу пропускания одиночного контура легко связать с основными параметрами: Q, d и τ.

Подставив в выражение (4.23)

$$2\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

и приравняв левую часть этого выражения $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим очевидное условие:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_p} Q = 1. \qquad (4.33)$$

Это означает, что на границах полосы пропускания обобщённая расстройка по абсолютной величине равна единице [см. ф-лу (4.25)].

Обозначим полосу пропускания через

$$2\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_2. \qquad (4.34)$$

Тогда на основании ф-лы (4.33) получаем простое соотношение:

$$2\Delta\omega_0 = \frac{\omega_p}{Q} = \omega_p d. \qquad (4.35)$$

Учитывая ф-лу (4.26), можем также написать

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_p}{2Q} = \frac{r}{2L} = \frac{1}{\tau}. \qquad (4.36)$$

Наконец, относительная полоса пропускания равна

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p} = \frac{1}{Q} = d. \qquad (4.37)$$

Последнее выражение наиболее удобно и чаще всего применяется в радиотехнических расчётах.

Полезно отметить, что на границах полосы пропускания, где обобщённая расстройка $a = \pm 1$, фазовая характеристика в соответствии с ф-лой (4.24′) равна:

при частоте ω_1 $\quad \varphi(\omega_1) = +45°$,
при частоте ω_2 $\quad \varphi(\omega_2) = -45°$.

В пределах полосы пропускания фазовая характеристика близка к линейной. Отметим, что фазовая характеристика тем линейнее, чем более равномерна амплитудная (резонансная) кривая. Эта связь между амплитудной и фазовой характеристиками имеет общий характер для любых линейных цепей. Более подробно этот вопрос рассматривается в гл. 6.

Простота выражений (4.33) — (4.37), связывающих полосу пропускания с величиной добротности и затухания, используется в практике для определения Q и d. Для этого достаточно изменять частоту генератора, действующего на контур, до снижения показания измерительного прибора, регистрирующего ток в контуре (или напряжение на реактивных элементах контура) до $1/\sqrt{2}$ от максимального значения, соответствующего резонансной частоте. Отсчитав частоты ω_1, ω_2 и зная ω_p, легко подсчитать добротность по формуле:

$$Q = \frac{\omega_p}{\omega_1 - \omega_2}. \qquad (4.38)$$

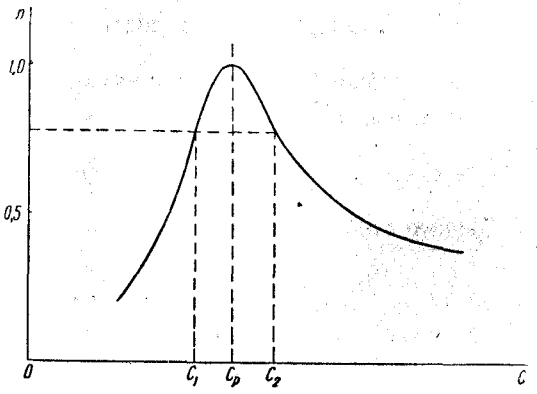


Рис. 4.14

При проведении измерения необходимо следить за тем, чтобы при изменении частоты генератора амплитуда эдс оставалась неизменной.

В практике часто приходится встречаться со случаем, когда генератор работает на фиксированной частоте, а настройка производится изменением ёмкости или индуктивности контура. При изменении, например, ёмкости, резонансная кривая имеет вид, показанный на рис. 4.14.

Нетрудно выразить добротность контура через разность ёмкостей $C_2 - C_1$, соответствующих граничным частотам ω_2 и ω_1. Для этого воспользуемся очевидными соотношениями:

$$\omega_1 = \omega_p + \Delta\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}};$$

$$\omega_2 = \omega_p - \Delta\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}; \qquad C_1 < C_2.$$

Возведём в квадрат оба тождества и вычтем второе из первого:

$$\omega_1^2-\omega_2^2=4\Delta\omega_0\cdot\omega_p=\frac{1}{LC_1}-\frac{1}{LC_2},$$

отсюда

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_p}=\frac{C_2-C_1}{2\omega_p^2LC_1C_2}.$$

Так как при относительно малых отклонениях C_1 и C_2 от резонансного значения C_p можно считать $C_1C_2\approx C_p^2$ и учитывая, кроме того, что $\omega_p^2LC_p=1$, получаем

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}\approx\frac{C_2-C_1}{2C_p}. \tag{4.39}$$

Таким образом, окончательно добротность равна

$$Q\approx\frac{2C_p}{C_2-C_1}. \tag{4.40}$$

§ 4.5. Энергетические соотношения при резонансе

При синусоидальном токе с амплитудой I мгновенное значение мощности, выделяемой в активном сопротивлении контура, равно

$$p_r(t)=rI^2\sin^2(\omega t+\Theta_0). \tag{4.41}$$

Среднее значение этой мощности за период равно

$$\bar{P}_r=\frac{rI^2}{2}, \tag{4.42}$$

а энергия, расходуемая в r за один период,

$$W_T=\bar{P}_rT. \tag{4.43}$$

Эта энергия поставляется в контур генератором. Общее же количество энергии в контуре определяется также энергией, запасаемой магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора.

Энергия магнитного поля катушки

$$w_L(t)=\frac{Li^2(t)}{2},$$

а энергия электрического поля конденсатора

$$w_C(t)=\frac{C}{2}u_C^2(t).$$

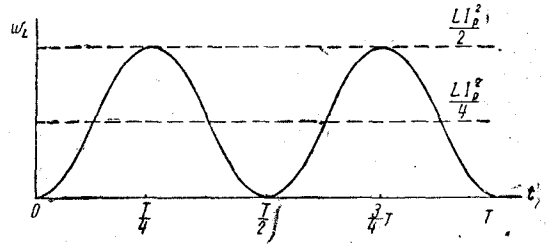
Подставляя вместо тока $i(t)$ и напряжения $u_C(t)$ выражения (4.4) и (4.8) и учитывая, что при резонансе $\frac{1}{\omega_p^2C}=L$, получим:

$$w_L(t)=\frac{L}{2}I_p^2\sin^2(\omega t+\Theta_0), \tag{4.44}$$

$$w_C(t)=\frac{C}{2}\frac{I_p^2}{\omega_p^2C^2}\cos^2(\omega t+\Theta_0)=\frac{L}{2}I_p^2\cos^2(\omega t+\Theta_0). \tag{4.45}$$

Отсюда видно, что максимальные значения w_L и w_C одинаковы и равны

$$W_{L\,макс}=W_{C\,макс}=\frac{LI_p^2}{2}. \tag{4.46}$$



Мгновенные значения w_L и w_C изменяются с удвоенной частотой около среднего значения $\frac{L}{4}I_p^2$, причём максимуму одной из них соответствует минимум другой и наоборот (рис. 4.15).

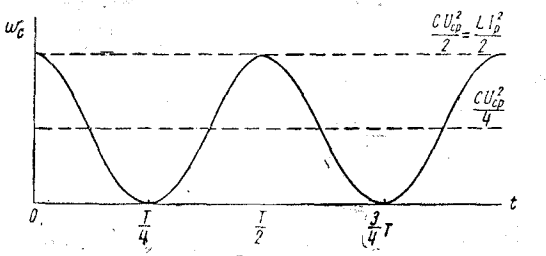


Рис. 4.15

Таким образом, при резонансе происходит непрерывное перераспределение энергии контура между энергией конденсатора и энергией катушки, причём в моменты $t=0$, $\frac{T}{2}$ и т. д. $w_L=0$, а $w_C=W_{макс}$, в моменты $t=T/4$, $\frac{3}{4}T$ и т. д., наоборот, $w_L=W_{макс}$, а $w_C=0$ (фаза Θ_0 здесь опущена). Суммарная же энергия остаётся неизменной:

$$W=w_L+w_C=\frac{LI_p^2}{2}\sin^2(\omega t+\Theta_0)+\frac{LI_p^2}{2}\cos^2(\omega t+\Theta_0)=$$

$$=\frac{LI_p^2}{2}=\text{const}. \tag{4.47}$$

Эта энергия во много раз больше той, которая расходуется в активном сопротивлении контура за один период. Действительно, разделив выражение (4.47) на (4.43), получим

$$\frac{W}{W_T}=\frac{\frac{LI_p^2}{2}}{\frac{rI_p^2}{2}T}=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_p L}{r}=\frac{Q}{2\pi}\gg 1. \qquad (4.48)$$

Отметим, что ф-ла (4.48), позволяющая выразить добротность контура через энергию электромагнитного поля, пригодна также и для колебательных систем с распределёнными постоянными.

Запасённая контуром энергия в режиме установившихся колебаний не оказывает влияния на генератор, который работает на контур как на чисто активное сопротивление. Однако при любых нарушениях стационарного режима — включении и выключении генератора, быстрых изменениях амплитуды эдс и т. д., — требуется определённое время для восстановления энергетического баланса в контуре. Таким образом, колебательный контур является инерционной линейной системой.

§ 4.6. Параллельный контур. Резонанс токов

Пусть генератор с большим внутренним сопротивлением подключён к колебательному контуру параллельно, как это показано на рис. 4.16. Каждая из ветвей контура может содержать индуктивности, ёмкости и сопротивления. X_1 и X_2 обозначают результирующие реактивные сопротивления первой и второй ветви, r_1 и r_2 — их активные сопротивления.

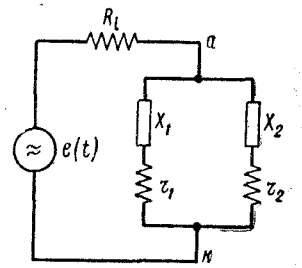


Рис. 4.16

В радиотехнических устройствах — высокочастотных усилителях и генераторах, использующих параллельный контур в качестве нагрузочного сопротивления, к последнему предъявляются следующие требования: а) относительно высокое сопротивление между зажимами $a-к$ рис. (4.16), б) активный характер этого сопротивления при частоте генератора и в) избирательный характер нагрузки.

Всем этим требованиям отвечает параллельный контур с достаточно высокой добротностью, работающий в режиме резонанса токов. Условием резонанса токов, как известно, является равенство абсолютных значений реактивных проводимостей обеих ветвей контура при противоположных их знаках. Таким образом, одна из ветвей контура обязательно должна иметь характер индуктивного сопротивления, а вторая — ёмкостного.

Введём обозначения полных сопротивлений ветвей:

$Z_1=r_1+iX_1$ — для индуктивной ветви,

$Z_2=r_2-iX_2$ — для ёмкостной ветви.

Тогда сопротивление контура между точками $a-к$ будет

$$Z_э=\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(r_1+iX_1)(r_2-iX_2)}{r_1+r_2+i(X_1-X_2)}. \qquad (4.49)$$

Для определения сопротивления контура при резонансе составим выражения для проводимостей ветвей и приравняем их мнимые части.

Имеем:

$$\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{r_1+iX_1}=\frac{r_1-iX_1}{r_1^2+X_1^2},$$

$$\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{r_2-iX_2}=\frac{r_2+iX_2}{r_2^2+X_2^2}.$$

Тогда условие резонанса токов будет:

$$\frac{X_1}{r_1^2+X_1^2}=\frac{X_2}{r_2^2+X_2^2}. \qquad (4.50)$$

При выполнении этого условия полная проводимость контура между точками $a-к$, имеющая чисто активный характер, равна

$$\frac{1}{Z_{э.р}}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_1^2+X_1^2}+\frac{r_2}{r_2^2+X_2^2}, \qquad (4.51)$$

а сопротивление между точками $a-к$:

$$Z_{э.р}=\frac{(r_1^2+X_1^2)(r_2^2+X_2^2)}{r_1(r_2^2+X_2^2)+r_2(r_1^2+X_1^2)}. \qquad (4.52)$$

Для обозначения модуля резонансного сопротивления будем в дальнейшем применять символ $Z_{э.р}$, так как оно имеет чисто активный характер.

В большинстве случаев выполняются следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &\ll X_1 \\ r_2 &\ll X_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.53)$$

Поэтому условие резонанса токов можно упростить, отбросив активные сопротивления r_1 и r_2 в знаменателе выражения (4.50). Таким образом, получаем:

$$X_1=X_2$$

или

$$X_1-X_2=0.$$

Итак, для получения резонанса токов в контуре с малыми потерями полное реактивное сопротивление контура при последовательном обходе его элементов должно равняться нулю. Это условие совпадает с условием резонанса напряжений в последовательном контуре. Из этого следует, что в случае высокой добротности резонансные частоты для параллельного и последовательного контуров одинаковы и определяются выражением (4.9), в котором под L и C следует подразумевать результирующие индуктивность и ёмкость контура при последовательном его обходе, т. е.

$$L = L_1 + L_2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots\cdots$$

При выполнении условий (4.53) выражение (4.52) может быть упрощено отбрасыванием слагаемых r_1^2 и r_2^2 в суммах $r_1^2 + X_1^2$ и $r_2^2 + X_2^2$:

$$Z_{э.р} \approx \frac{X_1^2 \cdot X_2^2}{r_1^2 X_2^2 + r_2 X_1^2} \approx \frac{X_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{X_2^2}{r_1 + r_2}. \qquad (4.54)$$

Обозначив сумму активных сопротивлений ветвей через $r = r_1 + r_2$, получим окончательное выражение для полного сопротивления резонансного параллельного контура между точками a — $к$ в виде:

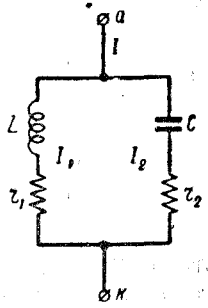


Рис. 4.17

$$Z_{э.р} = \frac{X_1^2}{r} = \frac{X_2^2}{r}. \qquad (4.55)$$

Приложим эту формулу к некоторым разновидностям схем параллельных контуров, встречающихся в практике.

Простейшая и наиболее распространённая схема показана на рис. 4.17. Здесь левая ветвь не содержит ёмкостей, а правая — индуктивностей. Активные сопротивления r_1 и r_2 учитывают потери в катушке и конденсаторе, а также активное сопротивление, вносимое в ту или иную ветвь полезной нагрузкой.

В данном случае имеем:

$$X_1 = \omega_p L; \quad X_2 = \frac{1}{\omega_p C}; \quad r = r_1 + r_2,$$

$$Z_{э.р} = \frac{\omega_p^2 L^2}{r} = \frac{1}{\omega_p^2 C^2 r} = \frac{L}{Cr} = \frac{\rho^2}{r} \qquad (4.56)$$

(так как $\omega_p^2 = \frac{1}{LC}$).

В ф-ле (4.56) L, C и r выражены в практической системе единиц — генри, фарадах и омах.

В практике индуктивность и ёмкость часто выражают в сантиметрах. Тогда

$$Z_{э.р} = 900\frac{L}{Cr}, \qquad (4.57)$$

(r — попрежнему в омах).

Учитывая, что добротность контура равна

$$Q = \frac{\rho}{r},$$

получаем ещё одну удобную формулу для определения сопротивления резонансного контура:

$$Z_{э.р} = Q\rho. \qquad (4.58)$$

Формулы (4.56), (4.57) и (4.58) широко распространены в практике радиотехнических расчётов.

В случае контура, одна ветвь которого является чисто индуктивной, а вторая, кроме конденсатора, содержит ещё и индуктивность (рис. 4.18), получим

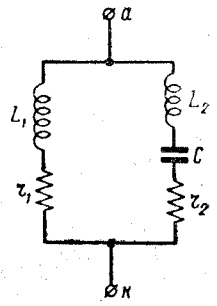


Рис. 4.18

$$X_1 = \omega_p L_1, \quad X_2 = -\omega_p L_2 + \frac{1}{\omega_p C},$$

так как по условию

$$\omega_p L_2 < \frac{1}{\omega_p C}.$$

По ф-ле (4.55) находим

$$Z_{э.р} = \frac{(\omega_p L_1)^2}{r} = \frac{\left(\frac{1}{\omega_p C} - \omega_p L_2\right)^2}{r}.$$

Резонансная частота ω_p, определяемая из условия

$$X_1 = X_2, \quad X_1 - X_2 = 0$$

или

$$\omega_p L_1 + \omega_p L_2 - \frac{1}{\omega_p C} = 0,$$

равна, как и в случае последовательного резонанса:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где $L = L_1 + L_2$ — полная индуктивность контура.

Обозначим через p отношение:

$$p=\frac{L_1}{L_1+L_2}=\frac{L_1}{L}. \tag{4.59}$$

Тогда, очевидно,

$$X_1=\omega_p L_1=p\omega_p L=p\rho \tag{4.60}$$

и

$$Z_{э.р}=p^2\frac{\rho^2}{r}=p^2Q\rho. \tag{4.61}$$

Коэффициент p, определяющий степень связи контура с внешней цепью (лампой), иногда называют коэффициентом анодной связи, коэффициентом включения контура или коэффициентом трансформации контур—лампа. Схема рис. 4.18 часто получается при присоединении анода лампы к промежуточной точке на катушке контура (рис. 4.19).

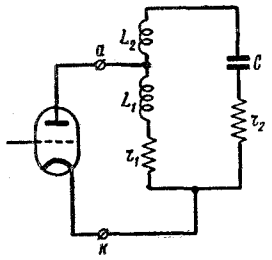


Рис. 4.19

Если L_1 и L_2 связаны между собой взаимной индукцией M (например, представляют собой две части одной катушки), то коэффициент p определяется формулой

$$p=\frac{L_1\pm M}{L_1+L_2\pm 2M}. \tag{4.62}$$

Знак плюс берётся при согласных направлениях магнитных потоков катушек L_1 и L_2 (две части одной катушки), знак минус при встречных.

Для контура, собранного по схеме рис. 4.20, получим

$$X_2=\frac{1}{\omega_p C_2}$$

и $$Z_{э.р}=\frac{X_2^2}{r}=\frac{1}{(\omega_p C_2)^2 r}.$$

Учитывая, что в данном случае резонансная частота определяется выражением

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

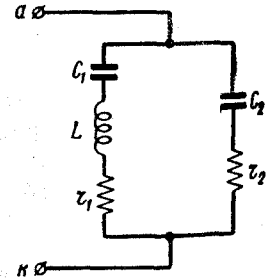


Рис. 4.20

получим

$$Z_{э.р}=\left(\frac{C}{C_2}\right)^2\frac{L}{Cr}=p^2\frac{\rho^2}{r},$$

откуда следует, что коэффициент трансформации $p=\dfrac{C}{C_2}$.

К этому выражению можно придти и непосредственно, определяя p через отношение соответствующих сопротивлений:

$$p=\frac{\dfrac{1}{\omega C_2}}{\dfrac{1}{\omega C_1}+\dfrac{1}{\omega C_2}}=\frac{C}{C_2}.$$

Изменяя положение точки a на катушке в схеме рис. 4.19 или изменяя соотношение между ёмкостями C_1 и C_2 в схеме рис. 4.20, можно в широких пределах регулировать величину резонансного сопротивления контура. Так как $p\leqslant 1$, то наибольшая возможная при заданной характеристике ρ величина $Z_{э.р}$ определяется выражением (4.56) [при $p=1$].

Важное значение имеет вопрос о распределении токов в схеме с резонансным параллельным контуром. Имея в виду схему рис. 4.17, обозначим через $\vec{I}$ ток в неразветвлённой части схемы (ток генератора), а через $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ — токи в индуктивной и ёмкостной ветвях контура. Напряжение на контуре (между точками $a-k$) обозначим через $\vec{U}_a$. При этих обозначениях можно написать следующие выражения:

$$\vec{I}_1(r_1+\mathrm{i}X_1)=\vec{I}_2(r_2-\mathrm{i}X_2)=\vec{I}\,Z_{э.р}=\vec{U}_a, \tag{4.63}$$

$$\vec{I}_1+\vec{I}_2=\vec{I}. \tag{4.64}$$

Отсюда следует, что при резонансе токи в ветвях связаны с общим током $\vec{I}$ соотношениями:

$$\vec{I}_1=\frac{\vec{U}_a}{r_1+\mathrm{i}X_1}=\frac{\vec{I}\,Z_{э.р}}{r_1+\mathrm{i}X_1}, \tag{4.65}$$

$$\vec{I}_2=\frac{\vec{U}_a}{r_2-\mathrm{i}X_2}=\frac{\vec{I}\,Z_{э.р}}{r_2-\mathrm{i}X_2}. \tag{4.66}$$

Учитывая, что при резонансе $Z_{э.р}$ — чисто активное сопротивление, можно также написать:

$$\vec{I}_1=\vec{I}\,\frac{Z_{э.р}}{\sqrt{r_1^2+X_1^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}; \tag{4.65'}$$

$$\vec{I}_2=\vec{I}\,\frac{Z_{э.р}}{\sqrt{r_2^2+X_2^2}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi_2}. \tag{4.66'}$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_1}{r_1};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_2}{r_2}.$$

Если X_1 — реактивное сопротивление индуктивной, а X_2 — ёмкостной ветви, то угол φ_1 — запаздывающий, а φ_2 — опережающий фазу тока $\vec{I}$ (и, следовательно, фазу напряжения $\vec{U}_a$). Диаграмма токов и напряжений принимает поэтому вид, показанный на рис. 4.21.

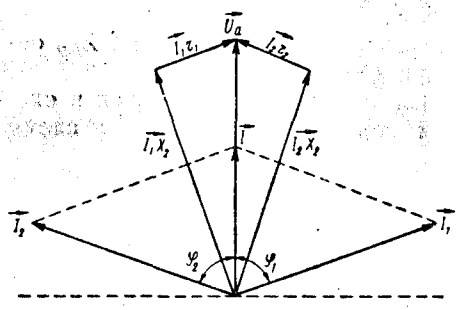


Рис. 4.21

При резонансе результирующий ток $\vec{I}$ совпадает по фазе с напряжением на контуре $\vec{U}_a$. Так как $X_1 \gg r_1$ и $X_2 \gg r_2$, то углы φ_1 и φ_2 по абсолютной величине близки к $\frac{\pi}{2}$. Поэтому токи $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ сдвинуты между собой по фазе на угол, близкий к π, а по амплитудам практически одинаковы. Это позволяет при рассмотрении работы резонансного контура считать, что токи ветвей $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ образуют как бы один контурный ток $\vec{I}_к$, обтекающий последовательно все элементы контура.

Таким образом, можно считать

$$I_к \approx I_1 \approx I_2. \qquad (4.67)$$

По отношению к току $\vec{I}$ контурный ток $\vec{I}_к$ сдвинут на угол $\approx 90°$ в сторону запаздывания для индуктивной и на угол $\approx 90°$ в сторону опережения для ёмкостной ветви.

Существенно, что при резонансе ток в контуре во много раз больше, чем в неразветвлённой части схемы (т. е. в анодной цепи электронной лампы). Действительно, учитывая, что $r_1^2 \ll X_1^2$ и $r_2^2 \ll X_2^2$ и используя ф-лу (4.60), получаем

$$I_к = I_1 = I_2 = I p Q \qquad (4.68)$$

(так как $X_1 = X_2 = p\rho$).

В частности, при $p = 1$ имеем

$$\frac{I_к}{I} = Q. \qquad (4.69)$$

Таким образом, при резонансе отношение тока в контуре к току в общем проводе равно добротности контура. Отсюда и происходит название резонанс токов или параллельный резонанс.

Применение параллельного резонансного контура в качестве нагрузки особенно удобно в схемах с электронными лампами. Так как последние работают при относительно слабых токах, то для выделения значительного напряжения на нагрузке требуется высокоомное сопротивление. Этому требованию отвечает $Z_{э.р}$, превышающее сопротивление r в Q^2 раз [см. ф-лу (4.56), из которой следует, что $\frac{Z_{э.р}}{r} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 = Q^2$].

При этом мощность, подводимая к контуру от генератора и равная

$$P_{\sim} = \frac{I U_a}{2} = \frac{I^2 Z_{э.р}}{2},$$

выделяется „внутри" контура в низкоомном сопротивлении r.

Эту мощность можно выразить ещё и в форме

$$P_{\sim} = \frac{I_к^2 \cdot r}{2},$$

которая легко получается из предыдущей подстановкой

$$I = \frac{I_к}{Q} = \frac{I_к r}{\rho} \quad \text{и} \quad Z_{э.р} = \frac{\rho^2}{r}.$$

Этот результат показывает, что параллельный контур можно рассматривать как трансформатор, преобразующий низкоомное сопротивление r в высокоомное $Z_{э.р} = \frac{p^2 \rho^2}{r}$, необходимое для обеспечения выгодного режима работы электронной лампы.

Этим, конечно, не исчерпывается назначение контура. Как отмечалось ранее, важную роль играет избирательная способность контура. С возрастанием добротности внешнее сопротивление резонансного контура (при данной характеристике ρ) возрастает.

Контур с большой величиной характеристического сопротивления ρ и по возможности малым сопротивлением потерь r используется иногда в качестве высокоомного сопротивления, предназначенного для ослабления токов определённой частоты в некоторых цепях устройства. Такой контур иногда называют „стопорным" или „контуром-пробкой".

§ 4.7. Резонансная кривая и фазовая характеристика параллельного контура. Полоса пропускания

Для выявления частотных свойств параллельного контура воспользуемся общим выражением (4.49), определяющим внешнее сопротивление контура при любых соотношениях между частотой внешней силы ω и резонансной частотой ω_p. Как и при выводе ф-лы (4.54), будем считать $r_1 \ll X_1$ и $r_2 \ll X_2$. Учитывая, далее, что полное реактивное сопротивление контура, получаемое при последовательном его обходе, равно

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = X_1 - X_2,$$

где L и C — результирующие индуктивность и ёмкость контура, находим вместо ф-лы (4.49) следующее выражение:

$$Z_э = \frac{X_1 X_2}{r + i(X_1 - X_2)} = \frac{X_1 X_2}{r + iX}. \qquad (4.70)$$

Заметим, что числитель правой части является положительной вещественной величиной. В случае простого контура с однородными ветвями (рис. 4.17), когда

$$X_1 = \omega L \text{ и } X_2 = \frac{1}{\omega C},$$

получаем

$$Z_э = \frac{\frac{L}{C}}{r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{Z_{э.р}}{1 + i\frac{X}{r}}, \qquad (4.71)$$

где $Z_{э.р} = \frac{L}{Cr}$ — сопротивление параллельного контура при резонансе.

В случае контура со смешанными ветвями (рис. 4.18 и 4.20) произведение $X_1 \cdot X_2$ зависит от частоты. Так, например, для контура, показанного на рис. 4.18,

$$X_1 \cdot X_2 = \omega L_1\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L_2\right) = \frac{L_1}{C} - \omega^2 L_2 L_1.$$

Для контура рис. 4.20

$$X_1 X_2 = \frac{L}{C_2} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}.$$

Однако в области частот, близких к резонансной, можно считать [см. ф-лу (4.60)]

$$X_1 X_2 \approx p^2 \rho^2 = \text{const}.$$

Кроме того, в этой же области частот знаменатель правой части выражения (4.71) определяется [см. ф-лу (4.25′)] приближённой формулой:

$$1 + \frac{iX}{r} = 1 + i\frac{2\Delta\omega}{\omega_p} Q = 1 + ia.$$

Подставляя эти выражения в ф-лу (4.71), получим для внешнего сопротивления параллельного контура, при относительно малых расстройках $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_p} \ll 1\right)$, следующую формулу

$$Z_э = \frac{Z_{э.р}}{1 + ia}. \qquad (4.72)$$

Это выражение может быть использовано для выявления частотных свойств параллельного контура, используемого в качестве нагрузочного сопротивления. Если задан ток в неразветвлённой части схемы (например, анодный ток в случае электронной лампы), то амплитуда развиваемого на контуре напряжения пропорциональна модулю сопротивления контура — $z_э$:

$$U_a = I\, z_э = \frac{IZ_{э.р}}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{U_{ap}}{\sqrt{1 + a^2}}. \qquad (4.73)$$

Отсюда получаем уравнение резонансной кривой напряжения на контуре

$$n = \frac{U_a(\omega)}{U_{ap}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [a(\omega)]^2}}. \qquad (4.74)$$

Фазовая характеристика параллельного контура, определяющая частотную зависимость сдвига фазы напряжения:

$$\vec{U}_a = \vec{I}\, Z_э = \vec{I}\, z_э e^{-i\varphi}$$

относительно фазы тока $\vec{I}$, совпадает с аргументом сопротивления $Z_э$. Поэтому в соответствии с выражением (4.72) можем написать

$$\varphi(a) = \operatorname{arc\,tg}(a) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p} Q\right). \qquad (4.75)$$

Таким образом, всё, что ранее было сказано для тока в последовательном контуре, может быть распространено на напряжение, действующее на параллельном контуре. Это положение справедливо при условии, что амплитуда тока в неразветвлённой части схемы не зависит от частоты генератора (или от настройки контура).

В реальных устройствах приходится считаться с зависимостью этого тока от величины нагрузочного сопротивления $Z_э(\omega)$ и, следовательно, от величины расстройки $\Delta\omega = \omega - \omega_p$.

Действительно, обращаясь к схеме рис. 4.16, можем написать:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{R_i + Z_э},$$

$$\vec{U}_a = \vec{I} Z_э = \vec{E} \frac{Z_э}{R_i + Z_э},$$

$$\vec{U}_{ap} = \vec{E} \frac{Z_{э.p}}{R_i + Z_{э.p}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\vec{U}_a}{\vec{U}_{ap}} = \frac{Z_э (R_i + Z_{э.p})}{Z_{э.p} (R_i + Z_э)}.$$

Подставляя сюда

$$Z_э = \frac{Z_{э.p}}{1 + i a},$$

получим

$$\frac{\vec{U}_a}{\vec{U}_{ap}} = \frac{R_i + Z_{э.p}}{(1 + i a) R_i + Z_{э.p}} = \frac{R_i + Z_{э.p}}{R_i + Z_{э.p} + i a R_i} = \frac{1}{1 + i \dfrac{a}{1 + Z_{э.p}/R_i}} \qquad (4.76)$$

Переходя к модулю, получаем

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{1 + Z_{э.p}/R_i}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_p} \dfrac{Q}{(1 + Z_{э.p}/R_i)}\right]^2}}. \qquad (4.77)$$

Из сравнения этого выражения с ф-лой (4.23) видно, что генератор, обладающий конечным внутренним сопротивлением, оказывает на контур шунтирующее действие, притупляя его резонансную кривую. Эквивалентная добротность шунтированного контура

$$Q_э = \frac{Q}{1 + Z_{э.p}/R_i} \qquad (4.78)$$

снижается тем сильнее, чем больше отношение $\frac{Z_{э.p}}{R_i}$. Эквивалентное затухание контура $d_э$ соответственно растёт с увеличением $\frac{Z_{э.p}}{R_i}$.

Это обстоятельство необходимо учитывать при определении полосы пропускания параллельного контура, используемого в качестве нагрузки в анодной цепи электронного усилителя. Если для „холостого" параллельного контура полоса пропускания, определяемая по снижению n до $1/\sqrt{2}$, равна, как и в случае последовательного контура,

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p} = \frac{1}{Q},$$

то с учётом шунтирующего действия генератора относительная полоса будет

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p} = \frac{1}{Q_э} = \frac{1 + \dfrac{Z_{э.p}}{R_i}}{Q} > \frac{1}{Q}. \qquad (4.79)$$

Расширение полосы контура проявляется особенно заметно при использовании лампы с относительно малым внутренним сопротивлением R_i (триоды)[1]. Расширение полосы может при этом достигать 20÷30%. При использовании электронных приборов с очень большим внутренним сопротивлением (например, пентоды) их шунтирующим действием обычно можно пренебрегать.

§ 4.8. Схемы замещения параллельного контура

Представив полное сопротивление контура, определяемое ф-лой (4.72), в форме

$$Z_э = \frac{Z_{э.p}}{1 + i a} =$$

$$= Z_{э.p}\left(\frac{1}{1 + a^2} - i\frac{a}{1 + a^2}\right) =$$

$$= R_э + i X_э, \qquad (4.80)$$

можно трактовать параллельный контур в виде последовательного соединения активного сопротивления

$$R_э = Z_{э.p} \frac{1}{1 + a^2} \qquad (4.81)$$

и реактивного

$$X_э = -Z_{э.p} \frac{a}{1 + a^2}. \qquad (4.82)$$

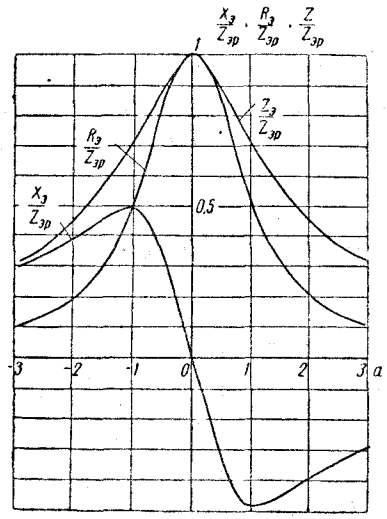


Рис. 4.22

[1] Заметим, что при $\frac{R_i}{Z_{э.p}} \ll 1$ резонансные свойства контура (по отношению к напряжению на контуре) вообще не проявляются.

Действительно, при $R_i \to 0$ эдс оказывается приложенной непосредственно к контуру. Независимо от соотношения частот ω и ω_p напряжение на контуре будет равно эдс генератора.

Графики функций $\frac{R_э}{Z_{э.р}}$, $\frac{X_э}{Z_{э.р}}$, а также отношения $\frac{z_э}{Z_{э.р}}$ в зависимости от обобщённой расстройки a показаны на рис. 4.22.

При положительной расстройке, т. е. для частот выше резонансной, когда $\Delta\omega = \omega - \omega_р > 0$ и $a > 0$, реактивная слагающая сопротивления последовательной схемы замещения $X_э < 0$, т. е. параллельный контур может быть замещён последовательным соединением конденсатора ёмкостью $C_э$ и активного сопротивления $R_э$. Для частот $\omega < \omega_р$, наоборот, схема замещения состоит из последовательно соединённых $R_э$ и $L_э$ (рис. 4.22).

Итак: для резонансной частоты контур представляет собой чисто активное сопротивление $R_э = Z_{э.р}$;

для частот выше резонансной, когда преобладает проводимость ёмкостной ветви, контур является комплексным сопротивлением с ёмкостной реактивной составляющей;

для частот ниже резонансной, когда преобладает проводимость индуктивной ветви, контур является комплексным сопротивлением с индуктивной реактивной слагающей.

Отметим, что экстремумы кривой $\frac{X_э}{Z_{э.р}}$ получаются, как это нетрудно видеть из ф-лы (4.82), при значениях обобщённой расстройки $a = \pm 1$, т. е. на границах полосы пропускания контура. При этом максимальные ординаты кривой $\frac{X_э}{Z_{э.р}}$ равны (по абсолютной величине) 1/2, так же, как и ординаты кривой $\frac{R_э}{Z_{э.р}}$.

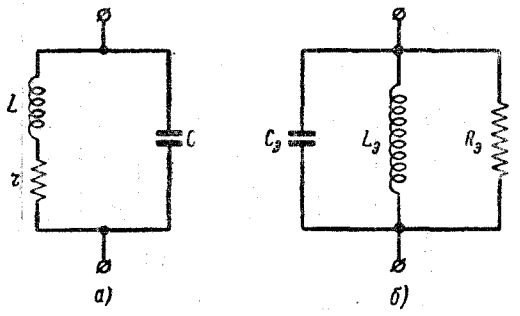


Рис. 4.23

Часто оказывается удобным применять параллельную схему замещения, в которой сопротивление потерь r (рис. 4.23$а$) учитывается сопротивлением $R_э$, включённым параллельно реактивным элементам контура (рис. 4.23$б$).

Параметры схемы замещения $L_э$, $C_э$ и $R_э$ (рис. 4.23$б$) нетрудно получить из выражения для комплексной проводимости контура, показанного на рис. 4.23$а$.

В соответствии с ф-лой (4.70) находим

$$\frac{1}{Z_э} = \frac{r + i(X_1 - X_2)}{X_1 X_2} = \frac{r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\frac{L}{C}} =$$

$$= \frac{1}{Z_{э.р}} + i\omega C - i\frac{1}{\omega L}. \qquad (4.83)$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} R_э &= Z_{э.р} = \frac{\rho^2}{r} \\ L_э &= L \\ C_э &= C \end{aligned}\right\}. \qquad (4.84)$$

Таким образом, для перехода от схемы 4.23$а$ к схеме 4.23$б$ достаточно сопротивление r, включённое в контур последовательно, заменить параллельным сопротивлением $R_э$, равным резонансному сопротивлению контура $Z_{э.р}$.

Очевидно и обратное положение: для перехода от параллельного сопротивления $R_ш$, шунтирующего контур, к сопротивлению $r_э$, включённому в контур последовательно, необходимо определять последнее по формуле

$$r_э = \frac{\rho^2}{R_ш}. \qquad (4.85)$$

Найдём общее выражение для сопротивления контура, образованного параллельным соединением трёх ветвей: L, C и R (схема рис. 4.23$б$)

$$Z_э = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C - i\frac{1}{\omega L}} = \frac{R}{1 + iR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} =$$

$$= \frac{R}{1 + iRC\omega\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}. \qquad (4.86)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{RC} = 2\alpha = \frac{2}{\tau}, \quad \frac{1}{LC} = \omega_р^2,$$

получаем

$$Z_э = \frac{R}{1 + i\frac{(\omega^2 - \omega_р^2)}{2\alpha\omega}} = \frac{R}{1 + i\frac{\omega^2 - \omega_р^2}{2\omega}\tau}. \qquad (4.87)$$

В области малых расстроек $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_p} \ll 1\right)$ по аналогии с ф-лой (4.26) можно считать

$$Z_э \approx \frac{R}{1+i\Delta\omega\tau}, \qquad (4.88)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_p$.

Пример 4.1. Пусть задан контур, содержащий активные сопротивления, включённые как внутри, так и параллельно контуру (рис. 4.24).

Требуется: 1) привести эту схему к виду схемы рис. 4.23*а* и 2) привести эту схему к виду рис. 4.23*б*.

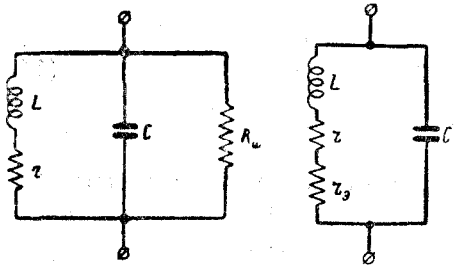


Рис. 4.24

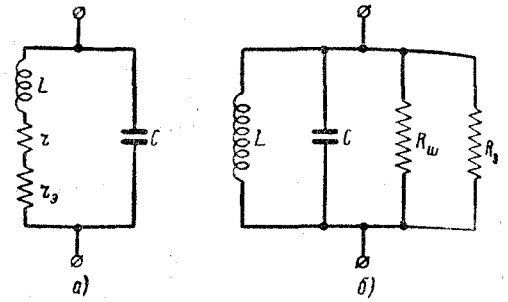


Рис. 4.25

В первом случае к сопротивлению r добавляем сопротивление $r_э = \rho^2/R_ш$. Во втором случае к шунту $R_ш$ добавляем (параллельно) шунт $R_э = \rho^2/r$. В результате получаем схемы замещения, показанные на рис. 4.25.

ГЛАВА 5

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

§ 5.1. Виды связи. Коэффициент связи

Рассмотренные в гл. 4 одиночные контуры обладают недостаточно высокой избирательностью. Относительно невысокая крутизна скатов резонансной кривой одиночного контура препятствует чёткому разделению сигналов по частотному признаку. Для повышения избирательности в радиотехнике широко применяются сложные колебательные системы, составленные из нескольких колебательных контуров, различным образом между собой связанных. Применение нескольких контуров часто необходимо и для осуществления различных схемных задач, например трансформации нагрузочных сопротивлений, сопряжения различных элементов многоступенных ламповых устройств, получения необходимых фазовых сдвигов и т. д. Наибольшее распространение получили системы, состоящие из двух связанных контуров.

В зависимости от того, осуществляется ли связь между контурами через общий магнитный поток или общее электрическое поле, различают магнитную связь и электрическую связь. Возмож-

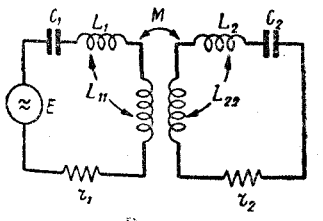


Рис. 5.1

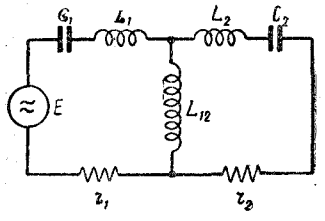


Рис. 5.2

на также и комбинированная связь — магнитная и электрическая. В некоторых специальных случаях (в измерительных устройствах) иногда оказывается удобным применять связь через общее сопротивление („гальваническая связь").

На рис. 5.1—5.4 показаны наиболее распространённые схемы связанных контуров. Схемы рис. 5.1 и 5.2 являются двумя возможными вариантами магнитной связи. Первая из них (рис. 5.1)

называется индуктивной или трансформаторной. Вторая (рис. 5.2) — кондуктивной или автотрансформаторной. Два варианта электрической связи показаны на рис. 5.3 и 5.4.

На первом из них (рис. 5.3) показана схема ёмкостной „внутренней", а на втором (рис. 5.4) — ёмкостной „внешней" связи.

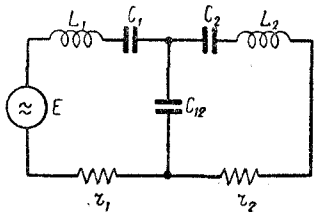


Рис. 5.3

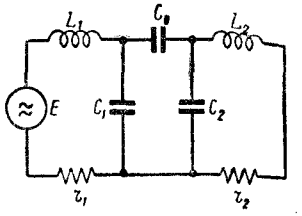


Рис. 5.4

Комбинированная трансформаторно-ёмкостная связь изображена на рис. 5.5, а гальваническая связь — на рис. 5.6.

Возможны также случаи, когда один из контуров, обычно второй, представляет собой апериодическую (неколебательную) цепь.

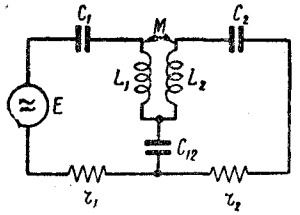


Рис. 5.5

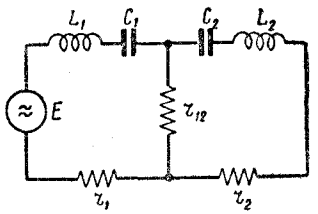


Рис. 5.6

Для выявления резонансных свойств системы из двух связанных контуров удобно исходить из условия, что амплитуда E синусоидальной электродвижущей силы, вводимой в первый контур, поддерживается неизменной, а частота ω этой эдс может изменяться.

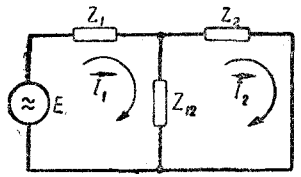


Рис. 5.7

При рассмотрении стационарного режима любую из двухконтурных связанных систем можно представить в виде обобщённой схемы, показанной на рис. 5.7. На этой схеме индексами 1 или 2 обозначены элементы, входящие только в первый или второй контуры, а индексами 12 — элементы, общие для первого и второго контуров. Таким образом, каждый из контуров в общем случае может содержать элементы L_1, C_1 и r_1 или L_2, C_2 и r_2, входящие только в данный контур, и элементы L_{12}, C_{12} и r_{12}, общие для двух контуров. Результирующие

величины индуктивности, ёмкости и сопротивления, получаемые при обходе данного контура и при разомкнутом втором контуре, обозначим через

$$L_{11},\ C_{11},\ r_{11} \quad \text{и} \quad L_{22},\ C_{22},\ r_{22}.$$

Комплексные сопротивления подобного контура при частоте ω определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= L_{11}\cdot i\omega + r_{11} + \frac{1}{C_{11}}\cdot\frac{1}{i\omega} \\ \text{или}\quad Z_{22} &= L_{22}\cdot i\omega + r_{22} + \frac{1}{C_{22}}\cdot\frac{1}{i\omega} \end{aligned}\right\}. \tag{5.1}$$

Сопротивление цепи, общей для двух контуров, будет

$$Z_{12} = L_{12}\cdot i\omega + r_{12} + \frac{1}{C_{12}}\cdot\frac{1}{i\omega}. \tag{5.2}$$

Z_{12} называется сопротивлением связи двух контуров. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_{12} \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_{12} \end{aligned}\right\}. \tag{5.3}$$

Если связь между контурами осуществляется через взаимоиндукцию M, то сопротивление связи $Z_{12} = i\omega M$. При этом Z_{11} и Z_{22} определяются ф-лами (5.1).

Для количественной оценки взаимного влияния контуров применяется так называемый коэффициент связи двух контуров. Понятие коэффициента связи проще всего сформулировать для схем с чисто магнитной или с чисто электрической связью, когда Z_{12} является чисто реактивным сопротивлением, индуктивным или ёмкостным.

Рассмотрим сперва схему, показанную на рис. 5.1. Пусть при разомкнутом втором контуре в первом контуре протекает ток $\vec{I}_1$. Составим отношение электродвижущей силы, индуктированной в катушке L_{22}, к полному напряжению на индуктивности L_{11} первого контура

$$k_1 = \frac{\vec{E}_2}{\vec{U}_{L_{11}}} = \frac{i\omega M \vec{I}_1}{i\omega L_{11}\vec{I}_1} = \frac{M}{L_{11}}.$$

Величина k_1, имеющая смысл коэффициента трансформации напряжения, называется степенью связи первого контура со вторым.

Если генератор включить со стороны второго контура, а первый разомкнуть, то получим степень связи второго контура с первым в виде

$$k_2 = \frac{M}{L_{22}}.$$

При одновременном протекании токов в обоих контурах, имеется взаимное влияние между контурами. Это влияние тем сильнее, чем больше произведение $k_1 k_2$.

Коэффициент связи между контурами определяется выражением

$$k = \sqrt{k_1 k_2}. \tag{5.4}$$

Для индуктивной связи (рис. 5.1) очевидно

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}. \tag{5.5}$$

Особенностью резонансных трансформаторов при высоких добротностях колебательных контуров является использование очень малых величин коэффициентов трансформации k_1 и k_2. Величины этих коэффициентов в радиотехнике измеряются сотыми долями. Таков же порядок величины k.

Для автотрансформаторной связи (рис. 5.2) имеем:

$$k_1 = \frac{L_{12}}{L_{11}},$$

$$k_2 = \frac{L_{12}}{L_{22}},$$

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}. \tag{5.6}$$

Для ёмкостной связи по схеме, изображённой на рис. 5.3, имеем:

$$k_1 = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_{12}}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\frac{C_1 + C_{12}}{C_1 C_{12}}} = \frac{C_1}{C_1 + C_{12}},$$

$$k_2 = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}}}{\frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_{12}}} = \frac{C_2}{C_2 + C_{12}},$$

$$k = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_{12})(C_2 + C_{12})}} = \frac{1}{C_{12}} \sqrt{\frac{C_1 C_{12}}{(C_1 + C_{12})} \cdot \frac{C_2 C_{12}}{(C_2 + C_{12})}} =$$

$$= \frac{1}{C_{12}} \sqrt{C_{11} C_{22}}, \tag{5.7}$$

где $C_{11} = \frac{C_1 C_{12}}{C_1 + C_{12}}$ и $C_{22} = \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}}$ — результирующие ёмкости при обходе соответственно первого и второго контура.

При изменении ёмкости связи C_{12} в пределах от 0 до ∞ получим изменение коэффициента связи от единицы до нуля. В первом случае ($C_{12} = 0$) конденсатор связи фактически отсутствует и система вырождается в одиночный контур, состоящий из последовательно соединённых элементов C_1, C_2, L_1, L_2, r_1, r_2. Во втором случае ($C_{12} \to \infty$) сопротивление связи равно нулю, токи $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ не создают падения напряжения на общем элементе цепи и система распадается на два, не связанных между собой, контура. Для получения k порядка нескольких процентов ёмкость связи C_{12} должна быть очень велика по сравнению с ёмкостями C_1 и C_2. При этих условиях

$$k \approx \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{12}}. \tag{5.7'}$$

Для схемы связи, показанной на рис. 5.4, называемой иногда „внешней ёмкостной связью", имеем:

$$k_1 = \frac{C_0}{C_0 + C_2},$$

$$k_2 = \frac{C_0}{C_0 + C_1},$$

$$k = \frac{C_0}{\sqrt{(C_0 + C_1)(C_0 + C_2)}}. \tag{5.8}$$

В данном случае для получения k порядка нескольких процентов ёмкость связи C_0 должна быть мала по сравнению с C_1 и C_2. Поэтому обычно можно считать

$$k \approx \frac{C_0}{\sqrt{C_1 C_2}}. \tag{5.8'}$$

Рассмотрим в заключение схему трансформаторно-ёмкостной связи (рис. 5.5). Характер сопротивления связи зависит в этой схеме от соотношения величин ωM и $\frac{1}{\omega C_{12}}$, а также от знака M. Если при разомкнутом втором контуре наводимая в катушке L_2 эдс находится в противофазе с напряжением на конденсаторе C_{12}, то сопротивление связи будет

$$X_{12} = \omega M - \frac{1}{\omega C_{12}}.$$

Если $\omega M > \frac{1}{\omega C_{12}}$, то связь может рассматриваться как магнитная.

При этом

$$k_1 = \frac{\omega M - \frac{1}{\omega C_{12}}}{\omega L_{11}},$$

$$k_2 = \frac{\omega M - \frac{1}{\omega C_{12}}}{\omega L_{22}},$$

$$k = \frac{\omega M - \frac{1}{\omega C_{12}}}{\omega \sqrt{L_{11} L_{22}}} = \frac{M - \frac{1}{\omega^2 C_{12}}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}. \qquad (5.9)$$

Таким образом, при комбинированной связи коэффициент связи зависит от частоты.

Если $\omega M < \frac{1}{\omega C_{12}}$, то связь может рассматриваться как ёмкостная. При этом

$$k_1 = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}} - \omega M}{\frac{1}{\omega C_{11}}},$$

$$k_2 = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}} - \omega M}{\frac{1}{\omega C_{22}}}$$

и

$$k = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}} - \omega M}{\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{C_{11} C_{22}}}}. \qquad (5.9')$$

Если повернуть катушку связи (не выключая её из схемы) так, чтобы фаза эдс E_2 на зажимах $a-a$ изменилась на 180° (рис. 5.8), то

$$X_{12} = -\omega M - \frac{1}{\omega C_{12}}.$$

При этом связь будет ёмкостная.

Вообще, если связь осуществляется через чисто реактивное сопротивление X_{12}, то коэффициент связи можно выразить в виде следующей формулы:

$$k = \frac{|X_{12}|}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \qquad (5.10)$$

где ρ_1 и ρ_2 — характеристики контуров.

Это выражение справедливо для случая, когда оба контура настроены на одинаковую частоту, совпадающую с частотой генератора ω.

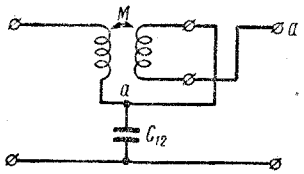


Рис. 5.8

§ 5.2. Соотношения между токами в связанных контурах. Схема замещения первого контура

Исходя из обобщённой схемы (рис. 5.7), получаем систему из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}\vec{I}_1 - Z_{12}\vec{I}_2 &= \vec{E} \\ -Z_{12}\vec{I}_1 + Z_{22}\vec{I}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.11)$$

В этих уравнениях за положительное направление контурных токов $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ принято направление, совпадающее с направлением вращения часовой стрелки. Знак минус ставится перед членами уравнения, соответствующими падениям напряжений от тока, направленного навстречу току данного контура.

Решая уравнения системы (5.11), находим для токов следующие выражения:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}}{Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}}, \qquad (5.12)$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}} \cdot \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \vec{I}_1 \frac{Z_{12}}{Z_{22}}. \qquad (5.13)$$

Приложим эти выражения к системам с чисто магнитной или чисто электрической связью. В обоих случаях Z_{12} есть чисто реактивное сопротивление. Обозначив это сопротивление через $\pm iX_{12}$ (знак плюс при магнитной связи, знак минус при электрической), получим

$$Z_{12}^2 = (\pm iX_{12})^2 = -X_{12}^2.$$

Тогда ур-ния (5.12) и (5.13) можно переписать в форме:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}}{Z_{11} + \frac{X_{12}^2}{Z_{22}}}, \qquad (5.12')$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{\left(Z_{11} + \frac{X_{12}^2}{Z_{22}}\right)} \cdot \frac{(\pm iX_{12})}{Z_{22}}. \qquad (5.13')$$

Из выражения (5.12') видно, что под влиянием связи со вторым контуром полное сопротивление первого контура возрастает на величину

$$Z_{вн} = \frac{X_{12}^2}{Z_{22}}. \qquad (5.14)$$

Это сопротивление, в общем случае комплексное, называется вносимым в первый контур сопротивлением. Подставим в выражение (5.14)

$$Z_{22} = r_{22} + i\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right) = r_{22} + i X_{22}. \tag{5.15}$$

Тогда

$$Z_{вн} = \frac{X_{12}^2}{r_{22} + i X_{22}} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}^2 + X_{22}^2} r_{22} - i \frac{X_{12}^2}{r_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22} =$$

$$= \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22} - i \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} X_{22}. \tag{5.16}$$

Действительная часть этого выражения определяет приращение активного сопротивления первого контура, а мнимая учитывает реактивное сопротивление, вносимое вторым контуром в первый.

Обозначим первое через $r_{вн}$, а второе через $X_{вн}$. Таким образом, имеем:

$$r_{вн} = \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22}, \tag{5.17}$$

$$X_{вн} = -\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} X_{22}. \tag{5.18}$$

Для индуктивной связи получим:

$$r_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} r_{22}, \tag{5.19}$$

$$X_{вн} = -\frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} X_{22}. \tag{5.20}$$

Для ёмкостной связи (по схеме рис. 5.3):

$$r_{вн} = \frac{\frac{1}{\omega^2 C_{12}^2}}{z_{22}^2} r_{22}, \tag{5.19'}$$

$$X_{вн} = -\frac{\frac{1}{\omega^2 C_{12}^2}}{z_{22}^2} X_{22}. \tag{5.20'}$$

Отметим, что независимо от связи и от настройки второго контура активное сопротивление $r_{вн}$ всегда положительно. Это очевидно и из физического рассмотрения, так как второй контур не содержит генератора и расходуемая в сопротивлении r_{22} энергия берётся из первого контура. Ясно, что для учёта добавочных потерь в первый контур должно быть введено положительное активное сопротивление.

Иное дело с реактивной частью вносимого в первый контур сопротивления. В зависимости от настройки второго контура это

сопротивление может быть как положительным, так и отрицательным. Если резонансная частота второго контура $\omega_{р2} > \omega$, то

$$X_{22} = \omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}} < 0$$

и

$$X_{вн} > 0.$$

Если же

$$\omega_{р2} < \omega, \quad \text{то} \quad X_{22} > 0 \quad \text{и} \quad X_{вн} < 0.$$

Это означает, что при ёмкостной расстройке второго контура в первый контур вносится индуктивное сопротивление, а при индуктивной расстройке вносится ёмкостное сопротивление.

Полное эквивалентное сопротивление первого контура с учётом реакции второго можно записать в форме

$$Z_{1э} = Z_{11} + Z_{вн} =$$

$$= r_{11} + r_{вн} + i(X_{11} + X_{вн}) =$$

$$= r_{11} + \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22} + i\left(X_{11} - \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} X_{22}\right) =$$

$$= r_{1э} + i X_{1э}. \tag{5.21}$$

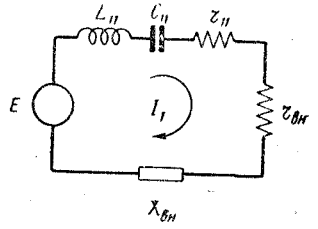


Рис 5.9

На основании этого выражения можно построить для первого контура схему замещения, изображённую на рис. 5.9.

Для тока в первом контуре можно написать следующее выражение:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}}{r_{1э} + i X_{1э}} = \frac{\vec{E}}{r_{11} + \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22} + i\left(X_{11} - \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} X_{22}\right)}. \tag{5.22}$$

Для тока во втором контуре, в соответствии с выражением (5.13'), имеем

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{r_{11} + \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22} + i\left(X_{11} - \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} X_{22}\right)} \cdot \frac{(\pm i X_{12})}{Z_{22}}. \tag{5.23}$$

Величины $r_{вн}$ и $X_{вн}$ очень сильно зависят от настройки второго контура. С приближением настройки второго контура к резонансу с частотой генератора ω, $r_{вн}$ растёт, а $X_{вн}$ падает (по абсолютной величине).

При резонансе, т. е. когда $\omega_{р2} = \omega$, X_{22} обращается в нуль, что приводит к следующим выражениям:

$$X_{вн} = 0.$$

$$r_{вн.\,макс} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}}. \tag{5.24}$$

Интересно, что в этом случае $r_{вн}$ обратно пропорционально сопротивлению потерь второго контура.

Фазировка токов $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ относительно эдс $\vec{E}$ при расстроенных контурах (относительно частоты генератора ω) показана на векторных диаграммах рис. 5.10 (для индуктивной связи) и рис. 5.11 (для внутренней ёмкостной связи).

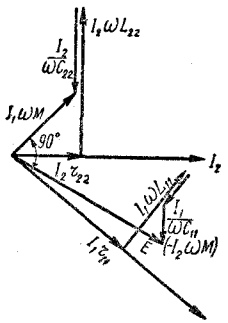


Рис. 5.10

Первая диаграмма построена по уравнениям, получаемым путём подстановки:

$$Z_{11} = r_{11} + i\omega L_{11} + \frac{1}{i\omega C_{11}},$$

$$Z_{22} = r_{22} + i\omega L_{22} + \frac{1}{i\omega C_{22}}$$

и

$$Z_{12} = i\omega M$$

в ур-ние (5.11). Таким образом, для индуктивной связи имеем:

$$\left.\begin{aligned} \vec{I}_1\left[r_{11} + i\left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_{11}}\right)\right] - \vec{I}_2 i\omega M = \vec{E} \\ -\vec{I}_1 i\omega M + \vec{I}_2\left[r_{22} + i\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.11')$$

Вторая диаграмма, для ёмкостной связи, построена по уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} I_1\left[r_{11} + i\left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_{11}}\right)\right] - \vec{I}_2 \cdot \frac{1}{i\omega C_{12}} = \vec{E} \\ -\vec{I}_1 \cdot \frac{1}{i\omega C_{12}} + \vec{I}_2\left[r_{22} + i\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.11'')$$

Нетрудно убедиться, что в случае настройки первого и второго контуров на частоту генератора ω сдвиг фазы между током $\vec{I}_1$ и $\vec{E}$ равен нулю, а ток $\vec{I}_2$ сдвинут относительно $\vec{I}_1$ на $+90°$ в случае индуктивной связи и на $-90°$ в случае ёмкостной.

С помощью векторной диаграммы рис. 5.12 нетрудно также пояснить смысл знака минус в правой

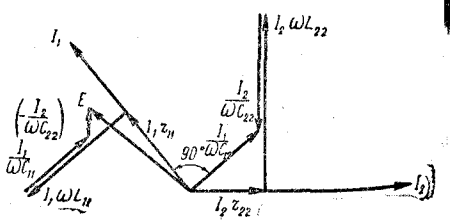


Рис. 5.11

части выражения (5.20). Для бо́льшей наглядности диаграмма построена для случая, когда первый контур настроен на частоту генератора, а второй немного расстроен.

Как видно из диаграммы, наличие индуктивной расстройки во втором контуре $\left(\omega L_{22} > \frac{1}{\omega C_{22}}\right)$ приводит к повороту вектора $\vec{I}_1$ на угол φ в сторону опережения относительно $\vec{E}$, что равносильно внесению в первый контур ёмкостного сопротивления.

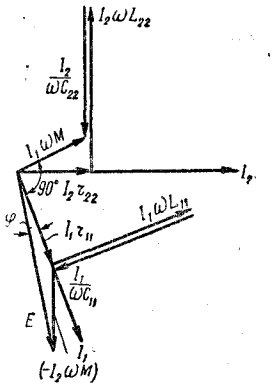


Рис. 5.12

§ 5.3. Резонансные частоты двухконтурной системы

Приведённая на рис. 5.9 схема замещения первого контура обладает той особенностью, что входящая в полное реактивное сопротивление эквивалентного контура $X_{1э}$ величина $X_{вн}$ является сложной функцией частоты. Поэтому эквивалентный контур, в отличие от обычного контура, составленного из простых элементов L и C, может при некоторых условиях обладать двумя резонансными частотами. Для определения этих частот приравняем нулю полное реактивное сопротивление эквивалентного контура

$$X_{1э} = \omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_{11}} - \frac{X_{12}^2\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right)}{r_{22}^2 + \left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right)^2} = 0.$$

Отыскание корней этого уравнения в общем случае, при учёте сопротивления r_{22}, связано с весьма громоздкими выкладками. С целью упрощения анализа пренебрежём потерями во втором контуре. Связанная с таким допущением ошибка тем меньше, чем сильнее связь между контурами. Полагая связь достаточно сильной (условие достаточности будет выяснено в § 5.6) и приравнивая $r_{22} = 0$, перепишем приведённое выше уравнение в упрощённом виде

$$\left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_{11}}\right)\left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}}\right) - X_{12}^2 = 0.$$

Для определённости рассмотрим случай индуктивной связи, т. е. будем считать

$$X_{12}^2 = \omega^2 M^2.$$

Тогда будем иметь

$$\omega^2 L_{11} L_{22} - \frac{L_{22}}{C_{11}} - \frac{L_{11}}{C_{22}} + \frac{1}{\omega^2 C_{11} C_{22}} - \omega^2 M^2 = 0$$

или после деления на $L_{11}L_{22}$ и использования соотношений

$$\frac{M^2}{L_{11}L_{22}}=k^2,\quad \frac{1}{C_{11}L_{11}}=\omega_{p_1}^2,\quad \frac{1}{C_{22}L_{22}}=\omega_{p_2}^2,$$

получим

$$\omega^4-(\omega_{p_1}^2+\omega_{p_2}^2)\,\omega^2+\omega_{p_1}^2\,\omega_{p_2}^2-k^2\omega^4=0$$

или

$$(1-k^2)\,\omega^4-(\omega_{p_1}^2+\omega_{p_2}^2)^2\;\omega^2+\omega_{p_1}^2\,\omega_{p_2}^2=0.$$

Из четырёх корней полученного биквадратного уравнения два отрицательных корня должны быть отброшены как не имеющие физического смысла. Положительные же корни, определяемые выражением

$$\omega_{\mathrm{I,II}}=\sqrt{\frac{\omega_{p_1}^2+\omega_{p_2}^2\pm\sqrt{(\omega_{p_1}^2+\omega_{p_2}^2)^2-4\,(1-k^2)\,\omega_{p_1}^2\,\omega_{p_2}^2}}{2\,(1-k^2)}},\qquad (5.25)$$

дают искомые резонансные частоты эквивалентного контура.

Из рассмотрения выражения (5.25) нетрудно прийти к выводу, что ω_{I} превышает наибольшую из резонансных частот ω_{p_1} и ω_{p_2}, а ω_{II} — меньше, чем наименьшая из частот ω_{p_1} и ω_{p_2}. Таким образом, положение ω_{I} и ω_{II} на оси частот, независимо от соотношения между ω_{p_1} и ω_{p_2}, должно соответствовать рис. 5.13.

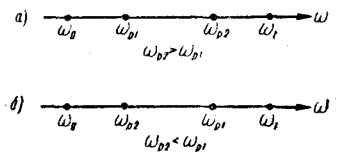


Рис. 5.13

Частоты ω_{I} и ω_{II}, зависящие от величины связи, называются частотами связи. Частоту ω_{I} иногда называют быстрой, а частоту ω_{II} — медленной частотой связи.

Для практики большой интерес представляет выяснение характера изменения частот связи в зависимости от относительной расстройки контуров. Для выяснения этой зависимости поступим следующим образом. Зафиксируем настройку одного из контуров, например первого, и станем изменять настройку второго контура путём изменения L_2 или C_2. Величину коэффициента связи между контурами сохраняем при этом неизменной. Таким образом, $\omega_{p_1}=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$. Разделив обе части ур-ния (5.25) на постоянную величину ω_{p_1}, получим

$$\frac{\omega_{\mathrm{I,II}}}{\omega_{p_1}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}}\right)^2\pm\sqrt{\left(1+\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}\right)^2-4\,(1-k^2)\,\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}}}.\qquad (5.25')$$

Графики $\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{p_1}}$ и $\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_{p_1}}$ в функции отношения $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}}$ для определённого значения k_1 приведены на рис. 5.14 сплошными жирными линиями. Пунктирными линиями показаны те же функции для случая более слабой связи $k_2<k_1$.

Проанализируем ход кривых $\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{p_1}}$ и $\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_{p_1}}$. При $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}}=1$, т. е. при совпадении резонансных частот обоих контуров, ф-ла (5.25′) даёт следующие значения частот связи:

$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{p_1}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\sqrt{2+\sqrt{4-4(1-k^2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\sqrt{2+2k}=\frac{\sqrt{2(1+k)}}{\sqrt{2(1-k^2)}}=\sqrt{\frac{1+k}{(1-k)\,(1+k)}}=\frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_{p_1}}=\sqrt{\frac{2(1-k)}{2(1-k^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1+k}}.$$

Таким образом, при $\omega_{p_1}=\omega_{p_2}=\omega_p$

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\mathrm{I}}&=\frac{\omega_p}{\sqrt{1-k}}\\ \omega_{\mathrm{II}}&=\frac{\omega_p}{\sqrt{1+k}}\end{aligned}\right\}.\qquad (5.26)$$

Как видим, чем сильнее связь, тем больше частоты связи ω_{I} и ω_{II} отличаются от собственных резонансных частот контуров.

В области частот $\omega_{p_2}\ll\omega_{p_1}$ ф-ла (5.25′) даёт почти постоянное значение $\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{p_1}}$, а асимптотически приближающееся к величине $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$, тогда как $\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{\omega_{p_1}}$ стремится к нулю.

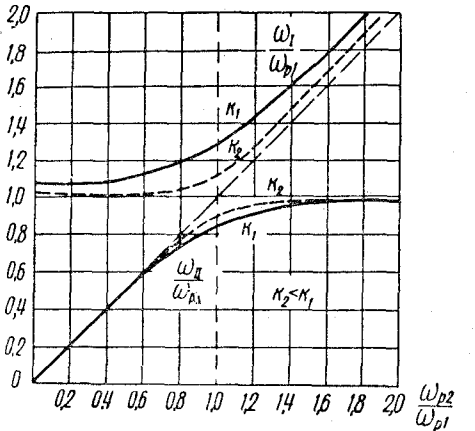


Рис. 5.14

В области частот $\omega_{p_2} \gg \omega_{p_1}$ отношение $\frac{\omega_I}{\omega_{p_1}}$ ассимптотически приближается к прямой

$$\frac{\omega_I}{\omega_{p_1}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \sqrt{2\left(1+\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}\right)} \approx \frac{\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}}}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Отношение же $\frac{\omega_{II}}{\omega_{p_1}}$ при $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}} \gg 1$ может быть приведено к виду

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_{p_1}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \sqrt{\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2} - \sqrt{\frac{\omega_{p_2}^4}{\omega_{p_1}^4} - 4(1-k^2)\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \sqrt{\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2} - \frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}\sqrt{1-\frac{4(1-k^2)}{\omega_{p_2}^2/\omega_{p_1}^2}}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \sqrt{\frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2} - \frac{\omega_{p_2}^2}{\omega_{p_1}^2}\left[1-\frac{2(1-k^2)}{\omega_{p_2}^2/\omega_{p_1}^2}\right]} \approx 1.$$

В данном параграфе рассмотрение ограничивается определением резонансных частот эквивалентного контура, получаемого в результате учёта реакции второго контура на первый. В §§ 5.6 и 5.7 будут рассмотрены резонансные свойства двухконтурной системы, обусловленные наличием частот связи.

§ 5.4. Настройка связанных контуров

В зависимости от назначения двухконтурной системы к её настройке могут предъявляться различные требования. При использовании, например, двухконтурной системы в качестве резонансного трансформатора, работающего на одной частоте, основным требованием может являться получение высокой отдачи. В передатчиках при усилении модулированных колебаний требуется хорошая отдача в сочетании с определённой формой резонансной характеристики системы. В приёмниках основным требованием является получение формы резонансной характеристики, выгодной для выделения сигнала из помех; требование высокой отдачи является при этом второстепенным.

Для выявления условий оптимальной настройки двухконтурной системы при различных требованиях к последней необходимо сперва исследовать зависимость амплитуды тока $\dot{I}_2$ в выходном

контуре от настройки каждого из контуров в отдельности и от величины коэффициента связи при постоянных E и ω.

В основу исследования положим выражения для модулей амплитуд токов I_1 и I_2. В соответствии с ф-лами (5.22) и (5.23), имеем:

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{\left(r_{11}+\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}r_{22}\right)^2+\left(X_{11}-\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}X_{22}\right)^2}}, \tag{5.27}$$

$$I_2 = \frac{EX_{12}}{\sqrt{\left(r_{11}+\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}r_{22}\right)^2+\left(X_{11}-\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}X_{22}\right)^2}\cdot\sqrt{r_{22}^2+X_{22}^2}}. \tag{5.28}$$

Рассмотрим сперва случай настройки одного лишь первого контура с помощью изменения ёмкости C_1 или индуктивности L_1. Параметры второго контура будем считать неизменными, причём резонансная частота ω_{p_2} этого контура может не совпадать с частотой ω генератора. Величину сопротивления связи считаем также постоянной.

При этих условиях в выражениях (5.27) и (5.28) переменной величиной является только X_{11}. При изменении этой величины I_1 и I_2 изменяются по одинаковому закону.

При настройке первого контура в резонанс

$$X_{11} - \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}X_{22} = 0$$

и амплитуды токов максимальны и равны:

$$I_{1\,макс} = \frac{E}{r_{11}+\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}r_{22}}, \tag{5.29}$$

$$I_{2\,макс} = \frac{E\frac{X_{12}}{z_{22}}}{r_{11}+\frac{X_{12}^2}{z_{22}^2}r_{22}}. \tag{5.30}$$

Положение максимумов токов на графике $I_1 = f_1(X_{11})$ и $I_2 = f_2(X_{11})$ зависит от исходной настройки второго контура. Если $X_{22} > 0$, то максимумы получаются при индуктивной расстройке первого контура, при $X_{22} < 0$ — при ёмкостной. Таким образом, при рассматриваемом резонансе оба контура имеют расстройки одинакового характера

Этот резонанс, получаемый только лишь путём подбора параметров первого контура, называется первым частным резонансом. Само собой разумеется, что определяемое ф-лой (5.30) значение $I_{2\,макс}$ не является наибольшим возможным при данных параметрах контуров и при данной амплитуде эдс E. Для достижения наибольшего возможного значения $I_{2\,макс}$ („максимум-максиморум") необходимо ещё подобрать оптимальную связь между

контурами, т. е. оптимальную величину сопротивления связи X_{12}. Это значение легко найти из условия максимума дроби

$$y = \frac{X_{12}}{r_{11} + \frac{X_{12}^2}{z_{22}^2} r_{22}}.$$

Дифференцируя y по X_{12} и приравнивая производную $\frac{dy}{dX_{12}}$ нулю, находим условие

$$r_{11} - \frac{r_{22}}{z_{22}^2} X_{12\,опт}^2 = 0,$$

откуда

$$X_{12\,опт} = z_{22} \sqrt{\frac{r_{11}}{r_{22}}}. \tag{5.31}$$

Подставляя это значение X_{12} в выражения (5.29) и (5.30), получим:

$$\left| I_{1\,макс} \right|_{X_{12\,опт}} = \frac{E}{2r_{11}}, \tag{5.32}$$

$$I_{2\,мм} = \frac{E}{2\sqrt{r_{11} r_{22}}}. \tag{5.33}$$

Подобная настройка при резонансе в одном из контуров и подборе оптимальной связи получила название сложного резонанса.

Рассмотрим теперь случай настройки одного лишь второго контура при неизменных параметрах первого контура и неизменной связи. В данном случае переменная величина X_{22} входит в выражения (5.27) — (5.28) более сложным образом, чем X_{11}. Для выяснения зависимости тока I_2 от X_{22} обратимся сперва к общему выражению (5.13) и приведём его к виду

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}} \cdot \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{E \cdot \frac{Z_{12}}{Z_{11}}}{Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}}. \tag{5.34}$$

Числитель правой части может рассматриваться как эдс, вводимая во второй контур в режиме холостого хода, т. е. при разомкнутом втором контуре. Знаменатель представляет собой эквивалентное сопротивление второго контура с учётом влияния первого контура при условии, что питание системы производится со стороны второго контура. Таким образом, величина

$$-\frac{Z_{12}^2}{Z_{11}} = Z_{вн}$$

может рассматриваться как сопротивление, вносимое из первого контура во второй при питании системы со стороны второго контура.

По аналогии с ф-лами (5.14) и (5.16) можно написать

$$z_{вн} = r_{вн} + \mathrm{i} X_{вн} = \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} r_{11} - \mathrm{i} \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} X_{11}.$$

Подставляя это выражение в ур-ние (5.34), получим

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E} \frac{Z_{12}}{Z_{11}}}{r_{22} + \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} r_{11} + \mathrm{i}\left(X_{22} - \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} X_{11}\right)}.$$

Модуль этого выражения равен

$$I_2 = \frac{E \frac{X_{12}}{z_{11}}}{\sqrt{\left(r_{22} + \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} r_{11}\right)^2 + \left(X_{22} - \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} X_{11}\right)^2}}. \tag{5.35}$$

При выполнении условия

$$X_{22} - \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} X_{11} = 0 \tag{5.36}$$

имеет место второй частный резонанс и амплитуда тока I_2 достигает значения

$$I_{2\,макс} = \frac{E \frac{X_{12}}{z_{11}}}{r_{22} + \frac{X_{12}^2}{z_{11}^2} r_{11}}. \tag{5.37}$$

Как и в случае первого частного резонанса, подбором связи можно получить наибольшую возможную при данных параметрах контуров и при данной амплитуде эдс E величину $I_{2\,макс}$ (сложный резонанс). Ввиду полной симметрии выражений (5.37) и (5.30) оптимальная величина X_{12} может быть получена простой заменой индексов 1 и 2 в ф-ле (5.31):

$$X_{12\,опт} = z_{11} \sqrt{\frac{r_{22}}{r_{11}}}. \tag{5.38}$$

Соответственно и наибольшее возможное значение тока

$$I_{2\,мм} = \frac{E}{2\sqrt{r_{11} r_{22}}}. \tag{5.39}$$

Это выражение совпадает с ф-лой (5.33). При этом ток в первом контуре равен

$$\left|I_{1\,макс}\right|_{X_{12\,опт}} = I_{2\,мм}\frac{z_{22}}{X_{12\,опт}} = \frac{E}{2\sqrt{r_{11}r_{22}}}\cdot\frac{\sqrt{r_{11}z_{22}}}{z_{11}\sqrt{r_{22}}} =$$

$$= \frac{E}{2r_{22}}\,\frac{z_{22}}{z_{11}}. \qquad (5.40)$$

Рассмотрим, наконец, полный резонанс, получаемый при настройке каждого из контуров порознь на частоту генератора и при подборе оптимальной связи. В этом наиболее для практики важном случае выполняются следующие условия:

$$X_{11} = X_{22} = 0;$$

$$Z_{11} = r_{11};\quad Z_{22} = r_{22};\quad X_{12\,опт} = \sqrt{r_{11}r_{22}}.$$

Подставляя эти выражения непосредственно в ф-лы (5.27) (5.28), получим:

$$\left|I_{1\,макс}\right|_{X_{12\,опт}} = \frac{E}{2r_{11}}, \qquad (5.41)$$

$$I_{2\,мм} = \frac{E}{2\sqrt{r_{11}r_{22}}}. \qquad (5.42)$$

Заметим, что при полном резонансе сопротивление $r_{вн}$, вносимое из второго контура в первый, равно собственному сопротивлению r_{11} первого контура.

Сравнивая ф-лу (5.42) с ф-лами (5.33) и (5.39), замечаем, что наибольшие возможные значения I_2 при сложных резонансах и при полном резонансе одинаковы. Однако для получения этого значения I_2 при полном резонансе требуется наименьшее по величине сопротивление связи, равное $X_{12\,опт} = \sqrt{r_{11}r_{22}}$. Отсюда видно, что величина сопротивления связи $X_{12\,опт}$ близка к r_{11} и r_{22}, т. е. измеряется единицами ом.

Отметим, что при одинаковых сопротивлениях r_{11} и r_{22} в случае полного резонанса токи I_1 и I_2 одинаковы по величине. При $r_{11} < r_{22}$, очевидно, $I_1 > I_2$; при $r_{11} > r_{22}$, наоборот, $I_2 > I_1$.

Итак, для получения полного резонанса нужно настроить каждый контур в отдельности на частоту генератора, после чего подобрать оптимальную связь. Если конструкция двухконтурной системы позволяет регулировать связь, то первоначальную настройку каждого из контуров можно производить при очень слабой связи, не нарушая схемы. В случае постоянной связи настройку каждого из контуров целесообразно производить при разомкнутом другом контуре.

§ 5.5. Энергетические соотношения в двухконтурной системе

Рассматривая второй контур как нагрузочный, содержащий полезное сопротивление r_{22}, а первый контур как вспомогательный, можно ввести понятие коэффициента полезного действия двухконтурной системы в виде отношения

$$\eta = \frac{P_2}{P_г} = \frac{P_2}{P_1 + P_2},$$

где P_2 — мощность, расходуемая в сопротивлении r_{22},
P_1 — мощность, расходуемая в сопротивлении r_{11},
$P_г$ — суммарная мощность, отдаваемая генератором.

Нетрудно выразить η через параметры контуров и через сопротивление связи X_{12}.

Очевидно:

$$P_1 = \frac{I_1^2}{2}\,r_{11},$$

$$P_2 = \frac{I_2^2}{2}\,r_{22}.$$

Но мощность P_2 можно выразить и через ток I_1, если воспользоваться схемой замещения для первого контура, изображённой на рис. 5.9. Очевидно, что мощность, выделяемая током I_1 в сопротивлении $r_{вн}$, численно равна мощности, отбираемой вторым контуром из первого. Таким образом,

$$P_2 = \frac{I_1^2}{2}\,r_{вн} = \frac{I_1^2}{2}\,\frac{X_{12}^2}{z_2}\,r_{22}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для кпд, получим

$$\eta = \frac{r_{вн}}{r_{11} + r_{вн}}. \qquad (5.43)$$

Особенно простое выражение получается для случая, когда второй контур настроен на частоту генератора. Тогда

$$r_{вн} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}}$$

и

$$\eta = \frac{X_{12}^2}{r_{11}r_{22} + X_{12}^2}. \qquad (5.43')$$

Заметим, что при полном резонансе, когда

$$X_{12} = \sqrt{r_{11}r_{22}},$$

коэффициент полезного действия равен 50%.

Такой же результат получается при втором частном резонансе и при одновременном подборе оптимальной связи.

Для получения более высокого кпд необходимо увеличивать отношение $r_{вн}$ к r_{11}. С этой целью целесообразно снижать до возможного минимума сопротивление потерь r_{11} первого контура и подбирать достаточно сильную связь. Такой подход целесообразен к двухконтурной системе, работающей, например, на выходе передатчика, когда вторым контуром является антенна передатчика. В этих случаях кпд доводят до 0,8—0,9. Таким образом, полный или сложный резонанс не пригодны в тех случаях, когда от двухконтурной системы требуется высокая отдача.

Если поставить задачу выделения максимальной мощности во втором контуре при заданных E и r_{11}, то нетрудно показать, что потребуется вносимое сопротивление $r_{вн} = r_{11}$.

Это вытекает непосредственно из схемы замещения для первого контура (рис. 5.9). Коэффициент полезного действия при этом равен 50%.

§ 5.6. Резонансные кривые двухконтурной системы

Рассмотрим теперь поведение связанных контуров с постоянными параметрами при изменении частоты генератора, включённого в первый контур. Считая амплитуду эдс генератора неизменной, выведем уравнения для I_1 и I_2 в зависимости от частоты генератора. Основной интерес представляет поведение амплитуд токов вблизи резонансных частот системы.

Можно поэтому при определении сопротивлений Z_{11} и Z_{22}, входящих в выражения (5.12′) и (5.13′), исходить из приближённых выражений [см. ф-лу (4.27)]:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &\approx r_{11}(1+\mathrm{i}\,a_1) \\ Z_{22} &\approx r_{22}(1+\mathrm{i}\,a_2) \end{aligned}\right\}, \tag{5.44}$$

где a_1 и a_2 — обобщённые расстройки первого и второго контура порознь. В соответствии с ф-лой (4.25), эти величины определяются как

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(\omega-\omega_{p_1})}{\omega_{p_1}}\,Q_1 = \frac{2(\omega-\omega_{p_1})}{\omega_{p_1}}\,\frac{1}{d_1} \\ a_2 &= \frac{2(\omega-\omega_{p_2})}{\omega_{p_2}}\,Q_2 = \frac{2(\omega-\omega_{p_2})}{\omega_{p_2}}\,\frac{1}{d_2} \end{aligned}\right\}. \tag{5.45}$$

Здесь ω_{p_1}, Q_1 и d_1 — резонансная частота, добротность и затухание первого контура (без учёта влияния второго), ω_{p_2}, Q_2 и d_2 — то же, для второго контура.

Подставив в выражения (5.12′) и (5.13′) Z_{11} и Z_{22} по ф-лам (5.44), получим:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}}{r_{11}}\cdot\frac{1+\mathrm{i}\,a_2}{1-a_1a_2+\dfrac{X_{12}^2}{r_{11}r_{22}}+\mathrm{i}(a_1+a_2)}, \tag{5.46}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{\sqrt{r_{11}r_{22}}}\cdot\frac{\pm\mathrm{i}\dfrac{X_{12}}{\sqrt{r_{11}r_{22}}}}{1-a_1a_2+\dfrac{X_{12}^2}{r_{11}r_{22}}+\mathrm{i}(a_1+a_2)}. \tag{5.47}$$

Входящая в эти выражения дробь $\frac{X_{12}^2}{r_{11}r_{22}}$ в соответствии с ф-лой (5.10) может быть преобразована следующим образом[1])

$$\frac{X_{12}^2}{r_{11}r_{22}} = \frac{X_{12}^2}{\rho_1\rho_2}\,\frac{\rho_1}{r_{11}}\,\frac{\rho_2}{r_{22}} = k^2Q_1Q_2 = \frac{k^2}{d_1d_2}. \tag{5.48}$$

Заметим, кроме того, что в соответствии с ф-лами (5.41) и (5.42), первые множители в правых частях ур-ний (5.46) и (5.47) равны удвоенным амплитудам токов соответственно первого и второго контуров при полном резонансе.

Можно поэтому переписать (5.46) и (5.47) следующим образом:

$$\vec{I}_1 = 2\left|I_{1\,макс}\right|_{X_{12}\,опт}\frac{\sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{(1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2)^2+(a_1+a_2)^2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_{12}-\varphi_2)}, \tag{5.49}$$

$$\vec{I}_2 = 2I_{2\,мм}\frac{k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{(1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2)^2+(a_1+a_2)^2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\varphi_{12}\pm\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{5.50}$$

где

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} a_2, \tag{5.51}$$

$$\varphi_{12} = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_1+a_2}{1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2}. \tag{5.52}$$

Знак плюс перед $\frac{\pi}{2}$ соответствует ёмкостной связи, а знак минус — магнитной.

На основании выражений (5.49) и (5.50) получаем следующие уравнения для резонансных кривых токов I_1 и I_2:

$$n_1 = \frac{I_1}{\left|I_{1\,макс}\right|_{X_{12}\,опт}} = \frac{2\sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{(1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2)^2+(a_1+a_2)^2}}, \tag{5.53}$$

$$n_2 = \frac{I_2}{I_{2\,мм}} = \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{(1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2)^2+(a_1+a_2)^2}}. \tag{5.54}$$

[1]) Это выражение справедливо для частот, близких к резонансным частотам контуров.

Фазовые характеристики для тока I_1 и I_2 определяются выражениями:

$$\varphi_I = \varphi_{12} - \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_1 + a_2}{1 - a_1 a_2 + k^2 Q_1 Q_2} - \operatorname{arc\,tg} a_2, \tag{5.55}$$

$$\varphi_{II} = \varphi_{12} \pm \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_1 + a_2}{1 - a_1 a_2 + k^2 Q_1 Q_2} \pm \frac{\pi}{2}. \tag{5.56}$$

Выражения (5.53)—(5.56) справедливы для любых настроек контуров и для любых соотношений между добротностями контуров. Единственным ограничением является условие относительно малого изменения частоты генератора [см. § 4.3].

Для практики наибольший интерес представляют следующие два частных случая:

1. Контуры полностью одинаковы: $Q_1 = Q_2$; $\omega_{p_1} = \omega_{p_2}$.
2. Одинаковы лишь резонансные частоты $\omega_{p_1} = \omega_{p_2}$. Затухания же различны, причём $Q_2 \ll Q_1$.

Первый случай характерен для двухконтурных систем, используемых в качестве полосовых фильтров в приёмниках. Второй случай характерен для передатчиков, когда первый так называемый промежуточный контур обладает весьма малыми потерями, а второй содержит относительно большое сопротивление нагрузки и обладает низкой добротностью.

Рассмотрим первый случай. Подставляя в ур-ния (5.53)—(5.54) $a_1 = a_2 = a$, $Q_1 = Q_2 = Q = \frac{1}{d}$, получаем:

$$n_1 = \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{(1+k^2Q^2-a^2)^2+4a^2}} = \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{(1+k^2Q^2)^2+2a^2(1-k^2Q^2)+a^4}}, \tag{5.57}$$

$$n_2 = \frac{2kQ}{\sqrt{(1+k^2Q^2)^2+2a^2(1-k^2Q^2)+a^4}}. \tag{5.58}$$

Из этих выражений видно, что форма резонансных кривых сильно зависит от величины произведения kQ.

Рассмотрим сначала поведение n_2. Если $kQ \leqslant 1$, то все слагаемые в подкоренном выражении положительны и с ростом величины расстройки $|a|$, независимо от её знака, знаменатель растёт, а n_2 падает. Таким образом, при $kQ \leqslant 1$ резонансная кривая имеет один максимум при $a = 0$, т. е. при частоте ω, совпадающей с резонансными частотами контуров $\omega_{p_1} = \omega_{p_2} = \omega_p$.

Если $kQ > 1$, то второе слагаемое в подкоренном выражении будет отрицательно (*при любом знаке a*) и с увеличением расстройки $|a|$ знаменатель будет сперва падать, а затем расти.

В соответствии с этим n_2 с увеличением расстройки $|a|$ сперва растёт, а затем убывает. Это означает, что резонансная кривая обладает при $kQ > 1$ двумя максимумами, одним при $a_I > 0$ и вторым при $a_{II} < 0$, т. е. при частотах $\omega_I > \omega_p$ и $\omega_{II} < \omega_p$. При совпадении же частоты генератора ω с резонансными частотами контуров ω_p получается экстремум типа минимума.

Для отыскания значений a_I и a_{II} нужно найти производную подкоренного выражения по a и приравнять её нулю:

$$4a(1-k^2Q^2)+4a^3 = 0 \quad \text{или} \quad a[1-k^2Q^2+a^2] = 0.$$

Корни этого уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} a_I &= +\sqrt{k^2Q^2-1} \\ a_{II} &= -\sqrt{k^2Q^2-1} \\ a_{III} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5.59}$$

Последний корень, как это ясно из предыдущего, соответствует минимуму резонансной кривой, а первые два, существующие только при $kQ > 1$, соответствуют максимумам резонансной кривой.

Величина коэффициента связи, соответствующая условию

$$kQ = 1, \tag{5.60}$$

называется критической. В дальнейшем будем обозначать критический коэффициент через $k_{кр}$. При $k < k_{кр}$ связь называют слабой, при $k > k_{кр}$ — сильной. Итак, при слабой связи резонансная кривая является одногорбой, при сильной связи — двугорбой.

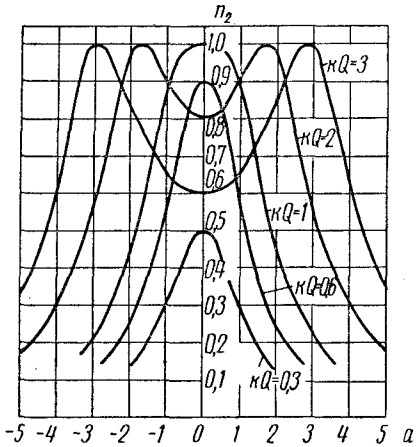


Рис. 5.15

Семейство кривых $n_2(a)$ для различных значений параметра kQ построено на рис. 5.15.

В точке $a = 0$ ордината резонансной кривой для тока I_2 определяется выражением

$$n_2(0) = \frac{2kQ}{1+k^2Q^2}. \tag{5.61}$$

С увеличением kQ глубина седловины в резонансной кривой растёт.

Обратимся теперь к резонансной кривой для тока I_1. Из выражения (5.57) следует, что образование седловины в кривых $n_1(a)$ наступает при величинах kQ, меньших, чем это вытекает из условия (5.60). Для отыскания величин расстроек a_I и a_{II}, соответствующих экстремумам кривой $n_1(a)$, в данном случае нужно исходить из выражения

$$\frac{dn_1(a)}{da} = \frac{d}{da}\left[\frac{2\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{(1+k^2Q^2)^2+2a^2(1-k^2Q^2)+a^4}}\right] = 0.$$

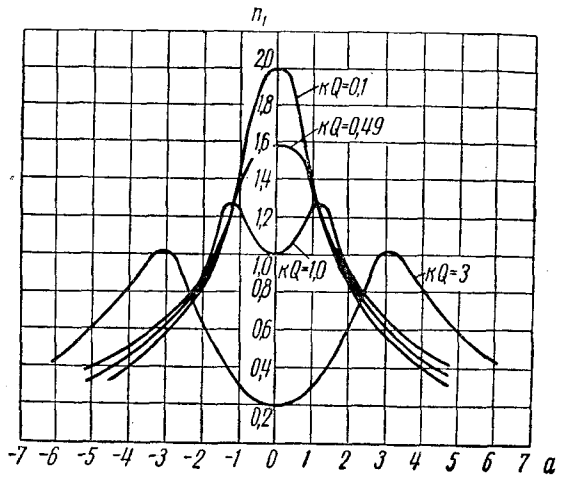


Рис. 5.16

Выполнив дифференцирование и приравняв числитель дроби нулю, получим следующее уравнение

$$a[a^4+2a^2+2(1-k^2Q^2)-(1+k^2Q^2)^2]=0. \qquad (5.62)$$

Корни этого уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_I &= 0,\\ a_{II;III} &= \pm\sqrt{-1+\sqrt{1-2(1-k^2Q^2)+(1+k^2Q^2)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (5.63)$$

Мнимые корни $a_{IV,V}$ отброшены как не имеющие физического смысла.

Корни $a_{II;III}$ существуют только при условии

$$-1+\sqrt{1-2(1-k^2Q^2)+(1+k^2Q^2)^2} \geqslant 0.$$

Это условие и определяет возникновение седловины в резонансной кривой $n_1(a)$. Нетрудно показать, что критическое значение связи определяется из условия

$$k_{кр}Q = 0{,}49.$$

Семейство кривых $n_1(a)$ при различных значениях параметра kQ построено на рис. 5.16.

На рис. 5.17 и 5.18 изображены фазовые характеристики для токов $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ в случае идентичных контуров, построенные по уравнениям:

$$\varphi_I = \operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2+k^2Q^2} - \operatorname{arc\,tg} a, \qquad (5.55')$$

$$\varphi_{II} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2+k^2Q^2} \pm \pm\frac{\pi}{2}. \qquad (5.56')$$

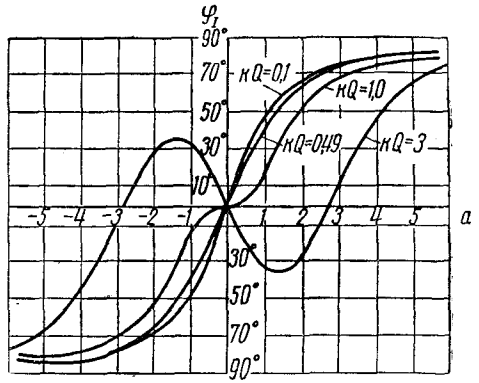


Рис. 5.17

На рис. 5.18 по оси ординат отложена величина φ'_{II}, отличающаяся от φ_{II} на угол $\pm\frac{\pi}{2}$. При индуктивной связи для получения φ_{II} кривую φ'_{II} нужно сдвинуть вниз на $\frac{\pi}{2}$, при ёмкостной — поднять на такую же величину вверх. Напомним, что в исходные выражения для $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ фазовые углы φ_I и φ_{II} входят со знаком минус [см. ф-лы (5.49) и (5.50)].

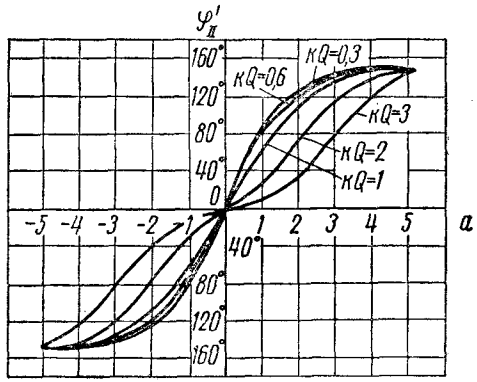


Рис. 5.18

Обратимся теперь к исследованию условия образования седловины в резонансных кривых в случае контуров с неодинаковыми добротностями. Подставляя в выражения (5.53) и (5.54)

$$a_1 = \frac{2(\omega-\omega_{p_1})}{\omega_{p_1}}Q_1 = \varepsilon_1 Q_1,$$

$$a_2 = \frac{2(\omega-\omega_{p_2})}{\omega_{p_2}}Q_2 = \varepsilon_2 Q_2,$$

и учитывая, что резонансные частоты совпадают, т. е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, получим

$$n_1 = \frac{I_1}{\left|I_{1\,макс}\right|_{x_{12\,опт}}} = \frac{2\sqrt{1+\varepsilon^2 Q_2^2}}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 Q_1 Q_2 + k^2 Q_1 Q_2)^2 + \varepsilon^2 (Q_1+Q_2)^2}},$$

$$n_2 = \frac{I_2}{I_{2\,мм}} = \frac{2k\sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 Q_1 Q_2 + k^2 Q_1 Q_2)^2 + \varepsilon^2 (Q_1+Q_2)^2}}.$$

Находя $\frac{dn_1}{d\varepsilon}$ и $\frac{dn_2}{d\varepsilon}$ и приравнивая производные нулю, можем найти значения относительной расстройки ε, при которых $n_1(\varepsilon)$ и $n_2(\varepsilon)$ обладают экстремумами. Опуская промежуточные выкладки, приведём окончательные результаты. Для резонансной кривой $n_2(\varepsilon)$ условие образования седловины имеет вид

$$k > \sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2}}. \tag{5.64}$$

Таким образом, критический коэффициент связи

$$k_{кр} = \sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2}}. \tag{5.65}$$

При этом максимумы резонансной кривой получаются при относительных расстройках

$$\varepsilon = \pm\sqrt{k^2 - \frac{d_1^2+d_2^2}{2}}. \tag{5.66}$$

В тех случаях, когда $d_2 \gg d_1$, получаем соответственно

$$k_{кр} \approx \frac{d_2}{\sqrt{2}}, \tag{5.64'}$$

$$\varepsilon \approx \pm\sqrt{k^2 - \frac{d_2^2}{2}}. \tag{5.65'}$$

Заметим, что в случае неточной настройки контуров, т. е. когда $\omega_{p_1} \neq \omega_{p_2}$, резонансные кривые могут иметь двугорбую форму даже при слабой связи. При этом кривые получаются несимметричными: один из горбов выше другого.

В практике часто важно знать отношение амплитуды напряжения на реактивных элементах второго контура к напряжению, вводимому в первый контур. Это отношение определяется коэффициентом передачи (например, при съёме напряжения с ёмкости второго контура)

$$K(i\omega) = \frac{\dfrac{\vec{I}_2}{i\omega C_2}}{\vec{E}}.$$

Учитывая выражение (5.47) и приравнивая $a_1 = a_2$ (одинаковые контуры), получим

$$K(i\omega) = \frac{1}{\omega C r}\,\frac{\pm kQ}{(1+ia)^2 + k^2 Q^2}.$$

Знак плюс при магнитной связи контуров, знак минус при ёмкостной. Так как при малых расстройках можно считать

$$\frac{1}{\omega C r} \approx \frac{1}{\omega_p C r} = Q,$$

то окончательно

$$K(i\omega) = \pm Q\,\frac{kQ}{[1+i(\omega-\omega_p)\tau]^2 + k^2 Q^2}. \tag{5.67}$$

При критической связи ($kQ = 1$) будем иметь

$$K(i\omega) = \pm\frac{Q}{1+[1+i(\omega+\omega_p)\tau]^2} = \pm|K(i\omega)|e^{-i\varphi(\omega)}. \tag{5.68}$$

Модуль и фаза коэффициента передачи определяются выражениями[1]:

$$\left.\begin{aligned} |K(i\omega)| &= \frac{Q}{\sqrt{[2-(\omega-\omega_p)^2\tau^2]^2 + 4(\omega-\omega_p)^2\tau^2}} \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arc\,tg}\frac{2(\omega-\omega_p)\tau}{2-(\omega-\omega_p)^2\tau^2} \end{aligned}\right\}. \tag{5.68'}$$

§ 5.7. Полоса пропускания двухконтурной системы

Считая резонансные частоты контуров одинаковыми, определим „полосу пропускания" двухконтурной системы как полосу частот, на границах которой амплитуда тока I_2 снижается до $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимальной амплитуды. Так как величина максимальной амплитуды зависит от величины kQ, то необходимо отдельно рассмотреть случаи слабой, критической и сильной связи.

При слабой связи ($kQ < 1$) максимум амплитуды I_2 получается при $a = 0$, причём величина $n_2(0)$ в соответствии с ф-лой (5.61) равна

$$n_2(0) = \frac{2kQ}{1+k^2Q^2}.$$

[1] Следует иметь в виду, что при таком определении фазы, в выражении для $K(i\omega)$ перед $\varphi(\omega)$ должен быть поставлен знак минус.

Для определения обобщённой расстройки $|a_0|$ на границах полосы пропускания можно воспользоваться выражением (5.58), приравняв в нём правую часть величине

$$\frac{n_2(0)}{\sqrt{2}}=\frac{2kQ}{\sqrt{2}(1+k^2Q^2)}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{2kQ}{\sqrt{2}(1+k^2Q^2)}=\frac{2kQ}{\sqrt{(1+k^2Q^2)^2+2a_0^2(1-k^2Q^2)+a_0^4}}. \tag{5.69}$$

Решив это уравнение относительно a_0, получим

$$|a_0|=\sqrt{k^2Q^2-1+\sqrt{2(1+k^4Q^4)}}. \tag{5.70}$$

Для перехода к полосе пропускания, выраженной в частотах, можно пользоваться соотношением

$$|a_0|=\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}Q,$$

откуда относительная полоса пропускания

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}=\frac{|a_0|}{Q}=|a_0|\,d \tag{5.71}$$

и сама полоса пропускания

$$\omega_1-\omega_2=2\Delta\omega_0=\frac{|a_0|\cdot\omega_p}{Q}=|a_0|\,\omega_p d. \tag{5.72}$$

При очень слабой связи, т. е. когда $kQ\ll 1$, выражение (5.70) можно заменить приближённым равенством

$$|a_0|\approx\sqrt{-1+\sqrt{2}}=\sqrt{0{,}41}=0{,}64.$$

Заметим, что для одиночного контура обобщённая расстройка на границах полосы пропускания равна единице (по абсолютной величине). Отсюда видно, что при очень слабой связи двух контуров полоса пропускания системы составляет приблизительно 0,64 от полосы пропускания каждого из контуров порознь.

При критической связи ($kQ=1$) и двух одинаковых контурах условие (5.69) для определения $|a_0|$ принимает следующую простую форму

$$|a_0|=\sqrt{2}. \tag{5.73}$$

Отсюда относительная полоса пропускания

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}=\frac{|a_0|}{Q}=|a_0|\,d=\sqrt{2}\,d. \tag{5.74}$$

Таким образом, при критической связи полоса пропускания системы в $\sqrt{2}$ раз больше, чем полоса каждого контура порознь [см. ф-лы (4.35) для полосы одиночного контура].

Остановимся, наконец, на случае сильной связи контуров, когда $kQ>1$. Определение полосы пропускания с помощью условия (5.70) не имеет в данном случае смысла, так как значение n_2 при резонансе не максимальное. Ясно, что значение $n_2(0)$ должно быть не меньше, чем на границах полосы, т. е. $n_2(0)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. Вид резонансной кривой при $n_2(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ показан на рис. 5.19.

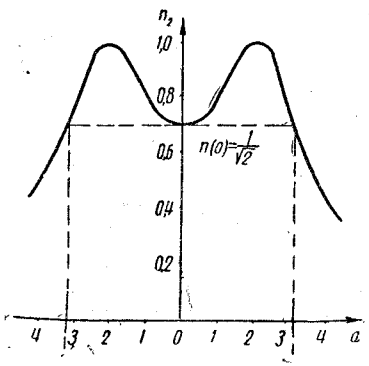


Рис. 5.19

Этому случаю соответствует, в согласии с ф-лой (5.61), $kQ=2{,}41$. Для $1<kQ<2{,}41$ полосу пропускания нужно определять с помощью других выражений, получаемых из условия

$$\frac{n_2|a_1|}{\sqrt{2}}=\frac{2kQ}{\sqrt{(1+k^2Q^2)^2+2a_0^2(1-k^2Q^2)+a_0^4}}.$$

При очень сильной связи, соответствующей рис. 5.19, получается $|a_0|\approx 3{,}1$, т. е. полоса системы в 3,1 раза шире, чем полоса каждого из контуров порознь.

Иногда сильная связь применяется для создания искусственного подъёма частотной характеристики радиолинии в области высоких частот модуляции. В подобных случаях важно знать расположение максимумов резонансной кривой n_2 на оси частот. Этот вопрос может быть решён с помощью выражений (5.59), определяющих обобщённые расстройки $a_{\rm I}$ и $a_{\rm II}$, при которых n_2 проходит через свои максимумы. Переходя к частотам, получим:

$$a_{\rm I}=\frac{2(\omega_{\rm I}-\omega_p)}{\omega_p}Q=+\sqrt{k^2Q^2-1},$$

$$a_{\rm II}=\frac{2(\omega_{\rm II}-\omega_p)}{\omega_p}Q=-\sqrt{k^2Q^2-1},$$

где $\omega_{\rm I}>\omega_p$ и $\omega_{\rm II}<\omega_p$ — искомые частоты.

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\rm I}&=\omega_p\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-d^2}\right)\\ \omega_{\rm II}&=\omega_p\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-d^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

При очень сильной связи ($k \gg d$) можно пользоваться приближёнными формулами:

$$\omega_{\text{I}} \approx \omega_p \left(1 + \frac{k}{2}\right),$$

$$\omega_{\text{II}} \approx \omega_p \left(1 - \frac{k}{2}\right). \qquad (5.75)$$

При использовании связанных систем в качестве полосовых фильтров обычно исходят из критической связи, при которой резонансная кривая имеет форму, наиболее благоприятную для равномерного пропускания частот в пределах полосы $2a_0$ и резкого ослабления частот вне этой полосы. Это видно из рис. 5.20, на котором совмещены для сравнения резонансные кривые для одиночного контура (пунктирная кривая) и для двухконтурной схемы (при критической связи) при одной и той же полосе пропускания $\left(\text{по ослаблению } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

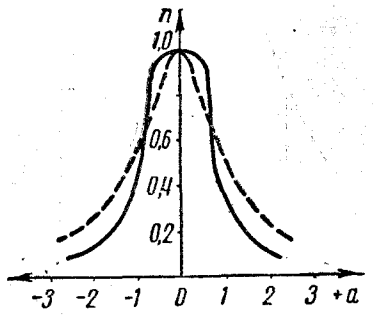


Рис. 5.20

Таким образом, двухконтурная связанная система обладает бóльшей избирательностью, чем одиночный контур.

§ 5.8. Параллельное подключение генератора к двухконтурной системе

Рассмотрим схему рис. 5.21, где генератор E с внутренним сопротивлением $R_{i\text{э}}$ соответствует анодной цепи электронной лампы усилителя, а Z_1 и Z_1'—ветви параллельного колебательного контура. Для определения полосы пропускания подобной двухконтурной системы можно воспользоваться выражением (5.54), если при определении добротности первого контура учитывать шунтирующее действие $R_{i\text{э}}$, как это было сделано в § 4.6 [см. ф-лу (4.79)]. Для определения резонансного сопротивления первого контура между точками a—k (рис. 5.21) можно исходить из ф-л (4.57), (4.61) и других аналогичных формул, приведённых в гл. 4, при условии добавления к собственному сопротивлению потерь r_{11} величины

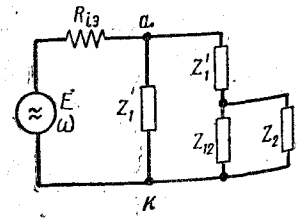


Рис. 5.21

сопротивления $r_{вн}$, вносимого из второго контура. При этом несущественно, в какую ветвь контура — индуктивную или ёмкостную — включён элемент связи Z_{12}. Таким образом, сопротивление первого контура между точками a—k при резонансе можно определять с помощью формулы

$$Z_{\text{э}.p} = \frac{p^2\rho^2}{r_{11} + r_{вн}}. \qquad (5.77)$$

Интересно выяснить частотную зависимость для $z_{\text{э}}$ в случае сильной связи между контурами, когда резонансная кривая двухконтурной системы имеет два максимума. Особенно большое практическое значение имеет определение величины $z_{\text{э}}$ при частотах связи ω_{I} и ω_{II}, определяемых выражениями (5.25). Так как при указанных частотах первый контур работает в режиме резонанса токов, то можем написать:

$$\left.\begin{aligned} Z_{\text{э}.p}(\omega_{\text{I}}) &= \frac{\rho}{r_{11} + r_{вн}(\omega_{\text{I}})} \\ Z_{\text{э}.p}(\omega_{\text{II}}) &= \frac{\rho}{r_{11} + r_{вн}(\omega_{\text{II}})} \end{aligned}\right\}. \qquad (5.77)$$

Эти соотношения не являются вполне точными, так как при частотах ω_{I} и ω_{II}, несколько отличающихся от резонансной частоты второго контура, в первый контур вносится небольшое реактивное сопротивление, которое влияет на величину эквивалентного волнового сопротивления ρ. Пренебрегая этим изменением, можем в соответствии с ф-лой (5.17) и вторым ур-нием (5.44) написать:

$$r_{вн}(\omega_{\text{I}}) = \frac{X_{12}^2 r_{22}}{[z_{22}(\omega_{\text{I}})]^2} \approx \frac{X_{12}^2 r_{22}}{r_{22}^2[1 + a_2^2(\omega_{\text{I}})]} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}[1 + a_2^2(\omega_{\text{I}})]}, \qquad (5.78)$$

$$r_{вн}(\omega_{\text{II}}) = \frac{X_{12}^2 \cdot r_{22}}{[z_{22}(\omega_{\text{II}})]^2} \approx \frac{X_{12}^2 \cdot r_{22}}{r_{22}^2[1 + a_2^2(\omega_{\text{II}})]} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}[1 + a_2^2(\omega_{\text{II}})]}. \qquad (5.78')$$

Небольшой разницей в значениях X_{12} для ω_{I} и ω_{II} также пренебрегаем. Основное влияние на $r_{вн}$ и, следовательно, на $Z_{\text{э}.p}$ оказывает величина обобщённой расстройки второго контура, определяемая следующими очевидными выражениями:

$$\left.\begin{aligned} a_2(\omega_{\text{I}}) &= \frac{2(\omega_{\text{I}} - \omega_{p2})}{\omega_{p2}} Q_2 \\ a_2(\omega_{\text{II}}) &= \frac{2(\omega_{\text{II}} - \omega_{p2})}{\omega_{p2}} Q_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.79)$$

Отсюда видно, что соотношение между $a_2(\omega_{\text{I}})$ и $a_2(\omega_{\text{II}})$, а следовательно, и соотношение между $Z_{\text{э}.p}(\omega_{\text{I}})$ и $Z_{\text{э}.p}(\omega_{\text{II}})$ зависят от настройки второго контура относительно первого, т. е. от соотношения между частотами ω_{p2} и ω_{p1}.

Рассмотрим два возможных случая: $\omega_{p2}>\omega_{p1}$ и $\omega_{p2}<\omega_{p1}$.

Если $\omega_{p2}>\omega_{p1}$, то положение частот ω_{p1}, ω_{p2}, а также ω_{I} и ω_{II} на частотной шкале будет соответствовать рис. 5.13*а*. Нетрудно заключить, что в рассматриваемом случае абсолютная величина расстройки $\omega_{\text{II}}-\omega_{p2}$ больше, чем расстройка $\omega_{\text{I}}-\omega_{p2}$:

$$|\omega_{\text{II}}-\omega_{p2}|>\omega_{\text{I}}-\omega_{p2}.$$

Следовательно,

$$a_2(\omega_{\text{II}})>a_2(\omega_{\text{I}})$$

и

$$r_{вн}(\omega_{\text{II}})<r_{вн}(\omega_{\text{I}}).$$

Обращаясь к ф-лам (5.77), убеждаемся, что при настройке второго контура на частоту более высокую, чем частота первого контура, резонансное сопротивление $Z_{э.р}(\omega_{\text{II}})$ будет больше, чем

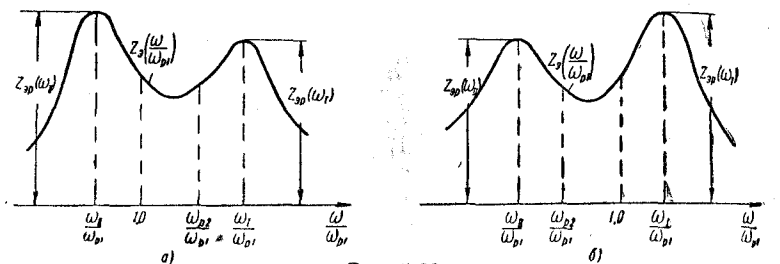


Рис. 5.22

$Z_{э.р}(\omega_{\text{I}})$. Этот случай показан на рис. 5.22*а*, на котором представлен график частотной зависимости модуля сопротивления первого контура при $\omega_{p2}>\omega_{p1}$.

При настройке второго контура на частоту $\omega_{p2}<\omega_{p1}$, в соответствии с рис. 5.13*б* можем считать

$$|\omega_{\text{II}}-\omega_{p2}|<\omega_{\text{I}}-\omega_{p2}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, придём к выводу, что в этом случае

$$a_2(\omega_{\text{II}})<a_2(\omega_{\text{I}}),$$

$$r_{вн}(\omega_{\text{II}})>r_{вн}(\omega_{\text{I}})$$

и, следовательно,

$$Z_{э.р}(\omega_{\text{II}})<Z_{э.р}(\omega_{\text{I}}).$$

Этот случай изображён графически на рис. 5.22*б*.

При сильной связи разница в величинах резонансных сопротивлений на быстрой и медленной частотах связи может быть весьма значительной. Это обстоятельство может оказывать существенное влияние на свойства усилительных и генераторных устройств, в которых в качестве нагрузки используется двухконтурная схема. Этот вопрос будет рассмотрен в § 12.7.

Пример 5.1. Определим $Z_{э.р}$ и полосу пропускания для схемы рис. 5.23 при следующих данных:

1. Резонансные частоты контуров $f_{p1}=f_{p2}=10^6$ *гц*.
2. Характеристики контуров $\rho_1=\rho_2=300$ *ом*.
3. Сопротивления $r_1=r_2=5$ *ом*.
4. Связь между контурами критическая.
5. $R_{iэ}=2\cdot10^5$ *ом*.

Так как при одинаковой настройке контуров и критической связи (полный резонанс) второй контур вносит в первый сопротивление $r_{вн}=r_1$ (см. § 5.4), то по ф-ле (5.76) находим ($p=1$)

$$Z_{э.р}=\frac{\rho^2}{2r_1}=\frac{(300)^2}{2\cdot5}=9000\ ом.$$

Отношение $\frac{Z_{э.р}}{R_{iэ}}=0{,}045$ в данном случае настолько мало, что шунтирующим действием лампы можно пренебречь [см. ф-лу (4.79)]. Поэтому полоса пропускания, в соответствии с ф-лой (5.74), равна

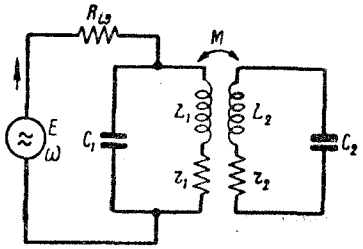


Рис. 5.23

$$2\Delta f_0=\sqrt{2}\,d\cdot f_p=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{5}{300}\cdot10^6=23{,}5\ кгц.$$

Пример 5.2. Определить резонансное сопротивление параллельного контура для схемы рис. 5.24 при следующих данных:

1. Резонансные частоты контуров $f_{p1}=f_{p2}=f_p=3\cdot10^5$ *гц*.
2. $L_1=200$ *мкгн*, $L_1'=50$ *мкгн*, $r_1=3$ *ом*.
3. $L_2=200$ *мкгн*, $r_2=20$ *ом*.
4. Связь между контурами критическая.

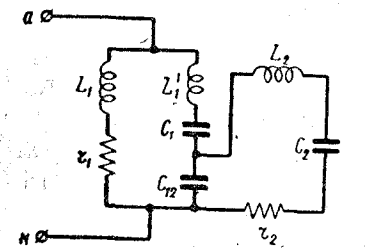


Рис. 5.24

Находим характеристики и затухания контуров

$$\rho_1=\omega_p(L_1+L_1')=2\pi\cdot3\cdot10^5\cdot250\cdot10^{-6}\approx450\ ом;$$

$$\rho_2=\omega_pL_2=2\pi\cdot3\cdot10^5\cdot200\cdot10^{-6}\approx377\ ом;$$

$$d_1=\frac{r_1}{\rho_1}=\frac{3}{450}=0{,}007;$$

$$d_2=\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{20}{377}=0{,}054.$$

Определяем коэффициент связи (критический) по ф-ле (5.65)

$$k=\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2}}\approx\frac{d_2}{\sqrt{2}}=\frac{0{,}054}{\sqrt{2}}=0{,}038=3{,}8\%.$$

Результирующие ёмкости контуров:

$$C_{11} = \frac{1}{\omega_p \rho_1} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 450} = 1000 \text{ см},$$

$$C_{22} = \frac{1}{\omega_p \rho_2} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 377} \approx 1260 \text{ см}.$$

Применяя ф-лу (5.7), находим ёмкость связи

$$C_{12} = \frac{\sqrt{C_{11} C_{22}}}{k} \approx 30\,000 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{C_{11} C_{12}}{C_{12} - C_{11}} \approx 1040 \text{ см},$$

$$C_2 = \frac{C_{22} C_{12}}{C_{12} - C_{22}} \approx 1320 \text{ см}.$$

Сопротивление связи

$$X_{12} = \frac{1}{\omega_p C_{12}} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^4} = 15 \text{ ом}.$$

Сопротивление (активное), вносимое в первый контур,

$$r_{вн} = \frac{X_{12}^2}{r_{22}} = \frac{(15)^2}{20} = 11{,}2 \text{ ом}.$$

Коэффициент анодной связи

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_1'} = \frac{200}{250} = 0{,}8.$$

Искомое сопротивление контура

$$Z_{э.р} = \frac{p^2 \rho_1^2}{r_1 + r_{вн}} = (0{,}8)^2 \cdot \frac{(450)^2}{3 + 11{,}2} \approx 9100 \text{ ом}.$$

Коэффициент полезного действия промежуточного контура

$$\eta = \frac{r_{вн}}{r_1 + r_{вн}} = \frac{11{,}2}{14{,}2} \approx 0{,}8.$$

Пример 5.3. Пусть двухконтурная схема, изображённая на рис. 5.25, подключена к генератору импульсного тока, в составе которого, кроме постоянной слагающей, содержатся гармоники с частотами ω_1, ω_2, ω_3 и т. д., с амплитудами соответственно I_1, I_2, I_3 и т. д. Колебательная система настроена на частоту первой гармоники ω_1.

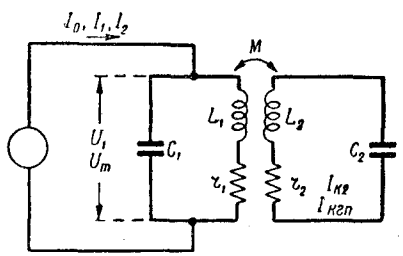


Рис. 5.25

Требуется определить степень фильтрации высших гармоник колебательной системой.

Под степенью фильтрации будем подразумевать величину

$$\Phi = \frac{I_n}{I_1} : \frac{I_{k2n}}{I_{k2}},$$

где I_{k2} — амплитуда тока основной частоты во втором контуре, а I_{k2n} — то же, для n-й гармоники.

Найдём эти амплитуды. При обозначениях рис. 5.25, для тока I_{k2} имеем очевидные соотношения:

$$I_{k2} = \frac{\frac{M}{L_1} U_1}{r_2} = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\rho_1^2}{(r_1 + r_{вн})} I_1. \qquad (5.81)$$

Переходя к определению тока I_{k2n}, отметим, что вторая и более высокие гармоники тока генератора замыкаются, в основном, через ёмкостную ветвь первого контура. Поэтому амплитуда напряжения n-й гармоники на первом контуре

$$U_{1n} \approx I_n \frac{1}{n\omega_1 C_1}.$$

Следовательно, во второй контур на n-й гармонике вводится напряжение

$$\frac{M}{L_1} U_{1n} = \frac{M}{L_1} \frac{\rho_1}{n} I_n.$$

Так как второй контур сильно расстроен по отношению к n-й гармонике, то при определении полного сопротивления второго контура активным сопротивлением можно пренебречь. Таким образом,

$$I_{k2n} = \frac{\frac{M}{L_1} \frac{\rho_1}{n} I_n}{n\omega_1 L_2 - \frac{1}{n\omega_1 C_2}} = \frac{\frac{M}{L_1} \frac{\rho_1}{n} I_n}{n\rho_2 - \frac{1}{n}\rho_2} = \frac{\frac{M}{L_1} \rho_1 I_n}{(n^2 - 1)\rho_2}. \qquad (5.82)$$

Разделив (5.82) на (5.81), находим

$$\frac{I_{k2n}}{I_{k2}} = \frac{\frac{M}{L_1} \rho_1 I_n}{(n^2-1)\rho_2} \cdot \frac{r_2 (r_1 + r_{вн})}{\frac{M}{L_1} \rho_1^2 I_1} = \frac{r_2 (r_1 + r_{вн})}{\rho_1 \rho_2 (n^2 - 1)} \cdot \frac{I_n}{I_1} = \frac{d_2 d_{1э}}{(n^2 - 1)} \cdot \frac{I_n}{I_1}.$$

Подставив это выражение в (5.80), получаем

$$\Phi = \frac{(n^2 - 1)}{d_2 d_{1э}} = (n^2 - 1) Q_{1э} Q_2. \qquad (5.83)$$

Отсюда видно, что фильтрация Ф пропорциональна добротностям контуров и растёт с повышением порядка гармоники. Отметим, что в формулу для Ф входит добротность нагруженного первого контура.

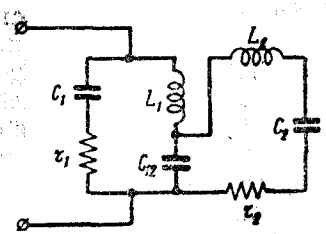


Рис. 5.26

При применении ёмкостной связи по схеме рис. 5.26 фильтрация в n^2 раз выше, чем по схеме рис. 5.25. Самой невыгодной, с точки зрения фильтрации высших гармоник, является схема, в которой применяется индуктивная связь из ёмкостной ветви.

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 6.1. Определение токов и напряжений в сложной цепи

Рассмотрим сложную линейную систему, составленную из произвольного числа контуров с сосредоточенными постоянными и находящуюся под действием гармонических электродвижущих сил с частотой ω.

В общем случае каждый i-й контур, помимо элементов L_i, C_i и r_i, входящих только в данный контур, может содержать элементы L_{ik}, C_{ik} и r_{ik}, общие для двух контуров i и k (рис. 6.1).

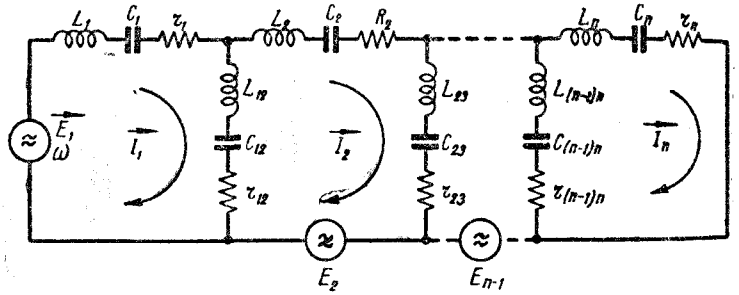


Рис. 6.1

Индуктивность L_{ik}, ёмкость C_{ik} и сопротивление r_{ik} представляют собой, следовательно, элементы связи контура i с контуром k.

Результирующие величины индуктивности, ёмкости и сопротивления, получаемые при обходе i-го контура и при условии, что все остальные контуры разорваны, обозначим через L_{ii}, C_{ii} и r_{ii}. Комплексное сопротивление подобного контура (при частоте ω) определяется выражением

$$Z_{ii} = L_{ii}\,\mathrm{i}\,\omega + r_{ii} + \frac{1}{C_{ii}}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}. \qquad (6.1)$$

Полное сопротивление связи для контуров i и k, очевидно, равно

$$Z_{ik} = L_{ik}\,\mathrm{i}\,\omega + r_{ik} + \frac{1}{C_{ik}}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}. \qquad (6.2)$$

При наличии взаимоиндукции между контурами i и k правая часть выражения (6.2) должна быть дополнена слагаемым $\pm M_{ik}\cdot \mathrm{i}\,\omega$.

Обходя каждый из контуров и применяя закон Кирхгофа для напряжений, получаем следующую систему из n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}\vec{I}_1 + Z_{12}\vec{I}_2 + \ldots + Z_{1n}\vec{I}_n &= \vec{E}_1 \\ Z_{21}\vec{I}_1 + Z_{22}\vec{I}_2 + \ldots + Z_{2n}\vec{I}_n &= \vec{E}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ Z_{n1}\vec{I}_1 + Z_{n2}\vec{I}_2 + \ldots + Z_{nn}\vec{I}_n &= \vec{E}_n \end{aligned}\right\}; \qquad (6.3)$$

где $\vec{I}_i$ и $\vec{E}_i$ — комплексные амплитуды тока и эдс в контуре i, n — число контуров.

Число неизвестных (токов) в этой системе равно n. За положительное направление контурных токов $\vec{I}_i$ принимается какое-либо определённое, например, совпадающее с направлением вращения часовой стрелки. Сопротивления Z_{ik} берутся со знаком плюс, если по ним проходят токи, совпадающие по направлению с основным током $\vec{I}_i$ данного i-го контура, и минус — в противном случае.

Определение токов $\vec{I}_i$ по известным сопротивлениям и при заданной электродвижущей силе E_i в общем виде удобнее всего производить с помощью матричной алгебры. Системе ур-ний (6.3) соответствует определитель, составленный из коэффициентов Z_{ik}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \ldots & Z_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6.4)$$

Имея в виду определение тока $\vec{I}_j$ в контуре j, умножим первое уравнение в системе (6.3) на алгебраическое дополнение A_{1j} к элементу Z_{1j} в определителе (6.4), второе уравнение — на дополнение A_{2j} к элементу Z_{2j} и т. д. Суммируя левые и правые части полученных таким образом уравнений, запишем

$$\begin{aligned} &(Z_{11}A_{1j} + Z_{21}A_{2j} + \ldots + Z_{n1}A_{nj})\vec{I}_1 + (Z_{12}A_{1j} + Z_{22}A_{2j} + \ldots \\ &\ldots + Z_{n2}A_{nj})\vec{I}_2 + \ldots + (Z_{1j}A_{1j} + Z_{2j}A_{2j} + \ldots + Z_{nj}A_{nj})\vec{I}_j + \\ &\ldots + (Z_{1n}A_{1j} + Z_{2n}A_{2j} + \ldots + Z_{nn}A_{nj})\vec{I}_n = \\ &= \vec{E}_1 A_{1j} + \vec{E}_2 A_{2j} + \ldots + \vec{E}_n A_{nj}. \end{aligned} \qquad (6.5)$$

В теории определителей доказывается[1]), что суммы, являющиеся коэффициентами при $\vec{I}_j$ в ур-нии (6.5) и составленные из слагаемых вида $Z_{km}A_{kj}$, обращаются в нуль при $m \neq j$. Следовательно, выражение (6.5) принимает более простой вид:

$$(Z_{1j}A_{1j}+Z_{2j}A_{2j}+\ldots+Z_{nj}A_{nj})\,\vec{I}_j=\vec{E}_1A_{1j}+\vec{E}_2A_{2j}+\ldots+\vec{E}_nA_{nj}. \quad (6.5')$$

Коэффициент при $\vec{I}_j$, представляющий собой разложение определителя по j-му столбцу, равен самому определителю Δ, т. е.

$$\Delta\vec{I}_j=\vec{E}_1A_{1j}+\vec{E}_2A_{2j}+\ldots+\vec{E}_nA_{nj}. \quad (6.6)$$

Таким образом, правая часть выражения (6.6) отличается от коэффициента при $\vec{I}_j$ в выражении (6.5′) тем, что все Z_{1j}, Z_{2j}... и т. д. заменены соответственно на $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ... Иначе говоря, правая часть выражения (6.6) отличается от Δ тем, что разложение ведётся по j-му столбцу определителя, получаемого из определителя Δ заменой столбца Z_{1j}, Z_{2j}... на столбец $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$... и т. д. Обозначив этот определитель через Δ_j, получим для него следующую запись:

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} Z_{11}\,Z_{12}\ldots Z_{1(j-1)}\,\vec{E}_1\,Z_{1(j+1)}\ldots Z_{1n}\\ Z_{21}\,Z_{22}\ldots Z_{2(j-1)}\,\vec{E}_2\,Z_{2(j+1)}\ldots Z_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Z_{n1}\,Z_{n2}\ldots Z_{n(j-1)}\,\vec{E}_n\,Z_{n(j+1)}\ldots Z_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{E}_1A_{1j}+\vec{E}_2A_{2j}+\ldots+\vec{E}_nA_{nj}. \quad (6.7)$$

На основании выражений (6.6) и (6.7) получаем

$$\vec{I}_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\vec{E}_\nu A_{\nu j}}{\Delta}. \quad (6.8)$$

В случае, если система возбуждается только со стороны первого контура, т. е. $\vec{E}_1\neq 0$, а $\vec{E}_2=\vec{E}_3=\ldots=\vec{E}_n=0$, то в правой части ур-ния (6.6) остаётся только одно слагаемое $\vec{E}_1A_{1j}$ и выражение (6.8) упрощается

$$\vec{I}_j=\frac{\vec{E}_1A_{1j}}{\Delta}. \quad (6.8')$$

[1]) А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. ОГИЗ, 1949, стр. 80.

В матричной алгебре доказывается, что алгебраическое дополнение A_{kj} к элементу Z_{kj}, стоящему на пересечении k-й строки и j-го столбца, равно минору M_{kj} элемента Z_{kj} в определителе Δ, причём для чётного $k+j$ знак минора сохраняется, а для нечётного $k+j$ знак меняется. Таким образом,

$$A_{kj}=(-1)^{k+j}M_{kj}.$$

Минор, в свою очередь, получается из определителя Δ вычёркиванием строки k и столбца j, на пересечении которых стоит элемент Z_{kj}. Выражение (6.8) поэтому может быть записано в несколько иной форме

$$\vec{I}_j=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu+j}M_{\nu j}\cdot\vec{E}_\nu}{\Delta}. \quad (6.9)$$

Это выражение, устанавливающее связь между токами и напряжениями в произвольной линейной системе с сосредоточенными

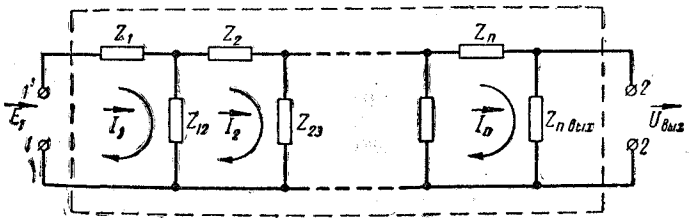


Рис. 6.2

постоянными, может быть положено в основу анализа свойств линейных пассивных двухполюсников и четырёхполюсников.

Допустим, что в схеме, содержащей любое число контуров, выделены два зажима, к которым подводится вынуждающая эдс $\vec{E}_1$, и два зажима, с которых снимается выходное напряжение $\vec{U}_{вых}$. Для наглядности рассуждений на рис. 6.2 изображена каскадная (цепная) схема, хотя в общем случае контуры могут быть между собой связаны самым различным образом.

Для определения тока $\overrightarrow{I_1}$ в ур-ние (6.9) нужно подставить $j=1$. Так как в системе имеется всего лишь одна эдс, вводимая в первый контур, то $\nu=1$. Следовательно,

$$\overrightarrow{I_1}=\frac{M_{11}}{\Delta}\overrightarrow{E_1}. \tag{6.9'}$$

Подставляя в (6.9) $j=n$, находим выражение для тока в n-м (в данном случае выходном) контуре

$$\overrightarrow{I_n}=(-1)^{1+n}\frac{M_{1n}}{\Delta}\overrightarrow{E_1}. \tag{6.9''}$$

Из выражения (6.9') видно, что входная проводимость четырёхполюсника равна

$$Y_{вх}=\frac{\overrightarrow{I_1}}{\overrightarrow{E_1}}=\frac{M_{11}}{\Delta}, \tag{6.10}$$

а входное сопротивление соответственно

$$Z_{вх}=\frac{1}{Y_{вх}}=\frac{\Delta}{M_{11}}. \tag{6.10'}$$

По аналогии величину

$$Y_{n1}=\frac{\overrightarrow{I_n}}{\overrightarrow{E_1}}=(-1)^{1+n}\frac{M_{1n}}{\Delta} \tag{6.11}$$

можно рассматривать как взаимную проводимость четырёхполюсника, связывающую ток на выходе $\overrightarrow{I_n}$ с напряжением на входе $\overrightarrow{E_1}$.

Входящий в выражения (6.9) — (6.11) определитель Δ находится по ф-ле (6.4), минор M_{11} получается из Δ вычёркиванием первой строки и первого столбца, а минор M_{1n} вычёркиванием первой строки и n-го столбца. Таким образом:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}, \tag{6.12}$$

$$M_{1n}=\begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2(n-1)} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{n(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{6.13}$$

Выражения (6.10) и (6.10') удобны, в частности, для исследования свойств двухполюсников. Так как сопротивления Z_{in} элементов системы зависят от частоты, то и сопротивление двухполюсника $Z_{вх}$ является функцией частоты. Поведение этой функции изучается в § 6.4.

В случае же четырёхполюсника основной интерес обычно представляет отношение комплексных амплитуд выходного и входного напряжений. Это отношение, также являющееся функцией частоты электродвижущей силы, приложенной к четырёхполюснику, называется „комплексным коэффициентом передачи“ и записывается в виде

$$K(\mathrm{i}\omega)=\frac{\overrightarrow{U_{вых}}}{\overrightarrow{E_1}}. \tag{6.14}$$

Полученные выше соотношения позволяют выразить коэффициент передачи через элементы цепи в общей форме. Исходя из схемы, представленной на рис. 6.2, и полагая, что выходное напряжение снимается с элемента $Z_{n\,вых}$, входящего в n-й контур, получаем

$$\overrightarrow{U_{вых}}=\overrightarrow{I_n}\cdot Z_{n\,вых}.$$

Тогда в соответствии с ф-лой (6.9'')

$$K(\mathrm{i}\omega)=\frac{\overrightarrow{U_{вых}}}{\overrightarrow{E_1}}=\frac{\overrightarrow{I_n}\cdot Z_{n\,вых}}{\overrightarrow{E_1}}=(-1)^{1+n}\frac{M_{1n}}{\Delta}Z_{n вых}. \tag{6.15}$$

При заданных элементах цепи это выражение позволяет выявить поведение функции $K(\mathrm{i}\omega)$. Исследование частотных свойств коэффициента передачи для различных цепей проводится в § 6.4.

Полученные в данном параграфе результаты основаны на применении метода контурных токов. В гл. 10, посвящённой изучению работы электронных усилителей, будет также рассмотрен метод „узловых напряжений“.

§ 6.2. Энергетические функции

Для установления частотных свойств пассивных цепей удобно использовать то, вытекающее из закона сохранения энергии, обстоятельство, что энергия, запасённая в магнитных и электрических полях всех элементов системы, а также рассеиваемая в активных сопротивлениях мощность, не могут принимать отрицательных значений. Обозначив мгновенные значения указанных энергий соответственно через величины S, V и F, называемые энергетическими функциями, постараемся выразить их через действующие в контурах заряды q и токи $\frac{dq}{dt}=\dot{q}$.

Для определения функции S, соответствующей мгновенному значению запасённой в системе энергии магнитного поля, исходим из следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_{11}\dot{q}_1 + L_{12}\dot{q}_2 + \ldots + L_{1n}\dot{q}_n &= \Phi_1 \\ L_{21}\dot{q}_1 + L_{22}\dot{q}_2 + \ldots + L_{2n}\dot{q}_n &= \Phi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ L_{n1}\dot{q}_1 + L_{n2}\dot{q}_2 + \ldots + L_{nn}\dot{q}_n &= \Phi_n \end{aligned}\right\}. \tag{6.16}$$

Здесь Φ_1, Φ_2 и т. д. — полные магнитные потоки, пронизывающие 1, 2 и т. д. контуры, с учётом всех индуктивностей и взаимоиндукций, входящих в соответствующий контур.

Умножив первое уравнение на ток $\dot{q}_1$, второе на $\dot{q}_2$ и т. д., получим:

$$\left.\begin{aligned} L_{11}\dot{q}_1^2 + L_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + L_{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n &= \Phi_1 q_1 \\ L_{21}q_2\dot{q}_1 + L_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + L_{2n}\dot{q}_2\dot{q}_n &= \Phi_2 \dot{q}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ L_{n1}\dot{q}_n\dot{q}_1 + L_{n2}\dot{q}_n\dot{q}_2 + \ldots + L_{nn}\dot{q}_n^2 &= \Phi_n q_n \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Правые части уравнений в системе (6.17) представляют собой удвоенные мгновенные значения энергий, запасённых магнитными полями контуров от 1-го до n-го включительно. Обозначив полную магнитную энергию через S, получим

$$S = \frac{1}{2}(\Phi_1\dot{q}_1 + \Phi_2\dot{q}_2 + \ldots + \Phi_n\dot{q}_n). \tag{6.18}$$

Эта же энергия может быть выражена через индуктивности L_{ik} непосредственно. Суммируя левые и правые части уравнений системы (6.17) и учитывая выражение (6.18), можем написать

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{6.19}$$

Отметим, что здесь суммирование по k от 1 до n даёт i-ю строку системы (6.17). Суммируя затем по i от 1 до n, получаем все n строк.

Подобным же образом может быть определена полная мгновенная электрическая энергия цепи. В данном случае исходим из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C_{11}}q_1 + \frac{1}{C_{12}}q_2 + \ldots + \frac{1}{C_{1n}}q_n &= e_{c1} \\ \frac{1}{C_{21}}q_1 + \frac{1}{C_{22}}q_2 + \ldots + \frac{1}{C_{2n}}q_n &= e_{c2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{1}{C_{n1}}q_1 + \frac{1}{C_{n2}}q_2 + \ldots + \frac{1}{C_{nn}}q_n &= e_{cn} \end{aligned}\right\}. \tag{6.20}$$

Здесь e_{c1}, e_{c2}, ..., e_{cn} — результирующие емкостные напряжения, получаемые при учёте всех ёмкостей, входящих в данный контур.

Умножая эти уравнения на q_1, q_2, ..., q_n соответственно и складывая их, получим удвоенную мгновенную электрическую энергию цепи в виде суммы

$$2V = e_{c1}q_1 + e_{c2}q_2 + \ldots + e_{cn}q_n \tag{6.21}$$

или в форме, подобной (6.19),

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\frac{1}{C_{ik}}q_i q_k. \tag{6.22}$$

Для определения мгновенного значения расходуемой в цепи мощности исходим из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}\dot{q}_1 + r_{12}\dot{q}_2 + \ldots + r_{1n}q_n &= e_{r1} \\ r_{21}\dot{q}_1 + r_{22}\dot{q}_2 + \ldots + r_{2n}\dot{q}_n &= e_{r2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_{n1}\dot{q}_1 + r_{n2}\dot{q}_2 + \ldots + r_{nn}\dot{q}_n &= e_{rn} \end{aligned}\right\}. \tag{6.23}$$

Здесь e_{r1}, e_{r2}, ..., e_{rn} — полные падения напряжения на всех активных сопротивлениях, входящих в данный контур.

Умножая уравнения системы (6.23) соответственно на токи $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ и т. д. и складывая левые и правые части, получим выражения, подобные (6.18), (6.19) и (6.21), (6.22):

$$F = \frac{1}{2}(e_{r1}\dot{q}_1 + e_{r2}\dot{q}_2 + \ldots + e_{rn}\dot{q}_n) \tag{6.24}$$

или

$$F = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} r_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{6.25}$$

Следует иметь в виду, что функция F соответствует половине мгновенной мощности, рассеиваемой во всех контурах цепи.

Для выявления частотных свойств цепи основной интерес представляет рассмотрение энергетических функций в стационарном состоянии при возбуждении цепи синусоидальной электродвижущей силой. В подобном режиме контурный ток, являющийся гармонической функцией, может быть представлен в форме

$$\dot{q}_k = \frac{1}{2}\left(\vec{I}_k e^{i\omega t} + \vec{I}_k^{*} e^{-i\omega t}\right), \tag{6.26}$$

а заряд, являющийся интегралом от тока, в форме

$$q_k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{i\omega}\left(\vec{I}_k e^{i\omega t} - \vec{I}_k^{*} e^{-i\omega t}\right). \tag{6.27}$$

Здесь $\vec{I}_k$ — комплексная амплитуда тока, а $\vec{I}_k^{*}$ — сопряжённая ей величина.

Вместо мгновенных значений функций S, V и F в случае гармонического изменения $\dot{q}_k$ и q_k удобнее пользоваться усреднёнными за период значениями этих величин S_0, V_0 и F_0. С этой целью проинтегрируем ур-ние (6.19) в пределах от 0 до T и разделим его на T

$$S_0 = \frac{1}{2T}\int_0^T \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k\,dt.$$

Подставив q_k и $\dot{q}_k$ согласно ф-лам (6.26) и (6.27) и меняя местами порядок операций интегрирования и суммирования, получим

$$S_0 = \frac{1}{2T}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\frac{L_{ik}}{4}\int_0^T\left(\vec{I}_i e^{i\omega t} + \vec{I}_i^{*} e^{-i\omega t}\right)\left(\vec{I}_k e^{i\omega t} + \vec{I}_k^{*} e^{-i\omega t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\frac{L_{ik}}{4}\int_0^T\left(\vec{I}_i\,\vec{I}_k e^{i2\omega t} + \vec{I}_i^{*}\,\vec{I}_k^{*} e^{-i2\omega t} + \vec{I}_i^{*}\,\vec{I}_k + \vec{I}_i\,\vec{I}_k^{*}\right)dt.$$

Слагаемые с удвоенной частотой вида $e^{i2\omega t}$ при интегрировании за целый период T обращаются в нуль. Таким образом, получаем

$$S_0 = \frac{1}{8}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\left(\vec{I}_i^{*}\cdot\vec{I}_k + \vec{I}_i\cdot\vec{I}_k^{*}\right).$$

Учитывая, что $L_{ik} = L_{ki}$, нетрудно убедиться (хотя бы прямой подстановкой) в справедливости тождества

$$\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\cdot\vec{I}_i^{*}\,\vec{I}_k = \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\,\vec{I}_i\,\vec{I}_k^{*}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$S_0 = \frac{1}{4}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} L_{ik}\,\vec{I}_i\,\vec{I}_k^{*} \tag{6.28}$$

Аналогично для усреднённых за период энергетических функций V_0 и F_0, получим выражения:

$$V_0 = \frac{1}{4\omega^2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\frac{1}{C_{ik}}\,\vec{I}_i\,\vec{I}_k^{*}, \tag{6.29}$$

$$F_0 = \frac{1}{4}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} r_{ik}\,\vec{I}_i\,\vec{I}_k^{*} \tag{6.30}$$

Напомним, что так же, как и мгновенные значения S, V и F, усреднённые энергетические функции для произвольной пассивной цепи не могут принимать отрицательных значений:

$$S_0 \geqslant 0;\ V_0 \geqslant 0;\ F_0 \geqslant 0.$$

Сопротивление и проводимость двухполюсника можно выразить через энергетические функции S_0, V_0 и F_0. Воспользуемся для этого системой ур-ний (6.3), положив $\vec{E}_1 \neq 0$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \ldots = \vec{E}_n = 0$:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}\vec{I}_1 + Z_{12}\vec{I}_2 + \ldots + Z_{1n}\vec{I}_n &= \vec{E}_1\\ Z_{21}\vec{I}_1 + Z_{22}\vec{I}_2 + \ldots + Z_{2n}\vec{I}_n &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\

Отсюда находим входной ток как величину, сопряжённую $\vec{I}_1$

$$\vec{I}_1 = \frac{4}{\vec{E}_1}[F_0 - i\omega(S_0 - V_0)].$$

Разделив это выражение на $\vec{E}_1$, найдём сопротивление двухполюсника в виде

$$Z_{вх} = \frac{1}{Y_{вх}} = \frac{\vec{E}_1^2}{4[F_0 - i\omega(S_0 - V_0)]}. \qquad (6.31)$$

Но $Z_{вх}$ не зависит от фазы $\vec{E}_1$. Поэтому $\vec{E}_1$ можно считать чисто вещественной величиной.

Обозначим через F_{01}, S_{01} и V_{01} средние за период значения соответствующих энергетических функций при $E_1 = 1_в$. Тогда вместо выражения (6.31) получим

$$Z_{вх} = \frac{1}{Y_{вх}} = \frac{1}{4[F_{01} - i\omega(S_{01} - V_{01})]} \qquad (6.31')$$

или после выделения действительной и мнимой частей:

$$\left.\begin{aligned} Y_{вх} &= 4[F_{01} - i\omega(S_{01} - V_{01})] \\ Z_{вх} &= \frac{1}{4}\left[\frac{F_{01}}{F_{01}^2 + \omega^2(S_{01} - V_{01})^2} + i\omega\frac{(S_{01} - V_{01})}{F_{01}^2 + \omega^2(S_{01} - V_{01})^2}\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (6.32)$$

Представив, наконец, сопротивление двухполюсника в форме

$$Z_{вх}(\omega) = R_{вх}(\omega) + iX_{вх}(\omega) = z_{вх}\, e^{i\varphi(\omega)},$$

где

$$\left.\begin{aligned} z_{вх} &= \sqrt{[R_{вх}(\omega)]^2 + [X_{вх}(\omega)]^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{\omega(S_{01} - V_{01})}{F_{01}} \end{aligned}\right\}, \qquad (6.33)$$

и основываясь на положительности F_{01}, S_{01} и V_{01}, приходим к следующим выводам о свойствах пассивных двухполюсников:

а) вещественная часть сопротивления любого пассивного двухполюсника является функцией чётной, а мнимая часть — нечётной относительно частоты [см. ф-лу (6.32)]; то же относится к проводимости;

б) вещественная часть сопротивления (и проводимости) пассивного двухполюсника не может принимать отрицательных значений;

в) аргумент φ (фазовый угол) для любого двухполюсника является функцией нечётной относительно частоты ω. Чётность модуля $z_{вх}(\omega)$ относительно ω очевидна. Из выражения (6.33) следует также, что $\varphi(\omega)$ может обращаться в нуль только при равенстве

средних (за период) суммарных значений энергии, запасаемых всеми индуктивностями и всеми ёмкостями системы. Такое положение имеет место при резонансах.

Дополнительные сведения о частотных свойствах двухполюсников приводятся в следующем параграфе.

§ 6.3. Двухполюсники

Для многих радиотехнических задач существенное значение имеют частотные свойства двухполюсников, составленных из произвольного числа индуктивностей и ёмкостей и обладающих большим числом резонансных частот. Так как активные сопротивления в подобных системах обычно малы по сравнению с сопротивлениями реактивных элементов, то ряд важных для практики свойств двухполюсников можно выявить из рассмотрения случая чисто реактивного двухполюсника.

Реактивные двухполюсники (без потерь) обладают тем свойством, что наклон кривой, выражающей зависимость сопротивления двухполюсника от частоты, всегда положителен. В случае простейших комбинаций из элементов L и C это положение очевидно (рис. 6.3).

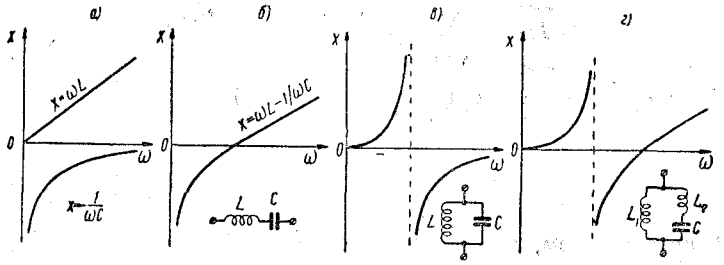


Рис. 6.3

Для доказательства его в общем случае, при сколь угодно сложном реактивном двухполюснике, обратимся опять к системе ур-ний (6.3), полагая амплитуды $\vec{E}_\nu$ не зависимыми от частоты. Продифференцировав уравнения этой системы по ω и обозначая производную штрихом, получим:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}\vec{I}_1' + Z_{12}\vec{I}_2' + \ldots + Z_{1n}\vec{I}_n' &= -H_1 \\ Z_{21}\vec{I}_1' + Z_{22}\vec{I}_2' + \ldots + Z_{2n}\vec{I}_n' &= -H_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Z_{n1}\vec{I}_1' + Z_{n2}\vec{I}_2' + \ldots + Z_{nn}\vec{I}_n' &= -H_n \end{aligned}\right\}. \qquad (6.34)$$

Здесь

$$H_\nu = Z'_{\nu 1}\vec{I}_1 + Z'_{\nu 2}\vec{I}_2 + \ldots + Z'_{\nu n}\vec{I}_n. \tag{6.35}$$

Замечаем, что система ур-ний (6.34) отличается от ур-ний (6.3) только правыми частями. Можно поэтому для решения её относительно $\vec{I}'_1$ воспользоваться ф-лой (6.8), заменив в ней E_ν на H_ν.

$$\vec{I}'_1 = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{H_\nu A_{\nu 1}}{\Delta}. \tag{6.36}$$

Ранее при выводе ф-лы (6.9) отмечалось, что алгебраическое дополнение $A_{\nu 1}$ связано с минором $M_{\nu 1}$ соотношением

$$A_{\nu 1} = (-1)^{1+\nu} M_{\nu 1}.$$

Поскольку для минора действительно равенство[1])

$$M_{\nu 1} = M_{1\nu},$$

то очевидно, что и

$$A_{\nu 1} = A_{1\nu}.$$

Можно поэтому написать:

$$\vec{I}'_1 = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{H_\nu A_{\nu 1}}{\Delta} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{H_\nu A_{1\nu}}{\Delta}. \tag{6.36'}$$

Но в соответствии с выражением (6.8')

$$\frac{A_{1\nu}}{\Delta} = \frac{\vec{I}_\nu}{\vec{E}_1}.$$

Таким образом, выражение (6.36') переходит в следующее

$$\vec{I}'_1 = -\frac{1}{\vec{E}_1}\sum_{\nu=1}^{n} H_\nu \vec{I}_\nu.$$

[1]) Это положение нетрудно пояснить на простом примере. Возьмём определитель в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и образуем, например, сперва минор M_{13}

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}.$$

Для минора M_{31} будем иметь

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}.$$

Так как $a_{12} = a_{21}$ и $a_{23} = a_{32}$, то, очевидно, и $M_{13} = M_{31}$.

Для цепи без потерь, составленной из чисто реактивных элементов, амплитуда тока $\vec{I}_\nu$ в любой из ветвей равна взятой с обратным знаком сопряжённой амплитуде $\vec{I}^*_\nu$, поэтому

$$\vec{I}'_1 = \frac{1}{\vec{E}_1}\sum_{\nu=1}^{n} H_\nu \vec{I}^*_\nu \tag{6.37}$$

С другой стороны, обозначив входное сопротивление чисто реактивной цепи через $\mathrm{i}X_{вх}$, можем написать

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}_1}{\mathrm{i}X_{вх}},$$

откуда прямым дифференцированием по ω находим производную

$$\vec{I}'_1 = -\mathrm{i}\vec{E}_1 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{X_{вх}}\right)}{d\omega} = \mathrm{i}\frac{\vec{E}_1}{X^2_{вх}}\left(\frac{dX_{вх}}{d\omega}\right). \tag{6.38}$$

Подставив это выражение в левую часть ф-лы (6.37) и решая его относительно $\frac{dX_{вх}}{d\omega}$, получим

$$\frac{dX_{вх}}{d\omega} = -\mathrm{i}\left(\frac{X_{вх}}{\vec{E}_1}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n} H_\nu \vec{I}^*_\nu \tag{6.39}$$

Теперь остаётся использовать выражение (6.35) для H_ν и, кроме того, учесть, что производные Z'_{ik} в отсутствии потерь равны

$$Z'_{ik} = \mathrm{i}\left(L_{ik} + \frac{1}{C_{ik}\omega^2}\right). \tag{6.40}$$

Тогда в соответствии с выражениями (6.28) и (6.29) получим

$$\sum_{\nu=1}^{\nu} H'_\nu \vec{I}^*_\nu = \mathrm{i}\,4\,(S_0 + V_0),$$

откуда

$$\frac{dX_{вх}}{d\omega} = 4\left(\frac{X_{вх}}{\vec{E}_1}\right)^2 (S_0 + V_0).$$

Учитывая, наконец, выражение (6.31), которое для цепи без потерь принимает вид

$$i X_{вх} = i \frac{\overrightarrow{E_1^2}}{4\omega (S_0 - V_0)},$$

окончательно получим

$$\frac{dX_{вх}}{d\omega} = \frac{\overrightarrow{E_1^2}}{4\omega^2} \frac{(S_0 + V_0)}{(S_0 - V_0)^2}. \tag{6.41}$$

Как и в ф-ле (6.31), величину E_1 следует считать вещественной.

Из выражения (6.41) следует, что, поскольку энергетические функции S_0 и V_0 всегда положительны, наклон кривой, выражающей зависимость $X_{вх}$ от частоты, для пассивного двухполюсника не может принимать отрицательного значения.

Это важное положение иногда называют теоремой о реактивном сопротивлении.

На основании этой теоремы можно установить характер расположения резонансных частот двухполюсника в любом частотном диапазоне, а также установить правила построения схемы двухполюсника по заданным резонансным частотам. С этой целью обратимся к выражению (6.10′) и приведём его к виду, более удобному для выяснения частотных свойств сопротивления двухполюсника.

Входящие в это выражение определитель Δ и минор M_{11} можно представить в виде полиномов от $i\omega$. Степень этих полиномов нетрудно установить. Очевидно, что определитель, равный сумме произведений вида [см. ф-лу (6.4)] $Z_{11} \cdot Z_{22} \cdot \ldots \cdot Z_{nn}$, $Z_{12} \cdot Z_{23} \cdot \ldots \cdot Z_{n1}$ и т. д., при подстановке (в случае $r_{ik} = 0$)

$$Z_{ik} = i\omega L_{ik} + \frac{1}{i\omega C_{ik}} \tag{6.42}$$

будет приводить к наибольшей положительной степени $i\omega$, равной n, и к наибольшей отрицательной степени, также равной n.

Минор M_{11}, состоящий из суммы произведений вида [см. ф-лу (6.12)]: $Z_{22} \cdot Z_{33} \cdot \ldots \cdot Z_{nn}$, $Z_{23} \cdot Z_{34} \cdot \ldots \cdot Z_{n2}$ и т. д., приводит к степеням $(n-1)$ и $-(n-1)$.

Для того, чтобы освободиться от отрицательных степеней, умножим выражение (6.42) на $i\omega$:

$$i\omega Z_{ik} = (i\omega)^2 L_{ik} + \frac{1}{C_{ik}} \tag{6.42′}$$

и подставим $i\omega Z_{ik}$ вместо Z_{ik} в выражения (6.4) и (6.12). Тогда вместо Δ и M_{11} получим новый определитель

$$\Delta^* = \Delta (i\omega)^n \tag{6.43}$$

и новый минор

$$M_{11}^* = M_{11} (i\omega)^{n-1}. \tag{6.44}$$

Обозначив $i\omega = p$ и подставляя $\Delta = \frac{\Delta^*}{p^n}$ и $M_{11} = \frac{M_{11}^*}{p^{n-1}}$ в выражение (6.10′) получим

$$Z_{вх} = \frac{\Delta^*}{pM_{11}^*}. \tag{6.45}$$

Из выражения (6.42′) ясно, что Δ^* и M_{11}^* могут быть представлены в виде следующих полиномов:

$$\Delta^* = \alpha_{2n} p^{2n} + \alpha_{2(n-1)} p^{2n-2} + \ldots + \alpha_2 p^2 + \alpha_0, \tag{6.46}$$

$$M_{11}^* = \beta_{2(n-1)} p^{2(n-1)} + \beta_{2(n-2)} p^{2(n-2)} + \ldots + \beta_2 p^2 + \beta_0. \tag{6.47}$$

В эти выражения входят только чётные степени p. Можно поэтому в качестве независимого переменного выбрать p^2, а полиномы (6.46) и (6.47) можно выразить в форме:

$$\Delta^* = \alpha_{2n} (p^2 - p_1^2)(p^2 - p_3^2) \ldots (p^2 - p_{2n-1}^2), \tag{6.46′}$$

$$M_{11}^* = \beta_{2(n-1)} (p^2 - p_2^2)(p^2 - p_4^2) \ldots (p^2 - p_{2n-2}^2), \tag{6.47′}$$

где $p_1, p_3, \ldots p_{2n-1}$ представляют собой n корней уравнения $\Delta^* = 0$, а $p_2, p_4, \ldots p_{2n-2}$ — $(n-1)$ корней уравнения $M_{11}^* = 0$.

Общее выражение для корней имеет вид:

$$p_k^2 = (i\omega_k)^2 = -\omega_k^2; \quad p_k = \pm i\omega_k. \tag{6.48}$$

Подставляя выражения (6.46′) — (6.47′) в (6.45), получим

$$Z_{вх} = \frac{\Delta^*}{pM_{11}^*} = K \frac{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_3^2) \ldots (p^2 - p_{2n-1}^2)}{p(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_4^2) \ldots (p^2 - p_{2n-2}^2)}. \tag{6.49}$$

Здесь обозначено

$$K = \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2(n-1)}}.$$

Переходя обратно от p к $i\omega$, можем представить сопротивление двухполюсника в форме

$$Z_{вх}(\omega) = i\omega K \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \ldots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \ldots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}. \tag{6.50}$$

Можно сказать, что частоты $\omega_1, \omega_3, \ldots \omega_{2n-1}$ являются нулями входного сопротивления $Z_{вх}$, а частоты $\omega_2, \omega_4, \ldots \omega_{2n-2}$ — полюсами. Для проводимости $Y_{вх}$, наоборот, частоты $\omega_1, \omega_3, \ldots \omega_{2n-1}$ являются полюсами, а частоты $\omega_2, \omega_4, \ldots \omega_{2n-2}$ — нулями. Физически это означает, что при частотах $\omega_1, \omega_3, \ldots \omega_{2n-1}$ цепь

настраивается в последовательный резонанс и, если нет — теперь, входное сопротивление обращается в нуль. Частотам $\omega_4, \ldots \omega_{2n-2}$ соответствует резонанс токов, при котором входное сопротивление обращается в бесконечность. Из выражения (6.50) следует, что задание резонансных частот реактивного двухполюсника — нулей и полюсов — однозначно определяет с точностью до постоянного коэффициента сопротивление двухполюсника на всём частотном диапазоне.

Из доказанной выше положительности наклона кривой $X_{вх}(\omega)$ следует, в частности, что нули и полюсы входного сопротивления чередуются, т. е. выполняется условие

$$0<\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_{2n-2}<\infty. \qquad (6.51)$$

Действительно, если допустить наличие на оси частот последовательность двух нулей или двух полюсов, то кривая $X_{вх}(\omega)$ должна между указанными точками изменить знак наклона, что невозможно. Поэтому изменение $X_{вх}(\omega)$ для реактивного двухполюсника следует представлять себе в виде функции, изображённой на рис. 6.4.

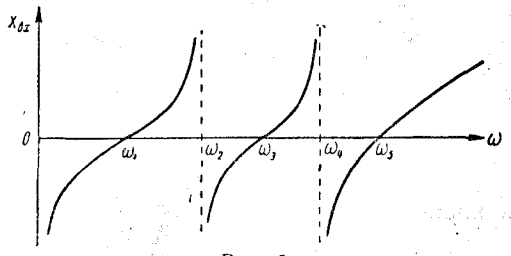


Рис. 6.4

На нулевой и бесконечных частотах $X_{вх}(\omega)$ может обращаться в нуль или в бесконечность, смотря по структуре цепи. Нетрудно убедиться, что изображённый на рис. 6.4 ход зависимости $X_{вх}(\omega)$ соответствует случаю, когда двухполюсник не пропускает постоянного тока. Пример подобного двухполюсника, содержащего последовательно включённый конденсатор C_0, показан на рис. 6.5. Если двухполюсник пропускает постоянный ток, то зависимость $X_{вх}(\omega)$ должна иметь характер, показанный на рис. 6.6.

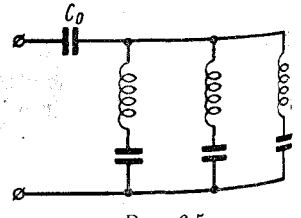


Рис. 6.5

Полученные результаты позволяют также установить минимальное число индуктивных и ёмкостных элементов, необходимое для получения заданного числа резонансных частот. Действительно, из выражения (6.50) следует, что общее число нулей и полюсов, не считая точек $\omega=0$ и $\omega=\infty$, равно $2n-1$ (n корней числителя и $n-1$ корней знаменателя). Таким образом, общее число резонансов, как последовательных, так и параллельных, равно $2n-1$.

Напомним, что при выводе выражения (6,50) через n было обозначено число контуров (ветвей), содержащих как индуктивность, так и ёмкость, и обладающих сопротивлением

$$Z_{ik}=i\omega L_{ik}+\frac{1}{i\omega C_{ik}}$$

[см. ф-лу (6.42)].

Следовательно, для получения $2n-1$ резонансов требуется не менее чем $2n$ элементов типа индуктивности и ёмкости. При этом предполагается, что если в какой-либо ветви имеется более чем одна ёмкость, или более чем одна индуктивность, то C_{ik} и L_{ik} обозначают результирующую ёмкость и индуктивность ветви. Омические сопротивления (потери) не влияют на степень определителя Δ и минора M_{11} и, следовательно, не влияют на число резонансных частот двухполюсника.

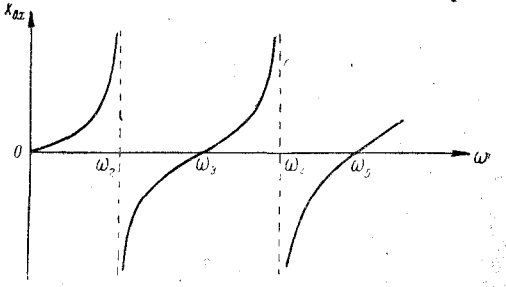


Рис. 6.6

Ветви, содержащие только L_{ik} или только C_{ik}, повышают общую степень полиномов в выражении (6.49) только на единицу. Поэтому, если через N обозначать общее число индуктивностей и ёмкостей, то число резонансов не может превышать $N-1$. Так, например, для схем, изображённых на рис. 6.3*б* и 6.3*в*, при двух элементах (одна индуктивность и одна ёмкость) имеется всего по одному резонансу, в схеме 6.3*г*, содержащей 3 элемента, имеется два резонанса.

Пример же того случая, когда число резонансов меньше чем $N-1$, даёт схема, представленная на рис. 6.5. Здесь при семи элементах получается всего лишь пять резонансов, как это видно из рис. 6.4, который построен, исходя из условий, чтобы: а) при $\omega\to\infty$ сопротивление двухполюсника имело индуктивный характер, б) обеспечивалось чередование последовательных и параллельных резонансов и в) число резонансов не превышало $N-1$.

Основываясь на выражении (6.50), можно находить строение и параметры цепи, удовлетворяющей заданному расположению нулей и полюсов на оси частот. Подобная задача, часто встречающаяся в технике проводной связи, всё чаще возникает и в импульсной технике, в частности, при расчёте цепей для формирования импульсов.

Путём разложения правой части выражения (6.50) на простейшие дроби можно привести его к виду

$$Z_{вх}=i\omega K\left[1+\frac{A_0}{\omega^2}+\frac{A_2}{\omega^2-\omega_2^2}+\ldots+\frac{A_{2n-2}}{\omega^2-\omega_{2n-2}^2}\right], \qquad (6.52)$$

где A_0, A_2, ..., A_{2n-2} — постоянные, определяемые по заданным значениям нулей и полюсов, т. е. по резонансным частотам ω_1, ω_2, ω_3 ... и т. д.

Именно

$$A_k = \frac{(\omega_k^2-\omega_1^2)(\omega_k^2-\omega_3^2)\dots(\omega_k^2-\omega_{2n-1}^2)}{\omega_k^2(\omega_k^2-\omega_2^2)\dots(\omega_k^2-\omega_{k-2}^2)(\omega_k^2-\omega_{k+2}^2)\dots(\omega_k^2-\omega_{2n-2}^2)} = \left[\frac{Z_{вх}(\omega^2-\omega_k^2)}{i\omega K}\right]_{\omega=\omega_k},$$

где $k=0, 2, 4, \dots$

Каждый член выражения (6.52) можно отождествить с одной из простейших комбинаций из элементов L и C. Действительно, $i\omega K$ имеет смысл сопротивления индуктивности $L_0=K$, член $i\frac{KA_0}{\omega}=\frac{(-KA_0)}{i\omega}$ можно рассматривать как сопротивление конденсатора, ёмкость которого $C_0=-\frac{1}{KA_0}$. Каждое из последующих слагаемых соответствует звену, изображённому на рис. 6.7. Элементы L_k и C_k звена определяются из условия

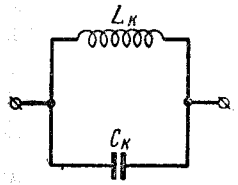


Рис. 6.7

$$\frac{i\omega L_k}{1-\omega^2 L_k C_k} = \frac{i\omega\left(-\frac{1}{C_k}\right)}{\omega^2-\omega_k^2} = i\omega\frac{KA_k}{\omega^2-\omega_k^2},$$

откуда

$$C_k = -\frac{1}{KA_k} = -\left[\frac{i\omega}{(\omega^2-\omega_k^2)Z_{вх}}\right]_{\omega=\omega_k},$$

$$L_k = \frac{1}{\omega^2 C_k}.$$

Схема двухполюсника, соответствующего заданным резонансным частотам и разложению (6.52), изображена на рис. 6.8.

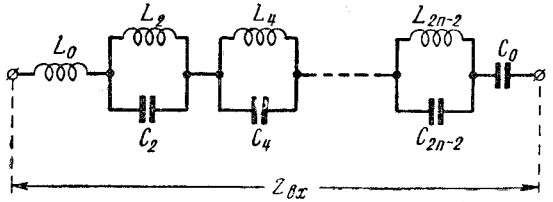


Рис. 6.8

Эта схема не единственно возможная для получения заданного входного сопротивления. Если разложить на простейшие дроби не выражение (6.52), а обратное ему выражение для входной проводимости реактивной цепи, то последнему будет соответствовать схема, показанная на рис. 6.9. Элементы этой схемы будут определяться выражениями:

$$L_k = -\left[\frac{i\omega Z_{вх}(\omega)}{\omega^2-\omega_k^2}\right]_{\omega=\omega_k}; \quad C_k = \frac{1}{\omega^2 L_k}.$$

Не останавливаясь более подробно на синтезе цепей по заданным частотным характеристикам[1]), рассмотрим в заключение вопрос о влиянии сопротивлений потерь.

В этом случае $Z_{вх}$ является комплексной величиной. При частотах последовательного резонанса (ω_1, ω_3, ... и т. д.) сопротивление двухполюсника при наличии потерь не обращается в нуль, а равно вещественной величине. При частотах параллельного резонанса $X_{вх}$ не обращается в бесконечность. В результате получается изменение реактивной $X_э$ и активной $R_э$ слагающих, показанное на рис. 6.10. На рис. 6.10$а$ пунктиром показано изменение $X_{вх}$ без учёта потерь. Нетрудно видеть, что вблизи частот ω_2, ω_4, ..., соответствующих параллельным резонансам, кривая $X_э$ (сплошная линия на рис. 6.10$а$), $R_э$ (рис. 6.10$б$) и $Z_{вх}$

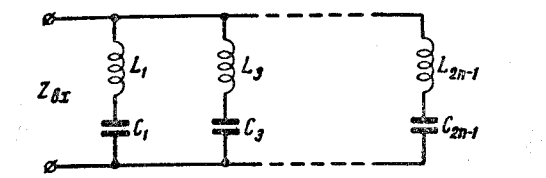


Рис. 6.9

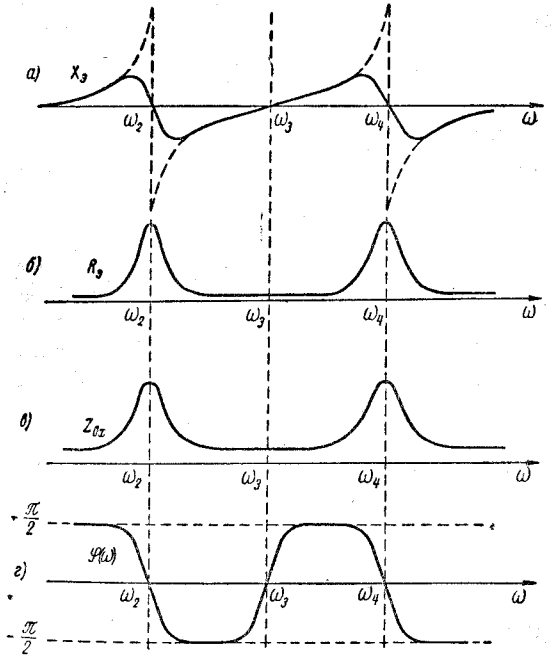


Рис. 6.10

[1]) Материал по данному вопросу содержится в книге С. Н. Евланова. Корректирующие контуры в телеграфно-телефонных цепях (Связьтехиздат, 1937) в книге Г. Боде. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью (Изд-во иностранной литературы, 1948) и в ряде учебников и учебных пособий по теории проводной электросвязи. Наиболее полно основные положения теории цепей изложены в книге *Guillemin E. A., Communication networks, vol. II*, 1947.

(рис. 6.10*в*) имеют такой же вид, как и в случае одиночного параллельного контура, рассмотренного в § 4.8.

Аргумент $\varphi(\omega)$ сопротивления $Z_{вх}(\omega)$ изменяется в пределах близких к $\pm\frac{\pi}{2}$ (рис. 6.10*г*). В областях параллельных резонансов наклон $\varphi(\omega)$ отрицателен, а в областях последовательных резонансов — положителен. Этот результат совпадает со случаем одиночного контура, именно: слева от значений ω_2, ω_4, ... и т. д. двухполюсник обладает индуктивной слагающей сопротивления, а справа — ёмкостной.

Очевидно, что $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_{вх}}{R_{вх}} > 0$ при $\omega < \omega_2$

и $\varphi < 0$ при $\omega > \omega_2$.

Вблизи частот ω_1, ω_3, ... и т. д., наоборот, $\varphi > 0$ при $\omega > \omega_1$, ω_3, ... и т. д., и $\varphi < 0$ при $\omega < \omega_1$, ω_3, ... и т. д.

Заметим, что если через двухполюсник проходит ток с амплитудой $\dot{I}$, то напряжение на двухполюснике, равное $\dot{U} = \dot{I}\,Z(\omega)$, будет обладать фазовой характеристикой, совпадающей с $\varphi(\omega)$.

Если двухполюсник используется в качестве нагрузки для усилителя или генератора с большим внутренним сопротивлением (например электронная лампа), то область рабочих частот должна лежать вблизи одной из частот ω_2, ω_4, ..., где сопротивление двухполюсника велико. Выделяемое при этом на двухполюснике напряжение, равное $\dot{U} = \dot{I}Z$, где $\dot{I}$ — амплитуда тока генератора, будет обладать фазовой характеристикой, совпадающей с $\varphi(\omega)$, т. е. наклон фазовой характеристики будет отрицателен (см. § 4.7). Области вблизи ω_1, ω_3, ... и т. д., где наклон фазовой характеристики положителен, практического интереса не представляют, так как сопротивление двухполюсника очень мало и эти области соответствуют „полосе задержания".

§ 6.4. Четырёхполюсники. Частотные свойства коэффициента передачи четырёхполюсника

По определению (6.14) коэффициент передачи пассивного линейного четырёхполюсника представляет собой отношение комплексных амплитуд напряжений на выходе и входе четырёхполюсника. Это отношение, являющееся безразмерной комплексной величиной, удобно представлять в форме

$$K(i\omega) = |K(i\omega)|\,e^{i\varphi(\omega)}. \tag{6.53}$$

Модуль коэффициента передачи

$$|K(i\omega)| = \frac{E_{вых}}{E_1} \tag{6.54}$$

в радиотехнике называется „амплитудно-частотной характеристикой" четырёхполюсника или просто „амплитудной характеристикой". Часто применяется также термин „частотная характеристика".

Аргумент $\varphi(\omega)$ коэффициента передачи называется „фазово-частотной" или просто „фазовой характеристикой".

Для работы радиотехнических устройств большое значение имеет поведение амплитудной и фазовой характеристик четырёхполюсника в области частот, соответствующих передаваемым через четырёхполюсник сигналам.

Для выявления свойств указанных характеристик обратимся к общему определению коэффициента передачи в виде выражения (6.15) и приведём его к виду, аналогичному (6.50). Повторяя рассуждения, использованные при выводе ф-л (6.49) и (6.50), для общего случая, когда элементы четырёхполюсника состоят из индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений, а корни уравнений $\Delta = 0$ и $M_{11} = 0$ могут быть как вещественными, так и комплексными, получим следующее выражение для коэффициента передачи (множители $i\omega$ здесь заменены на p):

$$K(p) = \frac{\beta_m p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0}{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0} = A\,\frac{(p-p_{01})(p-p_{02})\ldots(p-p_{0m})}{(p-p_{п1})(p-p_{п2})\ldots(p-p_{пn})}. \tag{6.55}$$

Здесь $A = \frac{\beta_m}{\alpha_m}$ — постоянный коэффициент, p_{01}, p_{02}, ... p_{0m} — „нули" коэффициента передачи, т. е. корни уравнения $M_{1n} = 0$, обращающие $K(p)$ в нуль, а $p_{п1}$, $p_{п2}$, ... $p_{пn}$ — „полюсы" коэффициента передачи, т. е. корни уравнения $\Delta = 0$, обращающие $K(p)$ в бесконечность.

Существенно, что если среди корней числителя (6.55) имеются комплексные, то они образуют сопряжённые пары. Таким образом, общее число m корней числителя можно представить в виде суммы

$$m = 2\boldsymbol{m} + m', \tag{6.56}$$

где $\boldsymbol{m}$ — число пар сопряжённых комплексных корней, а m' — число вещественных корней.

Аналогично для общего числа корней знаменателя (6.55) можно написать

$$n = 2\boldsymbol{n} + n'. \tag{6.57}$$

Это положение вытекает из того факта, что каждой „резонансной" частоте цепи отвечают два сопряжённо-комплексных корня.

Приравнивая в выражении (6.55) $p = i\omega$, получим коэффициент передачи в виде функции частоты $K(i\omega)$. Модуль (ампли-

тудная характеристика) и аргумент (фазовая характеристика) коэффициента передачи определяются выражениями:

$$|K(\mathrm{i}\,\omega)| = \left| A\,\frac{(\mathrm{i}\,\omega - p_{01})(\mathrm{i}\,\omega - p_{02})\ldots(\mathrm{i}\,\omega - p_{0m})}{(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi 1})(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi 2})\ldots(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi n})}\right|,$$

$$\varphi(\omega) = \arg A + \sum_{i=1}^{m} \arg(\mathrm{i}\,\omega - p_{0i}) - \sum_{i=1}^{n} \arg(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi i}). \qquad (6.59)$$

Следует иметь в виду, что при наличии потерь, когда корни $p_{01}, p_{02}, \ldots p_{0m}$ и $p_{\pi 1}, p_{\pi 2}, \ldots p_{\pi n}$ являются вещественными или комплексными, коэффициент передачи $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ не может принимать нулевых или бесконечно больших значений ни при каких значениях частоты [за исключением $\omega = 0$ или $\omega = \infty$, когда $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ может обращаться в нуль]. Из выражения (6.58), однако, видно, что при некоторых значениях ω модуль $K(\mathrm{i}\,\omega)$ проходит через свои экстремальные значения. Именно, при частоте ω_{01}, равной мнимой части корня p_{01} (и сопряжённого корня $p_{02} = p_{01}^*$), когда разность $(\mathrm{i}\,\omega - p_{01})$ снижается по абсолютной величине до минимума, равного вещественной части p_{01}, кривая $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ проходит через свой первый минимум, при частоте ω_{02}, равной мнимой части корня, p_{03} — через второй минимум и т. д.

Аналогично при частотах $\omega_{\pi 1}, \omega_{\pi 2}\ldots$ и т. д. кривая $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ проходит через свои максимальные значения.

Максимумы и минимумы кривой $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ будут тем острее, чем меньше вещественные части корней $p_{01}, p_{02}, \ldots p_{0m}$, т. е. чем меньше активные сопротивления по сравнению с реактивными сопротивлениями в элементах четырёхполюсника.

С помощью рассуждений, аналогичных приведённым в § 6.3, можно показать, что модуль коэффициента передачи есть функция чётная относительно ω, а фазовая характеристика — нечётная.

Для выявления характера зависимости $|K(\mathrm{i}\,\omega)|$ и особенно характера фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ удобно рассмотреть сперва случай чисто реактивных четырёхполюсников (без потерь), когда корни p_{0k} и $p_{\pi k}$ обращаются либо в нуль, либо представляют собой чисто мнимые величины. Такое рассмотрение особенно полезно для четырёхполюсников с относительно малыми потерями, используемых в качестве колебательных систем в радиотехнических устройствах, а также в качестве электрических фильтров.

В соответствии с выражением (6.56) в числителе правой части (6.58) m' корней (вещественных) обращается в нуль, а остальные $2\boldsymbol{m}$ чисто мнимых корней образуют $\boldsymbol{m}$ пар сопряжённых корней вида:

$$p_{0\kappa} = \mathrm{i}\,\omega_{0\kappa},\quad p_{0\kappa+1} = p_{0\kappa}^* = -\mathrm{i}\,\omega_{0\kappa}.$$

В знаменателе (6.58) соответственно n' корней обращается в нуль, а остальные $2\boldsymbol{n}$ чисто мнимых корней образуют $\boldsymbol{n}$ пар сопряжённых корней вида:

$$p_{\pi\kappa} = \mathrm{i}\,\omega_{\pi\kappa};\quad p_{\pi\kappa+1} = p_{\pi\kappa}^* = -\mathrm{i}\,\omega_{\pi\kappa}.$$

Учитывая, что

$$(\mathrm{i}\,\omega - p_{0\kappa})(\mathrm{i}\,\omega - p_{0\kappa}^*) = \omega_{0\kappa}^2 - \omega^2,$$

$$(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi\kappa})(\mathrm{i}\,\omega - p_{\pi\kappa}^*) = \omega_{\pi\kappa}^2 - \omega^2$$

и объединяя каждую пару сопряжённых корней в выражениях (6.58) и (6.59) одним индексом, получим:

$$K(\mathrm{i}\,\omega) = A\,(\mathrm{i}\,\omega)^{(m'-n')}\cdot\frac{(\omega_{01}^2-\omega^2)(\omega_{02}^2-\omega^2)\ldots(\omega_{0}^2 m-\omega^2)}{(\omega_{\pi 1}^2-\omega^2)(\omega_{\pi 2}^2-\omega^2)\ldots(\omega_{\pi n}^2-\omega^2)}, \qquad (6.58')$$

$$\varphi(\omega) = (m'-n')\,\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{m}\arg\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\arg\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{\pi i}^2}\right). \qquad (6.59')$$

Следует иметь в виду, что в отличие от входного сопротивления двухполюсника между числом нулей и полюсов коэффициента передачи $K(\mathrm{i}\,\omega)$ четырёхполюсника непосредственной связи нет, так же как и не обязательно их чередование [см. ф-лу (6.58)]. Из выражения (6.59′) видно, что при частотах $\omega = \omega_{0i}$ и $\omega = \omega_{\pi i}$, при которых изменяются знаки разностей $\omega_{0i}^2 - \omega^2$ или $\omega_{\pi i}^2 - \omega^2$, фаза $\varphi(\omega)$ изменяется скачками $\pm\pi$. Каждый переход ω через ω_{0i} в направлении повышения частоты даёт скачок фазы на $+\pi$, а переход через $\omega_{\pi i}$ на $-\pi$. Если изменять частоту от 0 до ∞, то полное изменение фазы будет равно $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\,\pi$.

Для четырёхполюсников, представляющих собой цепную схему типа, показанного на рис. 6.11, расположение нулей коэффициента передачи на оси частот определяется характером элементов связи $\boldsymbol{X}_{ik}$ между отдельными контурами и характером элементов $\boldsymbol{X}_i$. Каждая ёмкостная связь даёт один нуль при $\omega = \infty$ (поскольку сопротивление связи обращается в нуль), а индуктивная при $\omega = 0$. Наличие нулей при $\omega \neq 0$ или $\omega \neq \infty$ возможно только в случае, если хотя бы один из элементов связи $\boldsymbol{X}_{ik}$ представляет собой последовательное соединение L_{ik}, C_{ik} или хо-

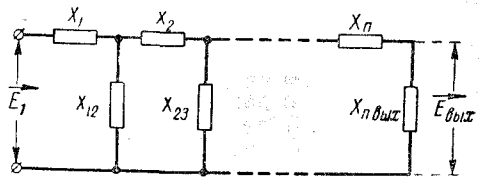


Рис. 6.11

тя бы один из элементов L_i, C_i представляет собой параллельное соединение L_i, C_i. При одной из частот $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_{ik} C_{ik}}}$ или $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$, соответствующих последовательному резонансу в одном из элементов X_{ik} или параллельному резонансу в одном из элементов X_i, связь между контурами обрывается и $|K(i\omega)|$ обращается в нуль.

Поясним приведённые положения некоторыми примерами.

Рассмотрим двухзвенный фильтр[1]) нижних частот (рис. 6.12). Пренебрегая активными сопротивлениями, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left(i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1}\right)\vec{I}_1 - \frac{1}{i\omega C_1}\vec{I}_2 = \vec{E}_1 \\ -\frac{1}{i\omega C_1}\vec{I}_1 + \left(i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2}\right)\vec{I}_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (6.60)$$

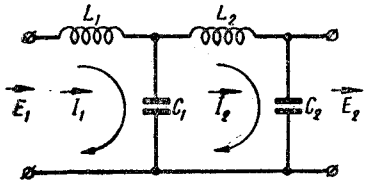


Рис. 6.12

При составлении этих уравнений напряжениям, создаваемым токами, направленными навстречу основному току данного контура, приписан знак минус. Полагая для простоты $L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$ и умножая все коэффициенты в системе (6.60) на $i\omega$, в соответствии с выражением (6.4) получим

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1 & -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{2}{C_1} - \omega^2 L_1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1\right)\left(\frac{2}{C_1} - \omega^2 L_1\right) -$$

$$-\frac{1}{C_1^2} = \frac{1}{C_1^2}(1 - 3\omega^2 L_1 C_1 + \omega^4 L_1^2 C_1^2).$$

Минор M_{12}^* в данном случае равен $-\frac{1}{C_1}$.

Сопротивление элемента, с которого снимается напряжение,

$$Z_{n\,вых} = \frac{1}{i\omega C_1}.$$

[1]) Для упрощения примера здесь рассматривается случай ненагруженного фильтра. Поведение фильтра при наличии нагрузки рассматривается в § 8.7.

Подставляя все найденные величины в ф-лу (6.15), будем иметь

$$K(i\omega) = (-1)^{n+1}\frac{M_{1n}}{\Delta} Z_{n\,вых} = (-1)^{n+1} i\omega \frac{M_{1n}^*}{\Delta^*} Z_{n\,вых} =$$

$$= (-1)^{2+1}\frac{1}{i\omega C_1} i\omega \frac{-\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1^2}\left(1 - 3\omega^2 L_1 C_1 + \omega^4 L_1^2 C_1^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 - 3\omega^2 L_1 C_1 + \omega^4 L_1^2 C_1^2}.$$

В рассматриваемом примере коэффициент передачи не имеет нулей (если не считать $\omega = \infty$). Полюсы коэффициента передачи являются корнями уравнения

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

где

$$x = (i\omega)^2 L_1 C_1 = \frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2}.$$

Таким образом,

$$x_1 = -0{,}38; \quad x_2 = -2{,}62.$$

Отсюда частоты, соответствующие полюсам коэффициента передачи:

$$\frac{\omega_{п1}}{\omega_0} = \sqrt{0{,}38} = 0{,}62,$$

$$\frac{\omega_{п2}}{\omega_0} = \sqrt{2{,}62} = 1{,}62.$$

Представив $K(i\omega)$ в форме

$$K(i\omega) = \frac{\omega_0^4}{(\omega_{п_1}^2 - \omega^2)(\omega_{п_2}^2 - \omega^2)},$$

находим, что при изменении частоты в пределах от 0 до ∞ фаза коэффициента передачи:

$$\varphi(\omega) = \quad 0 \quad \text{на участке } 0 < \omega < \omega_{п1},$$
$$\varphi(\omega) = -\pi \quad ,, \quad ,, \quad \omega_{п1} < \omega < \omega_{п2},$$
$$\varphi(\omega) = -2\pi \quad ,, \quad ,, \quad \omega_{п2} < \omega < \infty.$$

Модуль $K(i\omega)$ определяется выражением

$$|K(i\omega)| = \frac{1}{\left|1 - 3\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right|}.$$

Графики модуля и фазы приведены на рис. 6.13.

Для фильтра высших частот (рис. 6.14) подобным же образом находим:

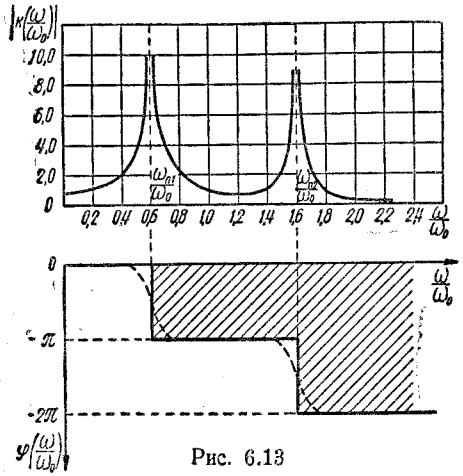


Рис. 6.13

$$K(i\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{1 - 3\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

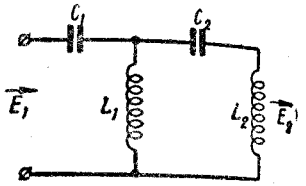


Рис. 6.14

Графики модуля и фазы коэффициента передачи для фильтра высших частот изображены на рис. 6.15.

Рассмотрим в заключение схему, показанную на рис. 6.16. Нетрудно получить

$$K(i\omega) = \frac{1 - \omega^2 L_1 C_1}{1 - \omega^2 L_1 (C_1 + C_2)}.$$

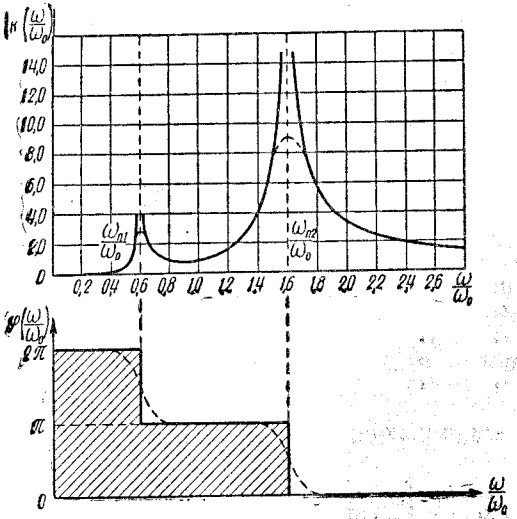


Рис. 6.15

Коэффициент передачи равен нулю при частоте $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, т. е. при параллельном резонансе контура, содержащего L_1 и C_1, и проходит через максимум — при частоте $\omega_{n1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_1 + C_2)}}$, соответствующей последовательному резонансу.

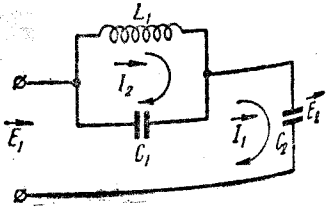


Рис. 6.16

Графики модуля и фазы приведены на рис. 6.17 (при $C_1 = C_2$).

При учёте потерь в элементах четырёхполюсника модуль коэффициента передачи нигде не обращается ни в нуль, ни в бесконечность. Поведение $|K(i\omega)|$ вблизи резонансных частот при наличии потерь показано на рис. 6.13, 6.15 и 6.17 пунктиром.

Фазовые характеристики также изменяют свою форму. Вместо скачков $\pm\pi$ фаза изменяется плавно, причём наибольшая крутизна изменения фазы получается в точках ω_{01} и ω_{n1}. Ход фазовых характеристик для реальных четырёхполюсников с потерями показан на рис. 6.13, 6.15 и 6.17 пунктиром.

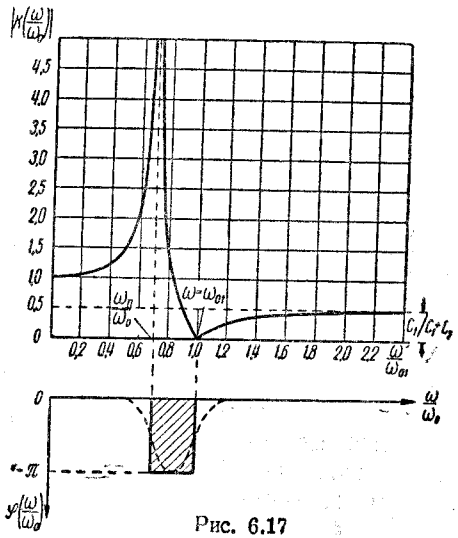


Рис. 6.17

Из всего предыдущего рассмотрения видно, что между частотной характеристикой (модуль коэффициента передачи) и фазовой характеристикой (аргумент) четырёхполюсника существует определённая связь. В теории цепей доказывается, что задание частотной характеристики однозначно определяет фазовую характеристику и наоборот[1]). Из приведённого выше материала следует, в частности, что в окрестности точек ω_{ni}, где модуль коэффициента передачи проходит через максимумы, наклон фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ отрицателен, а вблизи точек ω_{0i}, соответствующих минимуму $K(i\omega)$, наклон фазовой характеристики положителен.

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующее положение:

на участках частотного диапазона, где производная функции $\varphi(\omega)$ положительна, модуль коэффициента передачи проходит через минимум; в полосе пропускания цепи фазовая характеристика любого четырёхполюсника имеет отрицательную производную; положительный наклон фазовая характеристика может

[1]) Исключение составляют лишь некоторые мостовые и иные цепи специального вида, в которых между фазовой и частотной характеристиками нет однозначной связи.

иметь только в „полосе задержания" четырёхполюсника, т. е. на том участке диапазона, где ослабление амплитуд максимально.

Величина наклона фазовой характеристики в точке ω_p, соответствующей середине полосы пропускания, определяется соотношением между активными и реактивными сопротивлениями элементов четырёхполюсника на рассматриваемой частоте. В случае, например, одиночного контура [см. ф-лу (4.34)] наклон фазовой характеристики в точке $\omega = \omega_p$ равняется[1])

$$\left| \frac{d\varphi}{d\omega} \right| = \tau = \frac{2Q}{\omega_p}.$$

§ 6.5. Основные уравнения пассивного четырёхполюсника

Линейные четырёхполюсники могут быть разбиты на два основных вида: пассивные и активные. Пассивные четырёхполюсники не содержат источников энергии (генераторов) между входными и выходными зажимами; токи и напряжения внутри четырёхполюсника могут являться результатом только подключения источников энергии к внешним зажимам. Примерами пассивных четырёхполюсников являются фильтры, линии и т. д.

Активные четырёхполюсники содержат источники энергии между зажимами. К линейным активным четырёхполюсникам относятся все виды усилителей, работающие в линейном режиме. В связи с этим в гл. 10, посвящённой изучению линейных усилителей, будет затронут вопрос об особенностях активных четырёхполюсников. В данной главе рассматриваются только пассивные четырёхполюсники.

В предыдущих параграфах напряжение на выходе четырёхполюсника рассматривалось как результат приложения электродвижущей силы только к входным зажимам четырёхполюсника. В теории и практике часто встречается необходимость рассмотрения более общего случая, когда электродвижущие силы действуют одновременно со стороны входа и выхода четырёхполюсника.

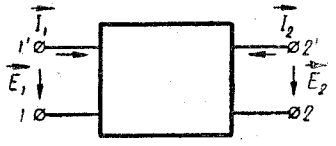


Рис. 6.18

Обобщённая схема подобного пассивного четырёхполюсника представлена на рис. 6.18. Схема соединения элементов L, C и r внутри четырёхполюсника может быть произвольна. Единственное ограничение, помимо требования линейности, заключается в условии, чтобы внутри четырёхполюсника

[1]) В главах 4 и 5, на рис. 4.2, 4.4, 4.7, 4.11, 5.17 и 5.18, фазовые характеристики проведены с положительным наклоном, так как в исходные выражения для токов и напряжений угол $\varphi(\omega)$ в указанных главах вводится со знаком минус.

не содержалось источников энергии. Через $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на рис. 6.18 обозначены электродвижущие силы, приложенные соответственно к зажимам *1—1'* или *2—2'*. Внутренние сопротивления генераторов, создающих эти электродвижущие силы, включены в состав четырёхполюсников; таким образом, между зажимами *1* и *1'*, а также *2* и *2'*, сопротивления источников равны нулю. Составим выражения для токов, посылаемых источниками эдс $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в четырёхполюсник со стороны зажимов *1—1'* и *2—2'*. Для этого воспользуемся общим выражением (6.9), считая, что генератор $\vec{E}_1$ входит в замкнутый контур *1*, а генератор $\vec{E}_2$ — в контур *2*.

Для определения тока $\vec{I}_1$ подставим в ур-ние (6.9) $j = 1$ и $\nu = 1$, $\nu = 2$:

$$\vec{I}_1 = \frac{M_{11}\vec{E}_1}{\Delta} - \frac{M_{21}\vec{E}_2}{\Delta}. \tag{6.61}$$

Для определения $\vec{I}_2$ подставим $j = 2$ и $\nu = 1$, $\nu = 2$:

$$\vec{I}_2 = -\frac{M_{12}\vec{E}_1}{\Delta} + \frac{M_{22}\vec{E}_2}{\Delta}. \tag{6.62}$$

Заметим, что миноры M_{12} и M_{21} равны между собой [см. § 6.3, сноску на стр. 196].

Введём следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_{11}}{\Delta} &= Y_{11} \\ -\frac{M_{12}}{\Delta} &= Y_{12} = Y_{21} \\ \frac{M_{22}}{\Delta} &= Y_{22} \end{aligned}\right\}. \tag{6.63}$$

Тогда ур-ния (6.61) — (6.62) можно записать в форме:

$$\left.\begin{aligned} \vec{I}_1 &= Y_{11}\vec{E}_1 + Y_{12}\vec{E}_2 \\ \vec{I}_2 &= Y_{21}\vec{E}_1 + Y_{22}\vec{E}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{6.64}$$

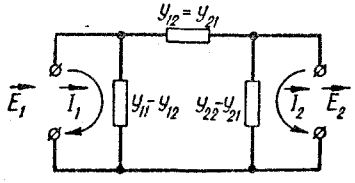


Рис. 6.19

Из этих выражений видно, что Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} и Y_{22} имеют смысл и размерность проводимостей, а любой линейный четырёхполюсник может быть представлен в виде эквивалентной П-образной схемы, показанной на рис. 6.19.

Если выходные зажимы замкнуть накоротко, т. е. положить $E_2=0$, то будем иметь:

$$\vec{I}_1 = Y_{11}\vec{E}_1,$$
$$\vec{I}_2 = Y_{21}\vec{E}_1,$$

или

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{\vec{E}_1}{\vec{I}_1} \\ Y_{21} &= \frac{\vec{E}_1}{\vec{I}_2} \end{aligned}\right\}. \qquad (6.65)$$

Таким образом, Y_{11} и Y_{21} совпадают с введёнными в § 6.2 входной проводимостью и взаимной проводимостью четырёхполюсника [ф-лы (6.10) и (6.11)]. Это и естественно, так как в § 6.2 [в выражении (6.11)] ток в выходном контуре определялся в предположении, что $E_2=0$, т. е. при замкнутых накоротко выходных зажимах введённых последовательно в выходной контур.

Аналогично, если замкнуть накоротко зажимы эдс E_1 (т. е. положить $E_1=0$), получим:

$$\vec{I}_1 = Y_{12}\vec{E}_2;$$
$$\vec{I}_2 = Y_{22}\vec{E}_2,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{\vec{I}_1}{\vec{E}_2} \\ Y_{22} &= \frac{\vec{I}_2}{\vec{E}_2} \end{aligned}\right\}. \qquad (6.66)$$

Величина Y_{22} представляет собой входную проводимость четырёхполюсника со стороны эдс E_2 (при коротком замыкании зажимов эдс E_1), а Y_{12} — взаимную проводимость, связывающую ток $\vec{I}_1$ с напряжением $\vec{E}_2$. Как уже отмечалось выше, $Y_{12}=Y_{21}$. Этот факт, формально вытекающий из симметрии минора M_{ik} относительно i и k, лежит в основе так называемой теоремы взаимности.

Согласно этой теореме, при перемене местами генератора и точек измерения, результат не изменяется, т. е. если при подключении к входным зажимам генератора с эдс $\vec{E}_1$ на выходе получался ток $\vec{I}_2$, то при подключении этого же генератора к выходным зажимам ток $\vec{I}_1$ на входе будет равняться току $\vec{I}_2$. При этом предполагается, конечно, что внутренние сопротивления генераторов, а также нагрузочные сопротивления в обоих случаях одинаковы.

Из ур-ний (6.64) и схемы рис. 6.19 вытекает, в частности, что полный ток $\vec{I}_1$ может быть представлен в виде суммы двух токов „короткого замыкания“: одного, равного $Y_{11}\vec{E}_1$, вызываемого напряжением $\vec{E}_1$ при коротком замыкании выходных зажимов и второго, равного $Y_{12}\vec{E}_2$, вызываемого генератором $\vec{E}_2$ при коротком замыкании входных зажимов.

Уравнениям (6.64) нетрудно придать несколько иную форму, если в качестве исходных величин принять токи $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$. Решая ур-ния (6.64) относительно E_1 и E_2, придём к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_1 &= Z_{11}\vec{I}_1 + Z_{12}\vec{I}_2 \\ \vec{E}_2 &= Z_{21}\vec{I}_1 + Z_{22}\vec{I}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (6.67)$$

Коэффициенты Z_{11}, Z_{12}, Z_{21} и Z_{22}, как в этом нетрудно убедиться путём совместного решения ур-ний (6.64) относительно $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, связаны с Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} и Y_{22} следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2} \\ Z_{12} = Z_{21} &= -\frac{Y_{12}}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2} \\ Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (6.68)$$

На основании ур-ний (6.67) любой четырёхполюсник можно представить в виде эквивалентной T-образной схемы, показанной на рис. 6.20. Нетрудно видеть, что при разомкнутых зажимах $2-2'$ ($I_2=0$) справедливы соотношения:

$$\vec{E}_1 = Z_{11}\vec{I}_1,$$
$$\vec{E}_2 = Z_{21}\vec{I}_1.$$

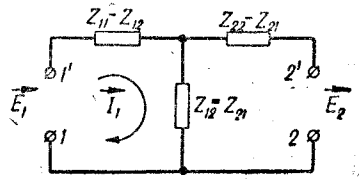


Рис. 6.20

Таким образом,

$$Z_{11}=\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1}$$

представляет собой входное сопротивлениие четырёхполюсника со стороны зажимов $1-1'$ при размыкании зажимов $2-2'$, а

$$Z_{21}=\frac{\dot{E}_2}{\dot{I}_1}$$

может рассматриваться как взаимное сопротивление или сопротивление связи.

Очевидно, что при разомкнутых зажимах $1-1'$ $(\dot{I}_1=0)$ будем иметь:

$$\dot{E}_1=Z_{12}\dot{I}_2,$$
$$\dot{E}_2=Z_{22}\dot{I}_2,$$

откуда получается:

$$Z_{22}=\frac{\dot{E}_2}{\dot{I}_2},$$

$$Z_{12}=\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_2}.$$

Здесь Z_{22} — входное сопротивление четырёхполюсника со стороны зажимов $2-2'$ (при разомкнутых зажимах $1-1'$), а Z_{12} — сопротивление связи.

Как и в случае взаимных проводимостей Y_{12} и Y_{21}, имеет место теорема взаимности, т. е. $Z_{21}=Z_{12}$.

Если четырёхполюсник возбуждается только со стороны зажимов $1-1'$ [как это было принято при выводе ф-л (6.10) и (6.10′)], то под $\dot{E}_2$ следует подразумевать взятое с обратным знаком падение напряжения на нагрузочном сопротивлении, т. е. $\dot{E}_2=-\dot{I}_n Z_n$ (рис. 6.21).

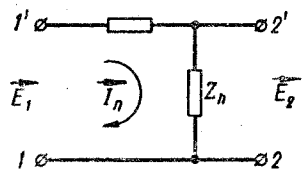


Рис. 6.21

Зажимы $2-2'$ можно при этом считать разомкнутым (рис. 6.21) и входное сопротивление четырёхполюсника между зажимом $1-1'$, равное Z_{11}, может быть определено при заданных элементах цепи с помощью выражения (6.10′).

ГЛАВА 7

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

§ 7.1. Общие замечания

Система с распределёнными постоянными может рассматриваться как предельный случай многозвенной цепной схемы при числе звеньев, стремящемся к бесконечности. С этой точки зрения логично рассматривать теорию линий после изучения свойств цепных схем с сосредоточенными постоянными.

Удобнее и нагляднее, однако, поступать в обратном порядке и трактовать свойства цепных схем на базе теории линий. Эта задача будет выполнена в гл. 8. В данной же главе изучается теория однородных линий, т. е. линий, параметры которой на единицу длины — индуктивность, ёмкость, сопротивление и проводимость изоляции — являются одинаковыми по всей длине линии.

Теория подобных линий лежит в основе теории и более сложных систем с распределёнными постоянными. В данной главе рассматривается стационарный режим при возбуждении линии гармонической внешней силой. Более сложные воздействия, а также процессы установления при включении в линию синусоидальной эдс, рассматриваются в гл. 9.

§ 7.2. Основные уравнения для однородной линии при гармоническом возбуждении

Пусть задана однородная двухпроводная линия, обладающая следующими параметрами, отнесёнными к единице длины: индуктивностью L, ёмкостью C, сопротивлением R и проводимостью изоляции G. К входным зажимам линии подключён генератор синусоидальной электродвижущей силы с амплитудой E, частотой ω и внутренним сопротивлением $Z_г$, а к выходным зажимам подсоединено нагрузочное сопротивление $Z_н$ (рис. 7.1).

Выделим бесконечно малый элемент линии длиной Δx и введём обозначения, показанные на рис. 7.2. Именно: x_0 — абсцисса середины элемента Δx, u_1 и u_2 — разность потенциалов между проводами

в сечениях $1-1'$ и $2-2'$ соответственно, i_1 и i_2 — токи в этих же сечениях. Через u_0 и i_0 обозначены напряжение и ток в сечении x_0.

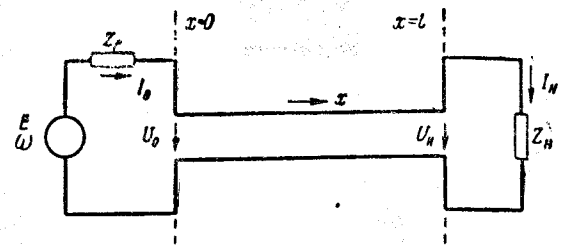


Рис. 7.1

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, можем написать следующие уравнения для напряжений и токов:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_2 &= R\Delta x i_0 + L\Delta x \frac{\partial i_0}{\partial t} \\ i_1 - i_2 &= G\Delta x u_0 + C\Delta x \frac{\partial u_0}{\partial t} \end{aligned}\right\}. \tag{7.1}$$

Здесь $R\Delta x$ — сопротивление элемента линии длиной Δx (оба провода соединены последовательно), $L\Delta x$ — индуктивность, $C\Delta x$ — ёмкость и $G\Delta x$ — утечка того же элемента.

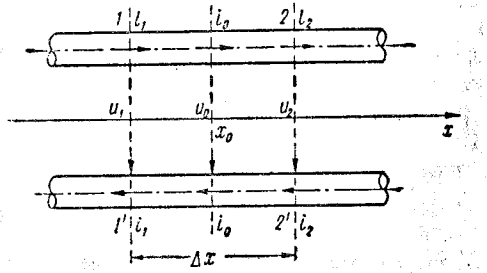


Рис. 7.2

При выбранных на рис. 7.2 направлениях токов можно, как и в случае цепей с сосредоточенными постоянными, считать, что напряжение u убывает слева направо. То же самое относится и к току.

Первое из ур-ний (7.1) показывает, что изменение напряжения на элементе линии обусловлено падением напряжения на сопротивлении $R\Delta x$ и индуктивности $L\Delta x$.

Из второго уравнения следует, что изменение тока обусловлено утечкой тока через проводимость изоляции $G\Delta x$ и через ёмкость $C\Delta x$ (ток смещения). Можно поэтому с точностью до бесконечно малых второго порядка считать:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_2 &= -\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x \\ i_1 - i_2 &= -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x \end{aligned}\right\}. \tag{7.2}$$

Подставляя эти выражения в ур-ния (7.1) получим следующие дифференциальные уравнения („телеграфные“ уравнения):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.3}$$

Используем теперь оговоренное ранее условие гармонического возбуждения линии. Если эдс генератора изменяется по закону

$$u(t) = U\cos\omega t = \mathrm{Re}\,[Ue^{i\omega t}], \tag{7.4}$$

то в установившемся режиме напряжения и токи в любом сечении линии изменяются во времени также гармонически. Можно поэтому решение ур-ний (7.3) искать в форме:

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= \mathrm{Re}\,[\vec{U}(x)\,e^{i\omega t}] \\ i(x, t) &= \mathrm{Re}\,[\vec{I}(x)\,e^{i\omega t}] \end{aligned}\right\}. \tag{7.5}$$

где $\vec{U}(x)$ и $\vec{I}(x)$ — комплексные амплитуды, являющиеся функциями только x. Подставляя выражения (7.5) в ур-ния (7.3) и опуская знак Re, после сокращения множителей получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}(x)}{\partial x} + (R + i\omega L)\vec{I}(x) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x} + (G + i\omega C)\vec{U}(x) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.6}$$

Теперь нетрудно разделить переменные $\vec{U}(x)$ и $\vec{I}(x)$ и составить уравнения для напряжения и тока. С этой целью продифференцируем первое уравнение системы (7.6) по x:

$$\frac{\partial^2 \vec{U}(x)}{\partial x^2} + (R + i\omega L)\frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x} = 0$$

и подставим $\frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x}$ из второго уравнения системы (7.6):

$$\frac{\partial^2 \vec{U}(x)}{\partial x^2} - (R + i\omega L)(G + i\omega C)\vec{U}(x) = 0. \tag{7.7}$$

Аналогичным образом получается уравнение и для тока

$$\frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} - (R + i\omega L)(G + i\omega C)\vec{I}(x) = 0. \tag{7.8}$$

Обозначив для сокращения письма:

$$\left.\begin{aligned} Z &= R + i\omega L \\ Y &= G + i\omega C \end{aligned}\right\}, \tag{7.9}$$

$$\gamma^2 = ZY = (R + i\omega L)(G + i\omega C), \tag{7.10}$$

перепишем ур-ния (7.7) и (7.8) в форме:

$$\frac{\partial^2 \vec{U}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \vec{U}(x) = 0, \tag{7.7'}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \vec{I}(x) = 0. \tag{7.8'}$$

Полные интегралы этих уравнений, как известно, будут:

$$\vec{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{+\gamma x} \tag{7.11}$$

$$\vec{I}(x) = B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{+\gamma x} \tag{7.12}$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2, B_1 и B_2 определяются из граничных условий. Подставляя выражения (7.11)—(7.12) в ур-ния системы (7.6) и используя обозначения (7.9) и (7.10), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} (ZB_1 - \gamma A_1) e^{-\gamma x} + (ZB_2 + \gamma A_2) e^{\gamma x} &= 0 \\ (YA_1 - \gamma B_1) e^{-\gamma x} + (YA_2 + \gamma B_2) e^{\gamma x} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.13}$$

Разделим полученные уравнения на γ и введём обозначение:

$$W = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}. \tag{7.14}$$

Тогда уравнениям системы (7.13) можно придать следующую форму:

$$\left.\begin{aligned} (WB_1 - A_1) e^{-\gamma x} + (WB_2 + A_2) e^{+\gamma x} &= 0 \\ \left(\frac{1}{W} A_1 - B_1\right) e^{-\gamma x} + \left(\frac{1}{W} A_2 + B_2\right) e^{+\gamma x} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.15}$$

Так как эти соотношения должны выполняться для любых значений x, то коэффициенты при $e^{-\gamma x}$ и $e^{+\gamma x}$ должны по отдельности равняться нулю. Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{A_1}{W} \\ B_2 &= -\frac{A_2}{W} \end{aligned}\right\}. \tag{7.16}$$

Отсюда видно, что система ур-ний (7.11)—(7.12) может быть выражена только через две постоянные интегрирования A_1 и A_2:

$$\vec{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{+\gamma x}, \tag{7.11'}$$

$$\vec{I}(x) = \frac{A_1}{W} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{W} e^{+\gamma x}. \tag{7.12'}$$

Для определения A_1 и A_2 достаточно двух соотношений, связывающих ток, напряжение и сопротивление на каждом из концов линии. Прежде чем обратиться к составлению этих соотношений, выясним физический смысл общих решений (7.11′) и (7.12′). С этой целью рассмотрим более подробно постоянные величины γ и W.

В соответствии с определением (7.10) комплексную величину γ можно представить в форме

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \beta + i\alpha. \tag{7.17}$$

Вещественная часть γ, т. е. β, характеризует убывание амплитуды напряжения или тока на единицу длины линии. Как будет показано в следующем параграфе, β определяется потерями в линии и всегда положительно. Величина β называется постоянной затухания линии.

Мнимая часть γ, т. е. α, определяет изменение фазы тока или напряжения вдоль линии (на единицу длины) и называется фазовой постоянной или угловым коэффициентом линии.

Комплексный коэффициент $\gamma = \beta + i\alpha$, определяющий изменение амплитуды и фазы на единицу длины, называется постоянной распространения линии.

Подставив выражение (7.17) в ур-ние (7.11′), получим

$$\vec{U}(x) = A_1 e^{-\beta x} e^{-i\alpha x} + A_2 e^{\beta x} e^{i\alpha x}. \tag{7.18}$$

Это выражение показывает, что в установившемся режиме (при гармоническом возбуждении) напряжение в линии является суммой двух волн, распространяющихся в линии во взаимно противоположных направлениях.

Первая волна, амплитуда которой с увеличением x убывает, а фазовое отставание растёт, движется от генератора к концу линии. Эта волна называется прямой или падающей.

Вторая волна, называемая обратной или отражённой волной, движется от конца линии к её началу. Это видно из того, что с увеличением x, т. е. при приближении к концу линии, амплитуда этой волны растёт, а фаза получает всё бóльшее упреждение.

Нетрудно определить скорость распространения волн вдоль линии. Выделим отрезок линии l_1 и составим выражение для фазового сдвига, претерпеваемого одной из волн, например прямой, на этом отрезке. Очевидно,

$$\varphi_{l_1} = \alpha l_1.$$

С другой стороны, при частоте возбуждающей эдс ω, этот же сдвиг может быть представлен в форме

$$\varphi_{l_1} = \omega t_1,$$

где t_1 — время пробега волной отрезка l_1.

Приравнивая правые части этих выражений, получим

$$\omega t_1 = \alpha l_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{\alpha}{\omega} l_1 = \frac{1}{v} l_1. \qquad (7.19)$$

Следовательно, скорость распространения волн („фазовая скорость") равна

$$v = \frac{\omega}{\alpha}, \qquad (7.20)$$

а длина волны в линии

$$\lambda = vT = \frac{\omega}{\alpha} T = \frac{2\pi}{\alpha}. \qquad (7.21)$$

Существенно отметить, что скорость v зависит от частоты ω лишь при наличии потерь в линии. В случае же идеальной линии ($R = 0$, $G = 0$) выражение (7.17) обращается в следующее:

$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} = i\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \omega\sqrt{LC}.$$

Таким образом, в линии без потерь скорость волны, независимо от частоты возбуждения, равна

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (7.22)$$

Полученные результаты могут быть распространены и на ур-ние (7.12′) для тока. По аналогии с ур-нием (7.18) его можно записать в форме

$$\vec{I}(x) = \frac{A_1}{W} e^{-\beta x} e^{-i\alpha x} - \frac{A_2}{W} e^{\beta x} e^{i\alpha x}. \qquad (7.23)$$

Из сравнения выражений (7.23) и (7.18) видно, что прямая волна тока связана с прямой волной напряжения законом Ома, т. е.

$$\vec{I}_{пр}(x) = \frac{U_{пр}(x)}{W}.$$

Аналогичное выражение можно написать и для отражённых волн тока и напряжения. Величина W, имеющая в соответствии с определением (7.14) размерность сопротивления, называется характеристическим или волновым сопротивлением линии.

Следует однако иметь в виду, что по отношению к результирующим токам и напряжениям в линии закон Ома, в общем случае, неприменим. Это объясняется тем, что отражённые волны напряжения и тока входят в выражения (7.11′) и (7.12′) с разными знаками.

Нетрудно выяснить физический смысл знака минус перед вторым слагаемым (отражённой волной тока) в выражениях (7.12′) и (7.23). При питании линии со стороны зажимов 1 — 1′ (рис. 7.3) и отсчёте положительного направления напряжения от зажима *1* к зажиму *1′*, положительное направление волны тока в линии обозначено стрелкой *а* на рис. 7.3. Если же линию питать со стороны зажимов 2—2′, то при одинаковом направлении эдс положительное направление волны тока в линии будет противоположно (стрелка *б* на рис. 7.3). Таким образом, перенесение одного и того же источника эдс от зажимов *1—1′* к зажимам *2—2′* связано с изменением направления тока в линии.

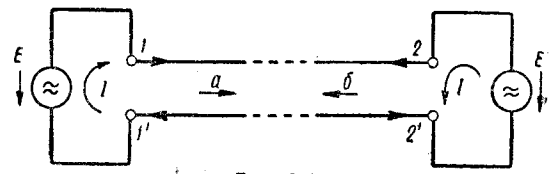


Рис. 7.3

Рассматривая отражённую волну тока как результат действия некоторого эквивалентного генератора, питающего линию со стороны зажимов *2—2′*, приходим к выводу, что если отражённая волна напряжения входит в ур-ние (7.11′) со знаком плюс (как и падающая волна), то отражённая волна тока в ур-нии (7.12′) должна быть взята со знаком минус.

§ 7.3. Учёт граничных условий

При обозначениях рис. 7.1 можно написать следующие уравнения для генераторного и нагрузочного концов линии:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}_0 + \vec{I}_0 Z_г &= \vec{E}\\ \vec{U}_н - \vec{I}_н Z_н &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{7.24}$$

Подставляя в ур-ния (7.11′) и (7.12′) $x=0$, получим напряжение и ток на входе линии:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}_0 &= A_1 + A_2,\\ \vec{I}_0 &= \frac{1}{W}(A_1 - A_2)\end{aligned}\right\}. \tag{7.25}$$

При подстановке $x=l$ получим напряжение и ток в конце линии:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}_н &= A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}\\ \vec{I}_н &= \frac{1}{W}\left(A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{7.26}$$

При подстановке этих выражений в граничные условия (7.24), получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}(W+Z_г)A_1 + (W-Z_г)A_2 &= W\vec{E}\\ (W-Z_н)e^{-\gamma l}A_1 + (W+Z_н)e^{\gamma l}A_2 &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{7.24′}$$

Решая совместно эти два уравнения, находим постоянные интегрирования A_1 и A_2:

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= \frac{(Z_н+W)W e^{\gamma l}\vec{E}}{(W+Z_г)(W+Z_н)e^{\gamma l} - (W-Z_г)(W-Z_н)e^{-\gamma l}}\\ A_2 &= \frac{(Z_н-W)W e^{-\gamma l}\vec{E}}{(W+Z_г)(W+Z_н)e^{\gamma l} - (W-Z_г)(W-Z_н)e^{-\gamma l}}\end{aligned}\right\}. \tag{7.27}$$

Введём обозначения:

$$\vec{\mu}_н = \frac{Z_н - W}{Z_н + W}, \tag{7.28}$$

$$\vec{\mu}_г = \frac{Z_г - W}{Z_г + W}. \tag{7.29}$$

Тогда выражения (7.27) можно записать в более сжатой форме:

$$A_1 = \frac{W}{(Z_г+W)} \cdot \frac{e^{\gamma l}\vec{E}}{[e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l}]}, \tag{7.30}$$

$$A_2 = \frac{W}{(Z_г+W)} \cdot \frac{\vec{\mu}_н e^{-\gamma l}\vec{E}}{[e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l}]}. \tag{7.31}$$

Подставив полученные выражения в общие решения (7.11′) и (7.12′), получим следующие уравнения, определяющие комплексные амплитуды напряжения и тока в любом сечении линии x при любых значениях параметров генератора, линии и нагрузки:

$$\vec{U}(x) = \frac{W}{(W+Z_г)} \cdot \frac{[e^{\gamma(l-x)} + \vec{\mu}_н e^{-\gamma(l-x)}]}{[e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l}]} \cdot \vec{E}, \tag{7.32}$$

$$\vec{I}(x) = \frac{1}{(W+Z_г)} \cdot \frac{[e^{\gamma(l-x)} - \vec{\mu}_н e^{-\gamma(l-x)}]}{[e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l}]} \cdot \vec{E}. \tag{7.33}$$

Полученные выражения позволяют выявить условия образования отражённой волны, а также найти соотношение между амплитудами этих волн.

Прежде всего убеждаемся, что у конца линии ($x=l$), т. е. в точках, где происходит отражение, амплитуды обеих волн напряжения определяются следующими соотношениями:

$$\vec{U}_{пр}(l) = \frac{W\vec{E}}{(W+Z_г)(e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l})}, \tag{7.34}$$

$$\vec{U}_{отр}(l) = \vec{\mu}_н \vec{U}_{пр}(l). \tag{7.35}$$

Отсюда следует, что коэффициент $\vec{\mu}_н$, определяемый формулой (7.28), может быть назван коэффициентом отражения.

Этот коэффициент обращается в нуль при $Z_н = W$. Следовательно, в линии, нагруженной сопротивлением, равным характеристическому сопротивлению, отражённая волна отсутствует. Это важное свойство реализуется в линиях, используемых для передачи энергии от генератора к нагрузке (высокочастотные фидеры).

Коэффициент $\vec{\mu}_г$ представляет собой, очевидно, коэффициент отражения для генераторного конца линии. Из выражения (7.32), однако, следует, что этот коэффициент влияет в одинаковой степени на амплитуды прямой и отражённой волн, не изменяя соотношения между ними.

Следовательно, в установившемся режиме характер распределения напряжения вдоль линии зависит только от соотношения между $Z_н$ и W. Абсолютные же значения амплитуд, при заданном $\vec{E}$, зависят также и от соотношения между $Z_г$ и W.

Всё сказанное выше о напряжениях может быть распространено и на волны тока.

Если длина линии l настолько велика, что

$$\left|e^{-\gamma l}\right| = e^{-\beta l} \ll 1, \tag{7.36}$$

т. е. затухание волны вдоль линии очень велико, то члены с множителями $e^{-\gamma l}$ в выражениях (7.32)—(7.33) могут быть отброшены. Множители $e^{\gamma l}$ при этом сокращаются, что приводит к следующим выражениям:

$$\lim_{l\to\infty}[\vec{U}(x)] = \frac{W e^{-\gamma x}}{W + Z_г} \cdot \vec{E}, \tag{7.32'}$$

$$\lim_{l\to\infty}[\vec{I}(x)] = \frac{e^{-\gamma x}}{W + Z_г} \cdot \vec{E}. \tag{7.33'}$$

Этот результат означает, что в бесконечно длинной линии отражённые волны вообще отсутствуют и падающие волны напряжения и тока в любом сечении линии связаны между собой соотношением

$$\frac{\vec{U}(x)}{\vec{I}(x)} = W. \tag{7.37}$$

Таким образом, входное сопротивление достаточно длинной линии при выполнении условия (7.36) равно характеристическому сопротивлению W.

То обстоятельство, что соотношение между амплитудами падающей и отражённой волн в линии конечной длины зависит от

режима нагрузки линии, указывает на желательность такого преобразования ф-л (7.32) и (7.33), чтобы напряжения и токи в сечении x были выражены через амплитуды напряжения и тока в нагрузочном сопротивлении. Подставляя в ур-ния (7.32)—(7.33) $x = l$, найдём:

$$\vec{U}_н = \vec{U}(l) = \frac{W}{(W + Z_г)} \cdot \frac{(1 + \vec{\mu}_н)}{(e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l})} \vec{E}, \tag{7.38}$$

$$\vec{I}_н = \vec{I}(l) = \frac{1}{(W + Z_г)} \cdot \frac{(1 - \vec{\mu}_н)}{(e^{\gamma l} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma l})} \vec{E}. \tag{7.39}$$

На основании этих выражений общие ур-ния (7.32)—(7.33) можно записать в следующей форме:

$$\vec{U}(x) = \vec{U}_н \frac{e^{\gamma(l-x)} + \vec{\mu}_н e^{-\gamma(l-x)}}{1 + \vec{\mu}_н} \tag{7.40}$$

$$\vec{I}(x) = \vec{I}_н \frac{e^{\gamma(l-x)} - \vec{\mu}_н e^{-\gamma(l-x)}}{1 - \vec{\mu}_н}. \tag{7.41}$$

При анализе процессов в линиях конечной длины часто удобно пользоваться уравнениями для напряжения и тока, выраженными в гиперболических функциях. Эти выражения легко получаются путём подстановки в выражения (7.40)—(7.41) ф-лы (7.28). Имеем

$$\vec{U}(x) = \vec{U}_н \frac{Z_н[e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}] + W[e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}]}{2Z_н}$$

$$\vec{I}(x) = \vec{I}_н \frac{W[e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}] + Z_н[e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}]}{2W}.$$

Учитывая, что

$$\frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} = \operatorname{ch}\gamma(l-x),$$

$$\frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} = \operatorname{sh}\gamma(l-x),$$

получаем следующие окончательные выражения:

$$\dot{U}(x)=\dot{U}_н\left[\operatorname{ch}\gamma(l-x)+\frac{W}{Z_н}\operatorname{sh}\gamma(l-x)\right], \tag{7.42}$$

$$\dot{I}(x)=\dot{I}_н\left[\operatorname{ch}\gamma(l-x)+\frac{Z_н}{W}\operatorname{sh}\gamma(l-x)\right]. \tag{7.43}$$

Подставив $x=0$, разделив $\dot{U}(0)$ на $\dot{I}(0)$ и учитывая, что $\frac{\dot{U}_н}{\dot{I}_н}=Z_н$, найдём выражение для входного сопротивления линии

$$Z_{вх}=\frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)}=Z_н\frac{\operatorname{ch}\gamma l+\frac{W}{Z_н}\operatorname{sh}\gamma l}{\operatorname{ch}\gamma l+\frac{Z_н}{W}\operatorname{sh}\gamma l}. \tag{7.44}$$

§ 7.4. Волновое сопротивление и постоянная распространения однородной линии

Волновое сопротивление W, зависящее от первичных параметров линии L, C, R, G и, кроме того, от частоты ω, является комплексной величиной. В соответствии с определениями (7.9) и (7.14)

$$W=\sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}. \tag{7.45}$$

В линии, свободной от потерь („идеальная" линия), $R=0$ и $G=0$. В этом случае

$$W=\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7.46}$$

Здесь L в генри, а C в фарадах на единицу длины. Если L и C выражать в сантиметрах на единицу длины, то получим

$$\rho_{ом}=30\sqrt{\frac{L_{см}}{C_{см}}}. \tag{7.46'}$$

Таким образом, волновое сопротивление линии без потерь является чисто активным и не зависит от частоты.

Вынесем $\sqrt{\frac{L}{C}}$ за знак радикала в выражении (7.45):

$$W=\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{R}{L}+i\omega}{\frac{G}{C}+i\omega}}.$$

Нетрудно видеть, что если выполняется условие

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}, \tag{7.47}$$

то второй множитель в правой части равен единице при любой частоте и волновое сопротивление линии, даже при наличии потерь, совпадает с чисто активным волновым сопротивлением идеальной линии. Линии, для которых выполняется условие (7.47), называются неискажающими линиями.

При передаче по линии сигналов с очень широким спектром независимость волнового сопротивления от частоты обеспечивает отсутствие искажений сигналов. Этот вопрос более подробно рассматривается в гл. 9.

В области радиотехнических частот сопротивление R в реальных линиях, как правило, очень мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL, а проводимость G мала по сравнению с ёмкостной проводимостью ωC. Можно поэтому без существенной ошибки определять волновое сопротивление высокочастотных линий, как и в случае идеальной линии, по ф-ле (7.46).

Следует отметить, что погонная индуктивность L и погонная ёмкость C тесно между собой связаны и могут быть выражены одна через другую. В теории электромагнитного поля доказывается, что

$$LC=\mu\varepsilon. \tag{7.48}$$

Здесь μ — магнитная проницаемость, а
ε — диэлектрическая постоянная среды окружающей линию; L и μ выражены в абсолютных электромагнитных единицах, а C и ε в абсолютных электростатических.

Для случая линии в пустоте или воздушной линии имеем

$$LC=1. \tag{7.48'}$$

В практике часто применяются коаксиальные линии с диэлектрическим заполнением. В этом случае будем иметь

$$LC=\varepsilon. \tag{7.48''}$$

Если обе величины L и C выражены в одной системе единиц, в абсолютной электростатической, в абсолютной электромагнитной или в практической, то соотношение (7.48) принимает вид

$$LC=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}.$$

Сопоставляя это выражение с ф-лой (7.22), отмечаем попутно, что скорость движения волны вдоль линии может быть выражена ещё и в такой форме

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.22')$$

Если L и C выражены в сантиметрах на единицу длины (т. е. L выражена в абсолютных электромагнитных, а C в абсолютных электростатических единицах), а $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, то на основании ф-лы (7.48′) выражение (7.46′) для волнового сопротивления можно привести к следующему виду:

$$\rho_{ом} = 30\sqrt{\frac{L\,\frac{см}{см}}{C\,\frac{см}{см}}} = \frac{30}{C\,\frac{см}{см}}. \qquad (7.49)$$

В случае диэлектрического заполнения, в соответствии с ф-лой (7.48″), будем иметь:

$$\rho_{ом} = \frac{30\sqrt{\varepsilon}}{C\,\frac{см}{см}}. \qquad (7.49')$$

Проиллюстрируем ф-лы (7.49) и (7.49′) на примерах, относящихся к симметричной и несимметричной линиям.

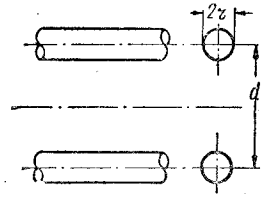


Рис. 7.4

В первом случае (рис. 7.4) погонная ёмкость на единицу длины двух цилиндрических параллельных проводов, как доказывается в электростатике, равна

$$C = \frac{\varepsilon}{4\ln\frac{d}{r}} = \frac{\varepsilon}{9{,}21\log\frac{d}{r}}\ \frac{см}{см}.$$

Следовательно, волновое сопротивление

$$\rho_{ом} = \frac{30\sqrt{\varepsilon}}{C} = \frac{30\cdot 4\ln\frac{d}{r}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\ln\frac{d}{r}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{276\cdot\log\frac{d}{r}}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (7.49')$$

Например, для воздушной линии из двух проводов диаметром 3 *мм*, расположенных на расстоянии 120 *мм* друг от друга, получаем:

$$\varepsilon = 1;\quad d = 12\ см;\quad r = 0{,}15\ см,$$

$$C = \frac{1}{9{,}21\cdot\log 80} = 0{,}057\ \frac{см}{см};$$

$$\rho = \frac{30}{C} = \frac{30}{0{,}057} = 525\ ом.$$

Для воздушной линии, состоящей из цилиндрического провода радиусом сечения r, протянутого горизонтально над землёй, которая принимается идеально проводящей (рис. 7.5), ёмкость на единицу длины определяется формулой

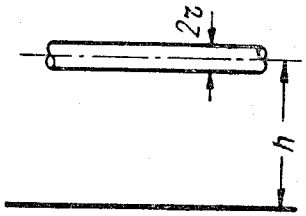


Рис. 7.5

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\ln\frac{2h}{r}} = \frac{1}{4{,}605\cdot\log\frac{2h}{r}} \\ \text{и}\quad \rho &= \frac{30}{C} = 60\ln\frac{2h}{r} = 138\log\frac{2h}{r} \end{aligned}\right\}. \qquad (7.50)$$

Например, при высоте подвеса $h = 3\ м$ и радиусе сечения провода $r = 1{,}5\ мм$, получим

$$C = \frac{1}{4{,}605\log 400} = 0{,}0605\ \frac{см}{см}$$

и волновое сопротивление

$$\rho = \frac{30}{C} = \frac{30}{0{,}0605} \approx 500\ ом.$$

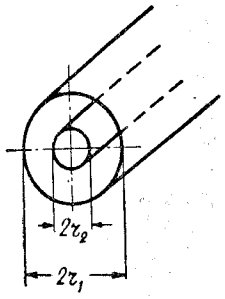


Рис. 7.6

В высокочастотной технике большое распространение в настоящее время получили коаксиальные кабели, крупным достоинством которых является полная экранировка электромагнитного поля линии. Для такой линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров (рис. 7.6), в электростатике выводится следующая формула, определяющая ёмкость на единицу длины линии:

$$C = \frac{\varepsilon}{2\ln\frac{r_1}{r_2}} = \frac{\varepsilon}{4{,}605\cdot\log\frac{r_1}{r_2}}.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{30\sqrt{\varepsilon}}{C} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,60\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot 138\log\frac{r_1}{r_2}. \qquad (7.51)$$

Так, например, для воздушной линии, состоящей из трубы с внутренним диаметром в 5 *см* и осевого провода диаметром 1 *см*, получим:

$$C = \frac{1}{4{,}605\cdot\log\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{4{,}605\cdot\log 5} \approx 0{,}3\ \frac{см}{см};$$

$$\rho = \frac{30}{C} = \frac{30}{0{,}3} = 100\ ом.$$

Для стандартного коаксиального кабеля типа РК-1, выполненного из гибкой трубки (в виде металлической оплётки) с внутренним диаметром 4,6 *мм* и коаксиальной металлической жилы диаметром 0,68 *мм*, при заполнении пространства между внешним и внутренним проводом полиэтиленом с диэлектрической постоянной $\varepsilon \approx 2{,}2$, будем иметь:

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}} = 0{,}58 \ \frac{см}{см};$$

$$\rho = \frac{30 \sqrt{\varepsilon}}{C} = \frac{30 \sqrt{2{,}2}}{0{,}58} = 75 \ ом.$$

Скорость волны в рассматриваемом кабеле будет в $\sqrt{\varepsilon}$ раз меньше, чем в воздушной линии того же сечения [см. ф-лу (7.22')].

Обратимся к исследованию постоянной распространения $\gamma = \beta + i\alpha$. Для определения действительной части β и мнимой части α воспользуемся определением (7.17)

$$\beta + i\alpha = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}.$$

Возведём в квадрат обе части этого соотношения:

$$\beta^2 - \alpha^2 + 2i\beta\alpha = (RG - \omega^2 LC) + i\omega(LG + RC).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= RG - \omega^2 LC, \\ 2\beta\alpha &= \omega(LG + RC). \end{aligned}\right\} \qquad (7.52)$$

Возведя в квадрат оба эти уравнения:

$$\beta^4 - 2\beta^2\alpha^2 + \alpha^4 = (RG - \omega^2 LC)^2,$$
$$4\beta^2\alpha^2 = \omega^2 (LG + RC)^2,$$

и складывая, получаем

$$(\beta^2 + \alpha^2)^2 = (RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2$$

или

$$\beta^2 + \alpha^2 = \sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}. \qquad (7.53)$$

Решая это уравнение совместно с первым уравнением системы (7.52), получаем окончательно:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}\right]}, \qquad (7.54)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G + \omega^2 C^2)}\right]}. \qquad (7.55)$$

В случае радиотехнических линий эти общие выражения можно сильно упростить. Учитывая, что в области радиочастот можно считать:

$$R \ll \omega L,$$
$$G \ll \omega C$$

и отбрасывая малые величины высших порядков, можем написать:

$$\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} = \omega^2 LC \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)\left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right)} \approx$$
$$\approx \omega^2 LC \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{G^2}{\omega^2 L^2}} \approx \omega^2 LC \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right)\right].$$

Подставляя это выражение в правые части ф-л (7.54) и (7.55), получаем:

$$\beta \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left[RG + \frac{R^2 C}{2L} + \frac{G^2 L}{2C}\right]} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right), \qquad (7.54')$$

$$\alpha \approx \omega \sqrt{LC}. \qquad (7.55')$$

Подставляя $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$, получаем для погонного затухания удобную формулу

$$\beta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho} + G\rho\right). \qquad (7.56)$$

Следует отметить, что в высокочастотных линиях, особенно без диэлектрического заполнения, утечкой G обычно можно пренебрегать. В этих случаях затухание определяют с учётом одного лишь сопротивления R:

$$\beta \approx \frac{1}{2}\frac{R}{\rho}. \qquad (7.56')$$

При определении R необходимо, конечно, учитывать скин-эффект. Рассмотрим в качестве примера коаксиальную линию.

В теории электромагнитного поля выводится следующая формула для сопротивления линии из двух концентрических

$$R=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu f\pi}{\sigma}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\ ом \text{ на единицу длины линии,} \quad (7.$$

где σ — проводимость в $\frac{мо}{м}$,

μ — магнитная проницаемость,

f — частота в *гц*.

Для чистой меди при обычной температуре $\sigma=5{,}8\cdot10^7\ \frac{мо}{м}$, $\mu=1{,}25\cdot10^6$ и ф-ла (7.55) приводится к виду

$$R=4{,}16\sqrt{f}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)10^4\ ом \text{ на единицу длины линии.}$$

Подставляя ф-лы (7.51) и (7.57) в ф-лу (7.56′), получим следующее выражение для погонного затухания коаксиальной линии:

$$\beta=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\mu f\pi}{\sigma}}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{60\ln\frac{r_1}{r_2}}=\frac{1}{120}\cdot\sqrt{\frac{\mu f\pi}{\sigma}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{\ln\frac{r_1}{r_2}}. \quad (7.58)$$

Из полученного выражения видно, что при задании одного из радиусов r_1 или r_2 имеется оптимальное значение второго радиуса, при котором обеспечивается получение минимального затухания β. Экономические и конструктивные соображения обычно накладывают ограничения на величину диаметра внешней трубы. Считая $r_1=\text{const}$, найдём оптимальное значение r_2. С этой целью дифференцируем выражение (7.58) по r_2 и приравниваем производную нулю:

$$\frac{d\beta}{dr_2}=\frac{1}{120}\sqrt{\frac{\mu f\pi}{\sigma}}\cdot\frac{\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{r_2^2}\ln\frac{r_1}{r_2}}{\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^2}=0,$$

отсюда следует условие

$$\ln\frac{r_1}{r_2}=1+\frac{r_2}{r_1}. \quad (7.59)$$

Графическое решение этого уравнения даёт $\frac{r_1}{r_2}=3{,}6$. Таким образом, при фиксированном радиусе внешнего провода r_1 коаксиальная линия будет обладать минимальным затуханием при условии, что радиус внутреннего провода будет в 3,6 раза меньше радиуса внешнего провода.

Следует иметь в виду, что требование минимального затухания кабеля не всегда является основным. При значительных мощностях, связанных с высоким напряжением, важным требованием является обеспечение максимальной диэлектрической прочности.

Для выполнения этого требования радиус внутреннего провода, у поверхности которого градиент потенциала наибольший, должен выбираться с таким расчётом, чтобы при заданном напряжении на линии величина этого градиента была допустимой из условий пробоя. Исходя из структуры электрического поля в сечении линии (рис. 7.7), можем написать следующее выражение для напряжённости поля в точке M, отстоящей на расстоянии r от центра сечения кабеля:

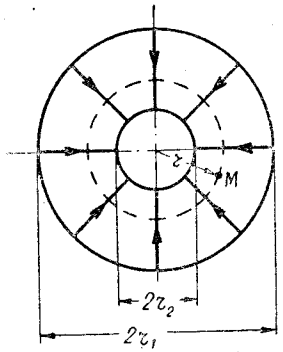


Рис. 7.7

$$E_r=\frac{2q}{\varepsilon r},$$

где q — заряд на единицу длины кабеля.

У поверхности внутреннего провода при $r=r_2$ получается максимальная напряжённость поля

$$E_{r_2}=\frac{2q}{\varepsilon r_2}. \quad (7.60)$$

Полная разность потенциалов между внешним и внутренним проводом определяется интегралом от E, взятым вдоль силовой линии,

$$U=\int_{r_2}^{r_1}E_r\,dr=\frac{2q}{\varepsilon}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r}=\frac{2q}{r}\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Исключив с помощью этого выражения заряд q из ур-ния (7.60), получим для наиболее опасного градиента у поверхности внутреннего провода следующее выражение:

$$E_{r_2}=\frac{U}{r_2\ln\frac{r_1}{r_2}}. \quad (7.60')$$

Если напряжение U и радиус внешней трубы r_1 считать заданными, то оптимальный радиус r_2, соответствующий минимуму E_{r_2}, определяется условием

$$\frac{dE_{r_2}}{dr_2} = U \frac{\ln \frac{r_1}{r_2} - 1}{r_2^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_2}\right)^2} = 0,$$

откуда следует

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = 1$$

или

$$\frac{r_1}{r_2} = e = 2{,}718. \tag{7.61}$$

Следовательно, для получения наибольшей диэлектрической прочности при заданном внешнем радиусе необходимо, чтобы отношение радиусов внешнего и внутреннего проводников равнялось e.

Следует иметь в виду, что в практике часто приходится отступать от оптимальных соотношений (7.59) или (7.61), так как обычно бывает задана величина волнового сопротивления ρ, т. е. отношение $\frac{r_1}{r_2}$. В подобных случаях задание внешнего радиуса однозначно определяет также и внутренний радиус и для повышения диэлектрической прочности, а также для снижения затухания необходимо пропорционально увеличивать r_1 и r_2.

§ 7.5. Линия без потерь при различных видах нагрузки

Допустим, что задан отрезок однородной линии, длину l которого можно в некоторых пределах регулировать, и требуется выяснить распределение амплитуд результирующего напряжения и тока вдоль линии при различных соотношениях между сопротивлением нагрузки $Z_н$ и волновым сопротивлением линии ρ.

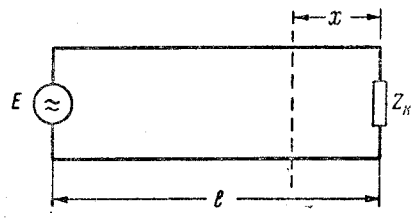


Рис. 7.8.

Учитывая, что в ур-ниях (7.42), (7.43) и (7.44) комплексные амплитуды напряжения и тока в различных сечениях линии выражены через амплитуды, действующие на конце линии, расстояние рассматриваемого сечения удобно отсчитывать от конца линии, как это обозначено на рис. 7.8. При таком отсчёте расстояний аргумент $l-x$ в правых частях ур-ний (7.42)—(7.43) должен быть заменён на x, что приводит к следующей форме этих уравнений:

$$\vec{U}(x) = \vec{U}_н \left[\operatorname{ch} \gamma x + \frac{\rho}{Z_н} \operatorname{sh} \gamma x\right], \tag{7.42'}$$

$$\vec{I}(x) = \vec{I}_н \left[\operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z_н}{\rho} \operatorname{sh} \gamma x\right]. \tag{7.43'}$$

Входное сопротивление отрезка линии, расположенного справа от сечения x, будет, очевидно

$$Z(x) = \frac{\vec{U}(x)}{\vec{I}(x)} = Z_н \frac{\operatorname{ch} \gamma x + \frac{\rho}{Z_н} \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z_н}{\rho} \operatorname{sh} \gamma x}. \tag{7.44'}$$

При правильном выполнении линии затуханием падающей и отражённой волн на относительно малом отрезке линии $\left(\text{порядка } \frac{1}{4}\lambda \div \lambda\right)$ можно пренебречь. Полагая

$$\beta l \ll 1,$$

можно в ур-ниях (7.42'), (7.43') и (7.44') считать

$$\gamma l \approx i\alpha l.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ch}(i\alpha x) = \cos \alpha x,$$

$$\operatorname{sh}(i\alpha x) = i \sin \alpha x,$$

получаем следующие уравнения, справедливые для линии без потерь:

$$\vec{U}(x) = \vec{U}_н \left[\cos \alpha x + i \frac{\rho}{Z_н} \sin \alpha x\right], \tag{7.62}$$

$$\vec{I}(x) = \vec{I}_н \left[\cos \alpha x + i \frac{Z_н}{\rho} \sin \alpha x\right], \tag{7.63}$$

$$Z(x) = Z_н \frac{\cos \alpha x + i \frac{\rho}{Z_н} \sin \alpha x}{\cos \alpha x + i \frac{Z_н}{\rho} \sin \alpha x} =$$

$$= \rho \frac{\cos \alpha x + i \frac{\rho}{Z_н} \sin \alpha x}{\frac{\rho}{Z_н} \cos \alpha x + i \sin \alpha x}. \tag{7.64}$$

Приложим полученные выражения к некоторым важным для практики частным случаям.

1. Согласованная нагрузка. Бегущие волны

Полагая $Z_н = R = \rho$, получаем:

$$\vec{U}(x) = \vec{U}_н [\cos \alpha x + i \sin \alpha x] = \vec{U}_н e^{i\alpha x},$$

$$\vec{I}(x) = \vec{I}_н [\cos \alpha x + i \sin \alpha x] = \vec{I}_н e^{i\alpha x},$$

$$Z(x) = Z_н = \rho.$$

Как видим, при работе на согласованную нагрузку в линии существуют только падающие (бегущие) волны тока и напряжения. Так как затуханием β мы пренебрегли, то модули амплитуд $\vec{U}(x)$ и $\vec{I}(x)$ вдоль линии не изменяются и равны соответственно модулям $\vec{U}_н$ и $\vec{I}_н$.

Переходя к мгновенным значениям, получим:

$$u(t, x) = U_н \cos(\omega t + \alpha x),$$

$$i(t, x) = I_н \cos(\omega t + \alpha x).$$

В начале линии при $x = l$ будем иметь:

$$u(t, l) = U_н \cos(\omega t + \alpha l),$$

$$i(t, l) = I_н \cos(\omega t + \alpha l),$$

а в конце линии

$$u(t, 0) = U_н \cos \omega t,$$

$$i(t, 0) = I_н \cos \omega t.$$

Таким образом, фаза бегущей волны в конце линии отстаёт на угол

$$\varphi = \alpha l = 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{\omega l}{c}$$

от фазы волны в начале линии (для воздушной линии, когда $v = c$).

Учитывая соотношение (7.19), можем написать

$$\varphi = \omega t_1,$$

где t_1 — время пробега волной отрезка l.

2. Нагрузка на чисто реактивное сопротивление. Стоячие волны

Полагая $Z_н = iX_н$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}(x) &= \vec{U}_н \left[\cos \alpha x + \frac{\rho}{X_н} \sin \alpha x\right] = \\ &= \vec{U}_н \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{X_н}\right)^2} \cos(\alpha x - \varphi_1); \\ \vec{I}(x) &= \vec{I}_н \left[\cos \alpha x - \frac{X_н}{\rho} \sin \alpha x\right] = \\ &= -\vec{I}_н \sqrt{1 + \left(\frac{X_н}{\rho}\right)^2} \sin(\alpha x - \varphi_1), \end{aligned}\right\} \quad (7.65)$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{X_н}.$$

Переходя к модулям амплитуд, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= U_н \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{X_н}\right)^2} \,|\cos(\alpha x - \varphi_1)| \\ I(x) &= I_н \sqrt{1 + \left(\frac{X_н}{\rho}\right)^2} \,|\sin(\alpha x - \varphi_1)| \end{aligned}\right\}. \quad (7.66)$$

Из этих выражений видно, что при чисто реактивной нагрузке в линии устанавливаются так называемые стоячие волны напряжения и тока. В точках, отстоящих от конца на расстояниях, при которых $\alpha x - \varphi_1 = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ $|\cos(\alpha x - \varphi_1)|$ обращается в единицу, $|\sin(\alpha x - \varphi_1)|$ в нуль, амплитуда напряжения достигает своего максимума, а амплитуда тока равна нулю. Эти точки соответствуют пучностям напряжения и узлам тока. В точках, где $\alpha x - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \ldots$ и т. д., наоборот, устанавливаются узлы напряжения и пучности тока.

Заметим, что входное сопротивление линии при стоячих волнах имеет характер чисто реактивного сопротивления. Действительно, ур-ние (7.64) при $Z_н = iX_н$ даёт

$$Z(x) = iX_н \frac{\cos \alpha x + \frac{\rho}{X_н} \sin \alpha x}{\cos \alpha x - \frac{X_н}{\rho} \sin \alpha x}. \quad (7.67)$$

Из этого следует, что в любом сечении линии напряжение и ток сдвинуты по фазе (во времени) на угол 90°.

Из выражений (7.65) видно, что в пучностях соответственно напряжения и тока амплитуды равны:

$$\vec{U}_{макс} = \vec{U}_н \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{X_н}\right)^2}, \tag{7.68}$$

$$\vec{I}_{макс} = \vec{I}_н \sqrt{1+\left(\frac{X_н}{\rho}\right)^2}. \tag{7.69}$$

Если умножить обе части последнего выражения на ρ, то получим:

$$\vec{I}_{макс}\cdot\rho = \vec{I}_н\sqrt{\rho^2+X_н^2} = \vec{I}_н X_н \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{X_н}\right)^2} =$$

$$= \vec{U}_н \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{X_н}\right)^2}. \tag{7.70}$$

Приравнивая левые части ф-л (7.68) и (7.70), приходим к следующему важному выводу: при чисто стоячих волнах максимальные амплитуды напряжения и тока связаны простым соотношением:

$$\vec{U}_{макс} = \vec{I}_{макс}\rho. \tag{7.71}$$

Интересно также установить связь между амплитудой в пучности и амплитудой падающей волны. В соответствии с соотношением (7.35) можно написать следующее выражение для напряжения на конце линии:

$$\vec{U}_н = \vec{U}_{пад} + \vec{U}_{отр} = \vec{U}_{пад}(1+\vec{\mu}_н). \tag{7.35'}$$

Учитывая, что в данном случае

$$\vec{\mu}_н = \frac{iX_н - \rho}{iX_н + \rho} \tag{7.72}$$

и переходя в выражении (7.35') к модулю, получаем:

$$U_н = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\rho^2}{X_н^2}}} U_{пад}.$$

Подставляя полученный результат в ф-лу (7.68), находим окончательно

$$\vec{U}_{макс} = 2\vec{U}_{пад}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\vec{I}_{макс} = 2\vec{I}_{пад}.$$

Итак, при чисто реактивной нагрузке амплитуды в пучностях равны удвоенному значению амплитуды падающей волны. Физический смысл этого результата становится очевидным, если учесть, что образование стоячей волны является результатом интерференции падающей и отражённой волн.

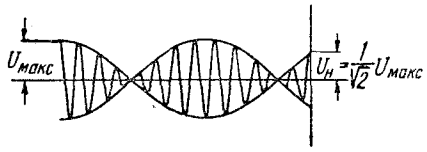


Рис. 7.9

Так как модуль коэффициента отражения при чисто реактивной нагрузке равен единице [см. ф-лу (7.72)], то амплитуды отражённой и падающей волн одинаковы. При распространении вдоль линии во взаимно противоположных направлениях эти волны удваиваются по амплитуде в точках, где их фазы совпадают (пучности) и взаимно уничтожаются в точках, где сдвиг фазы равен 180° (узлы) (рис. 7.9).

Из предыдущего ясно, что режим чисто стоячей волны возможен лишь в линии без потерь.

Случай, показанный на рис. 7.9, соответствует ёмкостной нагрузке при

$$|X_н| = \frac{1}{\omega C} = \rho$$

$$\left[\text{т. е. } \varphi_1 = -45°, \quad U_н = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{макс}, \text{ см. ур-ния (7.65) и (7.68)}\right].$$

Рассмотрим ещё вопрос о распределении энергии электромагнитного поля вдоль линии со стоячей волной. Для этого выделим с помощью двух параллельных плоскостей, перпендикулярных к оси линии, пространство, связанное с элементом линии длиной Δx, и составим выражение для энергии магнитного и электрического поля в указанном пространстве. Если амплитуда тока в рассматриваемом элементе линии $I(x)$, а напряжение $U(x)$, то, очевидно, мгновенное значение энергии магнитного поля будет

$$w_H = \frac{L\Delta x}{2} I^2(x)\cos^2(\omega t + \Theta),$$

а мгновенное значение энергии электрического поля

$$w_E = \frac{C\Delta x}{2} U^2(x)\sin^2(\omega t + \Theta).$$

При составлении этих выражений учтено, что при стоячей волне напряжение и ток сдвинуты по фазе (во времени) на 90°.

Начальная фаза Θ может иметь произвольную величину и для рассматриваемого здесь вопроса значения не имеет.

Средние за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ энергии будут, очевидно, равны:

$$\overline{w}_H=\frac{L\Delta x}{4}I^2(x),$$

$$\overline{w}_E=\frac{C\Delta x}{4}U^2(x).$$

Подставляя вместо $I(x)$ и $U(x)$ ур-ния (7.66) и учитывая соотношения (7.68)—(7.69) и (7.71), будем иметь:

$$\overline{w}_H=\frac{L\Delta x}{4}I^2_{макс}\sin^2(\omega x-\varphi_1),$$

$$\overline{w}_E=\frac{C\Delta x}{4}U^2_{макс}\cos^2(\omega x-\varphi_1)=$$

$$=\frac{C\Delta x}{4}I^2_{макс}\rho^2\cos^2(\omega x-\varphi_1)=$$

$$=\frac{L\Delta x}{4}I^2_{макс}\cos^2(\omega x-\varphi_1).$$

Суммируя полученные энергии, находим

$$\overline{w}_\Sigma=\overline{w}_H+\overline{w}_E=\frac{L\cdot\Delta x}{4}I^2_{макс}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что при чисто стоячей волне средняя энергия электромагнитного поля (на единицу длины) не изменяется вдоль линии. Имеет место лишь перераспределение энергии между магнитным и электрическим полем. В пучностях напряжения вся энергия запасена в электрическом поле (магнитное поле отсутствует), а в пучностях тока — в магнитном поле (электрическое поле отсутствует).

3. Нагрузка на произвольное чисто активное сопротивление

Подставив в ур-ния (7.62)—(7.63) $Z_H=R_H$, получим:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}(x)&=\vec{U}_H\left[\cos\alpha x+\mathrm{i}\frac{\rho}{R_H}\sin\alpha x\right]\\ \vec{I}(x)&=\vec{I}_H\left[\cos\alpha x+\mathrm{i}\frac{R_H}{\rho}\sin\alpha x\right]\end{aligned}\right\}. \qquad (7.73)$$

Предположим для определённости, что $R_H>\rho$ и обозначим $\frac{\rho}{R_H}$ через k. Тогда ур-ние (7.73) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}(x)&=\vec{U}_H[\cos\alpha x+\mathrm{i}k\sin\alpha x]\\ \vec{I}(x)&=\frac{\vec{I}_H}{k}[k\cos\alpha x+\mathrm{i}\sin\alpha x]\end{aligned}\right\}. \qquad (7.73')$$

Переходя к модулям, находим амплитуды $U(x)$ и $I(x)$:

$$U(x)=U_H\sqrt{\cos^2\alpha x+k^2\sin^2\alpha x},$$

$$I(x)=\frac{I_H}{k}\sqrt{k^2\cos^2\alpha x+\sin^2\alpha x},$$

или

$$U(x)=U_H\sqrt{\frac{1}{2}(1+k^2)+\frac{1}{2}(1-k^2)\cos 2\alpha x},$$

$$I(x)=\frac{I_H}{k}\sqrt{\frac{1}{2}(1+k^2)-\frac{1}{2}(1-k^2)\cos 2\alpha x}.$$

Так как $k<1$, то легко видеть, что максимумы $U(x)$ будут находиться в точках, для которых $\cos 2\alpha x=1$ и, следовательно, $\sin^2\alpha x=0$. Таким образом, при $k<1$ максимальные амплитуды будут равны U_H.

Максимумы $I(x)$ будут находиться в точках, определяемых условиями $\cos 2\alpha x=-1$, $\cos^2\alpha x=0$, и будут равны $\frac{I_H}{k}$. Отсюда видно, что кривые распределения $U(x)$ и $I(x)$ вдоль линии имеют одинаковую форму и смещены одна относительно другой на $\frac{1}{4}\lambda$. Вид кривых распределения $U(x)$ на протяжении половины волны дан на рис. 7.10*а* для разных значений $k\leqslant 1$. На рис. 7.10*б* дано распределение $I(x)$ при $k\leqslant 1$. У конца линии ($\alpha x=0$) устанавливается пучность напряжения и узел тока. На расстоянии $\frac{1}{4}\lambda$ от конца линии ($\alpha x=90°$) устанавливается узел напряжения и пучность тока.

Однако в отличие от предыдущего пункта, при нагрузке на активное сопротивление $R_H\neq 0$ в линии нет точек с нулевыми амплитудами. Это объясняется тем, что часть энергии падающей волны поглощается в нагрузке и отражённая волна, равная

$$U_{отр}=\mu_H U_{пад}=\frac{R_H-\rho}{R_H+\rho}U_{пад}=\frac{1-k}{1+k}U_{пад},$$

накладываясь на падающую волну, образует максимумы и минимумы амплитуд в различных точках линии. Чисто стоячие волны получаются лишь при $k=0$. Наоборот, при $k=1$ амплитуды напряжения и тока вдоль линии не изменяются, и, следовательно,

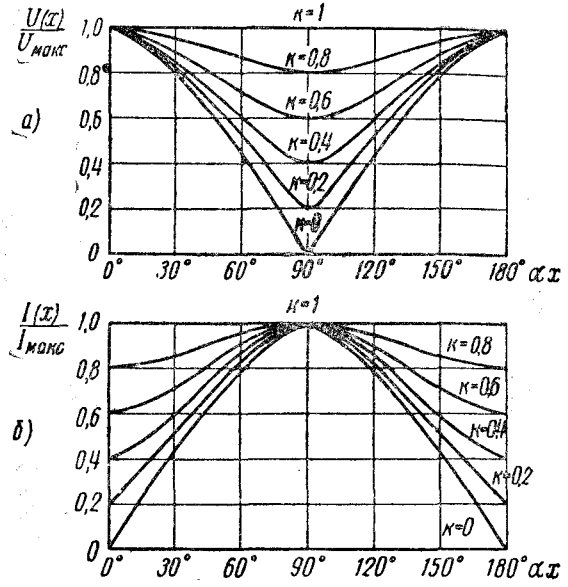


Рис. 7.10

в линии существует одна лишь бегущая волна. Отсюда видно, что промежуточные случаи можно рассматривать, как наложение стоячих и бегущих волн.

Отношение

$$\frac{U_{мин}}{U_{макс}}=\frac{I_{мин}}{I_{макс}}=k \qquad (7.74)$$

называется коэффициентом бегущей волны.

Входное сопротивление линии, в соответствии с ур-ниями (7.73′), равно

$$Z(x)=\rho\frac{\cos\alpha x+\mathrm{i}\,k\sin\alpha x}{k\cos\alpha x+\mathrm{i}\sin\alpha x}. \qquad (7.75)$$

Освободившись от мнимости в знаменателе, приведём последнее выражение к виду

$$Z(x)=\rho\frac{k-0{,}5\,\mathrm{i}\,(1-k^2)\sin 2\alpha x}{k^2\cos^2\alpha x+\sin^2\alpha x}. \qquad (7.75')$$

Напомним, что вывод этой формулы сделан в предположении, что $k<1$, а x отсчитывается от конца линии, т. е. от пучности напряжения, в направлении к источнику энергии.

В случае $R_н<\rho$, когда $\frac{\rho}{R_н}>1$, картина изменяется. С помощью рассуждений, аналогичных приведённым выше, нетрудно убедиться, что при $R_н<\rho$ на конце линии устанавливается уже пучность тока и узел напряжения, т. е. все кривые смещаются к генератору на $\frac{1}{4}\lambda$.

4. *Нагрузка на произвольное комплексное сопротивление*

Если нагрузочное сопротивление имеет вид

$$Z_н=R_н+\mathrm{i}\,X_н,$$

то на конце линии устанавливается не пучность и не узел напряжения, а некоторое промежуточное значение амплитуды. Несмотря на это, характер распределения амплитуд $U(x)$ и $I(x)$ вдоль линии остаётся таким же, как и при нагрузке на чисто активное сопротивление $R\neq\rho$, необходимо лишь отсчёт x производить не от конца линии, а от пучности напряжения.

Чтобы в этом убедиться, подставим в ур-ние (7.64) $Z_н=R_н+\mathrm{i}\,X_н$:

$$Z(x)=\rho\frac{\cos\alpha x+\mathrm{i}\frac{\rho}{R_н+\mathrm{i}\,X_н}\sin\alpha x}{\frac{\rho}{R_н+\mathrm{i}\,X_н}\cos\alpha x+\mathrm{i}\sin\alpha x}.$$

Освободившись от мнимости в знаменателе, приводим это выражение к виду

$$Z(x)=\rho\frac{\frac{R_н\rho}{R_н^2+X_н^2}+\mathrm{i}\left[\left(\frac{\rho^2}{R_н^2+X_н^2}-1\right)0{,}5\sin 2\alpha x+\frac{X_н\rho}{R_н^2+X_н^2}\cos 2\alpha x\right]}{\frac{\rho^2}{R_н^2+X_н^2}\cos^2\alpha x+\sin^2\alpha x-\frac{\rho X_н}{R_н^2+X_н^2}\sin 2\alpha x}. \qquad (7.76)$$

Можно показать, что это уравнение выражает кривую того же вида, что и ур-ние (7.75′), но отнесённую к другому началу

координат. Для этого необходимо заменить x на x_0+x_1, причём абсциссу x_0 нового начала координат нужно подчинить условию

$$\operatorname{tg} 2\alpha x_0 = \frac{2\rho X_н}{R_н^2 + X_н^2 - \rho^2}.$$

При указанных условиях выражение (7.76) может быть приведено к виду

$$Z = \rho \frac{k_1^2 - 0{,}5\,i\,(1-k_1^2)\sin 2\alpha x_1}{k_1^2\cos^2\alpha x_1 + \sin^2\alpha x_1}, \qquad (7.76')$$

где

$$k_1^2 = \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{4R_н^2\rho^2}{(R_н^2+X_н^2+\rho^2)^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{4R_н^2\rho^2}{(R_н^2+X_н^2+\rho^2)^2}}}.$$

Уравнение (7.76'), имеющее тот же вид, что и ур-ние (7.75'), причём $k_1<1$, позволяет определять входное сопротивление линии в любом её сечении при любых нагрузках на её конце. Для этого необходимо знать только k_1, т. е. соотношение между параметрами нагрузки и линии (т. е. $R_н$, $X_н$ и ρ), а также положение пучности напряжения x_0, относительно которого производится отсчёт x_1 в направлении к источнику энергии. Таким образом, приведённые на рис. 7.10 кривые распределения $U(x)$ и $I(x)$ могут быть использованы и в случае комплексной нагрузки при замене k на k_1 и при соответствующем отсчёте x.

5. *Короткое замыкание линии*

Полагая $Z_н=0$, находим для коэффициента отражения

$$\vec{\mu}_н = \frac{Z_н-\rho}{Z_н+\rho} = -1.$$

Следовательно,

$$\vec{U}_н = (1-\vec{\mu}_н)\vec{U}_{пад} = 0,$$

$$\vec{I}_н = (1-\vec{\mu}_н)\vec{I}_{пад} = 2\vec{I}_{пад} = \vec{I}_{макс}.$$

Выражения (7.62) — (7.64) в данном случае обращаются в следующие:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}(x) &= \vec{I}_н Z_н\left(\cos\alpha x + i\frac{\rho}{Z_н}\sin\alpha x\right) = i\vec{I}_н\rho\sin\alpha x\\ \vec{I}(x) &= \vec{I}_н\cos\alpha x\end{aligned}\right\}, \qquad (7.77)$$

$$Z(x) = \frac{i\rho\sin\alpha x}{\cos\alpha x} = i\rho\operatorname{tg}\alpha x. \qquad (7.78)$$

В линии (без потерь) устанавливаются чисто стоячие волны напряжения и тока, причём у короткозамкнутого конца получается узел напряжения и пучность тока. Амплитуда напряжения в пучности $\left(\text{в точке } x=\frac{\lambda}{4}\right)$ связана с амплитудой тока в пучности (в точке $x=0$), как и в случае линии, нагруженной на конечное реактивное сопротивление, соотношением (7.71), т. е.

$$\vec{U}_{макс} = \vec{I}_{макс}\rho.$$

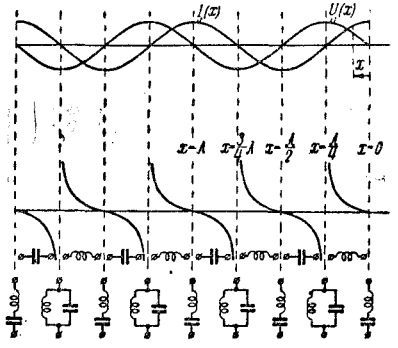


Рис. 7.11

Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль короткозамкнутой линии и график зависимости входного сопротивления линии от её длины (расстояния от конца линии x) показаны на рис. 7.11.

Из ф-лы (7.78) видно, что если $\alpha x<\frac{\pi}{2}$, т. е. длина линии

$$x<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4},$$

то входное сопротивление линии является положительным реактивным сопротивлением, т. е. имеет характер индуктивного сопротивления. При $\frac{\lambda}{4}<x<\frac{\lambda}{2}$ входное сопротивление имеет характер ёмкостного сопротивления, при $\frac{\lambda}{2}<x<\frac{3}{4}\lambda$ опять индуктивного и т. д. В узлах напряжения входное сопротивление линии без потерь равно, следовательно, нулю, а в узлах тока — бесконечности. Характер входного сопротивления линии на отдельных участках x символически представлен на

рис. 7.11. В точках, где $Z_{вх}=0$, отрезок линии можно представить эквивалентным последовательным резонансным контуром, а в точках, где $Z_{вх}\to\infty$, параллельным резонансным контуром.

6. Разомкнутая линия

Полагая $Z_н=\infty$, находим:

$$\vec{\mu}_н=\frac{\infty-\rho}{\infty+\rho}=+1,$$

$$\vec{U}_н=(1+\vec{\mu}_н)\vec{U}_{пад}=2\vec{U}_{пад}=\vec{U}_{макс},$$

$$\vec{I}_н=(1-\vec{\mu}_н)I_{пад}=0.$$

Далее

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}(x)&=\vec{U}_н\cos\alpha x\\ \vec{I}(x)&=\mathrm{i}\frac{\vec{I}_н Z_н}{\rho}\sin\alpha x=\mathrm{i}\frac{\vec{U}_н}{\rho}\sin\alpha x\end{aligned}\right\}\qquad(7.79)$$

$$Z(x)=\frac{Z_н\cos\alpha x}{\mathrm{i}\frac{Z_н}{\rho}\sin\alpha x}=-\mathrm{i}\rho\operatorname{ctg}\alpha x.\qquad(7.80)$$

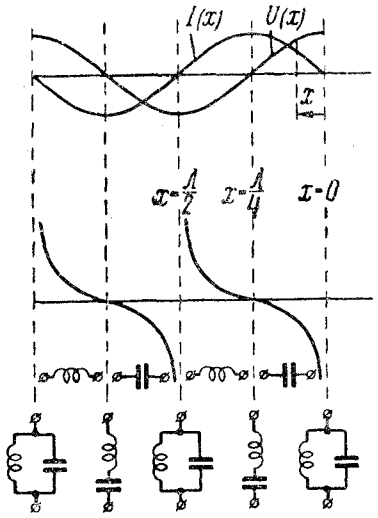


Рис. 7.12

Графики распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии и график зависимости входного сопротивления линии от длины (расстояния от конца линии x) показаны на рис. 7.12.

В данном случае при длине линии от 0 до $\frac{\lambda}{4}$, от $\frac{\lambda}{2}$ до $\frac{3}{4}\lambda$ и т. д., т. е. при нечётном числе четвертей волны, входное сопротивление имеет ёмкостный характер, а при чётном — индуктивный.

§ 7.6. Основные применения высокочастотных линий

Из предыдущего рассмотрения видно, что в зависимости от режима нагрузки, а также от соотношения между длиной линии

и длиной волны, линия обладает самыми различными свойствами. Этим объясняется универсальность применений линий и непрерывное расширение круга задач, решаемых с помощью линий в высокочастотной технике.

Рассмотрим вкратце лишь применение линий в качестве фидеров для канализации энергии высокочастотных колебаний и в качестве элементов колебательных систем и измерительных устройств.

При использовании линии в качестве высокочастотного фидера, соединяющего источник энергии с нагрузкой, основное внимание обращается на получение режима бегущей волны. Если входное сопротивление потребителя энергии (передающая антенна, питаемая генератором через фидер, или входная цепь приёмника, соединённая через фидер с приёмной антенной) отличается от волнового сопротивления линии, то для устранения отражения волн у конца линии применяются специальные согласующие устройства (высокочастотные трансформаторы). Работа в режиме чисто бегущей волны позволяет снизить потери энергии в фидере и, что особенно важно в случае значительных мощностей, устраняет опасность нарушения изоляции в пучностях напряжений, которые имеют место при не чисто бегущей волне.

Для количественной характеристики согласования линии с нагрузкой в практике широко используются „коэффициент бегущей волны“ (КБВ), под которым понимается отношение амплитуд напряжения (тока) в узле и пучности [см. ф-лу (7.74)]. В реальных устройствах КБВ обычно не меньше, чем $0{,}5\div 0{,}6$.

Коэффициент полезного действия фидера определяется как отношение мощности, поступающей в нагрузку, к мощности, подводимой к фидеру. В частном случае чисто бегущей волны, когда сопротивление нагрузки равно ρ, кпд может быть представлен в простой форме:

$$\eta=\frac{U_н I_н}{U_0 I_0}.$$

Учитывая, что бегущие (падающие) волны напряжения и тока убывают на длине линии в $e^{-\beta l}$ раз, получаем

$$\eta=e^{-2\beta l}.\qquad(7.81)$$

Так как обычно $2\beta l\ll 1$, то

$$\eta\approx 1-2\beta l.\qquad(7.81')$$

С повышением частоты открытые линии оказываются всё менее пригодными из-за потерь на излучение. От этого недостатка

свободны коаксиальные кабели, в которых достигается полная экранировка электромагнитного поля. В диапазоне 30 ÷ 600 *Мгц* такие кабели получили в настоящее время основное распространение. В области более высоких частот оказывается затруднительным обеспечить достаточно малое сопротивление потерь в коаксиальных кабелях. Кроме того, когда радиальное расстояние между внешним и внутренним проводниками коаксиальной линии становится больше половины волны или длина окружности среднего радиуса $\frac{r_1+r_2}{2}$ больше волны, то в кабеле, наряду с основной поперечной электромагнитной волной, возникают высшие типы волн, в результате чего резко возрастают потери. Для устранения высших типов волн приходится уменьшать поперечные размеры кабеля, что приводит к росту потерь и, что особенно нежелательно, к снижению электрической прочности и, следовательно, к уменьшению максимальной пропускаемой мощности.

В связи с этим, на частотах выше 2000 ÷ 3000 *Мгц*, как правило, используются канализирующие устройства в виде металлических труб без центрального проводника. Такие устройства называются волноводами. В теории электромагнитного поля доказывается, что поперечные электромагнитные волны не могут существовать в подобных системах.

В волноводах могут распространяться только магнитные или электрические волны, обладающие соответственно продольной магнитной или электрической компонентой поля. В практике стремятся работать с волной низшего порядка (в случае прямоугольного волновода так называемая волна типа H_{01}). Для устранения высших типов волн поперечные размеры берутся не выше некоторого предела. Так, например, в случае волновода прямоугольного сечения, бóльшая сторона должна лежать в пределах между $^1/_2\lambda$ и λ, а меньшая сторона должна быть меньше, чем $\frac{\lambda}{2}$.

Подробное рассмотрение волноводов не входит в задачу настоящего курса[1]).

Использование линии в качестве измерительного устройства основано на том факте, что характер распределения амплитуд тока и напряжения при заданной частоте генератора и заданном волновом сопротивлении линии полностью определяется модулем и аргументом нагрузочного сопротивления.

Определение соотношения между амплитудами напряжения (или тока) в пучности и в узле совместно с определением смещения пучности относительно конца линии позволяет найти как активную, так и реактивную слагающую нагрузочного сопротивления (см. § 7.5, п. 4).

[1]) Структура поля в волноводах изучается в теории электромагнитного поля, техническая сторона вопроса — в курсе антенно-фидерных устройств.

Таким образом, отрезок линии длиной порядка 1 — 1,5 волны, снабжённый градуированным по частоте генератором и устройством для снятия кривой распределения амплитуд вдоль линии, позволяет осуществить измерение комплексных сопротивлений, подключаемых к концу линии. Подобные измерительные линии получили широкое применение в сверхвысокочастотной технике, где они используются, помимо измерения сопротивлений, также для определения КБВ линии.

Более подробно рассмотрим свойства отрезков линий, используемых в качестве колебательных систем. В § 7.5 было показано, что короткозамкнутая или разомкнутая на конце линия обладает входным сопротивлением, изменяющимся как по своему характеру, так и по величине в зависимости от длины отрезка. Допустим, что длина отрезка равна точно четверти волны, т. е. при частоте генератора ω выполняется условие

$$\alpha l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2}.$$

Найдём входное сопротивление подобного отрезка линии. Если пренебрегать потерями в линии, то в соответствии с ф-лами (7.78) и (7.80), а также графиками рис. 7.12 и 7.14 сопротивление $Z_{вх}$ равно бесконечности (при коротком замыкании у конца) или нулю (при разомкнутом конце). Для получения истинного сопротивления реальной линии вблизи резонансной частоты необходимо, следовательно, учитывать потери в линии.

Воспользуемся поэтому общим выражением (7.44) и подставим для случая короткого замыкания $Z_н = 0$.

Находим, учитывая, что $W = \rho$,

$$Z_{вх_{к.з.}} = \rho \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{\operatorname{ch}\gamma l}. \qquad (7.82)$$

Учитывая соотношения

$$\operatorname{sh}\gamma l = \operatorname{sh}(\beta + i\alpha) l = \operatorname{sh}\beta l \cdot \cos\alpha l + i \operatorname{ch}\beta l \cdot \sin\alpha l$$

$$\operatorname{ch}\gamma l = \operatorname{ch}(\beta + i\alpha) l = \operatorname{ch}\beta l \cdot \cos\alpha l + i \operatorname{sh}\beta l \cdot \sin\alpha l$$

и подставляя $\alpha l = \frac{\pi}{2}$, получим

$$Z_{вх_{к.з.}} = \rho \frac{\operatorname{ch}\beta l}{\operatorname{sh}\beta l}.$$

Так как обычно $\beta l \ll 1$, то можно считать

$$\operatorname{ch}\beta l \approx 1,$$

$$\operatorname{sh}\beta l \approx \beta l.$$

Окончательно получаем

$$Z_{вх_{к.з.}} = \frac{\rho}{\beta l}. \qquad (7.82')$$

Как отмечалось в § 7.4, в случае высокочастотных воздушных линий погонное затухание [см. ф-лу (7.56')] равно

$$\beta = \frac{R}{2\rho}.$$

При этом вместо (7.82') получаем следующее выражение

$$Z_{вх_{к.з.}} = \frac{\rho^2}{\frac{Rl}{2}}. \qquad (7.82'')$$

Этот результат отличается от резонансного сопротивления параллельного контура с сосредоточенными постоянными только тем (см. гл. 4), что вместо полного сопротивления потерь контура в данном случае фигурирует половина полного сопротивления потерь линии. Это различие объясняется неравномерным распределением амплитуды тока по длине линии при работе в режиме стоячей волны. Действительно, при распределении, показанном на рис. 7.13, полная мощность потерь в сопротивлении линии (средняя за период) будет

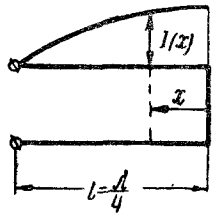


Рис. 7.13.

$$P_{\frac{\lambda}{4}} = \int_0^{l=\frac{\lambda}{4}} \frac{[I(x)]^2}{2} R\,dx = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\lambda}{4}} I_{макс}^2 \cos^2 \alpha x\,dx =$$

$$= \frac{R}{2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{макс}^2 \cos^2 \alpha x\,d(\alpha x) = \frac{R}{2\alpha}\,\frac{\pi}{4}\,I_{макс}^2 =$$

$$= \frac{R}{4}\,\frac{\lambda}{2} I_{макс}^2 = \frac{R}{4}\,l I_{макс}^2 = \frac{Rl}{2}\,\frac{I_{макс}^2}{2}.$$

Отсюда видно, что если мощность потерь относить к току в пучности, то эквивалентное сосредоточенное сопротивление (которое нужно включить в пучности тока) будет

$$R_э = \frac{Rl}{2}. \qquad (7.83)$$

Аналогично для четвертьволновой разомкнутой линии нетрудно получить следующее выражение

$$Z_{вх_{х.х}} = \rho\frac{\operatorname{ch}\gamma l}{\operatorname{sh}\gamma l} \approx \rho\frac{\operatorname{sh}\beta l}{\operatorname{ch}\beta l} \approx \rho\beta l = \rho\frac{R}{2\rho}l = \frac{Rl}{2}. \qquad (7.84)$$

Как и в случае последовательного резонансного контура, входное сопротивление разомкнутой четвертьволновой линии равно просто активному сопротивлению потерь (с учётом распределённого характера потерь, как и в случае короткозамкнутой линии).

Для полуволновой линии $\left(l = \frac{\lambda}{2}\right)$ входное сопротивление при коротком замыкании равно $\frac{Rl}{2}$, а при холостом ходе $\frac{\rho^2}{R\frac{l}{2}}$ и т. д.

Нетрудно выявить форму резонансной кривой четвертьволнового отрезка линии. При небольшой расстройке частоты ω относительно резонансной частоты ω_p, получим

$$\alpha l = \frac{(\omega_p + \Delta\omega)\,l}{c} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega_p}$ — относительно небольшой угол.

Можно считать:

$$\cos\alpha l = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi \approx -\varphi,$$

$$\sin\alpha l = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi \approx 1.$$

Подставляя эти соотношения в выражение (7.82), получим

$$Z_{вх_{к.з}} = \rho\,\frac{\operatorname{sh}\beta l\cdot\cos\alpha l + \mathrm{i}\operatorname{ch}\beta l\cdot\sin\alpha l}{\operatorname{ch}\beta l\cdot\cos\alpha l + \mathrm{i}\operatorname{sh}\beta l\cdot\sin\alpha l} = \rho\,\frac{-\beta l\,\varphi + \mathrm{i}}{-\varphi + \mathrm{i}\,\beta l}.$$

Произведение двух малых величин βl и φ по модулю очень мало по сравнению с единицей. Можно поэтому считать

$$Z_{вх\,к.з}(\Delta\omega)\approx\frac{\rho}{\beta l+i\varphi}=\frac{\frac{\rho}{\beta l}}{1+i\frac{\varphi}{\beta l}}.$$

Учитывая ф-лу (7.82′), получаем

$$Z_{вх\,к.з}(\Delta\omega)\approx\frac{Z_p}{1+i\frac{\varphi}{\beta l}}. \qquad (7.85)$$

По форме это выражение совпадает с ур-нием (4.72), определяющим сопротивление параллельного контура в зависимости от расстройки. Следовательно, и форма резонансной кривой четвертьволнового отрезка совпадает с резонансной кривой обычного контура. Величина $\frac{\varphi}{\beta l}$ по аналогии может быть названа обобщённой расстройкой эквивалентного контура.

Таким образом, при $\beta\approx\frac{R}{2\rho}$ получаем

$$a_э=\frac{\varphi}{\beta l}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{\frac{Rl}{2\rho}}=\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\cdot\frac{\pi\rho}{2Rl}.$$

Отсюда видно, что добротность эквивалентного контура равна

$$Q_э=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\rho}{Rl}=\frac{2\pi\rho}{R\lambda} \qquad (7.86)$$

(где $\lambda=4l$).

Соотношения (7.82′)—(7.85) полезны, в частности, для оценки входного сопротивления четвертьволновых отрезков, используемых в качестве „металлических изоляторов", т. е. устройств, предназначенных для преграждения пути токам высокой частоты.

В усилительных же или генераторных схемах, СВЧ содержащих электронные лампы, колебательные контуры составляются из междуэлектродных ёмкостей ламп и отрезков линий. Пример такого контура изображён на рис. 7.14. Для получения резонанса токов входное сопротивление линии в данном случае должно быть индуктивным. Это означает, что на длине линии l должно укладываться несколько менее четверти волны („работа в первой четверти") или несколько менее трёх четвертей („работа в третьей четверти") и т. д.

Если заданы ω, C и ρ, то длину l отрезка нетрудно найти из ф-лы (7.78). Приравнивая индуктивное сопротивление линии ёмкостному сопротивлению конденсатора, получим

$$\rho\operatorname{tg}\alpha l=\frac{1}{\omega C},$$

откуда

$$l=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\omega C\rho}+n\frac{\lambda}{2}, \qquad (7.87)$$

где n — целое положительное число.

В отличие от простого контура с сосредоточенными постоянными, схема рис. 7.14*б* обладает бесконечным числом резонансных частот. Действительно, пусть заданы C, ρ и l. Если изменять частоту ω от нуля до бесконечности, то зависимость ёмкостного сопротивления конденсатора (абсолютного значения) и входного сопротивления линии (реактивной слагающей) от частоты будет иметь вид графиков, представленных на рис. 7.15.

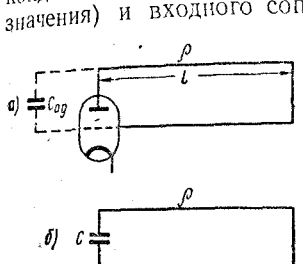


Рис. 7.14

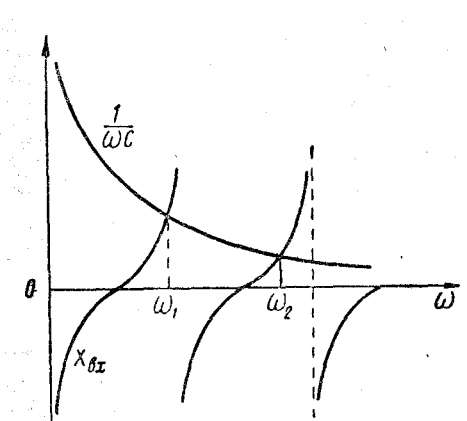


Рис. 7.15

При частотах $\omega=\omega_1$, ω_2 и т. д., являющихся абсциссами точек пересечения $\frac{1}{\omega C}$ и $X_{вх}$, получаются параллельные резонансы. Чем выше порядок резонансной частоты, тем меньше величина характеристики эквивалентного резонансного контура $\left(\frac{1}{\omega_1 C}, \frac{1}{\omega_2 C}, \ldots\right.$ и т. д.$\left.\right)$. Поэтому при практическом использовании отрезков линии в качестве колебательных контуров стараются обеспечить работу в первой четверти, в крайнем случае в третьей.

Многочастотность колебательных систем с распределёнными постоянными в автогенераторах свч может при некоторых условиях приводить к явлению паразитной генерации на одной из частот, отличной от рабочей.

Отметим, что резонансные частоты схемы рис. 7.14 не находятся между собой в кратных соотношениях, как это имеет место в отрезках линии, не шунтированных сосредоточенной ёмкостью или индуктивностью.

При частотах выше 2000 ÷ 3000 *Мгц* в качестве колебательных систем используются полые резонаторы. Как и волноводы, полые резонаторы изучаются в курсах теории электромагнитного поля, антенно-фидерных устройств и других специальных дисциплинах.

ГЛАВА 8

ЦЕПНЫЕ СХЕМЫ И ФИЛЬТРЫ. ИСКУССТВЕННЫЕ ЛИНИИ

§ 8.1. Основные уравнения для однородных цепных схем

Для ряда технических приложений важное значение имеет теория многозвенных цепей, составленных из одинаковых элементов — четырёхполюсников (однородные цепные схемы). Примерами подобных цепей являются многозвенные фильтры, многокаскадные усилители, линии задержки и другие аналогичные устройства. Скелетная схема каскадного соединения четырёхполюсников представлена на рис. 8.1.

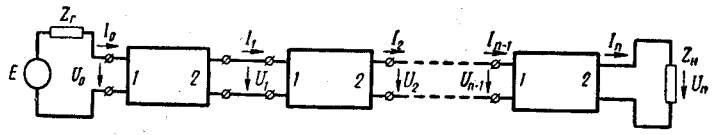


Рис. 8.1

Допустим, что заданы параметры отдельных четырёхполюсников, внутреннее сопротивление генератора $Z_г$ и сопротивление нагрузки $Z_н$, а также амплитуда $\vec{E}$ и частота ω гармонической эдс генератора и требуется найти условия, определяющие передачу энергии от генератора к нагрузочному сопротивлению, а также распределение токов и напряжений вдоль системы. Внешне эта задача напоминает аналогичную задачу для однородной линии. Принципиальное различие заключается в том, что в линии амплитуды изменяются по длине линии непрерывно, а в многозвенной цепи с сосредоточенными постоянными при переходе от одного звена к другому — скачкообразно.

Несмотря на это различие, применяемые в теории длинных линий методы с некоторыми изменениями оказываются эффективными и при решении задач, относящихся к однородным многозвенным цепям с сосредоточенными постоянными.

Составим уравнения для токов и напряжений, действующих на стыке двух четырёхполюсников в любом участке цепи, например между $(k-1)$-м и k-м четырёхполюсниками (рис. 8.2). Используем в качестве исходной систему ур-ний (6.64). Так как ток $\vec{I}_k$ в рассматриваемом сечении цепи является выходным током для $(k-1)$-го четырёхполюсника и входным для k-го четырёхполюсника, то на основании второго ур-ния (6.64) с учётом направлений напряжений и токов можно написать

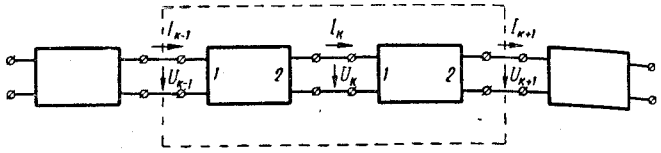


Рис. 8.2

$$\vec{I}_k = -(Y_{21}\vec{U}_{k-1} + Y_{22}\vec{U}_k),$$

а на основании первого ур-ния (6.64)

$$\vec{I}_k = (Y_{11}\vec{U}_k + Y_{12}\vec{U}_{k+1}).$$

Приравнивая правые части этих выражений, получаем уравнение

$$\vec{U}_{k-1} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}}\vec{U}_k + \vec{U}_{k+1} = 0. \tag{8.1}$$

Если отправляться от уравнений системы (6.67), то нетрудно составить следующее выражение:

$$\vec{U}_k = Z_{21}\vec{I}_{k-1} - Z_{22}\vec{I}_k = Z_{11}\vec{I}_k - Z_{12}\vec{I}_{k+1}, \tag{8.2}$$

откуда

$$\vec{I}_{k+1} - \frac{Z_{11}+Z_{22}}{Z_{12}}\vec{I}_k + I_{k-1} = 0. \tag{8.3}$$

Но из определений (6.68) нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}} = -\frac{Z_{11}+Z_{22}}{Z_{12}}. \tag{8.4}$$

Поэтому уравнения для напряжений и для токов по существу являются одинаковыми и могут быть записаны в одной из следующих двух форм:

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_{k-1} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}}\vec{U}_k + \vec{U}_{k+1} = 0 \\ \vec{I}_{k-1} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}}\vec{I}_k + \vec{I}_{k+1} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{8.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_{k-1} - \frac{Z_{11}+Z_{12}}{Z_{12}}\vec{U}_k + \vec{U}_{k+1} = 0 \\ \vec{I}_{k-1} - \frac{Z_{11}+Z_{12}}{Z_{12}}\vec{I}_k + \vec{I}_{k+1} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8.5'}$$

§ 8.2. Решение уравнений

Рассматривая выделенный на рис. 8.2 элемент цепи условно как элемент однородной линии, можно искать решение ур-ний (8.5) в форме, аналогичной решениям (7.11) — (7.12), т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_k = A_1 e^{-\gamma k} + A_2 e^{\gamma k} \\ \vec{I}_k = B_1 e^{-\gamma k} + B_2 e^{\gamma k} \end{aligned}\right\}. \tag{8.6}$$

Величина γ, как и в выражениях (7.11) — (7.12), представляет собой постоянную распространения, но не на единицу длины линии, а на одно звено цепи. Индекс k заменяет непрерывную переменную x, входящую в решения (7.11) — (7.12).

Первые слагаемые в ур-ниях (8.6) можно трактовать как „падающие", а вторые — как „отражённые" волны напряжения и тока.

Подставляя решения (8.6) в систему ур-ний (8.5), после несложных преобразований получим

$$\left(e^{\gamma} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}} + e^{-\gamma}\right)(A_1 e^{-\gamma k} + A_2 e^{\gamma k}) = 0$$

или

$$\left(e^{\gamma} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}} + e^{-\gamma}\right)\vec{U}_k = 0. \tag{8.7}$$

Аналогично получается

$$\left(e^{\gamma} + \frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}} + e^{-\gamma}\right)\vec{I}_k = 0. \tag{8.8}$$

Отсюда видно, что решение (8.6) может иметь смысл лишь при выполнении условия $e^{\gamma}+e^{-\gamma}=-\frac{Y_{11}+Y_{22}}{Y_{12}}$, которое и определяет постоянную распространения γ, именно

$$\operatorname{ch}\gamma=-\frac{Y_{11}+Y_{22}}{2Y_{12}}=\frac{Z_{11}+Z_{22}}{2Z_{12}}, \tag{8.9}$$

откуда

$$\gamma=\operatorname{arch}\left(\frac{Z_{11}+Z_{22}}{2Z_{12}}\right). \tag{8.10}$$

Выражения для γ особенно упрощаются в случае симетричных звеньев, когда $Z_{11}=Z_{22}$ и $Y_{11}=Y_{22}$.

В этом случае вместо ур-ний (8.9) — (8.10) получаем:

$$\operatorname{ch}\gamma=-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}=\frac{Z_{11}}{Z_{12}}, \tag{8.9'}$$

$$\gamma=\operatorname{arch}\left(-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}\right)=\operatorname{arch}\frac{Z_{11}}{Z_{12}}. \tag{8.10'}$$

Приведём ёще одно общее выражение для γ, которое потребуется для дальнейшего анализа цепных схем.

Учитывая, что

$$\operatorname{sh}\gamma=\sqrt{(\operatorname{ch}\gamma)^2-1}=\sqrt{\frac{(Y_{11}+Y_{22})^2}{4Y_{12}^2}-1}=\sqrt{\frac{(Z_{11}+Z_{22})^2}{4Z_{12}^2}-1},$$

и используя соотношение

$$e^{\pm\gamma}=\operatorname{ch}\gamma\pm\operatorname{sh}\gamma,$$

находим

$$e^{\pm\gamma}=\frac{-(Y_{11}+Y_{22})\pm\sqrt{(Y_{11}+Y_{22})^2-4Y_{12}^2}}{2Y_{12}}=$$

$$=\frac{(Z_{11}+Z_{22})\pm\sqrt{(Z_{11}+Z_{22})^2-4Z_{12}^2}}{2Z_{12}}. \tag{8.11}$$

Отсюда получается искомое выражение для постоянной распространения

$$\gamma=\ln\left[\frac{-(Y_{11}+Y_{22})+\sqrt{(Y_{11}+Y_{22})^2-4Y_{12}^2}}{2Y_{12}}\right]=$$

$$=\ln\left[\frac{(Z_{11}+Z_{22})+\sqrt{(Z_{11}+Z_{22})^2-4Z_{12}^2}}{2Z_{12}}\right]. \tag{8.12}$$

Так как проводимости Y_{11}, Y_{22} и Y_{12} или сопротивления Z_{11}, Z_{22} и Z_{12} полностью определяют четырёхполюсники, из

которых составлена цепная схема рис. 8.1, то выражения (8.10) — (8.12) позволяют определить постоянную распространения γ по заданным параметрам отдельных четырёхполюсников.

Обратимся к определению постоянных A_1, A_2, B_1 и B_2. С этой целью подставим решение (8.6) в исходное ур-ние (8.2):

$$A_1e^{-\gamma k}+A_2e^{\gamma k}=Z_{11}B_1e^{-\gamma k}+Z_{11}B_2e^{\gamma k}-Z_{12}B_1e^{-\gamma(k+1)}-$$

$$-Z_{12}B_2e^{\gamma(k+1)}=(Z_{11}-Z_{12}e^{-\gamma})B_1e^{-\gamma k}+(Z_{11}-Z_{12}e^{\gamma})B_2e^{\gamma k}.$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{-\gamma k}$ и $e^{\gamma k}$, получаем:

$$A_1=(Z_{11}-Z_{12}e^{-\gamma})B_1, \tag{8.13}$$

$$A_2=(Z_{11}-Z_{12}e^{\gamma})B_2. \tag{8.14}$$

Как видим, постоянные A_1 и B_1, а также A_2 и B_2 взаимно связаны. Можно, следовательно, оба уравнения системы (8.6) выразить только через A_1 и A_2. Обозначив для краткости

$$Z_{01}=Z_{11}-Z_{12}e^{-\gamma}, \tag{8.15}$$

$$Z_{02}=-(Z_{11}-Z_{12}e^{\gamma}), \tag{8.16}$$

получим:

$$B_1=\frac{A_1}{Z_{01}},$$

$$B_2=-\frac{A_2}{Z_{02}}.$$

На основании полученных соотношений систему ур-ний (8.6) можно записать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}\vec{U}_k&=A_1e^{-\gamma k}+A_2e^{\gamma k}\\ \vec{I}_k&=\frac{A_1}{Z_{01}}e^{-\gamma k}-\frac{A_2}{Z_{02}}e^{\gamma k}\end{aligned}\right\}. \tag{8.17}$$

Продолжая аналогию между многозвенной системой и длинной линией, Z_{01} можно рассматривать как характеристическое сопротивление системы для падающей волны, а Z_{02} — как такое же сопротивление для отражённой волны. Так как в общем случае входящие в систему четырёхполюсники могут быть несимметричны, то, естественно, что характеристические сопротивления для положительного и отрицательного направлений, т. е. для падающей и отражённой волн, могут быть различными.

Для определения постоянных A_1 и A_2 необходимо исходить из граничных условий. Для схемы, изображённой на рис. 8.1, эти условия сводятся к двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_0 + \vec{I}_0 Z_г = \vec{E} \\ \vec{U}_n - \vec{I}_n Z_н = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8.18}$$

Подставляя сюда выражения (8.17), получим

$$\frac{Z_г + Z_{01}}{Z_{01}} A_1 - \frac{Z_г - Z_{02}}{Z_{02}} A_2 = \vec{E},$$

$$-\frac{Z_н - Z_{01}}{Z_{01}} e^{-n\gamma} A_1 + \frac{Z_н + Z_{02}}{Z_{02}} e^{n\gamma} A_2 = 0.$$

Исключая с помощью этих уравнений A_1 и A_2 из ур-ний (8.17), придём к следующим окончательным выражениям для амплитуд напряжения и тока:

$$\vec{U}_k = \vec{E}\,\frac{Z_{01} e^{(n-k)\gamma} + Z_{02}\,\vec{\mu}_н\, e^{-(n-k)\gamma}}{(Z_г + Z_{01})(e^{n\gamma} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-n\gamma})}, \tag{8.19}$$

$$\vec{I}_k = \vec{E}\,\frac{e^{(n-k)\gamma} - \vec{\mu}_н\, e^{-(n-k)\gamma}}{(Z_г + Z_{01})(e^{n\gamma} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-n\gamma})}, \tag{8.20}$$

где через $\mu_н$ и $\mu_г$ обозначены „коэффициенты отражения“:

$$\vec{\mu}_н = \frac{Z_н - Z_{01}}{Z_н + Z_{02}}, \tag{8.21}$$

$$\vec{\mu}_г = \frac{Z_г - Z_{02}}{Z_г + Z_{01}}. \tag{8.22}$$

Аналогия между ур-ниями (8.19) — (8.20) и ур-ниями (7.32) — (7.33) очевидна. Некоторое различие обусловлено лишь тем, что в случае цепной схемы характеристические сопротивления Z_{01} и Z_{02} могут быть различными, между тем как в линии характеристическое сопротивление одинаково как для падающей, так и для отражённой волны. Это различие полностью исчезает в том случае, когда цепная схема составлена из симметричных звеньев, т. е. из симметричных четырёхполюсников.

В этом наиболее для практики интересном случае сопротивления Z_{01} и Z_{02} совпадают. Действительно, обращаясь

к выражениям (8.15) и (8.16) для Z_{01} и Z_{02} и исключая из них $e^{\pm\gamma}$ с помощью соотношения (8.11), придём к следующим общим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} Z_{01} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(Z_{11}+Z_{22})^2 - 4Z_{12}^2} + (Z_{11} - Z_{22})\right] \\ Z_{02} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(Z_{11}+Z_{22})^2 - 4Z_{12}^2} - (Z_{11} - Z_{22})\right] \end{aligned}\right\}. \tag{8.23}$$

В случае симметричных четырёхполюсников $Z_{11} = Z_{22}$ и, следовательно,

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{4Z_{11}^2 - 4Z_{12}^2} = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2}. \tag{8.24}$$

При этом ур-ния (8.19) — (8.20) принимают следующую форму:

$$\vec{U}_k = \frac{\vec{E}\,Z_0}{(Z_г + Z_0)} \cdot \frac{e^{\gamma(n-k)} + \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{e^{n\gamma} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-n\gamma}}, \tag{8.19'}$$

$$\vec{I}_k = \frac{\vec{E}}{Z_г + Z_0} \cdot \frac{e^{\gamma(n-k)} - \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{e^{\gamma n} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-\gamma n}}. \tag{8.20'}$$

Подставляя $k = n$ получим для напряжения $\vec{U}_н$ и тока $\vec{I}_н$ на выходе схемы следующие выражения:

$$\vec{U}_н = \frac{\vec{E}\,Z_0}{(Z_г + Z_0)} \cdot \frac{1 + \vec{\mu}_н}{e^{n\gamma} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-n\gamma}}, \tag{8.25}$$

$$\vec{I}_н = \frac{\vec{E}}{Z_г + Z_0} \cdot \frac{1 - \vec{\mu}_н}{e^{\gamma n} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-\gamma n}}. \tag{8.26}$$

Выразим $\vec{U}_k$ и $\vec{I}_k$ через $\vec{U}_н$ и $\vec{I}_н$, подобно тому, как это было сделано в § 7.3 для линий; с этой целью подставим (8.25) и (8.26) в ур-ния (8.19′) — (8.20′):

$$\vec{U}_k = \frac{\vec{E}\,Z_0}{Z_г + Z_0} \cdot \frac{1 + \vec{\mu}_н}{e^{\gamma n} - \vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-\gamma n}} \cdot \frac{e^{\gamma(n-k)} + \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{1 + \vec{\mu}_н} =$$

$$= \vec{U}_н \frac{e^{\gamma(n-k)} + \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{1 + \vec{\mu}_н}, \tag{8.19''}$$

$$\vec{I}_k = \frac{\vec{E}}{Z_г + Z_0} \cdot \frac{1 - \vec{\mu}_н}{e^{\gamma n} - \vec{\mu}_г \vec{\mu}_н e^{-\gamma n}} \cdot \frac{e^{\gamma(n-k)} - \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{1 - \vec{\mu}_н} =$$

$$= \vec{I}_н \frac{e^{\gamma(n-k)} - \vec{\mu}_н e^{-\gamma(n-k)}}{1 - \vec{\mu}_н}. \qquad (8.20'')$$

Подставляя, наконец,

$$\mu_н = \frac{Z_н - Z_0}{Z_н + Z_0},$$

выразим $\vec{U}_k$ и $\vec{I}_k$ через гиперболические функции:

$$\vec{U}_k = \vec{U}_н \left[\operatorname{ch}\gamma(n-k) + \frac{Z_0}{Z_н} \operatorname{sh}\gamma(n-k) \right], \qquad (8.27)$$

$$\vec{I}_k = \vec{I}_н \left[\operatorname{ch}\gamma(n-k) + \frac{Z_н}{Z_0} \operatorname{sh}\gamma(n-k) \right]. \qquad (8.28)$$

От аналогичных выражений (7.42) — (7.43) для линий полученные уравнения отличаются только тем, что вместо длины линии l и расстояния x от начала здесь фигурируют соответственно полное число звеньев n и индекс k, указывающий на место рассматриваемого звена в цепной схеме.

§ 8.3. Входное сопротивление цепной схемы с согласованной нагрузкой

Рассмотрим вопрос о входном сопротивлении многозвенной цепной схемы. С этой целью обратимся к общим ур-ниям (8.19) — (8.20) и, подставляя $k=0$, найдём напряжение и ток на входе цепи. Допустим, что число звеньев n бесконечно велико.

Тогда, полагая $e^{-n\gamma} \to 0$ и подставляя $k=0$, получим

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \vec{E} \frac{Z_{01}}{Z_г + Z_{01}} \\ \vec{I}_0 &= \frac{E}{Z_г + Z_{01}} \end{aligned}\right\}. \qquad (8.29)$$

Разделив первое из этих уравнений на второе, найдём входное сопротивление цепи

$$Z_{вх} = \left(\frac{\vec{U}_0}{\vec{I}_0} \right)_{n \to \infty} = Z_{01}. \qquad (8.30)$$

Как и следовало ожидать, входное сопротивление однородной цепной схемы при бесконечно большом числе звеньев равно характеристическому сопротивлению для падающей волны.

Из рассмотрения выражений (8.19) — (8.20) следует, что в случае согласованной нагрузки ($Z_н = Z_{01}$) такой же результат получается и при конечном числе звеньев. Действительно, при $Z_н = Z_{01}$ коэффициент отражения $\mu_н$ в соответствии с определением (8.21) обращается в нуль и выражения (8.19) — (8.20) переходят в следующие:

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_k &= \vec{E} \frac{Z_{01}}{Z_г + Z_{01}} e^{-k\gamma} \\ \vec{I}_k &= \frac{\vec{E}}{Z_г + Z_{01}} e^{-k\gamma} \end{aligned}\right\}. \qquad (8.31)$$

Очевидно, что при этом в любом стыке цепи, показанной схематически на рис. 8.1, входное сопротивление расположенной справа от стыка части цепи будет равно

$$Z_{вх} = Z_{01}.$$

Как видим, условие устранения отражённой волны в однородной цепной схеме не отличается внешне от условия для обычной однородной линии с распределёнными постоянными.

Не следует, однако, упускать из вида существенное различие между линией и многозвенной системой с сосредоточенными постоянными. В случае линии характеристическое сопротивление W почти не зависит от частоты (в идеальной линии $W = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$), а в системе с сосредоточенными постоянными Z_{01} является функцией частоты. Из этого вытекает, что при чисто активном нагрузочном сопротивлении $R_н$ строгое согласование цепи с нагрузкой не может быть обеспечено, особенно в широкой полосе частот.

§ 8.4. Характеристическое сопротивление и постоянная распространения симметричной однородной цепной схемы

В практике широко применяются схемы, составленные из одинаковых звеньев. В § 6.5 было установлено, что любой четырёхполюсник можно представить в виде эквивалентной Т-образной или П-образной схемы замещения. Однородную цепную схему, составленную из произвольных, но одинаковых четырёхполюсников, можно поэтому представить в виде каскадного соединения Т-образных или П-образных эквивалентных звеньев. В случае симметричных четырёхполюсников эквивалентные звенья

будут также симметричными. На рис. 8.3 и 8.4 представлены оба варианта цепных схем. Следует отметить, что эти схемы являются не только схемами замещения. В многозвенных фильтрах, линиях задержки и других аналогичных устройствах отдельные звенья часто выполняются по схеме рис. 8.3 или 8.4.

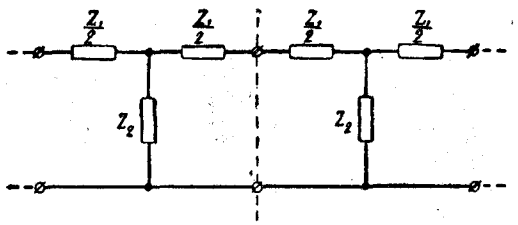


Рис. 8.3

Найдём характеристическое сопротивление Z_0 и постоянную распространения γ сперва для случая Т-звена. В соответствии с определениями § 6.5 Z_{11} представляет собой входное сопротивление четырёхполюсника при разомкнутом выходе.

Следовательно, при обозначениях рис. 8.3 имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Z_1}{2} + Z_2, \\ Z_{12} &= Z_2 \end{aligned}\right\}. \tag{8.32}$$

Сопротивление связи Z_{12} в данном случае совпадает с Z_2. Подставляя эти величины в ф-лу (8.24), получим для характеристического сопротивления звена следующее выражение:

$$Z_0 = Z_т = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + Z_2\right)^2 - Z_2^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2 + Z_2^2 - Z_2^2} = \sqrt{Z_1 Z_2\left(\frac{Z_1}{4Z_2} + 1\right)} =$$

$$= \sqrt{Z_1 Z_2} \cdot \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}. \tag{8.33}$$

Для определения постоянной распространения $\gamma_т$ воспользуемся ф-лами (8.9′) и (8.10′). Подставляя соотношение (8.32), получим:

$$\operatorname{ch}\gamma_т = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}, \tag{8.34}$$

$$\gamma_т = \operatorname{arch}\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right). \tag{8.35}$$

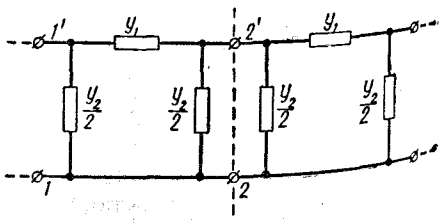


Рис. 8.4

Эти выражения можно привести к несколько более удобному виду, если использовать следующее соотношение между гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{ch}\gamma_т - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{\gamma_т}{2} = \frac{Z_1}{2Z_2},$$

откуда получается

$$\operatorname{sh}\frac{\gamma_т}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \tag{8.36}$$

и

$$\gamma_т = 2\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \tag{8.37}$$

Обратимся теперь к нахождению выражений для характеристического ротивления $Z_п$ и постоянной распространения для П-образного звена.

В соответствии с § 6.5 входная проводимость Y_{11} и взаимная проводимость Y_{12} любого четырёхполюсника определяются из условия $\vec{E}_2 = 0$, т. е. при коротком замыкании выхода четырёхполюсника. Из схемы рис. 8.4 видно, что при закорачивании выхода звена имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Y_2}{2} + Y_1 \\ Y_{12} &= -Y_1 \end{aligned}\right\}. \tag{8.38}$$

Знак минус в последнем выражении взят потому, что при замыкании зажимов $2-2'$ ток $\vec{I}_2 = Y_{21}\vec{E}_1$ направлен навстречу току, который имел бы место под действием напряжения $\vec{E}_2$, приложенного к зажимам $2-2'$.

Воспользуемся теперь ф-лой (8.24), в которой перейдём от Z_{11} и Z_{12} к Y_{11} и Y_{12} с помощью соотношений (6.68), именно:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}^2 - Y_{12}^2},$$

$$Z_{12} = -\frac{Y_{12}^2}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}^2 - Y_{12}^2}.$$

Таким образом,

$$Z_0 = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2} = \frac{1}{\sqrt{Y_{11}^2 - Y_{12}^2}}. \tag{8.39}$$

Подставляя сюда выражения (8.38), получим

$$Z_0 = Z_п = \frac{1}{\sqrt{Y_1 Y_2} \cdot \sqrt{1+\frac{Y_2}{4Y_1}}}, \tag{8.40}$$

а также обратную величину, так называемую „характеристическую проводимость" П-образного звена:

$$Y_п = \sqrt{Y_1 Y_2} \cdot \sqrt{1+\frac{Y_2}{4Y_1}}. \tag{8.41}$$

В практике проводимости Y_1 и Y_2 П-образного звена часто берутся как обратные величины по отношению к соответствующим сопротивлениям Z_1 и Z_2 Т-образного звена, т. е.

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2}.$$

В этом случае

$$Z_п = \sqrt{Z_1 Z_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{Z_1}{4Z_2}}}. \tag{8.42}$$

Разделив $Z_п$ на выражение (8.33), найдём следующее отношение:

$$\frac{Z_п}{Z_т} = \frac{1}{1+\frac{Z_1}{4Z_2}}. \tag{8.43}$$

Это выражение полезно для расчётов, связанных с переходом от Т-образного звена к П-образному звену или обратно.

Постоянную распространения определяем по ф-ле (8.9′):

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} = -\frac{Y_{11}}{Y_{12}}.$$

Учитывая соотношения (8.38), находим

$$\operatorname{ch}\gamma_п = \frac{\frac{Y_2}{2}+Y_1}{Y_1} = 1+\frac{Y_2}{2Y_1}, \tag{8.44}$$

откуда

$$\gamma_п = \operatorname{arch}\left(1+\frac{Y_2}{2Y_1}\right). \tag{8.45}$$

С помощью несложных преобразований, аналогичных тем, которые были использованы при выводе ф-л (8.36) — (8.37), можно получить следующие видоизменённые формулы для $\gamma_п$:

$$\operatorname{sh}\frac{\gamma_п}{2} = \sqrt{\frac{Y_2}{4Y_1}}, \tag{8.46}$$

$$\gamma_п = 2\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{Y_2}{4Y_1}}. \tag{8.47}$$

Не останавливаясь здесь на рассмотрении других возможных типов звеньев (например мостовых), выясним условия, при которых распространение волн напряжения и тока в цепной схеме от генератора к нагрузке не сопровождается убыванием амплитуд (затуханием).

Из предыдущей главы уже известно, что в случае однородной линии, работающей на согласованную нагрузку, для этого достаточно, чтобы линия была свободна от сопротивления потерь. В случае цепной схемы отсутствия потерь в элементах оказывается ещё недостаточно для устранения затухания. Необходимо ещё, чтобы частота генератора лежала в „полосе пропускания" цепи. Для выявления этой полосы обратимся к исследованию выражения (8.9′):

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{Z_{11}}{Z_{12}}. \tag{8.9′}$$

Постоянная распространения, в общем случае, может представлять собой комплексную величину

$$\gamma = \beta + i\alpha, \tag{8.48}$$

где β — затухание, а α — фазовый угол, приходящиеся на одно звено.

Подставляя выражение (8.48) в ур-ние (8.9′), получим

$$\operatorname{ch}(\beta+i\alpha) = \operatorname{ch}\beta\cos\alpha + i\operatorname{sh}\beta\sin\alpha = \frac{Z_{11}}{Z_{12}}. \tag{8.49}$$

Потребуем теперь, чтобы затухание $\beta = 0$. Так как при этом $\operatorname{ch}\beta \to 1$, а $\operatorname{sh}\beta \to 0$, то должно выполняться условие

$$\frac{Z_{11}}{Z_{12}} = \cos\alpha. \tag{8.50}$$

Но значения $\cos\alpha$ заключены в пределах между -1 и $+1$. Следовательно, для того, чтобы затухание β равнялось нулю, отношение $\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$ должно отвечать следующему неравенству:

$$-1 < \frac{Z_{11}}{Z_{12}} < +1. \tag{8.51}$$

Полученное условие полностью определяет требования к элементам цепи. Ясно, прежде всего, что все элементы должны представлять собой чисто реактивные сопротивления, так как только в этом случае отношение $\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$ может быть чисто вещественной величиной.

Далее, переходя с помощью соотношений (8.32) от Z_{11} и Z_{12} непосредственно к сопротивлениям Т-образного звена Z_1 и Z_2, перепишем неравенство (8.51) в форме

$$-1 \leqslant \frac{Z_1}{4Z_2} \leqslant 0. \tag{8.52}$$

Отсюда видно, что отношение $\frac{Z_1}{Z_2}$ должно быть отрицательным, т. е. сопротивления Z_1 и Z_2 должны быть различного характера: одно из них должно быть индуктивным, а другое ёмкостным.

Так как сопротивления Z_1 и Z_2 зависят от частоты, то условие (8.52) позволяет выявить границы полосы частот, в пределах которых обеспечивается условие $\beta = 0$. Из выражения (8.50) следует далее, что в „полосе прозрачности", где $\beta = 0$, фазовая постоянная α определяется как

$$\alpha = \pm \arccos \frac{Z_{11}}{Z_{12}} = \pm \arccos \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right). \tag{8.53}$$

Учитывая, что отношение $\frac{Z_1}{Z_2}$ по условию отрицательно, можно это выражение привести к более удобному виду. С этой целью сделаем следующие несложные преобразования:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{z_1}{2z_2};$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{z_1}{2z_2}.$$

Следовательно[1])

$$\left.\begin{aligned} &\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}} \\ &\text{и} \\ &\alpha = \pm 2\arcsin\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}} \end{aligned}\right\}. \tag{8.53'}$$

[1]) Выбор знака α определяется из условия положительности наклона фазовой характеристики $\alpha(\omega)$ в полосе прозрачности фильтра (см. § 6.4, стр. 211), поскольку в исходном выражении (8.17) для падающей волны перед γ стоит знак минус. Применение этого правила поясняется ниже на примерах.

Отсюда видно, что независимо от типа фильтра, на границах полосы прозрачности фазовая постоянная равна:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = 0 \quad &\text{при} \quad \frac{z_1}{4z_2} = 0 \\ \alpha = \pm\pi \quad &\text{при} \quad \frac{z_1}{4z_2} = 1 \end{aligned}\right\}. \tag{8.54}$$

Далее, характеристическое сопротивление, определяемое ф-лой (8.33), изменяется от

$$\left.\begin{aligned} Z_т = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad &\text{при} \quad \frac{z_1}{4z_2} = 0 \\ \text{до} \\ Z_т = 0 \quad &\text{при} \quad \frac{z_1}{4z_2} = 1 \end{aligned}\right\}. \tag{8.55}$$

Нетрудно также установить некоторые общие свойства фильтра вне полосы прозрачности. С этой целью воспользуемся общим выражением (8.36) и подставим в него

$$\gamma_т = \beta + i\alpha,$$

тогда

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2} + i\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + i\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}.$$

Но отношение $\frac{Z_1}{4Z_2}$ по условию всегда отрицательно. Можно поэтому последнее выражение переписать в форме

$$\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + i\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = i\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}}.$$

Так как первое слагаемое в левой части этого выражения является действительным числом, то получаются следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= 0 \\ \operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{z_1}{4z_2}} \end{aligned}\right\}. \tag{8.56}$$

Учитывая, что вне полосы прозрачности затухание $\beta \neq 0$, приходим к выводу, что в первом ур-нии (8.56) должен равняться нулю множитель $\cos\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, вне полосы прозрачности $\alpha = \pm\pi$.

Подставляя $\alpha=\pi$ во второе уравнение[1]), получаем следующие удобные для применений выражения:

$$\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}},$$

$$\beta=2\operatorname{arch}\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}}.$$

Всё сказанное выше можно подытожить следующим образом. Затухание и фазовая постоянная фильтра, составленного из Т-образных звеньев[2]), определяются следующими выражениями: в полосе прозрачности

$$\left.\begin{aligned}&\beta=0;\\ &\alpha=\pm\arccos\left(1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right)=\pm 2\arcsin\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}}\end{aligned}\right\},\qquad(8.57)$$

вне полосы прозрачности

$$\left.\begin{aligned}&\beta=2\operatorname{arch}\sqrt{\frac{z_1}{4z_2}}\\ &\alpha=\pm\pi\end{aligned}\right\}.\qquad(8.58)$$

§ 8.5. Однородная цепная схема без потерь, нагруженная на активное сопротивление

В конце параграфа § 8.3 отмечалось, что при чисто активном нагрузочном сопротивлении осуществить полное согласование цепной схемы, составленной из реактивных элементов, с нагрузкой в широкой полосе частот невозможно. Важно поэтому в виду большого практического значения случая активной нагрузки выяснить степень рассогласования хотя бы в полосе прозрачности цепи.

Допустим, что цепная схема задана в виде каскадного соединения n симметричных Т-образных звеньев, составленных из чисто реактивных элементов. Активное сопротивление нагрузки обозначим через $R_н$, а внутреннее сопротивление генератора, также активное, через $R_г$.

[1]) Случай $\alpha=-\pi$ здесь опускаем, так как $\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}$ не может принимать отрицательных значений.

[2]) Приведение П-образных звеньев к эквивалентным Т-образным легко производится с помощью соотношений (8.42) — (8.43).

Составим отношение амплитуды напряжения на выходе $\vec{U}_н$ к амплитуде напряжения генератора $\vec{E}$. На основании ур-ния (8.25) можем написать

$$\frac{\vec{U}_н}{\vec{E}}=\frac{Z_0}{(Z_г+Z_0)}\cdot\frac{1+\vec{\mu}_н}{e^{n\gamma}-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-n\gamma}}.\qquad(8.59)$$

С помощью выражений (8.21) и (8.22) нетрудно показать, что справедливо следующее равенство

$$\frac{Z_0}{Z_г+Z_0}(1+\vec{\mu}_н)=\frac{Z_н}{Z_г+Z_н}(1-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н).$$

Таким образом, выражение (8.59) может быть записано в несколько видоизменённой форме

$$\frac{\vec{U}_н}{\vec{E}}=\frac{Z_н e^{-n\gamma}}{(Z_г+Z_н)}\cdot\frac{(1-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н)}{(1-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-2n\gamma})}.\qquad(8.59')$$

Это отношение представляет собой, по существу, комплексный коэффициент передачи четырёхполюсника, к входным зажимам которого приложена эдс E генератора (внутреннее сопротивление которого включено в состав четырёхполюсника), а к выходным зажимам подключено нагрузочное сопротивление $Z_н$. Основной интерес представляет изменение модуля коэффициента передачи в зависимости от частоты при различных соотношениях между $Z_н$ и $Z_г$.

При $Z_н=R_н$, $Z_г=R_г$ и работе в полосе прозрачности коэффициенты отражения $\vec{\mu}_н$ и $\vec{\mu}_г$ являются вещественными числами, изменяющимися от какого-то начального значения до единицы. Это видно из выражения (8.55), показывающего, что в полосе прозрачности $Z_т$ является положительной действительной величиной.

Учитывая, наконец, что в полосе прозрачности $\beta=0$, а $\gamma=i\alpha$ является чисто мнимой величиной, так что $|e^{in\alpha}|=1$, приходим к следующему выражению для модуля коэффициента передачи

$$\frac{U_н}{E}=\frac{R_н}{R_г+R_н}\cdot\frac{\left|1-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н\right|}{\left|1-\vec{\mu}_г\,\vec{\mu}_н e^{-2in\alpha}\right|}.\qquad(8.60)$$

Так как коэффициенты $\mu_г$ и $\mu_н$ в полосе прозрачности изменяются относительно медленно, то основное влияние на величину

модуля, особенно при большом числе звеньев, оказывает множитель $e^{-2in\alpha}$. Очевидно, что при частотах, отвечающих условию

$$2n\alpha = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$$

или

$$\alpha = 0,\ \frac{2\pi}{2n},\ \frac{4\pi}{2n},\ \ldots = k\frac{\pi}{2n}, \tag{8.61}$$

где k — любое чётное число,
множитель

$$e^{-2in\alpha} = 1,$$

а при

$$2n\alpha = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots$$

или

$$\alpha = \frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \ldots = k\frac{\pi}{2n}, \tag{8.62}$$

где k — любое нечётное число,
множитель

$$e^{-2in\alpha} = -1.$$

В первом случае выражение (8.60) обращается в

$$\left(\frac{U_н}{E}\right)_{k=2;4\ldots} = \frac{R_н}{R_г + R_н}, \tag{8.63}$$

а во втором в

$$\left(\frac{U_н}{E}\right)_{k=1;3\ldots} = \frac{R_н}{R_г + R_н}\cdot\frac{1-\mu_г\mu_н}{1+\mu_г\mu_н}.$$

Подставляя выражения (8.21) — (8.22), приводим последнее уравнение к виду

$$\left(\frac{U_н}{E}\right)_{k=1;3\ldots} = \frac{R_н Z_т}{R_г R_н + Z_т^2}. \tag{8.64}$$

Частоты, при которых модуль коэффициента передачи проходит через свои экстремальные значения, определяются первым из ур-ний (8.53′) совместно с условиями (8.61) и (8.62).

Используя первое из ур-ний (8.53′), можем написать

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{z_1}{4z_2}.$$

Подставляя $\alpha = k\frac{\pi}{2n}$, получаем уравнение

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \frac{z_1}{4z_2}, \tag{8.65}$$

корни которого определяют искомые частоты.

Применение полученных результатов иллюстрируется в следующих параграфах на конкретных схемах.

§ 8.6. Электрические фильтры. Общие замечания

Электрическими фильтрами называются линейные пассивные цепи с резко выраженной частотной избирательностью.

В определённой области частот, называемой полосой пропускания или полосой прозрачности, фильтр должен обладать по возможности малым и равномерным затуханием, а во всех других областях по возможности большим затуханием.

В высокочастотной технике в качестве фильтров используются резонансные колебательные системы. Рассмотренные в гл. 4 и 5 простейшие колебательные системы наряду с такими функциями, как создание нагрузки и трансформация нагрузочных сопротивлений, выполняют также и задачу фильтрации высших гармонических составляющих (в передатчиках) или фильтрацию помех (в приёмниках).

В области относительно низких частот для разделения сигналов применяются специальные схемы, обеспечивающие более чёткое разделение спектров, чем это может быть достигнуто с помощью одного или двух контуров. При относительно невысоких частотах можно применять многозвенные цепные схемы, с помощью которых удаётся получить крутые склоны частотной характеристики на границах полосы прозрачности и очень большое затухание вне этой полосы.

Из предыдущих параграфов данной главы ясно, что для получения удовлетворительных результатов фильтры должны составляться из чисто реактивных сопротивлений. Поэтому при проектировании и конструировании фильтров особое внимание должно быть обращено на снижение сопротивлений потерь в катушках и конденсаторах, образующих звенья цепной схемы.

Большое значение имеет также правильное согласование фильтра с нагрузкой и фильтра с генератором (источником энергии сигнала). Фильтры, как правило, нагружаются на активное сопротивление. Так как разделение и формирование спектров сигналов производится обычно на малых уровнях мощности, то вопрос об отдаче не имеет первостепенного значения. Основное внимание при выборе нагрузочного сопротивления должно быть обращено на обеспечение хорошей формы частотной характеристики фильтра.

При расчёте и проектировании фильтров необходимо исходить из того основного условия, что в полосе прозрачности постоянная затухания β цепной схемы, образующей фильтр, должна быть близкой к нулю. Как и в случае однородной линии, выполнения этого требования ещё недостаточно, чтобы коэффициент передачи фильтра в целом обеспечивал нулевое затухание. Необходимо ещё обеспечить режим „бегущей" волны, т. е. обеспечить согласование фильтра с нагрузкой.

Считая это условие выполненным, обратимся к неравенству (8.52), определяющему область частот с нулевым значением β,

$$-1 \leqslant \frac{Z_1}{4Z_2} \leqslant 0. \tag{8.52}$$

Истолкование этого неравенства позволяет установить некоторые общие правила построения фильтров различного назначения. Напомним, что Z_1 и Z_2 должны представлять собой чисто реактивные сопротивления (с противоположными знаками).

На основании теоремы о реактивном сопротивлении (см. § 6.3) можно утверждать, что оба сопротивления с повышением частоты растут. Из этого следует, что отношение $\frac{Z_1}{4Z_2}$ может обращаться в нуль только при условии, что Z_1 обращается в нуль[1]).

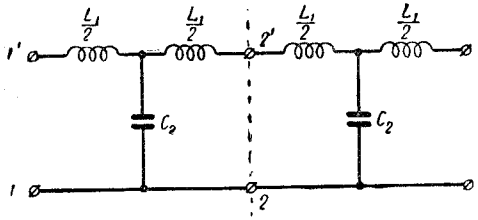


Рис. 8.5

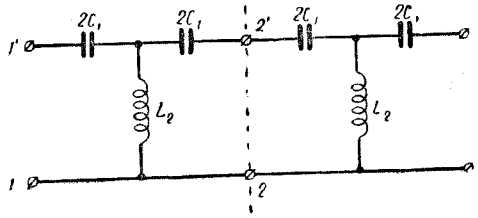


Рис. 8.6

Таким образом, полоса прозрачности фильтра может лежать только в области (или областях), где сопротивление Z_1 проходит через нуль. Отсюда сразу видно, что в фильтре, рассчитанном на пропускание частот, примыкающих к нулевой частоте (фильтр „нижних частот"), Z_1 должно быть индуктивным сопротивлением, а Z_2 — ёмкостным. Таким образом, звено фильтра нижних частот должно иметь вид, показанный на рис. 8.5.

Если требуется пропускать все частоты, превышающие определённую величину, т. е. если полоса пропускания фильтра

[1]) При этом предполагается, что при частотах, обращающих Z_1 в нуль, Z_2 отлично от нуля. Случай $Z_2 \to \infty$ практического значения не имеет.

должна примыкать к $\omega \to \infty$, то Z_1 должно быть ёмкостным, а Z_2 — индуктивным. Таким образом, звено фильтра „верхних частот" должно иметь вид, изображённый на рис. 8.6.

Для пропускания частот в полосе от ω_1 до ω_2 („полосовой фильтр") звено фильтра должно иметь вид, показанный на рис. 8.7. Здесь горизонтальные плечи звеньев представляют собой

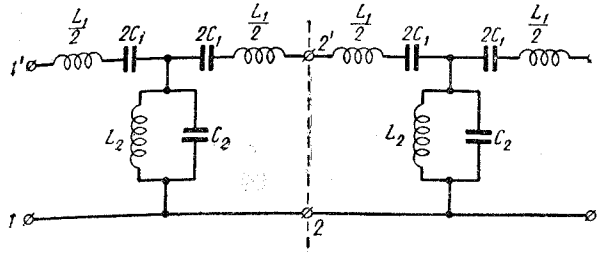


Рис. 8.7

последовательные резонансные цепочки, настроенные на одну из частот рабочей полосы, а вертикальные ветви могут представлять собой параллельные резонансные контуры. Если требуется задержать частоты в полосе от ω_1 до ω_2 („заградительный" полосовой фильтр), то последовательный и параллельный контуры в схеме 8.7 должны быть обменены местами. В результате получится звено, показанное на рис 8.8. Аналогичным образом можно наметить схемы звеньев и для более сложных фильтров.

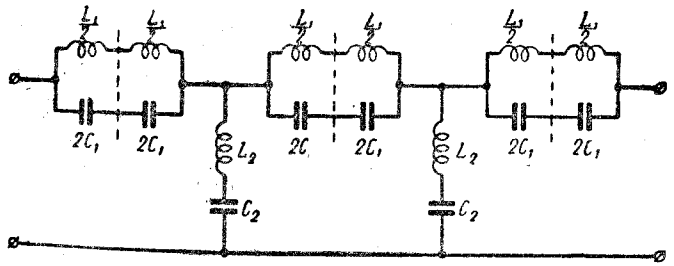


Рис. 8.8

Перечисленные выше типы фильтров обладают тем свойством, что произведение сопротивлений Z_1 и Z_2 является действительным числом, не зависящим от частоты

$$Z_1 Z_2 = R^2 = \text{const}. \tag{8.66}$$

Такие фильтры, относящиеся к категории простых фильтров, называются фильтрами типа K.

Нетрудно убедиться, что для фильтров типа K справедливы следующие соотношения:

$$\frac{Z_1}{4Z_2}=\frac{Z_1^2}{4R^2}=\frac{R^2}{4Z_2^2}, \tag{8.67}$$

$$Z_т=R\sqrt{1+\frac{Z_1^2}{4R^2}}=R\sqrt{1+\frac{R^2}{4Z_2^2}}. \tag{8.68}$$

Перечисленные выше основные виды фильтров рассматриваются более подробно в §§ 8.7 — 8.10. В § 11 данной главы приводятся краткие сведения о более сложных фильтрах.

§ 8.7. Фильтры нижних частот

Схема фильтра нижних частот при активном нагрузочном сопротивлении $R_н$ и активном внутреннем сопротивлении генератора $R_г$ показана на рис. 8.9.

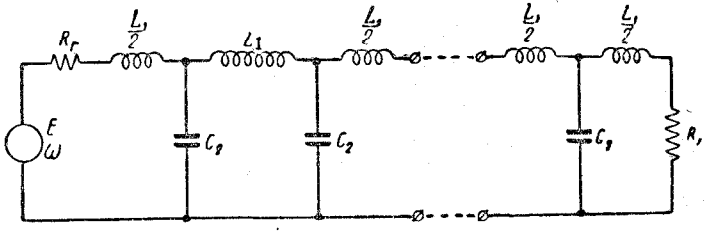


Рис. 8.9

Сопротивления элементов одного Т-звена равны:

$$\left.\begin{aligned} Z_1&=i\omega L_1\\ Z_2&=\frac{1}{i\omega C_2}\end{aligned}\right\}. \tag{8.69}$$

В данном случае

$$\frac{Z_1}{4Z_2}=-\frac{\omega^2 L_1 C_2}{4}. \tag{8.70}$$

Условие (8.52) выполняется для частот, заключённых в полосе от $\omega=0$ до граничной частоты ω_c (частоты „среза"), определяемой из условия

$$\frac{Z_1}{4Z_2}=-\frac{\omega_c^2 L_1 C_2}{4}=-1,$$

откуда

$$\omega_c=\frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}. \tag{8.71}$$

Таким образом, полоса прозрачности фильтра найдена. Применяя ф-лы (8.33), (8.66) и (8.70), находим характеристическое сопротивление

$$Z_т=\sqrt{Z_1 Z_2}\cdot\sqrt{1+\frac{Z_1}{4Z_2}}=R\sqrt{1-\frac{\omega^2 L_1 C_2}{4}}. \tag{8.72}$$

Подставляя сюда

$$\frac{L_1 C_2}{4}=\frac{1}{\omega_c^2},$$

перепишем ф-лу (8.72) в виде

$$Z_т=R\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}. \tag{8.72'}$$

В данном случае

$$R=\sqrt{Z_1 Z_2}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}. \tag{8.73}$$

При изменении частоты в пределах от 0 до ω_c $Z_т$ является активным сопротивлением, изменяющимся от R (при $\omega=0$) до 0 (при $\omega=\omega_c$). Вне полосы прозрачности ($\omega>\omega_c$) характеристическое сопротивление является реактивным (индуктивным) и растёт по абсолютной величине от 0 до ∞. Действительно, обращаясь к исходному выражению (8.33), запишем его для рассматриваемого Т-образного звена в виде

$$Z_т=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\cdot\sqrt{1+\frac{i\omega L_1\cdot i\omega C_2}{4}}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{i\omega}{\omega_c}\right)^2},$$

откуда видно, что при $\frac{\omega}{\omega_c}\to\infty$, когда в подкоренном выражении можно пренебречь единицей, получается

$$Z_т\underset{\omega\to\infty}{=}\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\cdot\frac{i\omega}{\omega_c}=\frac{i\omega L_1}{2}.$$

Таким образом, при очень высоких частотах характеристическое сопротивление фильтра определяется просто индуктивностью $\frac{L_1}{2}$ первого звена. Ход зависимости $\frac{Z_т\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{R}$ показан на рис. 8.10.

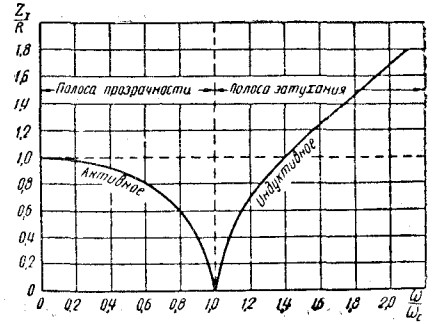


Рис. 8.10

Обратимся к определению фазовой постоянной фильтра нижних частот. Применяя ф-лу (8.57) и учитывая выражение (8.71), находим

$$\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{z_1}{4z_2}} = 2 \arcsin\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \tag{8.74}$$

В данном случае в выражении (8.57) выбран знак плюс, исходя из условия[1]), чтобы в полосе частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c$ обеспечивался положительный наклон фазовой характеристики $\alpha(\omega)$.

На нижней и верхней границах полосы прозрачности α обращается соответственно в нуль и π. Этот результат вытекает также из выражений (8.54). Вне полосы прозрачности фазовая постоянная равна π, а затухание в соответствии с ф-лами (8.58), (8.70) и (8.71) определяется выражением

$$\beta = 2 \operatorname{arch}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \tag{8.75}$$

Изменение затухания β и фазовой постоянной α для одного звена фильтра нижних частот показано графически на рис. 8.11.

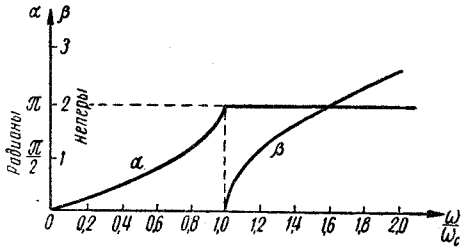


Рис. 8.11

Рассмотрим теперь изменение модуля коэффициента передачи фильтра нижних частот, составленного из нескольких звеньев. Для определённости возьмём число звеньев $n = 4$.

Сопротивление нагрузки $R_н$ возьмём равным характеристическому сопротивлению $Z_т$ при нулевой частоте, т. е. $R_н = R$.

Из ф-лы (8.72′) и рис. 8.10 видно, что согласование фильтра с нагрузкой получается при этом удовлетворительным лишь в области низких частот. Допустим, что внутреннее сопротивление генератора $R_г = R_н$, кроме того, $Z_1 Z_2 = R^2$ (фильтр типа K). Тогда в области частот, примыкающих к нулю, где $Z_т \approx R$, модуль коэффициента передачи в соответствии с ф-лой (8.63), будет

$$\frac{U_н}{E} = \frac{R_н}{R_г + R_н} = 0{,}5.$$

С повышением частоты модуль из-за рассогласования фильтра с нагрузкой будет изменяться. Найдём частоты, соответствующие

[1]) См. сноску на стр. 270.

экстремальным значениям модуля. Применяя ур-ние (8.65) и подставляя $n = 4$, а также $\frac{z_1}{4z_2} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$, получим

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{16}\right) = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$$

или

$$\sin\left(\frac{k\pi}{16}\right) = \frac{\omega}{\omega_c}.$$

Отсюда видно, что при изменении ω в полосе от 0 до ω_c аргумент синуса пробегает значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в указанной полосе индекс k принимает последовательно значения $0,1,2 \ldots 8$. Соответствующие этим значениям отношения $\frac{\omega}{\omega_c}$ приведены в таблице.

Таблица 8.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\omega}{\omega_c}$	0	0,195	0,382	0,555	0,707	0,830	0,923	0,980	1,000

При чётных значениях k модуль $\frac{U_н}{E}$ принимает найденное выше значение 0,5.

При нечётных k согласно ф-лам (8.64′) и (8.72′) получаем следующее выражение

$$\left(\frac{U_н}{E}\right)_{k=1,3,5,7\ldots} = \frac{R_н R \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k^2}}{R_г R_н + R^2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k^2\right]}.$$

В рассматриваемом частном случае $R_н = R_г = R$ можно написать

$$\left(\frac{U_н}{E}\right)_{k=1,3,5,7\ldots} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k^2}}{1+\left[1-\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)_k\right]} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k^2}}{2-\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)_k^2}.$$

Подставляя сюда значения $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k$ из приведённой выше таблицы, находим

Таблица 8.2

k	1	3	5	7
$\left(\frac{U_н}{E}\right)_k$	0,5	0,49	0,42	0,19

Изменение модуля коэффициента передачи в полосе

$$0 < \frac{\omega}{\omega_c} < 1$$

показано графически на рис. 8.12[1]).

Полезно отметить, что с повышением числа звеньев крутизна склона частотной характеристики на границе полосы прозрачности растёт, а резонансные частоты сгущаются вблизи границы полосы.

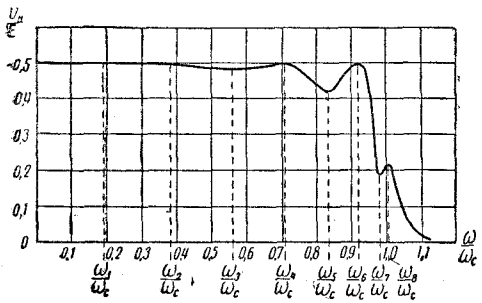


Рис. 8.12

Подбором оптимальной величины $R_н$ можно несколько улучшить согласование фильтра с нагрузкой. На более подробном рассмотрении этого вопроса мы не останавливаемся.

Если задана граничная частота $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}$ и произведение

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{2C_2} = R^2,$$

то элементы фильтра нижних частот L_1 и C_2 определяются следующими очевидными выражениями:

$$L_1 = \frac{4}{\omega_c^2 C_2},$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R^2},$$

откуда получается

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{2R}{\omega_c} \\ C_2 &= \frac{2}{R\omega_c} \end{aligned}\right\}. \qquad (8.76)$$

---

[1]) Можно показать, что в точке $\frac{\omega}{\omega_c} = 1$ модуль $\frac{U_н}{E}$ при $R_г = R_н$ для фильтров типа K определяется выражением

$$\frac{U_н}{E} = \frac{1}{2\sqrt{1+n^2}}.$$

Таким образом, при четырёх звеньях будем иметь

$$\left|\frac{U_н}{E}\right|_{\omega_c} = \frac{1}{2 \cdot 2{,}24} = 0{,}22.$$

(см. Guillemin E. A., Communication networks, vol. II, p. 290, 1947).

§ 8.8 Фильтры верхних частот

Схема фильтра верхних частот, нагруженного на активное сопротивление, показана на рис. 8.13.

Сопротивления элементов T звена равны:

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega C_1},$$

$$Z_2 = i\omega L_2.$$

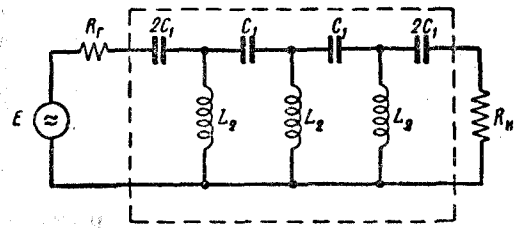


Рис. 8.13

Условие (8.52) в данном случае принимает следующий вид

$$-1 \leqslant -\frac{1}{4\omega^2 C_1 L_2} \leqslant 0$$

или

$$1 < \frac{\omega}{\omega_c} < \infty, \qquad (8.77)$$

где

$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}}. \qquad (8.78)$$

В данном случае

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{\omega_c^2}{\omega^2}. \qquad (8.79)$$

Таким образом, затухание $\beta = 0$ на всех частотах, превышающих граничную частоту ω_c. В указанной полосе фазовая постоянная в соответствии с выражениями (8.57), (8.78) и (8.79) определяется формулой

$$\alpha = -2 \arcsin\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right), \qquad (8.80)$$

при

$$\frac{\omega_c}{\omega} < 1.$$

В данном случае в выражении (8.58) выбран знак минус для обеспечения положительного наклона фазовой характеристики $\alpha(\omega)$ при изменении частоты от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$.

Вне полосы прозрачности постоянная распространения в соответствии с выражениями (8.58) и (8.79) характеризуется затуханием

$$\beta = 2 \operatorname{arch}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \qquad (8.81)$$

и фазовой постоянной $\alpha = -\pi$. Изменение β и α при изменении $\frac{\omega}{\omega_c}$ от 0 до ∞ показано графически на рис. 8.14.

Характеристическое сопротивление в соответствии с ф-лой (8.68) и соотношением (8.78) равно

$$Z_т = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 C_1 L_2}} = R\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}. \quad (8.82)$$

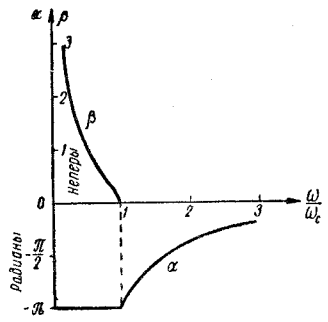


Рис. 8.14

В полосе прозрачности ($\omega_c < \omega < \infty$) $Z_т$ является активным сопротивлением и изменяется от 0 до R. В области же затухания ($0 < \omega < \omega_c$) $Z_т$ является реактивным (ёмкостным) сопротивлением, изменяющимся от 0 (при $\omega = \omega_c$) до ∞ (при $\omega = 0$). Действительно, записывая выражение (8.82) в форме

$$Z_т = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1/i\omega C_1}{i\omega L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{i\omega}\right)^2},$$

убеждаемся, что при $\frac{\omega_c}{\omega} \to 0$,

$$Z_т \underset{\omega \to 0}{\approx} \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \frac{\omega_c}{i\omega} = \frac{1}{i\omega 2C_1}.$$

Таким образом, при очень низких частотах характеристическое сопротивление определяется просто ёмкостью $2C_1$ первого звена.

Зависимость $\frac{Z_т}{R}$ отношения $\frac{\omega}{\omega_c}$ показана графически на рис. 8.15.

При заданной граничной частоте $\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}$ и заданном произведении

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_2}{C_1} = R^2$$

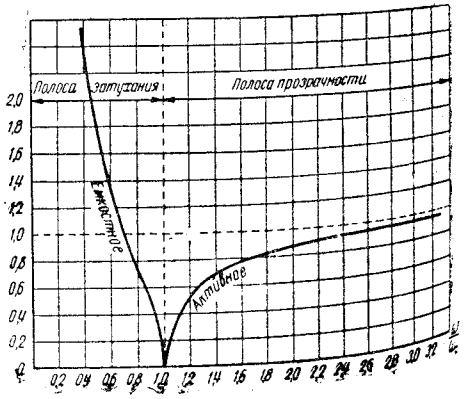


Рис. 8.15

элементы фильтра верхних частот C_1 и L_2 определяются выражениями:

$$C_1 = \frac{1}{4\omega_c^2 L_2},$$

$$L_2 = C_1 R^2,$$

откуда получается

$$C_1 = \frac{1}{2R\omega_c}, \quad L_2 = \frac{R}{2\omega_c}. \quad (8.83)$$

§ 8.9. Полосовые фильтры

Исходя из схемы звена, представленного на рис. 8.7, напишем следующие выражения для элементов Z_1 и Z_2:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} = iL_1\left(\omega - \frac{1}{\omega L_1 C_1}\right) = \frac{iL_1}{\omega}(\omega^2 - \omega_{01}^2) \\ Z_2 &= \frac{i\omega L_2 \frac{1}{i\omega C_2}}{i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2}} = \frac{1}{iC_2} \cdot \frac{1}{\left(\omega - \frac{1}{\omega L_2 C_2}\right)} = \frac{\omega}{iC_2} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \omega_{02}^2)} \end{aligned}\right\}, \quad (8.84)$$

где обозначено:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Составим произведение

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{C_2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 - \omega_{02}^2}.$$

Для того, чтобы это произведение являлось действительной и постоянной величиной, не зависящей от частоты, т. е. для получения фильтра типа K, должно выполняться условие

$$\omega_{01} = \omega_{02}, \quad (8.85)$$

Таким образом, приходим к выводу, что резонансные частоты контуров L_1, C_1 и L_2, C_2 должны быть одинаковые

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (8.86)$$

При этом

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{C_2} = R^2. \quad (8.87)$$

С другой стороны, условие (8.52) в данном случае принимает следующую форму

$$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{L_1C_2}{4}\cdot\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2} < 0 \qquad (8.88)$$

или

$$\frac{L_1C_2}{4}\cdot\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2} < 1. \qquad (8.88')$$

Полоса прозрачности фильтра может быть определена из условия обращения на границах полосы неравенства (8.88′) в равенство. Таким образом, на левой границе, которую обозначим через $\omega_1 < \omega_0$, должно выполняться условие

$$\frac{\sqrt{L_1C_2}}{2}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1} = 1, \qquad (8.89)$$

а на правой границе при частоте $\omega_2 > \omega_0$ соответственно

$$\frac{\sqrt{L_1C_2}}{2}\cdot\frac{\omega_2^2-\omega_0^2}{\omega_2} = 1. \qquad (8.89')$$

Приравнивая левые части этих тождеств, получаем

$$\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1} = \frac{\omega_2^2-\omega_0^2}{\omega_2},$$

откуда легко выводится следующее соотношение

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2, \qquad (8.90)$$

Отсюда видно, что введённая выше частота ω_0 является средней геометрической между граничными частотами ω_1 и ω_2.

Подставив найденное значение для ω_0 в одно из ур-ний (8.89) или (8.89′), придём к следующему важному результату

$$\frac{\sqrt{L_1C_2}}{2}(\omega_2-\omega_1) = 1.$$

Но разность $\omega_2-\omega_1$, которую обозначим через

$$w = \omega_2-\omega_1, \qquad (8.91)$$

представляет собой полосу прозрачности фильтра. Следовательно, полоса прозрачности w не зависит от частоты ω_0 и определяется только индуктивностью L_1 и ёмкостью C_2

$$w = \frac{2}{\sqrt{L_1C_2}}. \qquad (8.92)$$

Обратимся к определению характеристического сопротивления и постоянной распространения. Учитывая, что в данном случае

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{L_1C_2}{4}\cdot\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2} = -\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{w^2\omega^2}, \qquad (8.93)$$

находим

$$Z_т = \sqrt{Z_1Z_2}\cdot\sqrt{1+\frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\cdot\sqrt{1-\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{w^2\omega^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{w}\right)^2\frac{[(\omega/\omega_0)^2-1]^2}{(\omega/\omega_0)^2}}. \qquad (8.94)$$

На средней частоте ω_0 получим

$$Z_т(\omega_0) = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = R, \qquad (8.94')$$

а на границах полосы пропускания

$$Z_т(\omega_1) = Z_т(\omega_2) = 0.$$

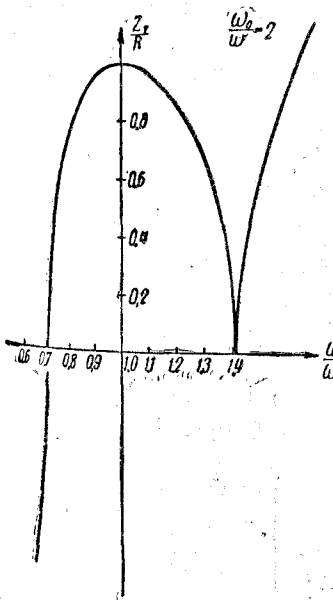


Рис. 8.16

При изменении ω $Z_т$ изменяется по закону, изображённому графически на рис. 8.16. В области частот $\omega > \omega_0$ ход кривой $Z_т$ совпадает со случаем фильтра нижних частот (рис. 8.10), а в области $\omega < \omega_0$ — со случаем фильтра верхних частот (рис. 8.15).

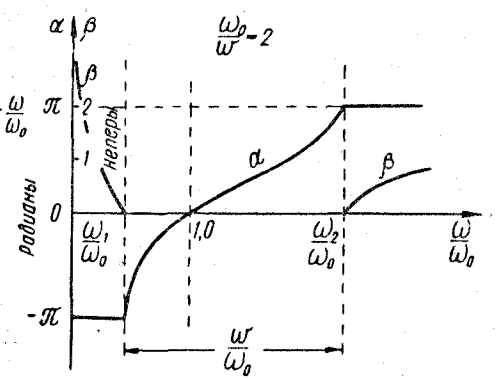


Рис. 8.17

Постоянная распространения полосового фильтра характеризуется следующими данными. В полосе прозрачности затухание

$\beta=0$, а фазовая постоянная в соответствии с ф-лой (8.57) и выражением (8.93)

$$\alpha=\pm 2\ \text{arc sin}\left|\frac{\omega^2-\omega_0^2}{w\,\omega}\right|=\pm 2\ \text{arc sin}\left|\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}{\frac{w}{\omega_0}\frac{\omega}{\omega_0}}\right|. \qquad (8.95)$$

При $\frac{\omega}{\omega_0}<1$ нужно брать знак минус, а при $\frac{\omega}{\omega_0}>1$ знак плюс, так как только при таком выборе знаков обеспечивается положительный наклон фазовой характеристики $\alpha(\omega)$.

Вне полосы прозрачности в соответствии с ф-лой (8.58)

$$\left.\begin{aligned}\beta&=2\ \text{arch}\left|\frac{\omega^2-\omega_0^2}{w\,\omega}\right|=2\ \text{arch}\left|\frac{\frac{\omega}{\omega_0^2}-1}{\frac{w}{\omega_0}\frac{\omega}{\omega_0}}\right|\\ \text{а}\qquad \alpha&=\pm\pi\end{aligned}\right\}. \qquad (8.96)$$

Графики β и α в функции отношения $\frac{\omega}{\omega_0}$ представлены на рис. 8.17.

Если задана полоса пропускания $w=\frac{2}{\sqrt{L_1C_2}}$ и произведение $Z_1\,Z_2=\frac{L_1}{C_2}=R^2$ [см. ф-лы (8.92) и (8.87)], то параметры фильтра L_1, C_1, L_2 и C_2 связаны между собой следующими соотношениями:

$$L_1=\frac{4}{w^2C^2},\quad C_2=\frac{L_1}{R^2},$$

$$C_1=\frac{1}{\omega_0^2L_1},\quad L_2=\frac{1}{\omega_0^2C_2}.$$

Здесь

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

С помощью этих выражений нетрудно получить следующие расчётные формулы для выбора элементов фильтра:

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\frac{2R}{w},\quad L_2=\frac{Rw}{2\omega_0^2}\\ C_1&=\frac{w}{2R\omega_0^2},\quad C_2=\frac{2}{Rw}\end{aligned}\right\}. \qquad (8.97)$$

Сравнивая выражения для L_1 и C_2 с аналогичными выражениями (8.76) для фильтра нижних частот, замечаем, что единственное различие заключается в замене граничной частоты фильтра нижних частот ω_c на w.

§ 8.10. Заградительные фильтры

Имея в виду схему, представленную на рис. 8.8, исходим из условия, что контуры L_1, C_1 и L_2, C_2 должны быть, как и в случае полосовых фильтров, настроены на частоту ω_0, лежащую в пределах полосы подавления.

Таким образом,

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}. \qquad (8.98)$$

По сравнению с полосовым фильтром, реактивные сопротивления Z_1 и Z_2 меняются местами. Таким образом, по аналогии с выражениями (8.84) можем написать следующие выражения для элементов звеньев:

$$Z_1=\frac{i\omega L_1\cdot\frac{1}{i\omega C_1}}{i\omega L_1+\frac{1}{i\omega C_1}}=\frac{\omega}{iC_1}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)},$$

$$Z_2=i\omega L_2+\frac{1}{i\omega C_2}=\frac{iL_2}{\omega}(\omega^2-\omega_0^2).$$

Произведение

$$Z_1Z_2=\frac{\omega}{iC_1}\cdot\frac{iL_1}{\omega}=\frac{L_2}{C_1}=R^2 \qquad (8.99)$$

является вещественной величиной, не зависящей от частоты.

Условие (8.52) в данном случае принимает следующую форму:

$$-1<\frac{Z_1}{4Z_2}=-\frac{\omega^2}{4C_1L_2(\omega^2-\omega_0^2)^2}<0. \qquad (8.100)$$

Так как сопротивление Z_1 для схемы рис. 8.8 обращается в нуль при $\omega\to 0$ и $\omega\to\infty$, то при подстановке в неравенство (8.100) $\omega=\omega_1<\omega_0$ получим равенство:

$$\frac{\omega_1}{2\sqrt{C_1L_2(\omega_0^2-\omega_1^2)}}=1, \qquad (8.101)$$

определяющее правую границу левой полосы прозрачности (от 0 до ω_1), а при подстановке $\omega=\omega_2>\omega_0$, аналогичное равенство

$$\frac{\omega_2}{2\sqrt{C_1L_2(\omega_2^2-\omega_0^2)}}=1, \qquad (8.101')$$

определяющее левую границу правой полосы прозрачности (от ω_2 до ∞). Как и в случае полосового фильтра получается следующее соотношение между частотами ω_0, ω_1 и ω_2:

$$\omega_1\omega_2=\omega_0^2. \qquad (8.102)$$

Подставляя ω_0 из выражения (8.102) в (8.101) или (8.101)', получим

$$\frac{1}{2\sqrt{L_1 C_2}\,(\omega_2-\omega_1)}=1,$$

откуда полоса подавления

$$w=(\omega_2-\omega_1)=\frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}. \tag{8.103}$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным для граничной частоты ω_c фильтра верхних частот [см. ф-лу (8.78)].

С помощью рассуждений, аналогичных использованным при рассмотрении полосового фильтра [см. § 8.9, ф-лы (8.97)], нетрудно получить следующие расчётные выражения для элементов фильтра:

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\frac{2Rw}{\omega_0^2}, \quad L_2=\frac{R}{2w}\\ C_1&=\frac{1}{2Rw}, \quad C_2=\frac{2w}{R\omega_0^2}\end{aligned}\right\}, \tag{8.104}$$

где R и w определяются ф-лами (8.99) и (8.103).

Графики характеристического сопротивления и затухания в полосе подавления и фазовой постоянной в полосе прозрачности, вычисленные по ф-лам (8.57) — (8.58), приведены на рис. 8.18 и 8.19.

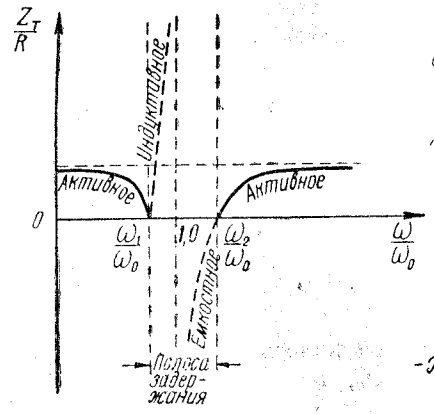


Рис. 8.18

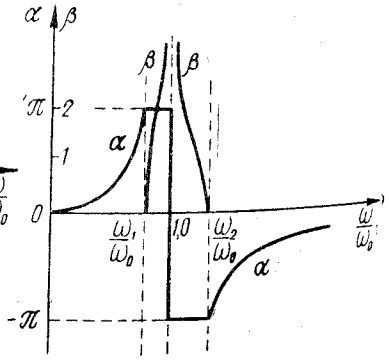


Рис. 8.19

§ 8.11. Сложные фильтры

Рассмотренные выше фильтры типа K наряду со своими преимуществами, заключающимися в простоте, обладают двумя недостатками: относительно малой крутизной кривой затухания вне полосы прозрачности и сильным изменением характеристического сопротивления в пределах рабочей полосы частот.

Напомним, что задание полосы прозрачности (граничной частоты ω_c) и характеристического сопротивления в области нулевых частот однозначно определяет элементы звена фильтра нижних частот. Ясно поэтому, что при сохранении простого характера сопротивлений Z_1 и Z_2 перечисленные выше недостатки принципиально неизбежны.

Рассмотрим фильтр нижних частот, отличающийся от фильтра типа K тем, что часть индуктивности из последовательного плеча перенесена в параллельную ветвь (рис. 8.20$б$).

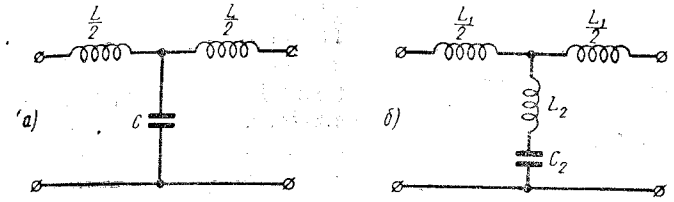


Рис. 8.20

Поставим сперва условие, чтобы характеристическое сопротивление $Z'_т$ нового фильтра совпадало во всей полосе прозрачности с $Z_т$ исходного фильтра типа K (прототипа), изображённого на рис. 8.20$а$. Отношение

$$\frac{L_1}{L}=m<1 \tag{8.105}$$

будем при этом считать заданным и постоянным числом.

Обращаясь к общему выражению (8.33), можем написать

$$Z'_т=\sqrt{Z'_1 Z'_2+\frac{(Z'_1)^2}{4}}.$$

Здесь Z'_1 сопротивление горизонтального плеча звена, равное, очевидно,

$$Z'_1=i\omega L_1=mZ_1=mi\omega L, \tag{8.106}$$

считается заданным, а сопротивление Z'_2 вертикальной ветви подлежит определению. Приравнивая $Z_т=Z'_т$, получаем следующее тождество:

$$Z'_1 Z'+\frac{(Z'_1)^2}{4}=Z_1 Z_2+\frac{Z_1^2}{4}.$$

Подставляя сюда условие (8.106) и сокращая на Z_1, получим

$$mZ'_2+\frac{m^2}{4}Z_1=Z_2+\frac{Z_1}{4},$$

откуда

$$Z_2' = \frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1. \tag{8.107}$$

Итак, параллельная ветвь звена должна состоять из двух элементов:

$$\frac{Z_2}{m} \text{ и } \frac{1-m^2}{4m} Z_1.$$

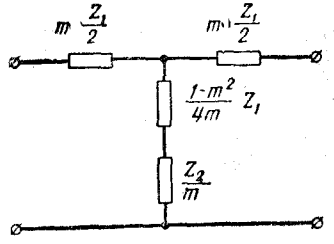


Рис. 8.21

Схема нового звена, называемого производным звеном типа M и эквивалентного в отношении характеристического сопротивления исходному простому звену Z_1, Z_2, представлена на рис. 8.21.

Применительно к фильтру нижних частот получаем следующие выражения для элементов преобразованного звена (рис. 8.20):

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= m L \\ L_2 &= \frac{1-m^2}{4m} L \\ C_2 &= m C \end{aligned}\right\}. \tag{8.108}$$

Существенно, что полоса прозрачности у производного звена типа M остаётся такой же, как и у исходного звена типа K. В этом легко убедиться подстановкой в выражение

$$\frac{Z_1'(\omega_c)}{4 Z_2'(\omega_c)} = 1$$

L_1, L_2 и C_2 из ур-ний (8.108).

Следовательно, граничная частота фильтра типа M может быть представлена в виде выражения:

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{L_1}{m}\cdot\frac{C_2}{m}}} = \frac{2m}{\sqrt{L_1 C_2}}. \tag{8.109}$$

Установив соотношения, связывающие элементы фильтра нижних частот типа M с элементами аналогичного фильтра типа K, рассмотрим вопрос о затухании фильтра типа M вне полосы прозрачности. Определим предварительно величину отношения $\frac{Z_1'}{4Z_2'}$. На основании выражений (8.106) и (8.107) находим:

$$\frac{Z_1'}{4Z_2'} = \frac{m Z_1}{4\left(\frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1\right)} = \frac{m^2 \frac{Z_1}{4Z_2}}{1 + (1-m^2)\frac{Z_1}{4Z_2}}.$$

Но для простого звена типа K в соответствии с ф-лами (8.70) и (8.71) можно написать:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = -x^2. \tag{8.110}$$

Следовательно, для фильтра типа M:

$$\frac{Z_1'}{4Z_2'} = -\frac{m^2 x^2}{1-(1-m^2)x^2}. \tag{8.111}$$

Подставляя этот результат в общее выражение (8.58), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 2 \operatorname{arch} \frac{m x}{\sqrt{|1-(1-m^2)x^2|}} \\ \operatorname{ch}\frac{\beta}{2} &= \frac{m x}{\sqrt{|1-(1-m^2)x^2|}} \end{aligned}\right\}. \tag{8.112}$$

Замечаем, что если знаменатель подкоренного выражения обращается в нуль, т. е. если имеет место условие

$$1-(1-m^2)\,x^2 = 0,$$

то $\operatorname{ch}\frac{\beta}{2} \to \infty$, следовательно, затухание β обращается в бесконечность.

Это имеет место при

$$x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \tag{8.113}$$

Физический смысл этого результата ясен. При частоте ω, отвечающей условию (8.113), имеет место явление последовательного резонанса в ветви L_2, C_2 (рис. 8.20б) и коэффициент передачи четырёхполюсника (звена) обращается в нуль (затухание

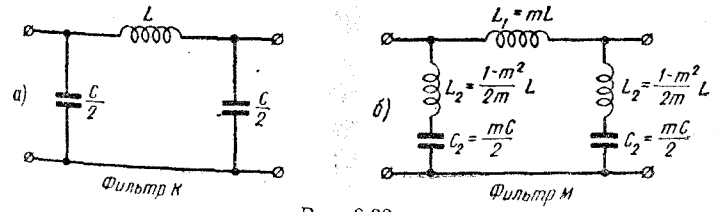


Рис. 8.22

в бесконечность). Наличие резонансных частот в полосе непрозрачности позволяет при надлежащем выборе m существенно повысить крутизну кривой затухания вблизи границы полосы прозрачности.

Рассмотрим теперь П-образное звено типа M, показанное на рис. 8.22. Элементы Y_1 и Y_2 исходного П-звена типа K (рис. 8.22а) будем считать величинами, обратными по отношению к сопротивлениям Z_1 и Z_2 соответствующего Т-звена. Тогда согласно выражению (8.43) для характеристического сопротивления П-звена типа K будем иметь

$$Z_{\text{п}} = \frac{Z_{\text{т}}}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}},$$

а для звена типа M:

$$Z'_{\text{п}} = \frac{Z'_{\text{т}}}{1 + \frac{Z'_1}{4Z'_2}}. \qquad (8.114)$$

Но выше было показано, что при выполнении условий:

$$Z'_1 = m Z_1,$$

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1$$

характеристическое сопротивление $Z'_{\text{т}}$ Т-образного звена типа M не отличается от $Z_{\text{т}}$. Следовательно, в соответствии с ф-лой (8.72'),

$$Z'_{\text{т}} = Z_{\text{т}} = R\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}} = R\sqrt{1-x^2}.$$

Подставляя это выражение, а также ф-лу (8.111) для $\frac{Z'_1}{4Z'_2}$ в ур-ние (8.114), после несложных преобразований получим искомое характеристическое сопротивление:

$$Z'_{\text{п}} = \frac{R}{\sqrt{1-x^2}}\left[1-(1-m^2)\,x^2\right] \qquad (8.115)$$

Учитывая далее, что в соответствии с ф-лой (8.42) величина

$$\frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1-\frac{Z_1}{4Z_2}}} = \frac{R}{\sqrt{1-x^2}} = Z_{\text{п}}$$

представляет собой характеристическое сопротивление исходного П-звена типа K, переписываем выражение (8.115) в форме:

$$Z'_{\text{п}} = Z_{\text{п}}\left[1-(1-m^2)\,x^2\right]. \qquad (8.115')$$

Из выражений (8.115) и (8.115') видно, что путём подбора m можно изменять частотную характеристику сопротивления $Z'_{\text{п}}$ для П-образного звена типа M. Можно показать, что оптимальная, в смысле наибольшего постоянства $Z'_{\text{п}}$ величина m равна 0,6. Ход зависимости $\frac{Z'_{\text{п}}}{R}$ от отношения $\frac{\omega}{\omega_c}$ для фильтра нижних частот по-

казан на рис. 8.23. Из этого графика видно, что применение звеньев типа M позволяет осуществить почти полное постоянство характеристического сопротивления в полосе прозрачности фильтра.

В технике связи широко применяются сложные фильтры, составляемые из звеньев различного типа. Комбинируя Т и П-об-

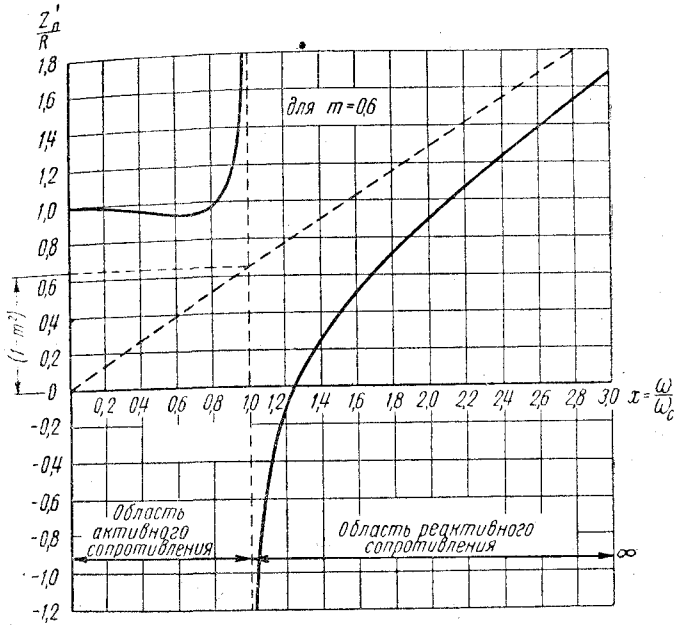


Рис. 8.23

разные звенья типа K и типа M, можно обеспечить хорошее согласование фильтра с нагрузкой и одновременно выгодную форму частотной характеристики затухания в полосе непрозрачности[1]).

§ 8.12. Искусственные линии

В современной радиотехнике, особенно импульсной технике, широко применяются устройства для создания временно́й задержки сигналов. Идеальным устройством для задержки является линия без потерь, с длиной $l = v\,t_{\text{з}}$, где v — фазовая скорость [см. § 7.2 ф-ла (7.19)], а $t_{\text{з}}$ — требуемая величина задержки. Так как в линии с малыми потерями [или в ,,неискажающей'' линии, у ко-

[1]) Подробный расчёт фильтров излагается в книге Г. М. Сумцова и М. О. Трахтенберга ,,Электрические фильтры''. Связьиздат, 1945 и в др.

торой $\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$, см. § 7.3, ф-лу (7.47)] постоянная распространения и волновое сопротивление почти не зависят от частоты, то передача сложных сигналов и, в частности, импульсов, обладающих широким спектром частот, не сопровождается заметным искажением формы сигналов. При значительной величине требуемой задержки линия представляет собой, однако, весьма дорогостоящее и громоздкое устройство.

Так, например, в случае воздушной линии на одну микросекунду задержки требуется $l=\mathfrak{s}\,t_3=3\cdot10^8\cdot10^{-6}=300$ *м* кабеля. Хотя применением кабеля с диэлектрическим заполнением можно в 1,5—2 раза сократить эту длину, всё же ясно, что при задержках в несколько единиц или даже десятков микросекунд от применения линии приходится практически отказываться.

Значительно более экономичными и удобными в конструктивном отношении являются искусственные линии в виде многозвенных цепных схем. Для того, чтобы системы с сосредоточенными постоянными по своим частотным и фазовым характеристикам приближались к линии, необходимо выполнить некоторые требования, смысл которых нетрудно установить с помощью изложенной в предыдущих параграфах данной главы теории многозвенных цепных схем.

Допустим, что искусственная линия, предназначенная для задержки видеоимпульсов, составлена из n Т-образных звеньев без потерь, работающих на согласованную нагрузку. Так как характеристическое сопротивление $Z_т$ обычно бывает задано, то для выбора элементов Z_1 и Z_2 нехватает одного условия. Таким условием является, очевидно, задание полосы прозрачности цепи, которая должна быть во всяком случае не меньше, чем полоса частот передаваемого по линии сигнала. Так как во всей полосе прозрачности цепи затухание $\beta=0$, то постоянная распространения характеризуется фазовой постоянной, т. е. $\gamma_т=i\alpha$. При n звеньях суммарный фазовый сдвиг в цепной схеме будет, очевидно,

$$\varphi(\omega)=n\alpha.$$

Отсюда видно, что форма фазовой характеристики всей цепи определяется формой частотной зависимости $\alpha(\omega)$ одного звена; от числа звеньев зависит лишь наклон суммарной характеристики $\varphi(\omega)$.

Решающее значение имеет обеспечение *линейности* $\varphi(\omega)$ в полосе частот сигнала. При обеспечении этого условия сигнал проходит через цепную схему без искажений своей формы.

Время задержки, создаваемой линией, очевидно, равно

$$t_з=\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=n\frac{d\alpha}{d\omega}.$$

В том случае, когда фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ линейна во всей полосе частот передаваемого сигнала, безразлично, при

какой частоте определять производную от $\varphi(\omega)$. Если же фазовая характеристика не вполне линейна, как это имеет место в реальных цепях, основное значение при передаче сигналов, частотный спектр которых примыкает к нулевой частоте (видеоспектр), имеет величина производной при $\omega=0$.

Поэтому в практике принято определять задержку с помощью следующего выражения:

$$t_з=\frac{d\varphi}{d\omega}\Big|_{\omega=0}=n\frac{d\alpha}{d\omega}\Big|_{\omega=0}. \tag{8.116}$$

Рассмотрим сперва одно Т-звено типа K. В соответствии с ф-лой (8.74) имеем

$$\alpha=2\arcsin\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)=2\arcsin x,$$

следовательно,

$$\frac{d\alpha}{d\omega}=\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega}=\frac{2}{\omega_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2}{\omega_c\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}. \tag{8.117}$$

Таким образом задержка на одно звено, равная наклону фазовой характеристики в точке $\omega=0$, получается

$$t_1=\frac{d\alpha}{d\omega}\Big|_0=\frac{2}{\omega_c}. \tag{8.118}$$

Учитывая, что для фильтра нижних частот

$$\omega_c=\frac{2}{\sqrt{LC}},$$

получаем окончательно

$$t_1=\sqrt{LC}. \tag{8.118'}$$

Здесь L в генри, C в фарадах.

Теперь остаётся выполнить требование линейности фазовой характеристики в полосе частот сигнала.

Из ф-лы (8.117) видно, что для этого необходимо, чтобы при наивысшей частоте сигнала $\omega=\omega_{макс}$ выполнялось условие $\frac{\omega^2_{макс}}{\omega_c^2}\ll1$.

Для практических целей можно считать достаточным требование:

$$\frac{\omega^2_{макс}}{\omega_c^2}\approx0{,}25$$

или

$$\frac{\omega_{макс}}{\omega_c}\approx0{,}5.$$

Таким образом, полоса прозрачности ω_c цепи должна не менее чем вдвое превышать полосу частот сигнала. Итак, при задан-

ном спектре сигнала $\omega_{макс}$, на одно звено может быть получена задержка

$$t_1 = \frac{2}{\omega_c} = \frac{2}{2\omega_{макс}} = \frac{1}{\omega_{макс}}. \qquad (8.119)$$

При передаче, например, импульса длительностью 1 *мксек*, когда ширину спектра можно принять равной 1 *Мгц*, величина задержки на одно звено не должна превышать

$$t_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^6} = \frac{1}{2\pi}\ мксек.$$

При этом элементы L и C должны быть:

$$LC = t_1^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^{12}},$$

$$\frac{L}{C} = R^2.$$

Если задать $R \approx 1000$ *ом*, что соответствует распространённой в практике величине нагрузочного сопротивления, то получим:

$$C = \frac{t_1}{R} = \frac{10^{12}}{2\pi 10^6 \cdot 1000}\ пкф \approx 160\ пкф,$$

$$L = t_1 R = \frac{1000 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 10^6} = 160\ мкгн.$$

С повышением $\omega_{макс}$ приходится уменьшать t_1 и, следовательно, увеличивать число звеньев. При этом приходится снижать ёмкости звеньев, что увеличивает влияние паразитных ёмкостей схемы.

От этих недостатков, присущих простым звеньям типа *K*, в значительной степени свободны более сложные звенья типа *M*. В предыдущем параграфе было показано, что в звеньях типа *M* удаётся получить более крутую фазовую характеристику и бо́льшее постоянство характеристического сопротивления в полосе прозрачности. Эти качества как раз важны для цепных схем, используемых в качестве линий задержки.

Обратимся к ф-ле (8.57), которую для Т-образного звена (фильтра нижних частот) можно взять в форме

$$\alpha = \arccos\left(1 + \frac{Z_1'}{2Z_2'}\right).$$

Подставляя сюда, в соответствии с выражением (8.111),

$$\frac{Z_1'}{2Z_2'} = -\frac{2m^2x^2}{1-(1-m^2)x^2},$$

после несложных преобразований получим

$$\alpha = \arccos\frac{1-(1+m^2)x^2}{1-(1-m^2)x^2}. \qquad (8.120)$$

Дифференцируя по ω, находим наклон фазовой характеристики

$$t_1 = \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} = \frac{2m}{\omega_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cdot[1-x^2(1-m^2)]}} =$$

$$= t_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2[1-x^2(1-m^2)]}}, \qquad (8.121)$$

где $t_0 = \frac{2m}{\omega_c}$.

Графики зависимости $\frac{t_1}{t_0}$ от $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ при различных значениях m приведены на рис. 8.24.

Из этих графиков видно, что при $m \approx 1{,}3$ обеспечивается наибольшее постоянство наклона фазовой характеристики, т. е. наилучшая её линейность в полосе прозрачности цепи. При этом величина задержки, которая может быть получена подстановкой в (8.121) $x = 0$, оказывается равной

$$t_1 = \frac{2m}{\omega_c}.$$

Следовательно, при $m > 1$ не только улучшается форма фазовой характеристики, но и одновременно увеличивается задержка на одно звено.

Остаётся выяснить возможность осуществления $m > 1$. Согласно определению (8.108), в вертикальную ветвь Т-образного звена необходимо ввести индуктивность

$$L_2 = \frac{1-m^2}{4m}L.$$

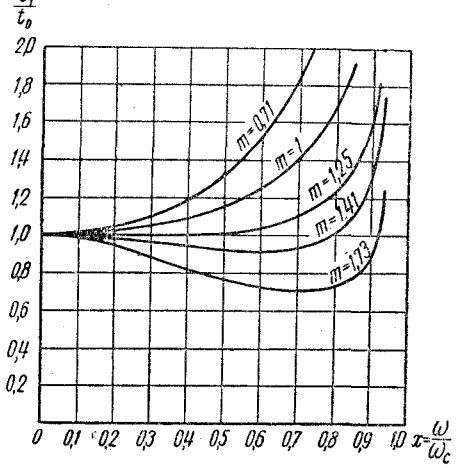


Рис. 8.24

При $m > 1$ получается отрицательное значение L_2, которое реализовать непосредственно, конечно, невозможно.

Можно, однако, получить требуемый эффект с помощью взаимоиндукции между катушками $L_1/2$, входящими в горизонтальные плечи Т-звена, как это показано на рис. 8.25.

Действительно, при разомкнутых зажимах *2—2'* напряжение на выходе звена будет (см. § 6.5):

$$\vec{E}_2 = \vec{I}_1\ \vec{Z}_{12} = \vec{I}_1\left(\frac{1}{i\omega C} \pm i\omega M\right). \qquad (8.122)$$

Если так выбрать направление витков, чтобы слагаемое $i\omega M$ входило в выражение (8.122) со знаком минус, то напряжение $\vec{E}_2$

будет таким же, как при включении в параллельную ветвь Т-звена отрицательной самоиндукции L_2. Таким образом, получаем следующее условие для взаимоиндукции:

$$M = |L_2| = \frac{m^2-1}{4m} L \tag{8.123}$$

(при $m > 1$).

С другой стороны, при обходе выходного контура Т-образного звена вида, показанного на рис. 8.26, суммарная индуктивность должна равняться

$$L_\Sigma = \frac{L_1}{2} + L_2 = \frac{mL}{2} + \frac{1-m^2}{4m} L = \left[\frac{m}{2} + \frac{1}{4m} - \frac{m}{4}\right] L =$$

$$= \left(\frac{m}{4} + \frac{1}{4m}\right) L = \frac{m^2+1}{4m} L.$$

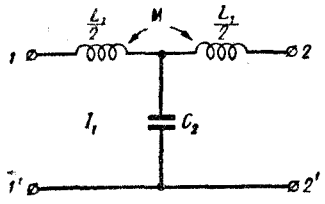


Рис. 8.25

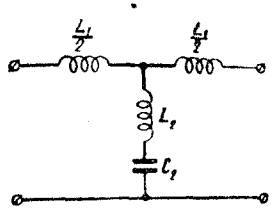


Рис. 8.26

В схеме же рис. 8.25 эта индуктивность создаётся одной лишь полукатушкой $\frac{L_1}{2}$. Отсюда вытекает следующее условие для L_1:

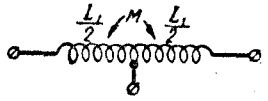


Рис. 8.27

$$\frac{L_1}{2} = \frac{m^2+1}{4m} L. \tag{8.124}$$

Выражения (8.123) — (8.124) полностью определяют требования к индуктивной части звена. Заметим, что измеренная между зажимами *1—2* (рис. 8.25) индуктивность равняется

$$L_{12} = L_1 + 2M = \frac{m^2+1}{2m} L + \frac{m^2-1}{2m} L = mL.$$

Вместо двух катушек обычно применяют одну цилиндрическую обмотку с отводом в средней точке (рис. 8.27).

Подбором геометрических размеров обмотки и числа витков можно получить требуемые индуктивности каждой из половин в отдельности, а также требуемую взаимоиндукцию M.

ГЛАВА 9

ПРОХОЖДЕНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ И МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 9.1. Введение

В радиотехнике приходится иметь дело с самыми различными сигналами (непериодические, периодические и нерегулярные процессы, модулированные колебания и др.) и с самыми разнообразными линейными системами (апериодические и колебательные системы, многоступенные апериодические и резонансные усилители и др.). Сложный характер воздействий в сочетании с инерционным характером радиотехнических цепей придаёт особое значение вопросу о переходных процессах в этих цепях при передаче сигналов.

При изучении воздействия некоторых непериодических электродвижущих сил на простые системы весьма удобным и наглядным способом является составление дифференциального уравнения относительно искомой функции (ток, напряжение) и интегрирование этого уравнения одним из известных методов. Этот классический метод удобен в применении к системам, описываемым дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

В случае более сложных линейных систем или более сложных воздействий значительно более удобными оказываются методы, основанные на спектральном представлении внешней силы. К этим методам относится метод интеграла Фурье, метод рядов Фурье (в случае периодического процесса) и операторный метод. Последний метод, получивший исключительно широкое распространение в электротехнике, радиотехнике, автоматике и в других отраслях техники и науки, тесно связан с методом интеграла Фурье.

При рассмотрении прохождения различных сигналов через линейные системы в дальнейшем изложении будут применяться те или иные из перечисленных выше методов. Особенно часто используется операторный метод. Целесообразно поэтому рассмотреть связь между операторным методом и интегралом Фурье с учётом особенностей, связанных с применением этих методов к радиотехническим задачам.

§ 9.2. Распространение интеграла Фурье на комплексное переменное. Преобразование Лапласа

Вычисление интегралов вида (2.37), представляющих напряжение (или ток) на выходе линейного четырёхполюсника, значительно облегчается при использовании методов контурного интегрирования на плоскости комплексного переменного. Переход от вещественного переменного ω к комплексному $p=\sigma+i\omega$ позволяет также полностью устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ (см. § 2.5).

Последнее обстоятельство особенно существенно, поскольку исследование прохождения непериодических сигналов через линейные цепи часто сводится к рассмотрению переходных процессов в этих цепях при включении в момент $t=0$ постоянной или гармонической электродвижущей силы. Обе эти функции — единичный скачок и полусинусоида — требуют применения искусственных приёмов (см. § 2.7 и § 2.8) для использования соотношений (2.26) и (2.27).

Допустим, что $f(t)$ задана для положительных значений t и равна нулю при $t<0$. Тогда прямое и обратное преобразования Фурье (2.26) и (2.27) запишутся следующим образом:

$$\overrightarrow{F}(\omega)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt, \tag{9.1}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{9.2}$$

Введём в эти выражения множитель e^{-ct}, где $c>0$. Это равносильно замене $f(t)$ новой функцией $f(t)\,e^{-ct}$.

По отношению к этой новой функции выражения (9.1) и (9.2) принимают следующую форму:

$$\overrightarrow{F}(\omega)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-(c+i\omega)t}\,dt, \tag{9.1'}$$

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{9.2'}$$

Поскольку в выражении (9.2') интегрирование производится по переменной ω, множитель e^{-ct} может быть введён под знак интеграла:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F}(\omega)\,e^{(c+i\omega)t}\,d\omega. \tag{9.3}$$

Далее, непосредственно из выражения (9.1') видно, что правая часть его является функцией параметра $c+i\omega$. Следовательно, и левая часть выражения (9.1') является функцией комплексного переменного $p=c+i\omega$.

Можно поэтому вместо выражения (9.1') написать:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{9.4}$$

Это соотношение, преобразующее вещественную функцию $f(t)$ вещественного переменного t в функцию $F(p)$ комплексного переменного p, называется преобразованием Лапласа. $F(p)$ иногда называют *преобразованной по Лапласу* функцией $f(t)$ или *изображением* функции $f(t)$. Исходную функцию $f(t)$ называют *оригиналом*.

Из предыдущего ясно, что изображение $F(p)$ может быть получено из прямого преобразования Фурье $\overrightarrow{F}(\omega)$ простой заменой $i\omega$ комплексным переменным p.

Подставим теперь в выражение (9.3) $\overrightarrow{F}(c+i\omega)$ вместо $\overrightarrow{F}(\omega)$ и перейдём к новой переменной p. При $c=\text{const}$ очевидно $d\omega=\frac{1}{i}\,dp$, а пределы интегрирования при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ будут, соответственно, $c-i\infty$ и $c+i\infty$. Поэтому получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp. \tag{9.5}$$

Соотношение (9.5) по аналогии с выражением (2.27) иногда называют обратным преобразованием Лапласа.

Сравнивая выражения (9.5) и (9.3), приходим к выводу, что переход от ω к p означает изменение пути интегрирования. В выражении (9.3) интегрирование ведётся по вещественной оси ω, а в выражении (9.5) — по прямой, лежащей на плоскости комплексного переменного $p=\sigma+i\omega$ и проходящей параллельно мнимой оси $i\omega$ на расстоянии c от последней (рис. 9.1).

Величина постоянной c определяется характером функции $f(t)$. В случае единичного скачка постоянная может быть сколь

угодно малой, но обязательно положительной величиной (см. § 2.7), т. е. путь интегрирования должен проходить правее точки $p=0$. То же справедливо и для синусоиды, начинающейся при $t=0$ (см. § 2.8). Для убывающей экспоненты $f(t)=e^{-\alpha t}$ при $t \geqslant 0$ сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \left| f(t)\, e^{-ct} \right| dt$$

обеспечивается при любом значении $c > -\alpha$. Следовательно, путь интегрирования должен проходить правее точки $\sigma = -\alpha$. Для возрастающей экспоненты $e^{\alpha t}$, наоборот, путь интегрирования должен проходить правее точки $\sigma = +\alpha$.

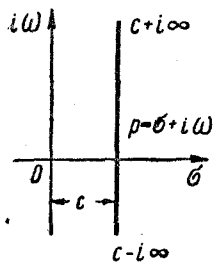


Рис. 9.1

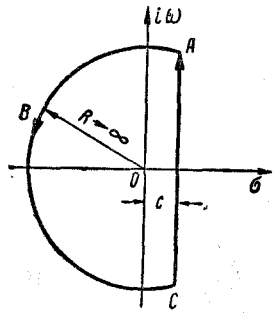


Рис. 9.2

Всё вышеизложенное обобщается следующим правилом: путь интегрирования должен проходить правее всех особых точек (полюсов) подинтегральной функции.

Добавлением к прямой $c-i\infty$, $c+i\infty$ дуги бесконечно большого радиуса можно, не изменяя величины интеграла (9.5), образовать замкнутый контур интегрирования. Это позволяет использовать преимущества методов интегрирования на комплексной плоскости. Правила, определяющие способ замыкания контура интегрирования, вытекают из требования равенства нулю интеграла от заданной функции, взятого по добавленному участку пути (дуга ABC на рис. 9.2) при $R \to \infty$, т. е. чтобы

$$\int_{ABC} F(p)\, e^{pt}\, dp \to 0 \text{ при } R \to \infty. \qquad (9.6)$$

В теории функций комплексного переменного доказывается[1] (лемма Жордана), что для этого требуется одновременное выполнение следующих двух условий:

1. Модуль $F(p)$ стремится к нулю (равномерно относительно p) при $p \to \infty$.

[1] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1949 г., стр. 224.

2. Вещественная часть показателя степени в множителе e^{pt} должна быть отрицательной, т. е.

$$\mathrm{Re}\,(pt) < 0.$$

Первое условие выполняется за редким исключением [например, в случае единичного импульса $F(p)=1$] для всех встречающихся в приложениях функций.

Из второго условия вытекает, что если функция $f(t) \neq 0$ только при $t \geqslant 0$, то положительным значениям t должен отвечать контур, лежащий в левой полуплоскости (при отрицательных σ), а отрицательным t — контур в правой полуплоскости (при положительных σ).

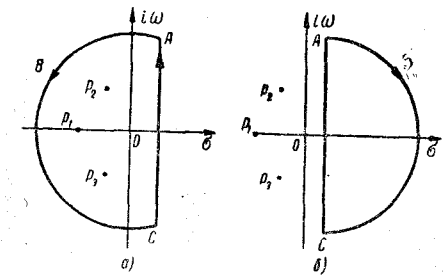


Рис. 9.3

В первом случае, т. е. при проведении дуги в левой полуплоскости (рис. 9.3*а*), контур интегрирования охватывает все полюсы подинтегральной функции (лежащие левее прямой $c-i\infty$, $c+i\infty$) и, в соответствии с теорией вычетов[1], интеграл (9.5) определяется как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{ABC} F(p)\, e^{pt}\, dp = \Sigma \operatorname{res}, \qquad (9.7)$$

где Σ res — сумма вычетов в полюсах подинтегральной функции.

При проведении дуги в правой полуплоскости, т. е. при $t>0$ (рис. 9.3 *б*), полюсы функции $F(p)\, e^{pt}$ оказываются вне контура интегрирования и, в соответствии с теоремой Коши, интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Таким образом, в зависимости от способа замыкания контура интегрирования, получим

при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{ABCA} F(p)\, e^{pt}\, dp = \Sigma \operatorname{res}; \qquad (9.8)$$

при $t < 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{ADCA} F(p)\, e^{pt}\, dp = 0. \qquad (9.9)$$

[1] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1949, стр. 85–87.

Напомним важное свойство контурных интегралов: величина интеграла не зависит от формы замкнутого контура, по которому производится интегрирование, если только особые точки подинтегральной функции остаются внутри контура. На основании этого свойства контур, образованный добавлением дуги ABC бесконечно большого радиуса R (рис. 9.2) к прямой $c-i\infty$, $c+i\infty$, можно произвольно деформировать, при соблюдении условия, что все полюсы, расположенные левее прямой $c-i\infty$, $c+i\infty$ остаются внутри контура.

Итак, вычисление интеграла (9.5) сводится к определению вычетов в полюсах подинтегральной функции.

Представим подинтегральную функцию выражения (9.5) в виде

$$F(p)\,e^{pt}=\frac{P(p)}{Q(p)}\,. \tag{9.10}$$

Тогда вычет функции $\frac{P(p)}{Q(p)}$, имеющей в точке $p=p_1$ простой полюс (первой кратности), определяется формулой[1])

$$\mathrm{res}_1=\left|\frac{P(p)}{\frac{dQ(p)}{dp}}\right|_{p=p_1}. \tag{9.11}$$

Если функция $\frac{P(p)}{Q(p)}$ имеет в точке p_1 полюс кратности m (где m — целое положительное число), то

$$\mathrm{res}_1=\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\,(p-p_1)^m\right]_{p=p_1}. \tag{9.12}$$

Методику применения контурных интегралов для представления различных функций, играющих большую роль в теории переходных процессов, удобнее всего пояснить на примерах.

1. Единичный скачок и экспонента

В соответствии с ф-лой (9.4) изображение $F(p)$ для функции, заданной условием $f(t)=1$ при $t\geqslant 0$, определяется соотношением

$$F(p)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}. \tag{9.13}$$

Обратное преобразование (9.5) даёт

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp. \tag{9.14}$$

[1]) В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1949, стр 87.

Этот же результат можно получить подстановкой $i\omega=p$ в выражение (2.43).

Подинтегральная функция в выражении (9.14) имеет простой полюс в точке $p_1=0$. Вычет в этом полюсе согласно ф-ле (9.11) равен $\mathrm{res}_1=e^{p_1t}=1$.

Следовательно, при $t\geqslant 0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{ABC}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=1.$$

При $t<0$ контур, образуемый прямой $c-i\infty$, $c+i\infty$ и полуокружностью ADC (рис. 9.3б), проведённой в правой полуплоскости, не содержит полюсов. Таким образом, при $t<0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{ADC}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=0.$$

Для функции, заданной условием:

$$f(t)=e^{-\alpha t}\quad\text{при}\quad t>0,$$
$$f(t)=0\quad\text{при}\quad t<0,$$

нетрудно получить следующую формулу для изображения

$$F(p)=\frac{1}{p+\alpha}\,. \tag{9.13'}$$

2. Единичный импульс

В соответствии с определением (2.48) изображение для единичного импульса выражается в виде

$$F(p)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-pt}\,dt=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-p\tau}}{\tau p}=1. \tag{9.15}$$

3. Гармоническая функция

$$f(t)=E\cos(\omega_0 t+\beta)\quad\text{при}\quad t>0,$$
$$f(t)=0\quad\text{при}\quad t<0.$$

Используя подстановку

$$\cos(\omega_0 t+\beta)=\frac{1}{2}\,e^{i(\omega_0 t+\beta)}+\frac{1}{2}\,e^{-i(\omega_0 t+\beta)}$$

и применяя выражение (9.4), находим

$$F(p)=\frac{E\,e^{i\beta}}{2}\cdot\frac{1}{p-i\omega_0}+\frac{E\,e^{-i\beta}}{2}\cdot\frac{1}{p+i\omega_0}. \tag{9.16}$$

Это же выражение может быть записано в несколько иной форме, которая получается, например, заменой $i\omega$ на p в ф-ле (2.59),

$$F(p)=E\,\frac{-\omega_0\sin\beta+p\cos\beta}{p^2+\omega_0^2}, \tag{9.16'}$$

следовательно,

$$f(t)=E\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(-\omega_0\sin\beta+p\cos\beta)\,e^{pt}}{p^2+\omega_0^2}\,dp. \tag{9.17}$$

Подинтегральная функция имеет простые полюсы в точках $p_1=i\omega_0$ и $p_2=-i\omega_0$. Производная знаменателя равна

$$\frac{dQ(p)}{dp}=2p.$$

Отсюда по ф-ле (9.11) находим:

$$\mathrm{res}_1=\frac{(-\omega_0\sin\beta+p_1\cos\beta)\,e^{p_1t}}{2p_1}=\frac{-\sin\beta+i\cos\beta}{2i}\,e^{i\omega_0t},$$

$$\mathrm{res}_2=\frac{(-\omega_0\sin\beta+p_2\cos\beta)\,e^{-p_2t}}{2p_2}=\frac{\sin\beta+i\cos\beta}{2i}\,e^{-i\omega_0t}.$$

Следовательно, при $t>0$ (путь интегрирования — против часовой стрелки)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint F(p)\,e^{pt}\,dp=E\sum res=$$

$$=E\left[-\frac{\sin\beta}{2i}\left(e^{i\omega_0t}-e^{-i\omega_0t}\right)+\frac{\cos\beta}{2}\left(e^{i\omega_0t}+e^{-i\omega_0t}\right)\right]=$$

$$=E\left[-\sin\beta\sin\omega_0t+\cos\beta\cos\omega_0t\right]=E\cos(\omega_0t+\beta).$$

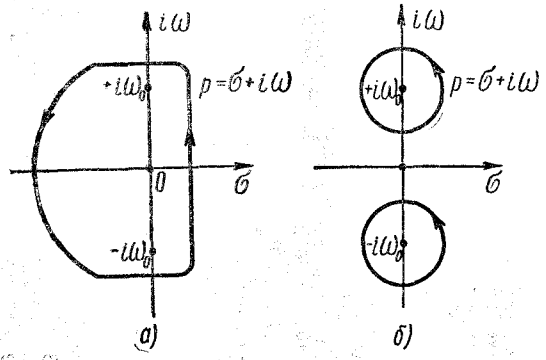


Рис. 9.4

Контур интегрирования для $t>0$ изображён на рис. 9.4*а*. Замена этого контура двумя контурами, охватывающими полюсы $p_{1,2}=\pm i\omega_0$, показана на рис. 9.4*б*. В соответствии с теоремой Коши интегрирование по этим двум контурам эквивалентно интегрированию по контуру, показанному на 9.4*а*, и интеграл равен сумме вычетов в полюсах $p_{1,2}$.

При $t<0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint F(p)\,e^{pt}\,dp=0,$$

причём интегрирование производится по часовой стрелке.

В частном случае $\beta=-\frac{\pi}{2}$, т. е. для

$$f(t)=E\sin\omega_0t \quad \text{при} \quad t>0,$$

$$f(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0,$$

получим

$$F(p)=E\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}. \tag{9.18}$$

Если $\beta=0$, т. е. для

$$f(t)=E\cos\omega_0t \quad \text{при} \quad t>0,$$

$$f(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0,$$

будем иметь

$$F(p)=E\,\frac{p}{p^2+\omega_0^2}. \tag{9.19}$$

По аналогии с выражением (2.38) нетрудно найти прямое и обратное преобразования Лапласа для функции $f(t-t_0)$, запаздывающей на время t_0 относительно $f(t)$.

Применение к $f(t-t_0)$ ф-лы (9.4) даёт

$$F_{t_0}(p)=\int\limits_{t_0}^{\infty}f(t-t_0)\,e^{-pt}\,dt.$$

Произведя замену переменной t на $t'=t-t_0$, получим

$$F_{t_0}(p)=e^{-pt_0}\int\limits_0^{\infty}f(t')\,e^{-pt}\,dt'=e^{-pt_0}F(p). \tag{9.20}$$

Итак, сдвиг (запаздывание) функции $f(t)$ на t_0 требует умножения изображения $F(p)$ на e^{-pt_0}.

Очевидно, далее, что выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F_{t_0}(p)\,e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)\,e^{p(t-t_0)}\,dp \tag{9.21}$$

определяет функцию $f(t-t_0)$, так как в пределах промежутка $0<t<t_0$ условие (9.6) требует проведения контура интегрирования

в правой полуплоскости (рис. 9.3б), где особых точек нет и, следовательно, выражение (9.21) обращается в нуль.

В выражениях (9.13)—(9.19) под $f(t)$ подразумевается входная функция (эдс, входной ток), а под $F(p)$ комплексный спектр этой функции, получаемый из спектральной плотности $\dot{F}(\omega)$ простой заменой $i\omega$ на p.

Если под $f(t)$ подразумевается выходная функция, например напряжение на выходе четырёхполюсника, то по аналогии с выражением (2.37), можно написать

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}E(p)\,K(p)\,e^{pt}\,dp, \tag{9.22}$$

где $K(p)$ — комплексный коэффициент передачи, получаемый из $K(i\omega)$ заменой $i\omega$ на p, $E(p)$ — комплексный спектр входной эдс.

Таким образом,

$$F(p)=E(p)\cdot K(p) \tag{9.23}$$

можно рассматривать как комплексный спектр выходного напряжения.

Для составления выражения (9.22) не обязательно всегда начинать с интеграла Фурье. В тех случаях, когда задано интегро-дифференциальное уравнение исследуемой линейной системы, выражение типа (9.23) может быть получено путём алгебраизации уравнения с помощью преобразования Лапласа, применяемого как к самой функции $f(t)$ и её производным и интегралам, так и к внешней силе (эдс), действующей на систему. Изображения производных и интегралов от $f(t)$ нетрудно выразить через изображение $F(p)$ для самой функции $f(t)$.

Рассмотрим сначала производную $\frac{df(t)}{dt}$. Применяя ф-лу (9.4) и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^\infty\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty e^{-pt}\,df(t)=[e^{-pt}f(t)]_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Учитывая, что $e^{-pt}|_{t=\infty}=0$ и $e^{-pt}|_{t=0}=1$, можем написать

$$\int_0^\infty\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-pt}\,dt=pF(p)-f(0), \tag{9.24}$$

где $f(0)$ — значение функции $f(t)$ при $t=0$.

Подобным же образом для $\int f(t)\,dt$ можно получить

$$\int_0^\infty\left[\int f(t)\,dt\right]e^{-pt}\,dt=\frac{F(p)+C}{p}, \tag{9.25}$$

где постоянная C соответствует значению интеграла к моменту $t=0$, т. е.

$$\int f(t)\,dt=\int_0^t f(t)\,dt+C.$$

Алгебраизация интегро-дифференциальных уравнений особенно упрощается при „нулевых“ начальных условиях, т. е. при рассмотрении процессов, связанных с подключением в момент $t=0$ электродвижущих сил к „пустой“ цепи (когда все токи через индуктивности и напряжения на ёмкостях равны нулю). В этом случае

$$\int_0^\infty\left(\frac{df(t)}{dt}\right)e^{-pt}\,dt=pF(p), \tag{9.24'}$$

$$\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]e^{-pt}\,dt=\frac{F(p)}{p}. \tag{9.25'}$$

Очевидно, что производной $f(t)$ k-го порядка соответствует изображение $p^kF(p)$.

В результате применения преобразования (9.4) ко всем членам исходного интегро-дифференциального уравнения последнее может быть приведено к виду

$$\frac{1}{K(p)}\cdot F(p)=E(p), \tag{9.26}$$

где $F(p)$ — изображение для искомой функции $f(t)$, $E(p)$ — изображение для внешней силы $e(t)$, действующей на рассматриваемую систему, а $K(p)$ — функция от p, определяемая параметрами цепи.

Таким образом, изображение искомой функции $f(t)$ определяется в явной форме

$$F(p)=E(p)\cdot K(p), \tag{9.27}$$

где $K(p)$ — коэффициент передачи цепи.

Оригинал искомой функции определяется с помощью обратного преобразования (9.22).

Поясним вышеизложенное на примере. Пусть требуется найти ток в контуре L, C, r, при включении в контур в момент $t=0$ постоянной эдс $e(t)=E$ (рис. 9.5).

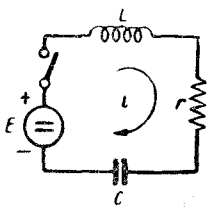


Рис. 9.5

Исходим из уравнения

$$L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}\int idt=e(t). \tag{9.28}$$

Применяя к каждому из слагаемых этого уравнения преобразование (9.4), находим

$$\int_0^\infty e(t)\,e^{-pt}\,dt=E(p)=\frac{E}{p},$$

$$r\int_0^\infty i(t)\,e^{-pt}\,dt=rI(p), \qquad L\int_0^\infty\left(\frac{di}{dt}\right)e^{-pt}\,dt=LpI(p),$$

$$\frac{1}{C}\int_0^\infty\left(\int idt\right)e^{-pt}\,dt=\frac{1}{Cp}\,I(p).$$

После алгебраизации ур-ние (9.28) принимает следующий вид:

$$\left(Lp+r+\frac{1}{Cp}\right)I(p)=E(p). \tag{9.29}$$

Отсюда получаем изображение $I(p)$ для искомой функции $i(t)$:

$$I(p)=\frac{E(p)}{Lp+r+\dfrac{1}{Cp}}=\frac{E(p)}{Z(p)}, \tag{9.30}$$

где $Z(p)=Lp+r+\dfrac{1}{Cp}$ — сопротивление последовательного контура, записанное в операторной форме. Это сопротивление можно получить непосредственно из выражения (6.1) заменой $i\omega$ на p.

Оригинал $i(t)$ находим с помощью обратного преобразования (9.5):

$$i(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{E(p)}{Z(p)}\,e^{pt}\,dp=$$

$$=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}}{p^2+\dfrac{r}{L}\,p+\dfrac{1}{LC}}\,dp. \tag{9.31}$$

Подинтегральная функция имеет два полюса в точках

$$p_{1,2}=-\frac{r}{2L}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm i\omega_{0k}, \tag{9.32}$$

где обозначено

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{r}{2L}\\ \omega_{0k}&=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}}\end{aligned}\right\}, \tag{9.33}$$

причём предполагается, что $\dfrac{1}{LC}\gg\dfrac{r^2}{4L^2}$.

Этим полюсам соответствуют вычеты [см. ф-лу (9.11)]

$$\mathrm{res}_1=\frac{e^{pt}}{2p+2\alpha}\Big|_{p=p_1}=e^{-\alpha t}\cdot\frac{e^{i\omega_{0k}t}}{2i\omega_{0k}},$$

$$\mathrm{res}_2=\frac{e^{pt}}{2p+2\alpha}\Big|_{p=p_2}=-e^{-\alpha t}\cdot\frac{e^{-i\omega_{0k}t}}{2i\omega_{0k}}.$$

Применяя ф-лы (9.8)—(9.9), находим

$$\left.\begin{aligned}i(t)&=\frac{E}{L}\,(\mathrm{res}_1+\mathrm{res}_2)=\frac{E}{\omega_{0k}L}\,e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{i\omega_{0k}t}-e^{-i\omega_{0k}t}}{2i}\right]=\\ &=\frac{E}{\omega_{0k}L}\,e^{-\alpha t}\sin\omega_{0k}t \quad \text{при} \quad t>0\\ i(t)&=0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad t<0\end{aligned}\right\}. \tag{9.34}$$

В рассматриваемом случае относительно простой цепи решение (9.34) нетрудно получить и прямым интегрированием ур-ния (9.28). Однако для более сложных систем метод алгебраизации дифференциальных уравнений с последующим применением контурных интегралов вида (9.22) оказывается гораздо эффективнее, чем прямое интегрирование уравнения.

§ 9.3. Прохождение импульсных сигналов через дифференцирующие и интегрирующие цепи

В импульсной технике часто встречается необходимость в преобразовании заданного напряжения $e(t)$ в напряжение вида

$$u_{вых}(t)=\tau\frac{de(t)}{dt}, \tag{9.35}$$

где постоянная τ, зависящая от параметров цепи, имеет размерность времени.

Цепи, осуществляющие подобное преобразование сигнала, называются дифференцирующими цепями.

Для выявления требуемого характера комплексного коэффициента передачи дифференцирующей цепи обратимся к представлению $e(t)$ в виде интеграла (2.27)

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\Omega)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega.$$

Дифференцируя обе части этого выражения по t, получим

$$\frac{de}{dt}=\dot{e}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\Omega)\cdot i\Omega e^{i\Omega t}\,d\Omega.$$

Подставив $\dot{e}(t)$ в выражение (9.35), можем написать

$$u_{вых}(t)=\tau\dot{e}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\Omega)\cdot\vec{K}(i\Omega)\,e^{i\Omega t}\,d\Omega,$$

где

$$K(i\Omega)=\tau i\Omega. \qquad (9.36)$$

Итак, для получения на выходе цепи напряжения, пропорционального производной $e(t)$, спектральная плотность эдс $\vec{E}(\Omega)$ должна быть умножена на $\tau i\Omega$. Этот результат вытекает также из свойства (9.24′), на основании которого изображение $U_{вых}(p)$ для выходного напряжения $u_{вых}(t)=\tau\dot{e}(t)$ определяется выражением $\tau pE(p)$, где $E(p)$ — изображение для $e(t)$.

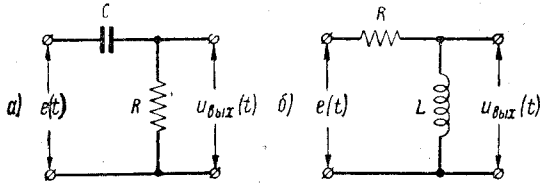


Рис. 9.6

Осуществить линейную систему с частотной характеристикой вида (9.36) при изменении Ω от 0 до ∞ невозможно. Поэтому задача дифференцирования сигналов со сплошным спектром может быть осуществлена лишь приближённо, с тем большей точностью, чем в более узкой области частот концентрируется основная часть энергии сигнала.

Простейшие дифференцирующие цепи изображены на рис. 9.6. Для рис. 9.6*а*

$$K(i\Omega)=\frac{R}{R+\frac{1}{i\Omega C}}=RC\,\frac{i\Omega}{1+RCi\Omega}; \qquad (9.36')$$

для рис. 9.6*б*

$$K(i\Omega)=\frac{i\Omega L}{R+i\Omega L}=\frac{L}{R}\cdot\frac{i\Omega}{1+\frac{L}{R}i\Omega}. \qquad (9.36'')$$

В области частот, удовлетворяющих условию $\Omega\tau\ll 1$, где $\tau=RC$ или $\tau=\frac{L}{R}$ — постоянная времени цепи, коэффициент передачи удовлетворяет выражению (9.35). Приближение $u_{вых}(t)$ к $\tau\dot{e}(t)$ получается, следовательно, тем лучше, чем меньше постоянная времени дифференцирующей цепи и чем быстрее убывание спектральной плотности $\vec{E}(\Omega)$ в области высших частот.

Поясним приведённые выше соображения на некоторых примерах. Пусть электродвижущая сила на входе дифференцирующей цепи, состоящей из R и C, имеет вид функции $e(t)$, показанной на рис. 9.7. Эту функцию можно рассматривать как разность функций

$$e_1(t)=at \text{ и } e_1(t-t_1)=a(t-t_1),$$

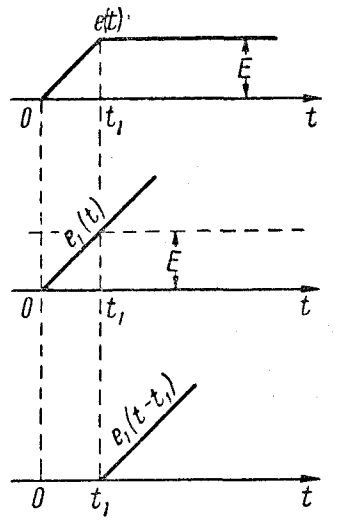


Рис. 9.7

где $a=\frac{E}{t_1}$ — наклон функции $e(t)$ на участке $0<t<t_1$.

Изображение для функции $e_1(t)=at$, по ф-ле (9.4) определяется выражением

$$E_1(p)=\frac{a}{p^2}.$$

Коэффициент передачи цепи, после замены в выражении (9.36′) $i\Omega$ на p, равен $K(p)=\tau\frac{p}{1+\tau p}$.

Применяя ф-лу (9.22), получим

$$u_{1\,вых}(t)=a\tau\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{p(1+\tau p)}\,e^{pt}\,dp.$$

Полюсы: $p_1=0$, $p_2=-\frac{1}{\tau}$. Определив с помощью ф-лы (9.11) вычеты в этих полюсах, получим

$$u_{1\,вых}(t)=\frac{E\tau}{t_1}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \qquad (9.37)$$

От электродвижущей силы $e_1(t-t_1)$ получим, соответственно, для $t > t_1$:

$$u_{1\,вых}(t-t_1) = \frac{E\tau}{t_1}\left[1 - e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}\right]. \qquad (9.38)$$

На участке $0 < t < t_1$ выходное напряжение совпадает с выражением (9.37). При $t > t_1$ выходное напряжение равно разности $u_{1\,вых}(t) - u_{1\,вых}(t-t_1)$. Построение выходного напряжения проведено на рис. 9.8.

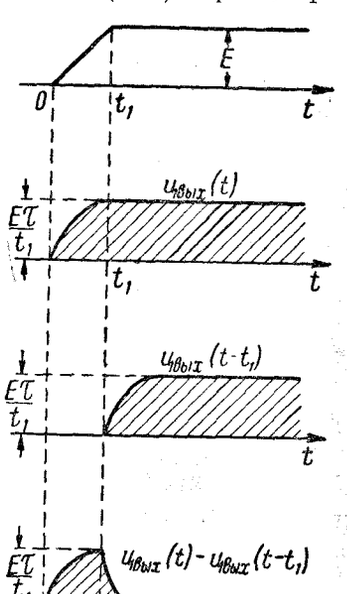


Рис. 9.8

Прохождение через дифференцирующую цепь трапецеидального импульса поясняется на рис. 9.9. Из ф-л (9.37), (9.38) и рис. 9.8 и 9.9 видно, что при постоянной времени $\tau \to 0$ выходное напряжение, уменьшаясь по величине (при заданном E), приближается к точному выражению производной от $e(t)$.

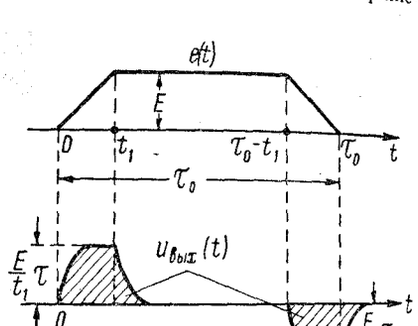


Рис. 9.9

Обратимся теперь снова к эдс $e(t)$, изображённой на рис. 9.7, и пусть $t_1 \to 0$ (при неизменном E). На участке $0 < t < t_1$ выходное напряжение, в соответствии с ф-лой (9.37), при $\frac{t}{\tau} \ll 1$ определяется приближённым выражением:

$$u_{вых}(t) \approx E\frac{t}{t_1}.$$

Для $t > t_1$, вычитая выражение (9.38) из (9.37), получим

$$u_{вых}(t-t_1) = \frac{E\tau}{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1\right).$$

Для $t_1 \to 0$ в пределе получим

$$\lim_{t_1 \to 0} u_{вых}(t-t_1) = E\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \lim_{t_1 \to 0} \frac{e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1}{t_1} = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (9.39)$$

Этот результат соответствует воздействию на цепь, содержащую R и C, скачка электродвижущей силы $e(t) = E$ при $t > 0$.

В случае передачи прямоугольных импульсов напряжение на выходе дифференцирующей цепи примет форму, показанную на рис. 9.10. Рассматривать это напряжение как производную от $e(t)$, конечно, нельзя, и в тех случаях, когда $t_1 \ll \tau$, термин ,,дифференцирующая цепь'' является условным.

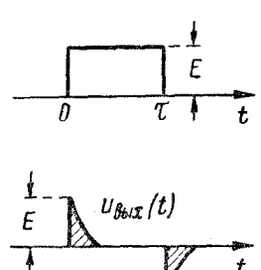


Рис. 9.10

Для интегрирования сигналов необходимо, чтобы коэффициент передачи цепи определялся выражением вида

$$K(i\Omega) = \frac{1}{\tau i\Omega}. \qquad (9.40)$$

Это соотношение легко может быть получено интегрированием выражения (2.27) в пределах от 0 до t_1 или делением изображения $E(p)$ на p в соответствии с соотношением (9.25′).

Простейшие интегрирующие цепи, приближающиеся к условию (9.40), изображены на рис. 9.11. При соблюдении условия $\Omega\tau \gg 1$ коэффициент передачи для этих цепей:

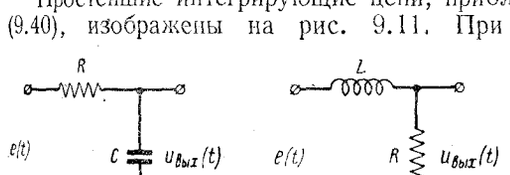


Рис. 9.11

$$K(i\Omega) = \frac{1}{1+\tau i\Omega} \approx \approx \frac{1}{\tau i\Omega}, \qquad (9.41)$$

где $\tau = RC$ или $\tau = \frac{L}{R}$.

Как видим, в отличие от дифференцирующих цепей интегрирование получается тем точнее, чем больше постоянная времени цепи и чем выше область, в которой концентрируется основная часть энергии сигнала.

Если на цепь, содержащую R и C, действует электродвижущая сила в виде прямоугольного импульса (рис. 9.12), ток через конденсатор на участке $0 < t < \tau_0$ равен

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

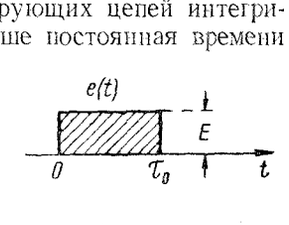


Рис. 9.12

а напряжение на конденсаторе

$$u_{вых}(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Характер изменения $u_{вых}(t)$ при $t>\tau_0$ зависит от условий разряда конденсатора. Если цепь в перерывах между импульсами разомкнута или постоянная времени разряда достаточно велика, будет происходить накопление заряда конденсатора.

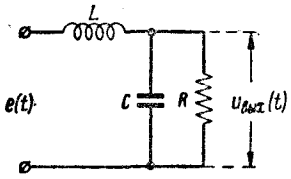


Рис. 9.13

§ 9.4. Прохождение импульсных сигналов через фильтр нижних частот

Найдём сперва напряжение на выходе однозвенного фильтра нижних частот (рис. 9.13) при включении на вход фильтра в момент $t=0$ постоянной электродвижущей силы. Составим выражение для коэффициента передачи цепи:

$$K(i\Omega)=\frac{\dfrac{R\,\dfrac{1}{i\Omega C}}{R+\dfrac{1}{i\Omega C}}}{i\Omega L+\dfrac{R\,\dfrac{1}{i\Omega C}}{R+\dfrac{1}{i\Omega C}}}=\frac{\dfrac{1}{LC}}{(i\Omega)^2+\dfrac{1}{CR}i\Omega+\dfrac{1}{LC}},$$

Пусть фильтр нагружен на активное сопротивление R, равное среднему геометрическому из реактивных сопротивлений фильтра, т. е. $R=\sqrt{\frac{L}{C}}$. Подставив это выражение и вводя обозначение

$$\Omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

получим окончательное выражение для коэффициента передачи в виде

$$K(i\Omega)=\frac{\Omega_c^2}{(i\Omega)^2+\Omega_c(i\Omega)+\Omega_c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^4}}e^{-i\varphi(\Omega)},\quad(9.42)$$

где

$$\varphi(\Omega)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\Omega}{\Omega_c}}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}.\quad(9.43)$$

Частотная и фазовая характеристики рассматриваемой цепи изображены на рис. 9.14.

Заменяя $i\Omega$ на p, перепишем это выражение в операторной форме

$$K(p)=\frac{\Omega_c^2}{p^2+\Omega_c p+\Omega_c^2}.\quad(9.42')$$

Подставляя (9.42'), а также изображение для эдс $E(p)=\frac{E}{p}$ в ур-ние (9.22), получаем

$$u_{вых}(t)=\Omega_c^2\,E\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{p[p^2+\Omega_c p+\Omega_c^2]}.$$

Подинтегральная функция имеет три полюса в точках

$$p_1=0,$$

$$p_{2,3}=-\frac{\Omega_c}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega_c.$$

Применяя ф-лу (9.11), находим для вычетов в этих особых точках следующие выражения:

$$\operatorname{res}_1=\frac{1}{\Omega_c^2};$$

$$\operatorname{res}_2=-\frac{2e^{-\frac{1}{2}\Omega_c t}}{\Omega_c^2(3+i\sqrt{3})}e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}\Omega_c t};$$

$$\operatorname{res}_3=-\frac{2e^{-\frac{1}{2}\Omega_c t}}{\Omega_c^2(3-i\sqrt{3})}e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}\Omega_c t}.$$

Отсюда выходное напряжение

$$u_{вых}(t)=E\left[1-e^{-\frac{1}{2}\Omega_c t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_c t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_c t\right)\right].\quad(9.43)$$

График выходного напряжения в виде функции $\frac{u_{вых}(\Omega_c t)}{E}$ изображён на рис. 9.15. Для полного установления напряжения требуется $\Omega_c t_1\approx 2{,}5$, чему соответствует время

$$t_1\approx\frac{2{,}5}{\Omega_c}=2{,}5\sqrt{LC}.$$

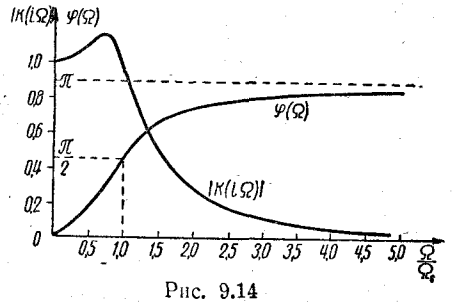


Рис. 9.14

На основе полученного решения нетрудно рассмотреть воздействие на фильтр эдс в виде импульсов прямоугольной формы. Достаточно на график, изображённый на рис. 9.15 сплошной линией, наложить такую же функцию, смещённую в сторону запаздывания на время τ_0, равное длительности импульса и обратную первой по знаку. Суммирование обеих функций даст напряжение на выходе с учётом влияния фильтра как на передний, так и на задний фронт импульса. Подобное построение показано на рис. 9.15 пунктирными линиями.

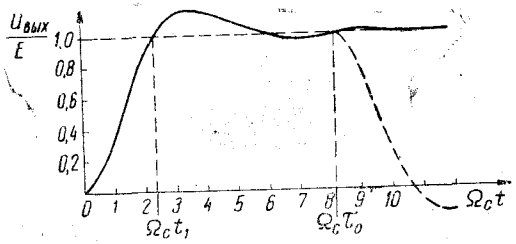


Рис. 9.15

При применении двух, трёх или более звеньев частотная характеристика фильтра всё более приближается к идеализированной форме, изображённой на рис. 9.16. Фазовая характеристика становится при этом всё более крутой и линейной (в полосе прозрачности фильтра).

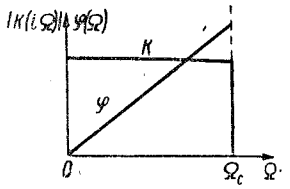


Рис. 9.16

При характеристике, показанной на рис. 9.16, выходное напряжение удобно определять с помощью интеграла Фурье. Полагая в полосе частот от 0 до Ω_c $|K(i\omega)| = K = \text{const}$, а $\varphi(\Omega) = \Omega t_0$ — линейной функцией частоты, в соответствии с выражением (2.44) получаем:

$$E(t) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\Omega}\, d\Omega\right], \tag{9.44}$$

$$u_{вых}(t) = KE\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\Omega_c} \frac{\sin \Omega (t - t_0)}{\Omega}\, d\Omega\right] =$$

$$= KE\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{si}\,\Omega_c (t - t_0)\right]. \tag{9.45}$$

Здесь $\mathrm{si}\,\Omega_c (t - t_0)$ — интегральный синус.

График функции $\frac{u_{вых}}{KE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{si}\,\Omega_c (t - t_0)$ изображён на рис. 9.17. Величина t_0 на этом рисунке выбрана произвольно, так как для получения „идеальной“ частотной характеристики

(рис. 9.16) требуется бесконечно большое число звеньев и наклон фазовой характеристики t_0 обращается в бесконечность.

Следует иметь в виду, что простирающиеся до $\Omega t = \pm\infty$ осцилляции $u_{вых}(t)$ также являются результатом идеализации частотной характеристики. В физически осуществимых цепях скаты частот-

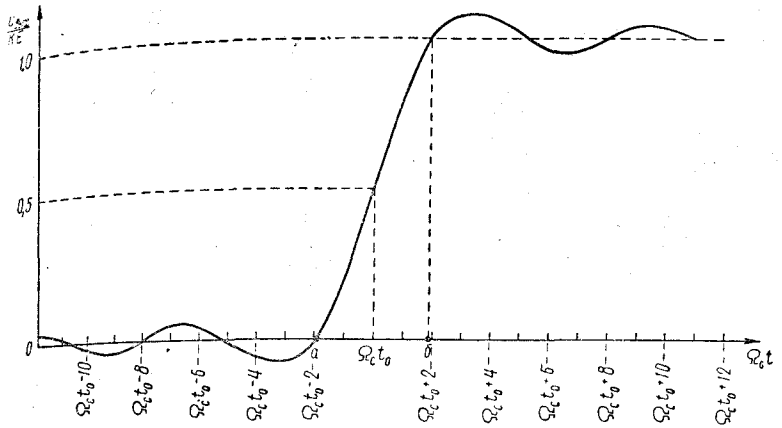


Рис. 9.17

ной характеристики обладают конечной крутизной, а осцилляции $u_{вых}(t)$ отсутствуют. Несмотря на все эти недостатки, связанные с заменой реального фильтра идеальным, наклон кривой $\frac{u_{вых}(t)}{KE}$ на участке *а—б* (рис. 9.17) довольно близко совпадает с наклоном $\frac{u_{вых}(t)}{KE}$ для реального фильтра, обладающего той же полосой пропускания Ω_c.

Замена реальной частотной характеристики фильтра идеализированной позволяет найти простую связь между полосой пропускания Ω_c (рис. 9.16) и длительностью процесса установления выходного напряжения.

Под длительностью процесса установления выходного напряжения можно подразумевать время, соответствующее участку кривой *а—б* на рис. 9.17.

Точке *а* соответствует

$$\mathrm{si}\,\Omega_c (t_a - t_0) = -\frac{\pi}{2},\ \Omega_c (t_a - t_0) = -1{,}92,$$

а точке *б*

$$\mathrm{si}\,\Omega_c (t_б - t_0) = +\frac{\pi}{2},\ \Omega_c (t_б - t_0) = +1{,}92;$$

отсюда находим

$$t_б - t_a = \frac{3{,}84}{\Omega_c}. \tag{9.46}$$

Таким образом, наклон фронта выходного напряжения обратно пропорционален полосе пропускания фильтра.

§ 9.5. Воздействие импульсных электродвижущих сил на колебательный контур

Рассмотрим сперва важный для практики случай включения постоянной эдс в колебательный контур. Дифференциальное уравнение для тока $i(t)$ и решение этого уравнения методом контурных интегралов были даны в § 9.2 [см. ур-ния (9.28)—(9.34)]. Основываясь на выражении (9.34) для тока

$$i(t)=\frac{E}{\omega_{0k}L}\,e^{-\alpha t}\sin\omega_{0k}t \quad \text{при} \quad t>0,$$

найдём напряжения на L и C:

$$u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=E\left[-\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin\omega_{0k}t+\cos\omega_{0k}t\right]e^{-\alpha t}, \qquad (9.47)$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=\frac{E}{\omega_{0k}LC}\int_0^t e^{-\alpha t}\sin\omega_{0k}t\,dt=$$

$$=E\left[1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_{0k}t-\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin\omega_{0k}t\right)\right]. \qquad (9.48)$$

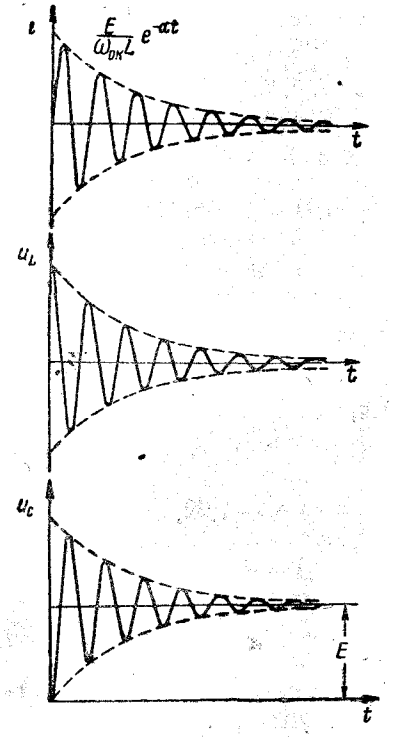


Рис. 9.18

Графики $i(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$ изображены на рис. 9.18.

Из этих графиков и выражений (9.34), (9.47) и (9.48) видно, что при включении постоянной эдс в контуре возникают свободные колебания, характеризующиеся следующими основными параметрами:

частота (собственная частота контура)

$$\omega_{0k}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}}, \qquad (9.49)$$

период

$$T=\frac{2\pi}{\omega_{0k}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}}}, \qquad (9.50)$$

коэффициент затухания, определяющий скорость убывания амплитуд,

$$\alpha=\frac{r}{2L}.$$

Кроме этих основных параметров, часто пользуются ещё логарифмическим декрементом затухания и постоянной времени контура.

Логарифмический декремент затухания равен логарифму отношения двух значений тока, отделённых одним периодом T:

$$\delta=\ln\frac{i(t)}{i(t+T)}=\ln\frac{e^{-\alpha t}\sin\omega_{0k}t}{e^{-\alpha(t+T)}\sin\omega_{0k}(t+T)}=$$

$$=\ln e^{\alpha T}\cdot\frac{\sin\omega_{0k}t}{\sin\omega_{0k}(t+T)}.$$

Так как $\omega_{0k}T=2\pi$, то $\sin\omega_{0k}T=\sin\omega_{0k}(t+T)$ и

$$\delta=\ln e^{\alpha t}=\alpha T. \qquad (9.51)$$

Таким образом, логарифмический декремент является для свободного колебания постоянной величиной.

Постоянная времени контура

$$\tau=\frac{1}{\alpha}=\frac{2L}{r} \qquad (9.52)$$

соответствует отрезку времени, на протяжении которого амплитуда убывает в e раз.

Выясним связь приведённых выше величин с параметрами резонансного колебательного контура, работающего в режиме вынужденных колебаний. Так как резонансная частота контура $\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, то выражение (9.49) можно представить в форме

$$\omega_{0k}=\sqrt{\omega_p^2-\frac{r^2}{4L^2}}=\omega_p\sqrt{1-\left(\frac{r}{2\omega_pL}\right)^2}=\omega_p\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}. \qquad (9.53)$$

Отсюда видно, что при достаточно высокой добротности Q $\omega_{0k}\approx\omega_p$, поэтому в практике обычно не делают разницы между резонансной и собственной частотой контура.

Далее, коэффициент затухания α можно привести к виду

$$\alpha=\frac{r}{2L}=\frac{1}{2}\frac{r}{\omega_pL}\,\omega_p=\frac{\omega_p}{2Q},$$

откуда

$$\frac{2\alpha}{\omega_p}=\frac{1}{Q}. \qquad (9.54)$$

Сравнивая это выражение с (4.37), приходим к выводу, что 2α равно полосе пропускания колебательного контура.

Логарифмический декремент затухания нетрудно выразить через добротность контура. Очевидно

$$\delta=\alpha T=\frac{r}{2L}\cdot\frac{2\pi}{\omega_{0k}}=\frac{\pi}{Q}=\pi d. \qquad (9.55)$$

Отсюда видно, что введённое в гл. 4 затухание d связано с логарифмическим декрементом соотношением

$$d = \frac{\delta}{\pi}.$$

Для контура среднего качества $d \approx 0{,}01$ и логарифмический декремент $\delta \approx 0{,}03$.

В тех случаях, когда $\frac{\alpha}{\omega_{0k}} \ll 1$, выражения (9.47) и (9.48) можно упростить, отбрасывая в них слагаемые порядка $\frac{\alpha}{\omega_{0k}}$. Таким образом, получаем:

$$u_L(t) \approx E\, e^{-\alpha t} \cos \omega_{0k} t, \tag{9.47'}$$

$$u_C(t) \approx E\,(1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_{0k} t). \tag{9.48'}$$

На основании этих выражений нетрудно получить решение для случая, когда действующая на контур электродвижущая сила имеет вид импульса прямоугольной формы. Как и в § 9.4, достаточно на графики, изображённые на рис. 9.18, наложить такие же функции, запаздывающие на время τ_0, равное длительности импульса и сдвинутые по фазе на угол π. На рис. 9.19 изображён график тока в контуре для случая, когда постоянная времени τ мала по сравнению с длительностью импульса τ_0.

Если τ_0 соизмеримо с τ, то при $t > \tau_0$ имеет место наложение свободных колебаний, возникающих на переднем и заднем фронтах импульса. Если τ_0 равно чётному числу полупериодов собственного колебания контура, то при $t > \tau_0$ токи от переднего и заднего фронтов суммируются в противофазе, а при τ_0, равном нечётному числу полупериодов — в фазе. Поэтому в первом случае получается возрастание, а во втором — ослабление начальной амплитуды суммарного колебания в момент $t = \tau_0$. Отсюда ясно, что для получения свободного колебания с наибольшими возможными амплитудами длительность импульса должна равняться половине периода свободного колебания.

При дальнейшем сокращении τ_0 амплитуды колебания (при $t > \tau_0$) будут убывать. Если на контур воздействует импульс очень короткий по сравнению с периодом собственного колебания, то результирующий ток (при $t > \tau_0$) можно представить следующим образом:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{\omega_{0k} L}\left[e^{-\alpha t} \sin \omega_{0k} t - e^{-\alpha (t-\tau_0)} \sin \omega_{0k} (t - \tau_0)\right] \approx$$

$$\approx \frac{E e^{-\alpha t}}{\omega_{0k} L}\left[\sin \omega_{0k} t - \cos \omega_{0k} \tau_0 \sin \omega_{0k} t + \sin \omega_{0k} \tau_0 \cos \omega_{0k} t\right] \approx$$

$$\approx \frac{E \tau_0}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega_{0k} t. \tag{9.55}$$

При выводе этого выражения было принято:

$$e^{\alpha \tau_0} \approx 1,$$

$$\sin \omega_{0k} \tau_0 \approx \omega_{0k} \tau_0.$$

При заданной и неизменной амплитуде импульса E сокращение τ_0 приводит к уменьшению начальной амплитуды. Существенно, однако, что при возбуждении контура очень коротким $\left(\tau_0 \ll \frac{T}{4}\right)$ импульсом свободное колебание является косинусоидальным. Этот приём иногда используется в импульсной технике. Для получения требуемой амплитуды свободного колебания должна быть обеспечена определённая величина произведения $E\tau_0$. Таким образом, укорочение импульса должно сопровождаться увеличением амплитуды импульса. Форма импульса в подобных случаях значения не имеет, важна лишь площадь импульса.

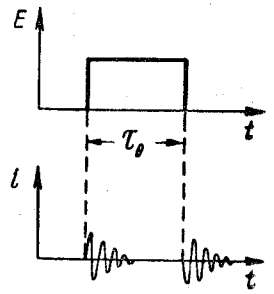


Рис. 9.19

§ 9.6. Воздействие импульсных электродвижущих сил на систему связанных контуров

Пусть в момент $t = 0$ в первый контур включается постоянная электродвижущая сила. Оба контура считаем колебательными, а связь между контурами индуктивной. Используя обозначения элементов системы, приведённые на рис. 9.20, составим основные интегро-дифференциальные уравнения для токов i_1 и i_2:

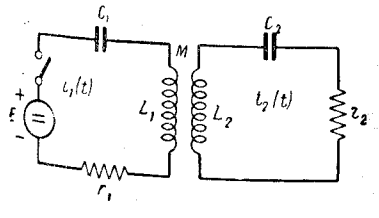


Рис. 9.20

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = E, \tag{9.57}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt} = 0. \tag{9.58}$$

Для упрощения анализа будем считать оба контура идентичными, т. е.

$$L_1 = L_2 = L; \quad C_1 = C_2 = C; \quad r_1 = r_2 = r.$$

Тогда, преобразовывая по Лапласу ур-ния (9.57) и (9.58) и полагая, что в момент $t=0$ напряжения на конденсаторах и токи в контурах равны нулю, получим:

$$LpI_1+rI_1+\frac{1}{pC}I_1+MpI_2=\frac{E}{p}, \tag{9.57'}$$

$$LpI_2+rI_2+\frac{1}{pC}I_2+MpI_1=0, \tag{9.58'}$$

или

$$I_1\left(pL+r+\frac{1}{pC}\right)+pMI_2=\frac{E}{p},$$

$$I_1pM+I_2\left(pL+r+\frac{1}{pC}\right)=0.$$

Совместное решение полученной алгебраической системы даёт следующие выражения для I_1 и I_2:

$$I_1=\frac{E}{p}\,\frac{pL+r+\frac{1}{pC}}{\left(pL+r+\frac{1}{pC}\right)^2-p^2M^2},$$

$$I_2=-\frac{E}{p}\,\frac{pM}{\left(pL+r+\frac{1}{pC}\right)^2-p^2M^2}.$$

Умножив числитель и знаменатель в этих выражениях на $\left(\frac{p}{L}\right)^2$ и заменив $\frac{M}{L}$ на k, получим:

$$I_1=\frac{E}{L}\,\frac{p^2+p\frac{r}{L}+\frac{1}{LC}}{\left(p^2+p\frac{r}{L}+\frac{1}{LC}\right)^2-p^4k^2},$$

$$I_2=-\frac{E}{L}\,\frac{p^2k}{\left(p^2+p\frac{r}{L}+\frac{1}{LC}\right)^2-p^4k^2}.$$

Представляя знаменатель в этих уравнениях в виде произведения суммы на разность

$$\left(p^2+\frac{r}{L}p+\frac{1}{CL}+kp^2\right)\left(p^2+\frac{r}{L}p+\frac{1}{CL}-kp^2\right)=0,$$

находим его корни:

$$\gamma_{1,2}=-\frac{\frac{r}{2L}}{1+k}\pm\sqrt{\frac{\frac{r^2}{4L^2}}{(1+k)^2}-\frac{\frac{1}{CL}}{1+k}}=-\alpha'\pm i\omega'_{0k},$$

$$\gamma_{3,4}=-\frac{\frac{r}{2L}}{1-k}\pm\sqrt{\frac{\frac{r^2}{4L^2}}{(1-k)^2}-\frac{\frac{1}{CL}}{1-k}}=-\alpha''\pm i\omega''_{0k}.$$

Определяя i_1 и i_2 с помощью выражения (2.37) и теоремы о вычетах, можем записать решения для i_1 и i_2 в следующем виде:

$$i_1=A_1e^{\gamma_1t}+A_2e^{\gamma_2t}+A_3e^{\gamma_3t}+A_4e^{\gamma_4t},$$

$$i_2=B_1e^{\gamma_1t}+B_2e^{\gamma_2t}+B_3e^{\gamma_3t}+B_4e^{\gamma_4t},$$

где A_1 и A_2, A_3 и A_4, B_1 и B_2, B_3 и B_4 — комплексные попарно сопряжённые величины, зависящие только от L, C, r, k и E.

Если

$$\frac{1}{CL(1+k)}>\frac{\frac{r^2}{4L^2}}{(1+k)^2}$$

и

$$\frac{1}{CL(1-k)}>\frac{\frac{r^2}{4L^2}}{(1-k)^2},$$

то корни γ_1 и γ_2, а также γ_3 и γ_4, являются попарно сопряжёнными комплéксами и справедливы следующие выражения:

$$A_1e^{\gamma_1t}+A_2e^{\gamma_2t}=D_1e^{-\alpha't}\sin(\omega'_{0k}t+\psi'_1),$$

$$A_3e^{\gamma_3t}+A_4e^{\gamma_4t}=D_2e^{-\alpha''t}\sin(\omega''_{0k}t+\psi''_1),$$

где D_1, ψ'_1 и D_2, ψ''_1 — новые постоянные (уже действительные), определяющиеся через A_1, A_2, A_3 и A_4.

Таким образом,

$$i_1(t)=D_1e^{-\alpha't}\sin(\omega'_{0k}t+\psi'_1)+D_2e^{-\alpha''t}\sin(\omega''_{0k}t+\psi''_1). \tag{9.59}$$

Аналогично можно получить

$$i_2(t)=F_1e^{-\alpha't}\sin(\omega'_{0k}t+\psi'_2)+F_2e^{-\alpha''t}\sin(\omega''_{0k}t+\psi''_2). \tag{9.60}$$

Итак, ток в каждом из контуров представляет собой сумму двух свободных колебаний с частотами ω'_{0k} и ω''_{0k} и коэффициентами затухания соответственно α' и α''. Частоты ω'_{0k} и ω''_{0k} называются частотами связи. Эти частоты отличаются от собственных частот контуров (в данном случае одинаковых) тем более, чем сильнее коэффициент связи k. Так как обычно $\frac{r^2}{4L^2}\ll\frac{1}{CL}$ и $k\ll1$, то можно считать

$$\left.\begin{aligned}\omega'_{0k}&\approx\sqrt{\frac{\frac{1}{CL}}{1+k}}=\frac{\omega_p}{\sqrt{1+k}}\\ \omega''_{0k}&\approx\sqrt{\frac{\frac{1}{CL}}{1-k}}=\frac{\omega_p}{\sqrt{1-k}}\end{aligned}\right\}. \tag{9.61}$$

Сравнивая эти выражения с ф-лами (5.26), убеждаемся, что частоты связи ω'_{ck} и ω''_{ck} приближённо равны частотам ω_{II} и ω_I, при которых наблюдаются максимумы двугорбой резонансной кривой двухконтурной системы в режиме вынужденных синусоидальных колебаний.

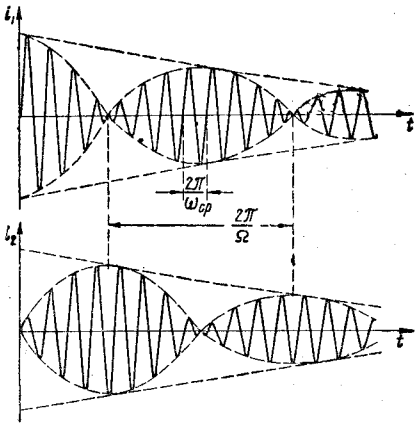


Рис. 9.21

Сложение в каждом из контуров двух близких по частоте колебаний образует биение, картина которого изображена на рис. 9.21. Так как каждое из слагаемых колебаний является затухающим, то и результирующее колебание тоже затухает.

Определение постоянных D_1 и D_2, а также F_1 и F_2 показывает, что $D_1 = D_2$, а $F_1 = F_2$. Поэтому амплитуда результирующего колебания достигает в некоторые моменты нуля. Частота результирующего колебания при биении двух колебаний с одинаковыми амплитудами равна

$$\omega_{cp} = \frac{\omega''_{0k} + \omega'_{0k}}{2},$$

а основная частота изменения огибающей амплитуд

$$\Omega = \omega''_{0k} - \omega'_{ck}.$$

Подставляя в эти выражения соотношения (9.61) и учитывая, что $k \ll 1$, получаем:

$$\omega_{cp} = \omega_{0k},$$

$$\Omega = k\,\omega_{0k}.$$

Таким образом, частота заполнения результирующего колебания практически совпадает с собственными частотами контуров.

Всё вышесказанное относится к системе, составленной из двух одинаковых контуров. В общем случае, при $\omega_{0k1} \neq \omega_{0k2}$, частота ω_{cp} отличается как от ω_{0k1}, так и от ω_{0k2}.

Отметим, наконец, что максимумам огибающей амплитуд тока i_1 соответствуют минимумы огибающей тока i_2 и наоборот.

Если на первый контур действует импульс прямоугольной формы, то колебания в системе связанных контуров, как и в разобранном в предыдущем параграфе случае, могут быть получены суперпозицией двух колебаний, соответствующих переднему и заднему фронтам импульса. В случае очень коротких (по сравнению с $T = \frac{2\pi}{\omega_{0k}}$) импульсов, форма свободных колебаний совпадает с графиками рис. 9.21 с тем лишь отличием, что начальная фаза колебаний соответствует косинусу.

§ 9.7. Прохождение амплитудно-модулированных колебаний через колебательные системы. Тональная модуляция

Рассмотренные в предыдущих главах свойства модулированных колебаний и свойства резонансных колебательных систем позволяют полностью выявить влияние последних на качество передачи сигналов по радиолинии. Рассмотрение начнём с наиболее простого случая, когда модулированная по амплитуде электродвижущая сила действует в последовательном колебательном контуре и требуется найти ток в контуре в установившемся режиме. Контур считаем настроенным на несущую частоту колебания, т. е. $\omega_p = \omega_0$.

Наиболее простым способом решения поставленной задачи является разложение модулированной эдс на гармонические составляющие и применение к ним обычных законов теории переменных токов.

На основании выражения (3.6) можем написать (начальные фазы Θ_0 и γ опущены)

$$e(t) = E_0 (1 + M \sin \Omega t) \sin \omega_0 t =$$

$$= E_0 \sin \omega_0 t - \frac{ME_0}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{ME_0}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t.$$

Положение частот ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$ относительно резонансной кривой контура показано на рис. 9.22.

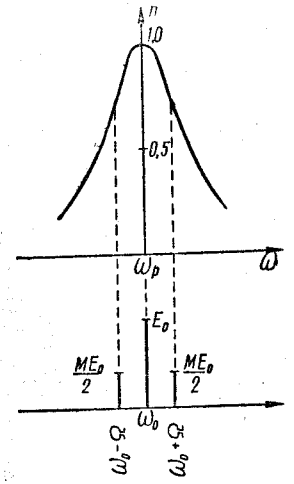


Рис. 9.22

Так как контур считается настроенным на частоту ω_0, то сопротивление контура для частоты ω_0 равно r, а для частот $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$, близких к ω_p:

$$Z_1 = r\left[1 + i\frac{2(\omega_1 - \omega_p)}{\omega_p} Q\right] =$$

$$= r\left(1 + i\frac{2\Omega}{\omega_p} Q\right) = r(1 + i\,a),$$

$$Z_2 = r\left[1 + i\frac{2(\omega_2 - \omega_p)}{\omega_p} Q\right] =$$

$$= r\left(1 - i\frac{2\Omega}{\omega_p} Q\right) = r(1 - i\,a).$$

Здесь $a=\frac{2\Omega}{\omega_p}Q$ — абсолютная величина обобщённой расстройки контура для верхней и нижней боковых частот.

Разделив все слагаемые эдс на соответствующие сопротивления, получим для тока следующее выражение

$$i(t)=\frac{E_0}{r}\sin\omega_0 t-\frac{ME_0}{2r\sqrt{1+a^2}}\cos[(\omega_0+\Omega)t-\varphi]+$$
$$+\frac{ME}{2r\sqrt{1+a^2}}\cos[(\omega_0-\Omega)t+\varphi]. \qquad (9.62)$$

Угол φ равен

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg} a=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Omega}{\omega_p}Q\right). \qquad (9.63)$$

Из выражения (9.62) видно, что на верхней боковой частоте ток запаздывает на угол φ относительно эдс, а на нижней боковой частоте, наоборот, ток опережает эдс на такой же угол. Кроме того, амплитуды токов боковых частот ослаблены по сравнению с током несущего колебания в $\sqrt{1+a^2}$ раз. Если свернуть выражение (9.62), т. е. перейти к форме, аналогичной (3.4), то получится

$$i(t)=\frac{E_0}{r}\left[1+\frac{M}{\sqrt{1+a^2}}\sin(\Omega t-\varphi)\right]\sin\omega_0 t. \qquad (9.62')$$

Амплитуда тока модулирована с той же частотой, что и амплитуда электродвижущей силы, однако из-за неравномерности резонансной кривой контура имеется следующее различие между огибающими тока и эдс:

1) глубина модуляции тока M_i меньше, чем глубина модуляции эдс M

$$M=\frac{M}{\sqrt{1+a^2}}<M,$$

2) огибающая амплитуд тока запаздывает на угол

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\Omega}{\omega_p}Q$$

относительно огибающей эдс.

Отметим, что сдвиг фазы огибающей совпадает со сдвигом фазы колебания верхней боковой частоты.

Коэффициент

$$D=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\Omega}{\omega_p}Q\right)^2}}, \qquad (9.64)$$

определяющий ослабление глубины модуляции тока относительно эдс, иногда называется коэффициентом демодуляции или просто

демодуляцией. График зависимости D от частоты модуляции совпадает с правой ветвью резонансной кривой (рис. 9.23).

Полученные результаты показывают, что с повышением частоты модуляции Ω демодуляция растёт. Из этого следует, что при передаче сложного сигнала, обладающего полосой от $\Omega_{мин}$ до $\Omega_{макс}$, верхним частотам будут соответствовать меньшие коэффициенты модуляции. Так как при приёме колебаний напряжение на выходе детектора приёмника пропорционально коэффициенту модуляции, получается ослабление верхних частот сигнала. Таким образом, зависимость $D(\Omega)$ определяет влияние колебательного контура на частотную характеристику радиолинии, т. е. определяет степень линейных частотных искажений передаваемых сигналов.

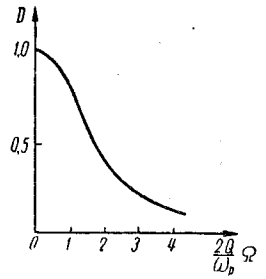


Рис. 9.23

Поскольку форма огибающей тока при тональной модуляции эдс сохраняется синусоидальной, напряжение на выходе детектора также остаётся синусоидальным. Таким образом, нелинейных искажений сигнала в данном случае не возникает. Из всего вышеизложенного ясно, что это является результатом симметрии частотного спектра модулированной эдс относительно резонансной кривой контура, т. е. результатом точной настройки контура на частоту несущего колебания.

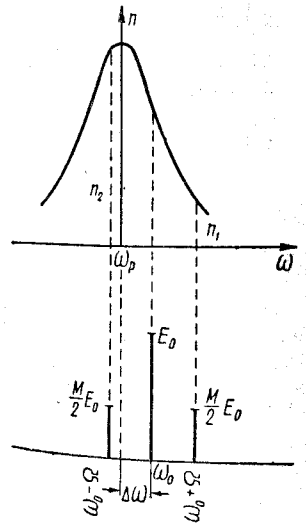


Рис. 9.24

Картина изменяется при расстройке контура, т. е. когда $\omega_p\neq\omega_0$. Этот случай изображён на рис. 9.24. Векторная диаграмма для токов изображена на рис. 9.25. На этой диаграмме вектор OD изображает несущее колебание тока, запаздывающее относительно фазы эдс на угол Θ_0 (так как рис. 9.24 соответствует положительной расстройке $\Delta\omega=\omega_0-\omega_p>0$). Амплитуда тока верхней боковой частоты (вектор DC_1) в данном случае значительно меньше, чем амплитуда тока нижней боковой частоты (вектор DC_2). Длина равнодействующего вектора OF, изображающего результирующий ток, изменяется по сложному закону, не совпадающему с синусоидальным законом изменения огибающей эдс. Это означает, что после детектирования в приёмнике возникнут новые частоты, кратные частоте модуляции. Таким образом, приходим к выводу, что нарушение симметрии

амплитуд и фаз колебаний боковых частот при неточной настройке контура на несущую частоту ω_0 приводит к нелинейным искажениям огибающей передаваемых сигналов.

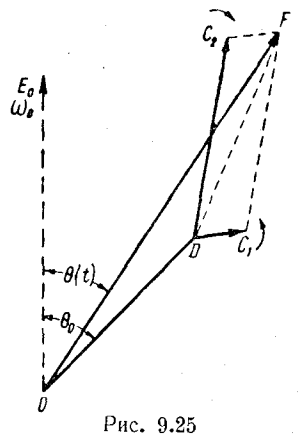


Рис. 9.25

Кроме искажения формы огибающей амплитуд, возникает также псевдофазовая модуляция колебания, так как при вращении векторов DC_1 и DC_2 (рис. 9.25) непрерывно изменяется фаза Θ вектора OF относительно фазы несущего колебания эдс (принятой в качестве исходной). В некоторых случаях это может привести к добавочным искажениям сигнала.

Всё проведённое выше рассмотрение относилось к току в контуре. Обычно напряжение снимается с реактивных элементов контура: индуктивности или ёмкости. Поэтому для полноты картины нужно определить структуру модулированного напряжения на указанных элементах контура. Если отношение $\frac{\Omega}{\omega_0}$ недостаточно мало, то эти напряжения по своей структуре могут отличаться от модулированного тока в контуре. Очевидно, что на ёмкости напряжение нижней боковой частоты будет больше, чем на верхней, а на индуктивности бóльшее напряжение будет на верхней боковой частоте. Таким образом, симметрия напряжений боковых частот на реактивных элементах нарушается. В практике, однако, разница в сопротивлениях реактивных элементов для частот $\omega_0+\Omega$, ω_0 и $\omega_0-\Omega$ настолько мала, что асимметрией можно пренебрегать.

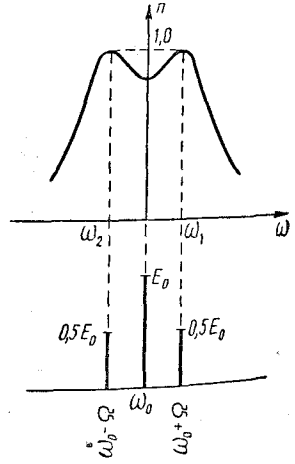


Рис. 9.26

Полученные выше результаты нетрудно распространить на любую колебательную систему, например на связанные контуры. Если резонансная кривая такой системы симметрична относительно несущей частоты ω_0, то правая ветвь этой кривой может рассматриваться как характеристика коэффициента демодуляции (рис. 9.23).

Остановимся на некоторых особенностях прохождения модулированных колебаний через двухконтурную систему при сильной связи контуров. Если $k > k_{кр}$ и на вход системы подаётся эдс, промодулированная на 100%, то при частотах модуляции Ω, соответствующих подъёмам резонансной кривой (ω_1 и ω_2 на рис. 9.26) будет иметь место „перемодуляция". Это объясняется тем, что амплитуды колебаний боковых частот на выходе системы превысят 50% от амплитуды несущего колебания. Форма выходного колебания при перемодуляции показана на рис. 9.27. В точках перехода огибающей амплитуд через нуль фаза колебания изменяется на π. При неточной настройке контуров, т. е. когда $\omega_2 \neq \omega_0$, как и в случае одиночного контура, возникают искажения из-за асимметрии резонансной кривой.

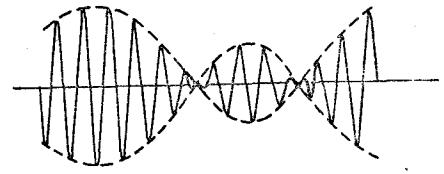


Рис. 9.27

Следует отметить, что в тех случаях, когда некоторые нелинейные искажения сигналов допустимы, иногда идут на умышленное подавление одной из полос боковых частот. Так, например, при передаче телевизионных сигналов с целью сужения общей полосы частот ограничиваются передачей колебания несущей частоты и одной лишь верхней полосы боковых частот.

Найдём форму огибающей при передаче несущего колебания и одной боковой частоты для случая тональной модуляции. Для этого сложим два колебания: $E_0 \sin \omega_0 t$ и $E_1 \sin(\omega_0+\Omega)t$, полагая $E_1 < E_0$

$$e(t) = E_0 \sin \omega_0 t + E_1 \sin(\omega_0+\Omega)t = E_0 \sin \omega_0 t + E_1 [\cos \Omega t \sin \omega_0 t + \sin \Omega t \cos \omega_0 t] = (E_0 + E_1 \cos \Omega t) \sin \omega_0 t + E_1 \sin \Omega t \cdot \cos \omega_0 t.$$

Рассматривая множители при $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ как медленно меняющиеся функции времени, найдём амплитуду суммарного напряжения с помощью выражения

$$E(t) = \sqrt{(E_0 + E_1 \cos \Omega t)^2 + (E_1 \sin \Omega t)^2} = \sqrt{E_0^2 + 2E_1 E_0 \cos \Omega t + E_1^2} = E_0 \sqrt{1 + \frac{2E_1}{E_0} \cos \Omega t + \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2}. \quad (9.65)$$

Если $\frac{E_1}{E_0} \leqslant 0{,}5$, то форма огибающей, как это видно из рис. 9.28, достаточно близка к синусоидальной. С помощью раз-

ложения функции (9.65) в ряд Фурье по периоду $\frac{2\pi}{\Omega}$ нетрудно показать, что при $\frac{E_1}{E_0}=0{,}5$ амплитуда обертона 2Ω составляет 10% от амплитуды основного тона Ω. При доведении $\frac{E_1}{E_0}$ до единицы, огибающая $E(t)$ принимает вид, показанный на рис. 9.28 пунктирной линией.

Если работать с отношением $\frac{E_1}{E_0}\leqslant 0{,}5$, то искажения относительно невелики и не препятствуют сохранению разборчивости речи. Этим пользуются в системах радиотелефонии, основанных на передаче одной боковой полосы частот. В этих системах несущая частота накладывается при приёме от местного гетеродина, вхо-

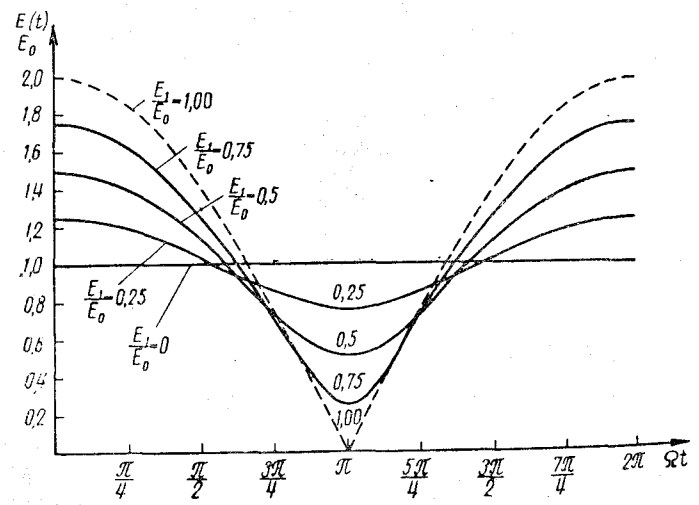


Рис. 9.28

дящего в состав приёмника. Для правильного воспроизведения сигналов частота этого гетеродина должна строго совпадать с несущей частотой передатчика, которая в передатчике подавляется.

Преимущества подобных систем заключаются в сокращении вдвое полосы частот канала связи и в улучшении энергетического режима передатчика, мощность которого может быть полностью использована для передачи одной лишь боковой полосы частот.

§ 9.8. Воздействие высокочастотных импульсов на колебательный контур

Как и в предыдущих параграфах, определим сперва ток $i(t)$, возникающий в последовательном контуре, состоящем из L, C, r при включении в момент $t=0$ синусоидальной электродвижущей силы

$$e(t)=E\sin\omega_0 t.$$

Изображение для эдс в соответствии с ф-лой (9.18) определяется выражением

$$E(p)=E\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}.$$

Сопротивление контура, выраженное в операторной форме,

$$Z(p)=Lp+r+\frac{1}{Cp}=\frac{L}{p}\left(p^2+\frac{r}{L}\,p+\frac{1}{LC}\right).$$

Применяя выражение (9.22), получаем для искомого тока в контуре уравнение

$$i(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{E(p)}{Z(p)}\,e^{pt}\,dp=\frac{E\omega_0}{L}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{p\,e^{pt}\,dp}{(\omega_0^2+p^2)\left(p^2+\frac{r}{L}\,p+\frac{1}{LC}\right)}=$$

$$=\frac{E\omega_0}{L}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{P(p)}{Q(p)}\,dp. \qquad (9.66)$$

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках:

$p_{1,2}=\pm i\omega_0$ — полюсы изображения эдс;

$p_{3,4}=-\frac{r}{2L}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm i\omega_{0k}$ — полюсы коэффициента передачи.

Здесь

$$\alpha=\frac{r}{2L},$$

$\omega_{0k}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}}=\sqrt{\omega_p^2-\alpha^2}$ — собственная частота контура,

$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота контура.

Для определения вычетов в соответствии с ф-лой (9.11) напишем производную от $Q(p)$:

$$Q'(p)=4p^3+6\alpha p^2+2(\omega_0^2+\omega_p^2)\,p+2\alpha\omega_0^2.$$

Подстановка в $\frac{P(p)}{Q'(p)}$ значений p_1, p_2, p_3 и p_4 приводит к следующим выражениям для вычетов в указанных выше полюсах:

$$\text{res}_1 = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2(\omega_p^2-\omega_0^2+i2\alpha\omega_0)},$$

$$\text{res}_2 = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2(\omega_p^2-\omega_0^2-i2\alpha\omega_0)},$$

$$\text{res}_3 = \frac{(-\alpha+i\omega_{0k})\,e^{-(\alpha-i\omega_{0k})t}}{2i\omega_{0k}(\omega_0^2-\omega_{0k}^2+\alpha^2-i2\alpha\omega_{0k})},$$

$$\text{res}_4 = \frac{(-\alpha-i\omega_{0k})\,e^{-(\alpha+i\omega_{0k})t}}{-2i\omega_{0k}(\omega_0^2-\omega_{0k}^2+\alpha^2+i2\alpha\omega_{0k})}.$$

Сумма первых двух вычетов даёт

$$\text{res}_1+\text{res}_2=\frac{L}{\omega_0}\,\frac{\sin(\omega_0 t-\varphi)}{\sqrt{r^2+X^2}},$$

где

$$X=\omega_0 L-\frac{1}{\omega_0 C},$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{X}{r}.$$

С учётом множителя $\frac{E\omega_0}{L}$ перед интегралом в выражении (9.66), сумма $\text{res}_1+\text{res}_2$ даёт установившийся переменный ток

$$i_{уст}(t)=\frac{E}{z}\sin(\omega_0 t-\varphi).$$

Подобным же образом нетрудно показать, что сумма третьего и четвёртого вычетов даёт переходный ток

$$i_{пер}(t)=-\frac{E}{z}\,e^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\cos\varphi\cdot\omega_p^2}{\omega_0\cdot\omega_{0k}}+\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin\varphi\right)\sin\omega_{0k}t-\sin\varphi\cdot\cos\omega_{0k}t\right].$$

Таким образом, полный ток в контуре

$$i(t)=i_{уст}+i_{пер}=\frac{E}{z}\sin(\omega_0 t-\varphi)-$$

$$-\frac{E}{z}\,e^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\cos\varphi\cdot\omega_p^2}{\omega_0\cdot\omega_{0k}}+\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin\varphi\right)\sin\omega_{0k}t-\sin\varphi\cdot\cos\omega_{0k}t\right]. \quad (9.67)$$

При резонансе напряжений, т. е. при $\omega_0=\omega_p$, будем иметь:

$$X=0,\quad \varphi=0,\quad Z=r.$$

В этом случае полный ток в контуре

$$i(t)=\frac{E}{r}\sin\omega_0 t-\frac{E}{r}\,e^{-\alpha t}\cdot\frac{\omega_p}{\omega_{0k}}\sin\omega_{0k}t.$$

Учитывая, что собственная частота ω_{0k} очень мало отличается от резонансной частоты ω_p, получим (при $\omega_{0k}\approx\omega_p$)

$$i(t)=\frac{E}{r}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\sin\omega_0 t. \quad (9.67')$$

В случае включения косинусоидальной эдс, исходя из изображения $E(p)=E\frac{p}{\omega_0^2+p^2}$, получим для тока в контуре

$$i(t)=\frac{E}{z}\cos(\omega_0 t-\varphi)-\frac{E}{z}\,e^{-\alpha t}\left\{\cos\varphi\cdot\cos\omega_{0k}t+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\sin\varphi\cdot\omega_p^2}{\omega_0\cdot\omega_{0k}}-\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\cos\varphi\right]\sin\omega_{0k}t\right\}. \quad (9.68)$$

При резонансе

$$i(t)=\frac{E}{r}\cos\omega_0 t-\frac{E}{r}\,e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_{0k}t-\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin\omega_{0k}t\right].$$

Очевидно, при $\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\ll 1$

$$i(t)\approx\frac{E}{r}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\cos\omega_0 t. \quad (9.68')$$

В общем случае, при произвольной фазе синусоидальной эдс

$$i(t)=\frac{E}{z}\sin(\omega_0 t+\beta-\varphi)-\frac{E}{z}\,e^{-\alpha t}\left\{\sin(\beta-\varphi)\cos\omega_{0k}t+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\cos(\beta-\varphi)\,\omega_p^2}{\omega_0\cdot\omega_{0k}}-\frac{\alpha}{\omega_{0k}}\sin(\beta-\varphi)\right]\sin\omega_{0k}t\right\}.$$

Из выражений (9.67′) и (9.68′) видно, что при совпадении частот ω_0 и ω_p огибающая амплитуд тока нарастает по закону

$$I(t)=\frac{E}{r}\left(1-e^{-\alpha t}\right), \quad (9.69)$$

независимо от фазы эдс в момент включения.

Диаграммы эдс и тока в контуре изображены на рис. 9.29.

На основании предыдущего рассмотрения нетрудно придти к выводу, что при

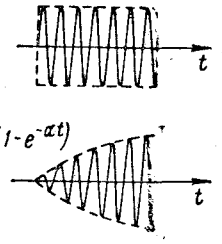


Рис. 9.29

прекращении действия гармонической эдс амплитуда тока в контуре убывает по закону

$$I(t) = \frac{E}{r}\, e^{-\alpha t},$$

а частота заполнения равна собственной частоте контура $\omega_{0\tau}$.

Таким образом, при воздействии на контур высокочастотного импульса с прямоугольной формой огибающей получим картину, изображённую на рис. 9.30.

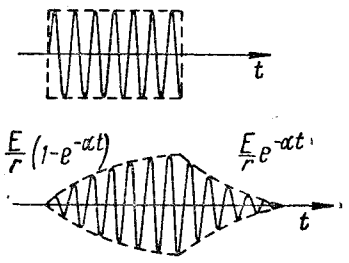


Рис. 9.30

§ 9.9. Приближённый метод исследования переходных процессов в резонансных системах при амплитудной модуляции

Из предыдущего параграфа ясно, что даже в случае простого колебательного контура нахождение точного выражения для тока при включении в контур гармонической эдс требует довольно громоздких выкладок. При более сложных колебательных системах, а также при сложных законах изменения огибающей эдс применение точного метода становится чрезмерно громоздким.

Вместе с тем из выражений (9.67′) и (9.68′) видно, что при использовании упрощений, основанных на малости α по сравнению с $\omega_{0\tau}$ при высокой добротности контура, окончательные выражения для тока в контуре резко упрощаются. Представляется целесообразным ввести аналогичные упрощения в исходные выражения (интеграл Фурье, контурный интеграл и т. д.) и тем самым сделать их более удобными для анализа переходных процессов в любых резонансных (избирательных) системах и при любых законах изменения огибающей эдс.

Покажем, как это можно сделать, сперва на примере включения гармонической эдс в последовательный контур, после чего дадим обобщение метода. С этой целью обратимся к изображению $E(p)$ для косинусоидальной эдс [см. ф-лу (9.19)] и представим его в форме

$$E(p) = \frac{E}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega_0} + \frac{1}{p + i\omega_0}\right).$$

Для эдс имеем выражение

$$e(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{E}{2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}}{p - i\omega_0}\, dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}}{p + i\omega_0}\, dp\right] =$$

$$= E\cos\omega_0 t \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$= 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Подынтегральная функция в первом слагаемом в квадратных скобках имеет полюс в точке $p = i\omega_0$, а во втором — в точке $p = -i\omega_0$. Так как эти слагаемые являются сопряжёнными комплексными величинами, то можно ограничиться одним первым слагаемым, отбросив коэффициент $^1/_2$ и выделив вещественную часть

$$e(t) = E\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}}{p - i\omega_0}\, dp\right].$$

Для получения тока подынтегральную функцию нужно разделить на сопротивление контура $Z(p)$. Вместо того, чтобы подставлять точное выражение, как это было сделано в предыдущем параграфе, воспользуемся приближённым выражением, получаемым из ф-лы (4.27)

$$Z(i\omega) \approx r\,[1 + i(\omega - \omega_p)\,\tau]$$

заменой $i\omega$ на p. Таким образом,

$$Z(p) \approx r\,[1 + (p - i\omega_p)\,\tau]. \tag{9.70}$$

Поэтому искомый ток равен

$$i(t) = \frac{E}{r}\cdot\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{(p - i\omega_0)\,[1 + (p - i\omega_p)\,\tau]}\right]. \tag{9.71}$$

Этому выражению можно придать ещё более простой вид, если перейти к новому переменному,

$$p - i\omega_0 = s. \tag{9.72}$$

Тогда получим

$$i(t) = \frac{E}{r}\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{st}\,ds}{s\{1 + [s + i(\omega_0 - \omega_p)]\,\tau\}}\right]. \tag{9.71′}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию этого выражения. Дробь $\frac{1}{s}$ можно рассматривать как изображение для огибающей, представляющей собой единичный скачок в момент $t = 0$ [см. § 9.2, ф-лу (9.13)].

Выражение

$$Z_1(s) = r\left\{1 + [s + i\Delta\omega_0]\,\tau\right\}, \tag{9.70′}$$

где $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_p$ представляет собой расстройку частоты включаемой эдс относительно резонансной частоты контура, можно рассматривать как сопротивление контура, выраженное через оператор $s = p - i\omega_0$.

Наконец, выражение

$$\overrightarrow{I_1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{st}\,ds}{s\cdot Z_1(s)}, \tag{9.73}$$

являющееся множителем при гармоническом члене $e^{i\omega_0 t}$, можно рассматривать как переходную функцию для огибающей, т. е. как функцию, определяющую закон изменения комплексной огибающей выходного колебания (в данном случае тока) при единичном скачке огибающей эдс на входе.

Вычисление входящего в ф-лу (9.73) интеграла значительно проще, чем интеграла (9.66).

В данном случае имеется всего лишь два полюса; в точке $s_1=0$ и в точке $s_2=-\left(\frac{1}{\tau}+i\Delta\omega_0\right)$, где $\Delta\omega_0=\omega_0-\omega_p$. Вычеты в указанных полюсах равны [см. ф-лу (9.11)]:

$$\text{res}_1=\frac{1}{1+i\Delta\omega_0\tau},$$

$$\text{res}_2=-\frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+i\Delta\omega_0\right)t}}{1+i\Delta\omega_0\tau}.$$

Отсюда находим величину интеграла как сумму вычетов

$$\text{res}_1+\text{res}_2=\frac{1-e^{-\left(\frac{1}{\tau}+i\Delta\omega_0\right)t}}{1+i\Delta\omega_0\tau},$$

и огибающую тока в контуре

$$\overrightarrow{I}(t)=\frac{E}{r}\,\frac{\left[1-e^{-\left(\frac{1}{\tau}+i\Delta\omega_0\right)t}\right]}{1+i\Delta\omega_0\tau}. \tag{9.74}$$

Решение особенно упрощается при совпадении частот ω_0 и ω_p. В этом случае $\Delta\omega_0=0$ и

$$\overrightarrow{I}(t)=\frac{E}{r}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{9.74'}$$

Это выражение совпадает с (9.69).

Если расстройка $\Delta\omega_0\neq 0$, то для определения амплитуды тока нужно найти модуль выражения (9.74).

С помощью несложных преобразований находим

$$I(t)=\frac{E}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta\omega_0\tau)^2}}\sqrt{1-2e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\Delta\omega_0 t+e^{-\frac{2t}{\tau}}}, \tag{9.75}$$

График $\frac{r}{E}\,I\left(\frac{t}{\tau_э}\right)$ приведён на рис. 9.31 для нескольких значений $\Delta\omega_0\tau$. Кривая $\Delta\omega_0\tau=0$ соответствует резонансу. На рис. 9.31 показано, что с увеличением расстройки время установления несколько сокращается, причём огибающая принимает колебательный характер. Физически это можно объяснить тем, что при расстройке частота собственных колебаний (переходного тока), близкая к ω_p, отличается от частоты установившегося тока ω_0, ввиду чего происходят биения.

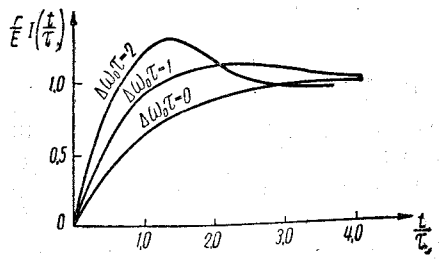


Рис. 9.31

При выключении эдс, когда остаётся одно лишь свободное колебание (рис. 9.30), огибающая имеет вид экспоненциально убывающей кривой, независимо от соотношения частот ω_0 и ω_p.

Теперь нетрудно обобщить развитый выше метод на произвольную колебательную систему и произвольный закон изменения огибающей эдс.

Пусть задана колебательная система с коэффициентом передачи $K(i\omega)$, на вход которой действует высокочастотная эдс с амплитудой, изменяющейся по закону $E(t)$. Предполагается, что частота эдс ω_0 близка к резонансной частоте цепи ω_p. Для определения напряжения на выходе системы выражаем коэффициент передачи $K(i\omega)$ через расстройку

$$\omega-\omega_p=\omega-\omega_0+(\omega_0-\omega_p)=\omega-\omega_0+\Delta\omega_0$$

и полученное приближённое выражение записываем в форме

$$K(i\omega)=K_1(i\omega-i\omega_0+i\Delta\omega_0).$$

Заменяя $i(\omega-\omega_0)$ на s, получаем выражение коэффициента передачи в виде зависимости $K_1(s+i\Delta\omega_0)$.

Применяя, далее, преобразование Лапласа [ф-ла (9.4)] непосредственно к огибающей $E(t)$, находим изображение для огибающей

$$E_{oz}(s)=\int_0^\infty E(t)\,e^{-st}\,ds. \tag{9.76}$$

Тогда огибающая выходного напряжения может быть найдена по выражению вида (9.73)

$$\overrightarrow{U}_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E_{ог}(s)\,K_1(s+i\Delta\omega_0)\,e^{st}\,ds. \qquad (9.77)$$

Если расстройка $\Delta\omega_0 = 0$, то $\overrightarrow{U}_{вых}(t)$ получается вещественной величиной. При наличии расстройки для определения амплитуды выходного напряжения нужно найти модуль $U_{вых}(t)$.

Поясним это на следующем примере. Пусть в момент $t=0$ в первый контур связанной системы включается гармоническая эдс $e(t) = E\cos\omega_0 t$ и требуется найти напряжение на конденсаторе второго контура. Для бóльшей наглядности рассмотрим случай одинаковой настройки обоих контуров на частоту ω_0, т. е. $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_0$.

Для определения $K_1(s+i\Delta\omega_0)$ воспользуемся выражением (5.76)

$$K(i\omega) = \pm Q\cdot\frac{kQ}{k^2Q^2+[1+i(\omega-\omega_p)\tau]^2}.$$

Имея в виду индуктивную связь между контурами, возьмём знак плюс. Так как по условию $\omega_p = \omega_0$, т. е. $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_p = 0$, то $\omega - \omega_p = \omega - \omega_0$. Заменяя $i(\omega-\omega_p)$ на s, получаем

$$K_1(s) = Q\,\frac{kQ}{k^2Q^2+(1+s\tau)^2}.$$

Изображение для огибающей, как и в предыдущем примере,

$$E_{ог}(s) = \frac{E}{s}.$$

Подставляя $E_{ог}(s)$ и $K_1(s)$ в ф-лу (9.77), получаем

$$\overrightarrow{U}_{вых}(t) = Q^2kE\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{st}\,ds}{s[(1+s\tau)^2+k^2Q^2]}.$$

Полюсы подынтегральной функции будут:

$$s_1 = 0,$$

$$s_{2,3} = -\frac{1}{\tau}(1\pm ikQ).$$

Определяя вычеты по ф-ле (9.11), получаем следующее окончательное выражение для огибающей выходного напряжения

$$\overrightarrow{U}_{вых}(t) = \frac{Q^2kE}{(1+k^2Q^2)}\left\{1-e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\frac{1}{kQ}\sin\left(\frac{kQt}{\tau}\right)+\cos\left(\frac{kQt}{\tau}\right)\right]\right\}. \qquad (9.78)$$

В частном случае критической связи ($kQ=1$), получим:

$$U_{вых}(t) = \frac{EQ}{2}\left\{1-e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\sin\frac{t}{\tau}+\cos\frac{t}{\tau}\right]\right\}. \qquad (9.78')$$

Как и следовало ожидать, при симметричной настройке двухконтурной системы на частоту ω_0 огибающая $U_{вых}(t)$ является вещественной функцией от t. Таким образом, выражения (9.78) — (9.78′) определяют непосредственно амплитуду выходного напряжения. График $\frac{U_{вых}(t)}{\frac{QE}{2}}$ для $kQ=1$ изображён на рис. 9.32.

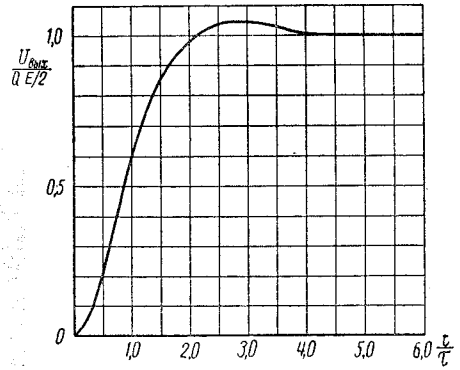


Рис. 9.32

Из вышеизложенного можно заметить, что ур-ние (9.77) приложимо к любым цепям и к любым огибающим $E(t)$ при выполнении следующих двух условий:

а) достаточно высокая частотная избирательность цепи,

б) сгущение спектральной плотности эдс в области частот, близких к резонансной частоте цепи.

Этим условиям удовлетворяют все радиотехнические колебательные системы при передаче через них амплитудно-модулированных колебаний.

§ 9.10. Прохождение частотно-модулированных колебаний через колебательные системы

Сложная структура колебания при ЧМ усиливает, по сравнению с АМ, влияние контуров на форму сигналов. Даже при гармонической (тональной) модуляции частоты спектр модулированного колебания содержит очень большое число пар боковых частот. Если из-за неравномерности частотной и кривизны фазовой характеристик цепи нарушаются нормальные амплитудные и фазовые соотношения между отдельными парами боковых частот, то параметры результирующего колебания на выходе цепи могут отличаться от параметров входного колебания даже при полной симметрии частотных и фазовых характеристик цепи.

Влияние цепи может сказаться:

— в искажении закона изменения мгновенной частоты и мгновенной фазы колебания;

— в изменении амплитуды полезного частотного отклонения $\omega_д$ в зависимости от частоты модуляции Ω и
— в возникновении паразитной амплитудной модуляции.

При детектировании колебания с помощью частотного детектора напряжение на выходе приёмника пропорционально изменению мгновенной частоты колебания. Поэтому искажение закона изменения мгновенной частоты в колебательных контурах передатчика и приёмника приводит к нелинейным искажениям сигнала, проявляющимся на выходе детектора в виде добавочных напряжений с частотами, кратными основной частоте модуляции Ω.

Второе из отмеченных выше изменений параметров частотно-модулированного колебания приводит к неравномерности частотной характеристики радиолинии с ЧМ и, следовательно, к частотным (линейным) искажениям сигнала.

При применении частотной модуляции для передачи сигналов, например в радиовещании и телевидении (звуковое сопровождение), наиболее нежелательными являются нелинейные искажения.

Рассмотрим воздействие электродвижущей силы, частота которой изменяется по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t, \tag{9.79}$$

на резонансную колебательную систему. Амплитуду эдс E_0 считаем строго постоянной, так что эдс можно представить выражением (см. § 3.4):

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t).$$

Комплексный коэффициент передачи цепи обозначим через

$$K(i\omega) = |K(i\omega)|\, e^{+i\varphi(\omega)}.$$

Примерный вид модуля $|K(i\omega)|$ и фазы $\varphi(\omega)$ для обычной резонансной системы изображён на рис. 9.33*а*. Так как выбран знак плюс перед $\varphi(\omega)$, фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ обладает отрицательным наклоном в полосе прозрачности цепи [см. § 6.4 и примечание на стр. 212, гл. 6]. Диаграмма изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ и частотный спектр входной эдс показаны на рис. 9.33*в* и 9.33*б*. Колебательные системы обычно настраиваются на среднюю частоту модулированного колебания, поэтому рис. 9.33 и дальнейшее рассмотрение относятся к случаю

$$\omega_p = \omega_0.$$

Для нахождения колебания на выходе цепи можно, в принципе, воспользоваться таким же способом, как и в случае амплитудной модуляции (см. § 9.7). При этом необходимо учесть изменение амплитуд и фаз для каждой из пар боковых частот эдс в соответствии с кривыми $|K(i\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. Подобный метод,

вполне точный, пригоден, однако, лишь при очень малых индексах модуляции, т. е. в случае, когда состав спектра ЧМ колебания мало отличается от АМ колебания [см. § 3.4]. В практике, однако, чаще всего приходится встречаться с модуляцией, характеризующейся столь большим числом составляющих в используемой полосе частот, что применение спектрального метода сопряжено с большими, иногда непреодолимыми трудностями вычисления. В таких случаях приходится прибегать к приближённым методам, позволяющим, хотя и не вполне точно, находить колебание на выходе цепи по заданному закону изменения мгновенной частоты эдс и по заданным частотно-фазовым характеристикам цепи без разложения эдс в спектр.

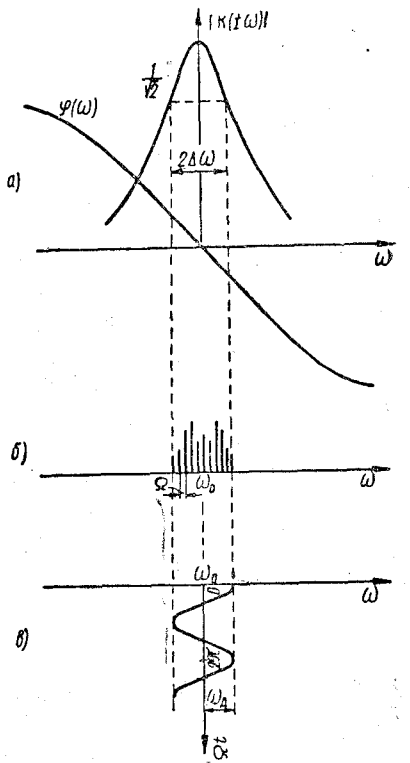


Рис. 9.33

Эти методы, называемые методами „мгновенной“ частоты, основаны на допущении о медленности изменения частоты. Частота модуляции считается настолько малой, что амплитуда и фаза колебания на выходе цепи в каждый момент времени могут быть без большой погрешности определены по частотной и фазовой характеристикам цепи так же, как и в стационарном режиме. Таким образом, принимается, что установление стационарных колебаний на выходе происходит почти одновременно с изменением частоты на входе цепи.

Эти предпосылки тем ближе к истине, чем больше период модуляции $\frac{2\pi}{\Omega}$ и чем меньше постоянная времени цепи τ. Так как последняя обратно пропорциональна полосе пропускания цепи $2\Delta\omega_0$, то одним из условий применимости метода мгновенной частоты является неравенство

$$\frac{\Omega}{\Delta\omega_0} \ll 1.$$

При одной и той же частоте Ω скорость изменения мгновенной частоты эдс зависит от амплитуды частотного отклонения $\omega_д$,

поэтому соблюдения одного лишь этого неравенства ещё недостаточно. Должны быть наложены ограничения и на отношение $\frac{\omega_д}{\Delta\omega_0}$.

Более подробное рассмотрение[1] показывает, что если $\frac{\omega_д}{\Delta\omega_0}$ меньше или близко к единице, то метод мгновенной частоты обеспечивает вполне достаточную для практики точность.

При выполнении перечисленных условий напряжение на выходе цепи можно определить с помощью выражения:

$$u_{вых}(t) = E_0 \operatorname{Re}\left\{ e^{i\psi} \cdot K(i\omega) \right\} = E_0 \cdot |K(i\omega)| \operatorname{Re}\left[e^{i(\psi+\varphi)} \right], \quad (9.80)$$

где $\psi = \omega_0 t + m \sin \Omega t$ — полная фаза эдс на входе цепи [см. § 3.4], а $\varphi(\omega)$ — аргумент коэффициента передачи цепи.

Из этого выражения видно, что амплитуда выходного напряжения изменяется по закону

$$U(t) = E_0 |K(i\omega)| = E_0 |K[i(\omega_0 + \omega_д \cos \Omega t)]|, \quad (9.81)$$

а мгновенная частота по закону:

$$\omega_{вых}(t) = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.82)$$

Так как первый член в правой части этого выражения представляет собой мгновенную частоту входной эдс $\omega(t)$, то величина

$$s(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad (9.83)$$

характеризует влияние рассматриваемой системы на частоту выходного колебания.

Итак,

$$\omega_{вых}(t) = \omega(t) + s(t). \quad (9.82')$$

Если известно уравнение фазовой характеристики $\varphi(\omega)$, то, подставив вместо ω, в соответствии с выражением (9.79), величину

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t$$

и дифференцируя по t, получим общее выражение для $s(t)$:

$$s(t) = \frac{d[\varphi(\omega_0 + \omega_д \cos \Omega t)]}{dt}. \quad (9.83')$$

При периодической модуляции частоты $s(t)$ является также периодической функцией времени и может быть разложена в ряд

[1] См. И. С. Гоноровский „Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях", Связьиздат, 1954.

Фурье. Так как при настройке системы на среднее значение вынуждающей частоты ω_0 фазовая характеристика обычно симметрична относительно ω_0, то ряд Фурье содержит одни лишь нечётные гармоники Ω, 3Ω, 5Ω и т. д. Учитывая, наконец, что при изменении частоты по закону (9.79) производная φ, т. е. $s(t)$, является нечётной функцией времени, приходим к выводу, что ряд Фурье содержит одни лишь синусоидальные члены, т. е.

$$s(t) = S_1 \sin \Omega t + S_3 \sin 3\Omega t + \ldots, \quad (9.84)$$

где S_1, $S_3 \ldots$ и т. д. — амплитуды гармоник функции $s(t)$.

Подставляя выражение (9.84) в (9.82'), получаем:

$$\omega_{вых}(t) = \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t + S_1 \sin \Omega t + S_3 \sin 3\Omega t + \ldots =$$
$$= \omega_0 + \sqrt{\omega_д^2 + S_1^2} \cos(\Omega t - \gamma) + S_3 \sin 3\Omega t + \ldots \quad (9.85)$$

Сопоставление выражений (9.85) и (9.79) позволяет сделать вывод о том, что влияние цепи на выходное колебание заключается:

— в увеличении девиации на основной частоте сигнала Ω в $\sqrt{1 + \left(\frac{S_1}{\omega_д}\right)^2}$ раз;

— в запаздывании фазы сигнала на угол γ, определяемый выражением:

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{S_1}{\omega_д};$$

— в возникновении нечётных гармоник в изменении мгновенной частоты.

Как отмечалось выше, наибольшее значение имеет обычно последнее обстоятельство.

Приложим полученные результаты к двум случаям: одиночному колебательному контуру и двухконтурной связанной системе.

1. *Одиночный контур*

Подразумевая под $K(i\omega)$ отношение комплексной амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде вводимой последовательно в контур эдс, получим

$$K(i\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{r[1 + i(\omega - \omega_0)\tau]}.$$

Учитывая, что

$$\omega - \omega_0 = \omega_д \cos \Omega t$$

и пренебрегая изменением ω в числителе, так как $\omega_д$ обычно очень мало по сравнению с ω_0, можем написать:

$$K(i\omega)=\frac{Q}{i(1+i\omega_д\tau\cos\Omega t)}=\frac{Q}{\sqrt{1+(\omega_д\tau\cos\Omega t)^2}}e^{i\varphi}, \tag{9.86}$$

где

$$\varphi=-\left[\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc tg}(\omega_д\tau\cdot\cos\Omega t)\right].$$

На основании соотношения (9.83′) находим

$$s(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\Omega\omega_д\tau\sin\Omega t}{1+\omega_д^2\tau^2\cos^2\Omega t}. \tag{9.87}$$

Применяя ф-лу (2.6), находим:

$$S_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}s(t)\sin\Omega t\,d\Omega t,$$

$$S_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}s(t)\sin 3\Omega t\,d\Omega t.$$

Произведя интегрирование, получим следующие окончательные формулы [1] для амплитуд первой и третьей гармоник функции $s(t)$:

$$S_1=\frac{2}{m\tau}\left(\sqrt{1+\omega_д^2\tau^2}-1\right), \tag{9.88}$$

$$S_3=\frac{2}{m\tau}\left(1-\frac{1+0{,}5\,\omega_д^2\tau^2}{\sqrt{1+\omega_д^2\tau^2}}\right). \tag{9.89}$$

Здесь

$$m=\frac{\omega_д}{\Omega}.$$

Далее, по ф-ле (9.85) находим фазовый сдвиг для сигнала:

$$\gamma=\operatorname{arc tg}\frac{S_1}{\omega_д}=\operatorname{arc tg}\left[\frac{2}{m\omega_д\tau}\left(\sqrt{1+\omega_д^2\tau^2}-1\right)\right]. \tag{9.90}$$

Теперь нетрудно определить коэффициент нелинейных искажений по третьей гармонике, который получится после детектирования частотно-модулированного колебания. Для этого нужно разделить амплитуду S_3 третьей гармоники функции $s(t)$ на амплитуду $\sqrt{\omega_д^2+S_1^2}$ основной частоты Ω [см. ф-лу (9.85)]. Так как обычно $S_1\ll\omega_д$, то можно отбросить S_1 по сравнению с $\omega_д$ и написать

$$K_3=\frac{S_3}{\omega_д}=\frac{2}{m\omega_д\tau}\left(1-\frac{1+0{,}5\,\omega_д^2\tau^2}{\sqrt{1+\omega_д^2\tau^2}}\right). \tag{9.91}$$

[1] В формуле для S_3 отброшены члены более высоких порядков малости.

График зависимости $mK_3(\omega_д\tau)$ избражён на рис. 9.34. При $\omega_д\tau\ll 1$ ф-лы (9.90) и (9.91) приводят к простым соотношениям:

$$\gamma\approx\Omega\tau, \tag{9.90′}$$

$$K_3\approx\frac{(\omega_д\tau)^3}{4m}. \tag{9.91′}$$

При $\omega_д\tau\to 1$ (но $m\gg 1$), т. е. при девиации почти равной полосе пропускания контура,

$$\gamma=\frac{0{,}8}{m},\quad K_3\approx\frac{1}{8m}.$$

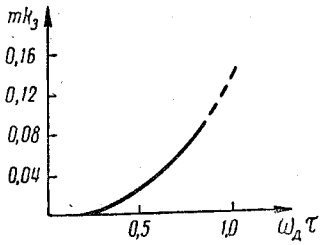


Рис. 9.34

Итак, в условиях, когда метод мгновенной частоты применим, предельные искажения в одиночном контуре не превышают долей процента.

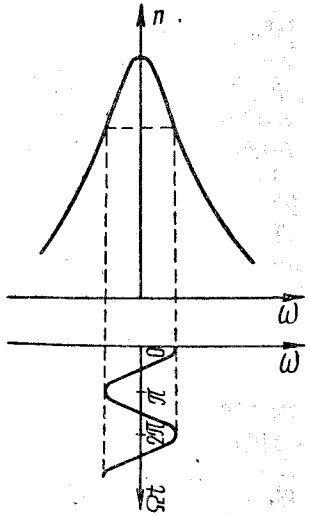
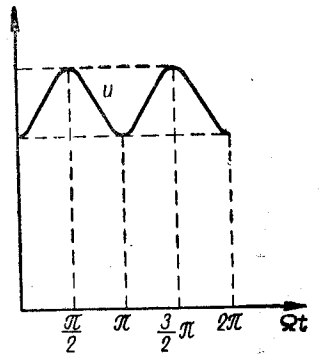


Рис. 9.35



Нетрудно найти амплитудные изменения выходного колебания. Для этого можно воспользоваться резонансной кривой контура и произвести построение, показанное на рис. 9.35. Нетрудно видеть, что основная частота изменения огибающей амплитуд U вдвое превышает частоту модуляции Ω.

2. *Система двух связанных контуров*

В данном случае под $K(i\omega)$ подразумевается отношение комплексной амплитуды напряжения на конденсаторе второго контура к амплитуде эдс, вводимой в первый контур. В соответствии

с ф-лой (5.56′) для критической связи двух одинаковых контуров, фазовая характеристика коэффициента передачи определяется выражением [1]:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{2(\omega-\omega_0)\tau}{2-[(\omega-\omega_0)\tau]^2} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{2\omega_д\tau\cos\Omega t}{2-(\omega_д\tau\cos\Omega t)^2},$$

откуда

$$s(t) = \frac{2\omega_д\tau\Omega\sin\Omega t\,(2+\omega_д^2\tau^2\cos^2\Omega t)}{4+\omega_д^4\tau^4\cos^4\Omega t}. \qquad (9.92)$$

Для сравнения с одиночным контуром ограничимся малыми величинами $\omega_д\tau \ll 1$. Вместо выражения (9.92) можно будет написать

$$s(t) \approx \omega_д\tau\Omega\sin\Omega t\left(1+\frac{\omega_д^2\tau^2\cos^2\Omega t}{2}\right). \qquad (9.92')$$

Сравнивая это выражение с ф-лой (9.87), которая при малых $\omega_д\tau$ может быть представлена в форме:

$$s(t) \approx \Omega\omega_д\tau\sin\Omega t\,(1-\omega_д^2\tau^2\cos^2\Omega t),$$

приходим к выводу, что в случае двух связанных контуров ($kQ=1$) коэффициент нелинейных искажений в два раза меньше, чем при использовании каждого из контуров порознь. Это, естественно, вытекает из того факта, что полоса пропускания двухконтурной системы при $kQ=1$ в $\sqrt{2}$ раз больше, чем у одного контура. Если исходить из одной и той же полосы пропускания, для чего потребуется в случае связанной системы увеличить τ в $\sqrt{2}$ раз, то искажения будут в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в одном контуре [2].

§ 9.11. Переходные явления в системах с распределёнными постоянными. Основные уравнения

Цепи с распределёнными постоянными, хотя и являются линейными системами, обладают некоторыми особенностями, которые затрудняют применение спектрального метода исследования переходных процессов в том виде, в каком это удобно для цепей с сосредоточенными постоянными.

В гл. 7 было показано, что распределение токов и напряжений в линии конечной длины сильно зависит от частоты

[1] Знак минус здесь взят потому, что в выражении для $K(i\omega)$ аргумент входит со знаком плюс (см. стр. 212).

[2] При $kQ \ll 1$, т. е. при очень слабой связи, искажения по величине приближаются к искажениям в системе, состоящей из двух разделенных контуров.

(за исключением случая согласованной нагрузки на омическое сопротивление $R=\rho$). При разложении электродвижущей силы, действующей на входе линии, на отдельные гармонические составляющие выражение для входного сопротивления линии оказывается очень сложной функцией частоты. При широком спектре сигнала суммирование токов и напряжений для нахождения распределения результирующих токов или напряжений является весьма сложной задачей.

Более целесообразно искать решение непосредственно в виде волн, распространяющихся вдоль линии при появлении на её входе сигнала. Эта задача успешно решается с помощью операторного метода.

Как и в предыдущих параграфах данной главы, для выявления основных черт переходных процессов, сопровождающих передачу импульсных сигналов, достаточно рассмотреть процессы включения электродвижущей силы на входе линии. Вывод исходных уравнений для устанавливающегося режима в линии при включении в момент $t=0$ произвольной электродвижущей силы $e(t)$ внешне совпадает с обычным выводом для стационарного режима при гармоническом возбуждении линии (см. § 7.2). В основу анализа можно положить обычные телеграфные ур-ния (7.3):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0\\ \frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu=0\end{aligned}\right\}. \qquad (7.3)$$

Постоянные линии R, G, L и C считаются неизменными по длине, т. е. линия рассматривается как однородная.

Не делая пока никаких допущений относительно характера функций времени $u_x(t)$ и $i_x(t)$ и применяя к ним преобразование Лапласа, получим вместо ур-ний (7.3) следующие:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU(p)}{dx}+Lp\,I(p)+RI(p)=0\\ \frac{dI(p)}{dx}+Cp\,U(p)+GU(p)=0\end{aligned}\right\}. \qquad (9.93)$$

При интегрировании этих уравнений принимаем p за параметр и считаем его не зависящим от x. Дифференцируя первое ур-ние (9.93) по x и подставляя $\frac{dI(p)}{dx}$ из второго ур-ния (9.93), получим:

или

$$(Cp+G)(Lp+R)\,U(p)=\frac{d^2U(p)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2U(p)}{dx^2}-\gamma^2(p)\,U(p)=0, \qquad (9.94)$$

где

$$\gamma(p)=\sqrt{(Cp+G)(Lp+R)}. \tag{9.95}$$

Подобным же образом может быть составлено уравнение для тока:

$$\frac{d^2I(p)}{dx^2}-\gamma^2(p)I(p)=0. \tag{9.96}$$

Из сопоставления выражения (9.95) с выражением (7.10) видно, что $\gamma(p)$ представляет собой постоянную распространения. В отличие от случая гармонического возбуждения, здесь $i\omega$ заменено на p. В дальнейшем для удобства записи применяем обозначение $\gamma=\gamma(p)$.

Решение ур-ний (9.94) — (9.96), как и аналогичных ур-ний (7.7′) — (7.8′), можно представить в форме:

$$U(p)=A_1(p)\,e^{-\gamma x}+A_2(p)\,e^{+\gamma x}, \tag{9.97}$$

$$I(p)=B_1(p)\,e^{-\gamma x}+B_2(p)\,e^{\gamma x}. \tag{9.98}$$

В этих выражениях $A_1(p)$ и $A_2(p)$, а также $B_1(p)$ и $B_2(p)$ представляют собой постоянные величины, зависящие от граничных условий на концах линии.

Первые члены в ур-ниях (9.97) и (9.98), затухающие в направлении положительных значений x, представляют собой волны напряжения и тока, движущиеся от начала линии к её концу. Члены, содержащие множитель $e^{\gamma x}$, представляют собой волны, движущиеся от конца линии к её началу.

Как и в случае стационарного режима (см. § 7.2), постоянные $B_1(p)$ и $B_2(p)$ связаны с соответствующими постоянными $A_1(p)$ и $A_2(p)$.

Подставляя выражения (9.97) — (9.98) в ур-ния (9.93) и решая полученные уравнения, исключаем из них $B_1(p)$ и $B_2(p)$.

В результате получаются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} B_1(p)&=\frac{A_1(p)}{W(p)}\\ B_2(p)&=-\frac{A_2(p)}{W(p)}\end{aligned}\right\}, \tag{9.99}$$

где

$$W(p)=\sqrt{\frac{R+Lp}{G+Cp}} \tag{9.100}$$

представляет собой характеристическое сопротивление линии, записанное в операторной форме. При замене p на $i\omega$ это сопротивление переходит в обычное характеристическое сопротивление для стационарного режима [см. выражение (7.14′)]. Как и в случае γ, в дальнейшем вместо $W(p)$ будем писать просто W.

Подставляя соотношения (9.99) в ур-ния (9.97)—(9.98), получим следующую пару уравнений, выраженных только через две постоянные интегрирования $A_1(p)$ и $A_2(p)$:

$$\left.\begin{aligned} U(p)&=A_1(p)\,e^{-\gamma x}+A_2(p)\,e^{\gamma x}\\ I(p)&=\frac{A_1(p)}{W}\,e^{-\gamma x}-\frac{A_2(p)}{W}\,e^{\gamma x}\end{aligned}\right\}. \tag{9.101}$$

Уравнения (9.101) являются исходными для дальнейшего анализа переходных явлений в линии. Для перехода от изображений $U(p)$ и $I(p)$ к мгновенным значениям $u(t)$ и $i(t)$ можно применять обратное преобразование Лапласа, как это изложено в § 9.2.

§ 9.12. Первая падающая волна при включении произвольного напряжения

Допустим, что явления в линии рассматриваются хронологически, начиная с момента включения возбуждающей эдс. Тогда на первом этапе процесса установления, от момента $t=0$ до момента t_1 прихода волны к концу линии, отражённые волны в линии ещё отсутствуют и в решении (9.101) можно ограничиться первыми членами. При этом $A_1(p)$ имеет, очевидно, смысл напряжения (точнее изображения напряжения) в начале линии. Обозначив это напряжение через $U_0(p)=A_1(p)$, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} U(p)&=U_0(p)\,e^{-\gamma x}\\ I(p)&=\frac{U_0(p)}{W}\,e^{-\gamma x}\end{aligned}\right\} \tag{9.102}$$

при

$$0<t<t_1.$$

Обратимся теперь к выражению (9.95) для постоянной распространения γ и приведём его к виду

$$\gamma=\sqrt{LCp^2+(GL+CR)p+GR}=$$
$$=\sqrt{LC}\cdot\sqrt{p^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)p+\frac{GR}{CL}}.$$

Введём обозначения:

$$v=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{9.103}$$

$$\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right), \tag{9.104}$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right). \tag{9.105}$$

При этих обозначениях постоянную распространения можно представить в форме:

$$\gamma = \frac{1}{v}\sqrt{(p+\delta)^2-\sigma^2}, \tag{9.106}$$

и ур-ния (9.102) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} U(p) &= U_0(p)\,e^{-\frac{x}{v}\sqrt{(p+\delta)^2-\sigma^2}} \\ I(p) &= \frac{U_0(p)}{W}\,e^{-\frac{x}{v}\sqrt{(p+\delta)^2-\sigma^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9.107}$$

при

$$0 < t < t_1.$$

Дальнейший ход решения зависит от соотношения между параметрами линии, а также от структуры $U_0(p)$, т. е. от спектра сигнала, передаваемого по линии.

Использование точного уравнения (9.107) оказывается иногда оправданным в технике проводной связи, когда необходимо учитывать искажение формы телеграфных сигналов в кабельных линиях большой протяжённости.

Применяемые в высокочастотной технике линии обычно характеризуются относительно малой протяжённостью и относительно малыми потерями на единицу длины. Целесообразно поэтому упростить выражение (9.107), считая условно потери равными нулю. Полученное с таким допущением решение может быть затем уточнено учётом затухания амплитуд вдоль линии.

Итак, для линии без потерь, когда $R=0$, $G=0$ и, следовательно, $\delta=\sigma=0$, а $W=\sqrt{\frac{L}{C}}=\rho$, ур-ния (9.107) переходят в следующие:

$$\left.\begin{aligned} U(p) &= U_0(p)\,e^{-\frac{x}{v}p} \\ I(p) &= \frac{U_0(p)}{\rho}\,e^{-\frac{x}{v}p} \end{aligned}\right\}. \tag{9.108}$$

Искомые мгновенные значения напряжения и тока легко определяются с помощью выражения вида (9.5).

Для напряжения в точке линии на расстоянии x от начала имеем:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U_0(p)\,e^{-\frac{x}{v}p}e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U_0(p)\,e^{\left(t-\frac{x}{v}\right)p}\,dp. \tag{9.109}$$

В соответствии с правилом образования замкнутого контура интегрирования (см. § 9.2) интеграл в правой части выражения (9.109) при $t<\frac{x}{v}$ обращается в нуль. Таким образом, независимо от характера приложенного к линии напряжения $u_0(t)$, напряжение в точке x возникает в момент $t=\frac{x}{v}$. Величина v, определяемая ф-лой (9.103), представляет собой скорость движения волны вдоль линии.

Отметим, что выражение (9.103) совпадает с выражением (7.22), определяющим скорость распространения синусоидальной волны вдоль линии без потерь в стационарном режиме. В § 7.2 при истолковании ф-лы (7.22) уже отмечалось, что в линии без потерь скорость v не зависит от частоты. Этим и объясняется, что полученная выше скорость распространения сложного сигнала не зависит от его частотного спектра. Из этого вытекает следующее важное положение: при распространении сигнала вдоль линии без потерь форма его остаётся неизменной.

При $t>\frac{x}{v}$ напряжение в точке x определяется путём суммирования вычетов в полюсах функции $U_0(p)$. В частности, при включении на линию, в момент $t=0$, постоянного напряжения $u_0(t)=U_0$, когда изображение $U_0(t)$ в соответствии с (9.13) равно

$$U_0(p) = \frac{U_0}{p},$$

находим [см. ф-лы (9.8) — (9.9)]:

$$\left.\begin{aligned} u(t) = U_0\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\left(t-\frac{x}{v}\right)p}}{p}\,dp &= U_0 \quad \text{при} \quad t>\frac{x}{v} \\ &= 0 \quad \text{при} \quad t<\frac{x}{v} \end{aligned}\right\}. \tag{9.110}$$

Аналогично нетрудно получить выражение для мгновенного значения тока в сечении линии, отстоящем на расстоянии x от начала:

$$\left.\begin{aligned} i(x) &= \frac{U_0}{\rho} \quad \text{при} \quad t>\frac{x}{v} \\ &= 0 \quad \text{,,} \quad t<\frac{x}{v} \end{aligned}\right\}. \tag{9.111}$$

Полученные результаты нетрудно распространить и на ,,неискажающую'' линию [см. выражение (7.47)], т. е. на случай, когда

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

При этом σ обращается в нуль и выражения (9.107) переходят в следующие:

$$\left.\begin{aligned} U(p) &= U_0(p)\, e^{-\frac{x}{v}(p+\delta)} \\ I(p) &= \frac{U_0(p)}{\rho} e^{-\frac{x}{v}(p+\delta)} \end{aligned}\right\}. \qquad (9.112)$$

Применяя выражения (9.5), (9.8) и (9.9), получим:

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot e^{-\frac{\delta}{v}x} \\ i(t) &= \frac{U_0}{\rho} \cdot e^{-\frac{\delta}{v}x} \end{aligned}\right\} \qquad (9.113)$$

при

$$t > \frac{x}{v}.$$

Уравнения (9.113) показывают, что волна напряжения (или тока) в случае $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ имеет вид, показанный на рис. 9.36. Эта волна характеризуется неискажённым фронтом, достигающим точки x в момент времени $t = \frac{x}{v}$. При $t > \frac{x}{v}$ напряжение и ток в рассматриваемом сечении будут иметь постоянные значения, определяемые выражениями (9.113).

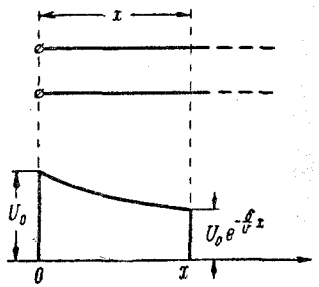


Рис. 9.36

При включении в момент $t=0$ синусоидального напряжения

$$u(t) = U \sin \omega_0 t,$$

изображение которого в соответствии с (9.18) будет:

$$U(p) = U \frac{\omega}{\omega_0^2 + p^2},$$

применение выражений (9.8) — (9.9) даёт в случае неискажающей линии:

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= U e^{-\frac{\delta}{v}x} \sin \omega_0 \left(t - \frac{x}{v}\right) \\ i(t) &= \frac{U}{\rho} e^{-\frac{\delta}{v}x} \sin \omega_0 \left(t - \frac{x}{v}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (9.114)$$

при

$$t > \frac{x}{v}.$$

При подстановке $\delta = 0$ получится решение для линии без потерь.

Волна напряжения в неискажающей линии при включении синусоидального напряжения изображена на рис. 9.37. Фронт волны перемещается в направлении положительных x со скоростью v.

Если зафиксировать какое-либо сечение x, то, начиная с момента $t = \frac{x}{v}$, напряжение и ток в рассматриваемом сечении будут изменяться по закону (9.114). Амплитуды будут в $e^{-\frac{\delta}{v}x}$ раз меньше, чем в начале линии, а фазы будут отставать на угол $\varphi = \frac{\omega_0 x}{v}$ от фазы колебаний в начале линии.

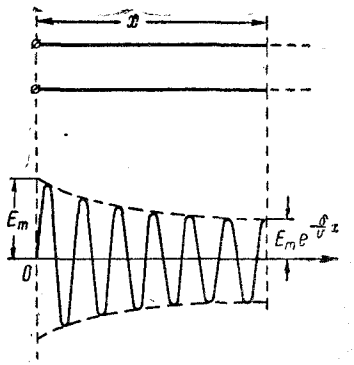


Рис. 9.37

При длине линии l фронт волны достигает конца линии за время $t_1 = \frac{l}{v}$. Следовательно, сделанное выше допущение об отсутствии в линии отражённых волн справедливо для промежутка времени от 0 до t_1. В последующие моменты времени на напряжение и токи, определяемые выражениями (9.102), должны быть наложены волны, получающиеся в результате отражений у концов линии. Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

Рассмотрим предварительно влияние внутреннего сопротивления генератора, питающего линию. В приведённых выше выражениях под $u_0(t)$ и $U_0(p)$ подразумевались, соответственно, напряжение и его изображение на входе линии. Допустим теперь, что генератор, питающий линию, обладает внутренним сопротивлением $Z_г(i\omega)$, в общем случае комплексным.

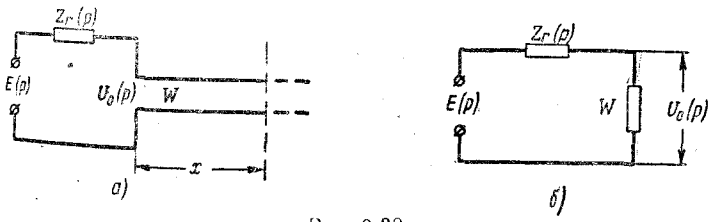


Рис. 9.38

Переходя от эдс $e(t)$ генератора к его изображению $E(p)$ и от $Z_г(i\omega)$ к $Z_г(p)$, получим схему питания линии, изображённую на рис. 9.38*а*. В пределах $0 < t < \frac{2l}{v}$, т. е. до прихода к генератору первой отражённой от конца линии волны, схема рис. 9.38*а* может быть сведена к эквивалентной схеме рис. 9.38*б*, в которой линия

заменена сопротивлением W. Напряжение на входных зажимах линии $U_0(p)$ при этом будет:

$$U_0(p) = E(p)\,\frac{W}{Z_2(p)+W}. \tag{9.115}$$

Подставляя это выражение в ур-ние (9.102), получим в об. щем случае:

$$\left.\begin{aligned} U(p) &= E(p)\,\frac{W}{Z_2(p)+W}\,e^{-\gamma x} \\ I(p) &= \frac{E(p)}{Z_2(p)+W}\,e^{-\gamma x} \end{aligned}\right\}. \tag{9.116}$$

Подставляя сюда $W=\rho$ и $\gamma=\frac{p}{v}$ или $\gamma=\frac{p+\delta}{v}$, получим соответствующие выражения для линии без потерь или для линии без искажений.

В частности, при включении постоянного напряжения $e(t)=E$ и при активном внутреннем сопротивлении генератора R_2, получим следующие выражения:

для линии без потерь, вместо ур-ния (9.110),

$$\left.\begin{aligned} u_x(t) &= E\,\frac{\rho}{R_2+\rho} \quad \text{при} \quad t>\frac{x}{v} \\ &= 0 \qquad\quad ,, \qquad t<\frac{x}{v} \end{aligned}\right\}, \tag{9.110'}$$

для линии без искажений вместо ур-ния (9.113),

$$\left.\begin{aligned} U_x(t) &= E\,\frac{\rho}{R_2+\rho}\,e^{-\frac{\delta}{v}x} \quad \text{при} \quad t>\frac{x}{v} \\ &= 0 \qquad\quad ,, \qquad t<\frac{x}{v} \end{aligned}\right\}. \tag{9.113'}$$

Аналогичное выражение нетрудно написать и для включения синусоидальной эдс.

§ 9.13. Отражение волны у конца линии

Рассмотрим отрезок однородной линии длиной l, нагруженный на конце произвольным сопротивлением $Z(p)$ (рис. 9.39). Функция $E(p)$ представляет собой, как и в предыдущем параграфе, изображение Лапласа для произвольной эдс $e(t)$, действующей при $t\geqslant 0$.

Рассмотрение явлений в линии начнём с момента времени $t_1=\frac{l}{v}$, когда фронт волны достигает конца линии. При подходе к сопротивлению $Z(p)$ падающая волна напряжения в соответствии с ф-лой (9.112) определяется выражением (при $x=l$):

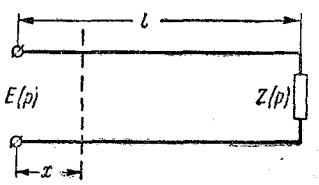


Рис. 9.39

$$U_{ln}(p) = E(p)\,e^{-\frac{\delta}{v}l}\,e^{-p\frac{l}{v}}. \tag{9.117}$$

При определении напряжения на сопротивлении $Z(p)$ необходимо учитывать отражённую волну, возникающую в точках, где нарушается однородность линии. Обозначим отражённую волну напряжения через $U_{xo}(p)$. Тогда напряжение $U_{lo}(p)$ этой волны в точке $x=l$, совместно с падающей волной $U_{ln}(p)$, должно удовлетворять условию:

$$U_Z(p) = U_{ln}(p) + U_{lo}(p), \tag{9.118}$$

где $U_Z(p)$ — результирующее напряжение на сопротивлении $Z(p)$.

Подобное выражение можно написать и для токов:

$$I_Z(p) = I_{ln}(p) + I_{lo}(p), \tag{9.119}$$

где $I_Z(p)=\frac{U_Z(p)}{Z(p)}$ — ток через сопротивление $Z(p)$, а $I_{ln}(p)$ и $I_{lo}(p)$ соответствуют падающей и отражённой волнам токов, причём согласно выражению (9.101):

$$I_{ln}(p) = \frac{U_{ln}(p)}{\rho},$$

$$I_{lo}(p) = -\frac{U_{lo}(p)}{\rho}.$$

Таким образом, выражение (9.119) приводится к виду:

$$\frac{U_Z(p)}{Z(p)} = \frac{U_{ln}(p)-U_{lo}(p)}{\rho}$$

или

$$\frac{\rho}{Z(p)}\,U_Z(p) = U_{ln}(p) - U_{lo}(p). \tag{9.120}$$

Складывая выражения (9.118) и (9.120), получим:

$$U_Z(p) = \frac{Z(p)}{Z(p)+\rho}\cdot 2\,U_{ln}(p). \tag{9.121}$$

Подставляя выражение (9.121) в ф-лу (9.118), легко найдём напряжение

$$U_{lo}(p) = \frac{Z(p)-\rho}{Z(p)+\rho}\,U_{ln}(p) = \mu(p)\,U_{ln}(p). \tag{9.122}$$

Отношение

$$\mu(p) = \frac{Z(p)-\rho}{Z(p)+\rho} \tag{9.123}$$

можно назвать переходным коэффициентом отражения.

Как и при установившемся режиме, переходный коэффициент отражения $\mu(p)=1$ для разомкнутой на конце линии $[Z(p)=\infty]$ и $\mu(p)=-1$ для короткозамкнутой линии $[Z(p)=0]$.

Величина $U_{lo}(p)$, как указывалось выше, представляет собой изображение для отражённой волны напряжения в точке $x=l$. При удалении от конца линии отражённая волна по аналогии с ф-лой (9.112) определяется выражением:

$$U_{xo}(p)=U_{lo}(p)\,e^{-\frac{(\delta+p)(l-x)}{v}}=$$

$$=\mu(p)\cdot U_{ln}(p)\,e^{-\frac{\delta}{v}(l-x)}\cdot e^{-\frac{p(l-x)}{v}}. \qquad (9.124)$$

Складывая это напряжение с $U_{xn}(p)$, можно найти результирующее напряжение в любом сечении линии в промежутке времени от $t=\frac{l}{v}$ до $t=\frac{2l}{v}$.

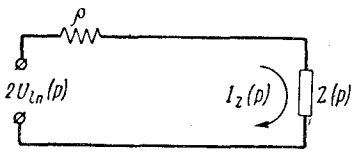


Рис. 9.40

Выражения (9.121) и (9.124) полностью решают задачу определения напряжения (или тока) на сопротивлении $Z(p)$ и в отражённой волне. Формула (9.121), в частности, показывает, что при определении тока через сопротивление $Z(p)$ можно исходить из эквивалентной схемы рис. 9.40, в которой линия, питающая нагрузку $Z(p)$, заменяется генератором с эдс $2U_{ln}(p)$ и внутренним сопротивлением ρ, включаемым в схему в момент $t=\frac{l}{v}$.

Рассмотрим важный для практики пример. К отрезку линии, нагружённому на конце резонансным колебательным контуром (рис. 9.41), в момент $t=0$ прикладывается напряжение $e(t)=E\sin\omega_0 t$.

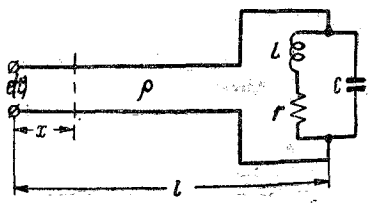


Рис. 9.41

Напряжение падающей волны в точке $x=l$ в соответствии с выражением (9.114) равно:

$$u_{ln}(t)=Ee^{-\frac{\delta}{v}l}\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right) \qquad (9.125)$$

при $t\geqslant\frac{l}{v}$.

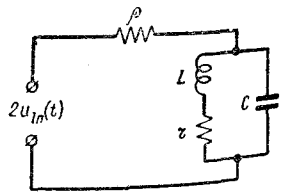


Рис. 9.42

Основываясь на ф-ле (9.121), сведём схему рис. 9.41 к эквивалентной схеме (рис. 9.42), для которой эдс равна $2u_{ln}(t)$. Для определения напряжения $u_к(t)$ на контуре воспользуемся общим выражением (9.22), в котором под $E(p)$ нужно понимать изображение для эдс $2u_{ln}(t)$, а под коэффициентом передачи $K(p)$ следующее отношение:

$$K(p)=\frac{Z(p)}{\rho+Z(p)}.$$

Составим выражение для $E(p)$. Применяя к выражению (9.125) ф-лу (9.18) и учитывая правило (9.20), получим:

$$E(p)=2Ee^{-\frac{\delta}{v}l}\cdot\frac{\omega_0 e^{-\frac{pl}{v}}}{\omega_0^2+p^2}.$$

Далее

$$Z(p)=\frac{r+Lp}{1+rCp+LCp^2}\approx\frac{Lp}{1+rCp+LCp^2}.$$

Следовательно,

$$K(p)=\frac{1}{C\rho}\cdot\frac{p}{\left[p^2+\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{\rho C}\right)p+\frac{1}{LC}\right]}.$$

Подставляя найденные выражения для $E(p)$ и $K(p)$ в выражение (9.22), будем иметь:

$$U_к(t)=\frac{2Ee^{-\frac{\delta}{v}l}}{C\rho}\cdot\omega_0\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{pe^{p\left(t-\frac{l}{v}\right)}}{\left[p^2+\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{\rho C}\right)p+\frac{1}{LC}\right](\omega_0^2+p^2)}dp.$$

Полученное выражение отличается от выражения (9.66) только постоянным коэффициентом $\left(\frac{2E}{C}e^{-\frac{\delta}{v}l}\right.$ вместо $\left.\frac{1}{L}\right)$, а также величиной, определяющей затухание. Вследствие шунтирования контура линией, полное затухание контура:

$$\alpha_э=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{\rho C}\right),$$

поэтому в случае резонанса $\left(\omega_0=\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$, подобно выражению (9.67'), получим:

$$u_к(t)=\frac{2Ee^{-\frac{\delta}{v}l}}{C\rho}\cdot\frac{1}{2\alpha_э}\left[1-e^{-\alpha_э\left(t-\frac{l}{v}\right)}\right]\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right).$$

Подставляя сюда выражение для $\alpha_э$ и учитывая, что $\frac{L}{Cr}=Z_p$ представляет собой резонансное сопротивление собственно контура, получим следующее окончательное выражение:

$$u_к(t)=2Ee^{-\frac{\delta}{v}l}\frac{Z_p}{Z_p+\rho}\left[1-e^{-\alpha_э\left(t-\frac{l}{v}\right)}\right]\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right). \quad (9.126)$$

Допустим, что контур согласован с линией, т. е. что резонансное сопротивление контура (в стационарном режиме) равно волновому сопротивлению линии. Тогда $\frac{r}{L}=\frac{1}{Z_pC}=\frac{1}{\rho C}$ и выражение (9.126) переходит в следующее:

$$u_к(t)=Ee^{-\frac{\delta l}{v}}\left[1-e^{-\frac{\left(t-\frac{l}{v}\right)}{C\rho}}\right]\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right) \quad (9.126')$$

при

$$\frac{l}{v}<t<\frac{2l}{v}.$$

После того как свободное колебание в контуре, вызванное ударом падающей волны в момент $t=\frac{l}{v}$, затухает, на контуре устанавливается стационарное напряжение, соответствующее одной лишь падающей волне в точке $x=l$:

$$u_{к.\,ст}(t)=Ee^{-\frac{\delta}{v}l}\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right). \quad (9.126'')$$

Можно поэтому считать, что время, необходимое для установления режима в согласованной на конце линии, определяется постоянной времени резонансного контура. При определении затухания контура должно быть учтено шунтирующее действие линии, т. е. $\alpha_э$ необходимо определять по формуле:

$$\alpha_э=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{C\rho}\right)=\frac{r}{L}=\frac{1}{C\rho}.$$

Составим выражение для отражённой волны напряжения. Для этого можно воспользоваться общей ф-лой (9.124). В данном примере, после того как найдены $u_{п0}(t)$ и $u_к(t)$, это можно выполнить проще на основании очевидного соотношения [см. ф-лу (9.118)]:

$$u_{lo}(t)=u_к(t)-u_п(t).$$

Из сопоставления выражений (9.125) и (9.126″) непосредственно следует, что у конца линии отражённая волна напряжения будет:

$$u_{lo}(t)=-Ee^{-\frac{\delta}{v}l}\cdot e^{-\alpha_э\left(t-\frac{l}{v}\right)}\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}\right) \quad (9.127)$$

при $t>\frac{l}{v}$, а при удалении от конца линии эта волна изменяется по закону:

$$u_{xo}(t)=-Ee^{-\frac{\delta}{v}l}e^{-\frac{\delta}{v}(l-x)}e^{-\alpha_э\left(t-\frac{l}{v}\right)}\sin\omega_0\left(t-\frac{l}{v}-\frac{l-x}{v}\right)=$$

$$=-Ee^{-\frac{\delta}{v}(2l-x)}e^{-\alpha_э\left(t-\frac{l}{v}\right)}\sin\omega_0\left(t-\frac{2l-x}{v}\right). \quad (9.128)$$

Таким образом, в рассматриваемом примере отражённая волна напряжения представляет собой колебание, затухающее как вдоль линии, так и во времени.

Всё вышесказанное относится также и к току в линии.

§ 9.14. Многократное отражение волн в линии конечной длины

Обратимся теперь к схеме, изображённой на рис. 9.43, и рассмотрим явление многократного отражения волн у обоих концов линии. Изображение для электродвижущей силы $e(t)$, действующей при $t\geqslant 0$, попрежнему обозначаем через $E(p)$, а внутреннее сопротивление генератора эдс, которое практически представляет собой сопротивление колебательного контура, тем или иным способом связанного с линией, через $Z_г(p)$. Для учёта отражения у начала линии введём по аналогии с ф-лой (9.123) коэффициент

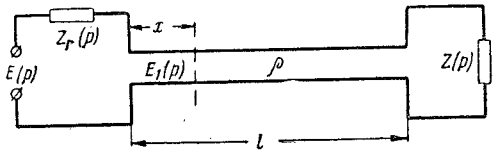


Рис. 9.43

$$\mu_г(p)=\frac{Z_г(p)-\rho}{Z_г(p)+\rho}. \quad (9.129)$$

Напряжение на входных зажимах линии до прихода первой отражённой от конца линии волны равно

$$E_1(p)=E(p)\cdot\frac{\rho}{\rho+Z_г(p)}.$$

Составим выражение для напряжения в точке x. По истечении времени $t=\frac{x}{v}$ напряжение $U_{xп}(p)$, создаваемое падающей волной в точках x, будет определяться выражением:

$$U_{xп}(p)=E_1(p)\cdot e^{-\gamma x}.$$

Спустя время $t=\frac{2(l-x)}{v}$ в точку x придёт волна, отражённая от конца линии. Напряжение этой волны равно:

$$U_{lo}(p)\cdot e^{-\gamma(l-x)}=\mu E_1(p)\,e^{-\gamma l}\cdot e^{-\gamma(l-x)}=\mu E_1(p)\,e^{-\gamma(2l-x)}.$$

Спустя время $t=\frac{2x}{v}$ в точку x придёт волна, отражённая от начала линии. Напряжение этой волны в точке $x=0$ равно:

$$\mu_2 U_{ln}(p)\,e^{-\gamma l},$$

а в точке $x\neq l$

$$\mu_2 U_{ln}(p)\cdot e^{-\gamma l}\cdot e^{-\gamma x}.$$

Подставляя $U_{ln}(p)=\mu E_1(p)\,e^{-\gamma l}$, найдём

$$\mu_2\mu E_1(p)\cdot e^{-\gamma l}\cdot e^{-\gamma l}\cdot e^{-\gamma x}=\mu_2\mu E_1(p)\,e^{-\gamma(2l+x)}.$$

Продолжая подобным образом определять многократно отражённые волны, придём к следующим выражениям для $U_x(p)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{в промежутке времени } \frac{x}{v}<t<\frac{2l-x}{v}\\
&U_x(p)=E_1(p)\cdot e^{-\gamma x},\\
&\text{в промежутке времени } \frac{2l-x}{v}<t<\frac{2l+x}{v}\\
&U_x(p)=E_1(p)\left[e^{-\gamma x}+\mu e^{-\gamma(2l-x)}\right],\\
&\text{в промежутке времени } \frac{2l+x}{v}<t<\frac{4l-x}{v}\\
&U_x(p)=E_1(p)\left[e^{-\gamma x}+\mu e^{-\gamma(2l-x)}+\mu_2\mu e^{-\gamma(2l+x)}\right],\\
&\text{в промежутке времени } \frac{4l-x}{v}<t<\frac{4l+x}{v}\\
&U_x(p)=E_1(p)\left[e^{-\gamma x}+\mu e^{-\gamma(2l-x)}+\mu_2\mu e^{-\gamma(2l+x)}+\right.\\
&\qquad\left.+\mu_2\mu^2 e^{-\gamma(4l-x)}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(9.130)$$

и т. д.

При составлении подобных выражений для тока необходимо учитывать знак минус для волн, движущихся в направлении отрицательных значений x [см. § 9.11, ф-ла (9.101)].

Таким образом, общее выражение для тока, рассматриваемого в соответствующий момент времени, будет:

$$I_x(p)=\frac{E_1(p)}{\rho}\left[e^{-\gamma x}-\mu e^{-\gamma(2l-x)}+\mu_2\mu e^{-\gamma(2l+x)}-\right.$$
$$\left.-\mu_2\mu^2 e^{-\gamma(4l-x)}+\cdots\right],\qquad(9.131)$$

где число слагаемых определяется рассматриваемым промежутком времени.

Задавая $Z_2(p)$, $Z(p)$, а также параметры линии ρ и l, можно определить напряжение и ток в любой точке линии в процессе установления. Особенностью устанавливающегося режима в линиях является то обстоятельство, что распределение токов и напряжений вдоль линии зависит не только от соотношения между $Z(p)$ и ρ, как в случае стационарного состояния при синусоидальном изменении $e(t)$, но и от соотношения между $Z_2(p)$ и ρ.

По мере ослабления вновь образуемых отражённых волн распределение напряжений и токов в линии приближается к стационарному распределению, зависящему, как известно, только от соотношения между $Z(i\omega_0)$ и ρ, где $Z(i\omega_0)$ — сопротивление нагрузки на выходе линии при частоте электродвижущей силы ω_0. Если при этом $Z(i\omega_0)$ не равно ρ, то существующая в линии при стационарном режиме отражённая волна является суммой всех отражённых волн (распространяющихся от конца линии к её началу), возникавших в процессе установления; точно так же и падающая волна является суммой всех падающих волн (распространяющихся от начала к концу линии) переходного режима.

Приложим общие выражения (9.130) и (9.131) к некоторым интересным для практики частным случаям.

§ 9.15. Устанавливающийся режим в линии, короткозамкнутой на конце

Сопротивление нагрузки (по условию) $Z(p)=0$. Внутреннее сопротивление генератора $Z_2(p)$ считаем ничтожно малым по сравнению с ρ. Тогда

$$\mu=\mu_2=-1.$$

Определим ток на входе линии, начиная с момента $t=0$ до установления стационарного режима.

Полагая $x=0$, перепишем выражение (9.131) в виде

$$I_0(p)=\frac{E_1(p)}{\rho}\left[1+2e^{-2\gamma l}+2e^{-4\gamma l}+2e^{-6\gamma l}+\cdots\right].\qquad(9.132)$$

Постоянную распространения представим в виде

$$\gamma = \frac{\delta + p}{v} = \beta + \frac{p}{v}, \tag{9.133}$$

где $\beta = \frac{\delta}{v}$ — затухание на единицу длины.

Если не учитывать проводимость G, то на основании ф-л (9.103) и (9.104) можно написать:

$$\beta = \frac{R}{2L}\sqrt{LC} = \frac{R}{2\rho}. \tag{9.134}$$

Таким образом, выражение (9.132) переходит в следующее:

$$I_0(p) = \frac{E_1(p)}{\rho}\left[1 + 2\,e^{-2\beta l}\cdot e^{-2p\frac{l}{v}} + 2\,e^{-4\beta l}\cdot e^{-4p\frac{l}{v}} + \cdots\right]. \tag{9.132'}$$

Для синусоидальной эдс мгновенное значение тока на входе линии в соответствии с выражением (9.114) равно:

$$i_0(t) = \frac{E}{\rho}\left[\sin\omega_0 t + 2\,e^{-2\beta l}\sin\omega_0\left(t - \frac{2l}{v}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\,e^{-4\beta l}\sin\omega_0\left(t - \frac{4l}{v}\right) + \cdots\right]. \tag{9.135}$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти к показательной форме, заменяя $\sin\omega_0 t$ на $e^{i\omega_0 t}$:

$$i_0(t) = \frac{E}{\rho}\left[e^{i\omega_0 t} + 2\,e^{-2\beta l}e^{i\omega_0\left(t-\frac{2l}{v}\right)} + 2e^{-4\beta l}e^{i\omega_0\left(t-\frac{4l}{v}\right)} + \cdots\right] =$$
$$= \frac{E\,e^{i\omega_0 t}}{\rho}\left[1 + 2\,e^{-2(\beta l + i\varphi_1)} + 2\,e^{-4(\beta l + i\varphi_1)} + \right.$$
$$\left. + 2\,e^{-6(\beta l + i\varphi_1)} + \cdots\right]. \tag{9.135'}$$

Здесь $\varphi_1 = \frac{\omega_0 l}{v}$ — фазовый сдвиг, приобретаемый волной при пробеге линии длиной l.

Для получения мгновенного значения $i_0(t)$ необходимо брать мнимую часть в выражении (9.135'). Обозначим для краткости

$$a = 2(\beta l + i\varphi_1),$$

тогда

$$i_0(t) = \frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\left[1 + 2\,e^{-a}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-a}\right)^{k-1}\right],$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — число слагаемых вида $2\,e^{-na}$ в правой части выражения (9.135'), зависящее от рассматриваемого промежутка времени:

промежутку $\frac{2l}{v} < t < \frac{4l}{v}$ соответствует $n = 1$,

промежутку $\frac{4l}{v} < t < \frac{6l}{v}$ соответствует $n = 2$ и т. д.

Применяя формулу геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-a}\right)^{k-1} = \frac{e^{-na} - 1}{e^{-a} - 1},$$

приведём выражение для $i_0(t)$ к виду:

$$i_0(t) = \frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1 + e^{-a} - 2e^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}}. \tag{9.136}$$

При $n \to \infty$ влиянием члена $2\,e^{-(n+1)a}$ можно пренебречь. Следовательно, установившееся значение тока на входе линии:

$$i_{0\,cm}(t) = \frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1 + e^{-2(\beta l + i\varphi_1)}}{1 - e^{-2(\beta l + i\varphi_1)}}, \tag{9.137}$$

Этот результат совпадает с известным для стационарного режима в короткозамкнутой линии выражением (см. § 7.5):

$$Z_э = \frac{U_{0\,cm}}{I_{0\,cm}} = \rho\,\mathrm{th}\,\gamma l, \tag{9.138}$$

где $U_{0\,cm}$ и $I_{0\,cm}$ — амплитуды напряжения и тока на входе линии, а $Z_э$ — входное сопротивление короткозамкнутой на конце линии.

Приравнивая амплитуду напряжения $U_{0\,cm}$ к амплитуде эдс E и переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, получим выражение (9.137).

Легко также показать, что соответствующая стационарному режиму падающая волна тока (в точке $x = 0$) равна

$$\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\cdot\frac{1}{1 - e^{-2(\beta l + i\varphi_1)}},$$

а отражённая волна в той же точке отличается от падающей множителем

$$e^{-2(\beta l + i\varphi_1)}.$$

Выражение (9.136) показывает, как стационарные падающая и отражённая волны образуются в процессе установления наложением большого числа блуждающих волн, многократно отражаемых

от концов линии. Как и следовало ожидать, результирующее (установившееся) распределение токов в линии зависит только от нагрузки конца линии (в данном случае короткое замыкание). От соотношения между внутренним сопротивлением генератора и волновым сопротивлением линии зависит только длительность процесса установления в линии.

Выражение (9.136) особенно упрощается в тех случаях, когда длина отрезка линии кратна $\frac{\lambda}{4}$, где λ — длина волны в линии.

Рассмотрим подробно случай $l=\frac{\lambda}{4}$, когда

$$\varphi_1=\frac{\omega_0 l}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}l=\frac{\pi}{2} \text{ и } e^{-i(n+1)2\varphi_1}=(-1)^{n+1}.$$

Выражение (9.136) для этого случая принимает вид

$$i_0(t)=\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1-e^{-2\beta l}+(-1)^n\cdot 2e^{-(n+1)2\beta l}}{1+e^{-2\beta l}}. \qquad (9.136')$$

Если приравнять $n=0$, получим первый бросок тока, равный $\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}$. Такой режим существует на протяжении промежутка времени $0<t<\frac{2l}{v}$, т. е. на протяжении первого полупериода $\left(\text{поскольку } \frac{l}{v}=\frac{T}{4}\right)$.

В промежутке $\frac{2l}{v}<t<\frac{4l}{v}$, когда $n=1$, входной ток определяется выражением:

$$i_0(t)\Big|_{n=1}=\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1-e^{-2\beta l}-2e^{-4\beta l}}{1+e^{-2\beta l}}.$$

Поскольку обычно $\beta l\ll 1$, получаем

$$i_0(t)\Big|_{n=1}\approx\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1-(1-2\beta l)-2(1-4\beta l)}{1+(1-2\beta l)}\approx\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}(5\beta l-1).$$

Если $5\beta l<1$, то в момент $t=\frac{2l}{v}$ происходит опрокидывание фазы входного тока (рис. 9.44).

В промежутке $\frac{4l}{v}<t<\frac{6l}{v}$, когда $n=2$, входной ток:

$$i_0(t)\Big|_{n=2}=\frac{E}{\rho}e^{-i\omega_0 t}\,\frac{1-e^{-2\beta l}+2e^{-6\beta l}}{1+e^{-2\beta l}}\approx$$

$$\approx\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}(1-5\beta l).$$

При дальнейшем увеличении t изменение входного тока зависит от величины $2\beta l$. После установления стационарного режима получим [см. ф-лу (9.137)]:

$$i_{0\,cm}(t)\approx\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1-e^{-2\beta l}}{1+e^{-2\beta l}}\approx\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\beta l.$$

Учитывая соотношение (9.134), имеем

$$i_{0\,cm}(t)=Ee^{i\omega_0 t}\,\frac{Rl}{2\rho^2}, \qquad (9.139)$$

откуда следует, что входное сопротивление короткозамкнутого на конце четвертьволнового отрезка линии равно

$$Z_э=\frac{2\rho^2}{Rl}.$$

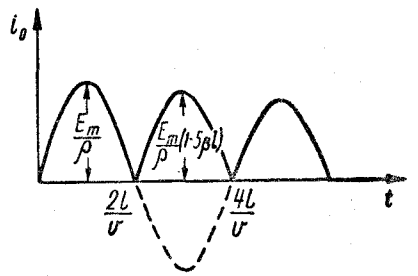


Рис. 9.44

Пользуясь выражением (9.131) и подставляя $x=l$, нетрудно вывести выражение для устанавливающегося тока в пучности.

§ 9.16. Устанавливающийся режим в разомкнутой линии

В данном случае $Z(p)=\infty$ и в соответствии с выражением (9.123), $\mu(p)=+1$. Полагая, как и в предыдущем параграфе, $Z_г(p)=0$, будем иметь $\mu_г(p)=-1$.

Для входного тока выражение (9.131) приводится к виду:

$$I_0(p)=\frac{E_1(p)}{\rho}\left[1-2e^{-2\gamma l}+2e^{-4\gamma l}-\cdots\right].$$

Полагая $e(t)=E\sin\omega_0 t$ и повторяя преобразования предыдущего параграфа, получаем:

$$i_0(t)=\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1-e^{-2(\beta l+i\varphi_1)}+(-1)^n\cdot 2e^{-2(\beta l+i\varphi_1)(n+1)}}{1+e^{-2(\beta l+i\varphi_1)}}. \qquad (9.140)$$

Для четвертьволнового отрезка, как и ранее, $e^{-i2\varphi_1}=-1$, $e^{-i(n+1)2\varphi_1}=(-1)^{n+1}$, поэтому

$$i_0(t)=\frac{E}{\rho}e^{i\omega_0 t}\,\frac{1+e^{-2\beta l}-2e^{-(n+1)2\beta l}}{1-e^{-2\beta l}}. \qquad (9.141)$$

Установившееся значение тока получается при $n \to \infty$:

$$i_{0\,cm}(t) = \frac{E}{\rho} e^{i\omega_0 t} \frac{1+e^{-2\beta l}}{1-e^{-2\beta l}} \approx \frac{E}{\rho} e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\beta l} = \frac{2E}{Rl} e^{i\omega_0 t}. \quad (9.142)$$

Таким образом

$$i_0(t) = i_{0cm}(t)\left[1 - 2\frac{e^{-(n+1)2\beta l}}{1+e^{-2\beta l}}\right]. \quad (9.143)$$

Нетрудно перейти от n к времени t с помощью соотношения:

$$t_{n+1} = (n+1)\frac{2l}{v},$$

где t_n — моменты, соответствующие первому, второму и т. д. приходу волны, отражённой от конца линии в точку $x = 0$.

Учитывая, что $\beta = \frac{R}{2\rho}$, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ получим

$$2(n+1)\beta l = \frac{R}{2L} t_{n+1}.$$

Таким образом, при $n > 1$ и $2\beta l \ll 1$

$$i_0(t) = i_{0cm}(t)\left(1 - e^{-\frac{R}{2L} t_{n+1}}\right). \quad (9.144)$$

Это выражение показывает, что в отношении процесса установления входного тока при включении синусоидальной эдс, четвертьволновый, разомкнутый на конце, отрезок линии ведёт себя как обычный колебательный контур с сосредоточенными постоянными, затухание которого $\alpha_э = \frac{R}{2L}$, а собственная частота совпадает с частотой эдс.

Подобным же образом можно исследовать процесс установления в отрезке линии произвольной длины.

ГЛАВА 10

УСИЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ, ЛИНЕЙНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

§ 10.1. Принцип действия усилителя. Основные режимы усиления

Усиление колебаний является одним из основных радиотехнических процессов. Для осуществления усиления в радиотехнике и некоторых смежных отраслях техники используются различные приборы: электронные лампы, полупроводниковые (кристаллические) приборы, магнитные усилители и др. В радиоэлектронике основным средством осуществления усиления до последнего времени остаются элекронные лампы.

Быстро развивающаяся в последнее время техника кристаллических усилителей обещает, повидимому, широкое их применение в радиотехнике. Однако некоторые не преодолённые ещё ограничения, присущие этому виду усилителей (недостаточная устойчивость характеристик, пригодность для частот не выше десятков мегагерц, затруднительность получения значительной мощности и некоторые другие), не позволяют пока полупроводниковым приборам во всех случаях успешно конкурировать с электронными лампами.

Класс электронных приборов, используемых в современной радиотехнике для усиления колебаний, насчитывает ряд видов, работающих на различных принципах: электронные лампы в виде триодов, тетродов, пентодов и т. д., клистроны, лампы с бегущей волной и др.

По соображениям методического характера в данном курсе изучение начинается с усилителей, работающих на электронных лампах с тремя или более электродами, в которых управление электронным током лампы осуществляется путём подачи усиливаемого колебания на управляющую сетку, а нагрузочное сопротивление включено в анодную цепь лампы. Затем рассматриваются схемы с катодной нагрузкой, а также с нагрузкой, включаемой между анодом и сеткой. Некоторые особенности полупроводниковых усилителей рассматриваются в § 10.11.

Обобщённая схема электронного усилителя с анодной нагрузкой может быть сведена к виду, изображённому на рис. 10.1. На этой схеме могут быть отмечены следующие три основных элемента: источник энергии, электронная лампа и нагрузочное сопротивление.

В качестве источника энергии обычно используется любой источник постоянного тока при достаточно высоком напряжении (сеть переменного тока с выпрямителем, аккумуляторы и т. д.).

Электронная лампа, как отмечалось выше, может содержать различное число электродов. На схеме рис. 10.1 указаны цепи только основных электродов лампы — анода, управляющей сетки и катода. Источник тока накала катода, а также источники вспомогательных постоянных напряжений, используемых в цепях управляющей и остальных сеток, на схеме опущены.

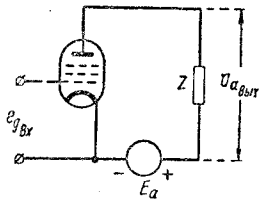


Рис. 10.1

Колебание, подлежащее усилению, подводится к выводам сетки и катода лампы, а усиленное колебание снимается с нагрузочного сопротивления Z, которое в зависимости от назначения усилителя может быть активным, реактивным или комплексным сопротивлением. Междуэлектродные ёмкости лампы включены в двухполюсник Z, причём предполагается, что этот двухполюсник пропускает постоянную составляющую анодного тока.

Связь между выходным напряжением и напряжением на входе усилителя обусловливается электронным током лампы. Поэтому основные свойства и характеристики электронного усилителя тесно связаны с формой вольтамперной характеристики электронной лампы. Под последней подразумевается зависимость анодного тока от напряжений, действующих на соответствующих электродах лампы.

Допустим, что напряжения на сетках лампы так подобраны, что сеточные токи малы и анодный ток близок к току эмиссии. Тогда анодный ток i_a является функцией управляющего напряжения, которое может быть отнесено либо к сетке, либо к аноду. Наибольшее распространение получило определение тока через управляющее напряжение сетки. Это напряжение равно:

$$\text{для триодов } e_{упр} = e_g + De_a, \tag{10.1}$$

$$\text{для тетродов } e_{упр} = e_g + D_1 e_{g_2} + D_1 D_2 e_a \tag{10.2}$$

$$\text{и для пентодов } e_{упр} = e_g + D_1 e_{g_2} + D_1 D_2 e_{g_3} + D_1 D_2 D_3 e_a. \tag{10.3}$$

В этих выражениях D_1 — проницаемость управляющей (первой) сетки, D_2 — экранирующей (второй) сетки, D_3 — защитной (третьей) сетки. Произведения $D_1 D_2$ и $D_1 D_2 D_3$ обычно настолько малы, что управляющее напряжение для тетродов и пентодов можно определять выражением:

$$e_{упр} \approx e_g + D_1 e_{g_2}. \tag{10.4}$$

Физически это означает, что в пентодах можно пренебрегать реакцией напряжений анода и третьей сетки на ток эмиссии. Так

как напряжение третьей сетки обычно мало и постоянно, то ток этой сетки близок к нулю и отмеченное выше положение можно распространить и на анодный ток. При этих условиях функцию $i_a(e_{упр})$ можно считать одинаковой для триодов и пентодов.

Зависимость $i_a(e_{упр})$ является нелинейной. Вид этой зависимости изображён на рис. 10.2.

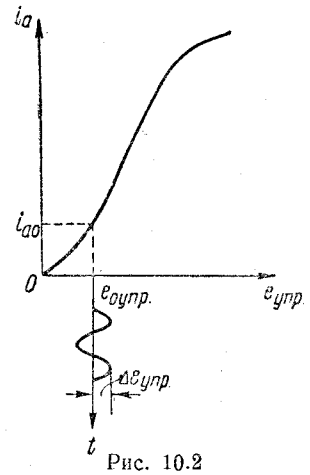


Рис. 10.2

В отсутствие усиливаемого колебания, когда напряжения всех электродов постоянны, рабочая точка на характеристике $i_a(e_{упр})$ определяется исходным значением управляющего напряжения $e_{0\,упр}$ (рис. 10.2). При подаче на сетку лампы напряжения Δe_g, вызывающего изменение управляющего напряжения $\Delta e_{упр}$, анодный ток изменится. Для установления аналитической связи между изменением анодного тока и изменением управляющего напряжения можно воспользоваться разложением функции $i_a(e_{0\,упр} + \Delta e_{упр})$ по степеням величины $\Delta e_{упр}$. Применяя ряд Тэйлора, можем написать:

$$i_a(e_{0\,упр} + \Delta e_{упр}) = i(e_{0\,упр}) + \left(\frac{di_a}{de_{упр}}\right)_{e_{0\,упр}} \Delta e_{упр} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 i_a}{de^2_{упр}}\right)_{e_{0\,упр}} \Delta e^2_{упр} + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3 i_a}{de^3_{упр}}\right)_{e_{0\,упр}} \Delta e^3_{упр} + \dots$$

$$= i_{a0} + \alpha \Delta e_{упр} + \beta \Delta e^2_{упр} + \gamma \Delta e^3_{упр} + \dots \tag{10.5}$$

В этом выражении i_{a0} представляет собой анодный ток в отсутствие сигнала („ток покоя"), коэффициент $\alpha = S$ — крутизну характеристики $i_a(e_{упр})$ в точке $e_{упр} = e_{0\,упр}$, коэффициент β — первую производную крутизны $\left(\text{с коэффициентом } \frac{1}{2!}\right)$, коэффициент γ — вторую производную крутизны $\left(\text{с коэффициентом } \frac{1}{3!}\right)$ и т. д.

Относительное значение отдельных членов разложения (10.5) определяется положением рабочей точки на характеристике лампы и величиной переменной части управляющего напряжения $\Delta e_{упр}$, т. е. в конечном итоге величиной сигнала Δe_g, подводимого к управляющей сетке.

Если Δe_g, а следовательно, и $\Delta e_{упр}$, настолько мало, что изменения анодного тока укладываются на линейном участке характе-

ристики $i_a(e_{упр})$, то в разложении (10.5) могут быть опущены все члены со степенями $\Delta e_{упр}$ выше первой. В этом случае

$$i_a \approx i_{a0} + \alpha \Delta e_{упр} = i_{a0} + S \Delta e_{упр}. \qquad (10.6)$$

При использовании пентодов, когда можно считать

$$\Delta e_{упр} \approx \Delta e_g,$$

получаем

$$i_a \approx i_{a0} + S \Delta e_g.$$

Подобный режим усиления называется линейным усилением. При линейном усилении изменения анодного тока в точности воспроизводят изменения сеточного напряжения. В частности, при усилении гармонического напряжения

$$\Delta e_g = E_g \cos \Omega t,$$

анодный ток будет

$$i_a = i_{a0} + SE_g \cos \Omega t,$$

т. е. анодный ток, а следовательно, и напряжение на нагрузочном сопротивлении в анодной цепи лампы, не содержат новых, по сравнению с Δe_g, частот.

Переходя от характеристики $i_a(e_{упр})$ к характеристике $i_a(e_g)$, получим построение, показанное на рис. 10.3. Исходное положение рабочей точки (в отсутствие усиливаемого колебания) определяется постоянным напряжением E_{g0}. Рабочую точку обычно смещают в область отрицательных сеточных напряжений. В связи с этим E_{g0} называется напряжением смещения. Из предыдущего рассмотрения, а также из рис. 10.3 следует, что линейный режим характеризуется малой величиной отношения изменения тока к току покоя i_{a0}. Это означает, что бо́льшая часть подводимой к лампе мощности расходуется бесполезно (нагрев анода). Линейный режим усиления используется поэтому обычно только в маломощных усилителях, когда основным требованием является точное воспроизведение формы сигнала, а энергетические показатели усилителя большого значения не имеют.

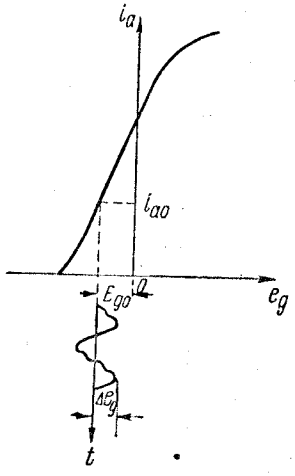


Рис. 10.3

Усилители, работающие в линейном режиме, предназначаются чаще всего для усиления напряжения колебания. Подобные усилители иногда называются усилителями напряжения. Для получения хорошего усиления, сопротивление

анодной нагрузки Z должно быть достаточно велико по сравнению с внутренним сопротивлением лампы. Основные соображения по выбору Z в усилителях напряжения приводятся в следующем параграфе.

При работе с большими величинами Δe_g нелинейные члены в разложении (10.5) оказывают существенное влияние на работу усилителя. Если сохранить указанное на рис. 10.2 и 10.3 положение исходной рабочей точки и постепенно увеличивать амплитуду сигнала Δe_g (и соответственно $\Delta e_{упр}$), то при не очень больших значениях $\Delta e_{упр}$ можно ограничиваться добавлением к правой части выражения (10.6) одного лишь квадратичного члена $\beta \Delta e_{упр}^2$. Введение этого члена позволяет учесть асимметрию характеристики относительно рабочей точки, которая проявляется в том, что положительным приращениям напряжения $e_{упр}$ соответствуют приращения анодного тока бо́льшие, нежели отрицательным. Если рабочая точка установлена на середине характеристики, а последняя симметрична относительно этой середины (рис. 10.4), то квадратичный и все остальные чётные степени в разложении (10.5) выпадают. В этом случае кривизну характеристики, при изменении $\Delta e_{упр}$ в достаточно широких пределах, можно учесть с помощью неполного полинома третьей степени:

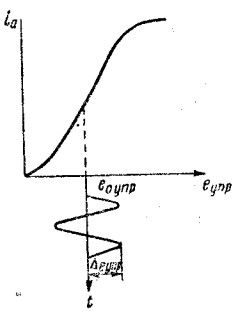


Рис. 10.4.

$$i_a \approx i_{a0} + \alpha \Delta e_{упр} + \gamma \Delta e_{упр}^3. \qquad (10.7)$$

При очень больших величинах $\Delta e_{упр}$ необходимо учитывать и более высокие нечётные степени $\Delta e_{упр}$.

Если рабочая точка и величина $\Delta e_{упр}$ выбраны такими, что высшие гармонические составляющие приобретают относительно большое значение (при этом также может измениться постоянная составляющая анодного тока), то такой режим работы усилителя называется нелинейным.

Для упрощения технических расчётов в практике широко используется представление характеристики лампы в виде ломаной линии, составленной из трёх прямых.

В координатах i_a и $e_{упр}$ подобная характеристика принимает вид, показанный на рис. 10.5, а в координатах i_a и e_g при e_a в качестве параметра — на рис. 10.6. Реальные характеристики показаны на этих рисунках пунктиром. Напряжение $E_{S\,упр}$ (и соответственно E_{Sg}), при котором достигается ток насыщения I_S, называется напряжением насыщения. При таком упрощении формы характеристики анодный ток может быть представлен в виде следующего уравнения:

$$i_a = S[e_g + D(e_a - E_{a0})]. \qquad (10.8)$$

Здесь E_{a0} — так называемое „напряжение приведения", соответствующее такому анодному напряжению, при котором идеализированная характеристика проходит через начало координат. На рис. 10.6 эта характеристика показана пунктирной линией.

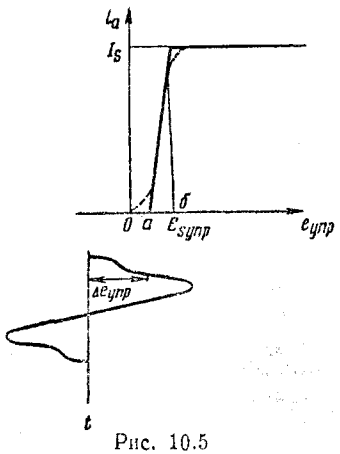


Рис. 10.5

При установлении рабочей точки вблизи нижнего сгиба характеристики (рис. 10.5 и 10.6) получается сильное искажение формы анодного тока по сравнению с формой $\Delta e_{упр}$ (и Δe_g). Подобный режим работы лампы является нелинейным.

Искажение формы анодного тока ещё не означает, что неизбежно искажение формы усиливаемого колебания. С помощью специальных приёмов, которые будут рассмотрены в гл. 11, можно осуществить неискажённое усиление колебаний при работе в нелинейном режиме. Крупным преимуществом подобного усиления, называемого нелинейным усилением, является более выгодный энергетический режим работы. Усилители, в которых осуществляется усиление мощности колебания, называются усилителями мощности. Усилители мощности, как правило, работают в нелинейном режиме.

В некоторых устройствах (например, в умножителях частоты) нелинейность характеристики используется для получения колебаний с частотами, кратными частоте входного напряжения.

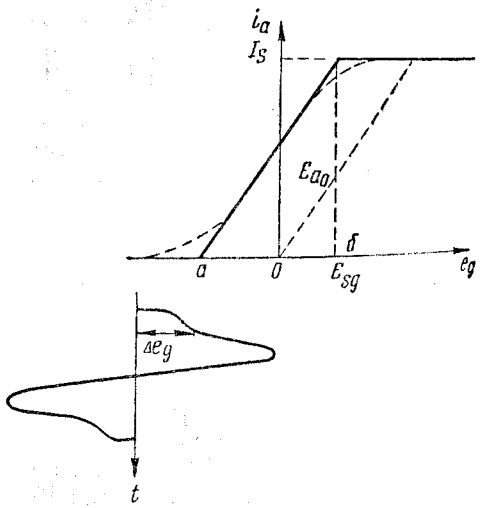


Рис. 10.6

Полезно отметить, что в нелинейных усилителях ошибка, обусловленная заменой реальных характеристик спрямлёнными, получается тем меньшей, чем больше амплитуда колебания, подводимого к усилителю. Действительно, в режимах, представленных на рис. 10.5 и 10.6, искажение формы анодного тока обусловлено, главным образом, выходом напряжений $e_{упр}$ и e_g за пределы участка a—$б$. Ход же характеристики в пределах этого участка оказывает слабое влияние на форму анодного тока. Таким образом, все основные черты нелинейного процесса — искажение формы анодного тока и возникновение новых частот — при спрямлении характеристик сохраняются.

В данной главе изучаются линейные усилители. По схеме и конструкции различают ещё усилители апериодические и усилители резонансные. Апериодические усилители используются для усиления управляющих сигналов. Схемы подобных усилителей содержат только апериодические цепи. Резонансные усилители используются на высоких частотах (радиочастотах). К резонансным усилителям можно также отнести полосовые усилители, у которых в качестве колебательных систем используются обычно связанные контуры.

§ 10.2. Основные соотношения для линейного усилителя. Эквивалентная схема анодной цепи электронной лампы

При работе на линейном участке характеристики электронную лампу можно рассматривать как линейное устройство, по отношению к которому применим принцип наложения (суперпозиции). Удобно поэтому при установлении соотношений между входными и выходными напряжениями в схеме исходить сперва из усиления гармонического колебания. Полученные результаты нетрудно затем использовать для рассмотрения работы усилителей сложных колебаний (акустических сигналов, импульсов, модулированных колебаний и т. д.).

Итак, пусть на сетку триода, кроме постоянного напряжения E_{g0}, подаётся небольшое по амплитуде напряжение

$$\Delta e_g = E_g \cos \Omega t. \tag{10.9}$$

Для определения вызываемого этим напряжением изменения анодного тока можно воспользоваться выражением (10.8), подставив в него

$$e_g = E_{g0} + \Delta e_g = E_{g0} + E_g \cos \Omega t. \tag{10.10}$$

Напряжение e_a, входящее в ур-ние (10.8), представляет собой разность потенциалов анода и катода лампы. Эта разность потенциалов отличается от электродвижущей силы E_a источника питания на величину падения напряжения u_a, создаваемого на нагрузочном сопротивлении анодным током. Принимая за положительное направление анодного тока во внешней цепи направление катод—нагрузка—анод и отсчитывая потенциалы относительно катода лампы, получим направление напряжения u_a, обозначенное стрелкой на рис. 10.7.

Это направление противоположно направлению эдс E_a, поэтому

$$e_a = E_a - u_a. \tag{10.11}$$

Здесь и в дальнейшем под u_a подразумевается падение напряжения, создаваемое приращением анодного тока. Если нагрузка обладает омическим сопротивлением R_a, то под величиной E_a подразумевается не эдс источника, а разность между эдс источника и величиной $i_{a0} \cdot R_a$.

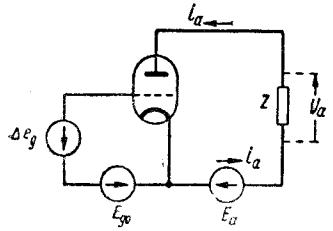


Рис. 10.7

Подставляя выражения (10.10) и (10.11) в ур-ние (10.8), получим

$$i_a = S[E_{g0} + E_g \cos \Omega t + D(E_a - E_{a0} - u_a)]. \tag{10.12}$$

В отсутствие сигнала, т. е. когда $\Delta e_g = 0$ и $u_a = 0$, имеем

$$i_{a0} = S[E_{g0} + D(E_a - E_{a0})]. \tag{10.13}$$

Вычитая выражение (10.13) из (10.12), находим приращение анодного тока:

$$\Delta i_a = i_a - i_{a0} = S[E_g \cos \Omega t - Du_a]. \tag{10.14}$$

В общем случае, при произвольной форме Δe_g и u_a, можно написать:

$$\Delta i_a = S(\Delta e_g - Du_a). \tag{10.14'}$$

Следует подчеркнуть, что напряжение Δe_g отсчитывается от сетки к катоду, а напряжение u_a от катода к аноду (рис. 10.7).

Так как по условию лампа работает в линейном режиме, то Δe_a представляет собой гармоническую функцию времени с частотой Ω, совпадающей с частотой подводимого к сетке напряжения.

Представим Δi_a в виде

$$\Delta i_a = I_a \cos(\Omega t - \varphi_a), \tag{10.15}$$

где I_a — амплитуда, а φ_a — фаза переменной составляющей анодного тока.

Тогда напряжение, создаваемое током Δi_a на нагрузочном сопротивлении Z, будет

$$u_a = I_a \cdot z \cos(\Omega t - \varphi_a + \varphi_Z). \tag{10.16}$$

Здесь φ_Z — аргумент комплексного сопротивления Z.

Переходя к комплексным амплитудам, можем написать:

$$\vec{U}_a = \vec{I}_a \cdot Z, \tag{10.17}$$

$$\vec{I}_a = S\vec{E}_g - SD\vec{U}_a = S\vec{E}_g - SDZ\vec{I}_a. \tag{10.18}$$

Решая это уравнение относительно $\vec{I}_a$, получаем:

$$\vec{I}_a = \vec{E}_g \frac{S}{1 + SZD}. \tag{10.19}$$

Это выражение позволяет определить ток $\vec{I}_a$ по заданной эдс $\vec{E}_g$ и по известным параметрам лампы (S, D) и нагрузки (Z).

В курсе электровакуумных приборов доказывается, что

$$SD = \frac{1}{R_i},$$

где R_i — внутреннее сопротивление лампы (между анодом и катодом).

Можно поэтому выражения (10.18) и (10.19) записать в следующей форме:

$$\vec{I}_a = S\vec{E}_g - \frac{\vec{U}_a}{R_i}, \tag{10.18'}$$

$$\vec{I}_a = \frac{S}{1 + \frac{Z}{R_i}}\vec{E}_g = \vec{S}_\partial \vec{E}_g, \tag{10.19'}$$

где

$$\vec{S}_\partial = \frac{S}{1 + \frac{Z}{R_i}} \tag{10.20}$$

представляет собой так называемую крутизну динамической характеристики или динамическую крутизну, которая меньше статической крутизны, так как с увеличением нагрузочного сопротивления Z растёт падение напряжения u_a и снижается напряжение анода относительно катода $e_a = E_a - u_a$. При $Z \to 0$, когда $u_a \to 0$, реакция анодной цепи на величину анодного тока отсутствует и $\vec{S}_\partial \to S$.

Выражение (10.19) можно, также, привести к следующему виду:

$$\vec{I}_a = \vec{E}_g \frac{\frac{1}{D}}{R_i + Z} = -\frac{\mu \vec{E}_g}{R_i + Z}, \qquad (10.21)$$

где $\mu = \frac{1}{D}$ — коэффициент усиления лампы.

Все полученные для триодов результаты можно распространить на тетроды и пентоды. Необходимо лишь под проницаемостью D подразумевать произведение $D_1 \cdot D_2$ (для тетродов) или $D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$ (для пентодов, см. § 10.1).

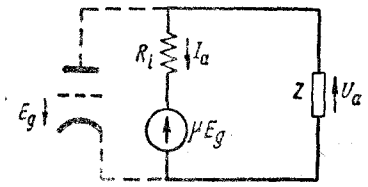


Рис. 10.8

Уравнению (10.21) отвечает эквивалентная схема анодной цепи лампы[1]), представленная на рис. 10.8.

Выходное напряжение усилителя снимается с нагрузочного сопротивления Z. При отсчёте потенциалов относительно потенциала катода, получим:

$$\vec{U}_{вых} = -\vec{U}_a.$$

Отношение

$$\vec{K} = \frac{\vec{U}_{вых}}{\vec{E}_g} = -\frac{\vec{U}_a}{\vec{E}_g} \qquad (10.22)$$

называется коэффициентом усиления схемы.

При чисто активном нагрузочном сопротивлении ($Z = R$, $\varphi_Z = 0$) напряжение $\vec{U}_a$ совпадает по фазе с током $\vec{I}_a$, а последний с напряжением сетки $\vec{E}_g$. Динамическая крутизна $\vec{S}_д$ становится при этом чисто вещественной. Получается векторная диаграмма, представленная на рис. 10.9. Напряжение $U_{вых}$ в этом

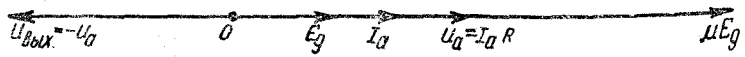


Рис. 10.9

[1]) При определении амплитуды анодного тока выбор направления электродвижущей силы эквивалентного генератора значения не имеет. Для получения же правильных фазовых соотношений необходимо исходить из условия, согласно которому в пассивных элементах направление напряжения совпадает с положительным направлением тока, а в генераторах — противоположно направлению тока.

Чтобы удовлетворить этому требованию при заданном направлении (положительном) тока I_a, эквивалентная эдс должна быть направлена навстречу эдс E_g, приложенной к точкам сетка—катод, т. е. эквивалентная эдс должна быть взята со знаком минус.

случае сдвинуто на угол 180° относительно входного напряжения $U_{вх} = E_g$, и коэффициент усиления $\vec{K}$ является отрицательным вещественным числом

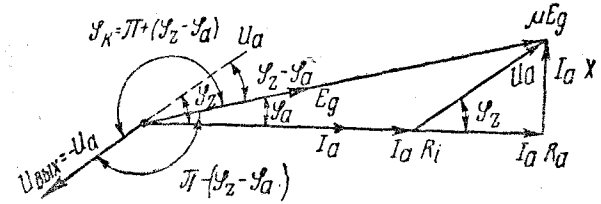


Рис. 10.10

Отсюда следует важное правило: **одноламповый усилитель с чисто активными сопротивлениями поворачивает фазу усиливаемого гармонического колебания на угол 180°.** При этом имеется в виду сделанное выше замечание, что все напряжения в схеме отсчитываются относительно катода лампы.

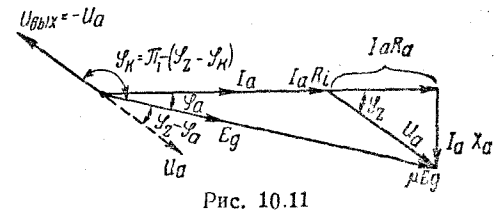


Рис. 10.11

При комплексном характере нагрузочного сопротивления векторные диаграммы получают вид, представленный на рис. 10.10 (для $Z = R + iX$) и рис. 10.11 (для $Z = R - iX$). Через φ_K обозначен фазовый сдвиг напряжения $\vec{U}_{вых}$ относительно $\vec{E}_g$, т. е. аргумент комплексного коэффициента усиления $\vec{K}$.

Подставляя в выражение (10.22) ур-ния (10.17) и (10.21), нетрудно получить

$$K(i\omega) = -\mu \frac{Z}{R_i + Z} = K e^{i\varphi_K}. \qquad (10.23)$$

Отсюда получаем следующие выражения для модуля и аргумента коэффициента усиления:

$$K = |K(i\omega)| = \mu \frac{Z}{\sqrt{(R_i + R_a)^2 + X_a^2}}, \qquad (10.24)$$

где R_a и X_a, соответственно, активная и реактивная составляющая нагрузочного сопротивления ($Z = R_a + iX_a$),

$$\varphi_K = \pi + \varphi_Z - \varphi_a. \qquad (10.25)$$

Выражение (10.24) определяет частотную характеристику усилителя, а (10.25) — фазовую.

В соответствии с выражением (10.21) сдвиг фазы анодного тока $\vec{I}_a$ относительно напряжения $\vec{E}_g$ равен

$$\varphi_a = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_a}{R_i + R_a},$$

а угол

$$\varphi_Z = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_a}{R_a}.$$

Из выражения (10.24) видно, что $|K(i\omega)|$ всегда меньше коэффициента усиления лампы μ. Для хорошего использования усилительной способности лампы выгодно увеличивать отношение $\frac{z}{R_i}$. В реальных схемах имеется, однако, ряд ограничений, препятствующих повышению этого отношения. Междуэлектродные ёмкости, а также ёмкости схемы, ограничивают в апериодических усилителях величину z в области высоких частот. Для получения равномерного в заданной полосе частот усиления приходится поэтому выбирать величину z не слишком большой и в области низких частот. В резонансных усилителях создание очень больших нагрузочных сопротивлений также наталкивается на трудности. Подробнее эти вопросы рассматриваются в § 10.7.

Отметим, что в случае триодов величина $\frac{z}{R_i}$ обычно не превышает $2 \div 5$. При использовании пентодов, обладающих очень большим внутренним сопротивлением, это отношение значительно меньше, и $\frac{z}{R_i} < 1$.

Можно поэтому при $R_i \gg z$ приближённо считать

$$|K(i\omega)| = -\mu \frac{z}{R_i} \approx -Sz. \qquad (10.26)$$

Заметим, что при построении эквивалентной схемы анодной цепи пентод удобно представлять в виде эквивалентного генератора тока (рис. 10.12). Основываясь на ур-нии (10.18′), ток генератора можно приравнять величине $S\vec{E}_g$, а ток, ответвляющийся через проводимость $G_i = \frac{1}{R_i}$, величине $\frac{\vec{U}_a}{R_i}$.

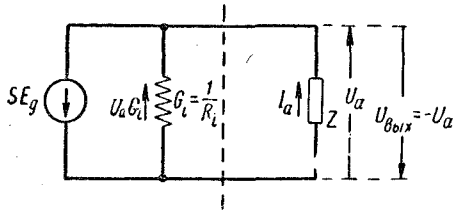


Рис. 10.12

При таком определении эквивалентного генератора величина и направление тока I_a во внешней цепи (справа от пунктирной линии на рис. 10.12), а также напряжения $\vec{U}_a$ остаются

неизменными. Это означает, что напряжение выхода, отсчитываемое относительно катода, равно $\vec{U}_{вых} = -\vec{U}_a$.

Если $R_i \gg z$, то проводимость G_i может быть опущена и схема принимает вид, показанный на рис. 10.13.

Приведение схемы линейного электронного усилителя к эквивалентным схемам типа рис. 10.8 и 10.13 позволяет приложить к ним все основные положения теории пассивных линейных цепей, изложенные в гл. 6. Необходимо лишь учитывать, что при составлении уравнений вида (6.3) для цепи, содержащей наряду с пассивными элементами также и активные элементы (лампы), только одно из напряжений E в правой части этого уравнения является подводимым напряжением, в то время как другие напряжения являются линейными функциями от первого и представляют собой эквивалентные генераторы, отображающие усиление ламп.

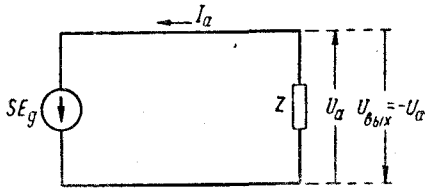


Рис. 10.13

Эти генераторы можно поэтому рассматривать как зависимые источники, напряжение которых зависит от напряжения на сетке соответствующей лампы. Например, на схеме рис. 10.8 независимый генератор подает напряжение на сетку лампы, а эквивалентный генератор, создающий в анодной цепи напряжение $-\mu E_g$, является зависимым источником. Ясно также, что в схеме рис. 10.13 эквивалентный генератор тока является зависимым источником, ток которого задаётся независимым источником напряжения, действующим в сеточной цепи лампы. Необходимо, кроме того, учитывать, что в цепях с активными элементами типа электронных ламп принцип взаимности (см. § 6.5) не выполняется. Иными словами, при возбуждении схемы со стороны выхода (т. е. со стороны анодной цепи) связь между выходом и входом может отсутствовать.

Часто оказывается удобным представлять линейный усилитель в виде четырёхполюсника, на входе которого действует напряжение μE_g, а на выходе $\vec{U}_{вых} = \vec{K} \cdot \vec{E}_g$ (рис. 10.14). Коэффициент передачи такого четырёхполюсника будет

$$\vec{K}' = \frac{\vec{K} \cdot \vec{E}_g}{\mu \cdot \vec{E}_g} = \frac{\vec{K}}{\mu}. \qquad (10.27)$$

Если напряжение выхода относить непосредственно к напряжению, подаваемому на сетку лампы, то коэффициент передачи четырёхполюсника совпадает с коэффициентом усиления схемы.

В случае же многокаскадных усилителей удобно применять понятие об активном четырёхполюснике, на который распространяются все положения теории пассивных четырёхполюсников, за исключением принципа взаимности. Пример применения понятия об активном четырёхполюснике будет приведён в § 10.11 при рассмотрении полупроводниковых усилителей.

Рис. 10.14

Полезно подчеркнуть, что значение эквивалентных схем типа рис. 10.8, 10.12 и 10.13 исчерпывается установлением связи между переменными составляющими напряжений и токов. Так как постоянные составляющие токов и напряжений этими схемами не учитываются, то никаких выводов об энергетических показателях усилителя, т. е. об отдаче усилителя, на основании эквивалентных схем сделать нельзя. Вместе с тем, эквивалентные схемы анодной цепи линейного усилителя могут быть использованы для выбора нагрузочного сопротивления по максимуму отдаваемой мощности. Как и в обычной линейной электрической цепи, этот максимум получается при равенстве нагрузочного сопротивления R и внутреннего сопротивления R_i.

Рассмотрим в заключение вопрос об отдаче линейного усилителя. Если обратиться к рис. 10.3, то нетрудно убедиться, что при малых амплитудах сигнала среднее значение анодного тока одинаково как при наличии, так и в отсутствие усиливаемого колебания. Подводимая к лампе от источника питания мощность всегда одинакова и равна

$$P_0 = E_a \cdot I_{a0}. \tag{10.28}$$

В отсутствие сигнала вся эта мощность теряется на аноде лампы (нагрев электронной бомбардировкой). При действии сигнала часть этой мощности переходит в нагрузку. Нетрудно подсчитать эту мощность по формуле:

$$P_{\sim} = \frac{U_a \cdot I_a}{2} \cos \varphi_Z. \tag{10.29}$$

Так как при линейном усилении $I_a \ll I_{a0}$, а U_a меньше, чем E_a, то $P_{\sim} \ll P_0$.

Таким образом, линейные усилители характеризуются очень низкой отдачей. Почти вся подводимая к лампе мощность P_0 выделяется на аноде лампы, как и в отсутствие сигнала.

§ 10.3. Апериодические усилители низкой частоты

В усилителях низкой частоты в качестве анодной нагрузки используются активные сопротивления, индуктивности (дроссели) и трансформаторы с магнитным сердечником. В усилителях напряжения наибольшее распространение получила нагрузка в виде сопротивления.

Схема усилительной ступени на сопротивлениях показана на рис. 10.15. Основной нагрузкой усилителя является сопротивление R_a. Цепочка C_g—R_g служит для разделения цепей по постоянному току. Сопротивление R_g, как правило, является высокоомным сопротивлением, очень большим по сравнению с R_a. C_0 включает междуэлектродную ёмкость лампы, а также ёмкость внешней схемы, шунтирующей нагрузочное сопротивление R_a.

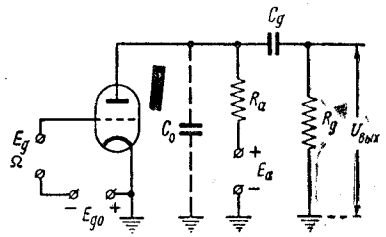


Рис. 10.15

Эквивалентная схема усилителя при замене лампы генератором тока показана на рис. 10.16. На этой схеме потенциал точки $к$ (катод) принят равным нулю, а точки a (анод) равным — U_a (см. § 10.2).

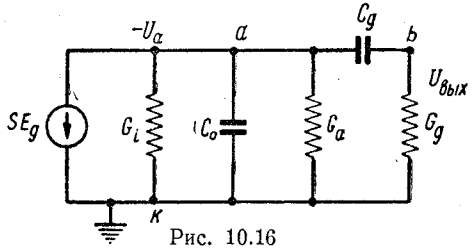


Рис. 10.16

Для определения коэффициента усиления в виде отношения комплексных амплитуд

$$K(i\Omega) = \frac{\vec{U}_{вых}}{\vec{E}_g},$$

воспользуемся методом узловых напряжений. Для узла a можно составить следующее уравнение:

$$(-\vec{U}_a)(G_i + G_a + i\Omega C_0) + [(-\vec{U}_a) - \vec{U}_{вых}]\, i\Omega C_g = -SE_g. \tag{10.30}$$

Для узла b:

$$\vec{U}_{вых} G_g + [\vec{U}_{вых} - (-\vec{U}_a)]\, i\Omega C_g = 0. \tag{10.31}$$

Совместное решение этих уравнений даёт для $\vec{U}_{вых}$ следующее выражение:

$$\vec{U}_{вых} = -\frac{S\vec{E}_g}{(G_i + G_a)\left(1 + \frac{G_g}{i\Omega C_g}\right) + i\Omega C_0 + \frac{C_0 + C_g}{C_g} G_g}. \tag{10.32}$$

Учитывая, что ёмкость C_g блокировочного конденсатора обычно во много раз больше, чем ёмкость C_0, можно считать

$$\frac{C_0+C_g}{C_g}\approx 1.$$

Поэтому для комплексного коэффициента усиления получаем следующее выражение:

$$K(\mathrm{i}\,\Omega)=-\frac{S}{(G_i+G_a+G_g)-\mathrm{i}\left[\frac{G_g}{\Omega C_g}(G_i+G_a)-\Omega C_0\right]}. \qquad (10.33)$$

Модуль коэффициента усиления

$$|K(\mathrm{i}\,\Omega)|=\frac{U_{вых}}{E_g}=\frac{S}{\sqrt{(G_i+G_a+G_g)^2+\left[\frac{G_g}{\Omega C_g}(G_i+G_a)-\Omega C_0\right]^2}}. \qquad (10.34)$$

С помощью выражения (10.34) нетрудно выявить влияние ёмкостей C_0 и C_g на форму частотной характеристики усилителя. Рассмотрим три участка акустического диапазона: нижние, средние и верхние частоты. На очень низких частотах основное значение в знаменателе имеет слагаемое:

$$\frac{G_g}{\Omega C_g}(G_i+G_g).$$

Отбрасывая все остальные слагаемые, получаем для $|K(\mathrm{i}\,\Omega)|$ при очень малых частотах следующее приближённое выражение:

$$|K(\mathrm{i}\,\Omega)|\approx\frac{S\,\Omega C_g}{(G_i+G_a)G_g}. \qquad (10.34')$$

Учитывая, что при использовании пентодов

$$G_i=\frac{1}{R_i}\ll G_a=\frac{1}{R_a},$$

получаем

$$|K(\mathrm{i}\,\Omega)|\approx S\cdot R_a\cdot\frac{R_g}{\frac{1}{\Omega C_g}}. \qquad (10.34'')$$

В этом выражении множитель SR_a определяет отношение напряжений $\frac{U_a}{E_g}$ [см. § 10.2, ф-лу (10.26)], а второй множитель характеризует деление напряжений в цепочке C_g, R_g.

На средних частотах можно выделить участок диапазона, на котором слагаемое $\frac{G_g}{\Omega C_g}(G_i+G_a)$ очень мало по сравнению с слагаемым $(G_i+G_a+G_g)$, а ΩC_0 ещё очень мало (из-за малости C_0). На этом участке коэффициент усиления достигает максимального значения, равного

$$|K(\mathrm{i}\,\Omega)|\approx\frac{S}{G_i+G_a+G_g}.$$

Если проводимости G_i и G_g малы по сравнению с G_a, то

$$|K(\mathrm{i}\,\Omega)|\approx\frac{S}{G_a}=SR_a.$$

На верхних частотах коэффициент усиления падает из-за шунтирующего действия ёмкости C_0.

Таким образом, частотная характеристика усилителя на сопротивлениях должна иметь вид, показанный на рис. 10.17.

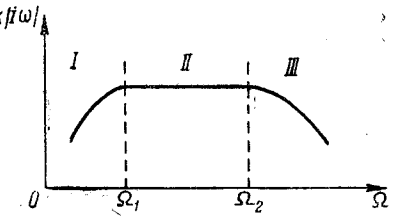


Рис. 10.17

При выборе величины нагрузочного сопротивления R_a, а также элементов разделительной цепочки C_g, R_g, необходимо исходить из условия обеспечения достаточной равномерности частотной характеристики в области наиболее важных частот. Если задана верхняя граница области I (рис. 10.17), то постоянная времени цепи C_g, R_g может быть найдена из условия:

$$\frac{1}{\Omega_1 C_g}\ll R_g,$$

или

$$R_g C_g\gg\frac{1}{\Omega_1}. \qquad (10.35)$$

Сопротивление R_g обычно не превышает 200—500 *ком*, поэтому при $\Omega\approx 2\pi 50$, ёмкость C_g должна быть порядка сотых долей микрофарады.

В области высших частот спадание частотной характеристики начинается тогда, когда проводимость ёмкости C_0 становится соизмеримой с проводимостью нагрузки $G_a=\frac{1}{R_a}$, поэтому условие равномерности частотной характеристики вблизи границы области II (рис. 10.17) можно представить в виде

$$\Omega_2 C_0\ll\frac{1}{R_a}.$$

Следовательно, если задана частота Ω_2 и известно значение C_0 (по данным лампы и монтажа схемы), то можно найти наибольшее приемлемое значение R_a. Обычно C_0 составляет около $20 \div 30$ *см*, поэтому при частотах $\Omega_2 \approx 2\pi \cdot 6000$ сопротивление анодной нагрузки не должно превышать нескольких сот килоом.

В высококачественных усилителях отклонение частотной характеристики от максимальной ординаты в рабочей полосе частот не должно превышать $1 \div 2$ *дб* ($12 \div 26\%$).

Иногда неравномерность частотной характеристики оценивают по отклонению от ординаты, соответствующей частоте $F = 1000$ *гц*, как наиболее важной для сохранения качества воспроизведения звуковых передач.

Следует отметить, что на сопротивлении R_a создаётся падение напряжения за счёт постоянной слагающей анодного тока. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе величины напряжения источника питания E_a.

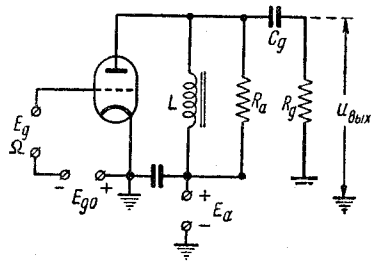


Рис. 10.18

Схема усилителя с дросселем показана на рис. 10.18. Преимуществом этой схемы является отсутствие падения напряжения на нагрузке за счёт постоянного тока. Основной нагрузкой, как и в схеме рис. 10.15, является сопротивление R_a, а индуктивность L должна быть достаточно большой для создания сопротивления значительно превышающего R_a. Так как наибольшее шунтирующее действие дросселя имеет место в области низких частот, то для получения удовлетворительной частотной характеристики должно быть выполнено условие:

$$\Omega_{мин} L > R_a.$$

Частотная характеристика усилителя с дросселем мало отличается от характеристики, показанной на рис. 10.17.

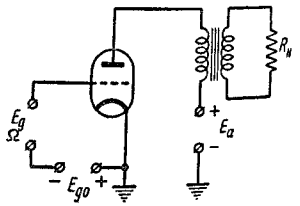


Рис. 10.19

Преимуществом схемы усилителя с трансформатором (рис. 10.19) является удобство согласования нагрузочного сопротивления $R_н$ с анодной цепью лампы и разделение цепей по постоянному напряжению.

Если не учитывать индуктивности рассеяния (идеальный трансформатор), то сопротивление нагрузки $R_н$ перечисляется в цепь первичной обмотки трансформатора по формуле:

$$R''_н = n^2 R_н,$$

где n — коэффициент трансформации, равный отношению числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки.

При учёте индуктивности рассеяния, а также ёмкостей обмоток, эквивалентная схема трансформатора усложняется. Индуктивности и ёмкости обмоток трансформатора могут привести к резонированию схемы на некоторых участках частотного диапазона, и, следовательно, к неравномерности частотной характеристики. Иногда этим пользуются для создания искусственного подъёма характеристики в области верхних частот заданного диапазона. Трансформаторные усилители применяются преимущественно в усилителях мощности.

Приведённые выше данные о влиянии линейных элементов схемы на частотную характеристику определяют степень частотных (линейных) искажений в усилителе.

Для полной характеристики качественных показателей усилителя необходимо ещё учесть нелинейные искажения, обусловленные некоторой неизбежной кривизной характеристики лампы. Эти искажения оцениваются коэффициентом нелинейных искажений, определяемым по формуле:

$$K_f = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \cdots}}{A_1}, \qquad (10.36)$$

где A_1 — амплитуда основной частоты, а A_2, A_3 и т. д. — амплитуды высших гармоник выходного напряжения (или тока), возникающие при подаче на вход усилителя гармонического колебания.

Для теоретического определения этих амплитуд можно воспользоваться приближённым представлением характеристики в виде ряда (10.5). Подставив в это выражение

$$\Delta e_g = E_g \cos \Omega t,$$

получим

$$i_a \approx i_{a0} + \alpha E_g \cos \Omega t + \frac{\beta E_g^2}{2}(1 + \cos 2\Omega t) + \frac{\gamma E_g^3}{4}(3\cos \Omega t + \cos 3\Omega t) + \cdots =$$

$$= \left(i_{a0} + \frac{\beta E_g^2}{2} + \cdots\right) + \left(\alpha E_g + \frac{3\gamma E_g^3}{4} + \cdots\right)\cos \Omega t +$$

$$+ \left(\frac{\beta E_g^2}{2} + \cdots\right)\cos 2\Omega t + \left(\frac{\gamma E_g^3}{4} + \cdots\right)\cos 3\Omega t + \cdots$$

Отсюда видно, что из-за нелинейности характеристики лампы несколько изменяется амплитуда основной частоты и возникают высшие гармоники с амплитудами:

$$I_2 \approx \frac{\beta E_g^2}{2} = \frac{S'}{2 \cdot 2!} E_g^2 \quad \text{при частоте } 2\Omega,$$

$$I_3 \approx \frac{\gamma E_g^3}{4} = \frac{S''}{4 \cdot 3!} E_g^3 \quad \text{„ „ } 3\Omega \text{ и т. д.}$$

Считая напряжения на выходе усилителя пропорциональными амплитудам I_2, I_3 и т. д., а $I_1 \approx \alpha E_g = S E_g$, найдём коэффициент нелинейных искажений:

по второй гармонике

$$K_{f_2} = \frac{I_2}{I_1} \approx \frac{\beta E_g^2}{2\alpha E_g} = \frac{S'}{2 \cdot 2! S} E_g,$$

по третьей гармонике

$$K_{f_3} = \frac{I_3}{I_1} \approx \frac{\gamma E_g^3}{4\alpha E_g} = \frac{S''}{4 \cdot 3! S} E_g^2 \quad \text{и т. д.}$$

При правильном выборе режима работы лампы коэффициенты K_{f_2}, K_{f_3} и т. д. не превышают одного-двух процентов.

§ 10.4. Импульсные усилители на сопротивлениях

Для сохранения формы усиливаемых импульсов требуется передача полосы частот, связанной с длительностью фронта соотношением (9.46). При длительностях порядка микросекунды и меньше требуется очень широкая полоса частот порядка нескольких мегагерц.

Для получения достаточно равномерной частотной характеристики приходится применять относительно малые нагрузочные сопротивления, так как в противном случае возрастает шунтирующее действие ёмкостей лампы и схемы в области высоких частот. В результате усиление, даваемое одной ступенью, получается относительно небольшим и для получения требуемого усиления приходится применять несколько ступеней. Схема усилителя, составленного из n ступеней, представлена на рис. 10.20. Обычно все ступени содержат одинаковые элементы.

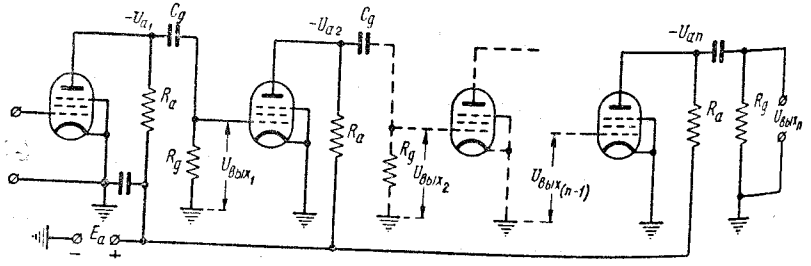


Рис. 10.20

Для определения усиления прямоугольных импульсов и выявления искажений их формы рассмотрим сперва напряжение $u_{вых_1}(t)$ на выходе первой ступени при включении на вход усилителя

в момент $t = 0$ постоянного напряжения. Диаграмма сеточного напряжения и анодного тока первой лампы показана на рис. 10.21. В момент приложения на сетку первой лампы напряжения E_g (плюсом на сетку) анодный ток изменяется скачком на величину $+\Delta i_a$, которая может быть выражена через E_g с помощью соотношения:

$$\Delta i_a \approx S E_g.$$

Для определения напряжения $u_{вых_1}(t)$ воспользуемся эквивалентной схемой, показанной на рис. 10.22. Эта схема отличается от схемы

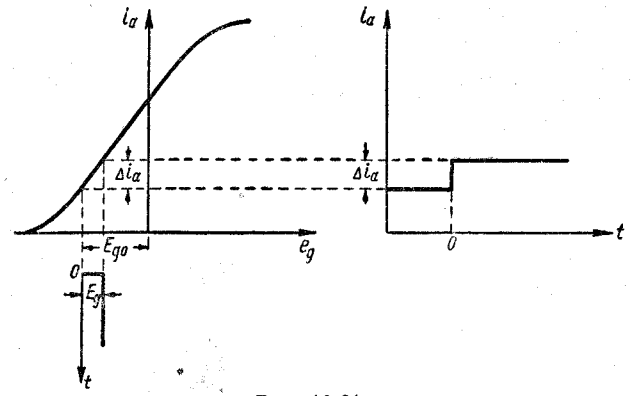


Рис. 10,21

рис. 10.16 тем, что включена добавочная ёмкость C_2, учитывающая входную ёмкость второй лампы. Так как режим усиления предполагается линейным, то можно воспользоваться спектральным подходом к определению выходного напряжения. В отличие от усилителя акустических частот (§ 10.3), где мы интересовались только частотной характеристикой, в данном случае необходимо учитывать как частотную, так и фазовую характеристику усилителя. Это требование будет выполнено если в основу анализа положить комплексный коэффициент усиления ступени.

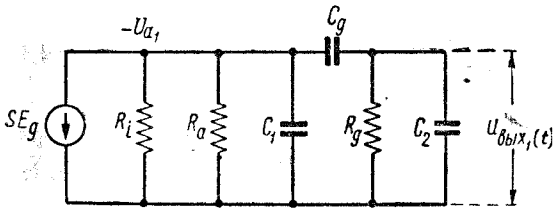


Рис. 10.22

Составляя уравнения для узловых напряжений, аналогичные ур-ниям (10.30) — (10.31), т. е. предполагая, что на вход

усилителя действует гармоническое напряжение, придём к следующему выражению для коэффициента усиления:

$$K(\mathrm{i}\Omega) = -Sa_1 \cdot \frac{\mathrm{i}\Omega}{(\mathrm{i}\Omega)^2 + \mathrm{i}\Omega b_1 + b_0}, \tag{10.37}$$

где постоянные a_1, b_1 и b_0, зависящие от параметров схемы, определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{C_g}{C_1C_2 + C_1C_g + C_2C_g} \\ b_1 &= \frac{\frac{C_1+C_g}{R_g} + \frac{C_2+C_g}{R_э}}{C_1C_2 + C_1C_g + C_2C_g} \\ b_0 &= \frac{1}{R_g \cdot R_э\,(C_1C_2 + C_1C_g + C_2C_g)} \end{aligned}\right\}. \tag{10.38}$$

Здесь

$$R_э = \frac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a}.$$

Имея в виду применение выражения (9.22), заменяем в ф-ле (10.37) $\mathrm{i}\Omega$ на p.

Таким образом,

$$K(p) = -Sa_1 \frac{p}{p^2 + b_1 p + b_0}. \tag{10.39}$$

Подставляя это выражение в ур-ние (9.22), а также $E(p) = \frac{E_g}{p}$ [для скачка эдс $e_{g_1}(t) = E_g$ при $t = 0$], получим для искомого напряжения следующее выражение:

$$u_{вых_1}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{E_g}{p}\left[-Sa_1 \frac{p}{p^2 + b_1 p + b_0}\right] e^{pt}\,dp =$$

$$= -SE_g a_1 \cdot \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2 + b_1 p + b_0}\,dp. \tag{10.40}$$

Полюсы подинтегральной функции:

$$p_1 = -\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0},$$

$$p_2 = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}.$$

Применяя ф-лу (9.11), после несложных преобразований получим следующее окончательное выражение:

$$u_{вых_1}(t) = -\frac{SE_g a_1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0}}\left[\mathrm{e}^{\left(-\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - b_0}\right)t} - \mathrm{e}^{\left(-\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0}\right)t}\right]. \tag{10.41}$$

Формула (10.41), действительная при любых соотношениях между параметрами схемы (рис. 10.22), может быть значительно упрощена применительно к некоторым интересным для практики частным случаям. В реальных усилителях обычно $R_a \ll R_g$, поэтому и $R_э \ll R_g$, что позволяет считат $b_1^2 \gg 4b_0^2$. Можно поэтому воспользоваться следующими приближениями:

$$p_1 = -\frac{b_1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4b_0}{b_1^2}}\right] \approx -\frac{b_1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{2b_0}{b_1^2}\right)\right] = -\frac{b_0}{b_1},$$

$$p_2 = -\frac{b_1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4b_0}{b_1^2}}\right] \approx -\frac{b_1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2b_0}{b_1^2}\right)\right] \approx -b_1,$$

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0}} \approx \frac{a_1}{b_1}.$$

Учитывая выражения (10.38) для a_1, b_1, b_0 и используя условия $R_э \ll R_g$, получим следующие выражения:

$$p_1 = -\frac{1}{R_g(C_2 + C_g)},$$

$$p_2 = -\frac{C_2 + C_g}{R_э(C_2C_1 + C_2C_g + C_1C_g)},$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{C_g R_э}{C_2 + C_g}.$$

Если, как это обычно бывает в практике, C_1 и C_2 малы по сравнению с C_g, то приведённые выше выражения ещё более упрощаются:

$$p_1 = -\frac{1}{R_g C_g} = -\frac{1}{\tau_g},$$

$$p_2 = -\frac{1}{R_э(C_1 + C_2)} = -\frac{1}{\tau_0}.$$

Здесь τ_g — постоянная времени последовательной цепи, составленной из разделительного конденсатора C_g и выходного сопротивления R_g, а τ_0 — постоянная времени, обусловленная в основном нагрузочным сопротивлением R_a (мало отличающимся от $R_э$) и шунтирующими ёмкостями C_1 и C_2.

При сделанных допущениях ф-ла (10.41) принимает следующий вид:

$$u_{вых}(t) = -SR_э E_g\left[e^{-\frac{t}{\tau_g}} - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right]. \qquad (10.42)$$

Так как по условию $\tau_g \gg \tau_0$, приходим к выводу, что второй член в правой части выражения (10.42), убывающий значительно быстрее, чем первый, имеет существенное значение при рассмотрении начальной стадии процесса, т. е. при малых значениях времени. Этот член необходимо поэтому учитывать при исследовании фронта выходного напряжения для значений t, соизмеримых с постоянной времени $\tau_0 = R_э(C_1 + C_2)$.

При $t \gg \tau_0$ в ф-ле (10.42) остаётся лишь первый член, обусловленный постоянной времени разделительного конденсатора C_g и сопротивлением R_g (точнее сопротивлением $R_g + R_a$).

Эти положения можно вывести также, исходя из влияния τ_0 и τ_g на частотную характеристику $|K(i\omega)|$ усилителя. Ёмкости C_1 и C_2, шунтирующее действие которых возрастает с частотой, обусловливают снижение усиления в области высоких частот, а последовательно включённая ёмкость, наоборот, снижает усиление в области низких частот. Так как крутизна фронта выходного сигнала при появлении на входе усилителя скачка эдс определяется высокочастотной частью спектра, то ослабление этой части в усилителе приводит к снижению крутизны фронта.

Ясно также, что ослабление низкочастотной части спектра определяет искажение выходного сигнала при больших значениях t.

Переходя теперь от воздействия в виде скачка электродвижущей силы к прямоугольному импульсу, приходим к выводу, что значение второго члена в выражении (10.42) определяется соотношением между длительностью импульса τ и постоянной времени τ_0. Очевидно, что при $\tau \gg \tau_0$ этим членом можно пренебречь. На рис. 10.23 и 10.24 изображены графики, показывающие искажение выходного напряжения, соответственно, при $\tau \gg \tau_0$ и $\tau = \tau_0$. Графики получены путём линейного наложения решения (10.42) для двух скачков эдс, обратных по знаку и сдвинутых во времени на τ.

В первом случае, т. е. когда шунтирующие ёмкости C_1 и C_2 практически не сказываются на величине броска выходного напряжения, максимальное значение импульса равно:

$$U_{макс} \approx SR_э E_g = S\frac{R_a \cdot R_g}{R_a + R_g} E_g. \qquad (10.43)$$

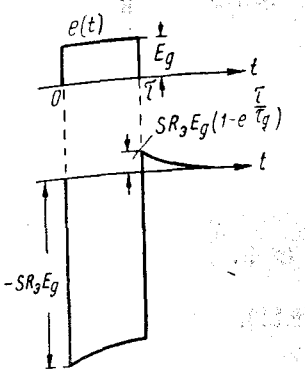


Рис. 10.23

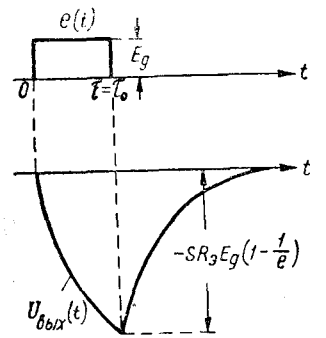


Рис. 10.24

Таким образом, коэффициент усиления для импульса

$$K = \frac{U_{макс}}{E_g} \approx S\frac{R_a \cdot R_g}{R_a + R_g}. \qquad (10.44)$$

На рис. 10.25 изображён график $u_{вых}(t)$ при воздействии на усилитель очень короткого (по сравнению с постоянной времени τ_0) импульса. Из ф-лы (10.42) и из рис. (10.25) видно, что при $\frac{\tau}{\tau_0} \ll 1$ амплитуда импульса на выходе усилителя:

$$U_{макс} = SR_э E_g\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right) \approx SR_э E_g\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{SE_g\tau}{(C_1 + C_2)}. \qquad (10.44')$$

Полагая $E_g\tau = 1$, получим

$$u_{макс} = \frac{S}{(C_1 + C_2)}.$$

Этот результат близок к случаю воздействия на усилитель единичного импульса с площадью $E_g\tau = 1$ при $\tau \to 0$. Основное различие заключается в том, что при реальной (ограниченной) величине E_g входного импульса значение $U_{макс}$ достигается в момент $t = \tau_0$, а не $t = 0$, как в случае единичного импульса.

На основании проведённого рассмотрения можно придти к следующим условиям неискажённого усиления импульсов:

1. Постоянная времени τ_0, обусловленная в основном сопротивлением R_a и ёмкостями C_1 и C_2, должна быть не больше длительности фронта выходного импульса.

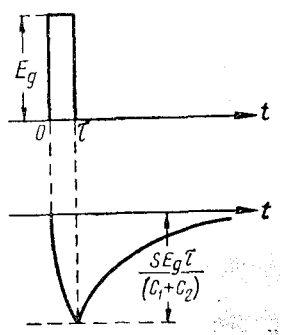


Рис. 10.25

2. Постоянная времени разделительной цепи C_g и R_g должна быть велика по сравнению с длительностью τ усиливаемого импульса.

Если произведение $C_g R_g$ мало по сравнению с τ, разделительная цепь работает как дифференцирующая цепь [см. § 9.3].

Решение (10.40) можно обобщить на произвольное число ступеней усиления. В случае n одинаковых ступеней коэффициент усиления в соответствии с выражением (10.39) равен

$$K(p)=(-1)^n (S a_1)^n \frac{p^n}{(p^2+b_1 p+b_0)^n}. \qquad (10.45)$$

Подставив $K(p)$ в выражение (9.22), получим вместо (10.40) следующее выражение:

$$u_{n\,вых}(t)=(-1)^n (S a_1)^n E_g \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{p^{n-1} e^{pt}}{(p^2+b_1 p+b_0)^n}\,dp. \qquad (10.46)$$

Определяя вычеты в полюсах n-й кратности по ф-ле (9.12), можно получить требуемое решение. При сделанных выше допущениях о малости $R_э$ по сравнению с R_g и C_1+C_2 по сравнению с C_g, выражение (10.46) приводится к виду:

$$u_{n\,вых}(t)\approx(-SR_э)^n E_g\left[e^{-\frac{t}{\tau_g}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!(-1)^i\left(\frac{t}{\tau_g}\right)^i}{(i!)^2(n-1-i)!}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^i}{i!}\right]. \qquad (10.47)$$

В области значений t, соизмеримых с τ_0, первый член близок к единице и ф-ла (10.47) для $n=1$, 2 и 3 принимает одну из следующих форм:

$$\left.\begin{aligned} u_{1\,вых}(t)&=-SR_э E_g\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)\\ u_{2\,вых}(t)&=(SR_э)^2 E_g\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right)e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right]\\ u_{3\,вых}(t)&=-(SR_э)^3 E_g\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau_0}+\frac{1}{2!}\frac{t^2}{\tau_0^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (10.48)$$

и т. д.

В области больших, по сравнению с τ_0, значений t вторым членом в (10.47) можно пренебречь.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} u_{1вых}(t)&=-SR_э E_g e^{-\frac{t}{\tau_g}}\\ u_{2вых}(t)&=(SR_э)^2 E_g\left(1-\frac{t}{\tau_g}\right)e^{-\frac{t}{\tau_g}}\\ u_{3вых}(t)&=-(SR_э)^3 E_g\left(1-2\frac{t}{\tau_g}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_g^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_g}}\end{aligned}\right\} \qquad (10.49)$$

и т. д.

Графики $u_{вых}(t)$ при возникновении на входе скачка, вычисленные по ф-лам (10.49), приведены на рис. 10.26.

На основании полученных результатов нетрудно представить себе картину явлений, происходящих при подаче на вход многоступенного усилителя импульсов прямоугольной формы.

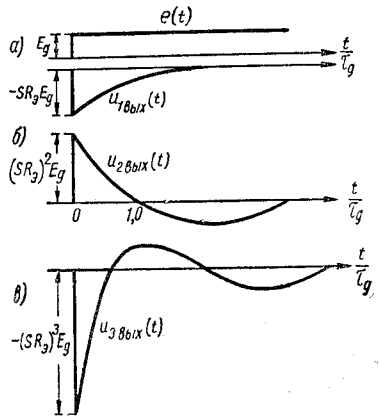


Рис. 10.26

§ 10.5. Прохождение периодической последовательности импульсов через усилитель на сопротивлениях

Пусть на вход однолампового усилителя с сопротивлениями, схема которого совпадает с рис. 10.15, подаётся периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Требуется найти напряжение на выходе усилителя в установившемся режиме, т. е. спустя достаточно большое время после включения эдс.

Эту задачу можно решить различными способами, в зависимости от соотношения между периодом следования импульсов T, постоянными времени цепи τ_0 и τ_g и длительностью импульса τ. Если $T\gg\tau$, то напряжение на выходе усилителя от каждого из импульсов затухает практически полностью к моменту начала действия последующего импульса. В этом случае удобно рассматривать действие каждого из импульсов отдельно, в соответствии с чем наиболее удобным является применение интеграла Фурье или контурного интеграла, как это было сделано в § 10.4.

Если T соизмеримо с τ_0, то необходимо учитывать наложение эффектов от отдельных импульсов. Для этой цели можно воспольз-

зоваться следующей методикой. Находим, прежде всего, напряжение на выходе усилителя, создаваемое импульсом эдс в интервале от $t=0$ до $t=T$, внутри которого расположен данный импульс.

Разбивая этот интервал на два промежутка: от 0 до τ и от τ до T, можно, на основании ф-лы (10.42), написать для выходного напряжения в указанных промежутках следующие выражения:

$$u'_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left(e^{-\frac{t}{\tau_g}}-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right),\quad 0<t<\tau. \tag{10.50}$$

Знак минус здесь опущен.

Во втором промежутке, учитывая задний фронт импульса, находим

$$u''_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left[\left(e^{-\frac{t}{\tau_g}}-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)-\left(e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_g}}-e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_0}}\right)\right],\quad \tau<t<T. \tag{10.51}$$

Выражение (10.51) может быть использовано и для определения напряжений, создаваемых в интервале $0<t<T$ предыдущими импульсами. Очевидно, от импульса эдс, действовавшего в интервале $-T<t<-(T-\tau)$, выходное напряжение в момент времени t будет равно $u''_{вых}(t+T)$, от импульса, действовавшего в интервале $-2T<t<-(2T-\tau)$, равно $u''_{вых}(t+2T)$ и т. д.

Следовательно, результирующее напряжение на выходе усилителя будет:

в промежутке $0<t<\tau$

$$u_{вых}(t)=u'_{вых}(t)+u''_{вых}(t+T)+u''_{вых}(t+2T)+\cdots,$$

в промежутке $\tau<t<T$

$$u_{вых}(t)=u''_{вых}(t)+u''_{вых}(t+T)+u''_{вых}(t+2T)+\cdots$$

Подставляя в ф-лы (10.50)—(10.51) t, $t+T$, $t+2T$ и т. д. и суммируя полученные результаты, придём к следующим выражениям.

В интервале $0<t<\tau$:

$$u_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left[e^{-\frac{t}{\tau_g}}-e^{-\frac{t}{\tau_0}}+e^{-\frac{t}{\tau_g}}\left(1-e^{\frac{\tau}{\tau_g}}\right)\left(e^{-\frac{T}{\tau_g}}+e^{-\frac{2T}{\tau_g}}+\cdots\right)-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(1-e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\left(e^{-\frac{T}{\tau_0}}+e^{-\frac{2T}{\tau_0}}+\cdots\right)\right]. \tag{10.52}$$

В интервале $\tau<t<T$:

$$u_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left[e^{-\frac{t}{\tau_g}}\left(1-e^{\frac{\tau}{\tau_g}}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{\tau_g}}+e^{-\frac{2T}{\tau_g}}+\cdots\right)-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(1-e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\left(1+e^{-\frac{T}{\tau_0}}+e^{-\frac{2T}{\tau_0}}+\cdots\right)\right]. \tag{10.53}$$

Используя формулу геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{kT}{\tau_g}}=\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{\tau_g}}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{kT}{\tau_0}}=\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{\tau_0}}},$$

нетрудно привести выражения (10.52)—(10.53) к следующему окончательному виду:

$$u_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left[\frac{1-e^{-\frac{(T-\tau)}{\tau_g}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau_g}}}e^{-\frac{t}{\tau_0}}-\frac{1-e^{\frac{\tau}{\tau_0}}}{1-e^{\frac{T}{\tau_0}}}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right] \tag{10.54}$$

при $0<t<\tau$

и

$$u_{вых}(t)=SR_{э}E_{g}\left[\frac{1-e^{\frac{\tau}{\tau_g}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau_g}}}e^{-\frac{t}{\tau_g}}-\frac{1-e^{\frac{\tau}{\tau_0}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau_0}}}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right] \tag{10.55}$$

при $\tau<t<T$.

Вне интервала $0<t<T$ процесс может быть продолжен периодически.

При $\frac{T}{\tau_g}\gg 1$ выражение (10.54) переходит в (10.50), а (10.55) в (10.51).

Графики функций $\frac{u_{вых}\left(\frac{t}{T}\right)}{SR_{э}E_{g}}$ для импульсной последовательности, показанной на рис. 10.27 (при $T=2\tau$), при некоторых значениях параметра $\frac{T}{2\tau_0}$ изображены на рис. 10.28. Отношение $\frac{T}{2\tau_g}$ принято постоянным и равным единице.

Подобным же образом можно рассмотреть воздействие на усилитель периодической последовательности импульсов любой формы.

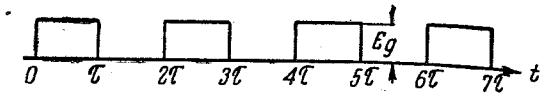


Рис. 10.27

Следует отметить, что применение рядов Фурье к решению подобной задачи оказывается значительно менее удобным, чем использованный выше метод. Как отмечалось в § 2.3, это объясняется медленной сходимостью рядов Фурье, представляющих импульсные функции.

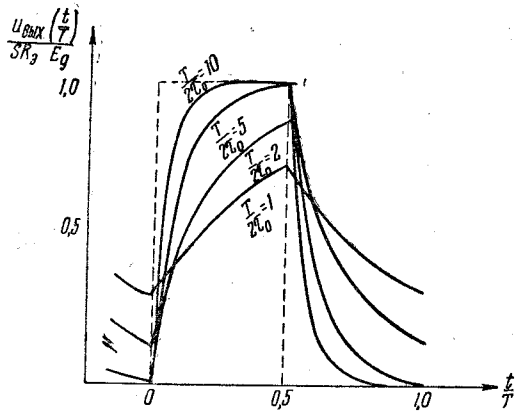


Рис. 10.28

§ 10.6. Усилители постоянного тока

В некоторых случаях от апериодических усилителей требуется не только неискажённое воспроизведение формы сигнала, но также и передача постоянной слагающей входного напряжения. Такие требования предъявляются, например, в телевидении, когда наряду с короткими импульсами на выходе видеоусилителя должна быть выделена постоянная составляющая.

Особенно часто встречается необходимость в усилителях постоянного тока в устройствах автоматического регулирования, когда на вход усилителя подаётся постоянное напряжение пропорциональное „ошибке" [отклонению, например, частоты от номинального значения в устройствах автоподстройки частоты], а на выходе усилителя должно развиваться также постоянное напряжение, строго пропорциональное входному напряжению.

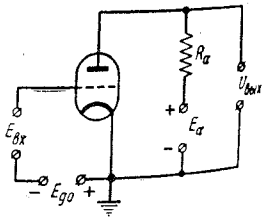


Рис. 10.29

Ясно, что усилитель постоянного тока должен строиться на активных сопротивлениях и что применение переходных (разделительных) конденсаторов недопустимо. Простейшая схема одноступенного усилителя постоянного тока представлена на рис. 10.29.

Рассмотрим основные соотношения в усилителе при допущении о линейности усиления, т. е. при допущении об относительной малости усиливаемого напряжения $E_{вх}$.

Если в отсутствие напряжения сигнала $E_{вх}$ на сетке действовало исходное напряжение смещения E_{g0} и анодный ток равнялся при этом I_{a0}, то исходное напряжение на выходе было равно:

$$U_{вых} = E_a - I_{a0} \cdot R_a.$$

При подаче на сетку напряжения $E_{вх}$ приращение анодного тока может быть найдено с помощью выражения:

$$\Delta I_a = S_д E_{вх} = S \frac{R_i}{R_i + R_a} E_{вх}, \qquad (10.56)$$

а приращение напряжения на выходе:

$$\Delta U_{вых} = -\Delta I_a \cdot R_a = -\frac{SR_a}{1 + \frac{R_a}{R_i}} E_{вх}. \qquad (10.57)$$

Таким образом, коэффициент усиления схемы равен

$$K = \left| \frac{\Delta U_{вых}}{E_{вх}} \right| = \frac{SR_a}{1 + \frac{R_a}{R_i}}. \qquad (10.58)$$

Этот результат, естественно, совпадает с выражением (10.24), если в последнем подставить $Z = R_a$.

Некоторые особенности усилителя постоянного тока могут быть выявлены при учёте реальных схем сопряжения усилителя с источником усиливаемого напряжения, а также сопряжения отдельных ступеней каскадного усилителя. На рис. 10.30 *а* представлена схема двухступенного усилителя постоянного тока, на вход которого напряжение подаётся с диодного детектора. На сетки ламп необходимо подавать отрицательные напряжения смещения E_{g0_1} и E_{g0_2} для компенсации положительных напряжений, поступающих с предыдущих элементов схемы (с сопротивления R_g на сетку лампы $Л_1$ и с сопротивления R_{a1} на сетку $Л_2$).

При большом числе ступеней необходимость в индивидуальных батареях смещения для установления различных напряжений на сетках ламп является существенным недостатком. От этого недостатка можно освободиться при помощи делителей R_1, R_2 (рис. 10.30 *б*), позволяющих регулировать исходное напряжение, поступающее на сетку с анода предыдущей ступени. При этом следует, конечно, иметь в виду, что вместе с понижением положительного напряжения уменьшается также и изменение, обусловленное действием уси-

ливаемого напряжения, иными словами, включение делителя R_1, R_2 уменьшает коэффициент усиления каждой ступени в $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ раз.

Одним из важнейших условий удовлетворительной работы усилителей постоянного тока является постоянство напряжений всех ис-

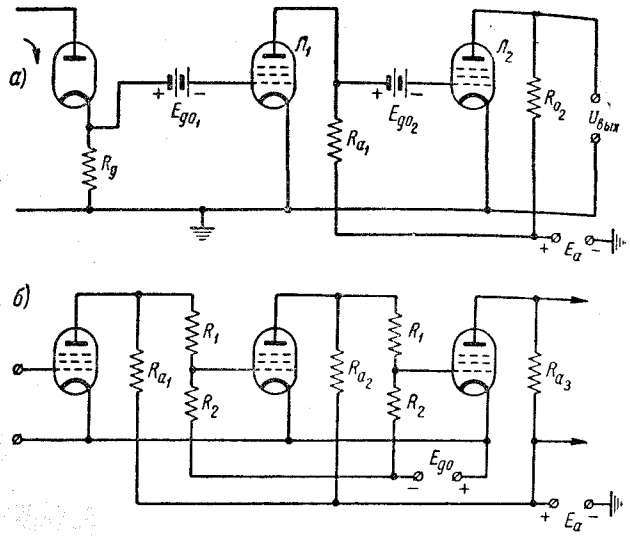


Рис. 10.30

точников питания. Это объясняется тем, что изменение выходного напряжения, вызванное нестабильностью режима, воспринимается как результат изменения входного напряжения. Особенно велика ошибка в схемах с очень большим усилением.

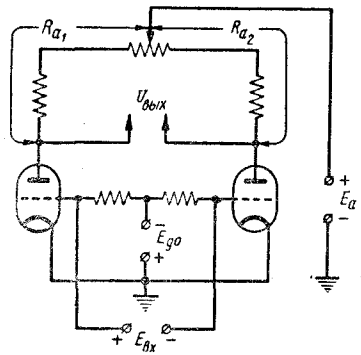


Рис. 10.31

Для ослабления влияния нестабильности режима иногда применяются специальные мостовые схемы, в которых устраняется непосредственная зависимость выходного напряжения от напряжения источника анодного питания E_a. Принцип действия подобных схем поясняется рис. 10.31. В отсутствие усиливаемого напряжения схема симметрична и разность потенциалов между анодами обеих ламп равна нулю. При подаче на сетки ламп напряжения сигнала (симметричного относительно земли) потенциал анода одной из ламп снижается, а другой повышается. Таким образом, снимаемое с анодов ламп выходное напряжение пропорционально $E_{вх}$ и не зависит непосредственно от E_a. Некоторым недостатком схемы является необходимость в источнике сигнала, симметричном относительно земли.

§ 10.7. Резонансные и полосовые усилители. Усиление амплитудно-модулированных колебаний

Для усиления высокочастотных колебаний в радиоприёмных устройствах применяются усилители с колебательными системами, настроенными на основную частоту колебания. Так как на вход приёмника действуют очень слабые напряжения, режим усиления в подобных устройствах получается линейный. Некоторым исключением может являться лишь оконечный каскад усилителя, где амплитуды могут достигать значительных величин.

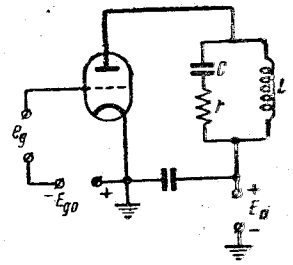


Рис. 10.32

Схема одной ступени резонансного усилителя изображена на рис. 10.32. Анодной нагрузкой в этой схеме является параллельный контур. Сопротивление такого контура при резонансе равно (см. § 4.6):

$$Z_{э.р}=\frac{\rho^2}{r},$$

а при расстройке

$$Z_э=\frac{Z_{э.р}}{1+ia},$$

где $a=\frac{2\Delta\omega}{\omega_р}Q$ — обобщённая расстройка.

Резонансный коэффициент усиления может быть определён по ф-ле (10.26), при подстановке $Z=Z_{э.р}$. При использовании пентодов ($R_i \gg Z_{э.р}$), можно считать

$$K_р \approx S Z_{э.р}. \qquad (10.59)$$

Знак минус здесь опущен.

Для практических целей важно установить связь между коэффициентом усиления ступени и полосой пропускания. Это нетрудно сделать путём подстановки в выражение (10.59)

$$Z_{э.р}=\rho Q=\rho\frac{f_р}{2\Delta f_0},$$

откуда

$$K_р \approx S\rho\frac{f_р}{2\Delta f_0}. \qquad (10.60)$$

Из этого соотношения видно, что при данной лампе (S) коэффициент усиления пропорционален волновому сопротивлению контура ρ и обратно пропорционален относительной полосе пропускания $\frac{2\Delta f_0}{f_p}$. Так как полоса пропускания обычно бывает задана, то для повышения усиления выгодно увеличивать ρ, т. е. повышать индуктивность и снижать ёмкость контура.

Предел снижению ёмкости обусловлен требованиями к стабильности настройки контура. При слишком малых ёмкостях, соизмеримых с междуэлектродными ёмкостями лампы, стабильность резонансной частоты контура сильно ухудшается, так как изменения расстояний между электродами лампы при разогреве, а также разброс ёмкостей для различных экземпляров ламп оказывают значительное влияние на настройку контура.

Особенно затрудняется получение значительных величин ρ на очень высоких частотах, где ёмкость контура определяется в основном междуэлектродными ёмкостями лампы. В таких случаях для получения значительного усиления остаётся один путь — применение ламп с высокой крутизной и малыми междуэлектродными ёмкостями. Требования, вытекающие из особенностей широкополосных усилителей, привели к созданию ряда приёмно-усилительных ламп, обладающих весьма высокой крутизной (например, лампа 6Ж4, $S=8\div 10$ *ма/в*, лампа 6Ж1П, $S=5$ *ма/в* и т. д).

В практике часто применяются усилители, содержащие несколько одинаковых ступеней. При общем числе ступеней, равном n, резонансный коэффициент усиления будет

$$K_{пр}=(S Z_{э.р})^n, \tag{10.61}$$

и комплексный коэффициент усиления

$$K_n(\mathrm{i}\,\omega)=\frac{K_{пр}}{(1+\mathrm{i}a_1)^n}=\frac{(S Z_{э.р})^n}{[1+\mathrm{i}\,(\omega-\omega_p)\,\tau]^n}. \tag{10.62}$$

Частотная и фазовая характеристики всего тракта определяются следующими формулами:

$$\frac{|K_n(\mathrm{i}\,\omega)|}{K_{пр}}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}\right)^n, \tag{10.63}$$

$$\varphi_n=n\operatorname{arc tg} a_1, \tag{10.64}$$

где $a_1=\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q$ — обобщённая расстройка каждого из контуров в отдельности.

Если полоса пропускания усилителя в целом задана и равна $2\Delta\omega_{0n}$, то полоса пропускания $2\Delta\omega_{01}$ каждого из контуров

должна быть больше, чем $2\Delta\omega_{0n}$. Связь между $2\Delta\omega_{0n}$ и $2\Delta\omega_{01}$ определяется из условия ослабления амплитуд на границах полосы в $\sqrt{2}$ раз. Приравнивая $a_1=\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}Q$, можем написать:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}Q\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}},$$

откуда

$$2=\left[1+\left(\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}Q\right)^2\right]^n$$

и

$$\sqrt[n]{2}=1+\left(\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}Q\right)^2,$$

или

$$\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}Q=\sqrt{\sqrt[n]{2}-1}.$$

Учитывая, что

$$Q=\frac{\omega_p}{2\Delta\omega_{01}},$$

получаем

$$\frac{\Delta\omega_{0n}}{\Delta\omega_{01}}=\sqrt{\sqrt[n]{2}-1} \tag{10.65}$$

Приведём отношение полосы всего тракта к полосе отдельного контура для нескольких значений n:

Таблица 10.1

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{\Delta\omega_{0n}}{\Delta\omega_{01}}$	1	0,64	0,51	0,42	0,39	0,35

На рис. 10.33 показаны резонансные и фазовые характеристики усилителя, составленного из одной, двух и трёх идентичных ступеней.

Если исходить из заданной и неизменной полосы усилителя $\frac{2\Delta\omega_{0n}}{\omega_p}$ в целом, то получится семейство резонансных характеристик, показанное на рис. 10.34.

С увеличением числа ступеней резонансная кривая всё более приближается к форме, определяемой уравнением:

$$\left|\frac{K(i\omega)}{K_p}\right| = e^{-\delta(\omega-\omega_p)^2}, \tag{10.66}$$

где δ — коэффициент, имеющий размерность $\left(\frac{1}{\omega}\right)^2$, зависит от параметров отдельных контуров, а фазовая характеристика в полосе пропускания приближается к прямой линии.

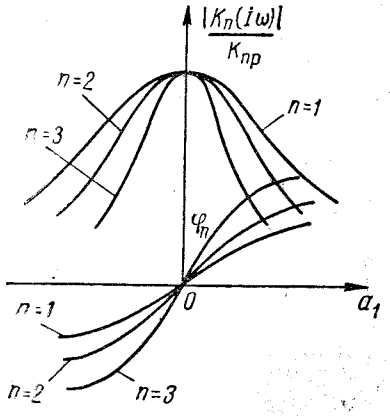


Рис. 10.33

Резонансную характеристику вида (10.66) иногда называют вероятностной или гауссовой, так как форма её совпадает с кривой нормального закона распределения (см. § 2.12).

В радиоприёмных устройствах очень широко распространены также усилители с колебательными системами в виде двух связанных контуров в каждой ступени. Подобные усилители, являющиеся разновидностью резонансных усилителей, иногда называются полосовыми. Связь между контурами обычно близка к критической (см. § 5.5). В случае n ступеней с двухконтурными связанными системами в каждой общие резонансная и фазовая характеристики усилителя равны соответственно произведению и сумме характеристик каждой из ступеней в отдельности.

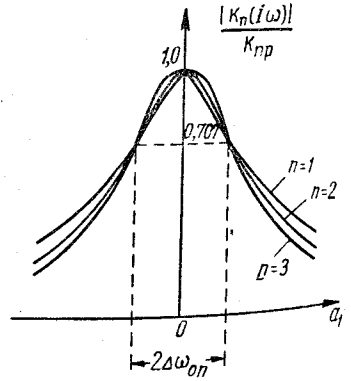


Рис. 10.34

Полосовые усилители особенно широко применяются в усилителях промежуточной частоты приёмников в виду выгодной формы их резонансной характеристики, так как избирательность у двухконтурной связанной системы выше, чем у одиночного контура (см. § 5.6 и рис. 5.20).

В приёмниках сверхвысокочастотного диапазона, где частоты промежуточного усиления достигают десятков мегагерц, осуществление полосовых фильтров связано с большими конструктивными трудностями, поэтому при

частотах $10 \div 12$ *Мгц* и выше от полосовых фильтров часто отказываются и применяют рассмотренные выше резонансные усилители с одиночными контурами в каждой ступени.

Иногда для расширения полосы пропускания и получения крутых скатов резонансных характеристик усилителя, применяют попарно-расстроенные ступени с одиночными контурами. Один из контуров расстраивается относительно заданной частоты в положительную, а следующий за ним контур в отрицательную сторону (или наоборот). Резонансные кривые первого и второго контура показаны на рис. 10.35 пунктиром. Так как контуры разделены лампами, т. е. непосредственно между собой не связаны, то результирующая резонансная характеристика, показанная на рис. 10.35 сплошной линией, определяется произведением индивидуальных резонансных характеристик.

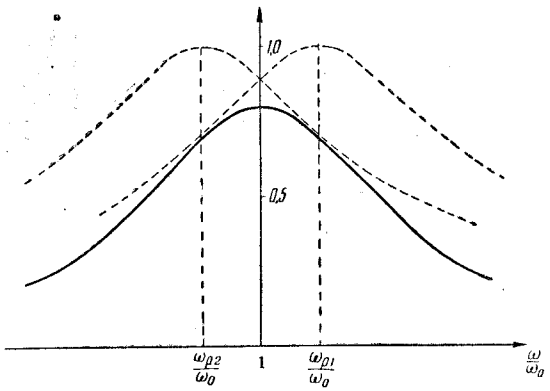


Рис. 10.35

Таким образом получаем:

$$\frac{K_2(i\omega)}{K_{2p}} = \frac{1}{1+i(\omega-\omega_{p_1})\tau_1}\cdot\frac{1}{1+i(\omega-\omega_{p_2})\tau_2}. \tag{10.67}$$

Обозначим через ω_0 среднюю между ω_{p_1} и ω_{p_2} частоту. Тогда

$$\omega_{p_1}-\omega_0=\omega_0-\omega_{p_2}=\Delta\omega_к \tag{10.68}$$

представляет собой постоянную расстройку каждого из контуров относительно частоты ω_0.

Если частота ω внешней эдс отличается от частоты ω_0 на величину $\Delta\omega$, т. е. $\omega=\omega_0+\Delta\omega$, то по отношению к первому контуру (с резонансной частотой ω_{p_1}), расстройка будет

$$\omega-\omega_{p_1}=\omega_0+\Delta\omega-\omega_{p_1}=\omega_0+\Delta\omega-(\omega_0+\Delta\omega_к)=\Delta\omega-\Delta\omega_к,$$

а по отношению ко второму контуру

$$\omega-\omega_{p_2}=\omega_0+\Delta\omega-\omega_{p_2}=\omega_0+\Delta\omega-(\omega_0-\Delta\omega_к)=\Delta\omega+\Delta\omega_к.$$

Соотношения между частотами и расстройками поясняются рис 10.36.

Подставляя $\omega - \omega_{p_1}$ и $\omega - \omega_{p_2}$ в выражение (10.67) и полагая $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, получим:

$$\frac{K_2(i\omega)}{K_{2p}} = \frac{1}{[1 + i(\Delta\omega - \Delta\omega_k)\tau][1 + i(\Delta\omega + \Delta\omega_k)\tau]}. \quad (10.69)$$

Переходя к модулю, будем иметь:

$$\frac{|K_2(i\omega)|}{K_{2p}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Delta\omega_k^2\tau^2)^2 + 2\Delta\omega^2\tau^2(1 - \Delta\omega_k^2\tau^2) + \Delta\omega^4\tau^4}}. \quad (10.70)$$

Сравнивая это выражение с (5.58), приходим к выводу, что форма резонансной характеристики двух разделённых лампами ступеней с симметрично расстроенными контурами совпадает с резонансной характеристикой двухконтурной системы, у которой величина kQ равна $\Delta\omega_k\tau$.

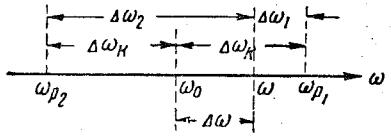


Рис. 10.36

При усилении амплитудно-модулированных колебаний качественные показатели резонансных и полосовых усилителей полностью характеризуются частотной характеристикой и коэффициентом нелинейных искажений.

Частотная характеристика резонансного и полосового усилителя совпадает с приведённой выше резонансной кривой колебательной системы (с учётом шунтирующего действия внутреннего сопротивления лампы). Приведённые в гл. 4, 5 и 9 данные полностью определяют форму частотной характеристики резонансного усилителя и влияние её на глубину модуляции усиливаемого колебания. Остановимся здесь поэтому только на вопросе о нелинейных искажениях при усилении модулированных колебаний.

Напряжение на входе усилителя зададим в виде:

$$e_g = E_0(1 + M\sin\Omega t)\sin\omega_0 t, \quad (10.71)$$

а характеристику лампы представим аналитически с помощью выражения (10.5):

$$i_a = i_{a0} + \alpha e_g + \beta e_g^2 + \gamma e_g^3 + \cdots$$

Подставляя выражение (10.71), будем иметь

$$i_a = i_{a0} + \alpha E_0(1 + M\sin\Omega t)\sin\omega_0 t + \beta E_0^2(1 + M\sin\Omega t)^2\sin^2\omega_0 t + \\ + \gamma E_0^3(1 + M\sin\Omega t)^3\sin^3\omega_0 t + \cdots \quad (10.72)$$

Рассмотрение этого выражения показывает, что в результате нелинейности характеристики в состав анодного тока, помимо тока покоя i_{a0} и полезного тока $\alpha E_0(1 + M\sin\Omega t)\sin\omega_0 t$, входят низкочастотные составляющие с частотами Ω, 2Ω и т. д., и высокочастотные составляющие с частотамм ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ и т. д., причём амплитуды последних изменяются с частотами Ω, 2Ω и т. д. Из всего этого спектра необходимо учитывать только те составляющие, частоты которых попадают в полосу пропускания колебательной системы усилителя.

Рассмотрим отдельные слагаемые выражения (10.72). Слагаемое

$$\beta E_0^2(1 + M\sin\Omega t)^2\sin^2\omega_0 t = \beta E_0^2(1 + M\sin\Omega t)^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t\right]$$

содержит постоянную составляющую, низкую частоту и модулированное по амплитуде колебание с несущей частотой $2\omega_0$. Все эти составляющие тока отфильтровываются контуром и могут не приниматься во внимание.

Слагаемое

$$\gamma E_0(1 + M\sin\Omega t)^3\sin^3\omega_0 t = \gamma E_0^3(1 + M\sin\Omega t)^3\left[\frac{3}{4}\sin\omega_0 t - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}\sin 3\omega_0 t\right]$$

содержит следующую составляющую, которая попадает в полосу прозрачности контура

$$\frac{3}{4}\gamma E_0^3(1 + M\sin\Omega t)^3\sin\omega_0 t =$$

$$= \frac{3\gamma}{4}E_0^3(1 + 3M\sin\Omega t + 3M^2\sin^2\Omega t + M^3\sin^3\Omega t)\sin\omega_0 t =$$

$$= \frac{3}{4}\gamma E_0^3\left(1 + 3M\sin\Omega t + \frac{3M^2}{2} - \frac{3M^2}{2}\cos 2\Omega t + \frac{3M^3}{4}\sin\Omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{M^3}{4}\sin 3\Omega t\right)\sin\omega_0 t =$$

$$= \frac{3}{4}\gamma E_0^3\left[1 + \frac{3M^2}{2} + 3M\left(1 + \frac{M^2}{4}\right)\sin\Omega t - \frac{3M^2}{2}\cos 2\Omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{M^3}{4}\sin 3\Omega t\right]\sin\omega_0 t.$$

Подставляя это выражение в ф-лу (10.72) и оставляя только составляющие, попадающие в полосу пропускания контура, получим

$$\Delta i_a = \left\{E_0\left[\alpha + \frac{3}{4}\gamma E_0^2 + \frac{9M^2}{8}\gamma E_0^2\right] + \right.$$

$$+ ME_0\left[\alpha + \frac{9}{4}\gamma E_0^2\left(1+\frac{M^2}{4}\right)\right]\cdot \sin\Omega t - \frac{9}{8}\gamma M E_0^2 \cos 2\Omega t -$$

$$\left. - \frac{3\gamma M^2}{16} E_0^2 \sin 3\Omega t \ldots\right\} \sin\omega_0 t. \qquad (10.72')$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой огибающую переменной составляющей анодного тока. Под влиянием некоторой кривизны характеристики лампы эта огибающая отличается от огибающей модулированной эдс, подводимой к сетке лампы. Это отличие проявляется в небольшом изменении амплитуды несущего колебания и глубины модуляции на полезной частоте Ω и, главное, в возникновении частот 2Ω, 3Ω и т. д. в огибающей. После осуществления амплитудного детектирования эти частоты проявятся в виде напряжений с частотами 2Ω, 3Ω и т. д.

Изменение глубины модуляции на основной частоте получается обычно очень малым и им можно пренебречь.

Относя амплитуду 2-й гармоники огибающей к амплитуде составляющей с частотой Ω и пренебрегая слагаемым $\frac{9}{4}\gamma E_0^2\left(1+\frac{M^2}{4}\right)$ по сравнению с α, найдём коэффициент 2-й гармоники:

$$K_{f_2} \approx \frac{\frac{9}{8}\gamma M^2 E_0^3}{ME_0\cdot\alpha} = \frac{9}{8}\frac{\gamma}{\alpha} M E_0^2 = \frac{9}{8}\cdot\frac{S''}{3!S} M E_0^2 =$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{S''}{S} M E_0^2. \qquad (10.73)$$

Для коэффициента третьей гармоники получим:

$$K_{f_3} \approx \frac{\frac{3\gamma M^3}{16} E_0^3}{ME_0\alpha} = \frac{3M^2 S'' E_0^2}{16\cdot 3!\, S} = \frac{M^2 S''}{32\cdot S} E_0^2. \qquad (10.74)$$

Таким образом, нелинейные искажения растут пропорционально квадрату амплитуды несущего колебания и первой степени коэффициента модуляции.

С нелинейными искажениями при усилении модулированных колебаний в приёмнике приходится считаться в оконечных каскадах усиления, где амплитуды колебания достигают единиц вольт. В первых каскадах амплитуды настолько малы, что кривизна вольтамперных характеристик не проявляется.

§ 10.8. Прохождение высокочастотных импульсов через многоступенные резонансные и полосовые усилители

В гл. 9 рассматривалось воздействие высокочастотных импульсов на одиночный контур и на систему из двух связанных контуров. Результаты этого рассмотрения полностью решают вопрос для случая одноступенного резонансного или полосового усилителя.

В случае n идентичных одноконтурных ступеней коэффициент передачи $K_n(s)$ может быт получен из выражения (10.62) заменой $i(\omega-\omega_0)$ на s, как и в § 9.9:

$$K_n(s) = \frac{(K_{np})^n}{[1+i(\omega-\omega_0)\tau]^n} = \frac{(S_0 Z_{э.р})^n}{(1+s\tau)^n}. \qquad (10.75)$$

В данном параграфе через S_0 обозначена крутизна характеристики лампы. Частоту эдс ω_0 считаем совпадающей с резонансной частотой контуров ω_p. Определим огибающую напряжения на выходе n-ступенного усилителя при включении в момент $t=0$ на вход высокочастотной эдс с огибающей в виде скачка.

Подставляя (10.75), а также изображение входной огибающей $E_{ог}(s) = \frac{E}{s}$ в выражение (9.71), получим для огибающей на выходе

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{E}{s} K(s) e^{st}\, ds = E\cdot(S_0 Z_{э.р})^n \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}\, ds}{s(1+s\tau)^n}.$$

В данном случае подинтегральная функция имеет один простой полюс в точке $s_1=0$ и один кратный полюс n-го порядка в точке $s_2 = -\frac{1}{\tau}$. Вычет, соответствующий первому полюсу, вычисляем по ф-ле (9.11), а второму по ф-ле (9.12):

$$\mathrm{res}_1 = 1,$$

$$\mathrm{res}_2 = -e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^k.$$

Тогда

$$u_{вых}(t) = E(S_0 Z_{э.р})^n(\mathrm{res}_1 + \mathrm{res}_2) =$$

$$= E(S_0 Z_{э.р})^n\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^k\right] \qquad (10.76)$$

Это выражение совпадает с формулой, полученной иным путём Д. В. Агеевым и Ю. Б. Кобзарёвым в 1935 г.

Подставляя в это выражение $n=1$, 2, 3 или 4, получим следующие формулы для одной, двух, трёх и четырёх ступеней усиления:

при $n=1$

$$u_{вых}(t)=E(S_0 Z_{э.р})\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right];$$

при $n=2$

$$u_{вых}(t)=E(S_0 Z_{э.р})^2\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right];$$

при $n=3$

$$u_{вых}(t)=E(S_0 Z_{э.р})^3\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2!}\frac{t^2}{\tau^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right];$$

при $n=4$

$$u_{вых}(t)=E(S_0 Z_{э.р})^4\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2!}\frac{t^2}{\tau^2}+\frac{1}{3!}\frac{t^3}{\tau^3}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \qquad (10.76')$$

и т. д.

Графики функций $u_{вых}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ для $n=1$, 2, 3, 4 и 5 приведены на рис. 10.37.

Аналогично можно найти закон нарастания огибающей на выходе многоступенного полосового усилителя. Не приводя из-за недостатка места вывода формул, ограничимся графиками функций $u_{вых}(\Delta\omega_n t)$ для некоторых значений n, представленными на рис. 10.38; $\Delta\omega_n$ — обозначает полосу пропускания на уровне 0,7 n-каскадного усилителя. Эти же кривые могут быть использованы для определения огибающей на выходе усилителя, составленного из n пар симметрично расстроенных ступеней, если под величиной kQ подразумевать величину $\Delta\omega_к\tau$ (см. § 10.7).

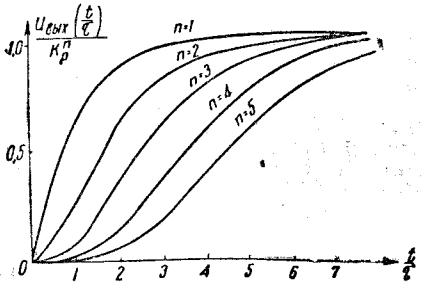


Рис. 10.37.

Графики, представленные на рис. 10.37 и 10.38, решают вопрос о переднем фронте импульса. С помощью приёма, неоднократно применявшегося в предыдущих главах, нетрудно использовать полученные результаты и для определения заднего фронта импульса при действии на вход усилителя высокочастотного импульса с прямоугольной формой огибающей.

§ 10.9. Усилительные схемы с общей сеткой и с общим анодом

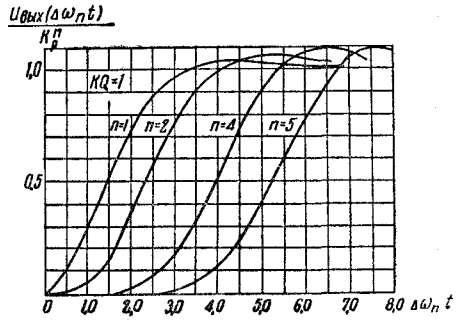


Рис. 10.38

Рассмотренные в предыдущих параграфах данной главы усилители с заземлённым катодом не являются единственно возможным типом электронного усилителя. В ряде случаев применяются ещё так называемые схемы с заземлённой сеткой и с заземлённым анодом.

Схема усилителя с заземлённой сеткой представлена на рис. 10.39*а*. Для упрощения рассуждений здесь изображён усилитель на активных сопротивлениях, хотя в области высоких частот вместо R_{gk} и R_{ag} применяются резонансные колебательные контуры. Источники питания на схеме не показаны.

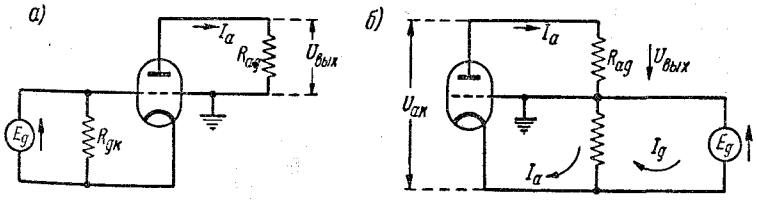


Рис. 10.39

Из рис. 10.39*б*, немного видоизменённого по сравнению с рис. 10.39*а*, видно, что анодный ток (в данном случае нас интересует переменная составляющая) замыкается по внешней цепи лампы через последовательно соединённые сопротивления R_{ag} и R_{gk}. Это означает, что анодная цепь оказывает реакцию на сеточную цепь, которая проявляется в уменьшении тока через R_{gk}, так как ток I_a направлен навстречу току I_g от источника эдс E_g. Для преодоления этой реакции источник энергии, возбуждающий усилитель, должен отдавать повышенную мощность.

Действительно, в сопротивлении R_{gk} расходуется мощность

$$P_R=\frac{(I_g-I_a)E_g}{2},$$

а генератор E_g отдаёт мощность, равную:

$$P_g = \frac{I_g E_g}{2}.$$

Разность между P_R и P_g, т. е. $\frac{I_a E_g}{2}$, идёт на покрытие реакции анодной цепи, т. е. в конечном счёте передаётся в анодную цепь и выделяется в нагрузочном сопротивлении R_{ag}.

Это можно представлять себе ещё и следующим образом. В схеме с заземлённой сеткой сопротивление нагрузки включено между анодом и сеткой, напряжение между которыми равно:

$$U_{ag} = U_{ak} + E_g.$$

Соответственно повышению напряжения на величину E_g (при заданном токе I_a) увеличивается и мощность, рассеиваемая на этом сопротивлении, на величину $\frac{I_a E_g}{2}$. Следует отметить, что усилитель с заземлённой сеткой не даёт поворота фазы. Из рис. 10.39*б* видно, что напряжения на входе и выходе, оба отсчитываемые относительно заземлённой точки (т. е. сетки), совпадают по знаку.

Схемы с общей сеткой находят широкое применение в усилителях, работающих на очень высоких частотах. Конечно, вместо активных сопротивлений, как ранее уже упоминалось, применяются колебательные контуры. Одна из подобных схем рассматривается в следующем параграфе.

Применённое выше наименование „схема с заземлённой сеткой" не является точным. Главной особенностью рассматриваемой схемы является то, что сеточный зажим является общим для входа и выхода усилителя. Поэтому более правильно говорить о „схеме с общей сеткой". Рассмотренные в предыдущих параграфах данной главы усилители являются „схемами с общим катодом". Выбор же точки для заземления, обычно диктуемый конструктивными соображениями, не определяет в принципе соотношений между токами и напряжениями в схеме.

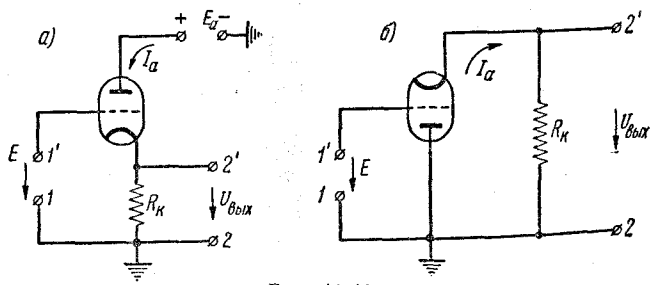


Рис. 10.40

Рассмотрим в заключение схему с общим (заземлённым) анодом, представленную на рис. 10.40 *а*. Эта же схема в несколько изменённом начертании и без источника питания изображена на рис. 10.40*б*. Из рассмотрения рис. 10.40*а* и 10.40*б* видно, что схема с общим анодом представляет собой усилитель с катодной нагрузкой.

Найдём отношение $U_{вых}$ к E, т. е. коэффициент усиления схемы по напряжению (здесь $U_{вых}$ и E — амплитуды переменных напряжений). С этой целью воспользуемся эквивалентной схемой анодной цепи, представленной на рис. 10.41. При построении этой схемы учтено, что действующее между сеткой и катодом лампы напряжение является разностью между эдс E и напряжением на сопротивлени R_k, создаваемым током I_a (см. схему рис. 10.40 *а*).

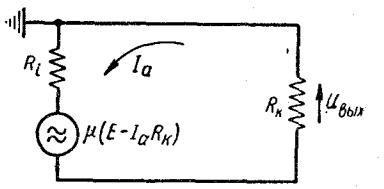


Рис. 10.41

Таким образом, получается следующее соотношение между напряжением E и током I_a:

$$\mu(E - I_a R_k) = I_a(R_i + R_k).$$

Решая это уравнение относительно тока, находим

$$I_a = \frac{\mu E}{R_k(1+\mu) + R_i}.$$

Далее напряжение на выходе

$$U_{вых} = I_a \cdot R_k = \frac{\mu R_k}{R_k(1+\mu) + R_i} E.$$

Следовательно,

$$K = \frac{U_{вых}}{E} = \frac{\mu R_k}{(1+\mu)R_k + R_i} = \frac{\mu R_k}{\mu R_k + R_k + R_i}. \qquad (10.77)$$

Отсюда видно, что в усилителе с катодной нагрузкой коэффициент усиления по напряжению всегда меньше единицы. Хотя нагрузочное сопротивление R_k обычно мало по сравнению с R_i, всё же в практике выполняется условие

$$(1+\mu)R_k \gg R_i.$$

Это объясняется большой величиной коэффициента усиления лампы μ (пентод).

Поэтому приближённо можно считать

$$K \approx \frac{\mu}{1+\mu}. \qquad (10.77')$$

Итак, напряжение на выходе близко к величине входного напряжения.

Нетрудно видеть, что этот результат является следствием сильной обратной связи, которая существует между анодной и сеточной цепью. Именно, создаваемое на сопротивлении R_k анодным током I_a напряжение вводится обратно в сеточную цепь, причём с обратным по отношению к E знаком. Из дальнейшего рассмотрения (в гл. 15) будет видно, что схема с катодной нагрузкой представляет собой предельный случай усилителя с отрицательной обратной связью.

Следует подчеркнуть, что хотя рассматриваемая схема и не даёт усиления напряжения, всё же эта схема является усилительной. Нужно иметь в виду, что выходное напряжение развивается анодным током лампы на относительно малом сопротивлении R_k, в то время как входное напряжение прикладывается к зажимам сетка—земля, сопротивление между которыми при работе без сеточных токов очень велико (порядка мегомов). Усилитель с катодной нагрузкой можно поэтому рассматривать как усилитель тока при неизменном напряжении.

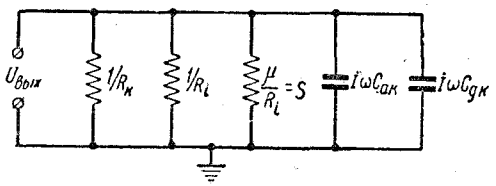


Рис. 10.42

То обстоятельство, что напряжение с выхода полностью вводится обратно в цепь сетки, делает работу усилителя почти независимой от параметров нагрузки. Чтобы в этом убедиться, найдём выходное сопротивление усилителя. Для этого допустим, что к зажимам *2′—2* усилителя (рис. 10.40 *б*) приложено от внешнего источника синусоидальное напряжение $U_{вых}$ и найдём полный ток, посылаемый этим источником в эквивалентную схему, представленную на рис. 10.42.

На этой схеме внутреннее сопротивление лампы R_i подключено непосредственно к зажимам нагрузки R_k, так как анод лампы заземлён (постоянное напряжение E_a здесь не учитывается), ветвь $\frac{\mu}{R_i}=S$ соответствует току в анодной цепи, который создаётся напряжением $U_{вых}$, приложенным непосредственно к зажимам сетка-катод лампы (при этом зажимы *1—1′* считаются замкнутыми накоротко). Наконец, междуэлектродные ёмкости C_{gk} и C_{ak} оказываются включёнными параллельно, так как сетка и анод заземлены.

Полная проводимость между зажимами *2′—2* (рис. 10.42) оказывается при этих условиях равной:

$$Y_э=\frac{1}{Z_{вых}}=\frac{1}{R_k}+\frac{1}{R_i}+S+i\omega(C_{ak}+C_{gk}). \qquad (10.78)$$

Для видеочастот, не превышающих нескольких мегагерц, обычно выполняются условия:

$$\omega(C_{ak}+C_{gk})\ll\frac{1}{R_k}.$$

Таким образом,

$$Y_э=\frac{1}{R_э}\approx\frac{1}{R_k}+\frac{1+\mu}{R_i},$$

где

$$R_э\approx\frac{R_iR_k}{R_i+(1+\mu)R_k}=\frac{R_k}{1+(1+\mu)R_k/R_i}.$$

Обычно величина $(1+\mu)R_k$ в несколько раз превышает R_i. Можно в таких случаях считать:

$$R_э\approx\frac{R_i}{1+\mu}\approx\frac{R_i}{\mu}=\frac{1}{S}. \qquad (10.79)$$

Итак, выходное сопротивление усилителя с катодной нагрузкой почти не зависит от параметров схемы и определяется только крутизной характеристики лампы. Так, например, для ламп типа 6П9, часто применяемых в усилителях с катодной нагрузкой, $S=10\ \frac{ма}{в}$ и $R_э$ не превышает 100 *ом*. При таком малом сопротивлении ёмкость нагрузки, шунтирующая выход усилителя, почти не сказывается на частотной характеристике устройства и не искажает форму сигнала. Следует, кроме того, иметь в виду, что выходное напряжение, отсчитываемое относительно земли, совпадает по фазе (полярности) с входным напряжением. Таким образом, усилитель с катодной нагрузкой „повторяет" сигнал, не изменяя ни его формы и величины, ни полярности напряжения, но переводя его с высокоомного сопротивления на низкоомное. Поэтому усилитель с катодной нагрузкой часто называют „катодным повторителем".

Катодный повторитель получил особенно широкое распространение в импульсной технике.

§ 10.10. Особенности усиления на сверхвысоких частотах

В области очень высоких частот начинают проявляться факторы, которые в предыдущем рассмотрении не учитывались и которые снижают эффективность работы усилителей на триодах, тетродах, пентодах и других разновидностях многоэлектродных ламп.

Можно отметить следующие два основных фактора:

1) возрастающее влияние внутриламповых ёмкостей и индуктивностей выводов лампы и

2) возрастающее влияние инерции электронов.

Первый из этих факторов проявляется уже на частотах $0{,}5 \div 1$ *Мгц*, особенно при использовании трёхэлектродных ламп.

На рис. 10.43 показана схема простого резонансного усилителя с учётом ёмкости анод—сетка лампы. Нетрудно видеть, что анодный нагрузочный контур совместно с входным контуром образует благодаря ёмкости C_{ag} единую связанную колебательную систему и часть энергии может переходить из первого контура во второй без участия электронного тока, т. е. без использования усилительной способности лампы. Наличие паразитной связи между анодной и сеточной цепями приводит и к обратному воздействию анодной цепи на сеточную цепь, что при некоторых условиях приводит к паразитной генерации, т. е. к полному нарушению нормальной работы усилителя.

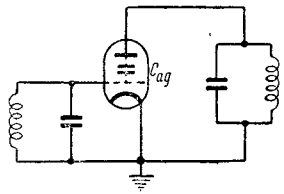


Рис. 10.43

Радикальным средством развязки входных и выходных цепей лампы является, как известно, применение ламп с экранированным анодом (тетроды и пентоды). С помощью приёмно-усилительных пентодов удаётся осуществить устойчивую работу на частотах до $100 \div 150$ *Мгц*.

Дальнейшее повышение частоты ограничивается влиянием индуктивностей выводов лампы. Из представленной на рис. 10.44 схемы усилительной ступени на пентоде (с учётом междуэлектродных ёмкостей и индуктивностей выводов) видно, что с повышением частоты и, следовательно, с ростом величин индуктивных сопротивлений ωL_a, ωL_{g1}, ωL_{g2}, ωL_{g3} и ωL_k, потенциалы внешних зажимов A, C, $C.Э$ и K всё в меньшей степени совпадают с потенциалами соответствующих электродов лампы.

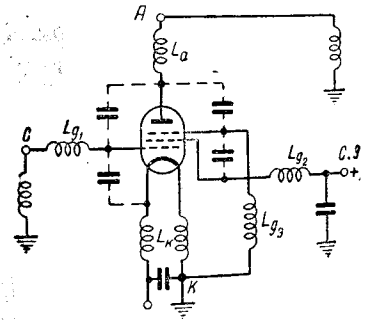


Рис. 10.44

При достаточно высоких частотах могут иметь место резонансы (последовательные) внутри лампы, в результате чего сильно затрудняется или даже становится вовсе невозможным создание необходимых для усиления сопротивлений между анодом и катодом, а также сеткой и катодом лампы. С другой стороны, затрудняется закорачивание (по высокой частоте) второй и третьей сеток лампы.

От перечисленных недостатков в значительной степени свободны усилители, работающие на дисковых триодах с общей сеткой. Схема подобного усилителя, применяемого на частотах $300 \div 1000$ *Мгц*, изображена на рис. 10.45. Благодаря тому, что ёмкость C_{ag} входит только в контур, включённый между анодом и сеткой, паразитная связь через C_{ag} в данной схеме отсутствует.

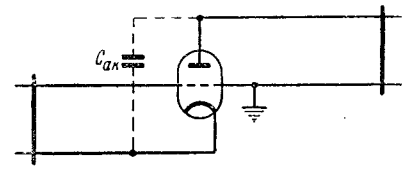


Рис. 10.45

Паразитная же связь через ёмкость анод-катод лампы невелика в виду малости этой ёмкости. Таким образом, в схеме с заземлённой сеткой роль экрана, развязывающего входные и выходные цепи, выполняет сама сетка лампы.

Следует однако отметить, что недостатком схемы с общей сеткой является реакция выходной цепи усилителя на входную цепь (см. § 10.9). Это обстоятельство значительно снижает усиление мощности схемой.

Ослабление влияния индуктивностей достигается дисковой формой электродов, позволяющей, во-первых, свести эти индуктивности к минимуму и, во-вторых, осуществить соединение электродов лампы с внешними элементами, представляющими собой обычно отрезки коаксиальной линии, таким образом, что выводы электродов переходят в линию без нарушения однородности последней.

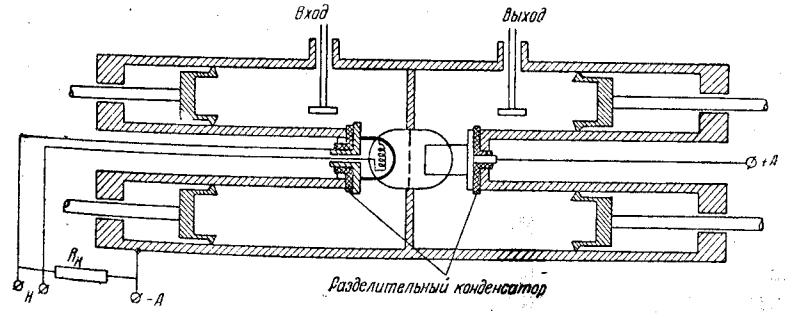


Рис. 10.46

Пример конструкции усилителя на триоде с заземлённой сеткой и с колебательными контурами в виде отрезков линии представлен на рис. 10.46.

Обратимся ко второму фактору — инерции электронов. Из теории электронных ламп известно, что время пролёта электронами междуэлектродных промежутков, зависящее от геометрии лампы и рабочих напряжений, при очень высоких частотах становится

соизмеримым с периодом усиливаемого колебания. Это означает, что электронная лампа перестаёт быть безинерционным прибором.

Переменная составляющая анодного тока (во внешней цепи) уже не совпадает по фазе с сеточным напряжением, как это считалось ранее, а отстаёт на некоторый угол, тем бо́льший, чем больше расстояние между электродами, чем ниже рабочее напряжение (т. е. меньше скорости электронов) и чем выше рабочая частота. В результате крутизна характеристики, понимаемая как отношение комплексной амплитуды переменной составляющей электронного тока (в плоскости анода), к комплексной амплитуде напряжения на сетке приобретает характер комплексной проводимости.

При учёте инерции электронов приведённое ранее уравнение фазовой характеристики усилителя (10.25) должно быть заменено следующим уравнением:

$$\varphi_K = \pi + \varphi_Z + \varphi_S - \varphi_a, \qquad (10.80)$$

где φ_S — дополнительный фазовый сдвиг переменной составляющей анодного тока относительно сеточного напряжения, обусловленный комплексностью крутизны.

Это обстоятельство, как будет показано в гл. 12, имеет существенное значение в автогенераторах. При усилении же колебаний, да ещё в режиме малых амплитуд, сдвиг фазы анодного тока и комплексность крутизны особого значения не имеют. Значительно бо́льшее влияние на работу усилителя оказывает изменение сопротивления промежутка сетка—катод лампы, обусловленное конечным временем пролёта электронов.

При не очень высоких частотах и работе без сеточного тока (с отрицательной сеткой) это сопротивление имеет характер чисто ёмкостного сопротивления, равного $\frac{1}{\omega C_{эк}}$, которое не потребляет мощности и, следовательно, не создаёт нагрузки для источника усиливаемого колебания. С повышением частоты, когда время пролёта становится соизмеримым с периодом усиливаемого колебания, запаздывание электронного тока относительно напряжения на сетке создаёт эффект, равносильный шунтированию ёмкости активной проводимостью. При очень высоких частотах эта проводимость возрастает настолько сильно, что мощность, которую необходимо расходовать на поддержание переменного сеточного напряжения, оказывается близкой к мощности, выделяемой на анодном контуре, т. е. усиление становится невозможным.

Одним из достоинств упомянутых выше дисковых ламп является жёсткость конструкции катода и сетки, что позволяет резко снижать расстояние между ними и тем самым снижать время пролёта.

При частотах 3000 *Мец* и выше триоды практически непригодны для усиления колебаний. На указанных частотах для

усиления колебаний необходимо применять электронные приборы, работающие на совершенно иных принципах. Одним из подобных устройств, свободных от ограничений накладываемых конечным временем пролёта электронов, являются усилительные лампы с бегущей волной, в которых сфокусированный электронный пучок взаимодействует с электромагнитным полем спиральной линии, отдавая последней свою энергию на протяжении всей длины линии. Рассмотрение работы подобных усилителей не входит в задачу настоящего курса.

§ 10.11. Кристаллические усилители. Принцип действия

В радиотехнике с момента её возникновения использовались нелинейные свойства кристаллов (кристаллический детектор). Возможность применения кристаллических приборов для целей усиления и генерации была впервые обнаружена О. В. Лосевым в 1922—27 гг.

В начале 30-х годов кристаллические приборы были почти полностью вытеснены более совершенными — электронными лампами.

В настоящее время на основе современных достижений науки и техники создаются кристаллические приборы, превосходящие по некоторым показаниям электронные лампы.

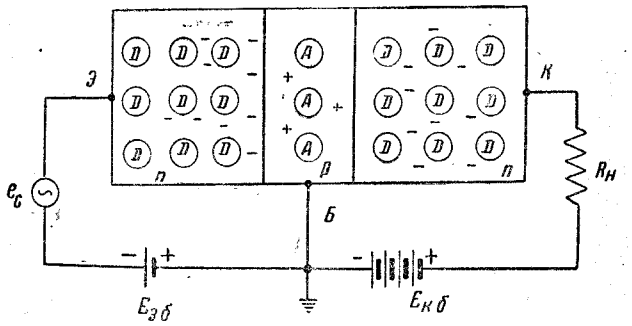


Рис. 10.47

Принцип действия и особенности кристаллических усилителей вытекают из физики явлений в полупроводниках.

Не останавливаясь здесь на изучении этих явлений, что входит в задачу курса „электронные и ионные приборы", рассмотрим работу усилителя с так называемым „плоскостным" кристаллическим триодом. Схема усилителя показанна на рис. 10.47.

Усилитель представляет собой систему из трёх кристаллов: два крайних с электронной проводимостью и один (средний) с дырочной проводимостью. Кружочки, отмеченные буквой Д, обозначают, что кристалл (обычно германий) содержит примеси с избыточными

электронами („донаторы"), а кружочки с буквой А — обозначают кристалл с недостатком электронов („акцепторные" молекулы.)

Подобные усилители называются усилителями типа $n-p-n$. Контактный слой или так называемый электронно-дырочный переход между кристаллами германия с различными типами проводимости обладает выпрямительной способностью: при одной и той же величине напряжения ток получается больше в „прямом" направлении, чем в „обратном". На рис. 10.47 к левому электронно-дырочному переходу батарея $E_{эб}$ подключена в прямом направлении, а к правому переходу в обратном направлении (батарея $E_{кб}$).

Таким образом, через левый переход устанавливается поток электронов (отдаваемых донаторами и восполняемых батареей) в направлении от n-области к p-области, в то время как поток электронов из правой n-области в p-область отсутствует. Электроны, проникшие в p-область через левый переход, диффундируют к правому переходу и втягиваются в правую n-область благодаря электрическому полю, создаваемому батареей $E_{кб}$ в этой области.

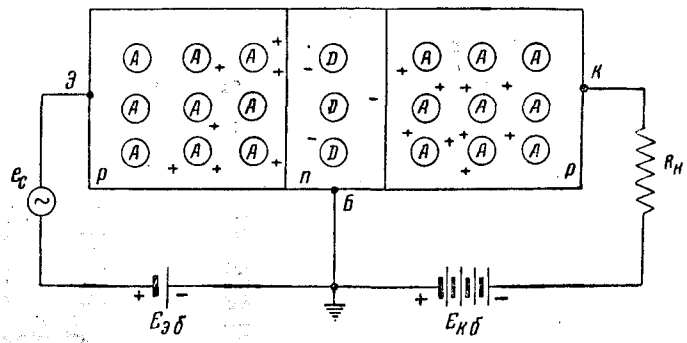


Рис. 10.48

Таким образом, левая n-область эмиттирует электроны в правую n-область, которая играет примерно такую же роль, как и анод в электронной лампе. В соответствии с выполняемыми функциями, левую n-область называют эмиттером, а правую — коллектором. Средняя часть кристалла, в данном случае p-область, называется базой или основанием. Соответственно этому и обозначены электроды на рис. 10.47: *Э*-эмиттер, *К*-коллектор и *Б*-база.

При определении полярности батарей $E_{эб}$ и $E_{кб}$ следует руководствоваться следующим правилом: к электродам эмиттер-база всегда должо подаваться прямое напряжение, а к электродам коллектор-база обратное. Применительно к плоскостному усилителю типа $p-n-p$ батареи должны быть подключены так, как это показано на рис. 10.48. Всё, что выше было сказано об усилителях $n-p-n$ с тем может быть распространено и на усилители типа $p-n-p$ лишь отличием, что все токи в данном случае определяются дырочной проводимостью левой и правой p-областей[1]).

Так как при движении электронов в средней p-области (в усилителе $n-p-n$) или дырок в средней n-области (в усилителе $p-n-p$) происходит частичная рекомбинация электронов и дырок, то не весь поток электронов (или дырок), посылаемых эмиттером в базу, достигает коллектора.

Отношение

$$\alpha = \frac{i_к}{i_э}, \qquad (10.81)$$

характеризующее степень использования тока эмиттера, является одним из основных параметров кристаллического триода.

Для повышения использования тока эмиттера толщину базы делают достаточно малой (десятые, сотые и даже тысячные доли миллиметра). Благодаря этому, а также благодаря относительно малой скорости рекомбинации, число собираемых коллектором электронов (или дырок) удаётся доводить до 0,95÷0,98 от общего числа эмиттируемых электронов (дырок). Таким образом, ток коллектора почти равен току эмиттера (но всегда меньше).

Для выяснения механизма усиления в кристаллическом триоде существенное значение имеет форма вольт-амперных характеристик последнего (рис. 10.49 и рис. 10.50). В отличие от обычных электронных ламп, характеристики рис. 10.49 определяют

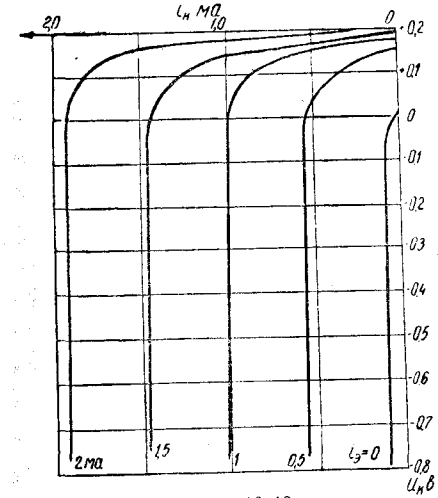


Рис. 10.49

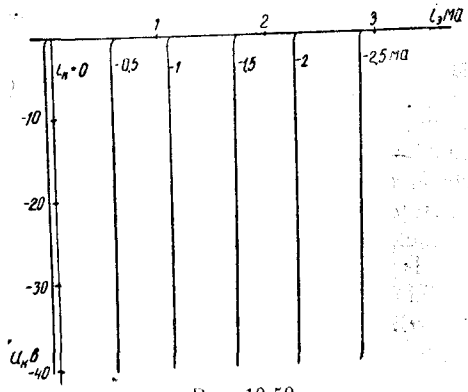


Рис. 10.50

[1]) Наряду с триодами плоскостного типа довольно широкое распространение получили так называемые „точечные" триоды, в которых инъекция электронов (или дырок) осуществляется в электронно-дырочном переходе, образованном между основной массой полупроводника и областью с проводимостью другого типа в месте контакта металла с полупроводником. Выяснение процесса усиления проще и нагляднее удаётся провести на кристаллических триодах плоскостного типа, чем и ограничивается рассмотрение в данной книге.

зависимость напряжения на коллекторе от тока коллектора, который рассматривается как независимое переменное. (В лампах анодный ток определяется как функция анодного напряжения.)

Ток эмиттера является для семейства характеристик $u_к(i_к)$ параметром (вместо напряжения сетки в лампе).

На рис. 10.51 представлена типичная зависимость напряжения, действующего между эмиттером и базой, от тока эмиттера при различных значениях тока коллектора.

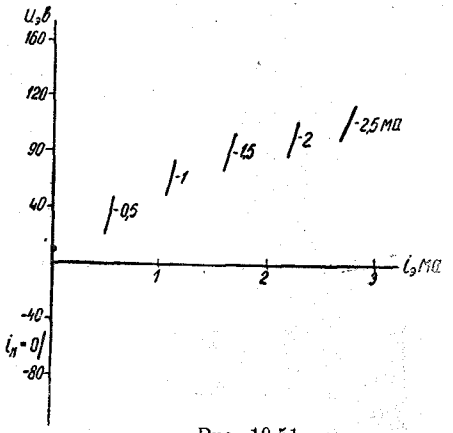


Рис. 10.51

Представленные на рис. 10.50 характеристики могут быть сравнены с анодно-сеточными характеристиками электронной лампы. В случае кристаллического триода независимым переменным является ток эмиттера и параметром ток коллектора $i_к$, а в случае лампы независимым переменным является сеточное напряжение и параметром анодное напряжение. Отсюда видно, что в отличие от электронной лампы кристаллический триод представляет собой устройство, в котором управление осуществляется током, а не напряжением.

Усиливаемое колебание (сигнал) в схемах с заземлённой базой вводится в цепь эмиттер—база, а нагрузочное сопротивление в цепь коллектора (рис. 10.47 и 10.48). При правильном выборе рабочей точки на характеристике $u_э(i_э)$ (рис. 10.51) и усилении относительно слабых сигналов, обеспечивается практически линейная связь между током $i_э$ и напряжением сигнала. Так как ток коллектора $i_к$ почти равен току эмиссии $i_э$, то изменение тока коллектора практически совпадает с изменением $i_э$.

Из рис. 10.49 видно, что характеристики коллекторного тока обладают чрезвычайно большим наклоном и идут почти параллельно оси $u_к$. Это обстоятельство можно трактовать как результат очень большого сопротивления коллектора, т. е. сопротивления, определяемого как

$$r_к = \frac{\partial u_к}{\partial i_к}, \quad \text{при} \quad i_э = \text{const}. \tag{10.82}$$

Это сопротивление очень велико (порядка мегома) и во много раз больше, чем входное сопротивление кристаллического триода, т. е. сопротивление между электродами эмиттер-база (порядка сотен омов).

Так как нагрузочное сопротивление в схеме рис. 10.47 и 10.48 включается в цепь коллектора, то величина его может быть взята того же порядка, что и $r_к$ (обычно берут несколько сотен тысяч ом). В результате, относительно малое изменение напряжения сигнала приводит к очень большому относительному изменению выходного напряжения, т. е. имеет место усиление по напряжению.

Для определения величины усиления учтём, что напряжение сигнала e_c, которое необходимо для управления током эмиттера, равно

$$e_c = \Delta i_э \cdot r_{вх},$$

где $r_{вх}$ — входное сопротивление кристаллического триода между точками $Э—Б$, а напряжение на нагрузочном сопротивлении $R_н$ равно

$$u_н = \Delta i_к R_н.$$

Таким образом, коэффициент усиления напряжения может быть представлен в виде

$$K = \frac{u_н}{e_c} = \frac{\Delta i_к \cdot R_н}{\Delta i_э \, r_{вх}} = \alpha \, \frac{R_н}{r_{вх}}. \tag{10.83}$$

Ранее указывалось, что коэффициент α близок к единице. Обычно $\alpha \approx 0{,}95 \div 0{,}98$, а сопротивление $r_{вх}$ относительно мало, так как батарея $E_{э.б}$ подключена к левому электронно-дырочному переходу в прямом направлении. Поэтому усиление напряжения, приблизительно равное отношению сопротивления нагрузки к входному сопротивлению, может быть доведено до весьма больших величин (порядка тысячи).

Как и ламповый усилитель с общей сеткой (см. § 10.9), кристаллический усилитель с общей базой не поворачивает фазы усиливаемого колебания.

Следует подчеркнуть, что усиление по напряжению сопровождается в кристаллическом триоде также и усилением по мощности. Действительно, входная мощность (отдаваемая сигналом):

$$P_{вх} = e_c \cdot \Delta i_э,$$

а выходная мощность, выделяемая в нагрузочном сопротивлении, равна

$$P_{вых} = u_н \cdot \Delta i_к.$$

Следовательно, коэффициент усиления по мощности равен

$$\frac{P_{вых}}{P_{вх}} = \frac{u_н \Delta i_к}{e_c \cdot \Delta i_э} = \frac{R_н (\Delta i_к)^2}{r_{вх} (\Delta i_э)^2} = \alpha^2 \cdot \frac{R_н}{r_{вх}} \approx \frac{R_н}{r_{вх}}. \tag{10.84}$$

Таким образом, усиление по мощности приблизительно равно усилению по напряжению.

Рассмотренная в данном параграфе схема с общей (заземленной) базой, наиболее удобная для выяснения физической картины усиления, не является единственно возможной схемой кристаллического усилителя. Как и в случае электронной лампы, возможны схемы с общим эмиттером и с общим коллектором. Эти схемы рассматриваются в следующем параграфе.

§ 10.12. Эквивалентные схемы и основные соотношения для кристаллических усилителей

В случае усиления малых амплитуд, когда полупроводниковый усилитель можно рассматривать как линейную систему, к эквивалентной схеме усилителя удобно применять теорию линейных (активных) четырёхполюсников.

Для рассмотренной выше схемы с общей базой эквивалентный активный четырёхполюсник может быть представлен в форме, изображённой на рис. 10.52.

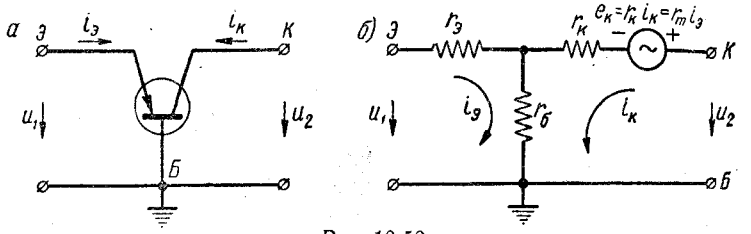


Рис. 10.52

На этой схеме $r_э$, $r_б$ и $r_К$ представляют собой соответственно сопротивления эмиттера, базы и коллектора, а дополнительный генератор электродвижущей силы $e_К = r_К \cdot i_К$, введённый в цепь коллектора, учитывает усилительное действие кристаллического триода.

Так как $i_К = \alpha i_э$,

то $$e_К = \alpha r_К i_э,$$

Обозначив

$$\alpha r_К = r_m, \tag{10.85}$$

получим

$$e_К = r_m i_э.$$

Общие уравнения четырёхполюсника (6.67) применительно к схеме и обозначениям рис. 10.52б принимают следующую форму:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (r_э + r_б) i_э + r_б i_К \\ u_2 &= (r_б + r_m) i_э + (r_б + r_К) i_К \end{aligned}\right\}. \tag{10.86}$$

Направление эдс $r_m i_э$ эквивалентного генератора выбрано из условия, чтобы посылаемый этим генератором в цепь коллектора ток был направлен так же, как и ток эмиттера (т. е. в обоих случаях по часовой стрелке).

Сравнивая ур-ния (10.86) с ур-ниями (6.67), приходим к выводу, что:

входное сопротивление между зажимами $Э-Б$ (при разомкнутом выходе) равно

$$r_{11} = r_э + r_б; \tag{10.87}$$

сопротивление связи от входа к выходу (при разомкнутом выходе) равно

$$r_{21} = r_б + r_m; \tag{10.88}$$

сопротивление выхода (при разомкнутом входе) равно

$$r_{22} = r_б + r_k; \tag{10.89}$$

сопротивление связи от выхода к входу (при разомкнутом входе) равно:

$$r_{12} = r_б. \tag{10.90}$$

То обстоятельство, что сопротивление r_{21} не равно r_{12} является особенностью активного четырёхполюсника. Как отмечалось в § 6.5, в случае пассивного четырёхполюсника всегда выполняется условие $r_{21} = r_{12}$ (теорема взаимности).

При учёте внутреннего сопротивления $R_г$ источника энергии сигнала и нагрузочного сопротивления $R_н$, получается эквивалентная схема, представленная на рис. 10.53.

Применяя закон Кирхгофа к входному и выходному контурам этой схемы, можно написать следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} e_г &= (R_г + r_э + r_б) i_1 + r_б i_2 \\ -r_m i_э &= r_б i_1 + (r_К + r_б + R_н) i_2 \end{aligned}\right\}. \tag{10.91}$$

Так как $i_э = i_1$, то

$$0 = (r_б + r_m) i_1 + (r_К + r_б + R_н) i_2. \tag{10.92}$$

Совместное решение ур-ний (10.91) и (10.92) даёт следующие выражения для токов i_1 и i_2:

$$i_1 = \frac{e_г (r_б + r_К + R_н)}{(R_г + r_э + r_б)(r_б + r_К + R_н) - r_б (r_б + r_m)}, \tag{10.93}$$

$$i_2 = -\frac{e_г (r_б + r_m)}{(R_г + r_э + r_б)(r_б + r_К + R_н) - r_б (r_б + r_m)}. \tag{10.94}$$

Используя выражения (10.87)—(10.90), перепишем эти выражения в форме:

$$i_1 = \frac{e_c\,(R_н + r_{22})}{(R_г + r_{11})\,(R_н + r_{22}) - r_{12}\cdot r_{21}}, \qquad (10.93')$$

$$i_2 = -\frac{e_c \cdot r_{21}}{(R_г + r_{11})\,(R_н + r_{22}) - r_{12}\cdot r_{21}}. \qquad (10.94')$$

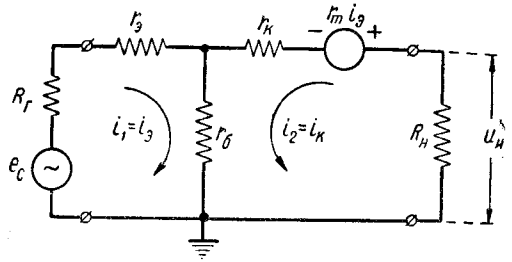


Рис. 10.53

На основании этих выражений нетрудно найти формулы для входного и выходного сопротивлений кристаллического усилителя.

Очевидно

$$R_г + r_{вх} = \frac{e_c}{i_1} = R_г + r_{11} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_н + r_{22}},$$

откуда

$$r_{вх} = r_{11} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_н + r_{22}}. \qquad (10.95)$$

Далее, учитывая, что в соответствии с эквивалентной схемой рис. 10.53 полная эдс, вводимая в цепь коллектора, может быть найдена из режима холостого хода:

$$e_2 = -\frac{r_б}{R_г + r_э + r_б}\,e_c + r_m i_э,$$

где $i_э = \frac{e_c}{R_г + r_э + r_б}$ (в режиме разомкнутого выхода), получаем

$$e_2 = -\frac{r_б + r_m}{R_г + r_э + r_б}\,e_c = -\frac{r_{21}}{R_г + r_{11}}\,e_c. \qquad (10.96)$$

Знак минус у эдс e_2 взят потому, что она направлена навстречу выбранному направлению тока $i_г$.

Разделив найденную эдс на ток i_2, определяемый выражением (10.94'), находим выходное сопротивление:

$$R_н + r_{вых} = \frac{e_2}{i_2} = \frac{r_{21}\,[(R_г + r_{11})\,(R_н + r_{22}) - r_{12}\cdot r_{21}]}{(R_г + r_{11})\cdot r_{21}} =$$

$$= R_н + r_{22} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_г + r_{11}},$$

откуда

$$r_{вых} = r_{22} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_г + r_{11}}. \qquad (10.97)$$

Из рассмотрения выражений (10.95) и (10.97) видно, что входное сопротивление кристаллического усилителя зависит от всех параметров эквивалентной схемы кристалла и, кроме того, от нагрузочного сопротивления $R_н$; выходное сопротивление, в свою очередь, зависит от внутреннего сопротивления генератора $R_г$.

Это является особенностью кристаллического усилителя, так как в электронном усилителе (работающем без сеточных токов) вход и выход усилителя развязаны (см. § 10.2).

С помощью известных из электротехники законов согласования генератора, нагрузки и связывающего их четырёхполюсника, можно показать, что оптимальные условия, соответствующие максимальному усилению мощности, получаются при соблюдении следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} R_г &= r_{вх} = r_{11} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_н + r_{22}} \\ R_н &= r_{вых} = r_{22} - \frac{r_{12}\cdot r_{21}}{R_г + r_{11}} \end{aligned}\right\}. \qquad (10.98)$$

Обратимся к рассмотрению схемы кристаллического усилителя с общим эмиттером (рис. 10.54).

При построении эквивалентной схемы, показанной на рис. 10.54*б*, обозначения оставлены те же, что и на рис. 10.53. Однако по-

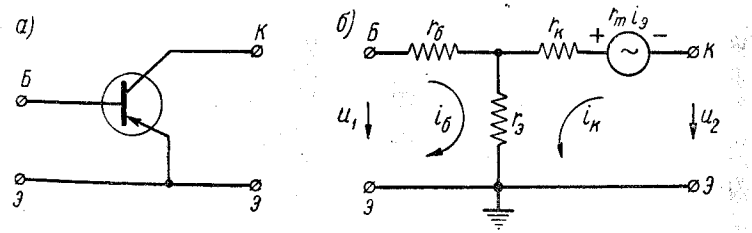


Рис. 10.54

лярность эквивалентного генератора эдс $r_m i_э$ должна быть изменена, поскольку та часть тока эмиттера, которая обтекает сопротивление $r_к$ (и равна $\alpha i_э$) в сумме с током $i_б$ должна быть равна току эмиттера протекающему через сопротивление $r_э$.

Применяя закон Кирхгофа, получаем следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (r_б + r_э)\,i_б + r_э\,i_к \\ u_2 &= r_э\,i_б + (r_э + r_к)\,i_к - r_m i_э \end{aligned}\right\}. \qquad (10.99)$$

Учитывая, что в данной схеме $i_э = i_б + i_к$, последнее уравнение можно привести к следующему виду:

$$u_2 = (r_э - r_m)\, i_б + (r_к - r_m + r_э)\, i_к. \qquad (10.100)$$

Полученным уравнениям отвечает эквивалентная схема, представленная на рис. 10.55.

На этой схеме сопротивление $r_к - r_m$ в цепи коллектора заменяет сопротивление $r_к$, а дополнительный эквивалентный генератор эдс $r_m i_б$ учитывает усилительное действие схемы.

На основании первого уравнения системы (10.99) и ур-ния (10.100) можно написать следующие выражения для сопротивлений эквивалентного четырёхполюсника [см. ур-ние (6.67)]:

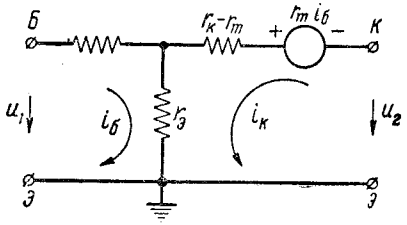


Рис. 10.55.

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= r_б + r_э \\ r_{21} &= r_э - r_m \\ r_{22} &= r_к - r_m + r_э \\ r_{12} &= r_э \end{aligned}\right\}. \qquad (10.101)$$

Подставляя полученные выражения для r_{11}, r_{21}, r_{22} и r_{12} в выражения (10.95) и (10.97), можно найти формулы для входного и выходного сопротивлений схемы с общим эмиттером.

При одних и тех же параметрах кристалла выходное сопротивление в схеме с общим эмиттером значительно ниже, чем в схеме с общей базой.

Отметим также, что выходное напряжение в рассматриваемом усилителе противоположно по знаку входному, т. е. в схеме с общим эмиттером имеет место поворот фазы на 180°, как и в ламповом усилителе с заземлённым (общим) катодом.

Схема с общим эмиттером, обеспечивающая при заданном кристалле наибольшее усиление, является одной из наиболее часто применяемых.

Упомянем в заключение о схеме с общим коллектором. Эта схема является полупроводниковым аналогом лампового катодного повторителя.

В энергетическом отношении полупроводниковые усилители класса А мало отличаются от линейных ламповых усилителей. В обоих случаях для обеспечения неискажённого усиления приходится устанавливать относительно большие токи покоя, которые сильно снижают отдачу усилителя. Однако крупным достоинством кристаллических усилителей является отсутствие расхода энергии на накал, а также очень большой срок службы кристаллов.

К основным недостаткам кристаллических усилителей нужно отнести большой разброс параметров и сильную их зависимость от температурных изменений.

Следует также иметь в виду, что кристаллические усилители (плоскостные) пока ещё не пригодны для работы на частотах, превышающих несколько мегагерц[1]). Это объясняется относительно малой скоростью перемещения носителей зарядов в полупроводниках, неодинаковостью путей, по которым электроны или дырки достигают коллектора и, наконец, влиянием паразитных ёмкостей, шунтирующих сопротивления $r_э$, $r_б$ и $r_к$. Особенно велико влияние паразитной ёмкости, шунтирующей сопротивление коллектора (наиболее высокоомное). Все эти факторы практически не заметны в области акустических частот, для усиления которых кристаллические усилители получают всё более широкое распространение.

На более подробном рассмотрении многочисленных вопросов, связанных с построением входных и выходных цепей, а также построением схем многокаскадных кристаллических усилителей мы не останавливаемся. Эти вопросы освещаются в быстро растущей специальной литературе по кристаллическим усилителям.

[1]) Точечные кристаллические триоды допускают применение на значительно более высоких частотах, однако уступают плоскостным триодам по ряду важных показателей (усиление, мощность, уровень шумов, надёжность и др.).

ГЛАВА 11

НЕЛИНЕЙНОЕ УСИЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

§ 11.1. Режим работы электронной лампы при больших амплитудах колебаний

Главной особенностью рассмотренных в предыдущей главе линейных усилителей является слабое использование электронного тока лампы. Как отмечалось в § 10.2, это резко ухудшает отдачу, т. е. коэффициент полезного действия линейного усилителя, как преобразователя энергии источника постоянного тока в энергию колебаний.

Для устранения этого недостатка необходимо пойти на умышленное искажение формы анодного тока, придав ему импульсный характер, при котором отношение полезной переменной составляющей к постоянной составляющей повышается. Для получения такой формы анодного тока при возбуждении лампы гармоническим напряжением рабочая точка должна быть установлена вблизи нижнего сгиба вольтамперной характеристики, а амплитуда сеточного напряжения должна быть достаточно большой. Подобный режим работы лампы представлен на рис. 11.1 для пентода, когда реакцией анодного напряжения можно пренебрегать и анодный ток определяется в основном напряжением сетки[1]). Напряжение смещения E_{g0} выбрано отрицательным и настолько большим по абсолютной величине, что в отсутствие переменного сеточного напряжения лампа заперта и анодный ток равен нулю. При действии на сетку напряжения

$$\Delta e_g(t) = E_g \cos \omega t$$

анодный ток существует лишь на протяжении отрезков периода 2Θ (рис. 11.1), то есть когда выполняется условие:

$$E_g \cos \omega t - | e_{g1} | > 0, \qquad (11.1)$$

где e_{g1} — напряжение (отрицательное) сетки, соответствующее началу вольтамперной характеристики лампы (пересечению оси

[1]) В случае триода статическую характеристику необходимо заменить динамической (см. § 10.2). В дальнейшем реакция анодного напряжения будет учтена (§ 11.3).

абсцисс с продолжением линейной части характеристики). В моменты перехода $e_g(t)$ через значение e_{g1} происходит „отсечка" анодного тока.

Угол $\omega t = \Theta$, соответствующий изменению тока от амплитуды I_m до нуля, получил название угла отсечки. Основание импульса

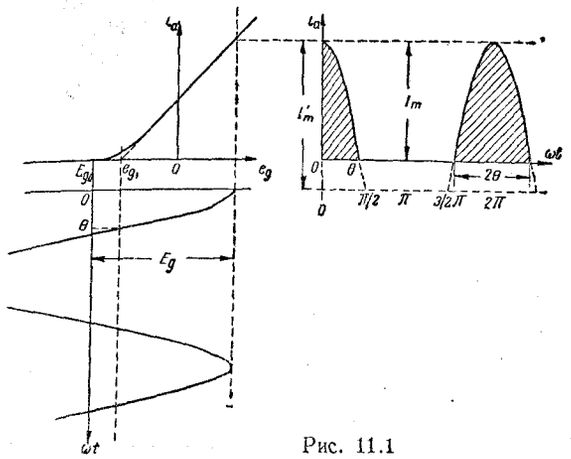


Рис. 11.1

анодного тока равно, очевидно, 2Θ. В пределах этого угла форма импульса тока близка к косинусоидальной и, если пренебречь кривизной вольтамперной характеристики, мгновенное значение анодного тока может быть выражено уравнением:

$$i_a = I'_m (\cos \omega t - \cos \Theta) \qquad (11.2)$$

при $0 < \omega t < \Theta$.

Здесь I'_m обозначает амплитуду импульса, который получился бы при отсчёте ординат i_a от пунктирной линии ωt на рис. 11.1.

Для дальнейшего рассмотрения целесообразно выразить i_a через амплитуду I_m реально существующего импульса, который, конечно, не может превысить тока насыщения лампы. Для этого приравняем в выражении (11.2) $\omega t = 0$, тогда

$$i_a(0) = I_m = I'_m (1 - \cos \Theta),$$

откуда $I'_m = \dfrac{I_m}{1 - \cos \Theta}$.

Подставив это выражение в ур-ние (11.2), получим окончательно:

$$i_a = \frac{I_m}{1 - \cos \Theta} (\cos \omega t - \cos \Theta). \qquad (11.3)$$

Анодный ток (рис. 11.2) резко отличается по форме от усиливаемого колебания, подводимого к сетке. Это является результатом использования электронной лампы в нелинейном режиме. При этом неизбежно возникновение в анодном токе составляющих (гармоник) с частотами 2ω, 3ω и т. д. Однако искажение формы анодного тока ещё не означает обязательного искажения формы колебания, выделяемого на анодной нагрузке. Если построение и параметры схемы усилителя обеспечивают выделение полезной

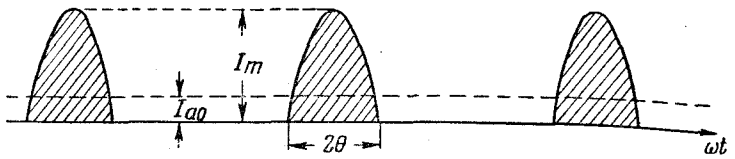


Рис. 11.2

составляющей тока, т. е. основной гармоники с частотой ω и достаточно хорошее подавление влияния высших гармоник 2ω, 3ω и т. д., то выходное напряжение, как и в случае линейного усиления, может быть получено в виде гармонического или почти гармонического колебания.

Крупным энергетическим преимуществом подобного режима работы электронного усилителя является относительно малая величина постоянного тока, отбираемого лампой от источника питания. Эта величина определяется средним значением импульсного тока, представленного на рис. 11.2.

Для выявления особенностей усилителя, работающего с отсечкой анодного тока, необходимо найти соотношение между амплитудой I_{a1} первой гармоники и постоянной составляющей I_{a0}. Кроме того, для выявления требований к устройству, предназначенному для ослабления влияния высших гармонических, необходимо найти амплитуды этих гармонических. Все эти величины можно найти с помощью гармонического анализа анодного тока лампы.

В виду чётности функции $i_a(\omega t)$, определяемой ур-нием (11.3), относительно ωt анодный ток можно представить в виде ряда Фурье, содержащего одни лишь косинусоидальные члены:

$$i_a = I_{a0} + I_{a1}\cos\omega t + I_{a2}\cos 2\omega t + \ldots$$

Применяя ф-лы (2.4) — (2.5), находим:

$$I_{a0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} i_a(\omega t)\, d\omega t =$$

$$= \frac{I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_0^{\theta}(\cos\omega t - \cos\theta)\, d\omega t = I_m\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \quad (11.4)$$

$$I_{a1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} i_a\cos\omega t\, d\omega t =$$

$$= \frac{2I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_0^{\theta}(\cos\omega t - \cos\theta)\cos\omega t\, d\omega t = I_m\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}. \quad (11.5)$$

Аналогично можно получить общее выражение для амплитуды n-ой гармоники:

$$I_{an} = I_m\frac{2[\sin n\theta\cos\theta - n\cos n\theta\sin\theta]}{\pi n(n^2-1)(1-\cos\theta)}. \quad (11.6)$$

Отношения

$$\alpha_0 = \frac{I_{a0}}{I_m} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \quad (11.7)$$

$$\alpha_1 = \frac{I_{a1}}{I_m} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \quad (11.8)$$

$$\alpha_3 = \frac{I_{a2}}{I_m} \text{ и т. д.} \quad (11.9)$$

называются коэффициентами постоянной составляющей, первой гармоники, второй гармоники анодного тока и т. д.

Коэффициенты α_0, α_1, α_2 и т. д., а также отношение $\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, являются функциями угла отсечки. Эти функции были введены в теорию ламповых генераторов А. И. Бергом.

Графики этих функций показаны на рис. 11.3. Из рассмотрения графиков можно вывести важные заключения о свойствах

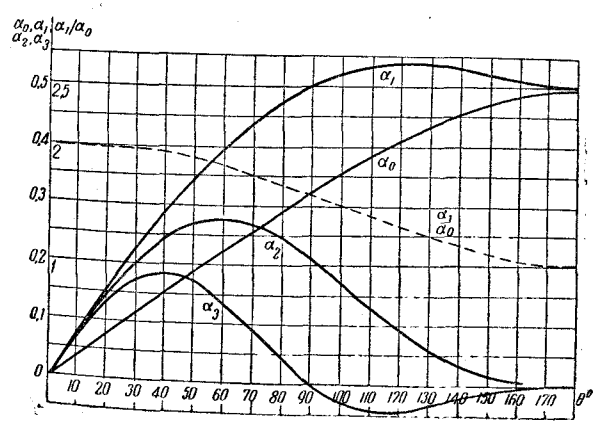


Рис. 11.3

электронного усилителя, работающего с отсечкой анодного тока и прежде всего то, что с уменьшением угла отсечки, отношение

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{I_{a1}}{I_{a0}} = \frac{\Theta - \sin\Theta\cos\Theta}{\sin\Theta - \Theta\cos\Theta} \qquad (11.10)$$

растёт. Следовательно, при уменьшении Θ растёт отдача усилителя, т. е. отношение мощности, выделяемой в нагрузке, к мощности, отбираемой от источника анодного питания. Не следует при этом забывать, что по абсолютной величине обе эти мощности с уменьшением Θ падают. В практике угол отсечки обычно устанавливают близким к 90°. При такой величине Θ получается почти полное использование тока лампы ($\alpha_1 \approx 0{,}5$, что близко к максимуму) при достаточно хорошей отдаче усилителя.

При $\Theta = 90^0$ все нечётные гармоники анодного тока, за исключением первой, обращаются в нуль. Это обстоятельство, как будет показано ниже (§ 11.2), может быть с успехом использовано в усилителях акустической частоты. Наконец, из рис. 11.3 видно, что с повышением порядка гармоник максимумы коэффициентов α_2, α_3 и т. д. перемещаются в область более малых значений Θ. Это обстоятельство оказывает существенное влияние на выбор режима работы лампы в умножителях частоты (см. § 11.5).

Практическое использование особенностей работы лампы с отсечкой анодного тока рассматривается ниже применительно к некоторым конкретным задачам.

§ 11.2. Апериодические усилители мощности. Двухтактные схемы

Рассмотрим схему усилителя, изображённую на рис. 11.4. Особенностью этой схемы является совместная работа двух ламп на общую нагрузку через трансформатор, первичная обмотка которого состоит из двух одинаковых частей, связанных со вторичной обмоткой общим магнитным потоком. Усиливаемое напряжение подаётся через трансформатор с симметричной вторичной обмоткой на сетки ламп $Л_1$ и $Л_2$ противофазно. Напряжение смещения E_{g0} на сетки обеих ламп подаётся одинаковое. Допустим, что это смещение выбрано таким, что угол отсечки анодного тока получается близким к 90°. Тогда анодные токи ламп $Л_1$ и $Л_2$ будут иметь вид, показанный на рис. 11.5. В виду противофазности

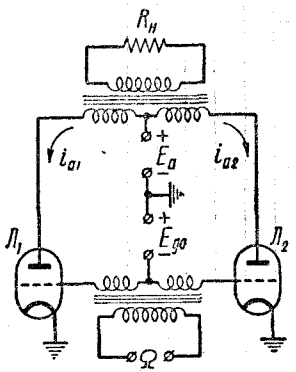


Рис. 11.4

сеточных напряжений импульсы тока лампы $Л_1$ сдвинуты относительно импульсов лампы $Л_2$ на время, равное половине периода.

Таким образом, лампы работают поочерёдно, посылая анодный ток то в одну, то в другую половину первичной обмотки

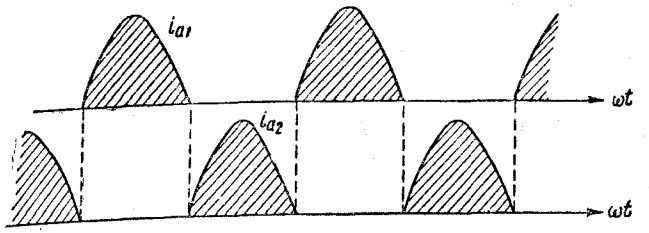


Рис. 11.5

анодного трансформатора, причём направления токов i_{a1} и i_{a2} в указанных частях обмотки противоположны. По отношению к вторичной обмотке анодного трансформатора действие двух половин первичной обмотки можно заменить одной обмоткой, обтекаемой током, составленным из i_{a1} и i_{a2}, как это показано на рис. 11.6. Если основание импульсов равно $\frac{T}{2}$ (угол отсечки $\Theta = 90^0$), то этот ток ничем не отличается от обычного синусоидального тока и форма напряжения на выходе усилителя будет совпадать с формой входного напряжения, подаваемого к усилителю. Таким образом, можно получить неискажённое (линейное) усиление сигнала при использовании лампы в нелинейном режиме, обеспечивающем хорошую отдачу усилителя.

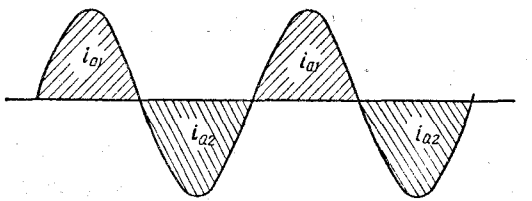


Рис. 11.6

Из предыдущего рассмотрения видно, что этот результат основан на удачном сочетании особенностей работы лампы с отсечкой анодного тока с особенностями двухтактной схемы: работа с отсечкой 90° позволяет свести к нулю нечётные гармоники (за исключением 1-ой) в самом анодном токе каждой из ламп (рис. 11.3), а двухтактное включение ламп по схеме рис. 11.4 приводит к взаимной компенсации всех чётных гармоник в выходной обмотке анодного трансформатора. Последнее обстоятельство поясняется рис. 11.7, из которого видно, что при сдвиге импульсной последовательности i_{a2} на половину периода относительно i_{a1}, вторые гармоники этих токов совпадают по фазе. То же, очевидно, относится к 4-ой, 6-ой и всем остальным чётным гармоникам. В двух половинах первичной обмотки анодного трансформатора токи

чётных гармоник протекают во взаимнопротивоположных направлениях и создаваемые ими магнитные потоки взаимно уничтожаются.

Ясно также, что и магнитные потоки от постоянных составляющих анодных токов обеих ламп взаимно уничтожаются, ввиду чего устраняется подмагничивание сердечника трансформатора постоянным током анодного питания. Это весьма ценное свойство двухтактной схемы позволяет значительно уменьшить габариты и снизить стоимость трансформатора.

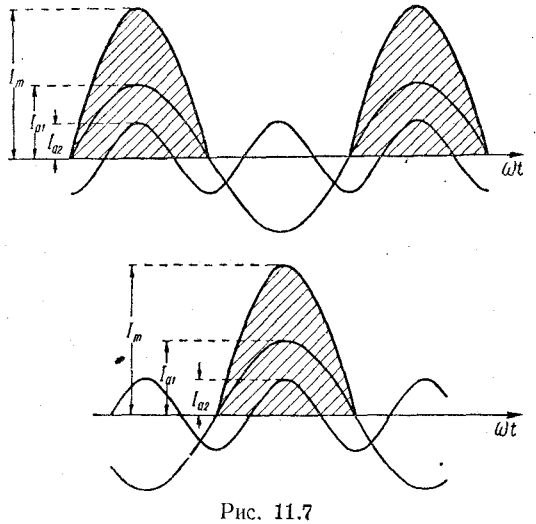


Рис. 11.7

Приведённые выше свойства двухтактной схемы реализуются при полной симметрии схемы и ламп. В виду неизбежного в практике разброса параметров ламп, стыкование двух полупериодов может сопровождаться некоторыми искажениями формы выходного напряжения. Подбором напряжений возбуждения обеих ламп и некоторыми другими приёмами (например, применением отрицательной обратной связи) можно обеспечить коэффициент нелинейных искажений не хуже, чем в линейных усилителях.

Частотная характеристика рассматриваемого усилителя определяется в основном выходным трансформатором.

Остановимся на энергетических соотношениях для усилителя, работающего с отсечкой 90° (так называемые усилители класса В; при работе без отсечки усилители относятся к классу А).

Мощность, отбираемая каждой из ламп от источника постоянного тока, равна

$$P_{01} = E_a \cdot I_{a0}. \qquad (11.11)$$

Полезная мощность, отдаваемая одной лампой в нагрузку, равна[1])

$$P_1 = \frac{U_a \cdot I_{a1}}{2}, \qquad (11.12)$$

[1]) Индуктивность рассеяния анодного трансформатора здесь не учитывается и сопротивление нагрузки, перечисленное в анодную цепь, принимается чисто активным.

где I_{a1} — амплитуда первой гармоники анодного тока,
а U_a — амплитуда напряжения, создаваемого первой гармоникой на половине первичной обмотки анодного трансформатора.

Разделив (11.12) на (11.11), найдём следующее выражение для отдачи усилителя:

$$\eta = \frac{P_1}{P_{01}} = \frac{1}{2} \frac{I_{a1}}{I_{a0}} \cdot \frac{U_a}{E_a}. \qquad (11.13)$$

Отношение $\frac{I_{a1}}{I_{a0}}$, обозначенное ранее (§ 11.1) через γ_1 и определяемое ф-лой (11.10), зависит от угла отсечки.

Отношение амплитуды переменного напряжения на анодной нагрузке к напряжению анодного питания

$$\xi = \frac{U_a}{E_a} \qquad (11.14)$$

называется коэффициентом использования анодного напряжения.

Таким образом, выражение (11.13) можно записать в виде

$$\eta = 0{,}5 \cdot \gamma_1 \cdot \xi. \qquad (11.13')$$

Разность между подводимой к лампе мощностью P_{01} и отдаваемой в нагрузку мощностью P_1 выделяется на аноде лампы. Следовательно, рассеиваемая на аноде лампы мощность равна

$$P_{a1} = P_{01} - P_1 = \frac{P_1}{\eta} - P_1 = P_1 \frac{1-\eta}{\eta}. \qquad (11.15)$$

Выражения (11.11) — (11.15) справедливы для любого усилителя, работающего с отсечкой анодного тока, но при синусоидальном напряжении на нагрузке. Применительно к рассматриваемому здесь режиму работы, когда угол отсечки $\Theta = 90°$, коэффициент $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ [см. ф-лу (11.10)].

Коэффициент ξ для неискажённого усиления должен быть не более $0{,}7 \div 0{,}8$; при бо́льших ξ возникают искажения формы импульсов анодного тока за счёт тока сетки. Подробнее этот вопрос рассматривается в § 11.3.

Подставляя приведённые выше значения γ и ξ в ф-лу (11.13'), найдём отдачу усилителя:

$$\eta = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}7 \approx 0{,}55 = 55\%.$$

Общая мощность, отдаваемая в нагрузочное сопротивление $R_н$ (рис. 11.4), вдвое больше мощности P_1 (потери в трансформаторе здесь не учитываются), отдаваемой каждой лампой в от-

дельности. Это удвоение мощности в двухтактной схеме достигается за счёт удвоения напряжения на первичной обмотке анодного трансформатора. Действительно, так как первые гармоники анодных токов первой и второй ламп сдвинуты по фазе на 180° (за счёт противофазного возбуждения сеток) и, кроме того, лампы подключены к первичной обмотке с противоположных концов, направление токов первой гармоники в обмотках трансформатора в любой момент времени получается одинаковым, как это показано на рис. 11.8. Следовательно, создаваемые этими токами на половинах обмотки напряжения суммируются[1]).

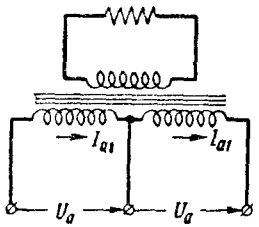


Рис. 11.8

§ 11.3. Резонансные усилители мощности

Использование энергетических преимуществ нелинейного режима усиления особенно облегчается в усилителях радиочастоты, в которых в качестве нагрузки применяется колебательная система. Высокая избирательность колебательных контуров обеспечивает настолько сильное отфильтровывание высших гармоник, что можно допускать любое искажение формы импульсов анодного тока. Применение двухтактной схемы для подавления чётных гармоник, как в случае апериодических усилителей класса В, здесь не обязательно. Не обязательно также работать с углом отсечки точно 90°. Наконец, можно допустить значительно бо́льшее, чем в усилителях низкой частоты, использование анодного напряжения, так как возрастание сеточных токов не отражается на форме напряжения, выделяемого анодным колебательным контуром.

Таким образом, в резонансных усилителях больших амплитуд имеется широкая возможность изменения режима работы электронной лампы. Некоторые ограничения, имеющие место при усилении модулированных колебаний, будут рассмотрены в § 13.2. При усилении же колебаний с постоянной амплитудой при выборе режима работы электронной лампы можно исходить главным образом из требования получения заданной мощности на выходе при хорошей отдаче усилителя.

Как это следует из ф-лы (11.13′), коэффициент полезного действия растёт с увеличением γ_1, т. е. с уменьшением угла отсечки Θ. Чем меньше Θ, т. е. чем меньше длительность импульсов анодного тока, тем выгоднее осуществляется преобразование энергии источника питания в энергию колебаний, развиваемых в резонансном контуре усилителя. В пределе при $\Theta \to 0$ величина γ_1 достигает наибольшей возможной величины, равной двум. При этом, однако, коэффициенты α_1 и α_0, а следовательно, и I_{a1} и I_{a0} стремятся к нулю, т. е. снижается использование лампы по мощности.

Если исходить из требования получения наибольшей возможной при заданном токе насыщения лампы мощности, то нужно применять угол отсечки вблизи $\Theta = 120^0$, где коэффициент первой гармоники α_1 проходит через своё максимальное значение, равное 0,53.

Из графиков рис. 11.4 видно, однако, что α_1 изменяется в области $80^0 < \Theta < 120^0$ медленно. Целесообразно поэтому работать при Θ близком к 90°, где хорошее использование эмиссии лампы сочетается с достаточно хорошим коэффициентом γ_1.

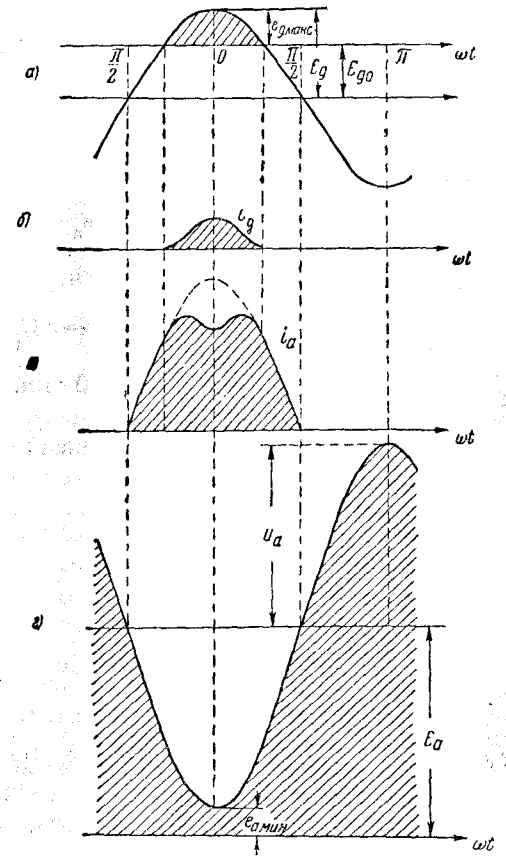


Рис. 11.9

Приведём теперь основные соображения по выбору второго важного параметра, определяющего отдачу усилителя, — коэффициента использования анодного напряжения ξ. С этой целью рассмотрим диаграммы сеточного и анодного напряжений, а также анодного и сеточного токов для усилителя, работающего в нелинейном режиме. Напряжение возбуждения, подаваемое на сетку лампы, изображено на рис. 11.9*а*. Это напряжение смещено относительно нулевой линии вниз на величину отрицательного напряжения смещения E_{g0}. Заштрихованные части соответствуют положительным значениям результирующего напряжения сетка — катод.

Сеточный ток, имеющий форму импульсов, возникающих при положительном напряжении сетки, показан на рис. 11.9*б*.

[1]) В связи с развитием полупроводниковой техники все большее распространение находят относительно маломощные усилители класса В на кристаллических триодах. Изложенные в данном параграфе основные принципы построения двухтактных схем с небольшими изменениями могут быть распространены и на кристаллические триоды.

Анодный ток изображён на рис. 11.9*в*. Здесь взят случай $\Theta = 90^0$. Импульсы анодного тока совпадают по фазе с положительной полуволной сеточного напряжения.

На рис. 11.9*г* показаны постоянное напряжение анода и вычитающееся из него падение напряжения на колебательном контуре. Так как контур настроен на частоту возбуждения, то сопротивление его чисто активно и напряжение на нём совпадает по фазе с первой гармоникой анодного тока. Таким образом, потенциал анода относительно катода изменяется в противофазе с изменением сеточного напряжения. Большое значение для работы усилителя имеет соотношение между минимальным потенциалом анода:

$$e_{a\,мин} = E_a - U_a$$

и максимальным потенциалом сетки:

$$e_{g\,макс} = U_g - |E_{g0}|.$$

Если $e_{a\,мин} > e_{g\,макс}$, то сеточный ток относительно мал и импульсы анодного тока имеют неискажённую косинусоидальную форму, совпадающую с положительной полуволной сеточного напряжения. Подобный режим работы усилителя называется недонапряжённым.

Если $e_{a\,мин} < e_{g\,макс}$, как это изображено на рис. 11.9, то значительная часть электронов устремляется к сетке и в верхней части импульсов анодного тока образуется провал. Подобный режим работы усилителя называется перенапряжённым. В промежуточных случаях при $e_{a\,мин} \approx e_{g\,макс}$, режим называется критическим.

Перечисленным режимам усилителя соответствуют различные значения $\xi = \frac{U_a}{E_a}$. Для большинства генераторных ламп, используемых в высокочастотных усилителях мощности, при $\xi \leqslant 0{,}9$ режим получается недонапряжённый, при $\xi \geqslant 0{,}95$ перенапряжённый.

При работе в перенапряжённом режиме определение отдельных составляющих анодного тока усложняется из-за искажения формы импульсов. Подробное рассмотрение показывает, что величина γ_1 получается близкой к $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, при $\xi \approx 1$ отдача усилителя приблизительно

$$\eta \approx 0{,}5\ \frac{\pi}{2} \cdot 1 \approx 0{,}78 \approx 80\%.$$

Помимо хорошей отдачи, достоинством перенапряжённого режима является ослабление динатронного эффекта, так как на протяжении значительной части периода напряжение сетки близко по величине к напряжению анода или даже превышает последнее.

Перенапряжённый режим усиления широко используется в современных передатчиках длинных, средних и коротких волн. На ультракоротких волнах создание перенапряжённого режима затрудняется из-за сложности обеспечения достаточно большого сопротивления анодной нагрузки (малая величина характеристики ρ). На очень высоких частотах к этим трудностям добавляется ещё влияние инерции электронов, искажающее форму импульсов тока и приводящее к сдвигу фазы первой гармоники тока относительно сеточного напряжения.

Обратимся к установлению связи между напряжениями и токами для усилителя, работающего с отсечкой тока. Это рассмотрение ограничивается здесь недонапряжённым режимом. Заменяя реальные характеристики лампы идеализированными, как это было сделано в § 10.1, можно для анодного тока написать следующее выражение:

$$i_a = S\,[e_g(t) + D\,e_a(t)] \qquad (11.16)$$

при

$$-\Theta < \omega t < +\Theta.$$

Подставляя в (11.16)

$$e_g(t) = E_g \cos \omega t - |E_{g0}|,$$

$$e_a(t) = E_a - U_a \cos \omega t,$$

получим

$$i_a = S(E_g - DU_a) \cos \omega t + S(DE_a - |E_{g0}|). \qquad (11.17)$$

При $\omega t = \pm\Theta$ анодный ток обращается в нуль, поэтому

$$0 = S(E_g - DU_a) \cos \Theta + S(DE_a - |E_{g0}|). \qquad (11.17')$$

Вычитая (11.17′) из (11.17), получим для тока i_a в интервале $-\Theta < \omega t < +\Theta$ следующее выражение:

$$i_a = S(E_g - DU_a)(\cos \omega t - \cos \Theta). \qquad (11.18)$$

Так как из этого выражения исключены постоянные напряжения E_a и E_{g0}, можно воспользоваться им для установления связи между амплитудами первых гармоник токов и напряжений. Для этого приравняем $\omega t = 0$. Тогда в левой части ур-ния (11.18) i_a обращается в амплитуду импульса I_m:

$$I_m = S(E_g - DU_a)(1 - \cos \Theta).$$

Учитывая ф-лу (11.8), получим:

и

$$\frac{I_{a1}}{\alpha_1} = S(E_g - DU_a)(1 - \cos \Theta)$$

$$I_{a1} = \alpha_1 S(E_g - DU_a)(1 - \cos \Theta). \qquad (11.19)$$

Учитывая, наконец, что амплитуда напряжения на контуре

$$U_a = I_{a1} \cdot Z_{эр},$$

находим для I_{a1} следующее выражение:

$$I_{a1} = \frac{\alpha_1 SE_g (1 - \cos\Theta)}{1 + \alpha_1 SDZ_{эр}(1 - \cos\Theta)}.$$

Так как $SD = \frac{1}{R_i}$ и $SR_i = \frac{1}{D} = \mu$, получаем

$$I_{a1} = \frac{\mu E_g}{Z_{эр} + \frac{R_i}{\alpha_1 (1 - \cos\Theta)}} = \frac{\mu E_g}{Z_{эр} + R_i'}. \qquad (11.20)$$

Сопротивление

$$R_i' = \frac{R_i}{\alpha_1 (1 - \cos\Theta)} = \alpha_i \cdot R_i, \qquad (11.21)$$

где

$$\alpha_i = \frac{1}{\alpha_1 (1 - \cos\Theta)} = \frac{\pi}{\Theta - \sin\Theta\cos\Theta}, \qquad (11.22)$$

формально представляет собой внутреннее сопротивление лампы, приведённое к первой гармонике анодного тока.

Заметим, что на основании выражений (11.19) и (11.22) можно написать:

$$I_{a1} = \frac{S}{\alpha_i}(E_g - DU_a) = S_{ср}(E_g - DU_a) = S_{ср} U_{упр}, \qquad (11.23)$$

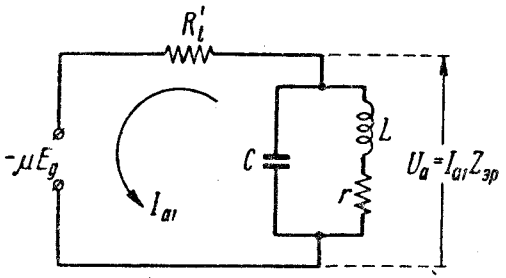


Рис. 11.10

где $S_{ср}$ — „средняя" крутизна характеристики, приведённая к амплитуде первой гармоники, а $U_{упр} = E_g - DU_a$ — „управляющее напряжение".

Выражение (11.20) позволяет представить анодную цепь лампы, работающей в нелинейном режиме, в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 11.10. Не следует забывать, что эта схема, имеющая смысл только для установления связи между I_{a1} и E_g, не может быть использована для установления энергетических соотношений.

Кроме того, величина R' зависит от угла отсечки Θ и, следовательно, от амплитуды колебаний в схеме. График зависимости α_i, построенный по ф-ле (11.22), изображён на рис. 11.11. При $\Theta \to \pi$, т. е. при переходе к линейному режиму, R_i' обращается в R_i.

При $\Theta \to 0$, т. е. при запирании лампы на протяжении всего периода, R_i' обращается в бесконечность. В частном случае $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $R_i' = 2R_i$.

Основываясь на выражении (11.20), находим:

$$U_a = I_{a1} \cdot Z_{эр} = E_g \cdot \frac{\mu Z_{эр}}{Z_{эр} + R_i'},$$

откуда коэффициент усиления

$$\vec{K} = \frac{\vec{U}_{вых}}{\vec{E}_g} = -\frac{U_a}{E_g} = -\mu \frac{Z_{эр}}{R_i' + Z_{эр}}. \qquad (11.24)$$

Это выражение отличается от выражения для коэффициента усиления линейной схемы [см. ф-лу (10.23)] только заменой R_i на R'.

Полагая, как и ранее, $R_i' \gg Z_{эр}$, получим:

$$K \approx -\mu \frac{Z_{эр}}{R_i'} = -\mu \frac{Z_{эр}}{R_i \cdot \alpha_i} = -\frac{SZ_{эр}}{\alpha_i} \approx S_{ср} \cdot Z_{эр}. \qquad (11.24')$$

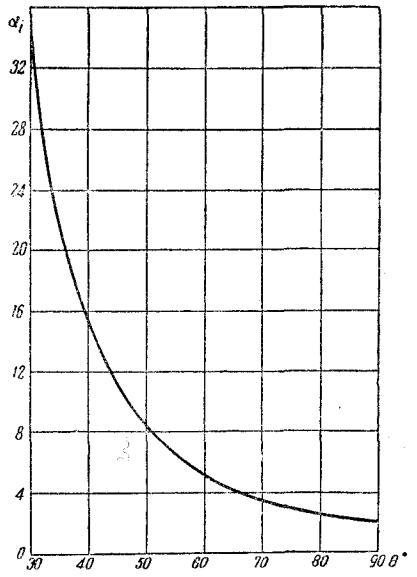


Рис. 11.11

Здесь S — паспортное значение крутизны характеристики лампы. Коэффициент усиления по напряжению при использовании генераторных ламп получается порядка $5 \div 20$.

Необходимо отметить, что усиление напряжения не является главной задачей усилителей мощности.

Рассмотренные в данном параграфе усилители представляют собой по существу генераторы с посторонним (независимым) возбуждением, преобразующие энергию источника анодного питания в энергию высокочастотных колебаний.

Приведённые выше соотношения необходимы для определения напряжения, которое нужно подать на сетку лампы, чтобы получить требуемую величину первой гармоники анодного тока. Основные же параметры анодной цепи усилителя выбираются исходя из требуемой полезной мощности и из условия получения хорошей отдачи усилителя. Подробный расчёт и изложение порядка проектирования усилителей не входит в задачу настоящего курса.

§ 11.4. Элементы схем резонансных усилителей мощности

Рассмотрим сперва схемы питания анодной цепи усилителя. Различают две основные схемы: последовательного и параллельного питания анода. Последовательная схема питания изображена на рис. 11.12.

На этой схеме три основных элемента усилителя: источник питания, колебательный контур и электронная лампа образуют последовательное соединение. Источник постоянного напряжения E_a шунтирован конденсатором (так называемым блокировочным конденсатором) $C_{бл}$, представляющим очень малое сопротивление для токов высокой частоты. Таким образом, при рассмотрении распределения высокочастотных напряжений в схеме нижнюю точку контура можно считать присоединённой непосредственно к катоду лампы.

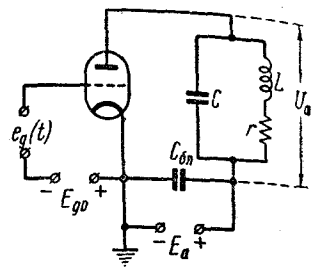


Рис. 11.12

Основным достоинством последовательной схемы является то, что контур не шунтирован никакими вспомогательными элементами. Этим объясняется широкое применение последовательной схемы в диапазоне коротких воли. Недостатком этой схемы является то, что контур находится по отношению к земле под высоким напряжением E_a. Это удорожает стоимость контура, особенно при использовании очень высоких напряжений в мощных передатчиках (10—12 *кв* и выше) и усложняет конструкцию органов настройки контура. Кроме того, проведение операций по настройке контура предъявляет повышенные требования к обеспечению безопасности обслуживающего персонала.

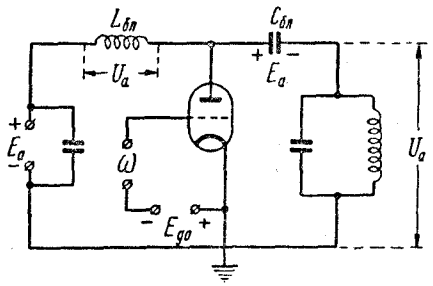


Рис. 11.13

От перечисленных недостатков свободна схема параллельного питания, изображённая на рис. 11.13. На этой схеме источник питания E_a, лампа и контур образуют три параллельные ветви. Разделительный конденсатор $C_{бл}$ принимает на себя постоянное напряжение E_a, освобождая тем самым колебательный контур от этого напряжения. Можно поэтому одну из обкладок конденсатора контура и нижний вывод катушки просто заземлять. Дроссельная катушка $L_{бл}$ запирает путь токам высокой частоты в цепь источника питания. Так как $L_{бл}$ представляет единственное в этой цепи большое сопротивление для высокой частоты, то всё колебательное напряжение, развиваемое на колебательном контуре, действует также и на катушке $L_{бл}$. Для постоянного тока сопротивление катушки (омическое) настолько мало, что падением напряжения от постоянной составляющей анодного тока можно пренебрегать.

При выборе величин $C_{бл}$ и $L_{бл}$ можно исходить из следующих условий: ёмкостное сопротивление разделительного конденсатора для первой гармоники должно быть мало по сравнению с сопротивлением контура:

$$\frac{1}{\omega C_{бл}} \ll Z_{эр}.$$

При выполнении этого условия сопротивление для высших гармоник будет ещё меньше и падением напряжения высокой частоты на конденсаторе $C_{бл}$ можно пренебрегать.

Индуктивность $L_{бл}$, шунтирующая колебательный контур, не должна оказывать существенного влияния на резонансную частоту контура. Для этого величина $L_{бл}$ должна быть велика по сравнению с индуктивностью контура $L_к$.

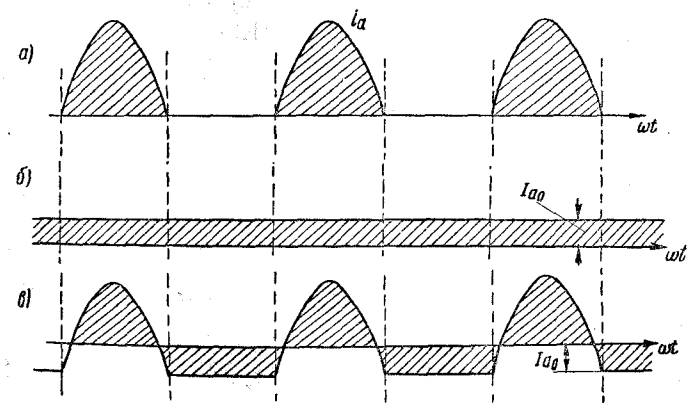


Рис. 11.14

Отношение тока высокой частоты, ответвляющегося в дроссель $L_{бл}$, к току в основной катушке контура обратно пропорционально $\frac{L_{бл}}{L_к}$. Поэтому при достаточно большой величине последнего отношения током высокой частоты в цепи источника E_a можно пренебрегать. Распределение электронного тока лампы между ветвями с дросселем и разделительным конденсатором поясняется рис. 11.14. В верхней части этого рисунка показан полный анод-

ный ток i_a, а на рис. 11.14*б* и 11.14*в* соответственно ток через дроссель, равный I_{a0}, и ток через разделительный конденсатор, равный разности $i_a - I_{a0}$. Этот последний ток представляет собой, очевидно, сумму всех гармоник, входящих в импульсный ток i_a.

Недостатком параллельной схемы питания, затрудняющим применение её на коротких волнах, является шунтирование контура вспомогательными элементами, ухудшающими качества контура.

Рассмотрим теперь сеточную цепь усилителя мощности. Наличие значительных сеточных токов, достигающих в триодах в зависимости от степени напряжённости режима $10 \div 20\%$ от анодного тока, заставляет уделять большое внимание вопросу о мощности, расходуемой в сеточной цепи усилителя и отбираемой от возбудителя.

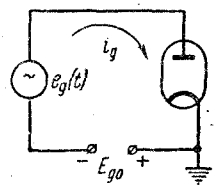


Рис. 11.15

Для определения этой мощности представим цепь сетки усилительной лампы в виде последовательного соединения диода, эквивалентного промежутку сетка — катод, и источника постоянного напряжения E_{g0} (рис. 11.15), а возбудитель в виде генератора гармонической эдс $e_g(t) = E_g \cos \omega t$, включённого последовательно в цепь. Внутреннее сопротивление генератора не учитываем.

Ток $i_g(t)$ в рассматриваемой цепи имеет форму импульсов, возникающих при $e_g(t) > |E_{g0}|$ (рис. 11.9). Обозначим амплитуду этих импульсов через I_g, а угол отсечки через Θ_g, причём форму импульсов для грубого расчёта примем косинусоидальной.

Тогда в интервале $-\Theta_g < \omega t < +\Theta_g$ ток сетки по аналогии с выражением (11.3) может быть представлен в форме:

$$i_g(t) = \frac{I_g}{1-\cos\Theta_g}(\cos\omega t - \cos\Theta_g), \qquad (11.25)$$

а мгновенная мощность, отбираемая от генератора в виде:

$$e_g(t)\cdot i_g(t) = E_g \cos\omega t \cdot \frac{I_g}{1-\cos\Theta_g}(\cos\omega t - \cos\Theta_g).$$

Средняя за период основной частоты мощность будет равна

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Theta_g}^{+\Theta_g} e_g(t)\cdot i_g(t)\, d\omega t = \frac{E_g I_g}{2\pi(1-\cos\Theta_g)}\left[\int_{-\Theta_g}^{+\Theta_g}\cos^2\omega t\, d\omega t - \right.$$

$$\left. -\cos\Theta_g\int_{-\Theta_g}^{+\Theta_g}\cos\omega t\, d\omega t\right] = \frac{E_g I_g}{\pi(1-\cos\Theta_g)}\left[\int_0^{\Theta_g}\frac{1}{2}\, d\omega t + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\Theta_g}\frac{1}{2}\cos 2\omega t\, d\omega t - \cos\Theta_g\int_0^{\Theta_g}\cos\omega t\, d\omega t\right] =$$

$$= \frac{E_g I_g}{\pi(1-\cos\Theta_g)}\left[\frac{\Theta_g}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\Theta_g - \sin\Theta_g\cos\Theta_g\right] =$$

$$= \frac{E_g I_g}{2\pi(1-\cos\Theta_g)}\left[\Theta_g - \frac{\sin 2\Theta_g}{2}\right] =$$

$$= \frac{E_g I_g}{2\pi(1-\cos\Theta_g)}[\Theta_g - \sin\Theta_g\cos\Theta_g]. \qquad (11.26)$$

Но в соответствии с ф-лой (11.5)

$$I_g \cdot \frac{\Theta_g - \sin\Theta_g\cos\Theta_g}{\pi(1-\cos\Theta_g)} = I_{g1},$$

где I_{g1} — амплитуда первой гармоники сеточного тока.

Подставляя это выражение в (11.26), получим:

$$P_g = \frac{E_g \cdot I_{g1}}{2}. \qquad (11.27)$$

Таким образом, расходуемая в сеточной цепи усилителя мощность, обусловленная током сетки, определяется амплитудой вводимого в цепь сетки напряжения и амплитудой первой гармоники сеточного тока. Из этой мощности часть, равная $|E_{g0}|\cdot I_{g0}$, расходуется в элементах смещения, а остальная мощность идёт на нагревание сетки.

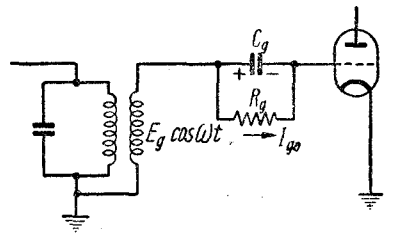


Рис. 11.16

Остановимся ещё на вопросе о способах создания напряжения смещения E_{g0}. Вместо независимого источника эдс (батарея, выпрямитель и т. д.) часто используется падение напряжения, создаваемое постоянной слагающей сеточного тока при прохождении через омическое сопротивление. Возможные схемы включения сопротивления показаны на рис. 11.16 и 11.17.

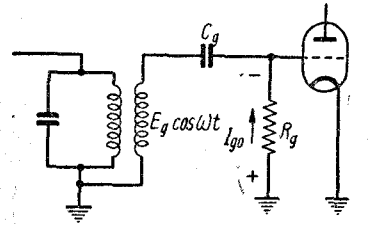


Рис. 11.17

Наибольшая величина $|E_{g0}|$, которую можно получить с помощью сеточной утечки (при $R_g \to \infty$), не превышает амплитуды E_g переменного напряжения, вводимого в цепь сетки от возбудителя.

§ 11.5. Умножение частоты

Наличие в составе импульсного анодного тока ряда гармоник с частотами, кратными основной частоте возбуждения, позволяет использовать усилитель, работающий с отсечкой анодного тока, в качестве умножителя частоты. Для этого не требуется производить каких-либо изменений в схеме резонансного усилителя. Достаточно настроить нагрузочный колебательный контур на частоту выделяемой гармоники и установить режим работы лампы, наиболее выгодный для подчёркивания полезной гармоники в составе анодного тока. Из графиков рис. 11.3 видно, что в случае удвоения частоты выгодно работать с углом отсечки, близким к 60°, при котором коэффициент второй гармоники проходит через максимум, в случае утроения частоты — при $\Theta \approx 40^0$ и т. д.

Если контур настроен на частоту $n\omega$, где $n = 2,3$ и т. д., то гармоника тока порядка $n-1$ и более низкие пройдут преимущественно через индуктивную ветвь контура, а гармоники $n+1$ и более высокие через ёмкостную ветвь. При достаточно высокой добротности напряжение на контуре от всех гармоник, за исключением n-й, очень мало. Поэтому напряжение на контуре близко к синусоидальному с частотой $n\omega$.

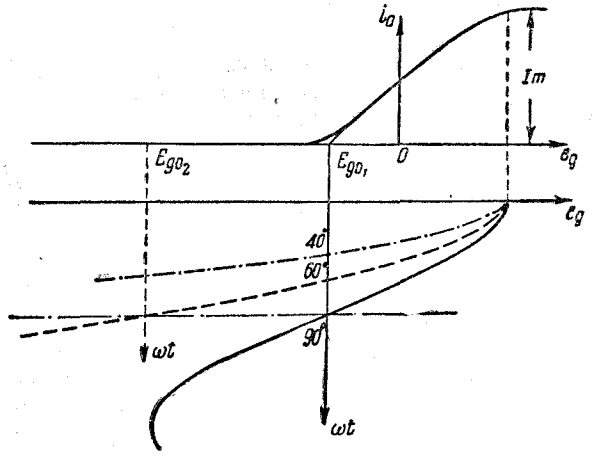


Рис. 11.18

Следует иметь в виду, что для полного использования эмиссии катода, т. е. для поддержания амплитуды импульса на уровне, близком к току насыщения (имеются в виду лампы с вольфрамовым катодом), снижение угла отсечки должно производиться одновременным увеличением амплитуды E_g и отрицательного смещения $|E_{g0}|$. На рис. 11.18 углу $\Theta = 90°$ соответствует смещение E_{g01}, углу $\Theta = 60°$ E_{g02} и т. д. Амплитуды E_g выбраны так, что I_m остается неизменным. Можно поэтому считать характерным для умножителя частоты работу со большими амплитудами сеточного напряжения.

Это обстоятельство, наряду со снижением полезной мощности при повышении порядка умножения [из-за убывания коэффициентов α_n (рис. 11.3)], заставляет в передатчиках ограничиваться удвоением или утроением частоты в одной ступени. Лишь изредка используется учетверение частоты. Если требуется осуществить умножение более высокого порядка, то применяется последовательное умножение частоты в нескольких ступенях передатчика.

Умножение частоты широко применяется в ряде измерительных устройств, когда требуется получить сетку частот, кратных какой-либо одной определённой частоте, рассматриваемой в качестве опорной.

В подобных системах часто используется электронная лампа, работающая с очень малым углом отсечки. Подавая на сетку лампы достаточно большое переменное напряжение при большом смещении, можно получить анодный ток в виде последовательности очень острых импульсов. Такой ток богат гармониками, образующими очень широкий линейчатый спектр. При воздействии такого спектра на контур напряжение на нём может сильно отличаться от синусоидального, так как в полосу прозрачности контура попадает ряд гармоник. В подобных случаях напряжение на контуре часто удобно определять, исходя не из спектрального представления импульсного тока, а из рассмотрения свободных колебаний, возбуждаемых каждым из импульсов анодного тока в отдельности. Подобный случай изображён на рис. 11.19. В промежутке T

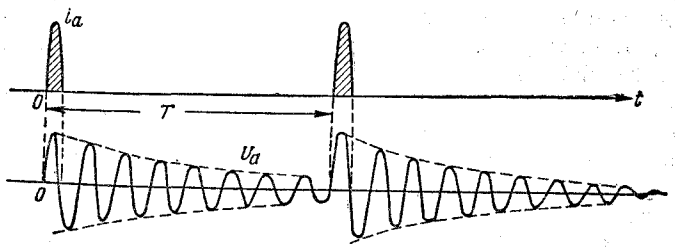


Рис. 11.19

между двумя импульсами тока амплитуда напряжения на контуре убывает по закону (см. § 9.5):

$$U_a(t) = U e^{-\alpha t} = U e^{\frac{-\omega_{0k} t}{2Q}}.$$

Если к началу последующего импульса колебание, вызванное предыдущим импульсом, не успевает полностью затухнуть, необходимо учитывать наложение свободных колебаний.

ГЛАВА 12

ГЕНЕРИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

§ 12.1. Введение. Обобщённая схема автогенератора синусоидальных колебаний

Применяемые в радиотехнике автогенераторы можно разбить на две основные группы: генераторы синусоидальных колебаний и генераторы разрывных (релаксационных) колебаний. Генераторы синусоидальных колебаний в свою очередь делятся на высокочастотные генераторы, неотъемлемой частью которых является колебательная система, и низкочастотные генераторы с апериодическими цепями (так называемые генераторы *RC*).

Установление основных соотношений для генераторов синусоидальных колебаний проводится ниже на материале, относящемся к высокочастотным генераторам, наиболее характерным для радиотехнических устройств. В § 12.10 эти соотношения используются для изучения особенностей генераторов *RC*.

В данном курсе рассматриваются в основном ламповые генераторы, т. е. генераторы, работающие на триодах или многосеточных лампах. Изучение подобных генераторов, очень широко распространённых в радиотехнике и используемых в различных частотных диапазонах, является необходимой ступенью к изучению и более сложных генераторов, применяемых на сверхвысоких частотах (магнетроны, клистроны и др.). Краткое рассмотрение генераторов, работающих на кристаллических триодах, приводится в § 12.12.

Рассмотренные в предыдущей главе усилители синусоидальных колебаний, работающие в режиме усиления мощности, представляют собой, по существу, генераторы с посторонним возбуждением. Здесь рассматриваются генераторы с самовозбуждением (автогенераторы), в которых для возбуждения используются колебания, вырабатываемые самим генератором. Таким образом, автогенератор является первичным источником колебаний, не требующим применения возбудителя.

Как и в случае генераторов с посторонним возбуждением, колебания в автогенераторе получаются за счёт преобразования энергии, подводимой к лампе обычно в виде постоянного тока.

Поэтому, как и усилитель мощности, любой высокочастотный автогенератор состоит из следующих трёх основных элементов: источник питания (динамомашина, аккумулятор, сеть переменного напряжения с выпрямителем и др.), электронная лампа и колебательная система.

Для перехода от генератора с посторонним возбуждением к автогенератору достаточно подменить возбудитель специальным устройством, обеспечивающим возбуждение лампы от собственной колебательной системы. Такое устройство называется обратной связью.

Амплитуда и фаза колебания, подаваемого по каналу обратной связи на вход, должны быть такими же, как и при подаче от возбудителя.

Ясно, однако, что система, в которой отсутствует внешняя вынуждающая сила, принципиально отличается от генератора с посторонним возбуждением. Наиболее ярко это различие проявляется в том, что частота и амплитуда стационарных колебаний в случае автогенератора целиком определяются параметрами самого автогенератора, а в случае постороннего возбуждения частота колебаний навязывается возбудителем, а амплитуда зависит как от возбудителя, так и от параметров усилителя. Далее в случае самовозбуждения большое значение приобретает вопрос о механизме возникновения колебаний при запуске автогенератора, а также вопрос об устойчивости стационарного состояния автогенератора.

Ответ на все эти вопросы можно получить из рассмотрения поведения автогенератора в процессе нарастания колебаний, от момента запуска и до полного установления стационарного состояния автогенератора. Можно наметить следующую картину явлений. В момент запуска в колебательной системе автогенератора возникают свободные колебания, обусловленные включением источников питания, замыканием цепей, электрическими флуктуациями и т. д. Благодаря обратной связи эти первоначальные колебания усиливаются лампой и растут по амплитуде, причём на первом этапе, пока амплитуды малы, усиление имеет, практически, линейный характер и система может рассматриваться как линейная. Энергетически процесс нарастания амплитуд объясняется тем, что за один период колебания усилитель сообщает контуру энергии больше, чем расходуется за это же время в контуре. С ростом амплитуд начинает проявляться нелинейность системы (кривизна вольтамперной характеристики лампы) и усиление снижается. Нарастание амплитуд прекращается, когда усиление снижается до уровня, при котором только компенсируется затухание колебаний в контуре, т. е. когда энергия, отдаваемая усилителем в контур за один период, равна энергии, расходуемой за это же время в контуре.

Таким образом, на последнем этапе установления колебаний основную роль играет нелинейный характер системы, без учёта которого не может быть определено стационарное состояние автогенератора.

Обобщённую схему автогенератора, находящегося в стационарном состоянии, можно представить рис. 12.1. Источники питания электродов лампы на этой схеме не показаны. Колебательная система, представляющая собой линейную часть схемы,

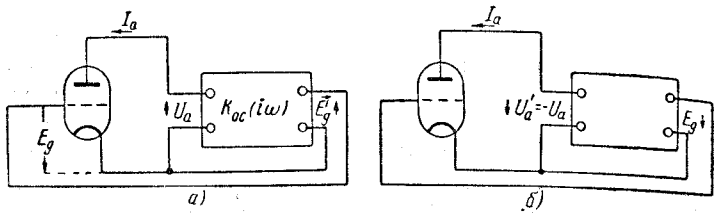


Рис. 12.1

изображена в виде четырёхполюсника, к входным зажимам которого подключены анод и катод лампы, а к выходным — сетка и катод.

Как и на рис. 10.7, напряжение $\vec{U}_a$ отсчитывается от катода к аноду, т. е. в направлении, совпадающем с направлением анодного тока, принятым за положительное.

Напряжение $\vec{E}'_g$ на выходе четырёхполюсника, отсчитываемое в том же направлении, т. е. от катода к сетке, связано с напряжением $\vec{U}_a$ соотношением

$$K_{oc}(i\omega)=\frac{\vec{E}'_g}{\vec{U}_a}. \qquad (12.1)$$

Таким образом, коэффициент передачи четырёхполюсника, в общем случае комплексный, характеризует обратную связь автогенератора. В дальнейшем $K_{oc}(i\omega)$ будем называть коэффициентом обратной связи автогенератора.

Следует иметь в виду, что на рис. 12.1*а*, как и в дальнейшем, стрелками обозначается направление обхода цепи. При изменении направления соответствующая величина (напряжение, ток) должна быть взята с обратным знаком. Это положение распространяется как на мгновенные значения, так и на комплексные амплитуды напряжений и токов. Из этого положения следует, что напряжение $\vec{E}_g$, направленное на рис. 12.1*а* от сетки к катоду, равно

$$\vec{E}_g=-\vec{E}'_g.$$

При таком выборе направлений напряжений (т. е. $\vec{E}_g$ от сетки к катоду, а $\vec{U}_a$ от катода к аноду) выражение (12.1) может быть записано в форме:

$$K_{oc}(i\omega)=-\frac{\vec{E}_g}{\vec{U}_a}. \qquad (12.1')$$

К этому же результату можно придти несколько иным путём, если изменить направление напряжения на входных зажимах четырёхполюсника. Вводя напряжение $\vec{U}'_a=-\vec{U}_a$, направленное от анода к катоду, придём к рис. 12.1*б*. Очевидно,

$$K_{oc}(i\omega)=\frac{\vec{E}_g}{\vec{U}'_a}=-\frac{\vec{E}_g}{\vec{U}_a}.$$

Лампа, на сетку которой подаётся напряжение обратной связи, представляет собой нелинейную часть схемы. Совместно с нагрузочным сопротивлением, соответствующим входному сопротивлению четырёхполюсника, лампа образует усилительную часть схемы. Коэффициент усиления, который обозначим через $K(i\omega)$, очевидно, определяется выражением;

$$K(i\omega)=-\frac{\vec{U}_a}{\vec{E}_g}. \qquad (12.2)$$

Отсюда видно, что коэффициент усиления схемы и коэффициент обратной связи (имеется в виду стационарный режим генератора, когда только и можно пользоваться методом комплексных амплитуд) являются взаимно обратными величинами.

Если входное сопротивление четырёхполюсника (для частоты установившихся колебаний) имеет характер активного, или близкого к активному, сопротивления, то напряжение $\vec{U}_a$ совпадает (или почти совпадает) по фазе с током $\vec{I}_a$, а последний с напряжением $\vec{E}_g$. Из этого следует, что аргумент коэффициента обратной связи $K_{oc}(i\omega)$ близок к величине π, т. е. фазовый сдвиг в четырёхполюснике обратной связи должен быть близок к 180°.

Что же касается модуля коэффициента обратной связи, то по установлении в автогенераторе равновесия амлитуд должно выполнятся условие

$$K_{oc}=\frac{1}{K}. \qquad (12.3)$$

Так как коэффициент передачи линейного четырёхполюсника не зависит от амплитуды колебаний, то выражение (12.3) может быть использовано для определения установившейся амплитуды колебания при заданном K_{oc}. Именно, когда усиление лампы $\frac{U_a}{E_g}$, снижаясь с ростом амплитуды (из-за нелинейности характеристики), достигает величины $\frac{1}{K_{oc}}$, дальнейший рост амплитуды, как ранее уже указывалось, прекращается.

С другой стороны, если известно, что в стационарном режиме устанавливается определённое отношение амплитуд, равное $\frac{U_a}{E_g}$, то выражение (12.3) может быть использовано для определения величины коэффициента обратной связи, необходимой для поддержания заданного отношения $\frac{U_a}{E_g}$.

Прежде чем приступить к детальному рассмотрению механизма возникновения колебаний и установления стационарного режима, целесообразно ознакомиться с основными схемами автогенераторов. Следует отметить, что представленная на рис. 12.1 обобщённая схема не отображает некоторых специальных типов автогенераторов, например транзитронных генераторов и некоторых других. Подобные схемы рассматриваются в § 12.8.

§ 12.2. Основные схемы высокочастотных автогенераторов. Обратная связь

На рис. 12.2, 12.3 и 12.4 показаны три основные схемы автогенераторов с параллельным питанием анода: схема с трансформаторной или индуктивной обратной связью, схема с автотрансформаторной обратной связью (индуктивная трёхточечная схема) и схема с ёмкостной обратной связью (ёмкостная трёхточечная схема).

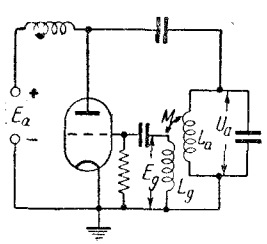


Рис. 12.2

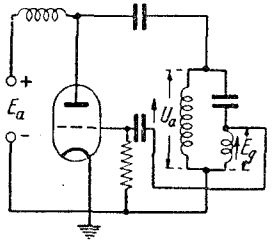


Рис. 12.3

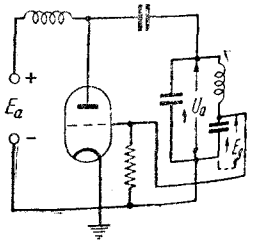


Рис. 12.4

В схеме с трансформаторной связью (рис. 12.2) сдвиг на 180° фазы напряжения, подаваемого на сетку, относительно напряжения, действующего между анодом и катодом, достигается выбором соответствующего направления витков в катушке обратной связи.

Для уяснения правила этого выбора обратимся к схеме, представленной на рис. 12.5. Источники постоянных напряжений на этой схеме не показаны. При выбранном на рис. 12.5 за положительное направление анодного тока (первой гармоники) напряжение на контуре, отсчитываемое от катода к аноду, равно:

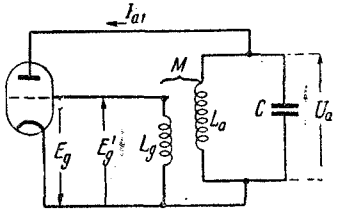


Рис. 12.5

$$\vec{U}_a = \vec{I}_{a1} \cdot Z_э.$$

Это же напряжение может быть выражено через ток индуктивной ветви контура:

$$\vec{U}_a = i\omega L_a \cdot \vec{I}_L.$$

Напряжение, индуктируемое в катушке обратной связи L_g и отсчитываемое, как и напряжение $\vec{U}_a$ от катода к сетке, связано с током в индуктивной ветви контура следующим соотношением:

$$\vec{E}'_g = \pm i\omega M \cdot \vec{I}_L.$$

Выбор знака в правой части зависит от направления витков, причём коэффициент взаимоиндукции M, как и коэффициент самоиндукции, рассматривается нами как положительная величина.

Таким образом,

$$\vec{E}'_g = \pm \frac{M}{L_a} \cdot \vec{U}_a.$$

Отсюда следует, что для противофазности напряжений сетки и анода необходимо брать знак минус, т. е.

$$\vec{E}'_g = -\frac{M}{L_a}\vec{U}_a$$

и коэффициент обратной связи

$$K_{oc}(i\omega) = \frac{\vec{E}'_g}{\vec{U}_a} = -\frac{M}{L_a}. \qquad (12.4)$$

На рис. 12.5 напряжение $\vec{E}'_g$ направлено от катода к сетке, как и напряжение $\vec{U}_a$. Так как напряжение E_g, определяющее положительное направление анодного тока, отсчитывается от сетки к катоду, то, очевидно,

$$\vec{E}_g = -\vec{E}'_g = \frac{M}{L}\vec{U}_a = |K_{oc}(i\omega)|\,\vec{U}_a,$$

где

$$|K_{oc}(i\omega)| = \frac{M}{L_a} \qquad (12.4')$$

представляет собой модуль коэффициента обратной связи. Аргумент (фаза) коэффициента обратной связи в соответствии с ф-лой (12.4) равен π.

Отметим, что в схеме с трансформаторной связью величина и фаза обратной связи практически не зависят от частоты.

В индуктивной трёхточечной схеме (рис. 12.3) сдвиг фазы между $\vec{E}'_g$ и $\vec{U}_a$ достигается тем, что напряжение на сетку подаётся с индуктивности L_g, входящей в ёмкостную ветвь контура. Так как частота генерируемых колебаний в рассматриваемых схемах очень близка к резонансной частоте контура, то токи в ветвях контура сдвинуты по фазе на угол, близкий к 180° (см. § 4.6); следовательно, на такой же угол будут сдвинуты и фазы напряжений $\vec{E}'_g$ и $\vec{U}_a$. Так как амплитуды токов, протекающих через L_g и L_a, при резонансе одинаковы, то модуль коэффициента обратной связи;

$$K_{oc} = \frac{I_C \cdot \omega_p L_g}{I_L \cdot \omega_p L_a} = \frac{L_g}{L_a}. \qquad (12.4'')$$

В схеме рис. 12.4 аналогичный результат достигается подачей на сетку напряжения с конденсатора C_g, включённого в индуктивную ветвь контура. Очевидно,

$$K_{oc} = \frac{I_L \cdot \dfrac{1}{\omega_p C_g}}{I_C \cdot \dfrac{1}{\omega_p C_a}} = \frac{C_a}{C_g}. \qquad (12.4''')$$

Так как K_{oc} обычно не превышает 10—15%, то ёмкость C_g должна быть значительно больше C_a. Резонансная частота контура определяется в основном ёмкостью C_a, а K_{oc} отношением $\frac{C_a}{C_g}$.

Генераторы с трансформаторной и автотрансформаторной обратной связью при последовательном питании анода показаны на рис. 12.6 и 12.7. На этих схемах точки $к$, заземлённые через большие ёмкости, по высокой частоте соединены с катодом практически накоротко. Следовательно, высокочастотные напряжения распределены между электродами лампы в этих схемах так же, как и в схемах с параллельным питанием (рис. 12.2 и 12.3).

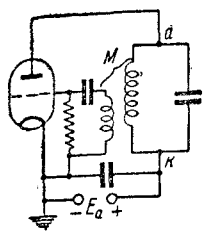


Рис. 12.6

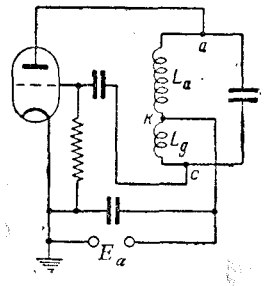


Рис. 12.7

В §12.7 будут приведены некоторые другие схемы генераторов с самовозбуждением.

§ 12.3. Возникновение колебаний в автогенераторе

При рассмотрении начального этапа установления автоколебаний существенную роль играют условия запуска генератора. Допустим, что запуск производится поворотом катушки обратной связи в схеме рис. 12.6 из нейтрального положения, при котором $M = 0$, в положение, соответствующее определённой величине $M \neq 0$. Напряжение питания анода (и накала катода) считаем поданным заранее, так что к моменту запуска все процессы, связанные с включением источников питания, уже закончены.

Так как в приведённых выше схемах в сеточных цепях отсутствуют внешние источники постоянного напряжения, то в момент запуска напряжение смещения равно 0. Следовательно, при запуске рабочая точка на характеристике $i_a(e_g, E_a)$ совпадает с точкой $e_g = 0$, а постоянный анодный ток равен i_{a0} (рис. 12.8).

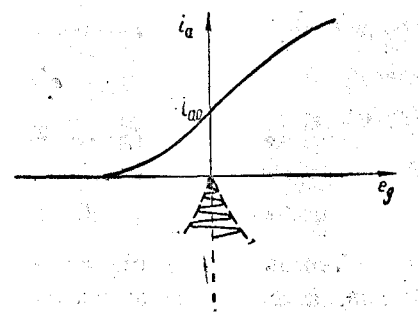


Рис. 12.8

Составим дифференциальное уравнение для какой-либо из-

меняющейся во времени величины, например для тока в индуктивной ветви контура, с учётом обратной связи и с учётом влияния лампы. Для определённости выберем трансформаторную схему (рис. 12.9). Полученные результаты нетрудно будет распространить в дальнейшем на любые LC автогенераторы.

Разрежем представленную на рис. 12.9 схему по линии $d-c$ и составим основные уравнения, связывающие токи и напряжения в левой и правой частях схемы. Для правой части при выбранном за положительное направлении тока i_a и отсчёте напряжения относительно катода, получим следующие уравнения:

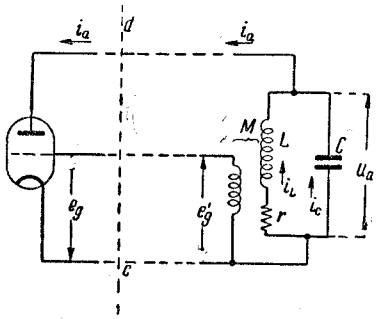


Рис. 12.9

$$\left.\begin{aligned} i_a &= i_L + i_C \\ i_C &= C\frac{du_a}{dt} \\ u_a &= ri_L + L\frac{di_L}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (12.5)$$

Исключая из первого ур-ния (12.5) i_C с помощью второго и третьего уравнений, получим:

$$i_a = i_L + rC\frac{di_L}{dt} + CL\frac{d^2i_L}{dt^2}. \quad (12.6)$$

Напряжение, индуктируемое в катушке обратной связи и отсчитываемое, как и напряжение u_a, от катода, связано с током в индуктивной ветви контура следующим соотношением:

$$e'_g = \pm M\frac{di_L}{dt}.$$

Из § 12.1 ясно, что для получения противофазности напряжений u_a и e'_g необходимо брать знак минус.

Таким образом,

$$e'_g = -M\frac{di_L}{dt},$$

а напряжение, отсчитываемое от сетки к катоду, равно

$$e_g = -e'_g = M\frac{di_L}{dt}.$$

Теперь необходимо анодный ток i_a выразить через напряжения, действующие на электродах лампы. Основываясь на малости амплитуд колебаний, зависимость $i_a(e_g, u_a)$ можно считать линейной.

Здесь под i_a, e_g и u_a подразумеваются переменные составляющие. Применяя выражение (10.14′), получаем

$$i_a = S(e_g - Du_a), \quad (12.7)$$

где S — крутизна характеристики $i_a(e_g, E_a)$ в точке $e_g = 0$, а u_a — падение напряжения на контуре. Все входящие в ур-ние (12.7) величины: i_a, e_g и u_a являются пока ещё неизвестными функциями времени.

Подставив в ур-ние (12.7) $e_g = M\frac{di_L}{dt}$, получим

$$i_a = SM\frac{di_L}{dt} - SDu_a = SM\frac{di_L}{dt} - \frac{u_a}{R_i}. \quad (12.7')$$

Приравнивая правые части ур-ний (12.6) и (12.7′), а также учитывая третье уравнение системы (12.5), после группировки слагаемых получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{1}{CR_i} - \frac{SM}{CL}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{\left(1+\frac{r}{R_i}\right)}{LC}i_L = 0. \quad (12.8)$$

Учитывая, что $\frac{r}{R_i} \ll 1$ и вводя обозначение

$$\alpha_э = \frac{1}{2L}\left(r + \frac{L}{CR_i} - \frac{SM}{C}\right), \quad (12.9)$$

приводим ур-ние (12.8) к виду:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\alpha_э\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0. \quad (12.8')$$

Это линейное уравнение 2-го порядка определяет ток в индуктивной ветви контура в виде колебания

$$i_L = A_0 e^{-\alpha_э t}\sin(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (12.10)$$

где амплитуда A_0 и фаза φ_0 определяются начальными условиями запуска, а частота ω_0 в соответствии с выражением (9.49) равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha_э^2}. \quad (12.11)$$

Характер колебания i_L зависит от знака коэффициента затухания $\alpha_э$. Если $\alpha_э > 0$, ток i_L затухает (рис. 12.10$а$), если $\alpha_э < 0$, амплитуда колебания растёт (рис. 12.10$б$).

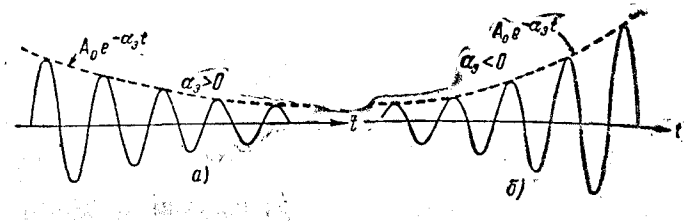


Рис. 12.10

Рассмотрим подробнее выражение для $\alpha_э$. При $M = 0$, т. е. в отсутствие обратной связи, коэффициент затухания положителен и определяется сопротивлением потерь контура r и сопротивлением, учитывающим шунтирующее действие лампы (см. § 4.7):

$$\alpha_э = \frac{1}{2L}\left(r + \frac{L}{CR_i}\right) = \frac{1}{2L}\left(r + \frac{\rho^2}{R_i}\right).$$

Введение обратной связи вносит в контур добавочное сопротивление, равное по абсолютной величине $\frac{SM}{C}$.

При правильном выборе направления витков, при котором обеспечивается сдвиг фазы между u_a и e_g' на 180°, это сопротивление отрицательно. Если при этом

$$\frac{SM}{C} > r + \frac{L}{CR_i}, \tag{12.12}$$

то результирующее сопротивление контура получается отрицательным. В этом случае $\alpha_э < 0$ и ток i_L нарастает по закону:

$$i_L = A_0 e^{|\alpha_э| t} \sin(\omega_0 t - \varphi_0). \tag{12.13}$$

Таким образом, выполнение условия (12.12) обеспечивает рост амплитуды колебания при сколь угодно малых начальных значениях амплитуды. Этому условию можно придать более общий вид:

$$\frac{M}{L} > \frac{rC}{SL} + \frac{1}{SR_i}.$$

Учитывая, что в соответствии с ф-лой (12.4′) $\frac{M}{L}$ представляет собой абсолютную величину коэффициента обратной связи, а $\frac{L}{Cr} = Z_{эр}$ — резонансное сопротивление параллельного контура, получаем окончательно:

$$K_{ос} > \frac{1}{SZ_{эр}} + D. \tag{12.14}$$

Это условие, называемое основным уравнением генератора с самовозбуждением, позволяет легко объяснить влияние основных параметров лампы и схемы на возникновение колебаний.

Чем больше крутизна характеристики S и больше усиление лампы $\mu = \frac{1}{D}$, тем меньшая требуется величина $K_{ос}$, т. е. тем легче возникают автоколебания. Увеличение потерь в контуре, снижающее величину $Z_{эр} = \frac{L}{Cr}$, наоборот, требует увеличения $K_{ос}$, т. е. затрудняет возникновение колебаний.

Следует напомнить, что неравенство (12.14) ничего не говорит о стационарной амплитуде автоколебаний. Для определения последней необходимо, как уже указывалось ранее, учитывать зависимость крутизны характеристики лампы от амплитуды колебаний. Это будет сделано в следующем параграфе. Здесь же отметим, что когда „средняя“ крутизна характеристики $S_{ср}$ снижается против крутизны S настолько, что неравенство (12.14) обращается в равенство

$$K_{ос} = \frac{1}{S_{ср}Z_{эр}} + D, \tag{12.15}$$

в автогенераторе устанавливается стационарная амплитуда колебания.

§ 12.4. Уравнения для амплитуды и частоты стационарных автоколебаний

Из предыдущего видно, что механизм ограничения амплитуды колебаний определяется нелинейным характером лампы. По мере возрастания амплитуды колебаний в контуре увеличивается и амплитуда E_g переменного напряжения, подаваемого через обратную связь на сетку лампы. Возрастание E_g, в свою очередь, увеличивает отрицательное напряжение смещения, создаваемое цепью утечки R_g, C_g (рис. 12.5). Рабочая точка смещается в область нижнего сгиба характеристики и анодный ток приобретает импульсную форму. Изменение амплитуды E_g и напряжения смещения E_{g0} показано на рис. 12.11, где E_{g0} — установившееся напряжение смещения. По окончании процесса установления получается обычный режим, характерный для усилителя, работающего с отсечкой анодного тока. Нетрудно видеть, что в течение одного периода сеточного напряжения используются

участки характеристики лампы с различной крутизной, причём в интервалах между импульсами анодного тока, когда лампа заперта, крутизна обращается в нуль.

Вместе с тем для установления связи между амплитудами напряжений на сетке E_g и на контуре U_a не требуется учёта полного анодного тока. Достаточно знания амплитуды I_{a1} первой гармоники анодного тока, так как постоянная составляющая I_{a0} и высшие гармоники контуром отфильтровываются. Удобно поэтому использовать введённое в § 11.3 понятие средней крутизны характеристики, определяемое в соответствии с выражением (11.23) как

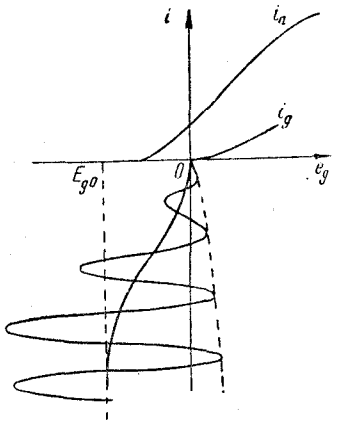


Рис. 12.11

$$\vec{S}_{cp} = \frac{\vec{I}_{a1}}{\vec{E}_g - D\vec{U}_a} = \frac{\vec{I}_{a1}}{\vec{U}_{упр.}}. \qquad (12.16)$$

При таком определении крутизна $\vec{S}_{cp}$ не изменяется внутри одного периода колебания, но зависит от амплитуды колебания.

Введение понятия средней крутизны позволяет построить так называемую ,,квази-линейную" теорию автогенератора. Суть этой теории, получившей своё наиболее полное развитие в работах Ю. Б. Кобзарева, заключается в том, что при заданных и неизменных амплитудах по отношению к первым гармоникам токов и напряжений автогенератор рассматривается как линейное устройство, к которому можно, в частности, применять метод комплексных амплитуд. Нелинейный же характер устройства, как отмечалось выше, учитывается зависимостью (12.16). Из предыдущего ясно, что в основе квазилинейного метода лежит условие высокой избирательности колебательной системы автогенератора, обеспечивающее синусоидальность напряжения на контуре независимо от формы импульсов анодного тока.

Квазилинейный метод позволяет обосновать представленную на рис. 12.1 обобщённую схему автогенератора. В соответствии с выражением (12.16) комплексную амплитуду первой гармоники анодного тока $\vec{I}_{a1}$ можно представить в виде:

$$\vec{I}_{a1} = \vec{S}_{cp} \cdot \vec{U}_{упр} = \vec{S}_{cp}(\vec{E}_g - D\vec{U}_a). \qquad (12.17)$$

Это уравнение устанавливает связь между током I_{a1} и напряжениями в лампе, т. е. в нелинейной части схемы. С другой

стороны, эти же величины, т. е. $\vec{I}_{a1}$, $\vec{E}_g$ и $\vec{U}_a$, можно связать уравнением, охватывающим линейную часть схемы. Для этого воспользуемся соотношениями [см. ф-лу (12.1′)]:

$$\vec{E}_g = -\vec{U}_a \cdot K_{oc}(i\omega),$$

$$\vec{U}_c = \vec{I}_{a1} \cdot Z_э(i\omega),$$

где $K_{oc}(i\omega)$ — комплексный коэффициент обратной связи, равный коэффициенту передачи четырёхполюсника (рис. 12.12), а $Z_э(i\omega)$ — входное сопротивление четырёхполюсника, являющееся нагрузкой для лампы.

Таким образом, имеем:

$$\vec{U}_{упр} = \vec{E}_g - D\vec{U}_a =$$

$$= -\vec{U}_a \vec{K}_{oc} - D\vec{U}_a =$$

$$= (-\vec{K}_{oc} - D) Z_э(i\omega)\, \vec{I}_{a1}. \qquad (12.18)$$

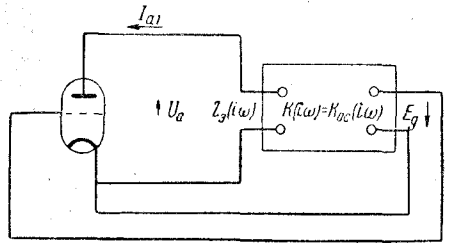


Рис. 12.12

Выражение

$$-(\vec{K}_{oc} + D) Z_э(i\omega) = Z_y(i\omega) \qquad (12.19)$$

называется управляющим сопротивлением.

Итак, получаем следующие два уравнения:

$$\vec{I}_{a1} = \vec{S}_{cp} \cdot \vec{U}_{упр}, \qquad (I)$$

$$\vec{U}_{упр} = -(\vec{K}_{oc} + D) Z_э(i\omega)\, I_{a1}. \qquad (II)$$

Заметим, что ур-ние (I) устанавливает связь между $\vec{I}_{a1}$ и $\vec{U}_{упр}$ независимо от частоты, так как $\vec{S}_{cp}$ зависит только от амплитуды колебаний (инерция электронов здесь не учитывается), уравнение же (II), относящееся к линейной части схемы, наоборот, устанавливает связь между $\vec{U}_{упр}$ и $\vec{I}_{a1}$ только в зависимости от частоты. В стационарном режиме автогенератора по установлении равновесия амплитуд и фаз ур-ния (I) и (II) должны выполнятся одно-

временно. Перемножив левые и правые части этих уравнений, получим важное соотношение:

$$-\vec{S}_{cp} Z_э(i\omega_г)[K_{oc}(i\omega_г)+D]=1 \qquad (12.20)$$

или

$$\vec{S}_{cp} Z_y(i\omega_г)=1. \qquad (12.20')$$

Здесь $\omega_г$ обозначает частоту генерации. Ввиду того, что $\vec{S}_{cp}$ является действительной величиной, а $Z_y(i\omega_г)$ может быть комплексным, выражение (12.20) или (12.20′) распадается на два уравнения.

Действительно, подставив в (12.20′)

$$Z_y(i\omega_г)=R_y(\omega_г)+iX(\omega_г),$$

получим

$$R_y(\omega_г)\cdot S_{cp}=1, \qquad (12.21)$$

$$X_y(\omega_г)=0. \qquad (12.22)$$

Уравнение (12.21) определяет амплитуду, а ур-ние (12.22) — частоту стационарного колебания.

В случае одноконтурных автогенераторов частота генерируемых колебаний очень близка к резонансной частоте контура. Можно поэтому при определении стационарной амплитуды в качестве первого приближения считать $\omega_г=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Подставляя эту частоту в выражение (12.19), получаем:

$$Z_y(i\omega_г)=-(\vec{K}_{oc}+D)Z_{эр}.$$

Так как в схемах рис. 12.2 — 12.6 коэффициент обратной связи не зависит от частоты и является отрицательной вещественной величиной, получаем

$$R_y(\omega_г)=(|K_{oc}|-D)\cdot Z_{эр}. \qquad (12.23)$$

Подставляя это выражение в (12.21), приходим к выражению

$$(|K_{oc}|-D)\,Z_{эр}\cdot S_{cp}=1, \qquad (12.24)$$

которое совпадает с условием (12.15):

$$|K_{oc}|=\frac{1}{Z_{эр}S_{cp}}+D. \qquad (12.24')$$

Основываясь на этом выражении, можно уточнить частоту автоколебаний. Для этого составим выражение для реактивной части

управляющего сопротивления $X_y(\omega)$. Имея в виду схему автогенератора, показанную на рис. 12.9, и применяя метод комплексных амплитуд, можем написать следующие соотношения:

$$\vec{U}_a=\vec{I}_L(r+i\omega L)=\vec{I}_{a1}\cdot Z_э(i\omega)=\vec{I}_{a1}\frac{(r+i\omega L)\cdot\frac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}};$$

$$I_L=\vec{I}_{a1}\frac{\frac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}};$$

$$\vec{E}_г=I_L\cdot i\omega M=\vec{I}_{a1}\frac{\frac{1}{i\omega C}\,i\omega M}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}=\vec{I}_{a1}\frac{\frac{M}{C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}.$$

Следовательно,

$$\vec{U}_{упр}=\vec{E}_г-D\vec{U}_a=\vec{I}_{a1}\frac{\frac{M}{C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}-D\vec{I}_{a1}\frac{(r+i\omega L)\cdot\frac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}=$$

$$=\vec{I}_{a1}\frac{\left(\frac{M}{C}-D\frac{L}{C}-\frac{Dr}{i\omega C}\right)\left[r-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]}{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Отсюда находим

$$Z_y(i\omega)=\frac{\vec{U}_{упр}}{\vec{I}_{a1}}=\frac{\frac{Mr}{C}-Dr\frac{L}{C}+\frac{Dr}{\omega C}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}+$$

$$+i\frac{\frac{Dr^2}{\omega C}-\left(\frac{M}{C}-D\frac{L}{C}\right)\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=R_y(\omega)+iX_y(\omega). \qquad (12.25)$$

Для реактивной части управляющего сопротивления получаем следующее выражение:

$$X_y(\omega)=\frac{\frac{Dr^2}{\omega C}-\left(\frac{M}{C}-D\frac{L}{C}\right)\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что для выполнения условия (12.22) числитель правой части последнего выражения должен равняться нулю. Таким образом,

$$\frac{Dr^2}{\omega_г^2 C} - \left(\frac{M}{C} - \frac{DL}{C}\right)\left(\omega_г L - \frac{1}{\omega_г C}\right) = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\omega_г$ и учитывая, что $\frac{M}{L} = K_{ос}$, получаем

$$\omega_г = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{D}{(|K_{ос}| - D)} \cdot \frac{r^2}{L^2}}. \qquad (12.26)$$

Это выражение можно упростить, если учесть, что в соответствии с ф-лой (12.24)

$$|K_{ос}| - D = \frac{1}{S_{ср} Z_{эр}}.$$

Второе слагаемое в выражении, стоящем под знаком радикала, может быть приведено к виду:

$$\frac{D}{(|K_{ос}| - D)} \cdot \frac{r^2}{L^2} = D S_{ср} \cdot Z_{эр} \cdot \frac{r^2}{L^2} \approx$$

$$\approx D S_{ср} \cdot \frac{L}{Cr} \cdot \frac{r^2}{L^2} = D S_{ср} \cdot \frac{r}{LC}.$$

Но в соответствии с ф-лой (11.24′)

$$D S_{ср} = \frac{DS}{\alpha_i} = \frac{1}{R_i \alpha_i} = \frac{1}{R_i'}.$$

Окончательно получаем

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{R_i'}}. \qquad (12.27)$$

Заметим, что это значение частоты отличается от того, которое может быть получено непосредственно из дифференциального ур-ния (12.8), заменой R_i на R_i'. Поправку к частоте, зависящую от приведённого сопротивления лампы R_i', приходится учитывать при оценке нестабильности частоты, обусловленной влиянием режима лампы на частоту автоколебаний. При выполнении же технических расчётов одноконтурных автогенераторов частоту автоколебаний обычно считают совпадающей с резонансной частотой колебательного контура.

§ 12.5. Определение стационарной амплитуды. Мягкий и жёсткий режимы самовозбуждения

Основываясь на выражении (12.24), можно определить амплитуду установившегося колебания. Для этого нужно построить зависимость $S_{ср}$ от амплитуды управляющего напряжения, как это показано на рис. 12.13. Абсцисса точки пересечения кривой $S_{ср}(U_{упр})$ с горизонтальной прямой, проведённой на уровне

$$S_{ср} = \frac{1}{(|K_{ос}| - D) Z_{эр}},$$

и определяет стационарную амплитуду управляющего напряжения. Зависимость $S_{ср}(U_{упр})$ может быть получена экспериментальным или расчётным путём. Можно указать следующий порядок экспериментального определения $S_{ср}(U_{упр})$. Поставив лампу в режим усиления (т. е. устранив обратную связь), находят зависимость амплитуды тока в контуре от амплитуды $E_г$ подводимого к сетке напряжения. Такая зависимость называется колебательной характеристикой генератора (в режиме постороннего возбуждения). По известной величине добротности контура нетрудно найти амплитуду первой гармоники:

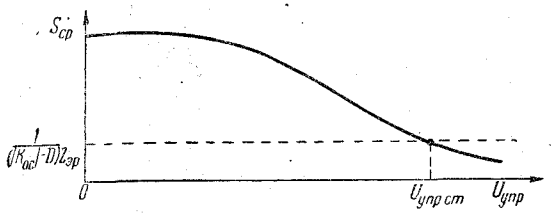


Рис. 12.13

$$I_{a1} = \frac{1}{Q} I_к.$$

Далее по известным величинам $Z_{эр}$ и D можно найти:

$$U_a = I_{a1} \cdot Z_{эр}$$

$$U_{упр} = E_г - D U_a,$$

а отсюда и искомую зависимость

$$S_{ср}(U_{упр}) = \frac{I_{a1}}{U_{упр}}.$$

Метод определения стационарной амплитуды можно сделать более наглядным, если в основу исследования положить колебательную характеристику $I_к(E_g)$.

Допустим, что эта характеристика имеет вид, показанный на рис. 12.14 (кривая *I*). Как отмечалось выше, колебательная характеристика определяется при работе лампы в усилительном режиме.

Для определения амплитуды, которая установится в автогенераторе, т. е. при переходе на самовозбуждение, необходимо установить зависимость между током $I_к$ и напряжением E_g, обусловленную обратной связью. Так как подаваемое на сетку напряжение равно

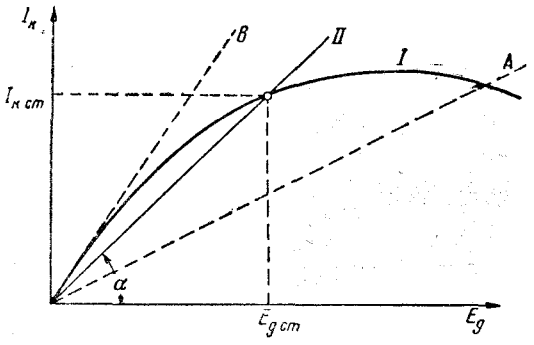


Рис. 12.14

$$E_g = I_к \cdot X_{св},$$

где $X_{св}$ — сопротивление связи, то можно написать:

$$I_к = \frac{E_g}{X_{св}}.$$

Зависимость $I_к(E_g)$, определяемая линейной частью схемы, показана на рис. 12.14 в виде прямой линии *II*, наклонённой к оси E_g под углом

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X_{св}}.$$

Эта линия называется линией обратной связи.

Ордината точки пересечения линий *I* и *II* определяет стационарную амплитуду тока $I_к$, а абсцисса — стационарную амплитуду E_g. Действительно, в точке пересечения величина тока $I_к$, развиваемого лампой в контуре (линия *I*), как раз совпадает с величиной тока (линия *II*), необходимого для создания на сетке (по каналу обратной связи) напряжения E_g, при котором лампа даёт ток $I_к$.

С увеличением связи наклон линии *II* уменьшается и стационарная амплитуда тока $I_к$ растёт. При очень большой обратной связи стационарная амплитуда $I_к$ может уменьшиться из-за перехода в перенапряжённый режим и возрастания тока сетки. Такой режим получается, например, при линии связи, приходящей в точку *A* (рис. 12.14). При ослаблении связи наклон линии связи растёт и при критическом значении $K_{ос}$, обращающем неравенство (12.14) в равенство, возникновение колебаний невозможно. Линия связи, соответствующая критической величине обратной связи, приходит на рис. 12.14 в точку *B*.

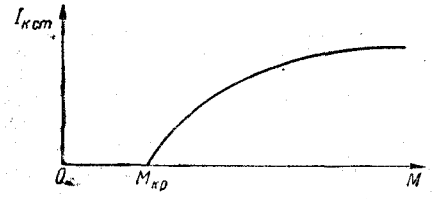


Рис. 12.15

Если в автогенераторе с индуктивной обратной связью и колебательной характеристикой вида рис. 12.14 плавно изменять *M*, то, начиная с критического значения $M_{кр}$, амплитуда стационарного колебания будет плавно изменяться, как показано на рис. 12.15. Такой режим самовозбуждения называется мягким.

Из предыдущего видно, что для получения мягкого режима необходимо, чтобы колебательная характеристика начиналась из нулевой точки и имела достаточно большой наклон в области малых амплитуд. Все эти требования выполняются при использовании сеточной утечки для создания напряжения смещения (автоматическое смещение). При подаче на сетку очень малых амплитуд E_g напряжение смещения близко к нулю и средняя крутизна $S_{ср}$ мало отличается от статической крутизны. Это обеспечивает линейный ход колебательной характеристики в области малых амплитуд E_g. С возрастанием E_g средняя крутизна снижается и колебательная характеристика принимает вид, показанный на рис. 12.14.

Снижение средней крутизны обусловлено в основном ростом отрицательного смещения и переходом рабочей точки на нижний сгиб характеристики, что приводит к отсечке анодного тока. При очень больших амплитудах E_g возможно также уменьшение анодного тока из-за возрастания тока сетки.

При использовании принудительного смещения колебательная характеристика принимает вид, показанный на рис. 12.16. Для возникновения колебаний в данном случае требуется очень сильная обратная связь (линия *OA* на рис. 12.16). После того, как колебания установились, связь можно ослаблять вплоть до величины M_2, при которой линия связи занимает положение *OB*. При дальнейшем ослаблении связи колебания срываются. Для восстановления колебаний *M* нужно увеличить до значения M_1, соответствующего линии связи *OA*. Такой режим самовозбуждения называется жёстким.

Зависимость стационарной амплитуды $I_к$ от величины M при жёстком режиме показана на рис. 12.17.

Если принудительное напряжение смещения настолько велико, что колебательная характеристика начинается не из нуля (рис. 12.18), то никакое увеличение обратной связи не способно вызвать автоколебания. Если же с помощью внешнего воздействия вызвать колебания, то при достаточно сильной обратной связи колебания могут сохраниться и после прекращения воздействия. Из двух точек пересечения линий I и II, точка C является устойчивой, а точка D — неустойчивой. Это означает, что при небольших случайных отклонениях амплитуды около точки C система возвращается в исходное состояние, в районе же точки D сколь угодно малое отклонение амплитуд прогрессивно возрастает и переводит амплитуду $I_к$ либо в устойчивую точку C, либо в точку O (также устойчивую).

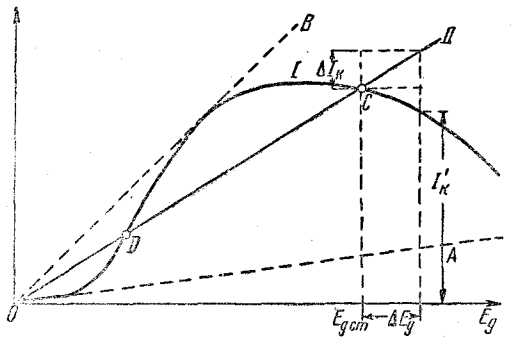


Рис. 12.16

Поясним это положение для точки C (на рис. 12.16). Допустим, что амплитуда тока в контуре случайно увеличилась на величину $\Delta I_к$. Это вызовет увеличение напряжения, подаваемого на сетку через обратную связь, на величину ΔE_g. При новом напряжении на сетке $E_g + \Delta E_g$ лампа способна поддерживать в контуре ток $I'_к$, который меньше, чем $I_к + \Delta I_к$. Таким образом, ток в контуре не может удержаться на уровне $I_к + \Delta I_к$ и начнёт убывать, т. е. возвращаться к исходному значению $I_к$. Тоже будет при случайном уменьшении тока в контуре. Аналогичными рассуждениями нетрудно доказать неустойчивость амплитуды в точке D.

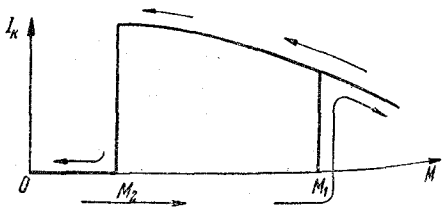


Рис. 12.17

Из приведённых рассуждений видно, что в генераторах с самовозбуждением целесообразно применять автоматическое смещение, которое позволяет сочетать благоприятные для запуска автогенератора условия ($E_{g0} = 0$ в момент включения) с выгодным рабочим режимом в стационарном состоянии. При выборе сопротивления утечки можно исходить из условия получения требуемой величины E_{g0} в установившемся режиме автогенератора:

$$R_g = \frac{|E_{g0}|}{I_{g0}}, \quad (12.28)$$

где I_{g0} — постоянная слагающая сеточного тока в стационарном режиме. При определении E_{g0} и I_{g0} можно поступать так же, как и при постороннем возбуждении генератора (§ 11.4).

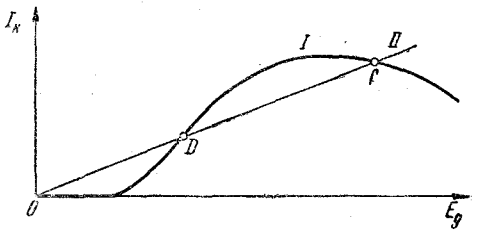


Рис. 12.18

Ёмкость сеточного конденсатора C_g должна быть достаточно большой, чтобы за время между двумя импульсами сеточного тока напряжение на нём изменялось незначительно. Это требование выполняется, если постоянная времени цепи утечки $T_к = C_g R_g$ велика по сравнению с периодом $T_г = \frac{2\pi}{\omega_г}$ автоколебаний. Таким образом, должно выполняться условие:

$$C_g \gg \frac{1}{R_g} \cdot \frac{2\pi}{\omega_г} = \frac{1}{R_g} \cdot T_г. \quad (12.28')$$

Чрезмерное увеличение постоянной времени T_g может отрицательно сказаться на работе автогенератора, особенно при импульсной модуляции. Если T_g намного больше, чем длительность импульса τ, то за время τ отрицательное смещение не успевает нарасти до требуемой величины E_{g0} и генератор работает в неблагоприятном энергетическом режиме, практически без смещения.

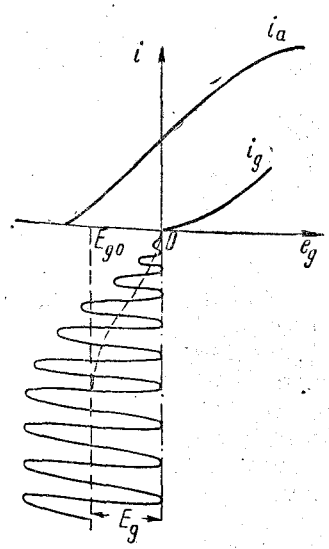


Рис. 12.19

Большая инерционность цепи R_g, C_g (при большом R_g) может привести к нарушению нормальной работы и в автогенераторе непрерывного действия. Это нарушение, получившее название прерывистой генерации, заключается в следующем.

Пусть R_g выбрано настолько большим, что при данной величине обратной связи и данном контуре стационарная амплитуда автоколебаний получается относительно малой. Подобный режим изображён на рис. 12.19.

Из-за большой величины сопротивления R_g стационарное напряжение E_{g0} почти равно E_g. Стационарная амплитуда E_g определяется из условия снижения средней крутизны S_{cp} до величины [см. ф-лу 12.24)]:

$$S_{cp} = \frac{1}{Z_{эр}\,(|K_{oc}| - D)}.$$

Для установления подобного режима необходимо, чтобы отрицательное напряжение смещения нарастало по абсолютной величине одновременно с ростом E_g, как это и показано на рис. 12.19. Если же постоянную времени выбрать очень большой, то из-за инерционности цепи R_g, C_g рост напряжения смещения отстаёт от увеличения амплитуды E_g. Это приводит к тому, что при очень большой величине $T_g = R_g C_g$ амплитуда E_g может достигнуть значения E'_g, намного бо́льшего стационарной амплитуды E_g, показанной на рис. 12.19. На рис. 12.20 амплитуда достигает своего предельного значения E'_g при очень малом напряжении смещения. По мере роста напряжения смещения рабочая точка будет смещаться влево, а амплитуда E_g постепенно уменьшаться из-за снижения средней крутизны, причём рост отрицательного смещения не прекращается при стационарном значении E_{g0}, показанном на рис. 12.19 и 12.20, а продолжается дальше. Это приводит к снижению S_{cp} до величины меньшей, чем это необходимо для устойчивой работы и колебания срываются. После этого ёмкость C_g медленно разряжается через сопротивление R_g (ток сетки при этом отсутствует) до величины напряжения смещения близкого к нулю, при котором опять возникают автоколебания. Таким образом, при прерывистой генерации возникновение и срыв колебаний образуют периодический процесс.

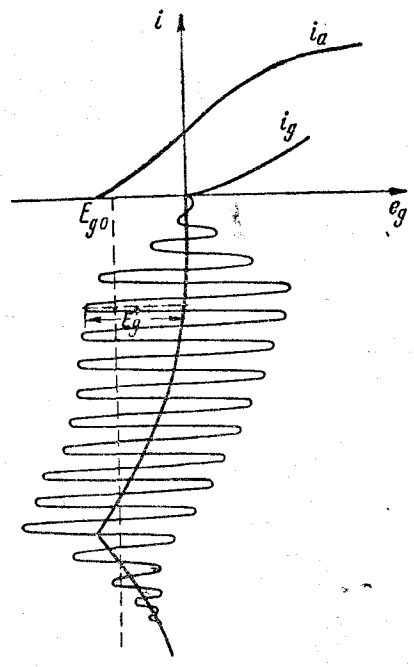


Рис. 12.20

§. 12.6. Баланс фаз в автогенераторе. Стабильность частоты автоколебаний

Обратимся к общему уравнению равновесия автогенератора (12.20) и представим его в несколько ином виде

$$|\overrightarrow{S_{cp}}|\,|Z_э(i\omega_г)|\cdot|K_{oc}(i\omega_г) + D|\,e^{i(\pi+\varphi_S+\varphi_Z+\varphi_{K_{oc}+D})} = 1. \quad (12.29)$$

Здесь φ_S, φ_Z и $\varphi_{K_{oc}+D}$ — аргументы соответственно средней крутизны, сопротивления анодного колебательного контура и величины $[K_{oc}(i\omega_г) + D]$, а угол π учитывает знак минус в правой части выражения (12.20).

Для простоты рассуждений пренебрежём величиной D.

Тогда можно считать

$$U_{упр} \approx E_g,$$

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{E_g},$$

$$|\overrightarrow{S_{cp}}|\,|Z_э(i\omega_г)|\;|K_{oc}(i\omega_г)|\,e^{i(\pi+\varphi_S+\varphi_Z+\varphi_{oc})} = 1, \quad (12.29')$$

где через φ_{oc} обозначен аргумент коэффициента обратной связи $K_{oc}(i\omega_г)$.

Произведение модулей величин $\overrightarrow{S_{cp}}$, $Z_э(i\omega)$ и $K_{oc}(i\omega)$ при $\omega = \omega_г$ равно единице. Это условие совпадает с условием (12.21) и определяет амплитуду стационарных автоколебаний. Второе условие, которое вытекает из выражения (12.29'), может быть записано в виде[1])

$$\pi + \varphi_S + \varphi_Z + \varphi_{oc} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots. \quad (12.30)$$

Этому условию, которое является другой формой условия (12.22), можно придать более общий вид

$$\Sigma\varphi_i = n \cdot 2\pi, \quad (12.30')$$

где n — нуль или любое целое число.

[1]) К этому результату можно придти также, если исходить из выражений (12.1) — (12.2) и (10.76). Действительно, из первой пары выражений следует тождество

$$K(i\omega)K_{oc}(i\omega) = |K(i\omega)|\;|K_{oc}(i\omega)| \cdot e^{i(\varphi_к + \varphi_{oc})} = 1.$$

Отсюда

$$\varphi_к + \varphi_{oc} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$$

Подставляя вместо $\varphi_к$ выражение (10.76), в котором φ_a должно быть отброшено [если реакция анодной цепи на величину анодного тока не учитывается, как в выражении (12.29)], придём к условию (12.30).

Из условия (12.30′) следует, что сумма фазовых сдвигов при обходе замкнутого тракта автогенератора, включая и сдвиг, создаваемый лампой, равна целому числу 2π. В простейших автогенераторах, изображённых на рис. 12.2 — 12.4, фазовые сдвиги создаются лампой (на 180°) и цепью обратной связи (на 180°), всего на 0° (или 360°, что то же самое).

В автогенераторе с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 12.21) при обходе замкнутого кольца обратной связи можно

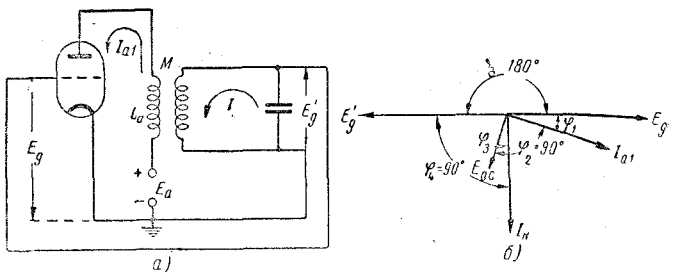


Рис. 12.21

обнаружить следующие фазовые сдвиги: 1) между напряжением сетка — катод $\vec{E}_g$ и первой гармоникой анодного тока $\vec{I}_{a1}$, 2) между $\vec{I}_{a1}$ и эдс $\vec{E}_{oc}$, вводимой в контур благодаря взаимоиндукции M, 3) между эдс $\vec{E}_{oc}$ и током в контуре $\vec{I}_к$, 4) между током $\vec{I}_к$ и напряжением на конденсаторе $\vec{E}_g'$.

Первый из перечисленных сдвигов, который обозначим через φ_1, определяется наличием индуктивности L_a, соединённой последовательно с внутренним сопротивлением лампы R_i'. Можно приближённо считать

$$\varphi_1 \approx -\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L_a}{R'}.$$

Обычно $\omega L_a \ll R_i'$, так что угол φ_1 весьма мал.

Второй сдвиг может быть определён из выражения

$$\vec{E}_{oc} = \pm i\omega M \vec{I}_{a1},$$

т. е. $\varphi_2 = \pm 90°$ в зависимости от знака перед M. Для выполнения фазового баланса необходимо брать знак минус, таким образом, $\varphi_2 = -90°$.

Третий сдвиг φ_3, т. е. сдвиг между $\vec{E}_{oc}$ и $\vec{I}_к$, по абсолютной величине равен углу φ_1, а по знаку ему противоположен. Это

условие, которое также необходимо для фазового баланса, выполняется за счёт установления частоты генерации, несколько отличной от резонансной частоты контура. Так как угол φ_3 должен быть опережающим, то частота генерации должна быть несколько ниже, чем ω_p.

Наконец, угол φ_4, соответствующий сдвигу фазы напряжения E_g', отсчитываемого от катода к сетке (рис. 12.21*а*), т. е. по направлению тока $\vec{I}_к$, равен — 90°. Напряжение же $\vec{E}_g$, равное $-\vec{E}_g'$, сдвинуто относительно $\vec{E}_g'$ на угол 180°. В результате приходим к векторной диаграмме, изображённой на рис. 12.21*б*.

Из условия (12.30) вытекает, что все факторы, оказывающие влияние на фазовые сдвиги в отдельных звеньях автогенератора, влияют и на частоту генерируемых колебаний. В разобранном выше примере таким фактором является индуктивность L_a, включённая в анодную цепь лампы.

В генераторах сверхвысокочастотного диапазона частота генерации может несколько зависеть от времени пролёта электронов. Действительно, пусть из-за инерции электронов крутизна $\vec{S}_{cp}$ является комплексной величиной, т. е. угол φ_S отличается от нуля. Если фаза коэффициента обратной связи не зависит от частоты, как например в схеме рис. 12.2, то восстановление баланса фаз возможно только за счёт изменения угла φ_Z на величину $\Delta\varphi_Z$, компенсирующую угол φ_S. Это означает, что частота генерируемых колебаний $\omega_г$ должна несколько отличаться от резонансной частоты контура ω_p. Нетрудно установить связь между отклонением $\Delta\omega = \omega_г - \omega_p$ и величиной $|\Delta\varphi_Z| = |\varphi_S|$. Для этого воспользуемся уравнением фазовой характеристики контура (см. § 4.7)

$$\varphi_Z = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q\right).$$

Так как при $\omega_г = \omega_p$ $\varphi_Z = 0$, то можно потребовать, чтобы

$$|\Delta\varphi_Z| = \left|\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q\right)\right| \approx \left|\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}\right| Q = |\varphi_S|,$$

откуда относительное отклонение частоты, необходимое для компенсации угла φ_S, должно быть

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right| = \frac{|\Delta\varphi_Z|}{2Q} = \left|\frac{\varphi_S}{2Q}\right|. \qquad (12.31)$$

Например, при $\varphi_S = 15°$ и $Q = 100$, получим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \frac{15°}{57{,}4 \cdot 2 \cdot 100} \approx 0{,}15 \cdot 10^{-2} = 0{,}0015 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Так как время пролёта электронов между электродами лампы, а следовательно и угол φ_S, зависит от анодного напряжения, то изменение этого напряжения приводит к некоторому изменению частоты автоколебаний. Этот фактор является одним из ряда факторов, определяющих нестабильность частоты генератора.

Существенно, что с повышением Q дестабилизирующее влияние угла φ_S ослабляется. Этот вывод, следующий из ф-лы (12.31), поясняется рис. 12.22. С увеличением крутизны фазовой характеристики контура (при увеличении Q) величина $\Delta\omega = \omega_г - \omega_p$, необходимая для получения заданного компенсирующего угла $\Delta\varphi_г$, уменьшается. Это положение можно распространить и на любые другие дестабилизирующие факторы, кроме тех, которые действуют непосредственно на резонансную частоту контура.

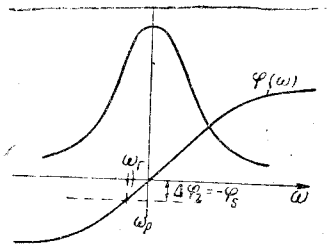


Рис. 12.22

Одним из таких факторов является, в частности, рассматриваемое в следующем параграфе влияние высших гармоник анодного тока.

Таким образом, для повышения стабильности частоты автогенератора необходимо, насколько это возможно, повышать добротность колебательной системы при одновременном повышении эталонности самой колебательной системы. Иногда применяют специальные конструкции конденсаторов и катушек, обеспечивающие ослабление влияния температурных изменений на резонансную частоту контура, а также, при особо жёстких требованиях к стабильности частоты, термостатирование колебательной системы.

В генераторах, работающих на волнах длиннее 30 — 40 *м*, широко применяется стабилизация частоты с помощью пьезокварцевых осцилляторов. Определённым образом вырезанные из кристаллов кварца пластины, обладающие пьезоэлектрическим эффектом, представляют собой колебательную систему с очень высокой добротностью (порядка десятков тысяч) и высокой эталонностью частоты. Введение в схему автогенераторов подобных колебательных контуров позволяет резко ослабить влияние различных дестабилизирующих факторов на частоту автоколебаний. Некоторые схемы кварцованных генераторов приведены в § 12.8. На сверхвысоких частотах повышение стабильности частоты достигается применением высокодобротных полых резонаторов.

§ 12.7. Влияние высших гармонических составляющих анодного тока на частоту генерации

Во всём предыдущем рассмотрении предполагалось, что колебательная система генератора обеспечивает полное отфильтрование высших гармоник, т. е. напряжение на контуре считалось строго синусоидальным. В действительности же, при прохождении по внешней цепи лампы, гармоники анодного тока создают на контуре добавочные напряжения, которые накладываются на напряжение основной частоты и искажают форму результирующего напряжения. Это искажение оказывает некоторое влияние на частоту генерации, несколько отклоняя её от резонансной частоты колебательной системы автогенератора[1]). Хотя влияние высших гармоник в автогенераторе типа *LC*, при хорошей добротности контура, выражено значительно слабее, чем влияние многих других факторов (температурные изменения и др.), рассмотрение этого вопроса представляет значительный принципиальный интерес, так как позволяет более отчётливо выявить механизм взаимодействия линейных (контур) и нелинейных (лампа) элементов автогенератора.

Обратимся к выяснению механизма влияния высших гармоник на частоту генерации. Если бы напряжение на сетку подавалось не по каналу обратной связи с собственного контура автогенератора, а от независимого источника строго синусоидального напряжения, то анодный ток представлял бы собой последовательность неискажённых полуволновых импульсов (при работе с отсечкой $\Theta = 90°$), причём амплитуды гармоник, входящих в состав анодного тока, соответствовали бы рис. 11.3. Фазировка высших гармоник относительно первой для этого случая показана на рис. 12.23*а* (нечётные гармоники — 3, 5-я и т. д. при $\Theta = 90°$ отсутствуют).

Контур настроен на частоту, близкую к частоте первой гармоники, и по отношению к высшим гармоникам представляет собой почти чисто реактивное (ёмкостное) сопротивление; поэтому напряжения высших гармонических составляющих сдвинуты на 90° относительно соответствующих гармоник тока. Накладываясь на напряжение основной частоты (первой гармоники), эти добавочные напряжения образуют сложное напряжение, показанное на рис. 12.23*б* сплошной линией. Пунктирными линиями изображены напряжения первой и второй гармоник. Напряжение второй гармоники сдвинуто на 90° в сторону запаздывания относительно положения, занимаемого 2-й гармоникой тока (рис. 12.23*а*). Если подобное напряжение подается с контура на сетку лампы (по каналу обратной связи), то анодный ток, определяющийся положительной полуволной результирующего напряжения, имеет вид импульсов

[1]) На это явление впервые было указано Ю. Б. Кобзаревым в статье „Зависимость частоты лампового генератора от режима", опубликованной в журнале „Вестник электротехники" № 10, 1931 г.

совпадающих по форме с заштрихованными на рис. 12.23б полуволнами. Благодаря тому, что импульсы получаются несимметричные относительно своего максимального значения $I_м$, фазы отдельных гармоник и в том числе первой гармоники сдвигаются относительно соответствующих гармоник неискажённого импульса тока. С точки зрения фазового баланса автогенератора основное значение имеет фаза первой гармоники анодного тока

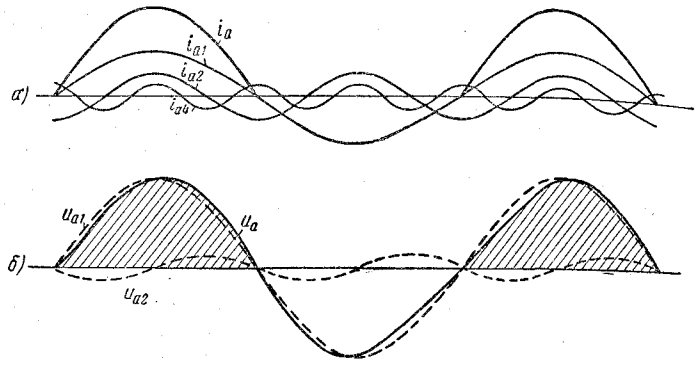


Рис. 12.23

относительно сеточного напряжения основной частоты. Так как последнее находится в фазе (или точнее в противофазе) с напряжением основной частоты, действующим на контуре, то оказывается, что благодаря несинусоидальности результирующего напряжения первые гармоники анодного тока и сеточного напряжения не совпадают по фазе. Это означает, что средняя крутизна характеристики лампы становится комплексной и, следовательно, как уже отмечалось в предыдущем параграфе, частота генерации должна несколько отличаться от резонансной частоты контура.

Для качественной и количественной оценки влияния несинусоидальности напряжения необходимо учитывать все гармоники. Суммирование этих гармоник представляет собой громоздкую задачу. Воспользуемся поэтому методом, основанным на рассмотрении свободных колебаний в контуре при ударном возбуждении от импульса к импульсу[1]).

Найдём прежде всего напряжение, создаваемое одним импульсом анодного тока. Для упрощения рассуждений будем исходить из полуволнового импульса (угол отсечки $\Theta = 90°$), начинающегося в момент $t = 0$. Подобный импульс изображён на рис. 2.21. В гл. 9 при рассмотрении включения синусоидальной эдс $e(t) = E \sin \omega_0 t$ в последовательный разонансный контур с сопротивлением r было найдено следующее выражение (9.67′) для тока в контуре:

$$i(t) = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_0 t.$$

При подключении генератора синусоидального тока $i_a = I_м \sin \omega_0 t$ параллельно резонансному контуру с сопротивлением $Z_{эр}$ нетрудно получить аналогичное выражение для напряжения на контуре:

$$u_a(t) = I_м Z_p \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_0 t.$$

Это выражение справедливо только в пределах $0 < t < \frac{T}{2}$, т. е. в пределах действия импульса анодного тока.

При $t > \frac{T}{2}$ остаётся одно лишь свободное колебание, для получения которого на предыдущее напряжение нужно наложить такое же напряжение, но сдвинутое на $\frac{T}{2}$, т. е.

$$u_a\left(t - \frac{T}{2}\right) = I_м Z_p \left[1 - e^{-\alpha\left(t - \frac{T}{2}\right)}\right] \sin \omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Следовательно, при $t > \frac{T}{2}$ будем иметь

$$u_{a1}(t) = u_a(t) + u_a\left(t - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= I_м Z_p \left[\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_0 t + \left(1 - e^{-\alpha\left(t - \frac{T}{2}\right)}\right) \sin \omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right)\right].$$

Учитывая, что $\frac{\omega_0 T}{2} = \pi$, получаем для $t > \frac{T}{2}$

$$u_{a1}(t) = I_м Z_p \left[e^{-\alpha\left(t - \frac{T}{2}\right)} - e^{-\alpha t}\right] \sin \omega_0 t =$$

$$= I_м Z_p \left(e^{\alpha T/2} - 1\right) e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

На основании полученных результатов нетрудно найти напряжение на контуре, создаваемое как импульсом тока, действующим в данный момент времени, так и всеми предыдущими импульсами. Если счёт времени t вести от начала данного импульса, то

[1]) См. „Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях", И. С. Гоноровский, Связьиздат, 1954 г. стр. 146.

можно написать следующее выражение для результирующего напряжения:

$$u_a(t) = I_м Z_p (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t +$$

$$+ I_м Z_p (e^{\alpha T/2} - 1)\, e^{-\alpha (t+T)} \cdot \sin \omega_0 (t+T) +$$

$$+ I_м Z_p (e^{\alpha T/2} - 1)\, e^{-\alpha (t+2T)} \cdot \sin \omega_0 (t+2T) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= I_м Z_p \{1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} (e^{\alpha T/2} - 1)\, e^{-\alpha T} [1 + e^{-\alpha T} +$$

$$+ e^{-2\alpha T} + e^{-3\alpha T} + \cdots]\} \sin \omega_0 t.$$

Учитывая, что по формуле геометрической прогрессии

$$1 + e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T}},$$

а также, что при $\alpha T \ll 1$ можно считать:

$$e^{-\alpha T} \approx 1 - \alpha T,$$

$$1 - e^{\alpha T/2} \approx 1 - \left(1 + \frac{\alpha T}{2}\right) = -\frac{\alpha T}{2},$$

$$1 - e^{-\alpha T} \approx 1 - (1 - \alpha T) = \alpha T,$$

получаем

$$u_a(t) \approx I_м Z_p \left\{1 - e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} e^{-\alpha T} e^{-\alpha t}\right\} \sin \omega_0 t \approx$$

$$\approx I_м Z_p \left\{1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha T)\, e^{-\alpha t}\right\} = I_м Z_p \left\{1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha t}\right\} \sin \omega_0 t.$$

Это выражение, определяющее положительную половину напряжения, т. е. справедливое при $0 < t < \frac{T}{2}$, соответствует заштрихованной части на рис. 12.23 *б*.

Допустим, что рассматривается автогенератор с индуктивной обратной связью по схеме рис. 12.2.

Тогда напряжение на сетке будет

$$u_g(t) = \frac{M}{L_a} u_a(t),$$

а уравнение импульса анодного тока, если пренебречь реакцией анодной цепи, будет

$$i_a(t) = \frac{SM}{L} u_a(t) = \frac{SM}{L} Z_p I_м \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_0 t =$$

$$= AI_м \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_0 t \approx \frac{AI_м}{2} (1 + \alpha t) \sin \omega_0 t,$$

где $A = \frac{SM}{L} Z_p$ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Заметим, что в приведённом рассуждении допущена неточность, именно: при определении напряжения на контуре мы исходили первоначально из синусоидальной формы импульсов анодного тока, а затем нашли форму импульсов тока, исходя уже из искажённой формы напряжения на контуре. Для уточнения необходимо было бы взять следующее приближение, т. е. найти форму напряжения, исходя из искажённой формы импульса тока, после чего найти следующее приближение для тока и т. д. В таком уточнении нет, однако, никакой необходимости, так как выявление основных черт разбираемого явления, а также достаточно точная количественная оценка обеспечиваются уже первым приближением.

Основываясь на выражении для деформированного импульса анодного тока, находим комплексную амплитуду первой гармоники

$$\overrightarrow{I_{a1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i_a(t)\, e^{-i\omega_0 t}\, d\omega_0 t =$$

$$= \frac{AI_м}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \alpha t) \sin \omega_0 t\, e^{-i\omega_0 t}\, d\omega_0 t.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\overrightarrow{I_{a1}} = \frac{AI_м}{4i} \left(1 - i\frac{\alpha}{2\omega_0}\right).$$

Нетрудно видеть, что множитель $\frac{AI_м}{4i}$ соответствует комплексной амплитуде первой гармоники неискажённого синусоидального импульса (при отсчёте времени с начала импульса), а множитель $\left(1 - i\frac{\alpha}{2\omega_0}\right)$ учитывает влияние несинусоидальности напряжения на контуре. Следовательно, обусловленный этим влиянием дополнительный фазовый сдвиг равен аргументу второго множителя, т. е.

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha}{2\omega_0}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{4Q}\right) \approx \frac{1}{4Q}.$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным в предыдущем параграфе при учёте инерции электронов, находим относительное изменение генерируемой частоты, обусловленное несинусоидальностью колебательного напряжения, по формуле

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right| = \frac{\varphi}{2Q} = \frac{1}{8Q^2}.$$

Таким образом, влияние высших гармоник на частоту генерации обратно пропорционально квадрату добротности контура. При $Q \approx 100$ относительное изменение получается порядка 10^{-5}. Можно показать, что в генераторе с автотрансформаторной связью (рис. 12.3) искажение формы напряжения на сетке выражено сильнее, чем при индуктивной связи, а в генераторе с ёмкостной связью (рис. 12.4) — слабее. Это объясняется тем, что фильтрация высших гармоник контуром (по отношению к напряжению, снимаемому с элемента обратной связи) в первом случае хуже, а во втором — лучше, чем при индуктивной обратной связи.

Проведённое выше рассмотрение относится к режиму работы лампы, характеризующемуся углом отсечки анодного тока 90°. Ясно, что при уменьшении угла отсечки, которое сопровождается относительным возрастанием амплитуд высших гармоник, поправка к частоте генерации будет больше, а при увеличении угла отсечки меньше. Все факторы, которые влияют на режим работы лампы, влияют также и на величину поправки.

§ 12.8. Двухконтурные автогенераторы. Кварцованные генераторы. Явление затягивания частоты

Помимо рассмотренных в § 12.2 простейших одноконтурных автогенераторов, в практике широко применяются автогенераторы с более сложными колебательными системами. Особенно часто

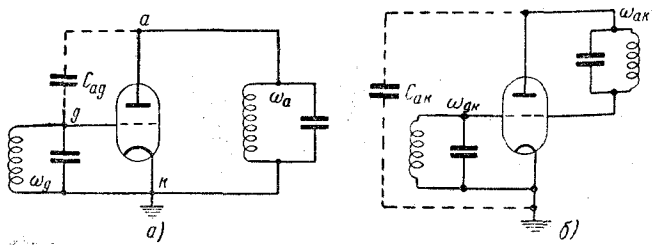


Рис. 12.24

встречаются двухконтурные схемы следующих двух типов: с обратной связью через междуэлектродную ёмкость анод — сетка (рис. 12.24*а*) или через ёмкость анод—катод (рис. 12.24*б*). Источники питания на рис. 12.24 не показаны.

Рассмотрим условия самовозбуждения в схеме с обратной связью через ёмкость анод — сетка (рис. 12.24*а*). Представим колебательную систему автогенератора в виде одного контура, состоящего из последовательного соединения трёх элементов: ёмкости C_{ag}, реактивного сопротивления X_{gk} участка сетка—катод и реактивного сопротивления X_{ak} участка анод—катод (рис. 12.25).

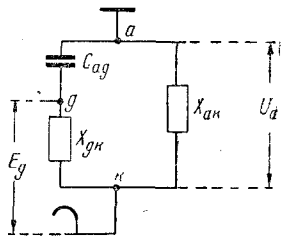


Рис. 12.25

Из условия противофазности напряжений $\vec{E}'_g$ и $\vec{U}_a$ и для того, чтобы контур был колебательным, сопротивления X_{gk} и X_{ak} на частоте генерации должны быть индуктивными. Следовательно, приходим к выводу, что самовозбуждение в рассматриваемой схеме возможно только на частоте, меньшей чем резонансные частоты ω_a и ω_g, т. к. только при этом условии сопротивления X_{gk} и X_{ak} являются индуктивными. К этому же выводу можно придти и другим путём.

Рассматривая контур как реактивный двухполюсник, включённый между анодом и катодом лампы, получим для результирующего сопротивления между точками a—k частотную зависимость, представленную на рис. 12.26 (см. § 6.3). Так как рассматриваемый двухполюсник пропускает постоянный ток, то зависимость $Z_э(\omega)$ начинается из нуля. ω_I и ω_{III} соответствуют „параллельным" резонансам, а ω_{II} — „последовательному" резонансу.

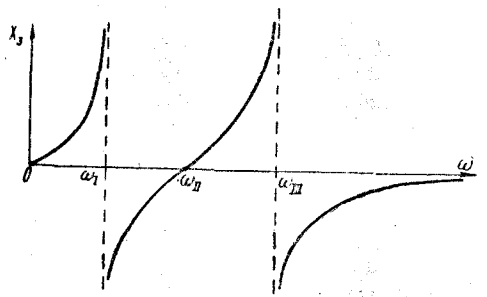


Рис. 12.26

Поскольку для нормальной работы автогенератора требуется большое нагрузочное сопротивление между анодом и катодом, генерация на частоте ω_{II} невозможна. Из двух частот, соответствующих резонансу токов, ω_I меньше резонансных частот сеточного и анодного контуров ω_g и ω_a, а ω_{III} лежит между указанными частотами[1]). На основании указанного выше условия противофазности напряжений $\vec{E}'_g$ и $\vec{U}_a$ приходим к выводу, что генерация возможна только на одной частоте ω_I, меньшей чем наинизшая из частот ω_a и ω_g.

[1]) Частота ω_{III} не может превышать наивысшей из частот ω_g или ω_a, так как при этом и X_{gk} и X_{ak} являлись бы ёмкостными сопротивлениями и резонанс был бы невозможен.

В схеме с обратной связью через ёмкость анод—катод (рис. 12.24б) эквивалентный колебательный контур принимает вид, показанный на рис. 12.27. В данном случае для противофазности напряжений $\vec{E}_g$ и $\vec{U}_a$ необходимо, чтобы на частоте генерации сопротивление X_{gk} было ёмкостным. Следовательно, частота генерации $\omega_г$ должна быть выше, чем резонансная частота параллельного контура, включённого между сеткой и катодом. С другой стороны, так как участок анод—сетка должен быть индуктивным (поскольку остальные два участка являются ёмкостными), то частота генерации должна быть ниже, чем резонансная частота контура, включённого между анодом и сеткой. Отсюда видно, что для самовозбуждения частота ω_{ag} должна быть обязательно выше, чем частота ω_{gk} и частота генерации лежит между значениями ω_{gk} и ω_{ag}.

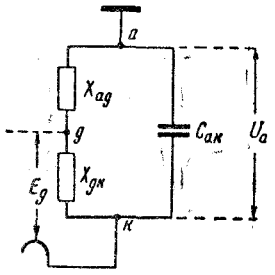


Рис. 12.27

Существенно, что если сеточный и анодный контуры обладают значительной расстройкой, то основное влияние на частоту автоколебаний оказывает изменение параметров того из контуров, частота которого ближе к резонансной частоте эквивалентного контура. В схеме рис. 12.24 *а*, например, таким контуром является контур, частота которого минимальна.

Это свойство двухконтурной схемы часто используется для искусственного повышения стабильности частоты автогенераторов путём введения в схему высокодобротного и эталонного контура, который в основном и определяет частоту генерации. Второй же

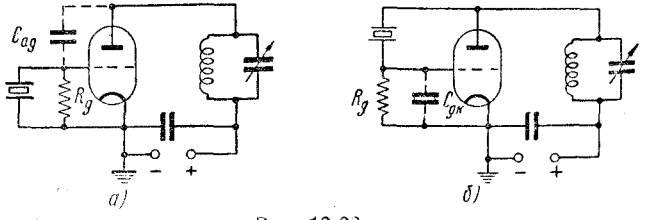


Рис. 12.23

контур (нагрузочный) при этом настраивается на частоту, заведомо более высокую, чем частота эталонного контура.

В качестве эталонного контура, как отмечалось в предыдущем параграфе, часто применяется кварцевая пластина. Наиболее распространённые в практике схемы кварцованного автогенератора изображены на рис. 12.28.

На схеме, представленной на рис. 12.28 *а*, кварцевая пластина включена между сеткой и катодом лампы. Сопротивление R_g, необходимое для создания сеточной утечки, берётся достаточно большим (несколько десятков тысяч ом), чтобы не вносить заметного затухания в контур кварца. Обратная связь в рассматриваемой схеме осуществляется обычно через междуэлектродную ёмкость анод—сетка.

На более длинных волнах для усиления обратной связи иногда включают дополнительную ёмкость параллельно промежутку анод—сетка. Нетрудно видеть, что схема рис. 12.28*а* соответствует принципиальной схеме рис. 12.24 *а*.

На схеме, представленной на рис. 12.28 *б*, кварцевая пластина включена между анодом и сеткой, а обратная связь осуществляется через ёмкость сетка—катод лампы, которая шунтирует высокоомное сопротивление утечки R_g. При достаточно длинных волнах параллельно собственной ёмкости лампы приходится включать дополнительно небольшую ёмкость.

Кварцевая пластина представляет собой механическую колебательную систему. При наличии пьезоэлектрического эффекта механические колебания кварца сопровождаются возникновением на его гранях переменного электрического напряжения, частота которого равняется частоте механических колебаний. Последняя связана с геометрическими размерами пластины следующим соотношением (*при колебаниях по толщине пластины d*)

$$f_{кв} \approx \frac{2{,}78}{d}\ Мгц, \qquad (12.32)$$

где d в *мм*.

Длина электромагнитной волны, соответствующая этой частоте, равна

$$\lambda_м = \frac{c}{f_{кв}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2{,}78 \cdot 10^6}\, d = 106\, d. \qquad (12.33)$$

Толщину кварца не рекомендуется брать меньше $0{,}2 \div 0{,}3$ *мм*, так как очень тонкие пластины становятся хрупкими и недостаточно эталонными. Таким образом, кварцевые пластины удобны для стабилизации волн длиннее $25 \div 30$ *м*. Для получения более коротких волн часто применяется умножение частоты, позволяющее строить возбудитель на более длинных волнах, выгодных для использования кварца в хорошем режиме.

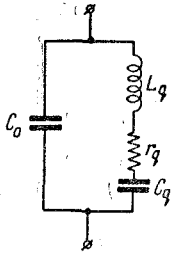


Рис. 12.29

Тесная связь между механическими и электромагнитными колебаниями в кварцевой пластине позволяет представлять последнюю в виде эквивалентного колебательного контура. Схема подобного контура показана на рис. 12.29.

Параметры эквивалентного контура L_q, C_q и r_q зависят от технологии изготовления кварцевой пластины (способа вырезания из кристалла кварца, шлифовки, конструкции кварцедержателя и др.) Ёмкости C_q очень малы (сотые доли микромикрофарады), а индуктивности L_q велики (десятки и сотни миллигенри). Поэтому волновое

сопротивление контура кварца очень велико и, несмотря на значительные сопротивления r_q (до десятков и сотен *ом*), добротности контура кварца получаются порядка десятков и сотен тысяч.

Как уже отмечалось, схема рис. 12.28*а* соответствует схеме рис. 12.24*а*, в которой обычный контур заменён эквивалентным контуром кварца. Из этого следует, что эквивалентная схема рис. 12.25 может быть использована для исследования работы генератора с кварцем между сеткой и катодом. Необходимо лишь под X_{gk} подразумевать эквивалентное реактивное сопротивление параллельного контура, изображённого на рис. 12.29.

Аналогично нетрудно составить эквивалентную схему и для генератора с кварцем между анодом и сеткой.

Более подробное изучение кварцевой стабилизации частоты генераторов составляет одну из задач курса радиопередающих устройств.

Рассмотрим в заключение одну особенность автогенераторов, колебательная система которых состоит из двух сильно связанных контуров (рис. 12.30). Заметим, что в отличие от разобранных выше двухконтурных автогенераторов, здесь непосредственно с лампой связан лишь один из контуров. Так как коэффициент обратной связи в схеме рис. 12.30 и других аналогичных схемах почти не зависит от частоты (вблизи резонанса), то необходимые для самовозбуждения условия вполне могут выполняться для обеих частот связи. Однако из двух частот ω_I и ω_{II} установится колебание той частоты, для которой режим самовозбуждения является более благоприятным.

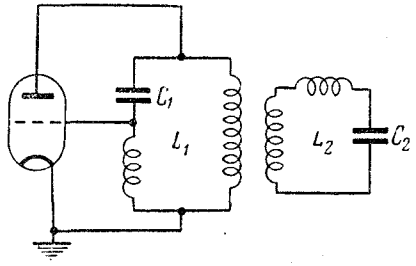


Рис. 12.30

Для выяснения физической стороны этого явления ограничимся качественным рассмотрением, которое начнём с момента запуска автогенератора. В первый момент в схеме могут возникать оба колебания и пока амплитуды малы и нелинейность системы ещё не проявляется, оба колебания нарастают по амплитуде почти независимо. Крутизна нарастания амплитуд не является, однако, одинаковой для частот ω_I и ω_{II}. В гл. 5 (§ 5.8) было установлено, что в зависимости от относительной настройки контуров резонансное сопротивление нагрузки при одной из частот связи больше или меньше, чем при другой. Следовательно, и усиление схемы неодинаково для частот ω_I и ω_{II}. Это приводит к тому, что амплитуда одного из колебаний (для которого резонансное сопротивление больше) выходит на нелинейный участок характеристики лампы раньше, чем амплитуда второго колебания.

Более подробное рассмотрение показывает, что при воздействии на нелинейное устройство одновременно двух колебаний средняя крутизна характеристики снижается быстрее для колебания с меньшей амплитудой. Таким образом, по мере выхода на нелинейный участок характеристики лампы первоначальное преобладание одного из колебаний возрастает и приводит к полному гашению второго колебания.

Следует отметить, что это свойство ламповых генераторов проявляется лишь при достаточно близких частотах сравниваемых колебаний. Вообще же возникновение в автогенераторах побочных колебаний с частотами, далёкими от рабочей частоты и сопровождающих рабочее колебание („паразитная“ генерация), является распространённым в практике явлением.

В проведённых выше рассуждениях мы интересовались механизмом установления одного из колебаний и гашения другого. Допустим теперь, что после установления стационарного режима на одной из частот ω_I или ω_{II} мы начнём изменять настройку одного из контуров, например второго, сохраняя настройку первого контура неизменной. Как при этом будет изменяться частота генерируемых колебаний?

Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью рассуждений, основанных на использовании приведённого в § 5.3 графика зависимости частот связи от относительной настройки контуров. Этот график воспроизведён на рис. 12.31 (на котором по осям координат отложены не отношения частот, а частоты).

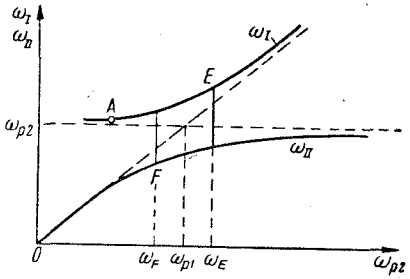


Рис. 12.31

Допустим, что в схеме возбуждены сперва колебания на частоте ω_I, соответствующей частоте $\omega_{p2} < \omega_{p1}$ (точка A на кривой ω_I). Установление этой частоты обусловленно, очевидно, тем, что при $\omega_{p2} < \omega_{p1}$, резонансное сопротивление $Z_{эр}$ (ω_I) больше, чем $Z_{эр}$ (ω_{II}) [рис. 5.22, § 5.8].

При постепенном повышении частоты ω_{p2} (изменением ёмкости или индуктивности второго контура) частота генерации будет сперва идти по кривой ω_I (рис. 12.31), а затем в точке E, расположенной правее точки $\omega = \omega_{p1}$, частота скачком перейдёт на кривую ω_{II}. При обратном изменении ω_{p2} частота генерации будет идти по кривой ω_{II} до точки F, где скачком перейдёт на кривую ω_I.

Перескок частоты в точке E объясняется тем, что на участке от ω_{p1} до ω_E (рис. 12.31) условия генерации более благоприятны

для частоты ω_{II}, однако ранее возбуждённое колебание ω_I оказывается устойчивым и при некотором снижении $Z_{э.р}$. Когда это снижение настолько возрастает, что колебания ω_I становятся неустойчивыми, происходит срыв этих колебаний и возникновение колебаний с частотой ω_{II}.

Аналогично может быть объяснён и скачок частоты генерации в точке F. Таким образом, получается „петля затягивания частоты". Ширина области затягивания $\omega_F \div \omega_E$ тем больше, чем сильнее связь между контурами и чем выше добротность второго контура.

Явление затягивания играло отрицательную роль в передатчиках ранних типов, в которых автогенератор работал на антенну через промежуточный контур. Изменение резонансной частоты антенного контура (например, при раскачивании проводов антенны ветром) приводило к перескокам частоты генератора, особенно при телеграфной манипуляции, когда создавались благоприятные условия для установления колебаний с той или иной частотой. Для устранения этого недостатка приходилось ослаблять связь, что невыгодно в энергетическом отношении. С явлением затягивания приходится встречаться и в современных автогенераторах, работающих с сложной колебательной системой. Иногда это явление используется для искусственного повышения стабильности частоты автогенератора с помощью высокодобротного и эталонного контура (кварц, объёмный резонатор и др.), который связывается с основным контуром автогенератора. Установив частоту эталонного контура в петле затягивания, можно добиться ослабления влияния нестабильности первого контура на частоту генерации.

§ 12.9. Возбуждённая лампа как отрицательное сопротивление. Динатронный и транзитронный генераторы

При рассмотрении механизма возникновения колебаний в автогенераторах (§ 12.3) мы уже встречались с понятием отрицательного сопротивления, вносимого (последовательно) в колебательный контур лампой при надлежащем выборе фазы обратной связи. Для того, чтобы колебания в контуре были незатухающими, абсолютная величина отрицательного сопротивления в установившемся режиме генератора должна равняться полож тельному сопротивлению потерь контура. Аналогичный результат можно получить и при представлении лампы в виде отрицательного сопротивления R_i, включённого параллельно контуру (рис. 12.32).

Рассматривая, как и в § 12.3, начальный этап развития колебаний (малые амплитуды), можем написать исходные соотношения в виде линейных ур-ний (12.5) и (12.6), однако связь между

током i_a и u_a в данном случае выразим не через S, e_g и Du_a [см. ур-ние (12.7)], а через сопротивление R_i

$$i_a = \frac{u_a}{R_i}.$$

Подставляя это соотношение в левую часть ур-ния (12.6) и используя первое уравнение системы (12.5), получим вместо (12.8) следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{1}{R_i C}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1 - \frac{r}{R_i}}{LC} = 0. \qquad (12.34)$$

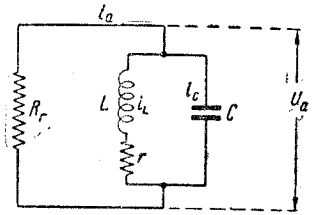


Рис. 12.32

Для того, чтобы амплитуда колебания нарастала, коэффициент при первой производной должен быть отрицательным. Отсюда получаем условие возникновения колебаний в виде

$$\frac{r}{L} - \frac{1}{|R_i|C} < 0, \quad \frac{1}{C|R_i|} > \frac{r}{L}$$

или

$$|R_i| < \frac{L}{rC} = Z_{эр}. \qquad (12.35)$$

Здесь $|R_i|$ — абсолютная величина отрицательного сопротивления возбуждённой лампы, $Z_{эр}$ — резонансное сопротивление контура.

Когда сопротивление R_i, зависящее от амплитуды колебания (при переходе на нелинейную часть характеристики лампы), увеличится до

$$|R_i(U_a)| = Z_{эр},$$

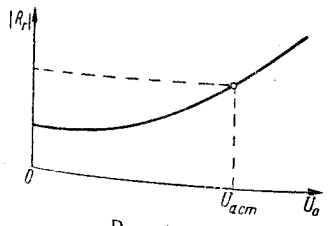


Рис. 12.33

в автогенераторе установится стационарная амплитуда колебаний. Режим будет устойчивым, если кривая $|R_i(U_a)|$ пересекает линию $|R_i| = Z_{эр}$ с положительным наклоном (рис. 12.33). Всё, что в предыдущих параграфах было сказано о характере нелинейной зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения, в данном случае может быть распространено на зависимость

величины, обратной $|R_i|$, от напряжения U_a. Физическое истолкование лампы как отрицательного сопротивления (при противофазном возбуждении) может быть дано на основании знака производной $\frac{di_a}{de_a}$.

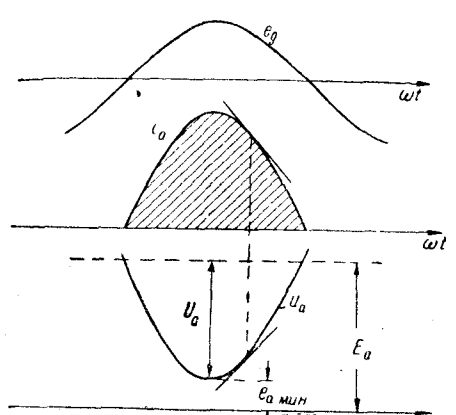


Рис. 12.34

Из рис. 12.34 видно, что из-за противофазности напряжений e_g и $e_a = E_a - u_a$ положительному приращению e_a отвечает убывание тока i_a и наоборот. Следовательно, в данном случае

$$\frac{di_a}{de_a} < 0.$$

Подача в соответствующей фазе напряжения на сетку лампы является хотя и наиболее распространённым, но не единственно возможным способом создания отрицательного сопротивления.

Можно, например, воспользоваться падающим участком, который получается в характеристиках тетродов при динатронном эффекте. Подобная характеристика изображена на рис. 12.35. На участке характеристики *а—б* промежуток анод—катод тетрода обладает отрицательным сопротивлением. Подключение тетрода, работающего в подобном режиме, к колебательному контуру способно поддерживать в последнем незатухающие колебания. Схема подобного генератора, называемого динатронным генератором, показана на рис. 12.36. Как видно, в этой схеме нет специальных элементов для создания обратной связи. Отрицательный характер сопротивления лампы достигается установкой рабочей точки на падающем участке вольтамперной характеристики. Для этой цели на анод подаётся напряжение питания E_a меньшее, чем на экранную сетку.

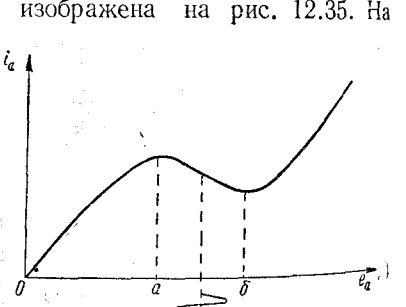


Рис. 12. 35

Из-за недостаточной устойчивости динатронного эффекта и низких энергетических качеств динатронные генераторы применяются редко. Значительно бо́льшее распространение (в радиоизмерительных

устройствах, в качестве гетеродинов приёмников и т. д.) получили так называемые транзитронные генераторы, работающие на пентодах. В транзитронном генераторе используется то обстоятельство, что распределение электронного тока между анодом и второй сеткой лампы зависит от напряжения третьей сетки. При увеличении потенциала последней ток i_{g2} падает. Зависимость $i_{g2}(e_{g3})$ изображена на рис. 12.37.

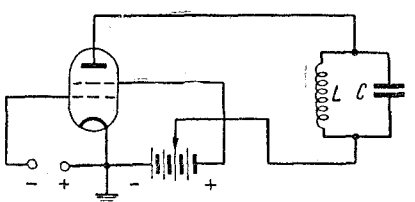


Рис. 12.36

Если колебательный контур ввести в цепь второй сетки, а переменное напряжение подавать на третью сетку (рис. 12.38), то можно осуществить усиление колебаний, причём в отличие от обычного усилителя с контуром в аноде, выходное напряжение в данном случае совпадает по фазе с напряжением входа.

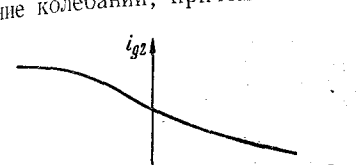


Рис. 12.37

Действительно, при положительном приращении напряжения e_{g3} ток i_{g2} убывает, падение напряжения на контуре падает, а потенциал второй сетки (по отношению к катоду) растёт. Промежуток вторая сетка—катод ведёт себя при этом как отрицательное сопротивление, поскольку производная

$$\frac{di_{g2}}{de_{g2}} < 0.$$

Для перехода от усиления колебаний к самовозбуждению необходимо переменное напряжение с контура подать на вход, т. е. на третью сетку.

Так как в данном случае в цепи обратной связи не требуется создания фазового сдвига, то вторую и третью сетки по высокой частоте можно соединить накоротко. Таким образом, приходим к схеме транзитронного генератора, показанной на рис. 12.39. Сопротивление R_0 берётся достаточно большим (порядка 100 тыс. *ом*), чтобы не вносить заметного затухания в контур. Ёмкость C_0, соединяющая вторую сетку с третьей и необходимая для разделения постоянных

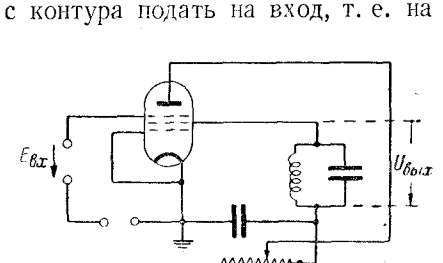


Рис. 12.38

токов, должна для частоты автоколебаний обладать малым по сравнению с R_0 сопротивлением. Таким образом

$$C_0 \geqslant \frac{1}{\omega_г R_0}.$$

При выполнении этого условия вторую и третью сетки по высокой частоте можно считать эквипотенциальными. Следовательно, падающий участок характеристики $i_{g2}(e_{g3})$, показанный на рис. 12.37, можно отождествлять (для переменных токов и напряжений) с характеристикой $i_{g2}(\Delta e_{g2})$. Для возникновения колебаний необходимо, чтобы абсолютная величина отрицательного сопротивления, равная

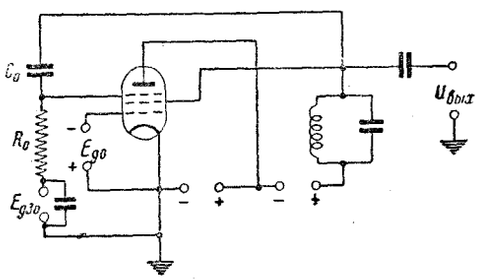


Рис. 12.39

$$|R_г| = \frac{1}{\left|\frac{di_{g2}}{de_{g2}}\right|},$$

отвечала условию типа (12.35).

Стационарная амплитуда колебаний установится, когда среднее сопротивление $|R_{гср}(E_{g3})|$, возрастая с увеличением амплитуды E_{g3}, сравняется с $Z_{эр}$.

Простота схемы и отсутствие необходимости в подборе обратной связи делает в некоторых устройствах транзитронный генератор удобным источником колебаний малой мощности.

Помимо триодов, тетродов и пентодов существует большое число нелинейных устройств, вольтамперным характеристикам которых можно придать спадающий характер, обеспечивающий генерацию незатухающих колебаний (электрическая дуга, газоразрядные лампы, полупроводниковые материалы, магнетроны, клистроны и др.).

В данном курсе эти устройства не рассматриваются.

§ 12.10. Установление колебаний в ламповом автогенераторе. Импульсная работа

В предыдущих параграфах изучались условия, обеспечивающие возникновение колебаний и устойчивость стационарного состояния автогенератора, вопрос же о протекании процесса установления оставался открытым. Этот вопрос, помимо своего общего значения, играет большую роль в импульсных генераторах, где процессы установления определяют задержку и крутизну переднего фронта огибающей высокочастотного импульса, а также оказывают существенное влияние на частоту и фазу высокочастотного заполнения импульса.

Для исследования механизма установления автоколебания во времени, от запуска генератора и до полного установления амплитуды, необходимо отказаться от условия малости амплитуд, лежащего в основе линейного дифференциального ур-ния (12.8) и перейти к нелинейному уравнению, отражающему влияние кривизны характеристики лампы. С этой целью можно, в принципе, воспользоваться представлением характеристики в виде полинома (10.5). Дифференциальное уравнение, получаемое при введении (10.5) вместо (12.7) в ур-ние (12.6), настолько, однако, усложняется, что для практических целей становится непригодным. Для получения грубой картины явлений, отражающей хотя бы основные черты процесса нарастания и ограничения амплитуды, необходимо поэтому максимально упростить аналитическое представление характеристики лампы.

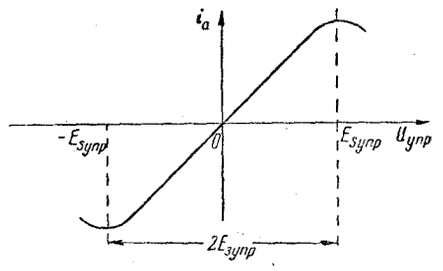


Рис. 12.40

В теории ламповых генераторов такое упрощение достигается представлением характеристики в виде неполного полинома третьей степени

$$i_a = \alpha u_{упр} + \gamma u_{упр}^3. \qquad (12.36)$$

Характеристика $i_a(u_{упр})$, соответствующая такому представлению, показана на рис. 12.40. От реальной характеристики подобная зависимость отличается, во-первых, величиной тока покоя i_{a0} (что не существенно для решения поставленной задачи) и, во-вторых, тем, что при управляющих напряжениях $|u_{упр}| > |E_{S\,упр}|$ вместо горизонтальных участков получаются падающие. Последнее обстоятельство приводит к большой ошибке при рассмотрении жёсткого режима самовозбуждения. В случае же мягкого режима и при выборе начального положения рабочей точки вблизи точки перегиба характеристики представление (12.36) достаточно хорошо отображает зависимость приращения тока Δi_a от приращения управляющего напряжения $\Delta u_{упр}$. Следует, кроме того, отметить, что выражение (12.36) не учитывает изменения положения рабочей точки в процессе нарастания амплитуд из-за увеличения отрицательного смещения. Таким образом, ур-ние (12.36) предусматривает, строго говоря, фиксированное положение рабочей точки, по отношению к которой характеристика считается симметричной.

Однако, как показывает опыт, результаты, получаемые на основе апроксимации (12.36), хорошо передают основные черты явлений также и в генераторах, работающих с автоматическим смещением.

В § 10.1 было показано, что коэффициент α равен S, т. е. крутизне характеристики в рабочей точке (в данном случае при $u_{упр}=0$). Коэффициент γ при кубическом члене в правой части ур-ния (12.36) нетрудно выразить через напряжение насыщения $E_{S\,упр}$ и через α.

Учитывая, что в точке $u_{упр}=E_{S\,упр}$ выполняется тождество

$$\left.\frac{di_a}{du_{упр}}\right|_{E_{S\,упр}}=0=\alpha+3\gamma u_{упр}^2\Big|_{E_{S\,упр}}=\alpha+3\gamma E_{S\,упр}^2,$$

получаем

$$\gamma=-\frac{\alpha}{3E_{S\,упр}^2}=-\frac{S}{3E_{S\,упр}^2}. \qquad (12.37)$$

Подставляя это выражение в (12.36), придём к следующему уравнению для анодного тока:

$$i_a=u_{упр}S\left(1-\frac{u_{упр}^2}{3E_{S\,упр}^2}\right). \qquad (12.38)$$

Обратимся теперь к составлению дифференциального уравнения для автогенератора. Имея в виду определение напряжения на анодном колебательном контуре, удобно исходить из параллельной схемы замещения последнего (см. § 4.8). В результате получаем схему, представленную на рис. 12.41. При выбранных на этом рисунке направлениях токов и напряжений можно написать следующие исходные уравнения:

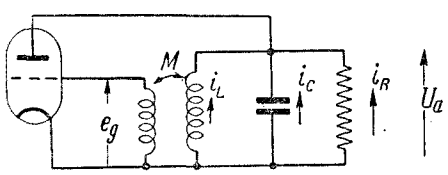


Рис. 12.41

$$i_C+i_R+i_L=i_a, \qquad (12.39)$$

где i_a — анодный ток лампы;

$$i_C=C\frac{du_a}{dt};\quad i_R=\frac{u_a}{R};\quad i_L=\frac{1}{L}\int u_a\,dt. \qquad (12.40)$$

Подставляя выражения (12.40), а также (12.38) в ур-ние (12.39), получим

$$C\frac{du_a}{dt}+\frac{1}{R}u_a+\frac{1}{L}\int u_a\,dt=Su_{упр}\left(1-\frac{u_{упр}^2}{3E_{S\,упр}^2}\right). \qquad (12.41)$$

Продифференцируем это уравнение по t и разделим на C:

$$\frac{d^2u_a}{dt^2}+\frac{1}{CR}\cdot\frac{du_a}{dt}+\frac{1}{LC}u_a=$$

$$=\frac{S}{C}\left(\frac{du_{упр}}{dt}-\frac{u_{упр}^2}{E_{S\,упр}^2}\frac{du_{упр}}{dt}\right). \qquad (12.41')$$

Заметим, что

$$u_{упр}=e_g-Du_a,$$

причём в случае индуктивной обратной связи [см. § 12.2, ф-лы (12.4) — (12.4')]

$$e_g=\frac{M}{L}u_a=|K_{oc}|\,u_a.$$

Таким образом,

$$u_{упр}=(|K_{oc}|-D)\,u_a$$

и

$$\frac{u_{упр}^2}{E_{S\,упр}^2}=\frac{(|K_{oc}|-D)^2u_a^2}{E_{S\,упр}^2}=\frac{u_a^2}{U_{aS}^2},$$

где

$$U_{aS}=\frac{E_{S\,упр}}{|K_{oc}|-D} \qquad (12.42)$$

представляет собой приведённое к аноду напряжение насыщения.

Подставляя найденные выражения для $u_{упр}$ в ур-ние (12.41') и группируя члены, получаем следующее окончательное дифференциальное уравнение системы:

$$\frac{d^2u_a}{dt^2}+\left[\frac{1}{CR}-\frac{S(|K_{oc}|-D)}{C}\left(1-\frac{u_a^2}{U_{aS}^2}\right)\right]\frac{du_a}{dt}+\frac{1}{LC}u_a=0. \qquad (12.43)$$

При малых амплитудах ($u_a\ll U_{aS}$) это уравнение переходит в линейное

$$\frac{d^2u_a}{dt^2}+\left[\frac{1}{CR}-\frac{S(|K_{oc}|-D)}{C}\right]\frac{du_a}{dt}+\frac{1}{LC}u_a=0.$$

Если подставить в это уравнение $SD=\frac{1}{R_i}$ и $|K_{oc}|=\frac{M}{L}$, придём к уравнению, отличающемуся от ур-ния (12.8) только тем, что собственное затухание $\frac{r}{2L}$ заменено величиной $\frac{1}{2CR}$ в соответствии с параллельной схемой замещения контура (рис. 12.41).

С возрастанием u_a роль нелинейного члена $\frac{S(|K_{oc}|-D)}{C}\cdot\frac{u_a^3}{u_{aS}^2}$ возрастает и коэффициент (отрицательный) при первой производной по абсолютной величине уменьшается.

Нелинейное ур-ние (12.43) не может быть решено строгим путём. Для приближённого решения этого уравнения может быть применён широко распространённый в радиотехнике метод „медленно меняющихся амплитуд", разработанный Ван дер-Полем.

Согласно этому методу решение ур-ния (12.43) отыскивается в виде высокочастотного колебания

$$u_a = a(t)\cos\omega_p t - b(t)\sin\omega_p t, \tag{12.44}$$

где ω_p — частота, определяемая контуром, т. е. $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ — медленно меняющиеся во времени функции. Условие медленности заключается в том, что относительные изменения коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ за период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_p}$ предполагаются очень малыми величинами, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\frac{da(t)}{dt}\cdot T_0}{a(t)} &\ll 1\\ \frac{\frac{db(t)}{dt}\cdot T_0}{b(t)} &\ll 1\end{aligned}\right\}. \tag{12.45}$$

В автогенераторах с колебательным контуром условия (12.45), как правило, выполняются, так как для существенного изменения запасаемой контуром энергии требуется время, измеряемое значительным числом периодов.

Решение (12.44) удобно представить в несколько иной форме

$$u_a = U_a(t)\cos[\omega_p t + \varphi(t)], \tag{12.46}$$

где

$$U_a(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \tag{12.47}$$

и

$$\varphi(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{b(t)}{a(t)} \tag{12.48}$$

представляют собой медленно меняющиеся амплитуду и фазу искомого колебания, т. е. напряжения на контуре.

Подставив выражение (12.46) в ур-ние (12.43) и отбрасывая слагаемые, изменяющиеся во времени с частотой $3\omega_p$ (отфильтровываемые контуром), а также члены, содержащие вторые производные

медленно меняющихся функций $U_a(t)$ и $\varphi(t)$, получаем следующее уравнение [вывод даётся в приложении IV] для амплитуды:

$$U_a(t) = \frac{2U_a(0)}{\sqrt{\left(\frac{U_a(0)}{U_{aS}}\right)^2\left(1+\frac{\alpha}{|\alpha_э|}\right)\left(1-e^{-2|\alpha_э|t}\right)+4e^{-2|\alpha_э|t}}}. \tag{12.49}$$

Здесь $U_a(0)$ — начальная амплитуда колебания (в момент запуска), $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{r}{2L}$ собственное затухание контура, $|\alpha_э| = \frac{1}{2C}\left[S(|K_{oc}|-D) - \frac{1}{R}\right]$ — абсолютная величина затухания контура с учётом влияния лампы.

Стационарная амплитуда может быть найдена как предел выражения (12.49) при $t \to \infty$

$$U_{a\,cm} = \frac{2U_{aS}}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{|\alpha_э|}}}. \tag{12.50}$$

Как и следовало ожидать, стационарная амплитуда не зависит от начальных условий.

Подставляя это значение $U_{a\,cm}$ в ф-лу (12.49), приходим к более наглядному выражению

$$U_a(t) = \frac{U_a(0)}{\sqrt{\left(\frac{U_a(0)}{U_{a\,cm}}\right)^2\left(1-e^{-2|\alpha_э|t}\right)+e^{-2|\alpha_э|t}}}. \tag{12.49'}$$

Если процесс нарастания колебания начинается с очень малых амплитуд ($U_a(0) \ll U_{aS}$), то при достаточно малых значениях времени первым слагаемым в подкоренном выражении ф-лы (12.49') можно пренебрегать, что приводит к следующему закону нарастания амплитуды

$$U_a(t) = U_a(0)\,e^{|\alpha_э|t}. \tag{12.49''}$$

Этот результат совпадает с выражением (12.13), полученным на основе линейного дифференциального уравнения.

Графики функции $\frac{U_a(|\alpha_э|t)}{U_{a\,cm}}$ для некоторых значений параметра $n = \frac{U_{a\,cm}}{U_a(0)}$ приведены на рис. 12.42.

Время установления стационарной амплитуды существенно зависит от начальной амплитуды. Последняя же определяется

условиями запуска автогенератора. В импульсных генераторах колебания возникают при подаче на анод лампы импульса питающего напряжения. Начальная амплитуда свободных колебаний, возни-

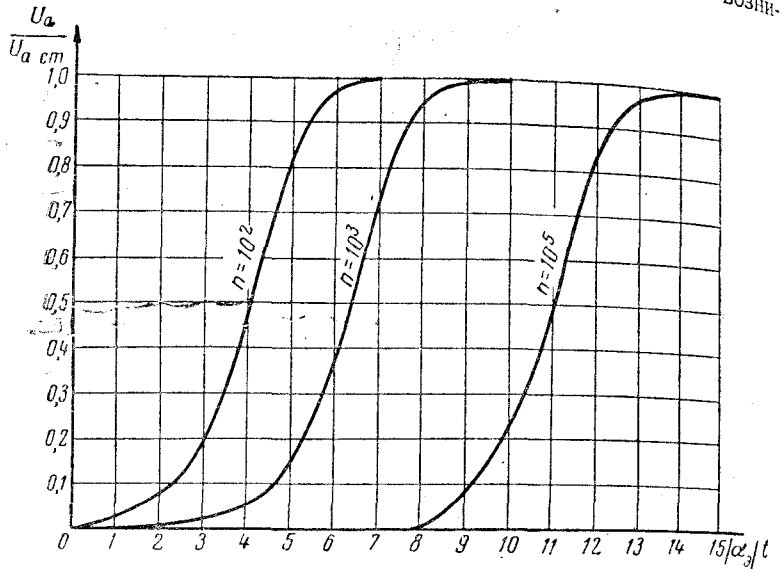


Рис. 12.42

кающих в схеме, зависит от крутизны переднего фронта импульса и от параметров и структуры колебательной системы автогенератора.

Для выяснения качественной стороны разбираемого вопроса рассмотрим запуск простого одноконтурного автогенератора, представленного на рис. 12.43. График напряжения анодного питания показан на рис. 12.44. Наклон переднего фронта импульса обозначим через $a=\frac{E_a}{t_1}\ \frac{в}{сек}$. Бросок анодного тока, обусловленный включением в момент $t=0$ источника E_a, создаёт на контуре колебательное напряжение, с которого и начинается процесс нарастания амплитуды. Не учитывая пока обратной связи, сведём анодную цепь автогенератора к эквивалентной схеме, показанной на рис. 12.45.

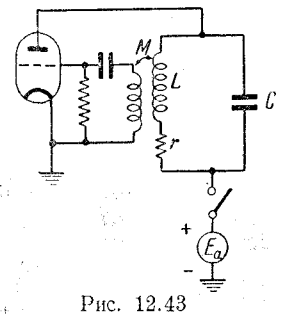


Рис. 12.43

Через R_i обозначено сопротивление лампы для постоянного тока, т. е. сопротивление, определяющее величину броска анодного тока. Для определения u_a воспользуемся методом, изло-

женным в § 9.2. Изображение для линейно-нарастающей эдс равно (см. § 9.3)

$$E(p)=\frac{a}{p^2},$$

а изображение для искомого напряжения u_a

$$U_a(p)=\frac{Z_a(p)}{R_i+Z_a(p)}\,E(p),$$

где

$$Z_a(p)=\frac{(r+Lp)\frac{1}{Cp}}{r+Lp+\frac{1}{Cp}}.$$

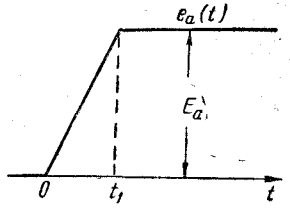


Рис. 12.44

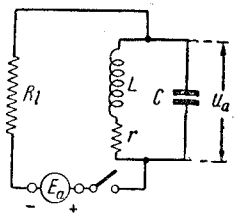


Рис. 12.45

Пренебрегая в числителе последнего выражения величиной r по сравнению с Lp, получаем для $U_a(p)$ следующее выражение:

$$U_a(p)=\frac{a}{CR_i}\cdot\frac{1}{p\left[p^2+\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{CR_i}\right)p+\frac{1}{CL}\right]}.$$

Применяя ф-лу (9.5) и произведя преобразования, аналогичные использованным при выводе ф-лы (9.34), получим следующий результат:

$$u_a(t)=\frac{a}{CR_i}\,\frac{1-e^{-\alpha t}\cos\omega_{0\kappa}t}{\omega_{0\kappa}^2},\quad 0<t<t_1, \tag{12.51}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{CR_i}\right),$$

$$\omega_{0\kappa}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При выводе выражения (12.51) были отброшены слагаемые с множителем $\frac{\alpha}{\omega_{0к}}$. Учитывая, что $\frac{1}{\omega_{0к} C} \approx \rho$, а также, что $a = \frac{E}{t_1}$, приходим к выражению:

$$u_a(t) = E_a \frac{\rho}{R_i \omega_{0к} t_1} \left(1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_{0к} t\right). \qquad (12.51')$$

Итак, при линейном нарастании питающего напряжения напряжение на контуре состоит из постоянной составляющей (не представляющей интереса) и переменной составляющей с начальной амплитудой

$$U_a(0) = \frac{\rho}{R_i \omega_{0к} t_1} E_a = \frac{\rho}{R_i \omega_{0к}} a. \qquad (12.52)$$

При наличии обратной связи колебание будет не затухать, а, наоборот, нарастать по закону, определяемому ф-лой (12.49'). Однако начальная амплитуда $U_a(0)$, практически не зависящая от затухания контура, может быть оставлена такой же, как и в отсутствие обратной связи.

Из ф-лы (12.52) следует, что при заданных ρ и a с повышением частоты автогенератора $\omega_{0к}$ начальная амплитуда автоколебаний падает.

Оценим величину $U_a(0)$ для импульсного генератора при следующих данных: $\omega_{0к} = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^9$ ($\lambda = 20$ *см*), $E_a = 2000$ *в*, $t_1 = 0{,}2$ *мкс*, $\rho = 30$ *ом*, $R_i = 5000$ *ом*.

По ф-ле (12.52) находим $U_a(0) \approx 0{,}005$ *в*.

Так как при $E_a = 2000$ *в* стационарная амплитуда превышает, приблизительно, 1000 *в*, то отношение

$$n = \frac{U_{a\,ст}}{U_a(0)} \approx \frac{1000}{0{,}005} \approx 2 \cdot 10^5.$$

Обращаясь к рис. 12.42, находим величину $|\alpha_э| t$, соответствующую $\frac{U_a}{U_{a\,ст}} \approx 1$, равную 14, откуда длительность процесса установления

$$t = \frac{14}{|\alpha_э|}.$$

Величину $|\alpha_э|$ с помощью выражения (12.24) можно привести к следующему виду:

$$|\alpha_э| = \frac{1}{2CR}[SR(|K_{oc}| - D) - 1] =$$

$$= \frac{1}{2CR}\left[S \frac{1}{S_{ср}} - 1\right] = \alpha\left(\frac{S}{S_{ср}} - 1\right). \qquad (12.53)$$

Отношение $\frac{S}{S_{ср}}$ для различных генераторов колеблется в пределах $3 \div 10$. Приравнивая $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$ (см. § 4.4.) где Q — добротность контура, получаем

$$t = \frac{14 \cdot 2Q}{\omega_0\left(\frac{S}{S_{ср}} - 1\right)}.$$

При $Q = 100$ и $\frac{S}{S_{ср}} \approx 5$, получим

$$t = \frac{14 \cdot 2 \cdot 100}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^9 \cdot 4} = 0{,}07 \cdot 10^{-6}\ сек = 0{,}07\ мкс.$$

Следует отметить, что условия для самовозбуждения обеспечиваются не сразу по включении источника питания, а после того, как анодное напряжение достигнет достаточно большой величины. К этому времени амплитуда свободного колебания значительно убывает и величина $U_a(0)$, определяющая начало процесса самовозбуждения, оказывается ещё меньшей, чем было найдено выше. В результате при малой длительности импульса время задержки может достигать значительной доли общей длительности импульса.

Более подробное рассмотрение[1]) показывает, что при очень малых значениях $U_a(0)$ существенное влияние на начальные условия оказывают электрические флуктуации, вызываемые дробовым эффектом. При импульсной работе это влияние приводит к хаотическому изменению задержки переднего фронта импульса. В тех случаях, когда интенсивность флуктуаций превышает амплитуду свободных колебаний, обусловленных крутизной фронта питающего импульса, величина разброса задержки близка к постоянной времени контура с учётом обратной связи, т. е. $\tau_э = \frac{1}{|\alpha_э|}$. Это обстоятельство может служить причиной возникновения помех в системах, где для передачи сигналов применяется фазовая модуляция импульсной последовательности.

Следует в заключение отметить, что для количественного уточнения картины установления амплитуды необходимо учитывать ряд факторов: влияние междуэлектродных ёмкостей, более сложный характер колебательной системы в генераторах сверхвысоких частот, различные законы нарастания питающего напряжения, влияние углов пролёта электронов на сверхвысоких частотах (особенно значительных при малых напряжениях) и т. д.

Из решения ур-ния (12.43) следует также, что в процессе нарастания амплитуды частота колебания, равная $\left(\omega_p + \frac{d\varphi}{dt}\right)$, несколько

[1]) См. статьи И. С. Гоноровского „О флуктуационном характере установления колебаний в автогенераторах", Доклады АН СССР, XCIV, № 5, 869, 1954 (более подробное изложение опубликовано в трудах МАИ, вып. № 50, 1955) и Н. Ф. Алексеева „К вопросу об установлении колебаний в автогенераторах дециметрового диапазона волн", Радиотехника т. 11, № 8, 1956 г.

изменяется. В установившемся режиме $\frac{d\varphi}{dt} \approx 0$, а в начале процесса величина $\frac{|\dot{\varphi}|}{\omega_p} \approx \frac{1}{Q_э}$, где $Q_э$ — добротность контура с учётом обратной связи $\left(\text{т. е. } Q_э = \frac{\omega_p}{2|\alpha_э|}\right)$.

§ 12.11. Генераторы типа *RC*

Генераторы с колебательным контуром незаменимы как источники высокочастотных колебаний. Для генерирования же низких частот (меньше $15 \div 20$ *кгц*) они неудобны, так как колебательный контур получается слишком громоздким и трудно перестраиваемым. В связи с этим для генерирования низкочастотных синусоидальных колебаний малой мощности широко применяются так называемые *RC*-генераторы. Один из вариантов схемы такого автогенератора изображён на рис. 12.46. Отличие этого генератора о

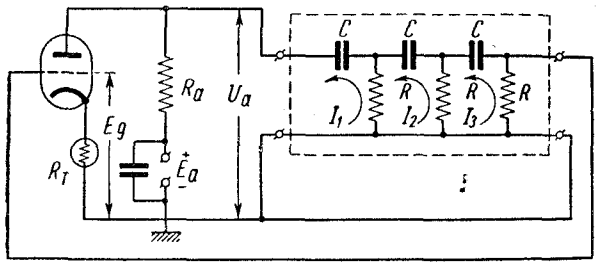


Рис. 12.46

обычного генератора типа *LC* заключается в том, что вместо нагрузочного колебательного контура здесь применено простое омическое сопротивление R_a, а обратная связь осуществляется при помощи специального четырёхполюсника, составленного из омических сопротивлений и конденсаторов.

Для получения устойчивой генерации на какой-либо определённой частоте необходимо, чтобы: 1) сумма фазовых сдвигов при обходе замкнутого кольца обратной связи равнялась 2π, 2) коэффициент усиления лампы являлся величиной, обратной коэффициенту обратной связи [см. ф-лу (12.3)].

Так как обычно $R_a \ll R$, то в схеме рис. 12.46 лампа работает как обычный усилитель на сопротивлениях и, следовательно, лампа поворачивает фазу на 180°. Отсюда ясно, что обведённый пунктиром четырёхполюсник обратной связи должен обеспечивать дополнительный сдвиг фазы на 180°.

Нетрудно выявить требования к элементам четырёхполюсника. Придерживаясь обозначений рис. 12.46, составляем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left(R+\frac{1}{i\omega C}\right)\vec{I}_1 - R\,\vec{I}_2 &= \vec{U}_a \\ -R\,\vec{I}_1 + \left(2R+\frac{1}{i\omega C}\right)\vec{I}_2 - R\,\vec{I}_3 &= 0 \\ -R\,\vec{I}_2 + \left(2R+\frac{1}{i\omega C}\right)\vec{I}_3 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (12.54)$$

Применяя выражения (6.9″), легко находим

$$\vec{I}_3 = (-1)^4\frac{M_{13}}{\Delta}\vec{U}_a = \frac{R^2}{\frac{1}{(i\omega C)^3}+\frac{5R}{(i\omega C)^2}+\frac{6R^2}{i\omega C}+R^3}\vec{U}_a = \frac{\vec{U}_a}{R}\frac{1}{i\left[\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^3-6\cdot\frac{1}{\omega CR}\right]-\left[5\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2-1\right]}. \qquad (12.55)$$

Учитывая, что

$$\vec{E}_g = -\vec{I}_3 R,$$

получаем

$$\vec{K}_{oc} = -\frac{\vec{E}_g}{\vec{U}_a} = \frac{\vec{I}_3 R}{\vec{U}_a} = \frac{1}{i\left[\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^3-\frac{6}{\omega CR}\right]-\left[5\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2-1\right]}. \qquad (12.56)$$

Для того, чтобы фазовый сдвиг в цепи обратной связи равнялся 180°, коэффициент $\vec{K}_{o.c}$ при частоте генерации $\omega_г$ должен быть действительной отрицательной величиной. Приравнивая в выражении (12.56) мнимую часть нулю, получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\omega_г RC}\left[\left(\frac{1}{\omega_г CR}\right)^2-6\right]=0,$$

откуда

$$\frac{1}{\omega_г CR} = \sqrt{6}.$$

Итак, генерация возможна (с точки зрения выполнения фазового баланса) на частоте, определяемой простым соотношением:

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{6}RC}. \qquad (12.57)$$

Подставляя найденное значении $\omega_г$ в выражение (12.56), находим модуль коэффициента обратной связи

$$K_{oc} = \frac{1}{5\left(\frac{1}{\omega_г CR}\right)^2 - 1} = \frac{1}{29}. \qquad (12.58)$$

Отметим, что задание произведения RC определяет не только частоту генерации, но и величину коэффициента обратной связи, а следовательно, и необходимое для генерации усиление лампы.

Применяя ф-лу (12.3), находим

$$K = \frac{1}{K_{oc}} = 29. \qquad (12.59)$$

К этому результату можно придти и с помощью выражения (12.24′), если подставить в него $K_{oc} = \frac{1}{29}$, а $Z_{эр}$ заменить на R_a. В данном случае ур-ние (12.24′) удобно использовать для определения величины $S_{ср}$

$$S_{ср} = \frac{1}{R_a (K_{oc} - D)}. \qquad (12.60)$$

При разбиении произведения RC на множители имеется значительная свобода, облегчающая требования к выбору удобных величин сопротивлений и ёмкостей. Необходимо лишь обеспечивать условие $R \gg R_a$, так как только при этом усиление лампы не зависит от величины R.

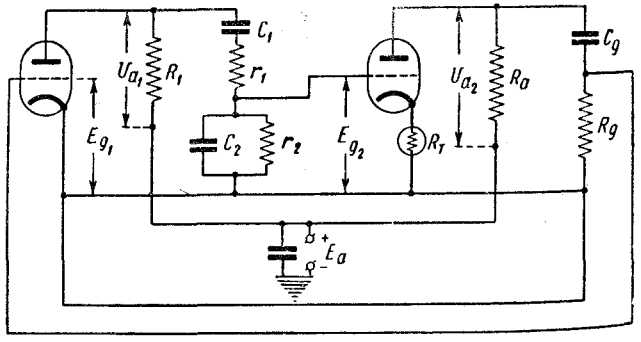


Рис. 12.47

Другой весьма распространённый вариант схемы генератора RC изображён на рис. 12.47. Здесь необходимый для генерации баланс фаз обеспечивается двумя ступенями усиления на сопротивлениях. Каждая лампа поворачивает фазу на 180°. Назначение же вспомогательной цепи C_1, r_1, C_2 и r_2 заключается в том, чтобы обеспечивать выполнение фазового баланса только на вполне определённой частоте и нарушать баланс на всех других частотах.

Ёмкость C_g на выходе второй лампы выбирается настолько большой, что при частоте генерации сопротивление конденсатора C_g очень мало по сравнению с R_g и цепочка C_g, R_g не создаёт заметного сдвига фазы.

Для нахождения элементов C_1, r_1, C_2 и r_2 составим отношение амплитуд напряжений на сетке второй лампы $\vec{E}_{g2}$ и на аноде первой лампы $\vec{U}_{a1}$

$$\frac{\vec{E}_{g2}}{\vec{U}_{a1}} = \frac{\frac{r_2 \cdot 1/i\omega C_2}{r_2 + 1/i\omega C_2}}{r_1 + \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{r_2 \cdot 1/i\omega C_2}{r_2 + 1/i\omega C_2}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{C_2}{C_1} + i\left(\omega C_2 r_1 - \frac{1}{\omega C_1 r_2}\right)}. \qquad (12.61)$$

Для того чтобы при частоте генерации $\omega_г$ делитель r_1, r_2, C_1 и C_2 не влиял на фазу, должно выполняться условие

$$\omega_г C_2 r_1 - \frac{1}{\omega_г C_1 r_2} = 0,$$

откуда

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2 C_1 C_2}}. \qquad (12.62)$$

При выполнении этого условия левая часть ур-ния (12.61) обращается в действительное число, равное

$$\frac{E_{g2}}{U_{a1}} = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{C_2}{C_1}}. \qquad (12.63)$$

Если это отношение умножить на коэффициент усиления второй лампы $K_2 = \frac{U_{a2}}{E_{g2}}$, то получится выражение:

$$\frac{E_{g2}}{U_{a1}} \cdot K_2 = \frac{E_{g1}}{U_{a1}} = K_{oc},$$

так как $U_{a2} \approx E_{g1}$ (сопротивление конденсатора C_g очень мало по сравнению с R_g).

Итак

$$K_{oc} = \frac{K_2}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{C_2}{C_1}}. \qquad (12.64)$$

Применяя ф-лу (12.3), находим необходимое усиление первой лампы:

$$K_1 = \frac{1}{K_{oc}} = \frac{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{C_2}{C_1}}{K_2}$$

или

$$K_1 K_2 = 1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{C_2}{C_1}. \qquad (12.65)$$

Существуют и другие разновидности схем *RC*-генераторов, однако разобранных примеров достаточно для уяснения принципа построения автогенераторов с апериодическими цепями нагрузки и обратной связи.

Остановимся на некоторых особенностях механизма ограничения амплитуды автоколебания в генераторе типа *RC*. Этот вопрос тесно связан с вопросом о форме генерируемых колебаний.

Как и в обычных генераторах, стационарная амплитуда устанавливается при снижении средней крутизны от начального значения S до значения $S_{ср}$, удовлетворяющего ур-нию (12.60) для однолампового автогенератора (рис. 12.46) или ур-нию (12.65) для схемы[1]) рис. 12.47.

Однако в данном случае нельзя допускать установления значительной амплитуды, так как это неизбежно приведёт к искажению формы генерируемых колебаний за счёт гармоник анодного тока. В отличие от генераторов с колебательным контуром в *RC*-генераторах отсутствует фильтрация высших гармоник. Таким образом, получается противоречие между требованием неискажённой формы колебаний (малые амплитуды) и требованием надёжного ограничения (большие амплитуды). Для устранения этого противоречия в *RC*-генераторы обычно вводят так называемую „инерционную нелинейность" в виде термосопротивления, т. е. сопротивления, изменяющего свою величину в зависимости от степени нагрева проходящим через него током.

В схемах, представленных на рис. 12.46 и 12.47, термосопротивление R_t включено в цепь катода лампы. Рассмотрим действие R_t, например, в схеме рис. 12.46. При прохождении переменной составляющей анодного тока, на сопротивлении R_t создаётся падение напряжения, совпадающее по фазе с током и отсчитываемое от катода лампы к земле. Напряжение же, поступающее с четырёхполюсника обратной связи, также совпадает по фазе с анодным

[1]) Коэффициенты усиления K_1 и K_2 определяются выражениями вида:

$$K_{1,2} = \frac{1}{1/R_{a\,1,2}\, S_{ср\,1,2} + D_{1,2}}.$$

С увеличением амплитуды колебаний $S_{ср\,1}$ и $S_{ср\,2}$ падают и коэффициенты K_1 и K_2 снижаются.

током и также отсчитывается от сетки к земле. Отсюда следует, что результирующая разность потенциалов между сеткой и катодом является разностью между вторым и первым напряжениями. Следовательно, коэффициент обратной связи K'_{oc}, понимаемый как отношение результирующего напряжения сетка — катод к напряжению анод — катод, зависит от величины R_t. При увеличении анодного тока R_t также растёт и K'_{oc} падает. При уменьшении тока R_t падает и K'_{oc} растёт. Таким образом, получается автоматическое регулирование амплитуды колебания на определённом уровне, зависящем, в основном, от нелинейной характеристики термосопротивления. Так как при изменении тока величина R_t, из-за тепловой инерции, изменяется относительно медленно, то в пределах одного периода генерируемых колебаний R_t является, практически, постоянной величиной. Это означает, что изменение R_t не вносит нелинейных искажений и не нарушает синусоидальной формы колебаний.

Аналогично действие R_t также и в схеме, показанной на рис. 12.47.

RC-генераторы находят широкое применение в радиоизмерительной технике и в ряде случаев, когда требуется получение низких частот, изменяемых в очень широком диапазоне. Переключением сопротивлений или ёмкостей различной величины можно изменять частоту от единиц герц до десятков килогерц. Для плавного изменения частоты требуется относительно небольшое изменение ёмкости или сопротивления. К качеству конденсаторов и сопротивлений, входящих в четырёхполюсник обратной связи, необходимо предъявлять жёсткие требования, так как нестабильность C или R при изменении температуры приводит к изменению частоты генератора. Конденсаторы должны обладать очень высоким сопротивлением изоляции (малой утечкой), так как в противном случае в области очень низких частот шунтирующее действие утечки влияет на фазовые соотношения в четырёхполюснике.

Для сохранения правильного режима работы *RC*-генераторы должны работать на большое нагрузочное сопротивление (внешнее). Генератор *RC* является поэтому генератором напряжения. Для получения значительной мощности *RC*-генератор обычно дополняется одной или двумя ступенями усиления.

§ 12.12. Кристаллические генераторы синусоидальных колебаний

Как и всякие усилители, полупроводниковые усилители, дополненные цепью положительной обратной связи, могут быть превращены в автогенераторы. Все приведённые в предыдущих параграфах данной главы соображения об условиях возникновения автоколебаний и их устойчивости, с некоторыми непринципиальными изменениями, вытекающими из особенностей построения схем, могут быть распространены и на кристаллические автогенераторы.

Рассмотрим некоторые из возможных схем автогенераторов с плоскостными кристаллическими триодами.

На рис. 12.48 показаны обычная трёхточечная схема лампового автогенератора и полупроводниковый аналог этой схемы.

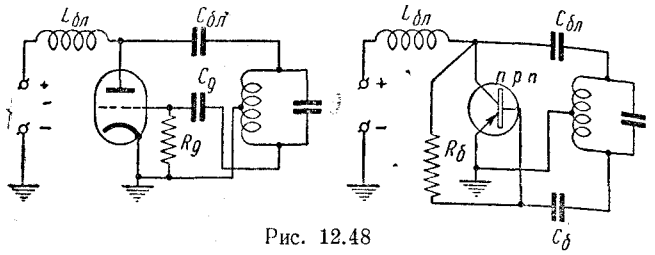


Рис. 12.48

Сопротивление $R_б$ и ёмкость $C_б$ играют в данной схеме такую же роль, как R_g и C_g в схеме лампового генератора, т. е. создают смещающее напряжение для базы. Единственное отличие заключается в том, что сопротивление $R_б$ соединяет базу не с эмиттером, а с положительным зажимом коллекторной батареи (что необходимо для создания на базе положительного по отношению к эмиттеру потенциала в случае $n—p—n$ кристалла, см. § 10.11).

Существенным недостатком рассмотренной и других аналогичных схем с обратной связью является шунтирование колебательного контура весьма низким входным сопротивлением эмиттера. От этого недостатка свободны схемы, в которых обратная связь осуществляется без ответвления с контура, например схемы, представленные на рис. 12.49. Подбором соотношения между сопротивлением R и резонансным сопротивлением колебательного контура можно обеспечить требуемую величину обратной связи.

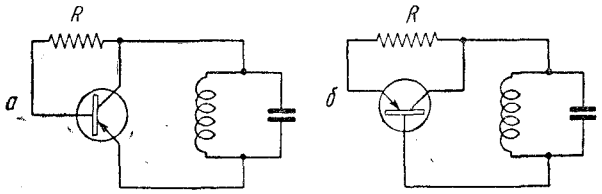


Рис. 12.49

Отметим, что полупроводниковые приборы с точечным контактом, в которых имеет место усиление по току ($\alpha>1$), позволяют осуществлять генерацию и без внешней обратной связи.

Полупроводниковые автогенераторы находят всё бóльшее применение в качестве источника синусоидальных колебаний малой мощности и относительно невысокой частоты (несколько мегагерц).

ГЛАВА 13

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ (МОДУЛЯЦИЯ)

§ 13.1. Общие замечания

В соответствии с определением процесса модуляции, назначением модуляционного устройства является управление одним или несколькими параметрами колебания по закону изменения передаваемого сигнала. Поскольку процесс модуляции сопровождается трансформацией частотного спектра модулируемого колебания, осуществление модуляции с помощью одних лишь линейных систем с постоянными параметрами принципиально невозможно (см. § 1.4). Независимо от вида модуляции — амплитудной, частотной или фазовой, модуляционное устройство должно содержать нелинейные элементы или линейные, но с изменяющимися при модуляции параметрами. Последние, т. е. линейные системы с управляемыми параметрами, в радиотехнической практике обычно осуществляются с помощью электронных ламп, работающих в нелинейном режиме. Можно поэтому считать, что нелинейные элементы являются неотъемлемой частью любого модуляционного устройства.

В данной главе изучение ограничивается основными видами управления высокочастотным колебанием: амплитудной, частотной и фазовой модуляцией.

§ 13.2. Амплитудная модуляция

Управление амплитудой колебания в современных передатчиках, как правило, осуществляется в генераторах с посторонним возбуждением. Исключение составляют радиолокационные передатчики, являющиеся обычно простыми генераторами с самовозбуждением, работающими в импульсном режиме. Во всех других случаях разделение процессов генерирования и модулирования колебаний позволяет сочетать требование неискажённой передачи сигналов с требованием высокой стабильности частоты несущего колебания.

Управление амплитудой выходного колебания в нелинейном усилителе, каковым является генератор с посторонним возбуждением, сводится к управлению средней крутизной $S_{ср}$ [см. § 11,3, ф-ла (11.23)]. При постоянной амплитуде возбуждающего напря-

жения E_g (частоты ω_0) это равносильно управлению амплитудой первой гармоники анодного тока и, следовательно, амплитудами всех колебаний, пропорциональных первой гармонике (ток в контуре, напряжение на контуре, ток в нагрузочном контуре, напряжение в антенне, и т. д.)

Изменение средней крутизны лампы может быть достигнуто подачей модулирующего напряжения на один из электродов лампы. В зависимости от используемого для модуляции электрода различают **сеточную модуляцию** (по управляющей сетке), **анодную модуляцию**, модуляцию по экранирующей сетке в тетродах и пентодах, модуляцию по защитной сетке в пентодах и различные комбинации из перечисленных видов модуляции. В передатчиках значительной мощности применяются триоды. В связи с этим наибольшее распространение получили сеточная и анодная модуляции, которые здесь и рассматриваются.

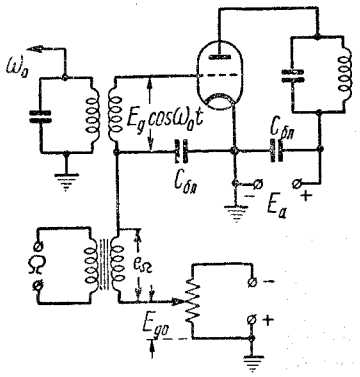


Рис. 13.1

Простейшая и наиболее часто встречающаяся схема сеточной модуляции изображена на рис. 13.1.

Модулирующее напряжение $e_{g\Omega}$, развиваемое на выходе трансформатора низкой частоты, вводится в цепь постоянной составляющей сеточного тока последовательно с источником постоянного напряжения смещения E_{g0}. Амплитуда E_g высокочастотного напряжения, поступающего от возбудителя, в процессе модуляции остаётся неизменной. Изменение результирующего напряжения смещения по закону $E_{g0} + e_{g\Omega}$ приводит к изменению амплитуды импульсов и, следовательно, к изменению амплитуды первой гармоники анодного тока.

Нетрудно убедиться, что для осуществления модуляции лампа должна работать с отсечкой анодного тока, т. е. в нелинейном режиме. Действительно, если рабочую точку установить на линейном участке характеристики лампы и работать с малыми амплитудами E_g, как этой показано на рис. 13.2, то изменение смещения будет сопровождаться лишь низкочастотным изменением среднего значения анодного тока. Амплитуда переменной составляющей (с частотой ω_0) остаётся при этом неизменной и, следовательно, никакой модуляции при линейном режиме не получается.

Представленная на рис. 13.1 схема соответствует так называемой **модуляции сеточным смещением**. Диаграммы напряжений и токов в режиме, обеспечивающем осуществление модуляции изменением напряжения смещения, представлены на рис. 13.3.

При правильном выборе амплитуды модулирующего напряжения приращение амплитуды импульсов ΔI связано с изменением смещения $e_{g\Omega}$ линейным соотношением:

$$\Delta I = k\, e_{g\Omega},$$

где k — постоянный коэффициент.

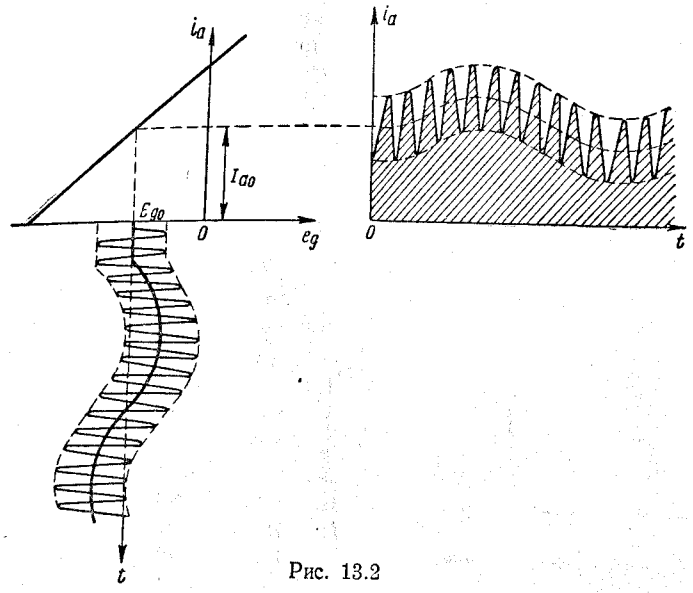


Рис. 13.2

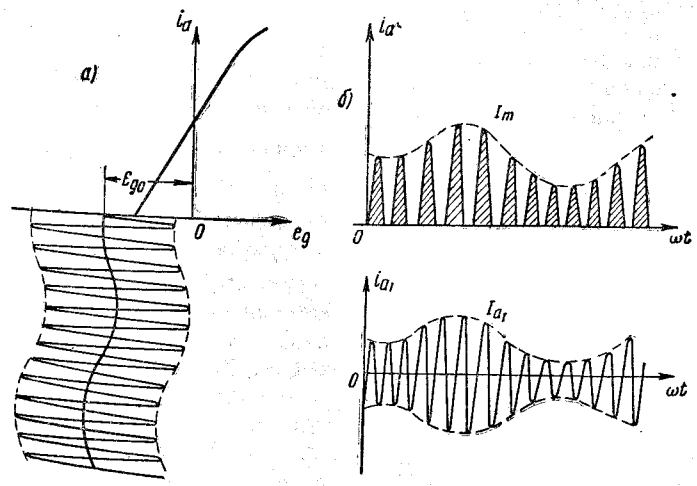


Рис. 13.3

Так как изменение смещения (при постоянной амплитуде E_g) сопровождается изменением угла отсечки Θ, то амплитуда первой гармоники анодного тока, равная (см. § 11.8)

$$I_{a1} = \alpha_1(\Theta)\, I_m = k\,\alpha_1(\Theta)\, e_{g\Omega}, \qquad (13.1)$$

изменяется по закону, отличающемуся от закона изменения модулирующего напряжения. Отсюда видно, что при модуляции сеточным смещением неизбежны искажения: форма огибающей тока I_{a1} отличается от формы напряжения $e_{g\Omega}$. Для ослабления искажений важно правильно выбирать пределы изменения угла отсечки при модуляции. Из графиков, представленных на рис. 11.3, видно, что изменение коэффициента первой гармоники $\alpha_1(\Theta)$ относительно невелико при $60^0 < \Theta < 120^0$. В режиме молчания (отсутствие модуляции) угол отсечки устанавливается близким к $70^0 - 80^0$.

Выбор исходного смещения E_{g0} и амплитуды модулирующего напряжения $E_{g\Omega}$ удобно производить с помощью так называемой статической модуляционной характеристики, представляющей зависимость I_{a1} от E_{g0} при постоянной амплитуде E_g. Подобная зависимость показана на рис. 13.4.

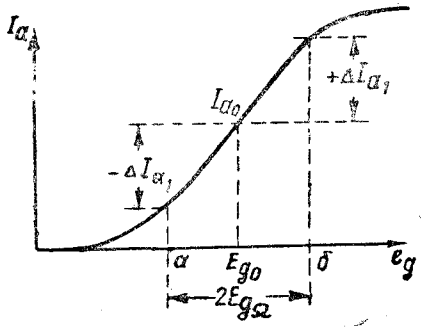


Рис. 13.4

Вместо I_{a1} по оси ординат можно откладывать I_K, U_a, ток в антенне и т. д., иными словами, любую величину, линейно связанную с первой гармоникой анодного тока. Выделив на статической модуляционной характеристике линейный участок $a-б$, оптимальное значение E_{g0} можно найти как абсциссу средней точки этого участка. Амплитуда модулирующего напряжения $E_{g\Omega}$ должна быть равна, очевидно, половине отрезка $a-б$. Для ослабления искажений приходится ограничивать предельную величину отношения $\frac{\Delta I_{a1}}{I_{a10}}$, т. е. отказываться от получения стопроцентной глубины модуляции. Здесь I_{a10} — значение I_{a1} при $e_g = E_{g0}$. При жёстких требованиях к качественным показателям передатчика глубина модуляции не должна превышать $50 \div 70\%$. Это является крупным недостатком модуляции сеточным смещением. Вторым существенным недостатком, присущим всем видам сеточной модуляции, является низкий коэффициент полезного действия модулируемого генератора.

Объясняется это тем, что в режиме несущего колебания (отсутствие модуляции) амплитуда колебательного напряжения на контуре приблизительно в $1+M$ раз меньше, чем в максимальной точке модуляции. Так как максимальная амплитуда $U_{a\,макс}$, во избежание искажений связанных с возрастанием сеточного тока, не

должна превышать примерно 0,9 от E_a, т. е. $\xi_{макс} \leqslant 0{,}9$, а E_a при сеточной модуляции есть величина постоянная, то в режиме несущего колебания получается

$$\xi_0 = \frac{U_{a0}}{E_a} \approx \frac{\xi_{макс}}{1+M}.$$

Из ф-лы (11.13′) следует, что и кпд снижается в $1+M$ раз по сравнению с режимом максимальной точки (так называемым „телеграфным режимом“).

При передаче речи и музыки на режим молчания приходится значительная часть общего времени передачи. Так как средний кпд при модуляции близок к кпд при молчании, то кпд передатчика с модуляцией сеточным смещением получается весьма низким. Достоинством сеточной модуляции является относительно малая требуемая мощность усилителя низкой частоты (модулятора), работающего на сеточную цепь модулируемого генератора.

В многоступенных передатчиках сеточная модуляция иногда осуществляется в одной из промежуточных ступеней. В подобных

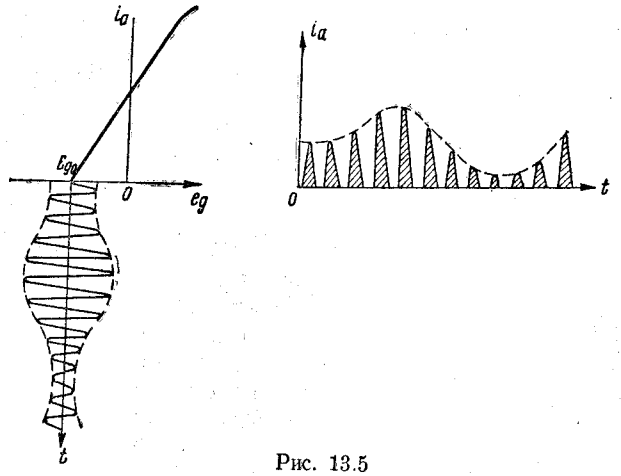


Рис. 13.5

случаях приходится иметь дело с усилением модулированных колебаний. Диаграмма напряжений и токов, соответствующих режиму усиления модулированных колебаний, представлена на рис. 13.5.

Постоянное напряжение смещения E_{g0} подбирается из условия получения угла отсечки $\Theta_0 = 90^0$. При таком выборе исходного режима, угол отсечки в процессе модуляции амплитуды возбуждающего напряжения остаётся неизменным, и коэффициент первой гармоники

$$\alpha_1(90^0) = 0{,}5 = \text{const}.$$

Поэтому амплитуда первой гармоники анодного тока изменяется пропорционально амплитуде импульсов, т. е. пропорционально амплитуде возбуждающего напряжения. Таким образом, при $\Theta_0 = 90^0$ и при достаточно линейной характеристике лампы усилитель не дает существенных искажений закона модуляции.

Если в исходном режиме установить угол отсечки $\Theta_0 \neq 90^0$, то глубина модуляции первой гармоники анодного тока отличается от глубины модуляции возбуждающего напряжения. Это положение поясняется рис. 13.6, соответ-

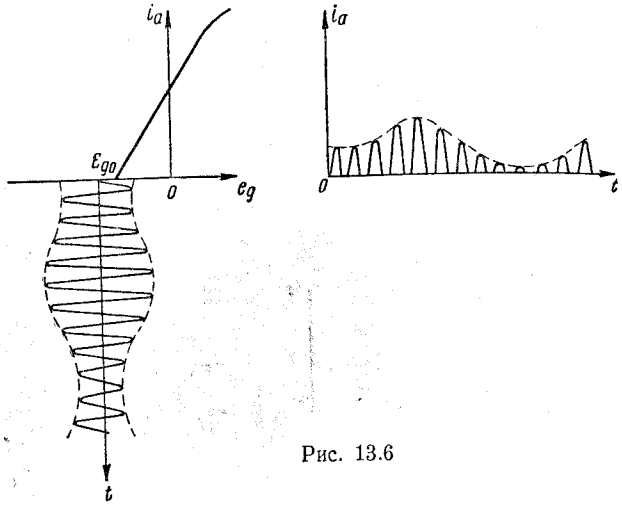


Рис. 13.6

ствующим $\Theta_0 < 90^0$. Нетрудно видеть, что модуляция анодного тока получается более глубокой, нежели модуляция возбуждающего напряжения. Этим приёмом иногда пользуются для некоторого углубления модуляции в усилителе. При значительном углублении возникают искажения, связанные с изменением $\alpha_1(\Theta_0)$ в процессе модуляции. Ясно, что при выборе $\Theta_0 > 90^0$, глубина модуляции по анодному току получается меньшей, чем по сеточной цепи.

В энергетическом отношении усилитель модулированных колебаний мало отличается от ступени, в которой осуществляется модуляция смещающим напряжением, так как в режиме несущего колебания коэффициент использования анодного напряжения в $1+M$ раз меньше, чем в „пиковой" точке модуляции.

Обратимся к рассмотрению анодной модуляции. Простейшая схема осуществления анодной модуляции генератора с посторонним возбуждением представлена на рис. 13.7.

Последовательно с источником постоянного анодного напряжения включена выходная обмотка модуляционного трансформатора. Амплитуда $E_{a\Omega}$ модулирующего напряжения для получения глубокой модуляции должна быть величиной того же порядка, что и E_a.

Большое значение при анодной модуляции имеет выбор степени напряжённости режима генератора. При работе генератора в недонапряжённом режиме осуществление достаточно глубокой и одновременно линейной модуляции невозможно. Объясняется это слабой зависимостью анодного тока от анодного напряжения. Действительно, из основного уравнения лампы (триода):

$$i_a = S(e_g + D e_a)$$

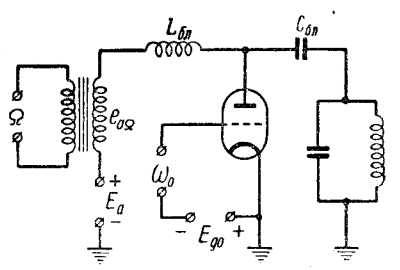


Рис. 13.7

видно, что из-за малости проницаемости D изменение e_a не может обеспечить значительного изменения i_a, а следовательно, и амплитуды первой гармоники анодного тока I_{a1}. При использовании пентодов зависимость i_a от e_a выражена ещё более слабо.

Иначе обстоит дело при работе генератора в перенапряжённом режиме. В § 11.3 было показано, что если $e_{a\,мин} < e_{g\,макс}$, то благодаря перераспределению электронного тока между анодом и сеткой в импульсе анодного тока образуется провал. Чем больше глубина провала, т. е. чем больше деформируется импульс, тем меньше амплитуда I_{a1} первой гармоники, входящей в состав периодической последовательности подобных импульсов. Это обстоятельство можно использовать для модуляции амплитуды первой гармоники путём изменения анодного напряжения, поскольку глубина провала, при заданных параметрах схемы и амплитуде сеточного возбуждения, зависит от напряжения анодного питания. Изменение формы импульса и связанное с этим изменение I_{a1} в процессе модуляции показано[1]) на рис. 13.8. В верхней части этого рисунка приведена диаграмма анодного напряжения, изменяющегося по закону

$$e_a = E_a + E_{a\Omega} \sin \Omega t.$$

Амплитуда возбуждения E_g и сопротивление анодной нагрузки $Z_{эр}$ выбираются из расчёта получения в максимальной точке модуляции (при $e_{a\,макс} = E_a + E_{a\Omega}$) режима, близкого к критическому. Импульс анодного тока в этот момент имеет форму, близкую к неискажённой полуволне, а коэффициент использования анодного напряжения (см. § 13.3) близок к $0{,}9 \div 0{,}95$. При уменьшении анодного напряжения глубина провала возрастает, и в режиме минимальной точки ($e_{a\,мин} = E_a - E_{a\Omega}$) достигает наибольшей величины. При $E_{a\Omega} = E_a$, т. е. при стопроцентной модуляции, анодный ток обращается в нуль (в точке $e_a = 0$).

[1]) Ток первой гармоники на нижней диаграмме рис. 13.8 дан в увеличенном масштабе.

Как показывают подробные расчёты и исследования, зависимости $I_{a1}(e_{a\Omega})$ может быть придан линейный характер при изменении модулирующего напряжения $e_{a\Omega}$ в очень широких пределах. На рис. 13.9 представлена типичная модуляционная характеристика (статическая) в виде зависимости I_{a1} от E_a.

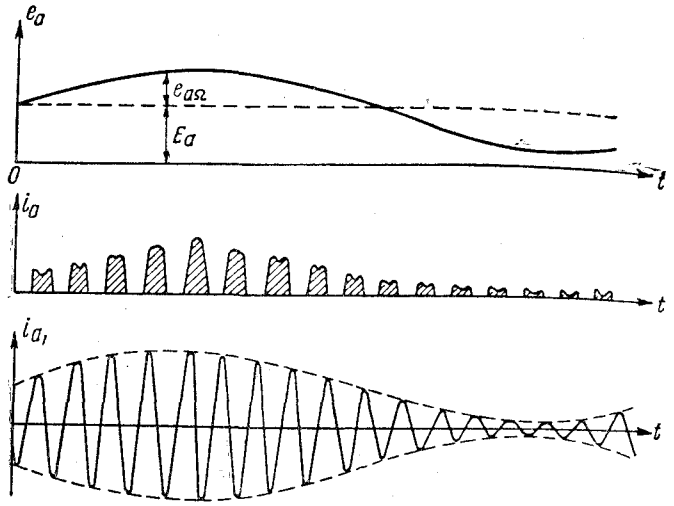


Рис. 13.8

Исходное напряжение источника анодного питания должно соответствовать средней точке линейного участка этой зависимости. Для получения стопроцентной модуляции амплитуда модулирующего напряжения $E_{a\Omega}$ должна равняться E_a.

Работа генератора в перенапряжённом режиме характеризуется большим сеточным током. Сеточный ток особенно сильно возрастает в моменты прохождения анодного напряжения через минимум, т. е. на нижнем участке модуляционной характеристики. Полезно применять, наряду с источником принудительного смещения, также сеточную утечку, создающую добавочное смещение, зависящее от сеточного тока. Такая комбинация увеличивает крутизну модуляционной характеристики на нижнем её участке и тем самым улучшает линейность модуляции.

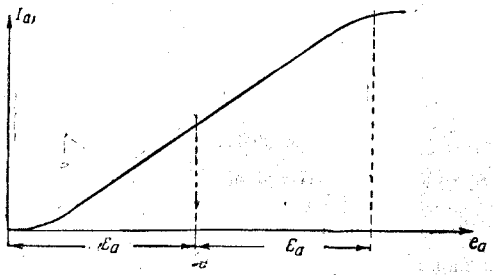


Рис. 13.9

Коэффициент использования анодного напряжения в процессе модуляции изменяется относительно мало и всё время остаётся на уровне, близком к единице. Благодаря этому коэффициент полезного действия модулируемого генератора весьма высок и не уступает кпд генератора, работающего в немодулированном (телеграфном) режиме.

Анодная модуляция, как правило, применяется в выходной (оконечной) ступени передатчика.

Для управления мощностью высокочастотного генератора изменением анодного напряжения требуется модулятор значительной мощности. Нетрудно установить связь между мощностью модулятора и мощностью генератора. Для этого обратимся к представленной на рис. 13.10 схеме анодной цепи генератора, эквивалентной для постоянного тока и для частоты модуляции. Через R_0 обозначено сопротивление возбуждённой (по высокой частоте) лампы по отношению к источнику питания, т. е.

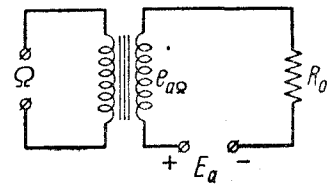


Рис. 13.10

$$R_0 = \frac{E_a}{I_{a0}}, \tag{13.2}$$

где I_{a0} — постоянная слагающая анодного тока в режиме молчания (в отсутствие модуляции).

Расчёт и опытные данные показывают, что в процессе модуляции среднее значение анодного тока изменяется приблизительно пропорционально модулирующему напряжению. Сопротивление лампы можно поэтому считать неизменным и равным R_0. Таким образом, модуляционный трансформатор нагружен на сопротивление, близкое по величине к R_0. Блокировочный дроссель $L_{бл}$ (рис. 13.7) на эквивалентной схеме опущен, так как его индуктивное сопротивление для частоты модуляции обычно очень мало по сравнению с нагрузочным сопротивлением, т. е.

$$\Omega_{макс}\, L_{бл} \ll R_0.$$

Так как сопротивление разделительного конденсатора

$$\frac{1}{\Omega_{макс}\, C_{бл}} \gg R_0,$$

то и высокочастотная часть схемы рис. 13.7 может быть опущена при рассмотрении схемы, эквивалентной для частоты модуляции.

При сделанных допущениях средняя за период модуляции мощность, отдаваемая модулятором, равна

$$P_\Omega = \frac{E_{a\Omega}^2}{2R_0}. \tag{13.3}$$

Учитывая, что

$$E_{a\Omega} = M E_a,$$

где M — коэффициент модуляции, и подставляя R_0 по ф-ле (13.2), получим

$$P_\Omega = \frac{M^2 E_a^2 I_{a0}}{2 E_a} = \frac{M^2}{2} E_a I_{a0} = \frac{M^2}{2} P_{a0}. \qquad (13.4)$$

При стопроцентной модуляции ($M = 1$) P_Ω достигает половины мощности, потребляемой анодной цепью генератора высокой частоты.

Это обстоятельство заставляет уделять большое внимание повышению отдачи усилителя низкой частоты, используемого в качестве модулятора, особенно в мощных передатчиках. Как правило, в современных радиостанциях анодные модуляторы работают в классе В по двухтактной схеме (см. § 11.2). Большая мощность, в сочетании с жёсткими требованиями к электроакустическим показателям, делают подобные модуляторы весьма сложными и дорогими устройствами.

Особенно большие успехи в решении этой проблемы достигнуты в СССР. Наиболее мощные в мире советские радиовещательные станции, разработанные советскими учёными и инженерами под руководством А. Л. Минца, оснащены совершенными модуляционными устройствами, обеспечивающими высококачественную модуляцию при высоких энергетических показателях радиостанции в целом.

Следует отметить, что развиваемая модулятором мощность [см. ф-лу (13.4)] не расходуется непроизводительно. Бóльшая часть этой мощности переходит в мощность высокочастотного колебания, благодаря чему номинальная мощность ламп генератора может выбираться исходя из режима несущего колебания. Повышение „пиковой" мощности в $(1+M)^2$ раз против „несущей" мощности (см. § 3.2) достигается в данном случае за счёт увеличения анодного напряжения в $1+M$ раз. Это обстоятельство, совместно с хорошей отдачей высокочастотного генератора (за счёт высокого ξ), является крупным достоинством анодной модуляции в перенапряжённом режиме.

Наиболее распространённая схема сопряжения двухтактного модулятора с высокочастотным генератором представлена на рис. 13.11. Применение конденсатора C_Ω и дросселя L_Ω позволяет разгрузить модуляционный трансформатор от постоянной слагающей анодного тока генератора и, тем самым, устранить искажения, связанные с магнитным насыщением сердечника трансформатора. Для того, чтобы C_Ω и L_Ω не оказывали существенного влияния на частотную характеристику модуляции, должны выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_{мин} C_\Omega} &\ll R_0 \\ \Omega_{мин} L_\Omega &\gg R_0 \end{aligned}\right\}. \qquad (13.5)$$

Анодная модуляция в перенапряжённом режиме с успехом применяется в передатчиках длинных, средних и коротких волн (в последнем случае при последовательной схеме питания анодной цепи генератора, в соответствии с § 11.4). На ультракоротких волнах создание перенапряжённого режима, требующего больших нагрузочных сопротивлений, оказывается трудной задачей. Кроме того, на очень высоких частотах влияние углов пролёта (инерции электронов) препятствует осуществлению модуляции за счёт провалов в импульсах анодного тока.

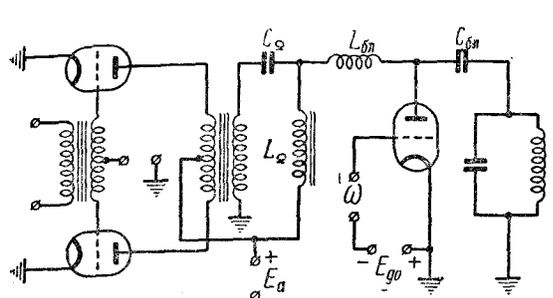


Рис. 13.11

§ 13.3. Балансная амплитудная модуляция

При решении ряда радиотехнических задач встречается необходимость в подавлении несущего колебания, входящего в состав амплитудно-модулированного колебания. Эта задача может быть осуществлена с помощью так называемого балансного модулятора, один из вариантов которого представлен на рис. 13.12.

В балансном модуляторе немодулированное напряжение с частотой ω_0 подаётся на сетки ламп $Л_1$ и $Л_2$ синфазно, а модулирующее напряжение с частотой Ω противофазно. Нагрузочное сопротивление (в данной схеме колебательный контур, настроенный на частоту ω_0) включено между анодами ламп. Если лампы одинаковы, а контур симметричен относительно точки нулевого потенциала (по высокой частоте), то потенциалы анодов обеих ламп одинаковы и ток через конден-

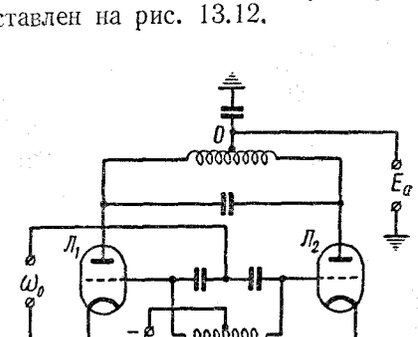


Рис. 13.12

сатор контура равен нулю. Таким образом, в отсутствие модуляции схема сбалансирована и колебаний с частотой ω_0 на выходе нет.

При подаче модулирующего напряжения (противофазно) баланс схемы нарушается. Одна из ламп, на сетку которой подаётся в данный момент положительная полуволна, посылает в контур увеличенный по амплитуде ток первой гармоники, а вторая лампа — сниженный. Между анодами ламп возникает разностное напряжение, а в контуре — колебательный ток. Для наглядности допустим сначала, что модулирующее напряжение (синусоидальное) подаётся только на одну из ламп, например $Л_1$. Тогда в контуре будут

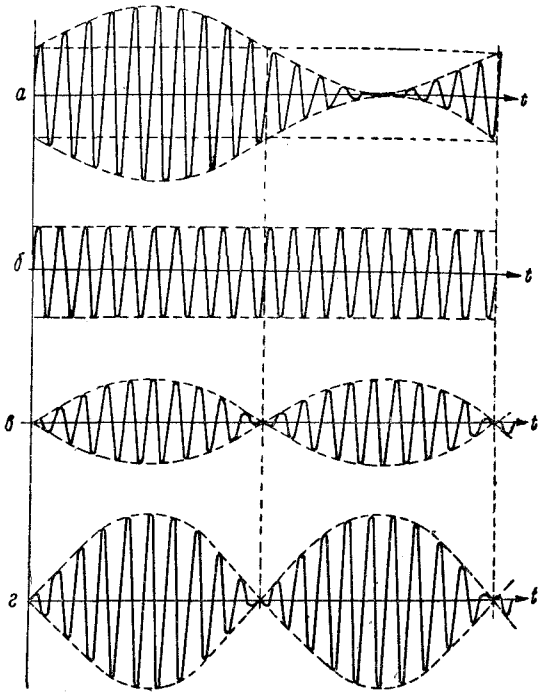


Рис. 13.13

два тока: один от лампы $Л_1$, модулированный по амплитуде (рис. 13.13*а*) и второй от лампы $Л_2$, немодулированный (рис. 13.13*б*). Так как фаза второго тока сдвинута на 180° относительно несущего колебания, входящего в состав первого тока, а амплитуды их равны, то результирующий ток в контуре будет иметь вид, представленный на рис 13.13*в*. Если теперь учесть модуляцию тока второй лампы, то получим диаграмму, представленную на рис. 13.13*г*, которая отличается от предыдущей только удвоением амплитуд.

К полученному результату легко придти аналитически. Для этого представим контурные токи i_1 и i_2 от ламп $Л_1$ и $Л_2$ в виде следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_{k0}\,(1+M\sin\Omega t)\,\sin\omega_0 t \\ i_2 &= I_{k0}\,(1-M\sin\Omega t)\,\sin\omega_0 t \end{aligned}\right\}. \qquad (13.6)$$

Разные знаки в скобках учитывают противофазность модулирующих напряжений на лампах $Л_1$ и $Л_2$. Результирующий ток в контуре, равный разности токов от обеих ламп, будет

$$i = i_1 - i_2 = 2\,MI_{k0}\,\sin\Omega t\,\sin\omega_0 t. \qquad (13.7)$$

Огибающая этого тока, равная $2\,MI_{k0}\,|\sin\Omega t\,|$, изменяется с частотой 2Ω. Частота заполнения огибающей равна частоте несущего колебания ω_0, причём каждые полпериода модуляции фаза колебания изменяется на 180°.

Энергетический режим ламп при балансной модуляции получается весьма неблагоприятный. Взаимная компенсация в анодной цепи колебательных напряжений частоты ω_0 приводит к тому, что в отсутствие модуляции лампы работают как бы в статическом режиме: анодное напряжение не изменяется, и в моменты прохождения импульсов анодного тока вся подводимая от источника питания мощность выделяется на анодах ламп. Ухудшается также использование ламп по току. Всё это указывает на целесообразность осуществления балансной модуляции в относительно маломощных ступенях с последующим усилением полученного колебания.

§ 13.4. Модуляция частоты колебаний

Под прямыми методами частотной модуляции подразумеваются такие методы, при которых оказывается воздействие на частоту колебания непосредственно в автогенераторе. Чаще всего это воздействие заключается в изменении ёмкости или индуктивности контура автогенератора. Амплитуда автоколебаний при модуляции должна оставаться неизменной или почти неизменной.

Существует ряд способов управления ёмкостью и индуктивностью контура: электронные, электромеханические, электромагнитные и др. Выбор того или иного способа зависит от двух основных параметров модуляции: относительного изменения частоты $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ и скорости изменения частоты. Последний параметр характеризуется спектром модулирующего сигнала. При медленной модуляции (низкие частоты) широко применяются такие способы, как механическое вращение пластин переменного

конденсатора, изменение индуктивности катушки путём изменения тока, подмагничивающего сердечник катушки, и др. Если спектр сигнала содержит относительно высокие частоты, то приходится прибегать к электронным (безинерционным) способам управления ёмкостью или индуктивностью контура. С этой целью используются электронные лампы, соответствующим образом связанные с колебательной системой автогенератора.

Принцип действия подобных ламп, называемых „реактивными", так как по отношению к контуру лампы представляют собой реактивное сопротивление, поясняется схемой, представленной на рис. 13.14. Реактивная лампа, обычно пентод, подключена параллельно контуру автогенератора. Напряжение высокой частоты с амплитудой $U_{g\omega}$ подаётся на управляющую сетку с сопротивления Z_1, входящего в делитель напряжений Z_1, Z_2, а модулирующее напряжение e_Ω на одну из сеток пентода, например на ту же управляющую или на экранирующую сетку. Сопротивления Z_1 и Z_2 подбираются таким образом, чтобы фаза сеточного напряжения $U_{g\omega}$ была сдвинута относительно фазы напряжения на контуре U_a на угол, по возможности близкий к 90°. Так как переменная составляющая анодного тока $\vec{I}_y$ в пентоде в очень слабой степени зависит от анодного напряжения, то можно считать

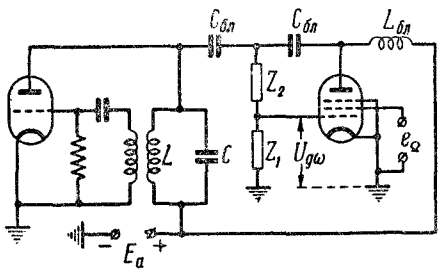


Рис. 13.14

$$\vec{I}_y \approx S_{cp} \cdot \vec{U}_{g\omega},$$

где S_{cp} — средняя крутизна характеристики лампы [см. § 11.3, ф-ла (13.23)]. Рассматривая реактивную лампу как двухполюсник, подключённый к напряжению $\vec{U}_a$ и потребляющий ток $\vec{I}_y$, находим сопротивление этого двухполюсника для частоты ω:

$$Z_э = \frac{\vec{U}_a}{\vec{I}_y} = \frac{\vec{U}_a}{\vec{U}_{g\omega}} \cdot \frac{1}{S_{cp}} = \frac{1}{\vec{K} S_{cp}}, \tag{13.8}$$

где

$$\vec{K} = \frac{\vec{U}_{g\omega}}{\vec{U}_a} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \tag{13.9}$$

Обычно выполняется условие $|K| \ll 1$, т. е. $z_1 \ll z_2$. Поэтому можно считать

$$\vec{K} \approx \frac{Z_1}{Z_2}$$

и

$$Z_э = \frac{Z_2}{Z_1 S_{cp}}. \tag{13.8'}$$

Делитель напряжений обычно составляется из ёмкости и омического сопротивления. При включении сопротивления R между анодом и сеткой, а ёмкости — между сеткой и катодом реактивной лампы (рис. 13.15), получим:

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega C};\ Z_2 = R,$$

$$\vec{K} = \frac{1}{i\omega CR},$$

$$Z_э = \frac{1}{S_{cp}\vec{K}} = i\omega \frac{CR}{S_{cp}}. \tag{13.10}$$

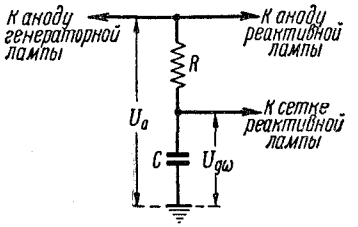


Рис. 13.15

Так как величина $\frac{CR}{S_{cp}}$ всегда положительная, то эквивалентное сопротивление реактивной лампы можно представить в форме индуктивного сопротивления:

$$Z_э = i\omega L_э,$$

где

$$L_э = \frac{CR}{S_{cp}}. \tag{13.11}$$

Как видим, при схеме делителя, представленной на рис. 13.15, реактивная лампа оказывает на контур такое же влияние, как параллельно подключённая индуктивность $L_э$.

При включении делителя по схеме рис. 13.16, т. е. при

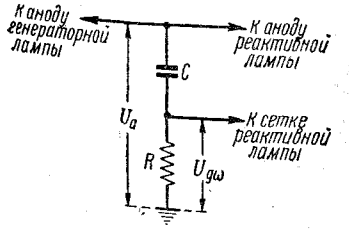


Рис. 13.16

$$Z_1 = R,\ Z_2 = \frac{1}{i\omega C},$$

имеем

$$Z_э = \frac{1}{i\omega CRS_{cp}}, \tag{13.12}$$

т. е. реактивная лампа эквивалента ёмкости:

$$C_э = S_{cp} CR. \tag{13.13}$$

Фигурирующая в выражениях (13.11) и (13.13) средняя крутизна

$S_{ср}$ зависит при данной амплитуде высокочастотного напряжения $U_{g\omega}$ от положения рабочей точки на характеристике лампы, т. е. от напряжения смещения на управляющей и других сетках реактивной лампы. Подавая к одной из сеток модулирующее напряжение, можно осуществить модуляцию частоты изменением индуктивности $L_э$ или ёмкости $C_э$.

Вариация средней крутизны может быть осуществлена двумя способами: изменением положения рабочей точки на криволинейном участке характеристики или же за счёт изменения угла отсечки анодного тока реактивной лампы. Первый метод находит применение в тех случаях, когда требуемая для изменения частоты на величину $\pm\omega_д$ вариация тока I_y настолько мала, что может быть получена при использовании небольшого участка характеристики лампы, причём крутизна характеристики на этом участке линейно связана с напряжением смещения сетки, по которой производится модуляция.

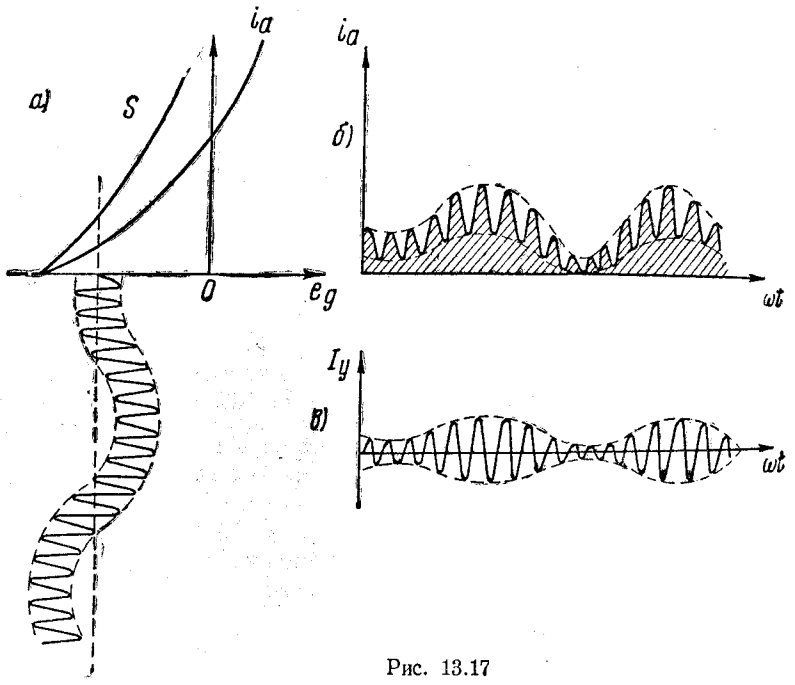


Рис. 13.17

Подобный режим представлен на рис. 13.17. На рис. 13.17б изображена диаграмма полного анодного тока, а на рис. 13.17в

только высокочастотной составляющей частоты ω_0. Получается обычная амплитудная модуляция тока, в результате чего крутизна

$$S_{ср} = \frac{\overrightarrow{I_y}}{\overrightarrow{U_g}}$$

изменяется пропорционально амплитуде $\overrightarrow{I_y}$.

При работе с отсечкой анодного тока процесс модуляции амплитуды I_y мало отличается от рассмотренного в § 13.2 процесса при амплитудной модуляции изменением смещения. Некоторой особенностью является то, что колебательное анодное напряжение, навязываемое реактивной лампе контуром автогенератора, сдвинуто по фазе на угол 90° относительно фазы тока I_y.

Для установления связи между заданной величиной отношения $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ и требуемым относительным изменением ёмкости или индуктивности колебательной системы автогенератора допустим, что модуляция осуществляется со схемой рис. 13.16, и отклонению ёмкости на величину ΔC относительно исходного значения C_0 соответствует изменение частоты на величину $\Delta\omega$ относительно исходной частоты ω_0. Пренебрегая влиянием потерь в контуре и считая частоту автоколебаний совпадающей с резонансной частотой контура, получим следующие очевидные соотношения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

$$\omega_0 + \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_0+\Delta C)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}\cdot\sqrt{1+\frac{\Delta C}{C_0}}}.$$

Разделив последнее выражение на ω_0, получим

$$1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta C}{C_0}}},$$

откуда

$$\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{2\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad (13.14)$$

и

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta C}{C_0}}} - 1. \qquad (13.15)$$

Положительному приращению ёмкости $\Delta C > 0$ соответствует отрицательное приращение частоты $\Delta\omega$ и наоборот.

В ряде применений частотной модуляции относительное изменение частоты весьма невелико. Например, при передаче речи и музыки на УКВ (см. § 3.4) величина $\frac{\omega_д}{\omega_0}$ не превышает нескольких долей процента. В подобных случаях выражения (13.14) — (13.15) можно записать в более простой форме, пренебрегая $\frac{\Delta C}{C_0}$ и $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, а также более высокими степенями этих отношений, по сравнению с единицей:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \tag{13.14'}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C_0}. \tag{13.15'}$$

Таким образом, при малых относительных изменениях $\Delta\omega$ и ΔC связаны между собой линейными соотношениями. Такой же результат нетрудно получить и для изменения индуктивности контура.

Следовательно, для получения линейной частотной модуляции требуется изменение ёмкости или индуктивности контура по закону, совпадающему с законом изменения модулирующего напряжения.

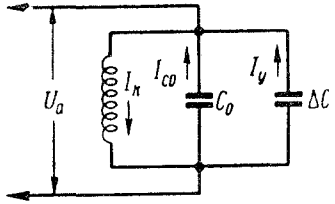


Рис. 13.18

При значительных отношениях $\frac{\Delta C}{C_0}$ и $\frac{\Delta L}{L_0}$ необходимо учитывать нелинейный характер выражений (13.14)—(13.15).

Выражение (13.14′) позволяет выявить требования к току реактивной лампы. Обращаясь к эквивалентной схеме колебательного контура, представленной на рис. 13.18, и учитывая, что протекающий через основную ёмкость C_0 ток I_{C0} мало отличается от полного контурного тока I_k, получаем:

$$\frac{I_y}{I_{C0}} \approx \frac{I_y}{I_k} = \frac{|\Delta C|}{C_0} = \frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0}. \tag{13.16}$$

Отсюда находим для амплитуды переменной составляющей анодного тока реактивной лампы следующее выражение:

$$I_y \approx I_k \cdot \frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{U_a}{\rho}\cdot\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0}. \tag{13.17}$$

Из этого выражения видно, что для облегчения требований к эмиссии (и крутизне характеристики) реактивной лампы выгодно снижать ток в контуре. Анодное напряжение целесообразно снижать до минимума, при котором ещё обеспечивается устойчивая генерация и создаётся необходимая мощность автогенератора, а характеристику контура ρ выгодно брать по возможности более высокой. Не следует, однако, забывать, что чрезмерное повышение ρ, достигаемое за счёт малой ёмкости контура, ухудшает стабильность средней частоты автогенератора из-за возрастающего влияния междуэлектродных ёмкостей лампы.

С повышением рабочей частоты ω_0 эффективность реактивной лампы снижается. На очень высоких частотах из-за снижения характеристики ρ и, следовательно, увеличения тока I_k влияние электронного тока реактивной лампы на резонансную частоту контура оказывается очень слабым. Кроме того, подключение реактивной лампы к колебательной системе генератора ухудшает условия для генерации очень коротких волн и сопряжено с серьёзными конструктивными трудностями. Эти трудности особенно велики на волнах дециметрового диапазона. Иногда для обхода трудностей, связанных с осуществлением частотной модуляции на очень высоких частотах, применяют умножение частоты. Выбором удобной для использования реактивных ламп частоты возбудителя можно получить требуемую величину $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, которая затем, в процессе умножения частоты, остаётся неизменной.

Управление частотой автогенератора обычно сопровождается паразитной модуляцией амплитуды. Основной причиной изменения амплитуды является наличие активной составляющей в эквивалентном сопротивлении реактивной лампы. В процессе модуляции эта составляющая изменяется, что приводит к изменению затухания контура автогенератора и, следовательно, к некоторому изменению амплитуды автоколебаний. Амплитудная модуляция может быть ослаблена введением в делитель напряжения Z_1 и Z_2 элементов, обеспечивающих фазовый сдвиг тока I_y относительно U_a по возможности точно на 90°. При очень больших относительных величинах $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ изменение амплитуды автоколебаний может являться результатом изменения характеристики контура.

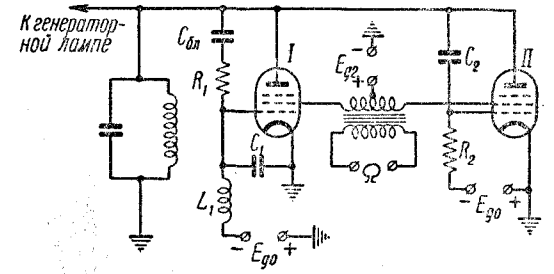


Рис. 13.19

Важной проблемой при частотной модуляции является стабилизация средней частоты автогенератора. В практике широко распространены различные системы автоподстройки средней частоты модулированного генератора по опорному (эталонному) генератору, обычно стабилизованному кварцем. На рассмотрении подобных систем из-за недостатка места не останавливаемся. Приведём лишь в заключение схему двухтактного частотного модулятора (рис. 13.19),

позволяющего существенно ослабить влияние на частоту генератора изменений питающих напряжений. В этой схеме одна из реактивных ламп работает как индуктивность, а другая как ёмкость. Модулирующее напряжение подаётся к лампам *I* и *II* в противофазе, благодаря чему девиация частоты получается вдвое больше, чем от каждой лампы в отдельности.

Например, при подаче на индуктивную лампу положительной полуволны модулирующего напряжения ток $I_{y\,I}$ (индуктивный) растёт, что эквивалентно уменьшению $L_э$ лампы и повышению частоты контура. В это же время на ёмкостную лампу подаётся отрицательная полуволна модулирующего напряжения, что приводит к уменьшению тока $I_{y\,II}$ (ёмкостного) и, следовательно, к уменьшению $C_э$ и повышению частоты контура. Таким образом, действие ламп *I* и *II* при противофазной модуляции складывается. Изменения же напряжений источников питания (анодное напряжение, напряжение смещения сеток, напряжение накала), действующие на обе лампы синфазно, приводят к взаимной компенсации частотных отклонений, вызываемых каждой из ламп в отдельности.

§ 13.5. Модуляция фазы колебаний

Под фазовой модуляцией подразумевается изменение фазы колебания по закону изменения модулирующего напряжения. Эта задача может быть осуществлена различными способами. Наибольшее распространение получили способы, основанные на преобразовании амплитудной модуляции в модуляцию фазы или на изменении параметров цепи (расстройка контура).

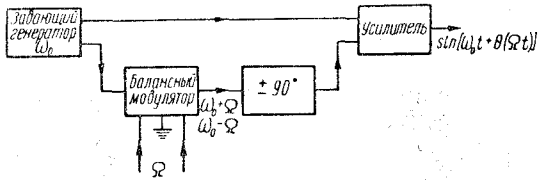


Рис. 13.20

Блок-схема устройства для фазовой модуляции, осуществляемой по первому способу, представлена на рис. 13.20. В этой схеме на вход усилителя подаются два напряжения: немодулированное напряжение от стабильного задающего генератора с частотой ω_0 и напряжения боковых частот $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$, выделенных с помощью балансного модулятора (см. § 13.3). Модулирующее напряжение с частотой Ω подаётся на лампы балансного модулятора в противофазе, а несущая частота ω_0 в фазе, вследствие чего в выходном напряжении балансного модулятора колебание с частотой ω_0 уничтожается и остаются лишь колебания боковых частот. Амплитуды этих колебаний пропорциональны амплитуде модулирующего напряжения частоты Ω.

Для получения на выходе усилителя колебания, модулированного по фазе, одно из напряжений несущей частоты ω_0, поступающее с задающего генератора, или напряжение, поступающее с балансного модулятора, должно быть повёрнуто по фазе на $\pm 90^0$. На схеме рис. 13.20 фазосдвигающее устройство включено на выходе балансного модулятора. Суммарное колебание, выделяемое на выходе усилителя, изображается на векторной диаграмме (рис. 13.21) вектором *OD*. Вектор *OA* соответствует немодулированному колебанию, поступающему с задающего генератора, а вектор *AD* — сумме двух колебаний с частотами $\omega_0 \pm \Omega$, поступающих с балансного модулятора.

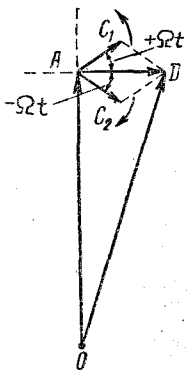


Рис. 13.21

Изменение при модуляции длины вектора *AD* приводит к изменению фазы результирующего колебания *OD* по закону (см. § 3.4):

$$\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{AD}{OA}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2AC_1}{OA}\cos\Omega t\right). \qquad (13.18)$$

Амплитуда изменения фазы

$$\Theta_{макс} = \operatorname{arctg}\left(\frac{2AC_1}{OA}\right). \qquad (13.19)$$

Линейность модуляционной характеристики обеспечивается при выполнении условия

$$\frac{2AC_1}{OA} \ll 1.$$

В этом случае

$$\theta(t) \approx \Theta_{макс}\cos\Omega t \qquad (13.18')$$

и

$$\Theta_{макс} \approx \frac{2AC_1}{OA}. \qquad (13.19')$$

Отсюда видно, что основным недостатком фазовой модуляции, получаемой путём преобразования амплитудной модуляции, является затруднительность получения значительных индексов модуляции. При высоких требованиях к линейности модуляции приходится ограничиваться величиной $\Theta_{макс} \leqslant 10 \div 20^0$.

Примерно такой же результат получается при осуществлении модуляции фазы изменением расстройки колебательного контура в одной из усилительных ступеней, возбуждаемых стабильным по частоте генератором. Схема подобного фазового модулятора представлена на рис. 13.22. Реактивная лампа, с помощью которой осуществляется изменение резонансной частоты контура, включена параллельно контуру в анодной цепи усилительной лампы. Все приведённые в § 13.4 соображения о режиме работы реактивной лампы, способе возбуждения её и т. д., полностью приложимы к данному случаю с той лишь разницей, что изменение резонансной

частоты контура при постороннем возбуждении приводит не к изменению частоты (определяемой задающим генератором), а к изменению фазы напряжения на контуре.

Связь между относительным изменением резонансной частоты контура $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ и фазовым изменением легко может быть установлено на основании уравнения фазовой характеристики контура (см. § 4.7):

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right).$$

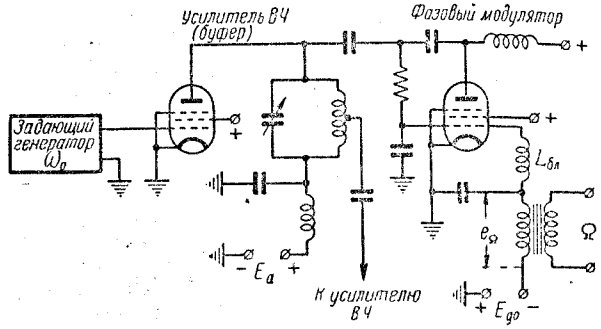


Рис. 13.22

Приравнивая $\varphi = \Theta$, $\omega_p = \omega_0$ и подставляя $\Delta\omega = \omega_д \cos\Omega t$, получим

$$\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\cos\Omega t\right) \qquad (13.20)$$

и

$$\Theta_{макс} = m = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right). \qquad (13.21)$$

Из сравнения полученных выражений с выражениями (13.18) и (13.19) видно, что с точки зрения максимальных фазовых отклонений, в пределах которых модуляция линейна, рассматриваемый способ не отличается от способа, основанного на преобразовании амплитудной модуляции. Полагая $\Theta_{макс} \leqslant 0{,}2 \div 0{,}3$ радиан, получаем

$$\Theta_{макс} \approx \frac{2\omega_д}{\omega_0} Q$$

и

$$\Theta = \Theta_{макс}\cos\Omega t.$$

Для получения требуемого индекса модуляции реактивная лампа должна обеспечивать расстройку контура в пределах

$$\frac{2\omega_д}{\omega_0} = \frac{\Theta_{макс}}{Q}. \qquad (13.22)$$

Отсюда следует, что для облегчения требований к реактивной лампе выгодно увеличивать добротность контура. Например, при $Q = 200$ и $m \approx 0{,}5$ требуется

$$\frac{2\omega_д}{\omega_0} \approx \frac{0{,}5}{200} = 2{,}5 \cdot 10^{-3},$$

что легко может быть достигнуто с помощью реактивной лампы.

Наряду с отмеченным выше недостатком (малые $\Theta_{макс}$), крупным достоинством рассматриваемых способов модуляции является возможность обеспечения высокой стабильности средней частоты ω_0. Задающий генератор, работающий на фиксированной частоте, может быть стабилизован, например, с помощью кварца.

Для сохранения этого преимущества и получения больших значений $\Theta_{макс}$ иногда применяют многократное умножение частоты. При умножении частоты в n раз в такое же число раз возрастает и фазовая девиация выходного колебания. Действительно, если подводимое к сетке лампы умножителя напряжение сдвинуть по фазе на угол $\Theta_1 = \omega_1 t$, то импульс анодного тока будет сдвинут во времени на величину t. По отношению к n-й гармонике анодного тока этот временной сдвиг означает фазовый сдвиг $\Theta_n = \omega_n t_1 = n\omega_1 t_1 = n\Theta_1$.

Фазовую модуляцию в пределах $\Theta_{макс} \leqslant 15^0 \div 20^0$ с последующим многократным умножением частоты иногда применяют для получения частотной модуляции. Для этого, как отмечалось в гл. 3, на входе фазового модулятора необходимо включить корректирующее устройство, осуществляющее интегрирование модулирующего напряжения, т. е. четырёхполюсник с частотной характеристикой, обратно пропорциональной частоте модуляции Ω.

ГЛАВА 14

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ

§ 14.1. Вводные замечания

Процесс детектирования колебаний заключается в выделении управляющего сигнала, тем или иным способом наложенного на высокочастотное колебание. Детектирование является процессом, обратным процессу модуляции. В тех случаях, когда требуется подчеркнуть это обстоятельство, наряду с термином „детектирование" (обнаружение), применяют термин „демодуляция" колебаний. Соответственно основным видам модуляции различают амплитудное, частотное и фазовое детектирование. Последние два вида детектирования, в виду тесной связи, имеющейся между частотой и фазой колебания, часто осуществляются мало различающимися между собой устройствами.

На вход детектора подаётся модулированное колебание, содержащее только высокочастотные составляющие: несущее колебание и боковые частоты модуляции. На выходе же выделяется напряжение с низкочастотным спектром первичного сигнала. Следовательно, детектирование сопровождается трансформацией частотного спектра и не может быть осуществлено без применения нелинейных систем или же линейных систем, но с переменными параметрами. В настоящее время широко применяются детекторы с нелинейными элементами. В качестве таковых применяются электронные лампы—диоды, триоды и т. д., а также кристаллические диоды.

§ 14.2. Амплитудное детектирование. Диодный детектор

Принцип детектирования амплитудно-модулированных колебаний может быть пояснён с помощью обобщённой схемы, представленной на рис. 14.1. На входе детектора действует высокочастотное колебание с несущей частотой ω_0 и амплитудой $E(t)$, изменяющейся по закону передаваемого сигнала. Нелинейный элемент обозначен через $Д$. Напряжение выхода $u_{вых}(t)$, снимаемое с линейной нагрузки,

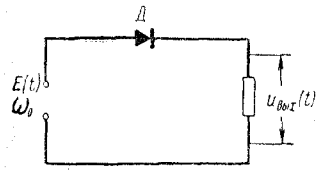


Рис. 14.1

определённым образом связано с амплитудой $E(t)$. Характер этой связи определяется формой характеристики нелинейного элемента $Д$, исходным положением рабочей точки на характеристике и амплитудой подводимых к детектору колебаний.

Рассмотрение работы амплитудного детектора удобнее всего начинать с детектирования слабых колебаний. Допустим, что в качестве нелинейного элемента используется диод и рабочая точка установлена на нижнем сгибе характеристики диода (рис. 14.2). Исходное постоянное напряжение, соответствующее этой точке, обозначено через E_{a0}. Характеристику диода при работе на нижнем сгибе можно апроксимировать с помощью первых трёх членов ряда (10.5)

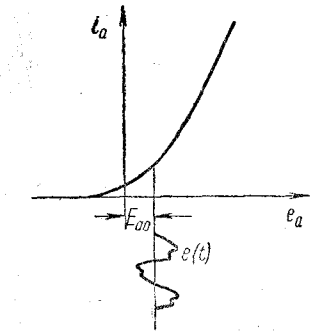


Рис. 14.2

$$i_a = i_{a0} + \alpha \Delta e_a + \beta (\Delta e_a)^2. \quad (14.1)$$

Здесь i_{a0} — анодный ток в отсутствие сигнала,
Δe_a — изменение анодного напряжения.

Приравняем Δe_a внешнему напряжению $e(t)$, подводимому к детектору. Это можно сделать, так как нагрузка детектора, как правило, является очень малым сопротивлением для высокой частоты. Таким образом,

$$\Delta e_a = e(t) = E(t) \cos \omega_0 t \quad (14.2)$$

и

$$i_a = i_{a0} + \alpha e + \beta e^2 =$$
$$= i_{a0} + \alpha E(t) \cos \omega_0 t + \beta E^2(t) \cos^2 \omega_0 t. \quad (14.3)$$

Учитывая, что $\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t$, переписываем выражение (14.3) в форме

$$i_a = i_{a0} + \alpha E(t) \cos \omega_0 t + \frac{\beta E^2(t)}{2} \cos 2\omega_0 t. + \frac{\beta E^2(t)}{2} \quad (14.3')$$

Приращение анодного тока, обусловленное действием эдс $e(t)$, состоит из:

— составляющей с частотой ω_0 и огибающей $\alpha E(t)$,
— составляющей с частотой $2\omega_0$ и огибающей $\frac{\beta E^2(t)}{2}$ и
— низкочастотной составляющей $\frac{\beta E^2(t)}{2}$.

Полезный сигнал содержится в последнем слагаемом, первые же два (высокочастотные) являются при детектировании бесполезными и должны быть отфильтрованы. Эти требования выполняются при использовании в качестве нагрузки детектора параллельного соединения омического сопротивления и ёмкости. В результате приходим к схеме диодного детектора, представленной на рис. 14.3. Если сопротивление конденсатора C для частоты ω_0 мало по сравнению с R, т. е.

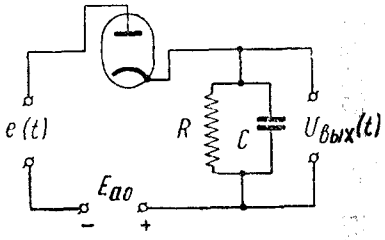


Рис. 14.3

$$\frac{1}{\omega_0 C} \ll R, \qquad (14.4)$$

то напряжение, создаваемое на нагрузке детектора высокочастотными составляющими анодного тока мало, и напряжение выхода создаётся, практически, только низкочастотной составляющей тока

$$\Delta i_{a\,нч} = \frac{\beta E^2(t)}{2}. \qquad (14.5)$$

Так как эта составляющая пропорциональна квадрату амплитуды входного напряжения, то при малых амплитудах детектирование является квадратичным. Из предыдущего ясно, что детектирование малых амплитуд возможно только при работе на нелинейном (квадратичном) участке вольтамперной характеристики лампы. Это положение справедливо как для диода, так и для любого другого нелинейного элемента, используемого для детектирования слабых колебаний.

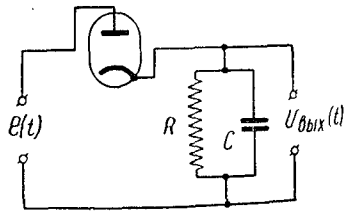


Рис. 14.4

Следуеть отметит, что показанный на рис. 14.3 источник постоянного напряжения E_{a0} не является обязательным и в реальных схемах применяется редко. При очень слабых колебаниях рабочая точка может быть установлена в точке $e_a = 0$ и схема принимает вид, представленный на рис. 14.4.

Обратимся к анализу выходного напряжения при квадратичном детектировании. Так как напряжение на нагрузке, являющейся линейной цепью, пропорционально приращению Δi_a, то $U_{вых}$ пропорционально квадрату амплитуды входного сигнала. Это обстоятельство не является препятствием к правильному воспроизведению формы импульсных (прямоугольных) сигналов. Пусть, например, напряжение на входе детектора имеет характер высокочастотных импульсов с прямоугольной огибающей (рис. 14.5*а*). Среднее значение анодного тока диода показано на рис. 14.5*б*. В интервалах между импульсами этот ток совпадает с „током покоя" i_{a0}, а при наличии импульсов отличается на величину

$$\Delta i_a = \frac{\beta E^2}{2}, \qquad (14.6)$$

где E представляет собой амплитуду высокочастотного напряжения, неизменную в пределах длительности импульса τ_0.

Напряжение на нагрузке детектора показано на рис. 14.5*в*. В те отрезки времени, когда процесс заряда или разряда конденсатора C закончен, напряжение на нагрузке равно $i_{a0}R$ (в интервале между импульсами) или $(i_{a0} + \Delta i_a)R$ (при наличии сигнала). На рис. 14.5*г* показано отдельно приращение напряжения, создаваемое сигналом. Для отделения этого приращения от постоянного напряжения $i_{a0}R$ может быть использована разделительная цепь, составленная из ёмкости и сопротивления.

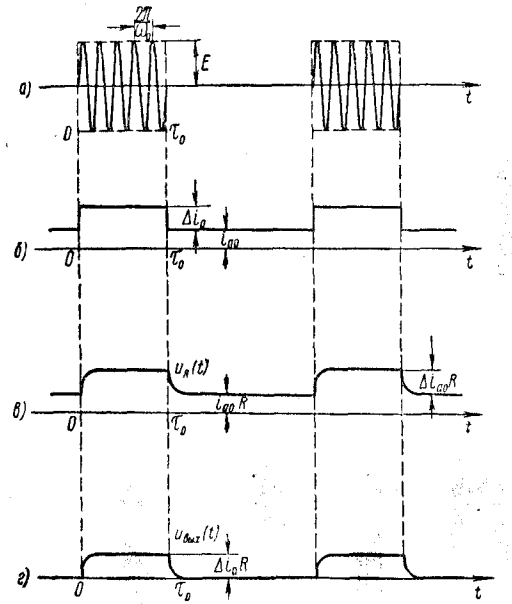


Рис. 14.5

Представленное на рис. 14.5*г* напряжение по форме мало отличается от огибающей высокочастотного напряжения, действующего на входе детектора. Таким образом, убеждаемся, что квадратичный закон детектирования не препятствует воспроизведению формы прямоугольных импульсов. Нелинейность характеристики детектирования в данном случае проявляется лишь в том, что амплитуда импульса на выходе детектора пропорциональна квадрату амплитуды высокочастотного напряжения на входе детектора.

Иначе обстоит дело при квадратичном детектировании колебаний, огибающая которых модулирована такими сигналами как речь, музыка и т. д. Для упрощения рассуждений рассмотрим случай тональной модуляции. Подставив в выражение (14.5)

$$E(t) = E_0(1 + M \sin \Omega t),$$

получим

$$\Delta i_{a\,нч} = \frac{\beta}{2} E_0^2 (1 + M \sin \Omega t)^2 =$$

$$= \frac{\beta}{2} E_0^2 (1 + 2 M \sin \Omega t + M^2 \sin^2 \Omega t) =$$

$$= \frac{\beta}{2} E_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} + 2 M \sin \Omega t - \frac{M^2}{2} \cos 2 \Omega t\right). \qquad (14.7)$$

Заметим, что в отсутствие модуляции ($M = 0$), т. е. когда на детектор действует одно лишь колебание несущей частоты, приращение анодного тока равно $\frac{\beta}{2} E_0^2$. Таким образом, при возникновении тональной модуляции среднее значение анодного тока получает постоянное по величине относительное приращение, равное $\frac{M^2}{2}$. Переменная часть тока седержит следующие два слагаемых:

а) полезное, воспроизводящее сигнал, $2M \sin \Omega t$ и

б) вредное, являющееся второй гармоникой сигнала, $\frac{M^2}{2} \cos 2 \Omega t$.

Отсюда следует, что коэффициент нелинейных искажений, равный в данном случае отношению амплитуды второй гармоники к амплитуде первой, равен

$$K_{f_2} = \frac{\frac{M^2}{2}}{2M} = \frac{M}{4}.$$

При стопроцентной модуляции получается

$$K_{f_2} = 0{,}25 = 25\%.$$

При одновременной модуляции двумя частотами Ω_1 и Ω_2 в выходном напряжении детектора наряду с гармониками $2\Omega_1$ и $2\Omega_2$ возникают ещё комбинационные частоты вида $\Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_1 - \Omega_2$ с амплитудами, пропорциональными квадрату парциальных коэффициентов модуляции M_1 и M_2. Этот результат нетрудно получить, если в выражение (14.5) подставить

$$E(t) = E_0 (1 + M_1 \sin \Omega_1 t + M_2 \sin \Omega_2 t). \qquad (14.8)$$

При передаче сложных сигналов, содержащих большое число частот, гармоники и комбинационные частоты оказывают, при глубокой модуляции, очень сильное влияние на разборчивость и тембр сигнала. Поэтому применение квадратичного детектирования нецелесообразно в тех случаях, когда требуется неискажённое воспроизведение сигналов (речь, музыка и т. д.).

Переходим к рассмотрению детектирования больших амплитуд. Как и ранее, имеется в виду диодный детектор. Не изменяя схемы, представленной на рис. 14.4, рассмотрим сперва

воздействие на детектор немодулированной эдс. Такой режим характерен, в частности, для однополупериодного кенотронного выпрямителя. Диаграмма напряжений и токов в анодной цепи диода представлена на рис. 14.6. Напряжение выхода представляет собой пульсирующую около среднего значения $U_{0\,вых}$ функцию (рис. 14.6*а*). Это напряжение является отрицательным по отношению к диоду, т. е. приложено плюсом на катод, а минусом на анод диода. Поэтому ток через диод возможен только в течение отрезков периода, когда положительная полуволна эдс превышает напряжение $u_{вых}(t)$. Иными словами, ток через диод имеет форму импульсов, показанных на рис. 14.6*б*.

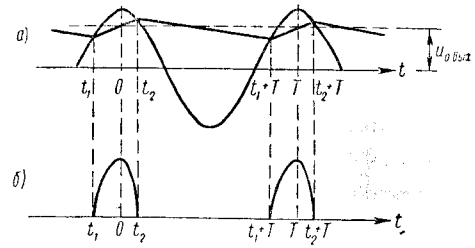


Рис. 14.6

В промежутках между импульсами анодного тока, когда происходит разряд конденсатора C через сопротивление R, напряжение $u_{вых}$ убывает. В промежутках $t_1 < t < t_2$ конденсатор подзаряжается импульсами анодного тока и $u_{вых}$ растёт. Если постоянная времени нагрузочной цепи велика по сравнению с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, т. е. если выполняется условие (14.4), то амплитуда пульсаций напряжения $u_{вых}$ мала и, в первом приближении, можно считать $u_{вых} \approx U_{0\,вых}$. Учитывая, что напряжение на нагрузке является по отношению к диоду „напряжением смещения", приходим к построению, представленному на рис. 14.7.

Нетрудно при сделанном выше допущении определить параметры импульсов анодного тока. Амплитуда импульсов, очевидно, будет

$$I_m = \frac{E - U_{0\,вых}}{R_i}, \qquad (14.9)$$

где R_i — внутреннее сопротивление диода, а угол отсечки определяется выражением

$$\cos \Theta = \frac{U_{0\,вых}}{E}. \qquad (14.10)$$

Так как выпрямленное напряжение связано с постоянной слагающей тока I_{a0} соотношением

$$U_{0\,вых} = I_{a0} R, \qquad (14.11)$$

$$I_{a0} = \alpha_0 I_m, \qquad (14.12)$$

где α_0 — коэффициент постоянной составляющей импульсного тока [см. ф-лу (11.7)], то на основании выражений (14.9) — (14.12) нетрудно установить связь между параметрами схемы и углом отсечки анодного тока. Из ур-ния (14.9) находим

$$E = U_{0\,вых} + I_m R_i .$$

Используя ур-ния (14.10), (14.11) и (14.12), получаем

$$\frac{E}{U_{0\,вых}} = \frac{1}{\cos\Theta} = 1 + \frac{I_m R_i}{I_{a0} R} = 1 + \frac{1}{\alpha_0} \cdot \frac{R_i}{R},$$

отсюда

$$\frac{R_i}{R} = \frac{1-\cos\Theta}{\cos\Theta}\,\alpha_0.$$

Учитывая, что в соответствии с ф-лой (11.7)

$$\alpha_0 = \frac{\sin\Theta - \Theta\cos\Theta}{\pi(1-\cos\Theta)},$$

окончательно получаем следующее выражение:

$$\frac{R_i}{R} = \frac{(\sin\Theta - \Theta\cos\Theta)}{\pi\cos\Theta} = \frac{\operatorname{tg}\Theta - \Theta}{\pi}. \qquad (14.13)$$

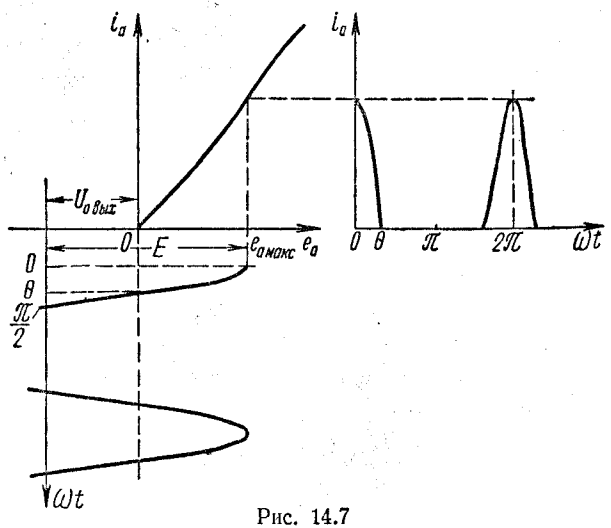


Рис. 14.7

Итак, задание внутреннего сопротивления диода R_i и сопротивления нагрузки R однозначно определяет угол отсечки Θ. При этом предполагается, что ёмкость C, шунтирующая сопротивление R, отвечает условию (14.4), так как только в этом случае

напряжение на выходе можно считать близким к постоянному. Уравнение (14.13), связывающее угол отсечки Θ с отношением $\frac{R_i}{R}$, является трансцендентным. Поэтому определение Θ удобно производить по графику, представляющему собой зависимость отношения $\frac{R_i}{R}$ от Θ. Этот график построен на рис. 14.8. Интересно рассмотреть два предельных случая: 1) $\Theta = 0$ и 2) $\Theta = 90°$. Первый случай получается при $\frac{R_i}{R} \to 0$, т. е. при бесконечно большом сопротивлении нагрузки R, когда схема детектора вырождается в схему, представленную на рис. 14.9. При этом выпрямленное напряжение на конденсаторе C достигает наибольшей возможной величины $U_{0\,вых} = E$ и ток через диод в установившемся режиме, когда закончен процесс зарядки конденсатора, равен нулю. Таким образом, случай $\Theta = 0$ соответствует „холостому ходу".

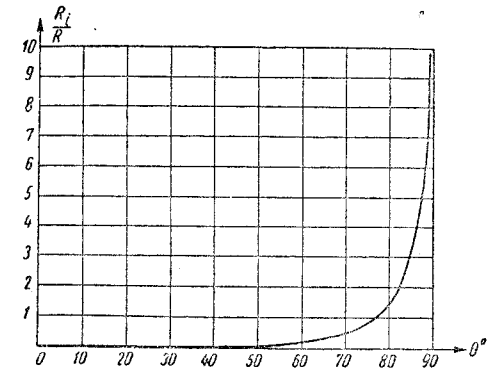


Рис. 14.8

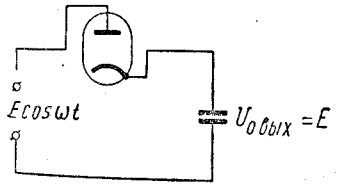


Рис. 14.9

Второй случай ($\Theta = 90°$) соответствует режиму „короткого замыкания" нагрузки, т. е. $R \to 0$. При этом вся эдс оказывается приложенной к диоду и ток последнего принимает форму полуволновых импульсов (или усечённых в верхней части, если E больше, чем напряжение насыщения). Если не учитывать действие ёмкости, что допустимо при малых R, приходим к схеме, представленной на рис. 14.10. Напряжение на нагрузке совпадает в этом случае по форме с импульсами тока i_a.

Из приведённых соображений видно, что для получения на выходе выпрямленного напряжения, близкого по величине к амплитуде эдс E, угол отсечки Θ должен

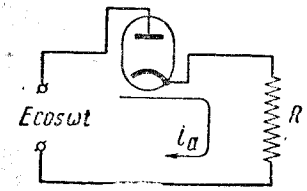


Рис. 14.10

быть относительно мал, а отношение $\frac{R}{R_i}$ весьма велико. При $\Theta \leqslant 10° \div 20°$ получим

$$\frac{U_{0\,вых}}{E} = \cos\Theta \geqslant 0{,}9.$$

Для получения такого режима требуется сопротивление нагрузки $R \approx 100\ R_i$.

После того как найдено R, требуемая ёмкость C может быть определена с помощью условия (14.4).

Переходим к рассмотрению работы детектора „больших амплитуд" при модуляции. Так как напряжение $U_{0\,вых}$ при выполнении найденных выше условий почти совпадает с амплитудой эдс, то в процессе модуляции напряжение изменяется по закону, почти совпадающему с законом изменения огибающей, т. е. по закону передаваемого сигнала. Таким образом, связь между выходным напряжением (выпрямленным) $U_{0\,вых}$ и амплитудой входной эдс получается почти линейной. В этом смысле детектор,

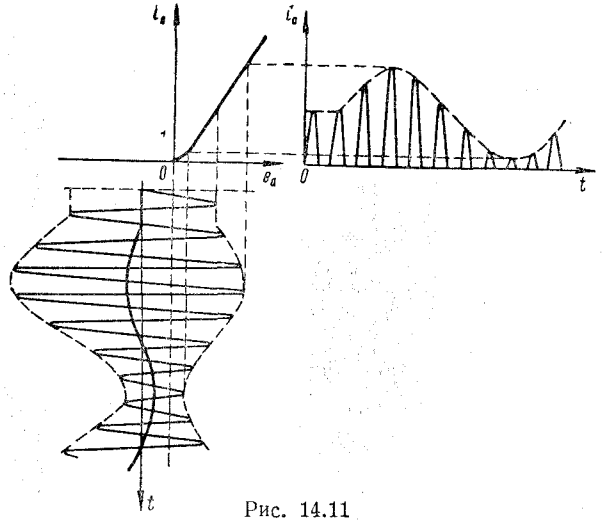


Рис. 14.11

работающий в режиме больших амплитуд и с нагрузкой, обеспечивающей близкое совпадение напряжений $U_{0\,вых}$ и E, называется линейным детектором. При этом не следует, конечно, упускать из вида, что детектор, работающий с отсечкой анодного тока, является сугубо нелинейным устройством.

Режим линейного детектирования тонально модулированных колебаний поясняется построением, представленным на рис. 14.11. Диаграммы напряжений на входе и выходе детектора отдельно показаны на рис. 14.12.

Режим модуляции накладывает на выбор элементов нагрузки детектора дополнительные ограничения. Необходимо, чтобы постоянная времени цепи нагрузки была мала по сравнению с периодом модуляции. В противном случае изменение выпрямленного напряжения на нагрузке может отставать от изменения огибающей

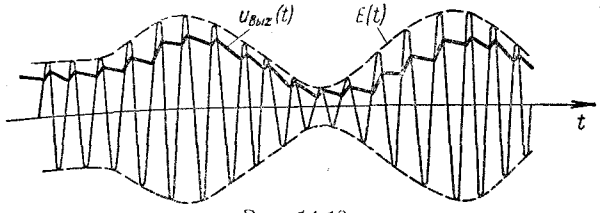


Рис. 14.12

входной эдс. Подобный режим представлен на рис. 14.13. На участке $а$—$б$ из-за чрезмерно большой инерционности цепи R, C напряжение $u_{вых}$ отстаёт в своём росте от огибающей эдс. В точке $б$, где $u_{вых}$ и амплитуда модулированной эдс уравниваются, ток через диод прекращается и рост $u_{вых}$ прекращается. На участке $б$—$в$ источник эдс и диод не оказывают никакого влияния на нагрузочную цепь и в последней происходит разряд конденсатора C через сопротивление R. Таким образом, на участке $б$—$в$ напряжение $u_{вых}$ является экспонентой. Получается нелинейное искажение сигнала. Так как эти искажения обусловлены тесным взаимодействием нелинейного элемента (диод) с линейной системой (R, C),

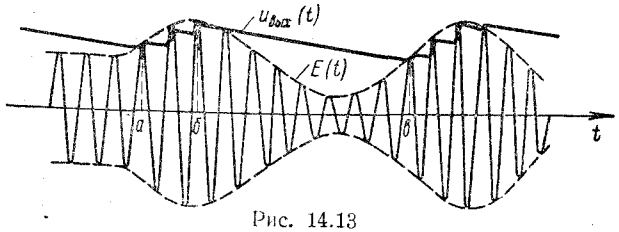


Рис. 14.13

степень нелинейных искажений зависит не только от параметров системы и от глубины модуляции, но также от частоты модуляции. Как показал В. И. Сифоров[1], эти искажения возрастают с повышением частоты, а также глубины модуляции входной эдс.

Для устранения рассматриваемых искажений необходимо, чтобы

$$RC \ll \frac{2\pi}{\Omega}. \qquad (14.14)$$

[1] В. И. Сифоров „Анализ искажений в диодном детекторе, работающем на сложную нагрузку". „Электросвязь", вып. I, 1939.

Совмещая условия (14.4) и (14.14), получаем

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll RC \ll \frac{2\pi}{\Omega}. \qquad (14.15)$$

Левая часть этого неравенства предусматривает требование отфильтровывания высокочастотных составляющих анодного тока диода, а правая — требование воспроизведения огибающей модулированной эдс. Так как частоты ω_0 и Ω обычно сильно различаются ($\Omega \ll \omega_0$), то выполнение условия (12.15) не встречает затруднений.

При импульсной модуляции огибающей, в правой части неравенства (14.15) вместо периода модуляции $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$ следует подставлять длительность импульса.

Диодное детектирование находит широкое применение не только в радиоприёмных устройствах, но и в измерительных приборах (катодные вольтметры и др.).

Рассмотрим, в заключение, вопрос о входном сопротивлении диодного детектора, т. е. о сопротивлении последовательной цепи диод — нагрузка (R, C). Этот вопрос имеет существенное значение для определения затухания вносимого детектором в колебательный контур источника напряжения.

Используя результаты, полученные при определении потерь в цепи сетки усилителя (§ 11.4), можно написать для мощности, потребляемой цепью детектора от источника, следующее выражение:

$$P_\Omega = \frac{EI_{a_1}}{2}, \qquad (14.16)$$

где

$$I_{a_1} = \alpha_1 I_m$$

является амплитудой первой гармоники анодного тока диода.

Отсюда следует, что сопротивление детектора, отнесённое к первой гармонике тока, имеющей частоту источника возбуждения, равно

$$R_э = \frac{E}{I_{a_1}}.$$

Учитывая, что $E = \frac{U_{0\ вых}}{\cos\Theta}$, $I_{a_1} = \alpha_1 I_m = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} I_{a0}$ и $\frac{U_{0\ вых}}{I_{a0}} = R$, получим

$$R_э = \frac{U_{0\ вых}}{\cos\Theta} \cdot \frac{\alpha_0}{I_{a0}\alpha_1} = R\ \frac{\alpha_0}{\cos\Theta\,\alpha_1} = R\ \frac{\sin\Theta - \Theta\cos\Theta}{\cos\Theta(\Theta - \sin\Theta\cos\Theta)} =$$

$$= R\ \frac{\operatorname{tg}\Theta - \Theta}{\Theta - \sin\Theta\cos\Theta} = Rf(\Theta) \qquad (14.17)$$

График функции $\frac{R_э}{R} = f(\Theta)$ изображён на рис. 14.14. Как видим, при $\Theta = 10° - 30°$ входное сопротивление детектора в два раза меньше, чем сопротивление нагрузки детектора.

Это предельное соотношение можно получить и другим, более наглядным способом.

При $R \gg R_i$ практически вся мощность, забираемая детектором, выделяется на сопротивлении нагрузки R. Приравнивая эти мощности, получим

$$\frac{EI_{a1}}{2} \approx U_{0\ вых} I_{a0}$$

или, поделив и правую и левую части на E^2, получим:

$$\frac{I_{a1}}{2E} = \frac{1}{2R_э} \approx \frac{U_{0\ вых}}{E}\ \frac{I_{a0}}{E}.$$

Так как при $R \gg R_i$ угол Θ мал, $\cos\Theta \approx 1$ и $E \approx U_{0\ вых}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2R_э} \approx \frac{I_{a0}}{U_{0\ вых}} = \frac{1}{R}$$

и

$$R_э \approx \frac{1}{2} R.$$

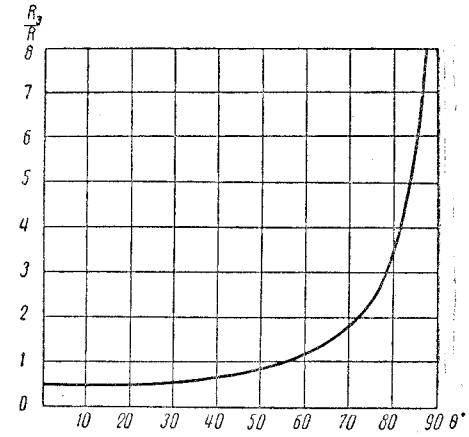


Рис. 14.14

§ 14.3. Амплитудное детектирование. Сеточный и анодный детекторы

Наряду с диодными детекторами в некоторых случаях применяются „сеточные" и „анодные" детекторы. Схема сеточного детектора представлена на рис. 14.15. Модулированное колебание подводится к сеточной цепи лампы, а продукт детектирования — напряжение, изменяющееся по закону передаваемого сигнала, — снимается с нагрузки, включённой в анодную цепь лампы. На рис. 14.15 такой нагрузкой является цепь R_a, C_a. Процесс детектирования в рассматриваемой схеме осуществляется в цепи сетки лампы. Нелинейным элементом является промежуток сетка — катод лампы. Если пренебречь реакцией анодной цепи на изменение сеточного тока, то цепь сетки можно рассматривать как обычный диодный детектор, в котором роль диода выполняет промежуток сетка — катод, а нагрузкой является параллельное соединение R_g, C_g.

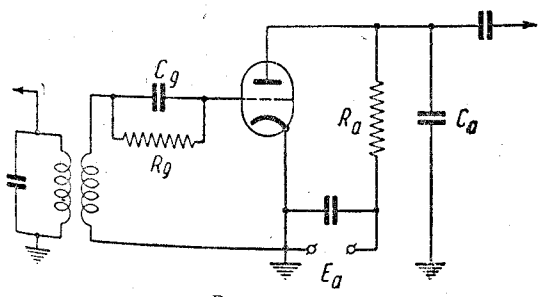


Рис. 14.15

При правильном выборе R_g и C_g (см. предыдущий параграф) создаваемое на этой нагрузке напряжение смещения совпадает по форме с огибающей входной эдс, т. е. представляет собой низкочастотное напряжение сигнала.

Так как к сетке лампы приложены оба напряжения: высокочастотное колебание (через ёмкость C_g, представляющую малое сопротивление для частоты ω_0) и низкочастотное, создаваемое на нагрузке R_g, C_g, то анодный ток изменяется по сложному закону. Как показано на рис. 14.16, анодный ток пульсирует с час-

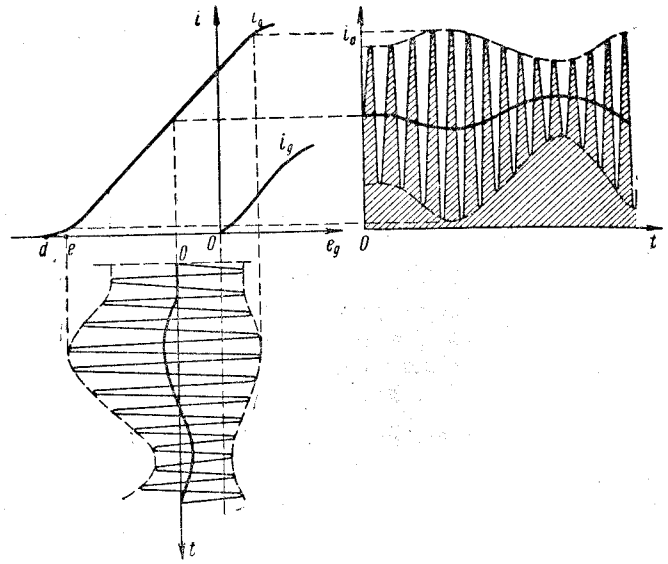


Рис. 14.16

тотой ω_0 относительно среднего значения (жирная линия). Если полное изменение сеточного напряжения не выходит за пределы линейной части характеристики анодного тока (рис. 14.16), то среднее значение этого тока изменяется по закону, совпадающему с изменением напряжения смещения, т. е. с изменением огибающей амплитуд модулированного колебания. Так как нагрузка в анодной цепи лампы является апериодической и ёмкость C_a отфильтровывает высокочастотную составляющую анодного тока, то напряжение на выходе детектора создаётся одной лишь низкочастотной составляющей.

Нетрудно видеть, что при сеточном детектировании лампа выполняет двойную роль: детектирование (за счёт сеточного тока) и усиление продетектированного напряжения. В зависимости от величины амплитуды входного напряжения детектирование за счёт сеточного тока может быть „квадратичным“ (при малых ампли-

тудах) или „линейным“. В этом отношении сеточный детектор не отличается от диодного. Некоторой особенностью сеточного детектора является лишь ограничение, накладываемое на предельную амплитуду входной эдс условием работы на линейном участке характеристики анодного тока. Для устранения искажений необходимо, чтобы рабочая точка при изменении сеточного напряжения не достигала нижнего сгиба характеристики (участок $d-e$ на рис. 14.16).

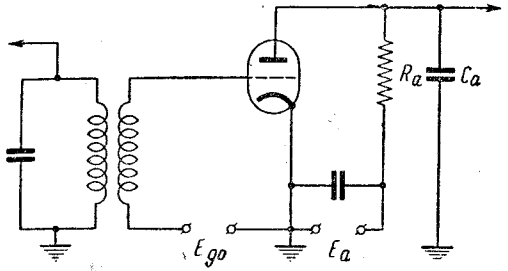


Рис. 14.17

Схема анодного детектора представлена на рис. 14.17. В данном случае напряжение смещения фиксируется с помощью источника постоянного напряжения E_{g0}, причём исходное положение рабочей точки подбирается из условия устранения сеточных токов. Детектирование осуществляется за

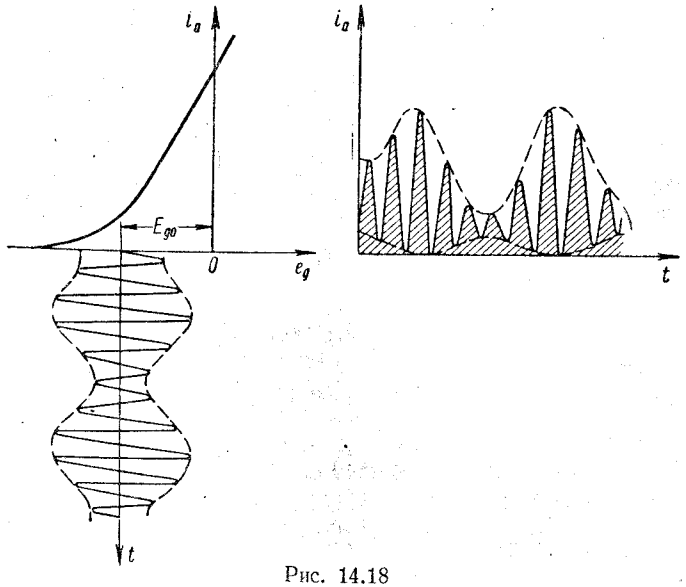


Рис. 14.18

счёт нелинейности характеристики анодного тока. Эта нелинейность может быть использована двояко: при малых амплитудах и при больших амплитудах. В первом случае рабочая точка устанавливается на нижнем сгибе (рис. 14.18), где характеристика имеет

вид параболы и анодный ток может быть апроксимирован выражением, аналогичным ур-нию (10.5). Такой режим приводит к квадратичному детектированию.

При больших амплитудах необходимая для детектирования нелинейность устройства обеспечивается благодаря работе с отсечкой анодного тока; кривизна самой характеристики при этом существенного значения не имеет. Такой режим, приводящий к „линейному" детектированию, представлен на рис. 14.19. Нетрудно убедиться, что для неискажённого детектирования угол отсечки анодного тока (как и в случае усиления модулированных

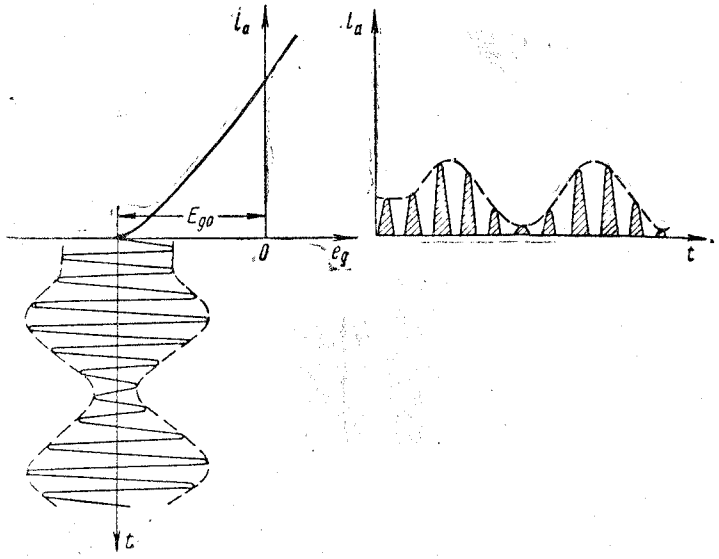


Рис. 14.19

колебаний, § 11.2) должен быть близок к 90°. В этом случае угол отсечки не зависит от амплитуды подводимого к сетке модулированного колебания и среднее значение анодного тока будет

$$I_{a0} = \alpha_0 (90°)\, I_m = \frac{1}{\pi}\, I_m.$$

Так как амплитуда импульсов I_m изменяется пропорционально амплитуде сеточного напряжения, то I_{a0}, а следовательно, и напряжение на нагрузочном сопротивлении R_a, линейно связаны с огибающей модулированного колебания.

Высокочастотные составляющие анодного тока, как и в ранее разобранных схемах, отфильтровываются ёмкостью, шунтирующей нагрузочное сопротивление.

§ 14.4. Частотное детектирование

Напряжение на выходе частотного детектора должно воспроизводить закон изменения мгновенной частоты модулированного колебания. Представив последнее в форме

$$e(t) = E(t) \sin [\omega_0 t + \Theta(t)], \tag{14.18}$$

получим для идеального частотного детектора следующую функциональную связь:

$$u_{вых} = S_{ч.д} \frac{d\Theta}{dt} = S_{ч.д}\, \Delta\omega(t), \tag{14.19}$$

где $\Delta\omega(t) = \frac{d\Theta}{dt}$ представляет собой мгновенное значение частотного отклонения входной эдс, а $S_{ч.д} = \text{const}$ — крутизну характеристики детектора, выраженную в вольтах на единицу угловой частоты. Если пользоваться частотами $f = \frac{\omega}{2\pi}$, то, обозначая соответствующую крутизну через $S_{ч.д}$, получим

$$u_{вых} = S_{ч.д}\, \Delta f(t). \tag{14.19'}$$

Здесь $S_{ч.д}$ имеет размерность $\left[\frac{в}{гц}\right]$.

Предполагается, что $\Delta f(t)$, а, следовательно, и $u_{вых}$ являются „медленными" функциями времени. Для выделения $u_{вых}$ из частотно-модулированного колебания, спектр которого состоит только из высокочастотных составляющих (несущая частота ω_0 и боковые частоты модуляции), принципиально необходимо нелинейное устройство[1]. Следовательно, частотный детектор обязательно должен включать в себя нелинейный элемент. Однако, в отличие от амплитудного детектора, одного лишь нелинейного элемента недостаточно для образования частот первичного сигнала. Действительно, из рассмотрения вольт-амперных характеристик нелинейных элементов видно, что при постоянстве амплитуды входного напряжения нелинейный элемент не реагирует на изменение частоты этого напряжения. Иными словами, нелинейность таких устройств как диод, триод и т. д. проявляются лишь при изменении величины действующего на них напряжения, но не при изменении частоты или, в общем случае, скорости изменения сигнала. Обычный частотный детектор представляет собой поэтому сочетание следующих двух основных частей: 1) избирательная линейная система, преобразующая частотную модуляцию в амплитудную и 2) амплитудный детектор.

[1] См. § 14.1, где упоминается принципиальная возможность осуществления детектирования с помощью линейных систем с переменными параметрами.

При правильном построении схемы частотного детектора изменение амплитуды входной эдс не должно влиять на величину выходного напряжения. Поэтому в состав частотного детектора входит обычно устройство для ограничения амплитуды входной эдс. Иногда ограничение осуществляется путём установления специального режима работы усилительной лампы, входящей в состав частотного детектора.

В качестве линейной системы может быть использована любая электрическая цепь, обладающая неравномерной частотной характеристикой: цепи rL, rC, фильтры, колебательные контуры и т. д. В высокочастотной технике исключительное распространение получили колебательные системы. Схема частотного детектора, содержащего простой колебательный контур, представлена на рис. 14.20.

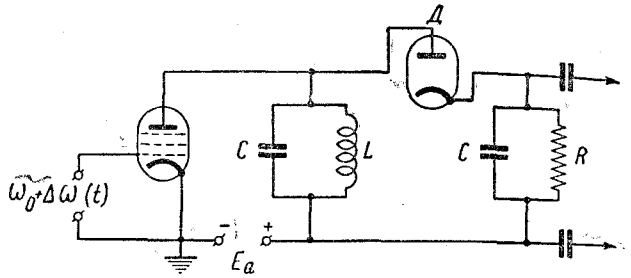


Рис. 14.20

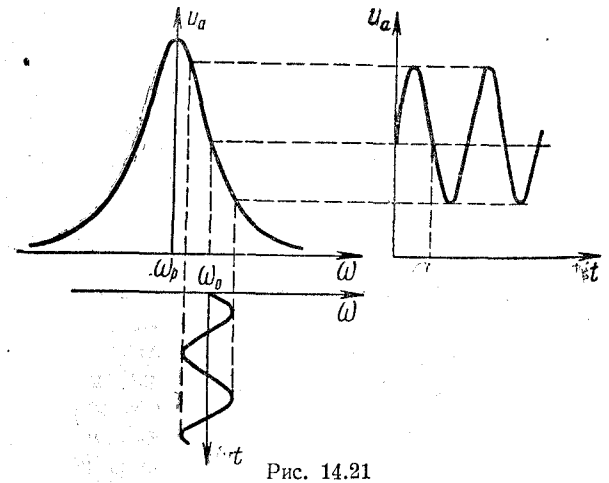


Рис. 14.21

Если резонансная частота контура отличается от средней частоты ω_0 модулированного колебания, то изменение амплитуды напряжения на контуре U_a повторяет, в известных пределах, изменение частоты входного напряжения (приложенного к сетке лампы).

Положение точек ω_0 и ω_p на оси частот, а также изменение U_a для случая синусоидальной модуляции частоты, показано на рис. 14.21. Изменение амплитуды U_a высокочастотного напряжения с помощью диода $Д$ преобразуется в низкочастотное напряжение, которое выделяется на апериодической нагрузке R, C. Отметим, попутно, что при точной настройке контура на частоту ω_0 сигнал искажается: частота изменения огибающей получается вдвое выше, чем частота полезной модуляции. В исходном положении, т. е. в отсутствие модуляции, рабочая точка должна устанавливаться на скате резонансной кривой.

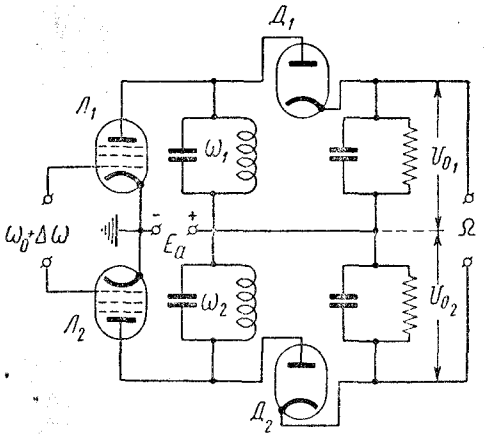


Рис. 14.22

Детектор с одиночным контуром обладает весьма ограниченным линейным участком резонансной кривой. Значительно лучшие результаты могут быть получены от дифференциальной схемы, показанной на рис. 14.22.

В этой схеме напряжение на выходе детектора получается как разность двух выпрямленных напряжений U_{o1} и U_{o2}, создаваемых на сопротивлениях R_1 и R_2 лампами $Л_1$ и $Л_2$. Контуры этих ламп расстраиваются относительно средней частоты колебания на $\pm\Delta\omega_0$, благодаря чему амплитуды напряжений U_{a1} и U_{a2} (рис. 14.23) при частоте ω_0 приблизительно одинаковы и равны

$$U_{a1}=U_{a2}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}Q\right)^2}}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+a_0^2}}. \qquad (4.20)$$

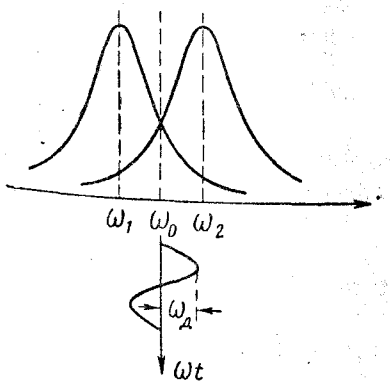


Рис. 14.23

Здесь U_{ap} — амплитуда напряжения при Резонансной частоте, $a_0=\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_p}Q$ — обобщённая расстройка.

При отклонении частоты подводимого колебания от номинального значения ω_0 на величину

$-\Delta\omega$, напряжение на контуре лампы $Л_1$, настроенном на частоту $\omega_1=\omega_0-\Delta\omega_0$, увеличивается (так как расстройка уменьшается: $\Delta\omega_0-\Delta\omega$, рис. 14.23) и становится равным

$$U_{a1}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+\left[\frac{2(\Delta\omega_0-\Delta\omega)Q}{\omega_p}\right]^2}}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+(a_0-a)^2}}, \qquad (14.21)$$

где

$$a=\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}Q.$$

По отношению к контуру лампы $Л_2$, настроенному на частоту $\omega_2=\omega_0+\Delta\omega_0$, наоборот, расстройка возрастёт до $\Delta\omega_0+\Delta\omega$, в связи с чем напряжение U_{a2} упадёт до величины:

$$U_{a2}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+\left[\frac{2(\Delta\omega_0+\Delta\omega)Q}{\omega_p}\right]^2}}=\frac{U_{ap}}{\sqrt{1+(a_0+a)^2}}. \qquad (14.21')$$

Разность напряжений будет равна

$$U_{a1}-U_{a2}=U_{ap}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(a_0-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+(a_0+a)^2}}\right]=$$
$$=U_{ap}\psi(a). \qquad (14.22)$$

Так как выпрямленные напряжения U_{o1} или U_{o2}, действующие на выходе, соответственно, первого и второго амплитудного детекторов, связаны с амплитудами U_{a1} и U_{a2} известными соотношениями (см. ф-лу 14.10):

$$U_{o1}=U_{a1}\cos\Theta,$$
$$U_{o2}=U_{a2}\cos\Theta,$$

то напряжение на выходе частотного детектора будет

$$u_\Omega=U_{o1}-U_{o2}=U_{ap}\cos\Theta\psi(a). \qquad (14.23)$$

Так как $\cos\Theta$ является величиной почти постоянной (и близкой к единице), то напряжение u_Ω пропорционально функции $\psi(a)$, определяемой уравнением:

$$\psi(a)=\frac{1}{\sqrt{1+(a_0-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+(a_0+a)^2}}. \qquad (14.24)$$

Графики функции $\psi(a)$ для ряда значений параметра a_0 построены на рис. 14.24.

Функция $\psi(a)$ представляет собой в некотором масштабе характеристику частотного детектора. Для нахождения напряжения U_Ω (вольты) в функции отклонения частоты Δf (герцы) ординаты должны быть умножены на $U_{ap}\cos\Theta$, а абсциссы на $\frac{f_0}{2Q}$.

Существенным недостатком рассмотренной схемы является необходимость настройки контуров на частоты, отличные от частоты

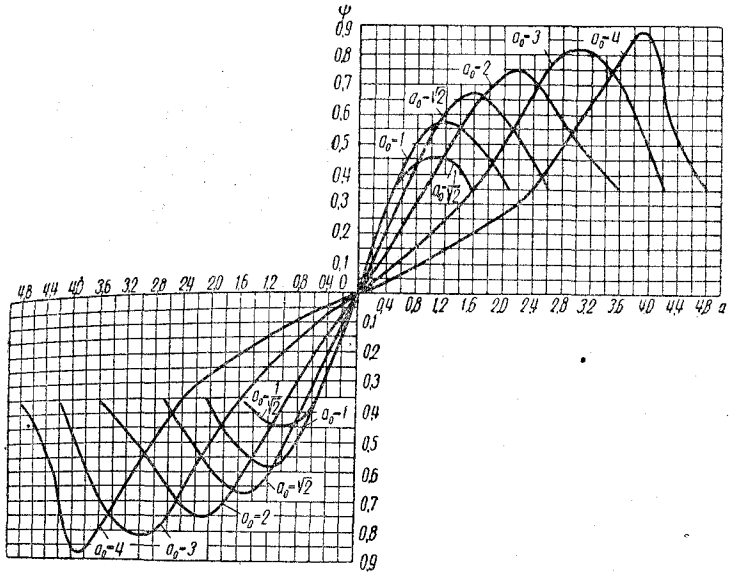


Рис. 14.24

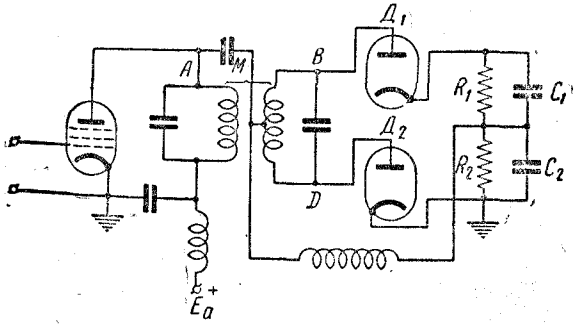


Рис. 14.25

немодулированного колебания. От этого недостатка свободна схема частотного детектора, представленная на рис. 14.25.

Эта схема, широко распространённая в приёмниках частотно-модулированных колебаний, а также в устройствах для автомати-

ческой подстройки частоты генераторов, содержит колебательную систему в виде двух связанных контуров, настроенных на частоту ω_0. Напряжение высокой частоты $\omega_0 \pm \Delta\omega$ подается на сетку пентода, а продектированное напряжение U_Ω выделяется на сопротивлениях R_1 и R_2. Принцип действия данного детектора поясняется эквивалентной схемой и векторной диаграммой, представленными на рис. 14.26 и 14.27.

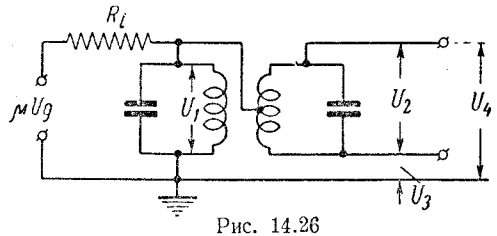


Рис. 14.26

Пусть U_1 напряжение на первом контуре, U_2 — на втором контуре, U_3 и U_4 — напряжения точек D и B относительно катода лампы (земля). Заметим, что U_3 и U_4 представляют собой амплитуды высокочастотных напряжений, приложенных, соответственно, к диодам $Д_2$ и $Д_1$. В отсутствие модуляции, когда частота входного напряжения совпадает с резонансными частотами контуров, напряжение U_2, развиваемое на втором контуре, сдвинуто по фазе на 90° относительно напряжения U_1.

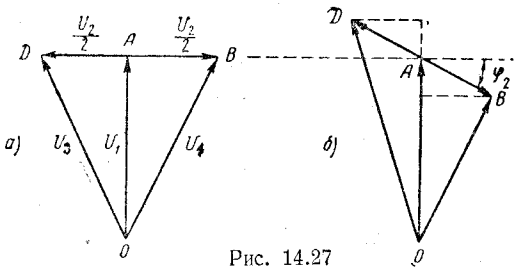


Рис. 14.27

Действительно, при индуктивной связи контуров имеем:

$$\vec{I}_2 = \frac{\frac{M}{L_1}\vec{U}_{1p}}{Z_2},$$

$$\vec{U}_2 = \vec{I}_2 \cdot \frac{1}{i\omega C_2} = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{1}{i\omega C_2 Z_2} \cdot \vec{U}_{1p}. \qquad (14.25)$$

Так как при $\omega = \omega_0 = \omega_p$ $Z_2 = r_2$, а $\frac{1}{\omega_0 C_2} \cdot \frac{1}{r_2} = Q_2$, получаем

$$\vec{U}_2 = -i\frac{M}{L_1} Q_2 \cdot \vec{U}_{1p}, \qquad (14.25')$$

т. е. напряжение $\vec{U}_2$ на 90° отстаёт от напряжения $\vec{U}_1$.

Обратимся к определению напряжений $\vec{U}_3$ и $\vec{U}_4$. Учитывая, что средняя точка второго контура присоединена по высокой частоте непосредственно к точке A и, следовательно, напряжение $\vec{U}_3$

является суммой напряжения $\vec{U}_1$ и половины напряжения $\vec{U}_2$, получаем

$$\vec{U}_3 = \vec{U}_{1p} + \frac{\vec{U}_2}{2} = \vec{U}_{1p} - i\frac{M}{L_1} Q_2 \cdot \frac{\vec{U}_{1p}}{2} = \vec{U}_{1p}\left(1 - i\frac{M}{L_1} \cdot \frac{Q_2}{2}\right). \qquad (14.26)$$

Аналогично, для напряжения $\vec{U}_4$ можем написать:

$$\vec{U}_4 = \vec{U}_{1p}\left(1 + i\frac{M}{L_1} \cdot \frac{Q_2}{2}\right). \qquad (14.27)$$

Модули напряжений $\vec{U}_3$ и $\vec{U}_4$ одинаковы и равны

$$U_3 = U_4 = U_{1p}\sqrt{1 + \left(\frac{M}{L_1} \cdot \frac{Q_2}{2}\right)^2}, \qquad (14.28)$$

а фазы симметричны относительно фазы напряжения $\vec{U}_1$. Соответствующая этому случаю векторная диаграмма представлена на рис. 14.27*а*. Так как выпрямленные напряжения U_{01} и U_{02}, действующие на сопротивлениях R_1 и R_2, пропорциональны амплитудам U_3 и U_4, то результирующее напряжение на выходе детектора, равное разности U_{01} и U_{02}, при резонансной частоте будет равно нулю.

Рассмотрим теперь векторную диаграмму напряжений при расстройке. Пусть частота на входе детектора отклонится от резонансной частоты ω_0 на величину $\Delta\omega$, причём $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$. Тогда вектор BD, соответствующий напряжению $\vec{U}_2$ (рис. 14.27*б*), повернётся относительно своего резонансного положения на угол φ_2, который определяется выражением (см. ф-лу 4.24):

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_p} Q\right) = \operatorname{arc\,tg} a.$$

Вместо выражений (14.26) и (14.27) будем иметь:

$$\vec{U}_3 = \vec{U}_1\left[1 - \frac{i\frac{M}{2L_1} Q_2}{1 + ia}\right], \qquad (14.26')$$

$$\vec{U}_4 = \vec{U}_1\left[1 + \frac{i\frac{M}{2L_1} Q_2}{1 + ia}\right]. \qquad (14.27)$$

Первый и второй контуры обычно берутся одинаковыми. Поэтому отношение $\frac{M}{L_1} = k$ является коэффициентом связи контуров. Обозначив через

$$\beta = \frac{M}{L_1} Q_2 = kQ_2$$

и переходя к модулям, получим

$$U_3 = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4+(\beta+2a)^2}}{\sqrt{1+a^2}}, \tag{14.29}$$

$$U_4 = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4+(\beta-2a)^2}}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{14.30}$$

Напряжение на выходе, при учёте дифференциального включения нагрузок, будет

$$U_\Omega = U_{01} - U_{02} = U_3 \cos\Theta - U_4 \cos\Theta =$$

$$= U_1 \cos\Theta \frac{\sqrt{4+(\beta+2a)^2} - \sqrt{4+(\beta-2a)^2}}{2\sqrt{1+a^2}}. \tag{14.31}$$

Теперь остаётся учесть зависимость амплитуды $\overrightarrow{U_1}$ от расстройки. В практике лампа частотного детектора обычно ставится в режим амплитудного ограничения, с целью ослабления влияния помех и паразитной амплитудной модуляции, возникающей при осуществлении модуляции в передатчике, а также при прохождении частотно-модулированного колебания через избирательные цепи передатчика и приёмника. Ограничение достигается включением в цепь сетки автоматического смещения и установлением специального режима анодной цепи (пониженное анодное напряжение), при котором изменение в широких пределах амплитуды входного напряжения почти не отражается на амплитуде напряжения U_1. Влияние изменения эквивалентного сопротивления анодной нагрузки, связанного с изменением частоты входного напряжения, на величину амплитуды напряжения U_1 обычно мало, так как частота при модуляции не выходит из полосы пропускания контуров детектора.

При этих условиях амплитуду U_1 можно считать

$$U_1 \approx U_{1p} = \text{const}.$$

Принимая также $\cos\Theta \approx 1$, перепишем ф-лу (14.31) в виде:

$$U_\Omega = U_{1p}\,\psi(a), \tag{14.32}$$

где

$$\psi(a) = \frac{\sqrt{4+(\beta+2a)^2} - \sqrt{4+(\beta-2a)^2}}{2\sqrt{1+a^2}}. \tag{14.33}$$

Зависимость $\psi(a)$ представлена на рис. 14.28 в виде семейства характеристик для различных значений параметра β. Умножив ординаты этих характеристик на резонансную амплитуду U_{1p} и на $\cos\Theta$, а абсциссы на $\frac{f_0}{2\Theta}$, получим характеристику частотного детектора в виде зависимости E_Ω (*вольт*) от Δf (*герц*).

При выборе параметров контуров и величины связи основным требованием является обеспечение линейности и получение максимально возможной крутизны характеристики частотного детектора.

В частотных детекторах (дискриминаторах), используемых в устройствах автоподстройки частоты, линейность характеристики не является обязательной и при выборе параметров контуров

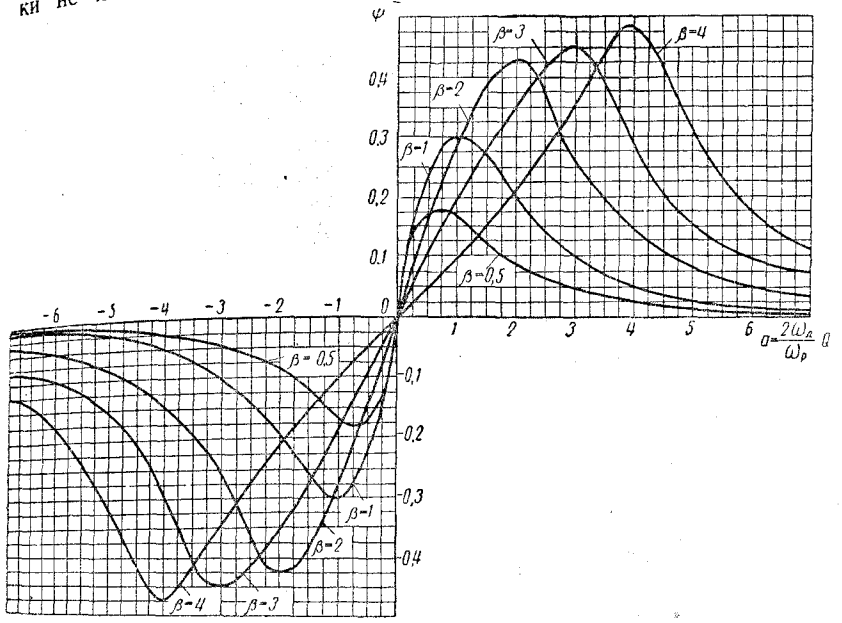


Рис. 14.28

может быть допущена бóльшая свобода. В дискриминаторах, используемых для автоподстройки частоты в импульсных системах, полоса пропускания контуров должна обеспечивать достаточно удовлетворительное воспроизведение высокочастотных импульсов.

Кроме разобранных выше, имеется ряд других схем частотных детекторов, отличающихся лишь в деталях.

§ 14.5. Фазовое детектирование

Пусть фаза высокочастотного колебания, подлежащего детектированию, изменяется по закону $\Theta(t)$. Если такое колебание подать на обычный частотный детектор, реагирующий на изменение мгновенной частоты колебания, то напряжение на выходе детектора будет

$$u_{вых}(t) = K_{ч.д}\,\Delta\omega(t) = K_{ч.д}\frac{d\theta(t)}{dt} = K_{ч.д}\cdot\Theta'(t),$$

т. е. выходное напряжение будет пропорционально производной фазы входного колебания.

Отсюда видно, что для осуществления фазового детектирования может быть использован обычный частотный детектор. Необходимо лишь дополнить его корректирующей цепью, осуществляющей интегрирование выходного напряжения, т. е. цепью с частотной характеристикой вида $K(i\Omega)=\frac{1}{i\Omega}$. Простейшие интегрирующие цепи описаны в § 9.3.

Подобный приём используется при детектировании колебаний с ,,медленно'' меняющейся фазой, т. е. в тех случаях, когда производная фазы конечна (например, при передаче речи). В случае же скачкообразного изменения фазы, а также при необходимости сравнения фазы принимаемого колебания с фазой опорного (эталонного) колебания, применяются специальные фазовые детекторы, в которых выходное напряжение пропорционально огибающей напряжения, получаемого при суммировании колебаний со сравниваемыми фазами.

Подобные устройства рассматриваются в специальных курсах.

§ 14.6. Преобразование частоты

При решении ряда радиотехнических задач возникает необходимость в сдвиге частотного спектра сигнала при сохранении структуры сигнала. Такое преобразование лежит в основе работы, например супергетеродинного приёмника.

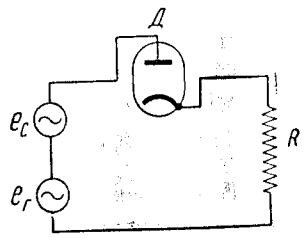


Рис. 14.29

Для выяснения основных черт процесса преобразования частоты рассмотрим воздействие на нелинейный элемент двух напряжений, из которых одно, немодулированное, берётся от вспомогательного генератора (,,гетеродина''), а второе является сигналом, подлежащим преобразованию. В качестве нелинейного элемента возьмём диод, причём нагрузку будем пока считать состоящей из чисто омического сопротивления R (рис. 14.29). Обозначив напряжение гетеродина через $e_г$, напряжение сигнала через e_c и апроксимируя характеристику диода ур-нием (14.1), можем написать для тока диода следующее выражение:

$$i_a = i_{a0} + \alpha(e_c + e_г) + \beta(e_c + e_г)^2 = \\ = i_{a0} + \alpha e_c + \alpha e_г + \beta e_c^2 + \beta e_г^2 + 2\beta e_c e_г. \qquad (14.34)$$

Основной интерес, с точки зрения преобразования частоты сигнала, представляет последний член, являющийся результатом взаимодействия напряжений e_c и $e_г$.

Поясним это положение на примере синусоидального сигнала. Пусть

$$e_c = E\cos(\omega_0 t + \Theta_0),$$

$$e_г = E_г\cos(\omega_г t + \Theta_г),$$

тогда

$$i_a = i_{a0} + \alpha E_c\cos(\omega_0 t + \Theta_0) + \alpha E_г\cos(\omega_г t + \Theta_г) + \\ + \frac{\beta E_c^2}{2} + \frac{\beta E_c^2}{2}\cos 2(\omega_0 t + \Theta_0) + \\ + \frac{\beta E_г^2}{2} + \frac{\beta E_г^2}{2}\cos 2(\omega_г t + \Theta_г) + \\ + 2\beta E_c E_г\cos(\omega_0 t + \Theta_0)\cos(\omega_г t + \Theta_г). \qquad (14.35)$$

Все слагаемые, за исключением последнего, являются либо постоянными величинами, либо величинами, пропорциональными e_c и $e_г$, либо, наконец, вторыми гармониками напряжений e_c и $e_г$. При учёте в ур-нии (14.34) более высоких степеней, в выражение (14.35) вошли бы гармоники и более высоких порядков.

Представив последний член правой части выражения (14.35) в форме

$$i_{ac.г} = \beta E_c E_г\{\cos[(\omega_0 + \omega_г)t + \Theta_0 + \Theta_г] + \\ + \cos[(\omega_0 - \omega_г)t + \Theta_0 - \Theta_г]\}, \qquad (14.36)$$

убеждаемся, что при одновременном воздействии на нелинейный элемент двух напряжений с частотами ω_0 и $\omega_г$ в составе выходного тока содержатся колебания с частотами $\omega_0+\omega_г$ и $\omega_0-\omega_г$. Если $\omega_г > \omega_0$, то разностную частоту нужно определять в виде $\omega_г-\omega_0$.

Для выделения одной из этих частот — разностной или суммарной — нужно применять соответствующую нагрузку на выходе преобразователя. Пусть, например, частоты ω_0 и $\omega_г$ очень близки и требуется выделить разностную частоту. Такая задача часто встречается в различных измерительных приборах (гетеродинные волномеры, приём незатухающих колебаний на слух и т. д). В этом случае нагрузка должна строиться так же, как и при амплитудном детектировании, т. е. должна состоять из параллельного соединения R и C.

Если разностная частота $|\omega_0-\omega_г|$ лежит в радиотехническом диапазоне, то для выделения её должны применяться избирательные системы в виде одного (рис. 14.30) или нескольких колебательных контуров. То же относится и к случаю, когда полезной, подлежащей выделению, является суммарная частота $\omega_0+\omega_г$.

Заметим, что амплитуды составляющих тока с частотами $\omega_0+\omega_г$ и $\omega_0-\omega_г$ пропорциональны произведению амплитуд сигнала E_c и гетеродинного напряжения $E_г$. Выгодно поэтому с целью увеличения амплитуды полезной составляющей при приёме слабых сигналов брать достаточно большую амплитуду напряжения гетеродина $E_г$.

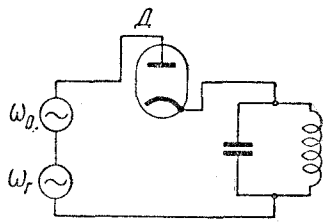


Рис. 14.30

Перейдём к рассмотрению преобразования частоты модулированного колебания. Пусть амплитуда E_c и частота ω_c сигнала представляют собой произвольные функции времени, т. е.

$$e_c(t)=E_c(t)\cos\left[\int\omega_c(t)\,dt+\Theta_0\right].$$

Подставляя это выражение в ур-ние (14.34) и выделяя слагаемое, аналогичное (14.36), будем иметь

$$i_{a.c.г}=\beta E_c(t)\cdot E_г\left\{\cos\left[\left(\int\omega_c(t)\,dt+\omega_г t\right)+\Theta_0+\Theta_г\right]+\right.$$
$$\left.+\cos\left[\left(\int\omega_c(t)\,dt-\omega_г t\right)+\Theta_0-\Theta_г\right]\right\}. \qquad (14.37)$$

Так как $E_г$ величина постоянная, то амплитуды обоих колебаний изменяются пропорционально амплитуде сигнала $E_c(t)$.

Беря производные аргументов обоих колебаний, находим в соответствии с ф-лой (3.4) мгновенные частоты этих колебаний в виде:

$$\omega_c(t)+\omega_г$$

и

$$\omega_c(t)-\omega_г.$$

Отсюда видно, что при преобразовании частоты закон изменения амплитуды и частоты входного напряжения переносится на составляющие тока с суммарной и разностной частотой.

Если полоса пропускания колебательной системы, являющейся нагрузкой преобразователя, рассчитана на ширину спектра модулированного колебания, то напряжение на выходе по своей структуре совпадает с напряжением сигнала на входе. Все слагающие тока диода, частоты которых находятся вне полосы пропускания нагрузки, отфильтровываются.

Спектральная диаграмма для напряжений на входе и выходе преобразователя для случая, когда $\omega_г<\omega_0$ представлена на рис. 14.31 (с таким же успехом можно взять $\omega_г>\omega_0$). Через $\omega_{пр}$ обозначена разностная частота $|\omega_г-\omega_0|$.

В супергетеродинных радиоприёмниках основное усиление сигнала производится на разностной частоте, которая называется промежуточной, а усилители, работающие на частоте $\omega_{пр}$, называются усилителями промежуточной частоты.

Если амплитуда $E_c(t)$ мала по сравнению с амплитудой гетеродина $E_г$, то структура спектра напряжения на выходе преобразователя полностью совпадает со структурой напряжения сигнала на входе, независимо от типа нелинейного элемента. В этом смысле преобразование является линейным, а преобразователь называется „линейным".

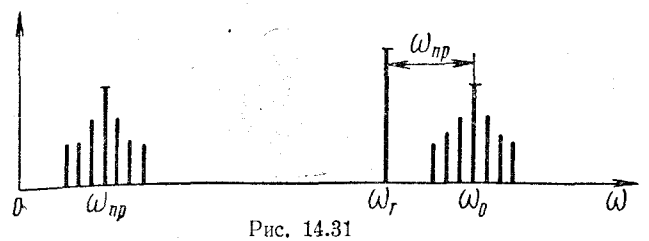


Рис. 14.31

Нелинейные устройства, в которых осуществляется „смешивание" напряжения сигнала и гетеродина с целью выделения колебания с комбинационной частотой вида $\omega_c-\omega_г$ или $|\omega_c-\omega_г|$ называются также смесителями.

Наряду с диодами, для преобразования частоты широко применяются специальные смесительные лампы. На очень высоких частотах электронные лампы из-за вредного влияния междуэлектродных ёмкостей мало эффективны и в качестве нелинейных элементов используются кристаллические (германиевые и другие) диоды.

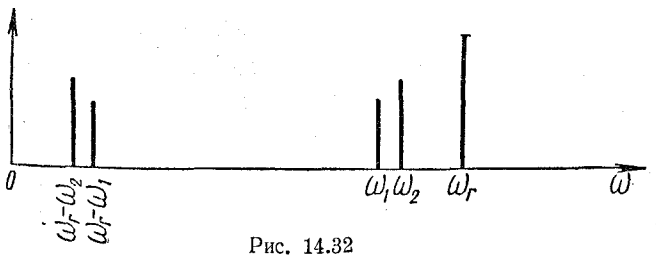


Рис. 14.32

Остановимся, в заключение, на выявлении особенностей преобразования сигнала, спектр которого несимметричен относительно частоты ω_0. Для упрощения рассуждений возьмём спектр в виде совокупности двух частот: ω_1 и ω_2, причём $\omega_1<\omega_2$. Рассмотрим два случая: частота гетеродина выше частот ω_1 и ω_2 и частота гетеродина ниже частот ω_1 и ω_2.

В первом случае в результате линейного преобразования получим спектр, изображённый в левой части рис. 14.32. Частоты $\omega_г - \omega_2$ и $\omega_г - \omega_1$ занимают положение, обратное положению в исходном спектре: более высокой частоте ($\omega_2 > \omega_1$) отвечает меньшая частота $\omega_г - \omega_2 < \omega_г - \omega_1$.

Во втором случае, т. е. при $\omega_г < \omega_1, \omega_2$, спектр преобразованного напряжения сохраняет свою структуру (рис. 14.33).

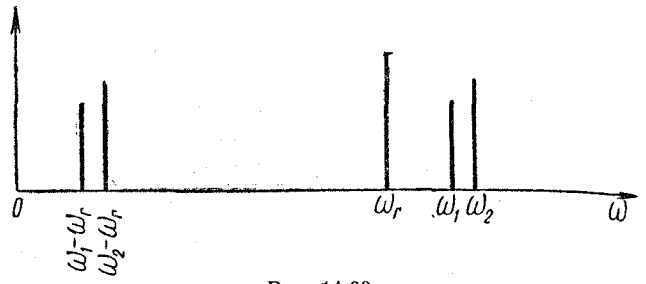


Рис. 14.33

Из приведённого простого примера видно, что при несимметричном спектре сигнала для сохранения структуры последнего частота гетеродина должна быть ниже частот сигнала. В противном случае происходит ,,выворачивание'' спектра. Высшие и низшие частоты меняются местами. Это обстоятельство необходимо учитывать, в частности, при преобразовании одной боковой полосы частот модуляции.

В свете изложенного становится ясным, что и при преобразовании сигнала с симметричным спектром имеет место ,,выворачивание'' частот, однако это не нарушает симметрии сигнала на выходе преобразователя.

ГЛАВА 15

ДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ НА СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

§ 15.1. Регенерация

В гл. 12 было показано, что положительная обратная связь вносит в колебательный контур автогенератора отрицательное сопротивление, которое полностью компенсирует сопротивление потерь и, таким образом, обеспечивает поддержание незатухающих колебаний. Положительная обратная связь может быть использована также и в усилителях, работающих в режиме, близком к линейному, если величину связи не доводить до порога генерации. При этом получается частичная компенсация потерь в контуре и действие обратной связи сводится лишь к повышению добротности регенерированного контура. Одна из возможных схем регенеративного усилителя изображена на рис. 15.1. Усиливаемое колебание $\overrightarrow{E}$ вводится в колебательный контур, включённый между сеткой и катодом лампы, а обратная связь осуществляется за счёт катушки L_a, обтекаемой переменной составляющей анодного тока I_a и индуктивно связанной с катушкой контура L.

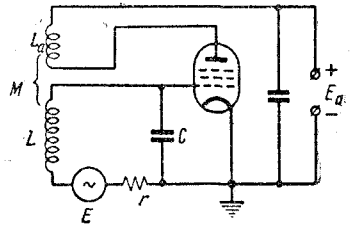


Рис. 15.1

Нетрудно выявить влияние лампы и обратной связи на эквивалентные параметры колебательного контура. Рассмотрим сперва более простой случай малых амплитуд, когда используется небольшой участок характеристики лампы и средняя крутизна $S_{ср}$ может быть приравнена статической (паспортной) крутизне S.

При синусоидальной эдс с амплитудой $\overrightarrow{E}$ и частотой ω амплитуда тока в контуре (в стационарном режиме) может быть определена с помощью следующего выражения:

$$\overrightarrow{I_k} = \frac{\overrightarrow{E} + \overrightarrow{E_{oc}}}{r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (15.1)$$

Здесь $\vec{E}_{ос}$ — комплексная амплитуда эдс обратной связи, т. е. электродвижущей силы, вводимой в контур по каналу обратной связи. Так как система предполагается линейной (при малых амплитудах), то эта эдс совпадает по частоте с эдс $\vec{E}$ и может отличаться от последней лишь фазой.

Очевидно, что

$$\vec{E}_{ос} = i\omega M \vec{I}_a, \tag{15.2}$$

а амплитуда переменной составляющей анодного тока $\vec{I}_a$, если пренебречь реакцией анодной цепи, равна:

$$\vec{I}_a = S\,\vec{U}_g = S\,\frac{\vec{I}_k}{i\omega C}.$$

Таким образом, можно написать

$$\vec{E}_{ос} = i\omega MS\,\frac{\vec{I}_k}{i\omega C} = \frac{MS}{C}\,\vec{I}_k. \tag{15.2'}$$

Подставляя это выражение в ур-ние (15.1) и решая его относительно $\vec{I}_k$, получим

$$\vec{I}_k = \frac{\vec{E}}{r - \frac{MS}{C} + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \tag{15.3}$$

Как и следовало ожидать (см. § 12.3), влияние положительной обратной связи сводится к уменьшению сопротивления потерь контура на величину

$$r_{отр} = \frac{MS}{C}. \tag{15.4}$$

Таким образом, результирующее активное сопротивление регенерированного контура будет

$$r_э = r - r_{отр} = r - \frac{MS}{C}, \tag{15.5}$$

а добротность

$$Q_э = \frac{\rho}{r_э} = \frac{\rho}{r - \frac{MS}{C}}. \tag{15.6}$$

Увеличением M можно добиться существенного увеличения $Q_э$ и, следовательно, повышения усиления схемы.

При $r_э < 0$, т. е. при $\frac{MS}{C} > r$, система становится неустойчивой и возникают автоколебания, т. е. усилитель превращается в генератор.

Не следует, однако, думать, что приближением величины $\frac{MS}{C}$ к r можно сколь угодно повышать добротность регенерированного контура. Формула (15.6) была получена при допущении о линейности системы. В действительности же, если поддерживать неизменной эдс $\vec{E}$, то снижение $r_э$ приводит к увеличению амплитуды тока в контуре и, следовательно, амплитуды напряжения на контуре. Это приводит к уменьшению средней крутизны $S_{ср}$, которая становится меньше, чем S. В результате убывание $r_э$ замедляется и эквивалентная добротность контура ограничивается определённой величиной, которая не может быть превышена никаким увеличением M (имеется в виду, конечно, увеличение M, не превышающее порога генерации схемы). Ясно поэтому, что для учёта нелинейного характера рассматриваемого устройства необходимо S заменить на среднюю крутизну $S_{ср}(U_g)$, являющуюся функцией амплитуды сеточного напряжения.

Основываясь на апроксимации характеристики с помощью выражения (12.38)

$$i_a = u_{упр}\,S\left(1 - \frac{u^2_{упр}}{3E^2_{Sупр}}\right)$$

и не делая разницы между $u_{упр}$ и u_g (то есть пренебрегая реакцией анодной цепи), можнем написать следующее выражение для максимальных значений приращений анодного тока

$$|\Delta i_{a\,макс}| = U_g\,S\left(1 - \frac{U^2_g}{3E^2_S}\right).$$

В пределах между $-\Delta i_{a\,макс}$ и $+\Delta i_{a\,макс}$ анодный ток изменяется несинусоидально. Вводя коэффициент первой гармоники α_1, аналогичный тому, который был введён в § 11.1

$$\alpha_1 = \frac{I_{a1}}{I_m}$$

и учитывая, что в данном случае под I_m нужно понимать $2\Delta i_{a\,макс}$, получаем

$$\alpha_1 = \frac{I_{a1}}{2\Delta i_{a\,макс}}.$$

Таким образом для амплитуды первой гармоники анодного тока имеем следующее выражение:

$$I_{a1} = \alpha_1 2\Delta i_{a\,макс} = 2\alpha_1\,SU_g\left(1 - \frac{U^2_g}{3E^2_S}\right),$$

откуда

$$S_{ср} = \frac{I_{a1}}{U_g} = 2\alpha_1 S\left(1 + \frac{U_g^2}{3E_S^2}\right). \tag{15.7}$$

Подставляя это выражение вместо S в ур-ние (15.3) и полагая $\omega = \omega_p$, т. е. имея в виду случай возбуждения усилителя на резонансной частоте, получим

$$\vec{I}_k = \frac{\vec{E}}{r - 2\alpha_1 \frac{MS}{C}\left(1 - \frac{U_g^2}{3E_S^2}\right)} =$$

$$= \frac{\vec{E}}{r - 2\alpha_1 \frac{M}{C} S\left(1 - \frac{I_k^2 \rho^2}{3E_S^2}\right)} = \frac{\vec{E}}{r_э}. \tag{15.8}$$

Здесь через $r_э$ обозначено эквивалентное сопротивление, равное

$$r_э = r - 2\alpha_1 \frac{M}{C} S + 2\alpha_1 \frac{M}{C} S \frac{I_k^2 \rho^2}{3E_S^2}. \tag{15.9}$$

Из выражения (15.9) видно, что если величину обратной связи сделать такой, что $2\alpha_1 \frac{MS}{C} = r$, то эквивалентное сопротивление контура остаётся конечным и не может быть меньше, чем

$$r_{э\,мин} = 2\alpha_1 \frac{MS}{C} \frac{I_k^2 \rho^2}{3E_S^2} = r \frac{I_k^2 \rho^2}{3E_S^2}.$$

Максимальная, при заданной амплитуде эдс $\vec{E}$, амплитуда тока не может, очевидно, превышать величину

$$I_{k.\,макс} = \frac{E}{r_{э.\,мин}} = \frac{E}{r \cdot \frac{I_{k.\,макс}^2 \rho^2}{3E_S^2}},$$

откуда

$$I_{k.\,макс} = \sqrt[3]{\frac{E}{r} \cdot \frac{3E_S^2}{\rho^2}}. \tag{15.10}$$

Полученный результат указывает также и на то обстоятельство, что при больших амплитудах резонансная характеристика регенерированного контура должна иметь форму, отличную от случая обычного линейного контура. Действительно, при отклонении вынуждающей частоты ω от резонансного значения ω_p возрастание

полного сопротивления цепи, обусловленное реактивной составляющей $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, в некоторой степени компенсируется уменьшением активного сопротивления, которое убывает вместе с амплитудой тока. Это видно из выражения (15.9) для эквивалентного активного сопротивления.

При значительных расстройках преобладающее влияние на амплитуду оказывает реактивное сопротивление, и резонансная кривая быстро спадает почти до нуля. В результате резонансные характеристики регенерированного контура в верхней части уплощаются и тем сильнее, чем больше амплитуда внешней эдс, действующей на контур.

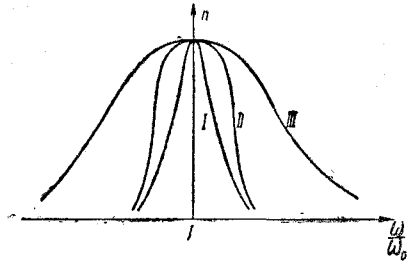


Рис. 15.2

Подобная характеристика показана на рис. 15.2 (кривая *II*). На том же рисунке кривая *I* соответствует резонансной характеристике регенерированного контура при малых амплитудах, а кривая *III* нерегенерированному контуру.

Зависимость затухания регенерированного контура от амплитуды внешней эдс приводит к образованию новых частот и нелинейным искажениям при передаче сигналов. Отсюда следует, что регенерация может быть эффективно использована для повышения добротности контура и повышения усиления только при малых амплитудах внешней эдс. В этом случае нелинейным членом в выражении (15.9) можно пренебрегать и отношение сопротивления регенерированного контура $r_э$ к сопротивлению потерь r равно

$$\frac{r_э}{r} \approx 1 - \frac{MS}{Cr},$$

а отношение соответствующих добротностей

$$\frac{Q_э}{Q} = \frac{r}{r_э} \approx \frac{1}{1 - \frac{MS}{Cr}}. \tag{15.11}$$

Это отношение характеризует также и увеличение напряжения на контуре, обусловленное использованием регенерации.

С явлением регенерации часто приходится встречаться в радиотехнике.

Ещё в 1925 — 1930 гг. довольно широкое распространение получили регенеративные приёмники.

Принципиальная схема однолампового регенеративного приёмника представлена на рис. 15.3.

В этой схеме лампа осуществляет следующие функции: усиление по высокой частоте с использованием регенерации, сеточное детектирование и усиление по низкой частоте. Регенеративные приёмники обладают следующими двумя крупными недостатками: а) сужение полосы пропускания регенерированного контура, сопровождающее повышение усиления; это обстоятельство особенно нежелательно на относительно длинных волнах; б) создание помех близко расположенным приёмникам при возникновении генерации, которая неизбежна при настройке приёмника и подборе оптимальной величины обратной связи. Последнее обстоятельство привело к необходимости запрещения массового промышленного выпуска регенеративных приёмников.

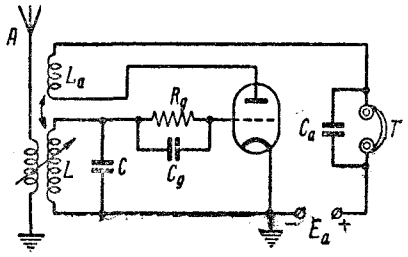


Рис. 15.3

Регенеративные приёмники находят некоторое применение и в настоящее время для слухового приёма телеграфных сигналов на коротких волнах. При этом обратная связь увеличивается до возникновения генерации, а частота генерации путём настройки контура устанавливается несколько отличной от частоты принимаемой станции. Биение частот сигнала и собственной генерации образует после детектирования звуковой тон разностной частоты, который и воспринимается оператором на слух.

В импульсной технике регенерация находит применение в устройствах ударного возбуждения колебаний.

Явление регенерации часто возникает в усилительных устройствах из-за наличия паразитных обратных связей и может служить причиной искажения сигналов, а также возникновения паразитной генерации.

§ 15.2. Действие синусоидальной эдс на автогенератор. Захватывание частоты

Поведение автогенератора, находящегося под действием внешней силы, существенно зависит от амплитуды и частоты этой силы. Если амплитуда очень мала по сравнению с амплитудой автоколебаний и, одновременно, частота ω_c значительно отличается от частоты ω_0 свободного автогенератора, то действие внешней эдс сводится к эффекту „модуляции" автогенератора, которая проявляется в периодическом изменении фазы и амплитуды автоколебания. Нелинейный характер устройства приводит к весьма сложному закону изменения фазы и амплитуды, однако основная частота этих изменений определяется разностью частот ω_c и ω_0, а средняя частота колебания остаётся равной или очень близкой к ω_0.

С уменьшением расстройки частот ω_c и ω_0 картина меняется. Средняя частота автогенератора „подтягивается" к частоте внешней эдс и при некотором значении $\Delta\omega = |\omega_c - \omega_0|$, зависящем от соотношения амплитуд, автогенератор начинает работать точно на частоте ω_c без каких-либо признаков модуляции. Частота генератора оказывается „захваченной" или „увлечённой" частотой вынуждающей силы.

Явление захватывания частоты используется в ряде радиотехнических устройств, когда требуется осуществить принудительную синхронизацию автогенератора с помощью маломощного источника колебаний.

В некоторых случаях, при наличии паразитных связей между двумя автогенераторами, явление захватывания возникает самопроизвольно и препятствует независимой их работе на близких частотах.

Рассмотрим механизм явления захватывания частоты на простейшем одноконтурном автогенераторе с трансформаторной обратной связью при последовательном включении независимого источника эдс E в цепь сетки лампы (рис. 15.4). Следует подчеркнуть, что такой выбор схемы сделан только ради определённости рассуждений. С точки же зрения установления общих соотношений вид схемы автогенератора и способ введения вынуждающей эдс принципиального значения не имеют.

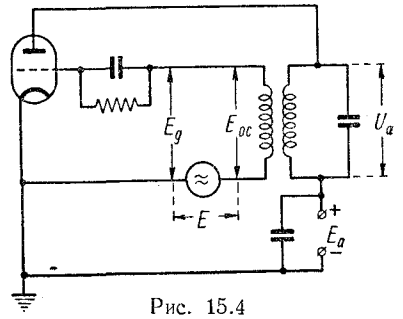


Рис. 15.4

Рассмотрим сперва явления в автогенераторе при внезапном включении синусоидальной эдс с частотой ω_c, совпадающей с частотой ω_0. Воспользуемся для этого методом, предложенным в 1939 г. Е. Г. Момотом. Следуя этому методу, амплитуду E считаем малой по сравнению с амплитудой напряжения обратной связи E_{oc} свободного автогенератора. До включения $\vec{E}$ фазовые соотношения в автогенераторе соответствуют векторной диаграмме, представленной на рис. 15.5*а* (см. также § 10.2 и § 12.6). Так как частота генерации в схеме рис. 15.4 в отсутствие $\vec{E}$ определяется контуром, то напряжение на контуре $\vec{U}_a$ совпадает по фазе с током первой гармоники $\vec{I}_{a1}$, а последний — с напряжением на сетке $\vec{E}_g = \vec{E}_{oc}$.

Допустим, что начальная фаза внешней эдс равна φ_0, т. е.

$$e = E\cos(\omega_c t + \varphi_0).$$

Тогда в момент включения ($t=0$) вектор напряжения на сетке $\vec{E}_g$, являющийся геометрической суммой напряжений $\vec{E}$ и $\vec{E}_{oc}$,

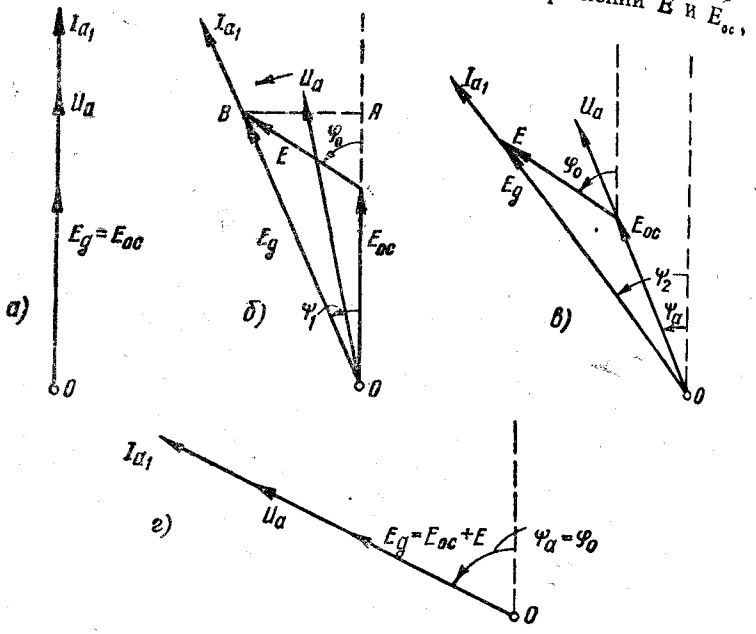


Рис. 15.5

повернётся относительно исходного положения на малый угол ψ_1 (рис. 15.5*б*), величина которого связана с φ_0, E и E_g следующим соотношением:

$$\sin\psi_1 = \frac{AB}{OB} = \frac{E\sin\varphi_0}{E_g}. \qquad (15.12)$$

Вместе с напряжением $\vec{E}_g$ изменится и фаза тока $\vec{I}_{a1}$. Так как анодное напряжение слабо влияет на фазу анодного тока, то угол поворота вектора тока $\vec{I}_{a1}$ почти не отличается от угла ψ_1. На диаграмме рис. 15.5*б* фаза $\vec{I}_{a1}$ совмещена с фазой $\vec{E}_g$. Новому положению вектора $\vec{I}_{a1}$ должно соответствовать и новое положение вектора $\vec{U}_a$.

В отличие от тока I_{a1} напряжение на контуре не может мгновенно изменить свою фазу. Необходимое для установления новой фазы время тем больше, чем больше запас энергии в контуре, т. е. чем больше добротность контура. Поэтому, начиная с момента включения $\vec{E}$, вектор $\vec{U}_a$ на диаграмме рис. 15.5*б* должен вращаться в направлении к вектору $\vec{I}_{a1}$. Но вместе с изменением фазы $\vec{U}_a$ изменяется и фаза напряжения обратной связи $\vec{E}_{oc}$.

Действительно, в схеме автогенератора с трансформаторной связью напряжение $\vec{E}_{oc}$, отсчитываемое от сетки к катоду, всегда в фазе с $\vec{U}_a$ (см. § 12.2). Поэтому, к тому времени, когда вектор $\vec{U}_a$ повернётся на угол ψ_1, напряжение $\vec{E}_{oc}$ и ток $\vec{I}_{a1}$ займут новое положение, показанное на рис. 15.5*в*. Процесс будет продолжаться пока векторы $\vec{I}_{a1}$ и $\vec{U}_a$ не примут положение, совпадающее с направлением вектора $\vec{E}$, т. е. пока фаза ψ_a напряжения $\vec{U}_a$ не уравняется с фазой внешней эдс $\vec{E}$. Векторная диаграмма для стационарного режима автогенератора показана на рис. 15.5*г*.

Таким образом приходим к выводу, что в случае $\omega_c = \omega_0$ влияние внешней эдс сводится лишь к навязыванию автогенератору фазы φ_0, причём для установления новой фазы требуется некоторое время. Из приведённого выше качественного рассмотрения следует, что это время тем больше, чем больше инерционность контура (выше Q) и чем меньше амплитуда E вынуждающей силы.

Так как изменение фазы во времени неразрывно связано с изменением мгновенной частоты колебания, то процесс установления фазы сопровождается изменением частоты автогенератора. Если фаза напряжения на контуре изменяется по закону $\psi_a(t)$, то мгновенная частота, в соответствии с § 3.4, равна

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\psi_a(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega(t). \qquad (15.13)$$

По окончании процесса установления $\psi_a = \varphi_0 = \text{const}$ и частота генератора опять становится равной частоте ω_0.

Характер изменения $\psi_a(t)$ и $\omega(t)$ при частном значении φ_0 показан на рис. 15.6.

При изменении величины и знака φ_0 знаки наклона функций $\psi_a(t)$ и $\Delta\omega(t)$ могут быть различными, однако общий характер этих функций сохраняется. Ясно также, что в частном случае $\varphi_0 = 0$, т. е. когда эдс $\vec{E}$ в момент включения совпадает по фазе с E_{oc}, фазовый баланс в автогенераторе не нарушается и влияние внешней эдс ограничивается лишь некоторым изменением амплитуды автоколебаний.

Переходим теперь к случаю расстройки частот ω_c и ω_0. Для определённости допустим, что $\omega_c > \omega_0$ и, следовательно, вектор $\vec{E}$ на диаграммах рис. 15.5 непрерывно вращается против час. стрелки (так как линия времени на этих диаграммах вращается с угловой частотой ω_0). Тогда вектор $\vec{U}_a$, стремясь занять положение, совпадающее с вектором $\vec{I}_{a1}$, будет непрерывно вращаться, причём вектор $\vec{U}_a$ всегда будет несколько отставать от вектора $\vec{I}_{a1}$ (угол ψ_Z). Если угловая частота вращения вектора $\vec{E}$ не слишком велика, т. е. если ω_c близка к ω_0, то в автогенераторе в конце концов установится стационарное состояние, при котором все векторы: $\vec{E}$, $\vec{E}_{oc}$, $\vec{E}_g$, $\vec{I}_{a1}$ и $\vec{U}_a$ равномерно вращаются с угловой частотой, равной $\omega_c - \omega_0$. Иными словами, автогенератор будет работать на частоте ω_c. Переходя к новой векторной диаграмме, линия времени которой вращается с частотой ω_c, получим построение; показанное на рис. 15.7. На этой диаграмме в качестве исходной фазы выбрана фаза эдс $\vec{E}$ (т. е. $\varphi_0 = 0$).

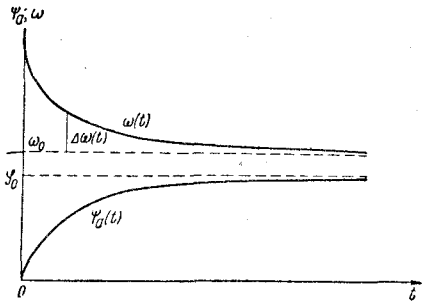


Рис. 15.6

Фазовые углы ψ_Z и φ_a нетрудно выразить через заданное отношение амплитуд и через расстройку $\omega_c - \omega_0$. По аналогии с выражением (15.12), для стационарного режима можно написать следующее соотношение:

$$\sin\psi_Z = \frac{E\sin\varphi_a}{E_g}. \qquad (15.14)$$

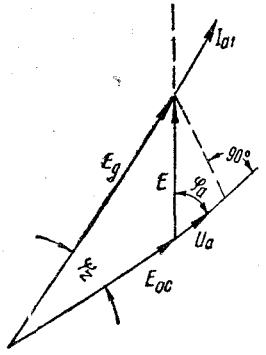


Рис. 15.7

С другой стороны, угол ψ_Z определённым образом связан с расстройкой $\omega_c - \omega_0$ и параметрами контура. Действительно, для поддержания фазового баланса автогенератора необходимо, чтобы фазовый сдвиг между $\vec{E}_g$ и $\vec{E}_{oc}$, обусловленный введением в цепь сетки внешней эдс $\vec{E}$ (рис. 15.7), компенсировался в анодной цепи фазовым сдвигом между током $\vec{I}_{a1}$ и напряжением $\vec{U}_a$. Иными словами, по отношению к резонансной частоте контура ω_0 генерируемая частота должна быть расстроена на величину $\omega_c - \omega_0$, определяемую условием

$$\operatorname{tg}\psi_Z = \frac{2(\omega_c - \omega_0)}{\omega_0}\, Q. \qquad (15.15)$$

Совместное решение ур-ний (15.14) и (15.15) сильно упрощается в том случае, когда амплитуда $\vec{E}$ мала по сравнению с напряжением обратной связи свободного автогенератора. В этом случае в выражении (15.14) можно не делать разницы между E_g и E_{oc}, причём под E_{oc} можно подразумевать амплитуду сеточного напряжения в отсутствие постороннего воздействия.

Тогда вместо ур-ний (15.14) и (15.15) можно написать:

$$\psi_Z \approx \frac{E}{E_{oc}}\sin\varphi_a, \qquad (15.14')$$

$$\psi_Z \approx \frac{2(\omega_c - \omega_0)}{\omega_0}\, Q. \qquad (15.15')$$

Приравнивая правые части полученных уравнений, находим искомое соотношение:

$$\frac{2(\omega_c - \omega_0)}{\omega_0} = \frac{E}{E_{oc}}\sin\varphi_a\,\frac{1}{Q}. \qquad (15.16)$$

Это соотношение имеет смысл при условии, что абсолютная величина расстройки $|\omega_c - \omega_0|$ не превышает некоторой предельной величины, при которой $|\sin\varphi_a| = 1$. Из физических соображений очевидно, что эти предельные величины $|\omega_c - \omega_0|_{макс}$ соответствуют границам полосы захватывания. Подставляя в ур-ние (15.16) $\sin\varphi_a = \pm 1$, найдём полную относительную ширину полосы захватывания в виде

$$\frac{2|\omega_c - \omega_0|}{\omega_0} \approx \frac{E}{E_{o.c}}\cdot\frac{1}{Q}. \qquad (15.17)$$

Итак, полоса захватывания пропорциональна отношению амплитуды внешней эдс к амплитуде колебаний свободного автогенератора и затуханию контура $d = \frac{1}{Q}$.

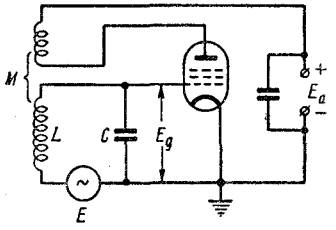


Рис. 15.8

В тех случаях, когда внешняя эдс вводится последовательно в колебательный контур автогенератора, выражению для полосы захватывания можно придать несколько иной вид. Рассмотрим, в качестве

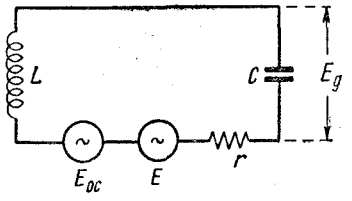


Рис. 15.9

примера, схему генератора с контуром в цепи сетки (рис. 15.8). Схема эквивалентного контура, в котором действие обратной связи учтено генератором эдс E_{oc}, изображена на рис. 15.9. В отсутствие постороннего воздействия амплитуда E_g напряжения на сетке связана с E_{oc} соотношением

$$E_g = E_{oc} \cdot Q.$$

Подставляя это соотношение в ф-лу (15.17), получим

$$\frac{2|\omega_c - \omega_0|}{\omega_0} \approx \frac{E}{E_g}. \qquad (15.18)$$

Аналогично можно показать, что при введении вынуждающей эдс в анодный колебательный контур, получится

$$\frac{2|\omega_c - \omega_0|}{\omega_0} \approx \frac{E}{U_a}, \qquad (15.18')$$

где U_a — амплитуда напряжения на контуре свободного автогенератора.

Нетрудно заметить, что отсутствие в ф-лах (15.18) и (15.18′) величины Q объясняется тем, что постороннее воздействие оценивается эдс, вводимой последовательно в контур, а режим свободного автогенератора — напряжением, действующим на реактивном элементе контура. Если же исходить из одинаково определяемых внешней силы и собственного колебания, то, независимо от схемы, полоса захватывания определяется выражением вида (15.17).

Вне полосы захватывания частота генератора $\omega_г$ несколько отличается от частоты свободного автогенератора ω_0 и лишь при большой расстройке частот ω_c и ω_0 можно считать $\omega_г \to \omega_0$. Отклонение $\omega_г$ от ω_0 возрастает по мере приближения к границам области захватывания. Если изменять частоту ω_c вынуждающей эдс (при неизменной амплитуде) и измерять частоту биений, то можно построить график, представленный на рис. 15.10. На этом графике по оси ординат отложена частота биений, равная абсолютной величине разности частот $\omega_г$ и ω_c (сплошная линия). Пунктирной линией показан ход изменения частоты биений между свободным генератором и внешним источником колебаний с частотой ω_c.

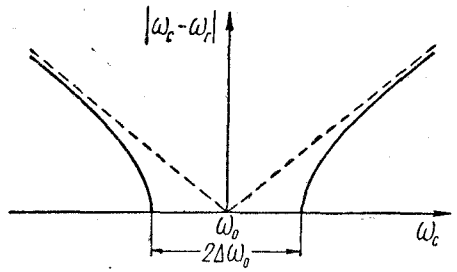


Рис. 15.10

То обстоятельство, что сплошная линия идёт ниже пунктирной объясняется уже отмеченным в начале данного параграфа фактом „подтягивания“ частоты автогенератора к частоте внешней эдс. В полосе захватывания, где частота $\omega_г$ полностью совпадает с частотой ω_c, биения отсутствуют.

§ 15.3. Процесс установления режима захватывания

Проведённое выше рассмотрение позволяет выяснить физическую суть явления захватывания, а также определить полосу захватывания в стационарном режиме. Для определения же закона изменения фазы и частоты автогенератора в процессе установления режима захватывания, что важно, в частности, в импульсных системах, необходимо обратиться к дифференциальному уравнению автогенератора.

Так как предполагается, что в момент приложения внешней эдс автогенератор работает в стационарном режиме, при котором амплитуда автоколебаний ограничивается нелинейностью характеристики лампы, то необходимо исходить из нелинейного уравнения вида (12.41′), в котором под управляющим напряжением $u_{упр}$ следует подразумевать:

$$u_{упр} = e_{oc} - Du_a + e = (|K_{oc}| - D)\, u_a + e = K_1 u_a + e. \qquad (15.19)$$

Здесь e_{oc} — напряжение обратной связи, u_a — напряжение на контуре, $e = E\cos\omega_c t$ — вводимая в цепь сетки внешняя эдс (рис. 15.4), и

$$K_1 = (|K_{oc}| - D). \qquad (15.20)$$

Подставляя выражение (15.19) в (12.41′) и производя группировку членов, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} + \left\{\frac{1}{CR} - \frac{SK_1}{C}\left[1 - \frac{(K_1u_a + e)^2}{E^2_{S\,упр}}\right]\right\}\frac{du_a}{dt} + \omega_0^2 u_a = \frac{S}{C}\left[1 - \frac{(K_1u_a + e)^2}{E^2_{S\,упр}}\right]\frac{de}{dt}. \qquad (15.21)$$

Нетрудно убедиться, что при подстановке $e = 0$, $K_1 = |K_{oc}| - D$ и $\frac{E_{aS}}{|K_{oc}| - D} = U_{aS}$ [в соответствии с ф-лой (12.42)] ур-ние (15.21) переходит в ур-ние (12.43).

Строгое решение нелинейного ур-ния (15.21) представляет собой очень сложную задачу. Решение сильно упрощается, однако, в случае малых амплитуд внешней эдс, когда можно пренебрегать изменением амплитуды автоколебаний под действием этой эдс. В этом случае решение ур-ния (15.21) можно искать в форме

$$u_a = U_a \cos[\omega_c t + \varphi_a(t)], \qquad (15.22)$$

где U_a — постоянная амплитуда, приближённо равная стационарной амплитуде свободного автогенератора, а $\varphi_a(t)$ — искомая фаза напряжения на контуре.

Если в результате анализа оказывается, что по истечении достаточно большого времени φ_a принимает постоянное значение и, следовательно, частота колебания, равная

$$\omega(t) = \frac{d[\omega_c(t) + \varphi_a]}{dt},$$

обращается в $\omega = \omega_c = \text{const}$, то это означает, что имеет место режим захватывания частоты.

В противном случае, т. е. если с течением времени $\frac{d\varphi_a}{dt}$ не обращается в нуль, частота автоколебаний будет отличаться от частоты синхронизирующей эдс и будут иметь место „биения".

Допущение о постоянстве амплитуды U_a позволяет линеаризировать ур-ние (15.21). Действительно, основной смысл нелинейного ур-ния (12.43) заключается в том, что коэффициент при первой производной учитывает зависимость средней крутизны лампы от величины амплитуды колебаний. Если же иметь в виду стационарный режим автогенератора, характеризующийся постоянной амплитудой $U_{a\,cm}$, и подставлять вместо u_a гармоническое напряжение $U_{a\,cm}\cos\omega_0 t$, то после отбрасывания членов с частотами $3\omega_0$ [см. приложение IV], указанный коэффициент обратится в нуль, т. е. будет иметь место следующее тождество (см. также § 12.9)

$$\left[\frac{1}{CR} - \frac{S(|K_{oc}| - D)}{C}\left(1 - \frac{U_{a\,cm}^2}{4U_{aS}^2}\right)\right] = 0.$$

Уравнение (12.43) переходит при этом в линейное уравнение

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} + \omega_0^2 u_a = 0.$$

Обращаясь к случаю внешнего воздействия и считая $\frac{E}{K_1 U_{a\,cm}} \ll 1$, мы можем пренебречь слагаемым e по сравнению с $K_1 u_a$ в ур-нии (15.21).

Тогда коэффициент при первой производной, как и в свободном автогенераторе, обращается в нуль, т. е.

$$\frac{1}{CR} - \frac{SK_1}{C}\left[1 - \frac{(K_1 u_a + e)^2}{E_{S\,упр}^2}\right] = 0, \tag{15.23}$$

а коэффициент в правой части ур-ния (15.21) становится равным

$$\frac{S}{C}\left[1 - \frac{(K_1 u_a + e)^2}{E_{S\,упр}^2}\right] = \frac{1}{CRK_1} = \frac{2}{\tau K_1}, \tag{15.24}$$

где $\tau = 2CR$ — постоянная времени контура, изображённого на рис. 15.9.

Подставляя выражения (15.23) и (15.24) в ур-ние (15.21), приходим к линейному уравнению:

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} + \omega_0^2 u_a = \frac{2}{\tau K_1}\frac{de}{dt}. \tag{15.25}$$

На основе этого уравнения можно составить уравнение и для искомой фазы колебания. С этой целью подставим в ур-ние (15.25) решение (15.22), а также $e = E\cos\omega_c t$. Имеем:

$$\frac{de}{dt} = -\omega_c E\sin\omega_c t,$$

$$\frac{du_a}{dt} = -U_a(\omega_c + \dot\varphi_a)\sin(\omega_c t + \varphi_a),$$

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} = -U_a[(\omega_c + \dot\varphi_a)\cos(\omega_c t + \varphi_a) - \ddot\varphi_a \sin(\omega_c t + \varphi_a)].$$

Точка над функцией φ_a обозначает дифференцирование по времени. Так как $\varphi_a(t)$ является „медленной" функцией времени, то можно считать

$$|\ddot\varphi_a| \ll \omega_c^2.$$

Отбрасывая поэтому в выражении для $\frac{d^2u_a}{dt^2}$ член $\ddot\varphi_a\sin(\omega_c t + \varphi_a)$, приводим ур-ние (15.25) к следующему виду:

$$[(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2]\cos(\omega_c t + \varphi_a) = \frac{2\omega_c E\sin\omega_c t}{K_1\tau U_a}, \tag{15.26}$$

или

$$[(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2]\cos\varphi_a\cos\omega_c t -$$

$$-\left\{[(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2]\sin\varphi_a + \frac{2\omega_c E}{K_1\tau U_a}\right\}\sin\omega_c t = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\omega_c t$ и $\sin\omega_c t$, получаем два уравнения:

$$[(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2]\cos\varphi_a = 0,$$

$$[(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2]\sin\varphi_a = -\frac{2\omega_c E}{K_1\tau U_a}.$$

Умножая первое из этих уравнений на $\cos\varphi_a$, второе на $\sin\varphi_a$ и складывая, получаем

$$(\omega_c + \dot\varphi_a)^2 - \omega_0^2 = -\frac{2\omega_c E}{K_1\tau U_a}\sin\varphi_a, \tag{15.27}$$

или

$$(\omega_c^2 - \omega_0^2) + 2\dot\varphi_a\omega_c + \dot\varphi_a^2 = -\frac{2\omega_c E}{K_1\tau U_a}\sin\varphi_a. \tag{15.27'}$$

Для дальнейшего упрощения полученного уравнения используем условие малости величины расстройки частот ω_c и ω_0, из которого следует

$$\omega_c^2 - \omega_0^2 = (\omega_c + \omega_0)(\omega_c - \omega_0) \approx 2\omega_c(\omega_c - \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega_c - \omega_0)$$

и

$$\dot\varphi_a^2 \ll \omega_c^2.$$

Таким образом,

$$2\omega_c(\omega_c - \omega_0) + 2\dot\varphi_a\omega_c = -\frac{2\omega_c E}{K_1\tau U_a}\sin\varphi_a$$

или, окончательно,

$$\dot\varphi_a = -(\omega_c - \omega_0) - \frac{\frac{E}{U_a}}{K_1\tau}\sin\varphi_a. \tag{15.28}$$

Полученное уравнение может быть проинтегрировано следующим образом. Разделим переменные:

$$\frac{d\varphi_a}{dt} = -(\omega_c - \omega_0) - \frac{\frac{E}{U_a}}{K_1\tau}\sin\varphi_a,$$

$$dt = -\frac{d\varphi_a}{(\omega_c - \omega_0) + \frac{\frac{E}{U_a}}{K_1\tau}\sin\varphi_a},$$

тогда

$$t = -\int_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \frac{d\varphi_a}{(\omega_c - \omega_0) + \frac{E}{K_1 U_a \tau} \sin\varphi_a}. \tag{15.29}$$

Здесь φ_{a0} — фаза автоколебания в момент $t = 0$, т. е. в момент приложения внешней эдс.

Введём следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_c - \omega_0 &= \Delta\omega \\ \frac{E}{K_1 U_a} &= n \\ \frac{\Delta\omega\tau}{n} &= m \end{aligned}\right\}. \tag{15.30}$$

Тогда ур-ние (15.29) может быть записано в форме:

$$t = -\int_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \frac{d\varphi_a}{\Delta\omega + \frac{n}{\tau}\sin\varphi_a} = -\frac{\tau}{n}\int_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \frac{d\varphi_a}{\frac{\Delta\omega\tau}{n} + \sin\varphi_a}, \tag{15.31}$$

или

$$\frac{n}{\tau}\, t = -\int_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \frac{d\varphi_a}{m + \sin\varphi}. \tag{15.31'}$$

Полученный интеграл вычисляется в конечном виде[1]):

$$\frac{nt}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \ln \frac{m \operatorname{tg}\frac{\varphi_a}{2} + 1 - \sqrt{1-m^2}}{m \operatorname{tg}\frac{\varphi_a}{2} + 1 + \sqrt{1-m^2}} \Bigg|_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \quad \text{при } m^2 < 1 \tag{15.32}$$

$$\frac{nt}{\tau} = -\frac{2}{\sqrt{m^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{m \operatorname{tg}\frac{\varphi_a}{2} + 1}{\sqrt{m^2-1}} \Bigg|_{\varphi_{a0}}^{\varphi_a(t)} \quad \text{при } m^2 > 1. \tag{15.33}$$

Нетрудно выяснить смысл двух решений, соответствующих двум случаям:

$$m^2 < 1 \text{ и } m^2 > 1.$$

Обращаясь к ур-нию (15.28) и переписав его в обозначениях (15.30):

$$\dot{\varphi}_a = -\left(\Delta\omega + \frac{n}{\tau}\sin\varphi_a\right) = -\frac{n}{\tau}(m + \sin\varphi_a), \tag{15.34}$$

[1]) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.

убеждаемся, что при $m^2 < 1$ существует такое значение φ_a, при котором выполняется тождество

$$m + \sin\varphi_a = 0, \tag{15.35}$$

а производная $\dot{\varphi}_a = 0$, т. е. фаза φ_a принимает постоянное значение $\varphi_{a\,cm}$, соответствующее стационарному состоянию. Это означает, что частота определяемого выражением (15.22) напряжения будет

$$\omega = \frac{d[\omega_c t + \varphi_a(t)]}{dt} = \omega_c + \dot{\varphi}_a = \omega_c, \tag{15.36}$$

т. е. по истечении времени, необходимого для установления фазы $\varphi_{a\,cm}$ (теоретически $t \to \infty$), генератор будет работать на вынуждающей частоте ω_c, иными словами, при $|m| < 1$ имеет место режим принудительной синхронизации, и автогенератор работает в режиме захватывания частоты. В случае же $m^2 > 1$ тождество (15.35) не может иметь места, что указывает на несовпадение частоты генератора с вынуждающей частотой и на наличие „биений". Разница в частотах будет равна $\dot{\varphi}_a$.

Таким образом, условие

$$m| = \frac{|\Delta\omega|_{макс}\,\tau}{n} = 1 \tag{15.37}$$

определяет „полосу захватывания" автогенератора.

Полная ширина полосы захватывания, симметричная относительно частоты ω_0 свободного автогенератора, очевидно равна

$$2|\Delta\omega|_{макс} = \frac{2n}{\tau}, \tag{15.38}$$

а относительная полоса

$$\frac{2|\Delta\omega|_{макс}}{\omega_0} = \frac{2n}{\omega_0\tau} = \frac{2n}{2Q} = \frac{n}{Q}. \tag{15.39}$$

Этот результат совпадает с ранее полученной ф-лой (15.17).

Выражение (15.32) позволяет найти закон изменения фазы $\varphi_a(t)$. Решая это уравнение относительно $\varphi_a(t)$, получаем

$$\varphi_a(t) = 2\operatorname{arctg}\frac{(1+\beta)\,C\,e^{-\beta\frac{n}{\tau}t} + \beta - 1}{m\left(1 - C\,e^{-\beta\frac{n}{\tau}t}\right)}, \tag{15.40}$$

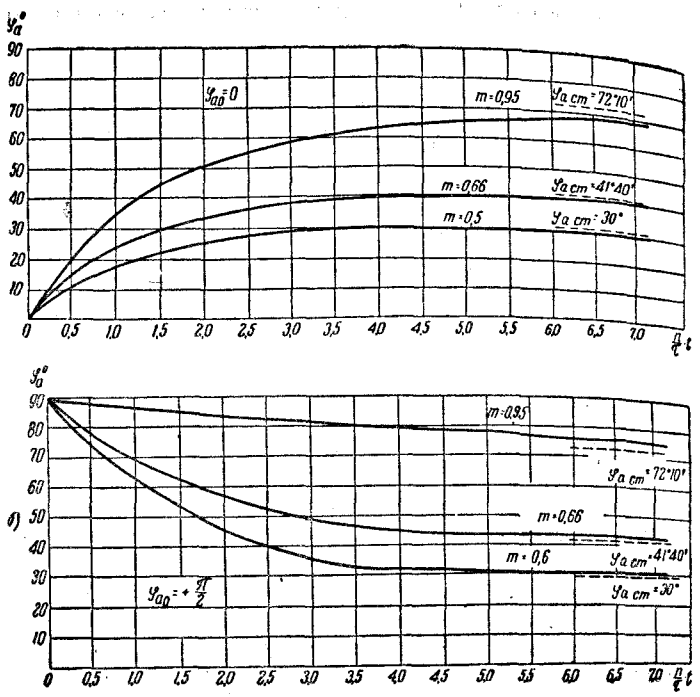
где

$$\beta = \sqrt{1-m^2}, \tag{15.41}$$

$$C = \frac{m \operatorname{tg}\frac{\varphi_{a0}}{2} + 1 - \beta}{m \operatorname{tg}\frac{\varphi_{a0}}{2} + 1 + \beta}. \tag{15.42}$$

Стационарная фаза определяется при подстановке $t \to \infty$ в выражение (15.40):

$$\varphi_{a\,cm} = 2\operatorname{arctg}\frac{\beta - 1}{m} = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1} - \frac{1}{m}\right). \tag{15.43}$$



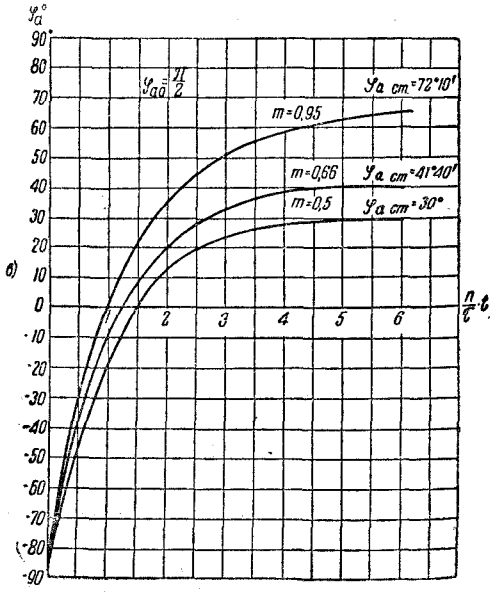


Рис. 15.11

На верхней границе полосы захватывания, т. е. при $\omega_c=\omega_0+\Delta\omega_{макс}$, $m\to 1$ получается $\varphi_{a\,cm}=2\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{2}$, а на нижней границе ($\omega_c=\omega_0-\Delta\omega_{макс}$, $m\to -1$), соответственно, $\varphi_{a\,cm}=+\frac{\pi}{2}$.

Графики зависимостей $\varphi_a\left(\frac{n}{\tau}t\right)$ для ряда значений φ_{a0} и m, вычисленные по ф-ле (15.40), приведены на рис. 15.11. Напомним, что параметр $m=\frac{(\omega_c-\omega_0)\tau}{n}$.

Интересно отметить, что при $\varphi_{a0}=\varphi_{a\,cm}$ стационарная фаза колебания устанавливается мгновенно, т. е. для полного увлечения частоты автогенератора не требуется времени.

Установление закона изменения фазы позволяет найти и закон изменения мгновенной частоты автогенератора, равной $\omega(t)=\omega_c+\dot{\varphi}_a$.

Таким образом,

$$\omega(t)-\omega_c=\frac{d\varphi_a}{dt}=\frac{n}{\tau}\cdot\frac{d\varphi_a}{d\left(\frac{n}{\tau}t\right)}. \qquad (15.44)$$

Так как $\frac{n}{\tau}$ в согласии с ф-лой (15.38) равно $|\Delta\omega|_{макс}$, то выражение (15.44) можно записать в форме

$$\nu(\Delta\omega_{макс}\,t)=\frac{\omega(t)-\omega_c}{|\Delta\omega|_{макс}}=\frac{d\varphi_a}{d(\Delta\omega_{макс}\,t)}. \qquad (15.44')$$

Дифференцируя выражение (15.40) по $\frac{n}{\tau}t=\Delta\omega_{макс}\,t$, получаем

$$\nu(\Delta\omega_{макс}\,t)=\frac{2m(1-m^2)}{(1+\beta)\,C\,e^{-\beta\Delta\omega_{макс}t}-2m^2+\frac{1-\beta}{C}e^{\beta\Delta\omega_{макс}t}}. \qquad (15.45)$$

Величина ν в соответствии с ф-лой (15.44′) представляет собой мгновенное отклонение частоты автогенератора в процессе установления режима захватывания, выраженное в долях половины полосы захватывания.

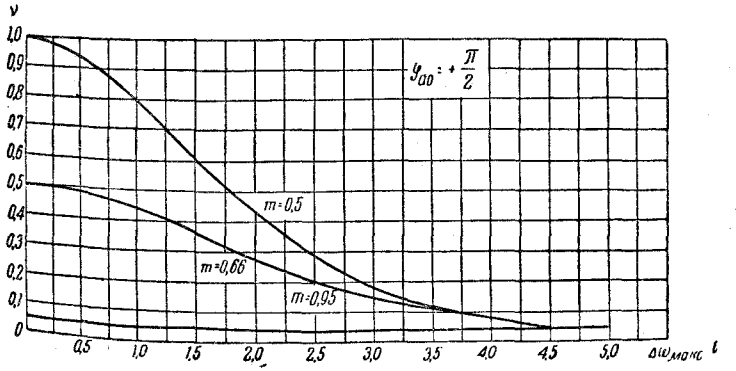


Рис. 15.12

Графики зависимостей $\nu(\Delta\omega_{макс}\, t)$ для некоторых значений m и φ_{a0} представлены на рис. 15.12 $\left(\varphi_{a0}=+\frac{\pi}{2}\right)$ и 15.13 $\varphi_{a0}=-\frac{\pi}{2}$.

Из рассмотрения графиков для $\varphi_a\left(\frac{n}{\tau}\,t\right)$ и $\nu(\Delta\omega_{макс}\, t)$ можно сделать вывод, что процесс установления фазы и частоты заканчивается при величинах $\Delta\omega_{макс}\, t$, близких к трём.

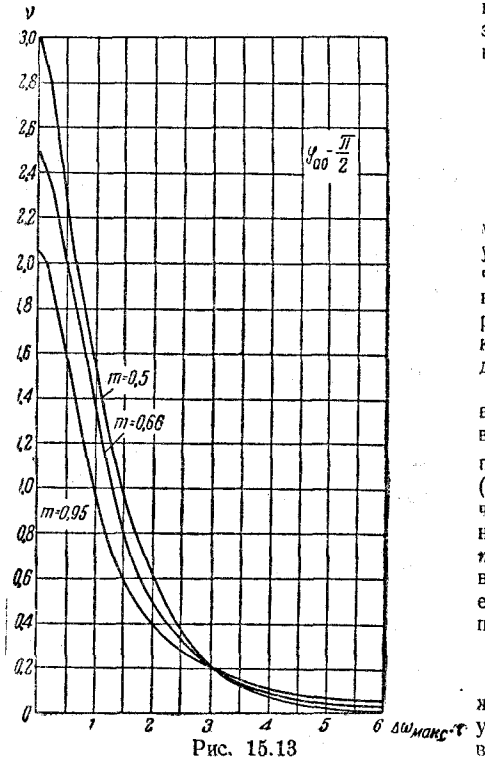


Рис. 15.13

Следовательно, величину

$$t_0 \approx \frac{3}{\Delta\omega_{макс}} = \frac{3\tau}{n} \qquad (15.46)$$

можно рассматривать как время установления режима захватывания частоты. Таким образом, длительность процесса установления возрастает с увеличением добротности контура и с уменьшением амплитуды вынуждающей силы.

Напомним, что приведённые выше результаты были получены в предположении, что $n \ll 1$. Опыт показывает, что ур-ния (15.45)—(15.46) хорошо отображают количественную сторону процесса установления фазы и частоты при $n \leqslant 0{,}3 \div 0{,}5$. При $n > 0{,}5 \div 0{,}7$ внешнее воздействие сопровождается значительным изменением амплитуды автоколебания.

При $n > 1$ и $\omega_c - \omega_0 < \frac{\omega_0}{4Q}$ режим принудительной синхронизации устанавливается практически мгновенно.

§ 15.4. Усилители с отрицательной обратной связью

Рассмотренные в главе 12, а также в предыдущих параграфах данной главы, системы характеризуются применением положительной обратной связи. Положительная обратная связь необходима для осуществления генерации колебаний или для повышения усиления (регенерация). Введение в усилитель отрицательной обратной связи, при которой часть выходного напряжения подаётся на вход усилителя в обратной фазе, должно приводить к снижению коэффициента усиления. Несмотря на этот неизбежный недостаток, применение отрицательной обратной связи позволяет существенно улучшить работу усилителя и в настоящее время получила широкое распространение в усилительной технике.

Первоначально отрицательная обратная связь предназначалась для компенсации нелинейных искажений в низкочастотных усилителях. В дальнейшем круг решаемых с помощью отрицательной обратной связи задач значительно расширился.

Для выяснения особенностей усилителя с отрицательной обратной связью рассмотрим обобщённую схему, представленную на рис. 15.14. Здесь обозначено: $\vec{E}$ — комплексная амплитуда синусоидального напряжения на входе системы (зажимы *1—1*), $K(i\omega)$ — коэффициент усиления собственно усилителя, т. е. отношение комплексной амплитуды выходного напряжения $\vec{U}$ к амплитуде напряжения на зажимах *2—2* и $\beta(i\omega)$ — комплексный коэффициент передачи линейного четырёхполюсника обратной связи.

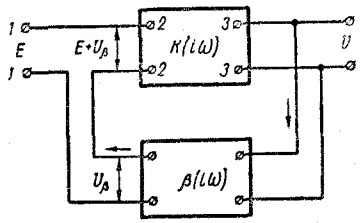


Рис. 15.14

Очевидно

$$\beta(i\omega) = \frac{\vec{U}_\beta}{\vec{U}}, \qquad (15.47)$$

где $\vec{U}_\beta$ — напряжение обратной связи, подаваемое последовательно с усиливаемым напряжением $\vec{E}$ на вход усилителя.

Основной интерес представляет отношение выходного напряжения $\vec{U}$ к напряжению входа $\vec{E}$, т. е. коэффициент усиления рассматриваемой системы.

Для определения этого коэффициента воспользуемся очевидными соотношениями:

$$\vec{U} = K(i\omega)\,(\vec{E} + \vec{U}_\beta) = K(i\omega)\,[\vec{E} + \beta(i\omega)\,\vec{U}],$$

откуда

$$\vec{U} = \frac{K(i\omega)\cdot\vec{E}}{1 - K(i\omega)\,\beta(i\omega)}$$

и, следовательно, комплексный коэффициент усиления устройства с обратной связью

$$\vec{K'} = \frac{\vec{U}}{\vec{E}} = \frac{K(i\omega)}{1 - K(i\omega)\,\beta(i\omega)}. \qquad (15.48)$$

В обычном усилителе с активным нагрузочным сопротивлением выходное напряжение сдвинуто на 180° относительно напряжения входа (см. § 10.2). Это означает, что $K(i\omega)$ является отрицательным и действительным числом. Если четырёхполюсник обратной

связи на частоте ω не вносит добавочных фазовых сдвигов, то $\beta(i\omega)$ является действительным числом, притом положительным. В этом случае произведение $K(i\omega)\,\beta(i\omega)$ — отрицательная действительная величина и выражение (15.48) может быть переписано в форме

$$|K'| = \frac{|K|}{1+|K||\beta|}, \qquad (15.48')$$

где $|K|$ и $|\beta|$ — абсолютные величины коэффициентов передачи прямого и обратного каналов.

Таким образом, введение отрицательной обратной связи снижает коэффициент усиления устройства в $1+|K||\beta|$ раз.

Выясним теперь влияние отрицательной обратной связи на нелинейные искажения, которые возникают в основном усилителе из-за кривизны вольтамперных характеристик ламп. При синусоидальном напряжении на входе эти искажения проявляются в виде высших гармонических усиливаемой частоты. Допустим, что в отсутствие обратной связи и при подаче на вход амплитуды E_1, амплитуда одной из гармоник напряжения на выходе усилителя равна U_n, а амплитуда основной частоты U_1. Усилитель с искажениями можно представить в виде идеального линейного усилителя, на вход которого действует „генератор гармоник", как это показано на эквивалентной схеме рис. 15.15.

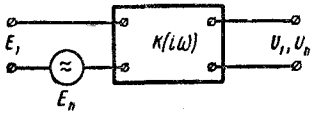


Рис. 15.15

При этом отношения $\frac{E_n}{E_1}$ и $\frac{U_n}{U_1}$ одинаковы, так как коэффициент усиления $K(i\omega)$ считается одинаковым как для основной частоты, так и для частоты n-ой гармоники. Таким образом, амплитуда эдс эквивалентного генератора должна быть приравнена $E_n = \frac{U_n}{K}$.

При введении отрицательной обратной связи, для получения на выходе прежней амплитуды U_1 входное напряжение E_1 необходимо увеличить в $1+|K\beta|$ раз, как это вытекает из ф-лы (15.48'). Это обстоятельство отражено на рис. 15.16 в виде дополнительного усилителя с коэффициентом усиления $1+|K\beta|$. Следует, однако, иметь в виду, что напряжение основной частоты, действующее непосредственно на зажимах *3—3*, остаётся таким же, как и в схеме без отрицательной обратной связи, представленной на рис. 15.15. Действительно, рассматриваемое напряжение является разностью между напряжением $E_2 = E_1\,(1+|K\beta|)$, действующим на зажимах *2—2* (рис. 15.16), и напряжением обратной связи $|\beta|\,U_1$, т. е.

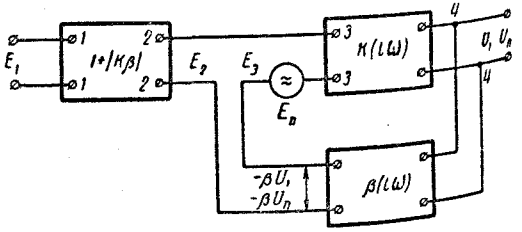


Рис. 15.16

$$E_3 = E_2 - |\beta|\,U_1 = E_1\,(1+|K\beta|) - |\beta|\,U_1.$$

Но $E_1 K$ есть не что иное, как U_1 (рис. 15.15). Следовательно, $E_3 = E_1 + E_1|K\beta| - |\beta|\,U_1 = E_1 + |\beta|\,U_1 - |\beta|\,U_1 = E_1$. Так как результирующее напряжение основной частоты на зажимах *3—3* остаётся таким же, как и в отсутствие обратной связи, то амплитуда E_n эквивалентного генератора гармоник должна быть оставлена неизменной, поскольку при заданном усилителе уровень нелинейных искажений определяется только амплитудой приложенного непосредственно на вход усилителя напряжения. Учитывая теперь напряжение обратной связи по n-й гармонике, равное $|\beta|\,U_n$, которое вычитается из эдс E_n, получим на выходе напряжение

$$U_n = K\,(E_n - |\beta|\,U_n), \qquad (15.49)$$

откуда

$$U_n = \frac{KE_n}{1+|K\beta|}.$$

Таким образом, отношение

$$\frac{U_n}{U_1} = \frac{KE_n}{[1+|K\beta|]\,KE_1} = \frac{\frac{E_n}{E_1}}{1+|K\beta|} \qquad (15.50)$$

получается в $1+|K\beta|$ раз меньше, чем в отсутствие обратной связи. Правда, это улучшение достигается ценой увеличения в $1+|K\beta|$ раз напряжения, подводимого к зажимам *2—2* (рис. 15.16). Это не является, однако, существенным недостатком, так как дополнительное усиление может быть осуществлено в одном из предварительных каскадов (маломощных) без искажений.

Само собой разумеется, что проведённое выше рассуждение может быть распространено на все гармоники усиливаемого напряжения. Ясно также, что применение отрицательной обратной связи позволяет, помимо ослабления нелинейных искажений, понизить и уровень „фона", обусловленного пульсацией питающих напряжений и питанием накала катодов ламп переменным током.

Таким образом, все колебания побочных частот, возникающие в самом усилителе как из-за нелинейности характеристик ламп, так и из-за несовершенства источников питания, ослабляются обратной связью в $1+|K\beta|$ раз.

Перечисленными достоинствами не ограничиваются возможности отрицательной обратной связи. Одним из ценных свойств усилителей, охваченных „глубокой" противосвязью, является высокая стабильность коэффициента усиления устройства при весьма больших колебаниях величин питающих напряжений,

нагрузочных сопротивлений и т. д. Действительно, если произведение $|K\beta| \gg 1$ (глубокая противосвязь), то выражение (15.48) переходит в следующее приближённое равенство:

$$K' \approx \frac{1}{\beta}. \tag{15.51}$$

Отсюда видно, что при $|K\beta| \gg 1$ усиление системы определяется в основном цепью обратной связи. Так как последняя обычно не содержит ламп, то усиление K' получается весьма стабильное.

Из выражения (15.51) вытекает также и то, что отрицательная обратная связь позволяет улучшить равномерность частотной характеристики усилителя; для этого необходимо обеспечить равномерность частотной характеристики $\beta(i\omega)$ канала обратной связи, что является задачей гораздо более лёгкой, чем обеспечение равномерности частотной характеристики мощного усилителя.

При проведённом выше упрощённом рассмотрении не учитывались дополнительные фазовые сдвиги, которые неизбежны в апериодическом усилителе и в цепи обратной связи. В § 15.5 будет показано, что указанные сдвиги могут при некоторых условиях нарушать устойчивую работу усилителя.

§ 15.5. Устойчивость усилителей с обратной связью

Обратимся к обобщённой схеме усилителя с обратной связью, представленной на рис. 15.14, и допустим, что в основном усилителе или в цепи обратной связи имеются элементы, создающие дополнительные фазовые сдвиги (паразитные ёмкости, переходные конденсаторы, индуктивности рассеяния обмоток трансформатора и др.). Если на какой-либо частоте, лежащей в полосе усиливаемых частот или вне её, эти сдвиги дают в сумме дополнительный угол в 180°, то обратная связь из отрицательной превращается в положительную и может возникнуть паразитная генерация.

Опасность возникновения генерации тем больше, чем больше величина $|K\beta|$. Это обстоятельство сильно ограничивает эффективность применения отрицательной обратной связи.

Для уменьшения фазовых сдвигов необходимо применять специальные меры при конструировании усилителя. Желательно сводить к минимуму влияние реактивных элементов, особенно таких, как индуктивность рассеяния обмоток трансформаторов. Так как трансформаторы вносят значительные фазовые сдвиги, обратную связь обычно осуществляют таким образом, чтобы трансформатор не входил в кольцо обратной связи. Пример подобной схемы представлен на рис. 15.17. В случае сложных усилителей борьба с паразитной генерацией при больших $|K\beta|$ является трудной задачей, требующей применения специальных фазокомпенсаторов

и других устройств для отдаления частоты возможной генерации от полосы полезных (усиливаемых) частот, а также для внесения затухания в области частот возможной генерации. Часто оказывается, что введение в схему новых элементов приводит лишь к смещению частоты паразитной генерации в область очень низких или очень высоких частот. Поэтому использование отрицательной обратной связи тесно связано с проблемой обеспечения устойчивости усилителя.

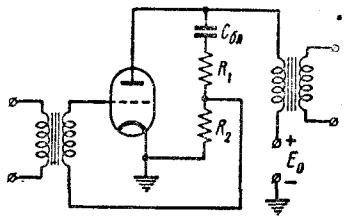


Рис. 15.17

Для правильного построения системы и выбора её параметров большое значение приобретают методы определения устойчивости усилителя. Применительно к усилителям с отрицательной обратной связью наиболее простым и наглядным является амплитудно-фазовый или частотный метод. Суть этого метода заключается в следующем. Разомкнём систему усилителя[1]) с обратной связью, представленную на рис. 15.18, в точках $a - a$ и составим выражение для коэффициента передачи двух каскадно соединённых линейных четырёхполюсников: $K(i\omega)$ и $\beta(i\omega)$ (рис. 15.19). Можно, очевидно, написать:

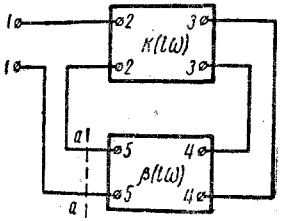


Рис. 15.18

$$H(i\omega) = K(i\omega)\,\beta(i\omega) = a(\omega) + i\,b(\omega) = |K(i\omega)|\,|\beta(i\omega)|\,e^{i(\varphi_k + \varphi_\beta)} = |H(i\omega)|\,e^{i\varphi(\omega)}. \tag{15.52}$$

Модуль и аргумент

$$H = |K\beta| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \tag{15.53}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_k + \varphi_\beta = \operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \tag{15.54}$$

полученного коэффициента передачи являются функциями частоты.

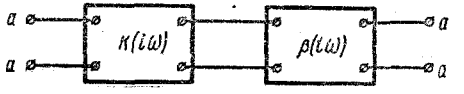


Рис. 15.19

Если при изменении ω от 0 до ∞ аргумент φ не достигает величины 2π, то замкнутая система (рис. 15.18) устойчива при любой величине $|K\beta|$.

[1]) При исследовании системы на устойчивость зажимы $1-1$ на рис. 15.18 считаем короткозамкнутыми.

Действительно, как это было выяснено в § 12.6, для возникновения генерации должно быть выполнено условие фазового баланса: $\Sigma\varphi = n \cdot 2\pi$, где n — любое целое число.

Если существуют частоты, при которых $\varphi = \varphi_k + \varphi_\beta = n \cdot 2\pi$, но $H = |K\beta| < 1$, то генерация на этих частотах также невозможна, поскольку не выполняется условие амплитуд (см. § 12.4).

Отсюда следует, что паразитная генерация возможна только на частотах, при которых одновременно выполняются следующие два условия:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k + \varphi_\beta &= n \cdot 2\pi \\ H = |K\beta| &> 1 \end{aligned}\right\} \qquad (15.55)$$

Вычисление амплитудной (частотной) $H(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ характеристик для усилителя с цепью обратной связи обычно не представляет большой сложности. Построив графики $|K\beta|$ и $\varphi_k + \varphi_\beta$ в функции частоты, можно получить наглядное представление об устойчивости системы.

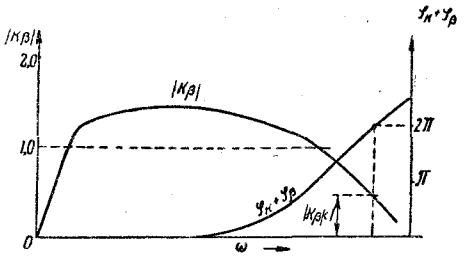


Рис. 15.20

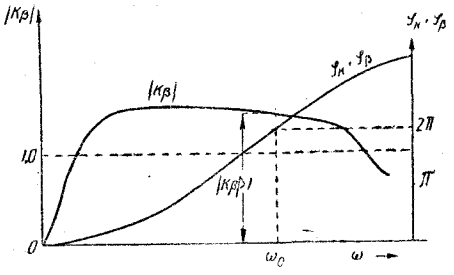


Рис. 15.21

Пример указанных графиков для устойчивой системы показан на рис. 15.20, а для неустойчивой на рис. 15.21.

Величина $|K\beta|$ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ в обычных усилителях, как правило, обращается в нуль. При $\omega \to 0$ это обусловлено влиянием последовательно включённых конденсаторов в канале K или β, а при $\omega \to \infty$ влиянием шунтирующих ёмкостей (междуэлектродные ёмкости, ёмкость монтажа и т. д.). В усилителях постоянного тока и в некоторых других устройствах, не содержащих разделительных конденсаторов, при $\omega \to 0$ величина $|K\beta|$ может принимать конечное значение.

Полное изменение аргумента (фазы) при изменении ω от 0 до ∞ зависит от характера и числа звеньев системы.

Приведенное выше условие устойчивости более сжато формулируется при представлении комплексного коэффициента передачи в полярной системе координат H, φ. В этой системе координат коэффициент передачи $H(i\omega)$ изобразится в виде вектора длиной H, проведённого под углом φ к положительному направлению действительной оси a (рис. 15.22). При изменении частоты ω конец этого вектора описывает кривую, называемую годографом амплитудно-фазовой характеристики.

При наличии в замкнутом кольце обратной связи переходных конденсаторов или шунтирующих ёмкостей модуль H, как ранее уже отмечалось, при $\omega = 0$ или $\omega \to \infty$ обращается в нуль. Поэтому, для подобных систем годограф амплитудно-фазовой характеристики при изменении ω от 0 до ∞ начинается и заканчивается в начале координат.

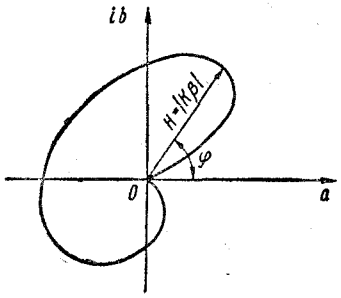


Рис. 15.22

Предположим, что при некотором значении ω_0 фаза достигает величины 2π, но система всё же остаётся устойчивой. Согласно условию (15.55) для этого необходимо, чтобы величина $|K\beta|$ при частоте ω_0 была меньше единицы.

Так как при $\varphi = n \cdot 2\pi$ мнимая часть комплексного коэффициента передачи равна

$$b(\omega_0) = H \sin\varphi = 0,$$

а действительная

$$a(\omega_0) = H \cos\varphi = H,$$

то, условие (15.55) означает, что отсекаемый годографом отрезок положительной действительной оси, соответствующий величине $|K\beta|$ при частоте возможной генерации ω_0, для устойчивой системы должен быть меньше единицы.

Для устойчивой системы этот отрезок меньше единицы. Если же этот отрезок превышает единицу, т. е. $|K\beta| > 1$, то все необходимые для возникновения генерации условия выполняются и система неустойчива.

Отсюда вытекает так называемый критерий устойчивости Найквиста:

если годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы обратной связи не охватывает точку 1, i0, — система устойчива. В противном случае система неустойчива.

Примеры диаграмм Найквиста для двух систем — устойчивой и неустойчивой — приведены на рис. 15.23 и 15.24. В случае сложных цепей годограф может принимать более сложную форму, при которой возможно и многократное пересечение действительной оси.

Более общая формулировка критерия Найквиста будет приведена в следующем параграфе при рассмотрении общих методов анализа устойчивости систем.

Если кривая $H(i\omega)$ охватывает точку 1, i 0 и система неустойчива, то возникает генерация на частоте ω_0, при которой $b(\omega)=0$. По существу, этот результат совпадает с условием для определения частоты, приведённым в гл. 12. § 4.

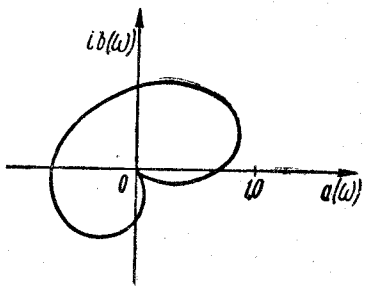


Рис. 15.23

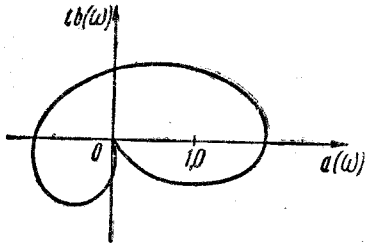


Рис. 15.24

Амплитуда колебаний при возникновении автоколебаний возрастает до тех пор, пока не вступает в действие нелинейность характеристик ламп усилителя, которая с ростом амплитуд приводит к снижению средней крутизны и, следовательно, к уменьшению усиления $|K(i\omega)|$. Когда величина $|K\beta|$ снижается до единицы, наступает стационарный режим автоколебаний. Подробное рассмотрение режима генерации для неустойчивого усилителя не представляет большого практического интереса. Основное значение описанного выше метода заключается в выявлении условий, обеспечивающих устранение возможности возникновения генерации.

В случае же устойчивости усилитель, охваченный отрицательной обратной связью, может рассматриваться как линейная система.

§ 15.6. Критерии устойчивости систем с обратной связью

Широкое применение систем с обратной связью как в усилительной технике, так и в технике автоматического регулирования, привело к существенному развитию методов исследования устойчивости.

В зависимости от характера исследуемой системы — электрической (электронной), электромеханической, содержащей звенья с сосредоточенными или распределёнными постоянными, могут оказаться удобными различные критерии устойчивости. Наряду с амплитудно-фазовым методом в последнее время всё бóльшее распространение получает так называемый критерий Гурвица—Рауса. Этот критерий, основанный на исследовании коэффициентов характеристического уравнения, описывающего поведение системы, может быть назван алгебраическим методом.

Некоторые из результатов, вытекающих из анализа корней характеристического уравнения, оказываются полезными также и для обоснования и развития амплитудно-частотного метода. Остановимся

поэтому несколько более подробно на выяснении сути алгебраического критерия устойчивости.

Пусть задано однородное дифференциальное уравнение линейной системы с сосредоточенными постоянными в виде:

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n=0, \qquad (15.56)$$

где x — ток, напряжение, перемещение и т. д., а постоянные коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... a_n — действительные числа, зависящие от параметров системы.

Решение ур-ния (15.56), как известно, имеет вид

$$x=\sum_{i=1}^{n}A_i\,e^{p_it}, \qquad (15.57)$$

где A_i — постоянные, а p_i — корни характеристического уравнения:

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0. \qquad (15.58)$$

Условие устойчивости состояния покоя системы заключается в том, что после прекращения действия внешних возмущений система возвращается к исходному состоянию. Для этого необходимо, чтобы возникающие в системе при нарушении состояния покоя свободные (переходные) токи и напряжения были затухающими. А это, в свою очередь, означает, что корни p_1, p_2, ... p_n ур-ния (15.58) должны быть либо отрицательными действительными величинами, либо комплексными корнями с отрицательными действительными частями. Из этих простых физических соображений вытекает следующий фундаментальный критерий устойчивости любых линейных систем[1]):

система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения системы отрицательны.

Простым примером, поясняющим этот критерий, может служить приведённое в § 12.8 линейное уравнение 2-го порядка, описывающее поведение автогенератора при малых амплитудах (в начале запуска). При $\frac{MS}{C}<r$, когда $\alpha_э=\frac{r_э}{2L}>0$, корни характеристического уравнения $p_{1,2}=-\alpha_э\pm i\omega_0$ обладают отрицательными действительными частями и в системе возможны только затухающие колебания—система устойчива. При $\frac{MS}{C}>r$ действительные части стано-

[1]) Это фундаментальное положение было обосновано А. М. Ляпуновым, который в 90-х годах прошлого века заложил основы теории устойчивости. Рассматриваемый в данной главе вопрос об устойчивости состояния покоя системы является частным случаем общей теории Ляпунова.

вятся положительными и в системе возникают нарастающие по амплитуде колебания — система неустойчива.

Отметим, что в случае квадратного характеристического уравнения для отрицательности действительных частей корней достаточно потребовать, чтобы коэффициенты уравнения a_0, a_1 и a_2 были положительны (точнее — одинакового знака).

Действительно, приведя характеристическое уравнение к виду

$$p^2+\frac{a_1}{a_0}p+\frac{a_2}{a_0}=0 \tag{15.59}$$

и учитывая известные соотношения между корнями квадратного уравнения:

$$\left.\begin{aligned} p_1+p_2&=-\frac{a_1}{a_0}\\ p_1p_2&=\frac{a_2}{a_0}\end{aligned}\right\}, \tag{15.60}$$

приходим к следующему выводу. Если оба корня вещественные (действительные) и отрицательные, то их произведение положительно, следовательно $\frac{a_2}{a_0}>0$. Из первого же выражения (15.60) ясно, что если p_1 и p_2 отрицательны, то $\frac{a_1}{a_0}>0$. Следовательно, $a_0>0$, $a_1>0$ и $a_2>0$.

Нетрудно провести аналогичное рассуждение и для случая сопряжённо-комплексных корней.

В случае кубического характеристического уравнения

$$a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0 \tag{15.61}$$

корни p_1, p_2 и p_3 связаны между собой следующими соотношениями: [1])

$$\left.\begin{aligned} p_1+p_2+p_3&=-\frac{a_1}{a_0}\\ p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1&=\frac{a_2}{a_0}\\ p_1p_2p_3=(-1)^3\frac{a_3}{a_0}&=-\frac{a_3}{a_0}\end{aligned}\right\}. \tag{15.62}$$

Из первого выражения следует, что если действительные части всех корней отрицательны[2]), то и $-\frac{a_1}{a_0}<0$, т. е. $a_1>0$ (коэффициент a_0 считаем положительным). Далее, из третьего выражения следует, что если все три корня действительные и отрицательные числа, то их произведение отрицательно и $\frac{a_3}{a_0}>0$.

Если же два корня сопряжённые комплексные, $p_1=-\alpha+i\omega$ и $p_2=-\alpha-i\omega$, то $\frac{a_3}{a_0}$ равно произведению действительного корня p_3 на произведение

$$p_1p_2=(-\alpha+i\omega)(-\alpha-i\omega)=\alpha^2+\omega^2>0.$$

Поэтому, если p_3 отрицательно, то снова $a_3>0$. Рассмотрим, наконец, коэффициент a_2. Если все корни действительны и отрицательны, то непосредственно из второго выражения (15.62) видно, что $\frac{a_2}{a_0}>0$. Допустим теперь, что корни p_1 и p_2 — сопряжённые комплексные. Представив второе выражение (15.62) в форме

$$\frac{a_2}{a_0}=p_1p_2+p_3(p_1+p_2),$$

замечаем, что произведение p_1p_2 всегда положительно, а сумма p_1+p_2 обладает тем же знаком, что и действительные части корней p_1 и p_2. Поэтому, если p_3, а также действительные части корней p_1 и p_2 отрицательны, то $\frac{a_2}{a_0}$ снова положительно.

Итак, приходим к выводу, что в случае кубического характеристического уравнения для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a_0>0;\ a_1>0,\ a_2>0 \text{ и } a_3>0. \tag{15.63}$$

Этих условий оказывается, однако, недостаточно.

Из предыдущих рассуждений видно, что к условию (15.63) можно придти и в том случае, если исходить из предположения о положительности действительных частей корней p_1 и p_2. Следовательно, для устойчивости системы ещё необходимо, чтобы соотношения между положительными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и a_3 отвечали определённым условиям.

Обращаясь к характеристическому ур-нию (15.61) замечаем, что если a_3 очень велико по сравнению с a_0, a_1 и a_2, то ур-ние (15.61) вырождается в простое уравнение:

$$p^3+\frac{a_3}{a_0}=0.$$

[1]) В. Н. Смирнов. Курс высшей математики, т. I. ОГИЗ, 1948, стр. 442.

[2]) Как известно из математики, при действительных коэффициентах исходного дифференциального уравнения возможны следующие два случая: либо все корни действительные, либо один действительный, а два других сопряжённо-комплексные

Корни этого уравнения будут:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$p_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$p_3 = -\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Так как действительные части корней p_1 и p_2 положительны, приходим к выводу, что при сделанном допущении относительно величины a_3 система неустойчива.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда a_3 очень мало по сравнению с a_0, a_1 и a_2, так что ур-ние (15.61) приближённо может быть заменено квадратным уравнением

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Из приведённого выше рассмотрения квадратного характеристического уравнения уже известно, что положительность коэффициентов a_0, a_1 и a_2 обеспечивает устойчивость системы.

Можно поэтому утверждать, что при уменьшении положительного коэффициента a_3 от очень больших значений к очень малым, обязательно найдётся такое критическое значение a_3, при котором корни p_1 и p_2 будут чисто мнимыми. При этом значении a_3 в системе возможно существование гармонических (незатухающих) колебаний.

В этой критической точке

$$p_{1,2} = \pm i\omega_0,$$

где ω_0 — частота колебаний.

Подставляя эти значения p_1 и p_2 в исходное ур-ние (15.61) и производя несложные преобразования, получаем два уравнения:

$$\omega_0^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0,$$

$$\omega_0^2 - \frac{a_3}{a_1} = 0.$$

Отсюда находим следующее условие для определения критического значения a_3:

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_3}{a_1},$$

или

$$a_3 = \frac{a_1 a_2}{a_0}. \qquad (15.64)$$

При $a_3 > \frac{a_1 a_2}{a_0}$ система неустойчива, при $a_3 < \frac{a_1 a_2}{a_0}$ — устойчива.

Итак, необходимыми и достаточными условиями устойчивости системы, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка, являются следующие неравенства:

$$\left.\begin{array}{c} a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0 \\ a_0 a_3 < a_1 a_2 \end{array}\right\}. \qquad (15.65)$$

Проведение подобного анализа для характеристических уравнений четвёртой и более высоких степеней является весьма сложной задачей.

В таких случаях определение устойчивости системы может быть произведено с помощью теоремы Гурвица[1]), которая гласит, что для того, чтобы действительные части всех корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с действительными коэффициентами и $a_0 > 0$ были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, составленные из коэффициентов уравнения $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ по следующей схеме:

$$\Delta_1 = a_1,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

При составлении определителей по этой схеме коэффициенты с индексом, превышающим степень характеристического уравнения, заменяются нулями.

[1]) Доказательство этой теоремы см., например, в книге А. Г. Курош. Курс высшей алгебры, 1949, стр. 287.

Поэтому, например, для уравнения четвёртой степени получаются следующие определители:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все последовательные определители являются главными диагональными минорами определителя Δ_n. Так как последний столбец определителя Δ_n содержит лишь один отличный от нуля элемент a_n, расположенный на главной диагонали, то выполняется равенство

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Отсюда следует, что в соответствии с теоремой Гурвица условия устойчивости могут быть сформулированы в виде следующих неравенств:

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_{n-1} > 0, \ a_n > 0.$$

Так, например, для характеристического уравнения второй степени получаем:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \ a_2 > 0.$$

Для уравнения третьей степени:

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0,$$

$$a_3 > 0,$$

т. е. $a_1 > 0, \ a_1 a_2 > a_3 a_0, \ a_3 > 0.$

Так как a_0, a_1 и a_3 положительны, то и $a_2 > 0$.

Для уравнения четвёртой степени:

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_1^2 a_4 > 0,$$

$$a_4 > 0.$$

Из третьего условия на основании четвёртого вытекает неравенство

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_1^2 a_4 > 0.$$

Можно поэтому второе условие заменить условием $a_3 > 0$. Таким образом, для уравнения четвёртой степени получаются следующие условия устойчивости:

$$a_1 > 0, \ a_3 > 0, \ a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0, \ a_4 > 0.$$

С помощью теоремы Гурвица можно обосновать также критерий Рауса, который является разновидностью критерия Гурвица.

Критерий устойчивости, основанный на отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы, является тем фундаментом, на котором базируются все другие критерии.

Можно, в частности, утверждать, что для устойчивой линейной системы коэффициент передачи $K(p)$, определяемый выражением (6.50), может иметь полюсы только в левой полуплоскости комплексного переменного $p = \sigma + i\omega$. Действительно, знаменатель правой части выражения (6.50) представляет собой не что иное, как характеристическое уравнение системы.

Если все корни p_1, p_2 и т. д. уравнения

$$\Delta(p) = 0$$

имеют вид

$$p_k = -\alpha_k \pm i\omega_{0k},$$

где $\alpha_k > 0$, то в выражении (6.50) множители вида $(p - p_k) = (p \pm i\omega_{0k} + \alpha_k)$ могут обращаться в нуль только в том случае, когда $\mathrm{Re}(p) < 0$, т. е. в левой полуплоскости переменного $p = \sigma + i\omega$.

Итак, наличие полюсов $K(p)$ в правой полуплоскости указывает на то, что система неустойчива.

Это обстоятельство может быть использовано для обоснования изложенного в предыдущем параграфе критерия Найквиста, а также для выработки некоторых правил, облегчающих применение этого критерия в случае сложных систем.

Именно, понимая под коэффициентом передачи системы с обратной связью величину [см. ф-лу (15.48)]:

$$K'(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)\beta(p)} = \frac{K(p)}{1 + T(p)}, \qquad (15.66)$$

где

$$T(p) = -K(p)\beta(p) = -H(p), \qquad (15.67)$$

можно определять устойчивость системы по положению полюсов $K'(p)$ на плоскости p.

Система устойчива, если функция $K'(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости p.

Так как по условию функция $K(p)$ не может иметь полюсов в правой полуплоскости, то остаётся потребовать, чтобы функция

$$F(p) = 1 + T(p) \qquad (15.68)$$

не имела нулей в правой полуплоскости p.

Это означает, что показанный на рис. 15.25 замкнутый контур на плоскости $p = \sigma + i\omega$, образованный мнимой осью $i\omega$ и дугой бесконечно большого ра-

диуса R, не должен охватывать такой точки p, в которой функция $F(p)$ обращается в нуль.

Перейдём теперь от плоскости p к плоскости $F(p)$, т. е. такой плоскости, на действительной и мнимой осях которой откладываются, соответственно, действительная u_F и мнимая v_F части комплексной функции $F(p)$. Тогда замкнутому контуру обхода C (на плоскости p, рис. 15.25) будет соответствовать также замкнутый контур на плоскости $F(p)$. При этом движению точки p вдоль оси $i\omega$ (рис. 15.25) соответствует уравнение функции

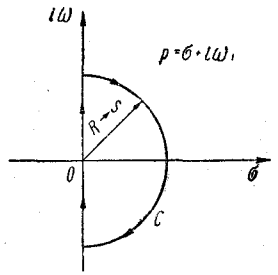


Рис. 15.25

$$F(p) = F(i\omega) = 1 + T(i\omega), \qquad (15.68)$$

а при движении точки p по дуге бесконечно большого радиуса R, уравнение будет

$$F(\infty) = 1,$$

так как при $\omega \to \infty$, $T(i\omega) = -H(i\omega) \to 0$ (см. § 15.5).

Следовательно, изменяя ω от $-\infty$ до $+\infty$, получим замкнутый контур функции $F(i\omega)$ на плоскости u_F, v_F. Подобный контур для устойчивой системы показан на рис. 15.26. Сплошной линией показана часть контура, соответствующая частотам $0 < \omega < +\infty$, а пунктирной — частотам $-\infty < \omega < 0$.

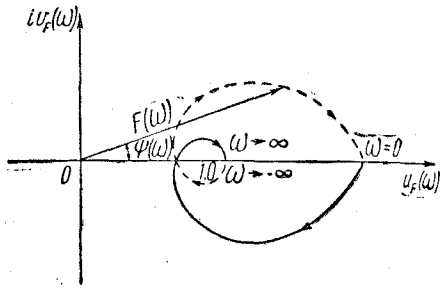


Рис. 15.26

Так как функция $u_F(\omega)$ — чётная относительно ω, а $v_F(\omega)$ — нечётная, то оба участка контура симметричны относительно действительной оси.

Замечаем, что если описываемый концом вектора $F(\omega)$ контур не охватывает начала координат, то полное изменение аргумента этого вектора при обходе замкнутого контура равно нулю.

Если же начало координат охватывается контуром, то каждому обороту вектора F вокруг нулевой точки будет соответствовать один переход амплитудно-фазовой характеристики через отрезок действительной оси $(-\infty, 0)$.

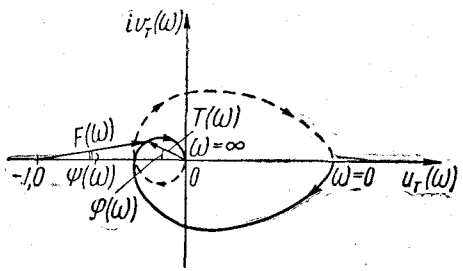


Рис. 15.27

Если считать переход из верхней полуплоскости в нижнюю положительным, а с нижней полуплоскости в верхнюю отрицательным (обход по годографу производится по возрастанию ω), то для того, чтобы полное изменение аргумента ϕ вектора F равнялось нулю, т. е. для устойчивости системы необходимо, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами амплитудно-фазовой характеристики отрезка действительной оси $(-\infty, 0)$ равнялась нулю.

Переходя от функции $F(i\omega) = 1 + T(i\omega)$ к функции $T(i\omega) = F(i\omega) - 1$, получим рис. 15.27, отличающийся от рис. 15.26 сдвигом годографа на одну единицу влево.

Применительно к плоскости u_T, v_T требование $\Delta\phi(\omega) = 0$ означает, что годограф $T(i\omega)$ должен либо вовсе не пересекать отрезок действительной оси $(-\infty, -1)$, либо пересекать его в положительном и отрицательном направлениях одинаковое число раз.

Для перехода к годографу $H(i\omega) = K(i\omega)\beta(i\omega)$, т. е. к амплитудно-фазовой характеристике разомкнутого тракта обратной связи, нужно в соответствии с выражением (15.68) повернуть годограф рис. 15.27 на 180°. Таким образом получим рис. 15.28, на котором, как и в § 15.5, критической точкой является точка $+1,0$.

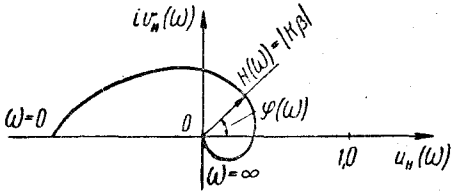


Рис. 15.28

При таком изображении годографа необходимо подсчитывать число положительных и отрицательных переходов через отрезок оси $u_H(1, \infty)$. u_H и v_H совпадают с $a(\omega)$ и $b(\omega)$, принятыми для обозначения $H\cos\varphi$ и $H\sin\varphi$ в § 15.5.

На рис. 15.28 показан годограф амплитудно-фазовой характеристики для устойчивой системы, а на рис. 15.29 для неустойчивой. В первом случае годограф вообще не пересекает отрезок оси $(1, \infty)$, а во втором имеются два положительных и ни одного отрицательного перехода через указанный отрезок (построение показано только для $\omega > 0$).

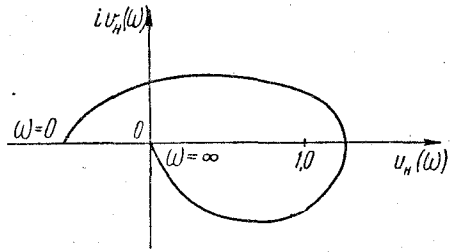


Рис. 15.29

Пример 15.1. В качестве иллюстрации применения критерия Найквиста определим условия устойчивости однокаскадного усилителя высокой частоты, представленного на рис. 15.30, в котором ёмкость анод — сетка лампы создаёт паразитную обратную связь между анодной и сеточной цепями. Для упрощения параметры анодного и сеточного контуров будем считать одинаковыми.

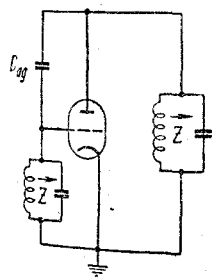


Рис. 15.30

Комплексный коэффициент усиления схемы определяется выражением:

$$\vec{K} \approx -SZ_э, \qquad (15.69)$$

где $\vec{Z}_э$ — сопротивление контура.

Для определения коэффициента обратной связи $\vec{\beta}$ можно исходить из эквивалентной схемы, показанной на рис. 15.31. На этой схеме через $\vec{U}_a$ обозначено напряжение, развиваемое на анодном контуре по каналу усиления $\vec{K}$, а через $\vec{U}_\beta$ — напряжение, поступающее на сетку по каналу обратной связи. Очевидно, что

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{U}_\beta}{\vec{U}_a} = \frac{Z_э}{Z_{ag} + 2Z_э}. \qquad (15.70)$$

Таким образом, для рассматриваемой схемы с обратной связью имеем

$$\vec{K}\cdot\vec{\beta}=-\frac{S\,Z_{э}^{2}}{Z_{ag}+2\,Z_{э}}. \tag{15.71}$$

Учитывая, что

$$Z_{э}=\frac{Z_{эр}}{1+\mathrm{i}\,\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_{p}}\,Q}=\frac{Z_{эр}}{1+\mathrm{i}a},$$

$$Z_{ag}=\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\,C_{ag}}$$

и вводя обозначение

$$\omega\,C_{ag}\,Z_{эр}=B,$$

приводим выражение (15.71) к следующему виду:

$$\vec{K}\,\vec{\beta}=-\frac{S\,Z_{эр}\,B}{2\,(a+B)-\mathrm{i}\,(1-a^{2}-2\,aB)}. \tag{15.72}$$

Представив полученный результат в форме

$$\vec{K}\cdot\vec{\beta}=x+\mathrm{i}\,y,$$

придём к следующим выражениям для действительной и мнимой частей произведения $\vec{K}\,\vec{\beta}$:

$$x=-\frac{2\,(a+B)\;S\,Z_{эр}\cdot B}{4\,(a+B)^{2}+(1-a^{2}-2\,aB)^{2}}, \tag{15.73}$$

$$y=-\frac{(1-a^{2}-2\,aB)^{2}\;S\,Z_{эр}\,B}{4\,(a+B)^{2}+(1-a^{2}-2\,aB)^{2}}. \tag{15.74}$$

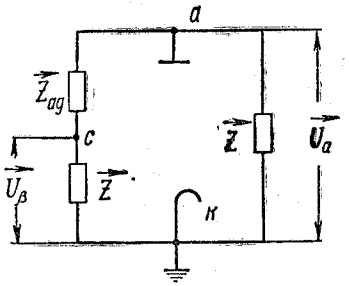


Рис. 15.31

Для выяснения положения точки 1,0 относительно годографа $\vec{K}\,\vec{\beta}$, приравняем y нулю и найдём частоту, соответствующую этому условию.

Получаем уравнение;

$$1-a^{2}-2\,aB=0,$$

откуда

$$a=-B\pm\sqrt{1+B^{2}}. \tag{15.75}$$

Заметим, что обычно величина B значительно меньше единицы. Можно поэтому считать

$$a\approx -B\pm 1. \tag{15.75'}$$

Таким образом, годограф пересекает действительную ось x при частотах, соответствующих обобщённым расстройкам:

$$a_{1}=-B+1,$$
$$a_{2}=-B-1.$$

При подстановке этих значений в выражение (15.73), получаем

$$\left.\begin{aligned}x_{1}&=-\frac{1}{2}\;S\,Z_{эр}\,B\\ x_{2}&=+\frac{1}{2}\;S\,Z_{эр}\,B\end{aligned}\right\}. \tag{15.76}$$

Отсюда видно, что a_1 соответствует пересечению годографом действительной оси x в отрицательной области, а a_2 — в положительной области. Таким образом, опасной, в смысле нарушения устойчивости, частотой является частота, определяемая из условия:

$$a_{2}=\frac{2\,(\omega-\omega_{p})}{\omega_{p}}=-B-1=-\omega\,C_{ag}\,Z_{эр}-1.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы годограф $\vec{K}\,\vec{\beta}$ не охватывал точки 1,0. В соответствии со вторым ур-нием (15.76), это будет обеспечено при условии

$$x_{2}=\frac{1}{2}\;S\,Z_{эр}\,\omega C_{ag}<1.$$

Следовательно, условие устойчивости окончательно можно записать в форме

$$S\,Z_{эр}\,\omega\,C_{ag}<2. \tag{15.77}$$

ГЛАВА 16

ЭЛЕМЕНТЫ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕХНИКИ

§ 16.1. Введение

В предыдущих разделах курса мы неоднократно ссылались на широкое развитие импульсной радиотехники и рассматривали ряд вопросов, важных для овладения этой техникой. Сюда относятся: гармонический анализ импульсных процессов, теория переходных процессов в радиоцепях, усиление коротких импульсов в видеоусилителях, процесс нарастания колебаний в автогенераторах и т. д. В данной главе будут рассмотрены некоторые способы получения коротких импульсов. Как и на протяжении всей книги, основное внимание уделяется принципиальной стороне изучаемых систем, выяснению физической сути явлений и их математическому описанию. Многочисленные вопросы проектирования и построения импульсных систем, составляющие содержание специальных дисциплин, в данном курсе не затрагиваются.

Изучение элементов импульсной техники начинается ниже с генераторов разрывных (релаксационных) колебаний (§§ 16.2 и 16.3). Хотя эти генераторы известны и применялись в радиоизмерительных устройствах задолго до возникновения импульсной техники, особое значение и широкое распространение генераторы разрывных колебаний — мультивибратор и блокинг-генератор — приобрели в связи с развитием импульсной техники.

§ 16.2. Мультивибратор

Для получения релаксационных (разрывных) колебаний в радиотехнике и электронике широко применяется схема, представленная на рис 16.1. Особенностью этой схемы является то, что анод первой лампы соединён через разделительный конденсатор с сеткой второй лампы, а анод второй — с сеткой первой лампы.

Если сопротивления R_{a1}, R_{g1} и R_{a2}, R_{g2} достаточно велики, так что усиление каждой из ламп превышает определённую величину, то собранное по схеме рис. 16.1 устройство не может находиться в состоянии покоя — неизбежно возникают колебания. Чтобы в этом

убедиться, допустим на мгновение, что колебаний нет и через лампы $Л_1$ и $Л_2$ протекают постоянные токи i_{a1} и i_{a2}. Тогда, очевидно, напряжения на конденсаторах C_{g1} и C_{g2} также постоянны, а на сетках обеих ламп напряжения равны нулю.

Обе лампы „открыты". Такое состояние не может быть устойчивым, так как достаточно сколь угодно малого возмущения (флуктуация электронного тока, тепловое движение электронов в сопротивлениях и т. д.), чтобы система вышла из состояния покоя. Действительно, пусть напряжение на сетке одной из ламп, например $Л_1$, получит незначительное положительное приращение в виде скачка напряжения. На сетку лампы $Л_2$ этот скачок передаётся усиленным по величине и изменённым по знаку (полярности). В результате ток i_{a1} возрастёт, а ток i_{a2} — снизится. Но на этом процесс не прекращается. С анода лампы $Л_2$ импульс передаётся обратно

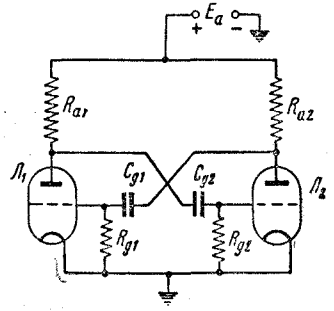


Рис. 16.1.

на сетку лампы $Л_1$ уже с положительной полярностью, что вызывает дальнейшее возрастание тока i_{a1} и т. д. В конце концов лампа $Л_2$ окажется „запертой", что и положит предел нарастанию тока i_{a1}. Существенно, что разобранный процесс запирания одной и отпирания другой лампы происходит, если не учитывать влияния междуэлектродных ёмкостей, мгновенно. Новое состояние также не может быть устойчивым и вслед за лавинообразным процессом начинаются относительно медленные процессы разряда и заряда конденсаторов, пока опять не произойдёт перебрасывание анодного тока из лампы $Л_1$ в лампу $Л_2$. В результате в схеме возникают колебания в виде периодической последовательности импульсов с крутыми фронтами и относительно пологими вершинами. Спектр колебания получается очень широкий, богатый гармониками. Этим и объясняется происхождение термина „мультивибратор".

Нетрудно видеть, что мультивибратор представляет собой обычный двухступенный усилитель на сопротивлениях, у которого выход соединён со входом. В отличие от генератора с колебательным контуром или от разобранного в § 12.10 генератора типа RC, в мультивибраторе необходимый для генерации фазовый баланс выполняется не на одной какой либо частоте, а в целой области частот, достаточно высоких, чтобы в цепочках C_{g2}, R_{g2} и C_{g1}, R_{g1} фазовые сдвиги были близки к нулю. При выполнении этого условия сумма фазовых сдвигов при обходе двух ступеней усиления оказывается близкой к 2π и в случае достаточно большого усиления создаются условия, необходимые для генерации.

Сказанное поясняется рис. 16.2 и 16.3, на которых показаны двухкаскадный усилитель на сопротивлениях и его амплитудная

и фазовая характеристики. Последняя в области низких частот определяется приближённым равенством:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\Omega C_{g2} R_{g2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\Omega C_{g1} R_{g1}}.$$

Чем больше ёмкости C_{g1} и C_{g2} и сопротивления R_{g1} и R_{g2}, тем ниже граничная частота $\Omega_{мин}$, при которой $\varphi(\Omega) = 0$,

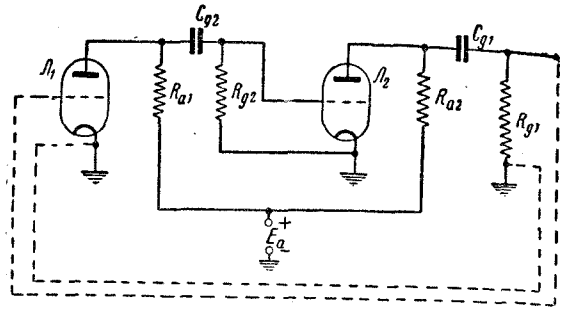


Рис. 16.2

следовательно, тем ниже основная частота релаксации[1]). Поведение же характеристик $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ в области высоких частот определяется влиянием шунтирующих ёмкостей, которые на рис. 16.2 не показаны (междуэлектродные и монтажные ёмкости).

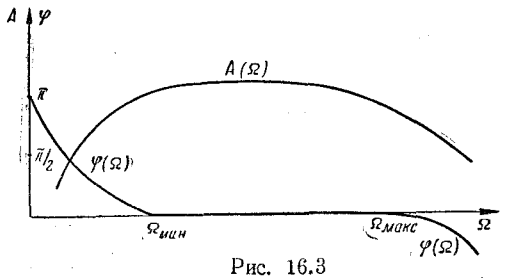


Рис. 16.3

Чем меньше эти ёмкости, тем выше граничная частота $\Omega_{макс}$ (рис. 16.3), при которой ещё выполняются условия фазового баланса и, следовательно, тем больше гармоник сохраняется в спектре колебаний мультивибратора, которые образуются при введении обратной связи в схему усилителя.

Само собой разумеется, что спектральный метод не годится для рассмотрения количественной стороны явлений в сугубо нелинейной системе, каковой является генератор релаксационных колебаний. Воспользуемся поэтому методом, основанным на отдельном рассмотрении двух состояний системы: первого — лавинообразного процесса отпирания и запирания ламп, и второго — относительно медленного заряда и разряда конденсаторов C_{g1} и C_{g2}.

Для удобства рассуждений сперва рассмотрим случай, когда процесс генерации начинается с момента замыкания петли обратной связи при заранее включённых источниках питания. Полученные результаты нетрудно будет использовать для исследования стационарного режима, устанавливающегося в мультивибраторе при любом способе запуска (обычно включением источников питания).

До замыкания петли обратной связи через лампы протекают постоянные токи, а на элементах схемы действуют только постоянные напряжения. Нетрудно определить величины этих токов и напряжений. Напряжения на сетках равны нулю, а анодные токи

$$i_{a1} = I_{01} = \frac{E_a}{R_{a1} + R_i}$$

и

$$i_{a2} = I_{02} = \frac{E_a}{R_{a2} + R_i}.$$

Полагая лампы одинаковыми и мультивибратор симметричным, т. е.

$$R_{a1} = R_{a2}, \quad R_{g1} = R_{g2} \text{ и } C_{g1} = C_{g2},$$

получим

$$i_{a1} = i_{a2} = I_0 = \frac{E_a}{R_a + R_i}. \qquad (16.1)$$

Анодный ток I_0 равен отрезку оси ординат (рис. 16.4), отсекаемому статической характеристикой $i_a(e_g)$, соответствующей анодному напряжению:

$$e_{a0} = E_a - I_0 R_a. \qquad (16.2)$$

Напряжения на конденсаторах C_{g1} и C_{g2} одинаковы, постоянны и равны:

$$U_{c1} = U_{c2} = e_{a0}. \qquad (16.3)$$

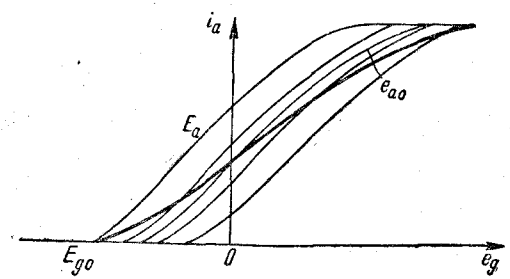


Рис. 16.4

Замкнём теперь петлю обратной связи (пунктирные линии на рис. 16.2) и допустим, что в момент замыкания, который примем за начало отсчёта времени, напряжение сетки одной из ламп, например $Л_1$, получило сколь угодно малое приращение. Для удобства рассуждений примем это возмущение в виде положительного скачка. Величину скачка обозначим через ΔE_{g1}.

[1]) Из того факта, что фазовая характеристика $\varphi(\Omega)$ обращается в нуль, строго говоря, при $\Omega \to \infty$, не следует делать вывод, что фазовый баланс невозможен для конечной частоты. Из-за искажения формы напряжений высшими гармониками средняя крутизна характеристики лампы становится комплексной. По своей природе это явление совпадает с влиянием высших гармоник на частоту автогенератора LC (см. § 12.8). Для восстановления фазового баланса требуется дополнительный фазовый сдвиг в линейной части схемы, т. е. в цепочках R, C. В результате устанавливается относительно низкая частота генерации, при которой φ составляет величину порядка нескольких градусов.

На выходе первого каскада усилителя, т. е. на сопротивлении R_{g2}, возникает отрицательное напряжение. Так как в первый момент изменение напряжения на ёмкости C_{g2} равно нулю, а междуэлектродные ёмкости здесь не учитываются, то усиление импульса в согласии с ф-лой (10.14) равно

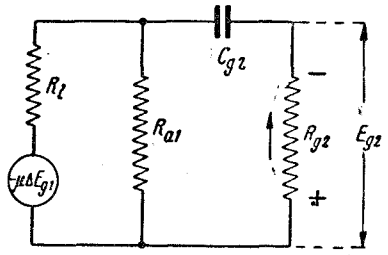


Рис. 16.5.

$$K_+ = SR_{э+}. \tag{16.4}$$

Здесь индекс $+$ при K указывает на то, что усиление определяется для положительного импульса на входе лампы. Величина $R_{э+}$ в соответствии с эквивалентной схемой, показанной на рис. 16.5, определяется выражением:

$$R_{э+} = \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{g2}}}. \tag{16.5}$$

Таким образом, напряжение на сетке лампы $Л_2$ будет равно

$$\Delta E_{g2} = -K_+ \Delta E_{g1}. \tag{16.6}$$

В тот же момент на выходе второго каскада усиления, т. е. на сетке лампы $Л_1$, возникнет положительное напряжение, равное

$$\Delta E'_{g1} = -K_- \Delta E_{g2} = K_+ K_- \Delta E_{g1}. \tag{16.7}$$

В данном случае через K_- обозначен коэффициент усиления отрицательного импульса, отличающийся от выражения (16.4) тем, что при определении эквивалентного сопротивления нагрузки необходимо учитывать сеточный ток лампы, на сетку которой подаётся положительное напряжение. Это обстоятельство на эквивалентной схеме

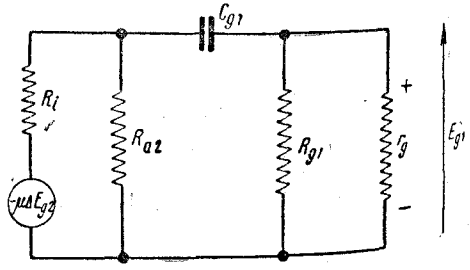


Рис. 16.6

рис. 16.6 учтено дополнительным сопротивлением r_g, шунтирующим сопротивление R_{g1}. Таким образом

$$K_- = SR_{э-}, \tag{16.8}$$

где

$$R_{э-} = \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{g1}} + \frac{1}{r_g}}. \tag{16.9}$$

Напряжение $\Delta E'_{g1}$, определяемое выражением (16.7), создаёт на сетке лампы $Л_2$ напряжение

$$\Delta E'_{g1} = -K_+ \Delta E'_{g1} = -K_+^2 \cdot K_- \Delta E_{g1}.$$

Итак, после первого кругового обхода замкнутого кольца обратной связи суммарное напряжение на сетке лампы $Л_1$ будет

$$E_{g1} = \Delta E_{g2} + \Delta E'_{g1} = \Delta E_{g1}(1 + K_+ K_-),$$

а на сетке лампы $Л_2$

$$E_{g2} = \Delta E_{g2} + \Delta E'_{g2} = -K_+ \Delta E_{g1} - K_+^2 K_- \Delta E_{g1} =$$
$$= -\Delta E_{g1} K_+ (1 + K_+ K_-).$$

После второго обхода получится

$$E_{g1} = \Delta E_{g1}(1 + K_+ K_- + K_+^2 K_-^2),$$

$$E_{g2} = -\Delta E_{g1} K_+ [1 + K_+ K_- + K_+^2 K_-^2] \text{ и т. д.}$$

После n-го обхода напряжения E_{g1} и E_{g2} достигнут следующих величин:

$$\left.\begin{aligned} E_{g1} &= \Delta E_{g1}[1 + K_+ K_- + K_+^2 K_-^2 + \cdots + K_+^n K_-^n] \\ E_{g2} &= -\Delta E_{g1} K_+ [1 + K_+ K_- + K_+^2 K_-^2 + \cdots + K_+^n K_-^n] \end{aligned}\right\}. \tag{16.10}$$

Если выполняется условие

$$K_+ K_- > 1, \tag{16.11}$$

то при стремлении n к ∞ бесконечные ряды в правых частях выражений (16.10) являются расходящимися. Это означает, что при допущении о линейности характеристик ламп любое сколь угодно малое возмущение ΔE_{g1} приводит к неограниченному возрастанию E_{g1} и $|E_{g2}|$. Иными словами, неравенство (16.11) является условием самовозбуждения системы.

Выражения (16.10) и (16.11) справедливы, пока E_{g1} и E_{g2} по абсолютной величине относительно малы и не выходят за пределы линейного участка вольтамперной характеристики лампы. С возрастанием E_{g1} и E_{g2} крутизна характеристики, а следовательно, и коэффициенты K_+ и K_- падают, пока, наконец, запирание одной или насыщение другой из ламп вовсе не прекращает роста абсолютных величин E_{g1} и E_{g2}. В практике ограничение роста E_{g1} и E_{g2} обычно определяется нижним сгибом характеристики. Если реальную вольтамперную характеристику, представленную на рис. 16.4, заменить ломаной характеристикой с постоянной крутизной S (при $e_g > E_{g0}$, рис. 16.7), то нетрудно определить напряжения E_{g1} и E_{g2}, получающиеся в конце лавинообразного процесса.

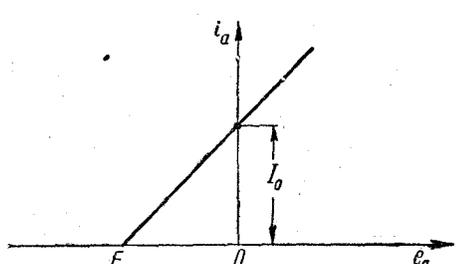


Рис. 16.7.

Очевидно, что когда абсолютная величина отрицательного напряжения E_{g2} достигает величины $|E_{g0}|$, соответствующей запиранию лампы $Л_2$, кольцо обратной связи разрывается и дальнейшие изменения E_{g2} больше не передаются сетке лампы $Л_1$. Совершая последний круговой обход замкнутого кольца, найдём предельное напряжение на сетке лампы $Л_1$

$$E_{g1\ пред} = |E_{g0}| K_-, \tag{16.12}$$

и предельное напряжение на сетке лампы $Л_2$

$$E_{g2\ пред} = -E_{g1\ пред} K_+ = -|E_{g0}| K_+ K_-. \tag{16.13}$$

Дальнейший рост невозможен, так как лампа $Л_2$ заперта. Если произведение $K_+ K_-$ значительно больше единицы, то одна из ламп (в данном случае $Л_2$) запирается отрицательным напряжением, абсолютная величина которого может намного превышать $|E_{g0}|$. Поэтому лампа $Л_2$ может оставаться в запертом состоянии довольно длительное время, пока в результате разряда конденсатора C_{g2} напряжение E_{g2} не вернётся к величине E_{g0}, что приведёт к отпиранию лампы $Л_2$ и запиранию лампы $Л_1$.

Выяснив механизм и условия самовозбуждения, рассмотрим стационарный режим мультивибратора. Рассмотрение удобно начать с того момента времени, когда отрицательное напряжение e_{g1}, убывая по абсолютной величине, станет равным напряжению E_{g0} (момент $t = 0$, рис. 16.8).

К этому моменту переходные процессы, связанные с установлением тока открытой лампы в результате предыдущего опрокидывания схемы, обычно можно считать уже законченными, поэтому напряжение на аноде лампы $Л_2$ (открытой) близко к величине

$$e_{a2}(0) = E_a - I_0 R_{a2},$$

на аноде лампы $Л_1$ (закрытой)

$$e_{a1}(0) = E_a.$$

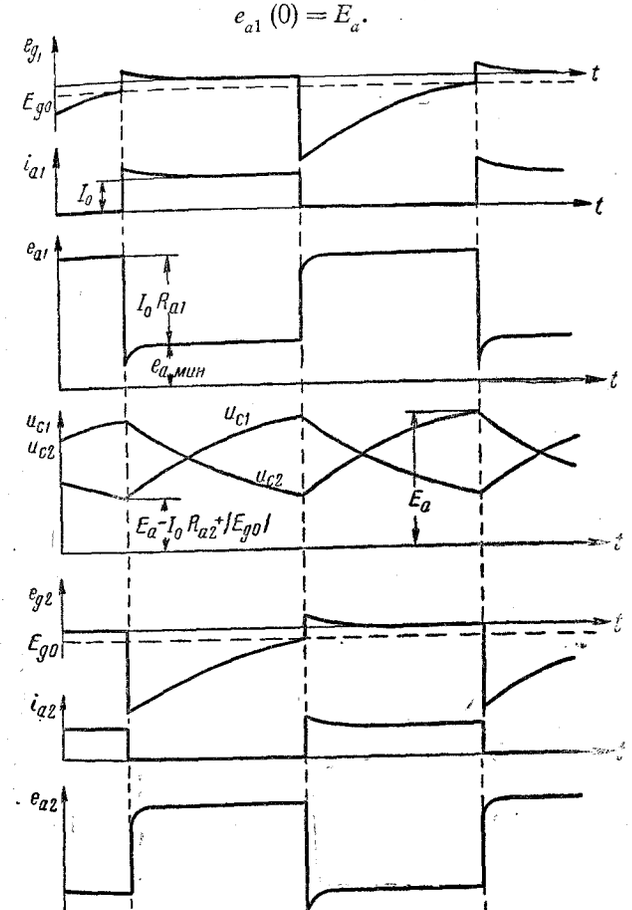


Рис. 16.8.

Далее, напряжение e_{g2} на сетке лампы $Л_2$ близко к нулю, так как сопротивление r_g сетка — катод при положительном потенциале сетки из-за сеточного тока весьма мало (порядка 1000—1500 *ом*).

Наконец, напряжения на конденсаторах C_{g1} и C_{g2} равны, соответственно:

$$u_{C1}(0) = e_{a2}(0) - E_{g1}(0) = E_a - I_0 R_{a2} + |E_{g0}|,$$

$$u_{C2}(0) = e_{a1}(0) = E_a,$$

и анодный ток лампы $Л_1$ (запертой) равен нулю, а лампы $Л_2$

$$i_{a2}(0) = I_0.$$

В момент $t = 0$ происходят резкие изменения токов, а также напряжений на активных сопротивлениях. Напряжения же на ёмкостях не могут измениться скачком, поэтому u_{C1} и u_{C2} начинают изменяться по экспоненциальному закону: u_{C2} в сторону увеличения, а u_{C2} — в сторону уменьшения. Такой режим длится до момента T_1, соответствующего следующему опрокидыванию системы. Характер изменений напряжений и токов на участке $0 < t < T_1$ представлен в виде графиков на рис. 16.8.

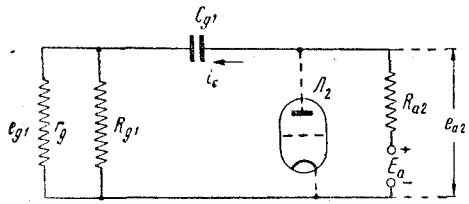


Рис. 16.9

Рассмотрим ход этих графиков. При определении уравнений $e_{g1}(t)$, $u_{C1}(t)$, $e_{a2}(t)$ и $i_{a1}(t)$ исходим из эквивалентной схемы цепи заряда ёмкости C_{g1}, представленной на рис. 16.9.

До запирания лампы $Л_2$ (т. е. к моменту $t \leqslant 0$), напряжение на ёмкости C_{g1}, как уже указывалось ранее, было

$$u_{C1}(0) = E_a - I_0 R_{a2} + |E_{g0}|,$$

а после запирания это напряжение постепенно приближается к величине напряжения питания E_a. Следовательно, разница между двумя стационарными напряжениями равна $(I_0 R_{a2} - |E_{g0}|)$ и напряжение на конденсаторе C_{g1} должно изменяться по закону:

$$u_{C1}(t) = E_a - \Delta u_{C1}(t) = E_a - (I_0 R_{a2} - |E_{g0}|)\, e^{-\alpha_1 t}, \quad (16.14)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{C_{g1}\left(R_{a2} + \dfrac{R_{g1} r_g}{R_{g1} + r_g}\right)}. \quad (16.15)$$

Так как $r_g \ll R_{g1}$ и $r_g \ll R_{a2}$, то можно считать

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{C_{g1} \cdot R_{a2}}. \quad (16.15')$$

Теперь нетрудно выявить характер изменения $e_{g1}(t)$. Так как напряжение создаётся на эквивалентном сопротивлении $\dfrac{R_{g1} r_g}{R_{g1} + r_g} \approx r_g$ током заряда ёмкости C_{g1}, а последний изменяется по закону:

$$i_{C1}(t) = C_{g1} \frac{du_{C1}(t)}{dt} = C_{g1} \alpha_1 (I_0 R_{a2} - |E_{g0}|)\, e^{-\alpha_1 t},$$

то, очевидно, при $t > 0$

$$e_{g1}(t) \approx r_g\ i_{C1}(t) = \frac{r_g}{R_{a2}} (I_0 R_{a2} - |E_{g0}|)\, e^{-\alpha_1 t}. \quad (16.16)$$

Из этого выражения видно, что положительное напряжение на сетке открытой лампы весьма мало и быстро затухает, так как постоянная времени $C_{g1} R_{a2}$ относительно мала.

Зная напряжения u_{C1} и e_{g1}, нетрудно найти напряжение e_{a2} на аноде запертой лампы $Л_2$. Это напряжение является, очевидно, суммой

$$e_{a2} = u_{C1} + E_{g1} \approx u_{C1}. \quad (16.17)$$

Наконец, анодный ток открытой лампы $Л_1$

$$i_{a1} \approx I_0 + S e_{g1}(t). \quad (16.18)$$

Остальные величины — $e_{g2}(t)$, $u_{C2}(t)$ и $e_{a1}(t)$ можно определить из рассмотрения эквивалентной схемы цепи разряда ёмкости C_{g2}, соединяющей анод лампы $Л_1$ с сеткой $Л_2$ (рис. 16.10). Бросок тока i_{a1}, определяемый выражением (16.18), приводит к перераспределению напряжений в схеме. Если бы отпертое состояние лампы $Л_1$ длилось достаточно долго, то по завершении переходного процесса и прекращении разряда конденсатора C_{g2}, т. е. при условии, что $i_C \to 0$, а $i_R \to i_{a1}$, на нём установилось бы напряжение, равное $E_a - i_{a1} R_{a1} \approx E_a - I_0 R_{a1}$, а напряжение e_{g2} упало бы до нуля. Так как начальное напряжение u_{C2}, с которого начинается разряд, равно E_a, то изменение напряжения на конденсаторе C_{g2} должно подчиняться следующему закону:

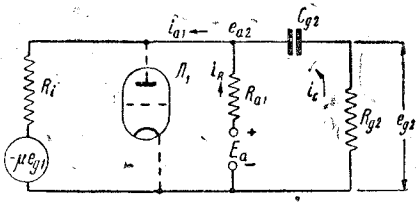


Рис. 16.10.

$$u_{C2}(t) \approx E_a - I_0 R_{a1}(1 - e^{-\alpha_2 t}), \quad (16.19)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{1}{C_{g2}\left(R_{g2} + \dfrac{R_{a1} R_i}{R_{a1} + R_i}\right)} \approx \frac{1}{C_{g2} R_{g2}} \qquad (16.20)$$

представляет собой величину, обратную постоянной времени цепи разряда ёмкости C_{g2}.

Теперь нетрудно найти ток разряда конденсатора i_C, а отсюда и напряжение на сетке лампы $Л_2$:

$$e_{g2}(t) = R_{g2} i_C = R_{g2} C_{g2} \frac{du_{C_2}}{dt} = -R_{g2} C_{g2} \alpha_2 I_0 R_{a1} e^{-\alpha_2 t} =$$

$$= -I_0 R_{a1} e^{-\alpha_2 t}. \qquad (16.21)$$

Как и следовало ожидать, при сделанных выше допущениях о малости R_{a1} по сравнению с R_i и R_{g2}, напряжение e_{g2} на сопротивлении R_{g2} определяется только броском тока I_0 и величиной R_{a1}. Ясно также, что напряжение e_{a1} на аноде лампы $Л_1$ устанавливается почти сразу на уровне $E_a - I_0 R_{a1}$.

Выражение (16.21) может быть использовано для определения периода релаксации мультивибратора.

Так как при снижении абсолютной величины e_{g2} до $|E_{g0}|$ лампа $Л_2$ отпирается, а $Л_1$ запирается, то, приравнивая $e_{g2} = E_{g0}$ и подставляя $t = T_1$, получим следующее уравнение, определяющее длительность открытого состояния лампы $Л_1$:

$$E_{g0} = -I_0 R_{a1} e^{-\alpha_2 T_1},$$

откуда

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{I_0 R_{a1}}{|E_{g0}|}. \qquad (16.22)$$

В случае симметричного мультивибратора (т. е. при $R_{a1} = R_{a2}$, $R_{g1} = R_{g2}$, $C_{g1} = C_{g2}$) найденный отрезок времени является, очевидно, половиной периода релаксации. Следовательно, период определяется следующим выражением:

$$T = 2T_1 = \frac{2}{\alpha_2} \ln \frac{I_0 R_{a1}}{|E_{g0}|} \approx 2 R_g C_g \ln \frac{I_0 R_a}{|E_{g0}|}. \qquad (16.23)$$

Учитывая, что произведение $I_0 R_a$ представляет собой разность между напряжением питания E_a и минимальным напряжением анода, выражение (16.23) можно записать в форме:

$$T \approx 2 R_g C_g \ln \frac{E_a - e_{a\,мин}}{|E_{g0}|}. \qquad (16.24)$$

Выражение (16.23) можно ещё больше упростить, если учесть, что в соответствии с идеализированной характеристикой лампы (рис. 16.7) можно считать $I_0 = S|E_{g0}|$.

Таким образом,

$$T \approx 2 R_g C_g \ln (S R_a). \qquad (16.23')$$

Учитывая, наконец, что по определениям (16.4) и (16.5) произведение $S R_a \approx K_+$, ф-лу (16.23′) можно записать ещё и в следующей форме

$$T = 2 R_g C_g \ln K_+. \qquad (16.23'')$$

Следует подчеркнуть, что приведённые выше простые формулы основаны на допущении, что $R_a \ll R_g$, $R_a \ll R_i$ и, кроме того, что сопротивление r_g промежутка сетка—катод при положительном потенциале на сетке очень мало по сравнению со всеми остальными сопротивлениями схемы. Все эти условия в реальных схемах обычно выполняются. В случае же необходимости нетрудно ввести поправки.

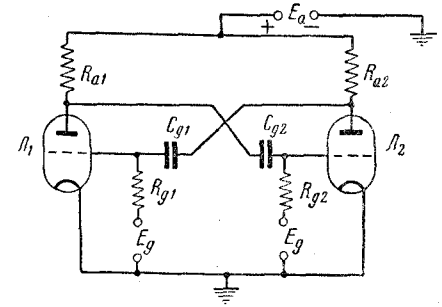


Рис. 16.11

Если в цепях сеток обеих ламп включены источники напряжения смещения (рис. 16.11), то перебрасывание схемы происходит в моменты, когда напряжение на сопротивлении R_g в сумме с напряжением смещения E_g пересекает линию E_{g0}. При положительном смещении получим картину, показанную на рис. 16.12 кривой *II*, а при отрицательном смещении — кривой *III*.

Кривая *I* соответствует случаю $E_g = 0$. В ф-ле (16.24) $|E_{g0}|$ соответствует скачку сеточного напряжения отпираемой лампы. Следовательно, при наличии смещения $|E_{g0}|$ нужно заменить суммой $|E_{g0} + E_g|$. Итак, в общем случае

$$T \approx 2 R_g C_g \ln \frac{E_a - e_{a\,мин}}{|E_{g0} + E_g|}. \qquad (16.25)$$

Для упрощения анализа явлений в мультивибраторе всё рассмотрение было проведено для симметрической схемы. Нетрудно провести рассмотрение и для несимметричного мультивибратора. В этом случае период колебаний делится на два неодинаковых по длительности отрезка, причём бо́льший отрезок определяется той из цепочек R_g, C_g, у которой постоянная времени больше.

То обстоятельство, что период колебаний несколько зависит от напряжений источников питания, а также от напряжения „отпирания“ $|E_{g0}|$, снижает стабильность частоты мультивибратора и усиливает влияние смены и старения лампы. Для получения стабильных по частоте колебаний часто используется синхронизация

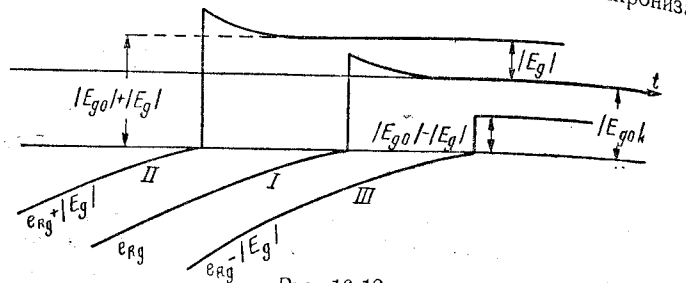


Рис. 16.12

мультивибратора посторонней синусоидальной или импульсной эдс. В импульсной технике мультивибраторы используются не только для генерации импульсов, но и для различных преобразований, например, передний фронт используется для запуска одной цепи, а задний — для запуска другой цепи. Подбором постоянной времени мультивибратора можно в достаточно широких пределах изменять интервал между передним и задним фронтами импульса, а, следовательно, и „задержку“ срабатывания второй цепи.

В перечисленных, а также многих других применениях мультивибратора, очень большое значение имеет длительность лавинообразного процесса. Чем быстрее происходит „опрокидывание“ системы, тем более короткие импульсы можно получить в результате дифференцирования, тем больше чёткость срабатывания устройств, запускаемых с помощью мультивибратора.

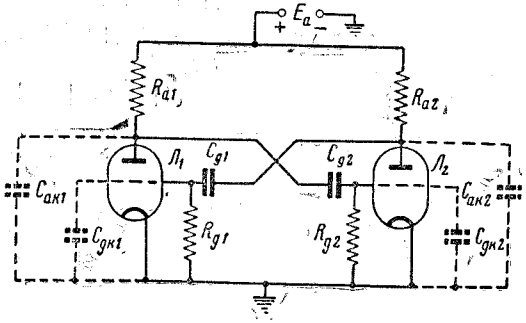


Рис. 16.13

Как отмечалось выше, длительность процесса запирания и отпирания ламп мультивибратора определяется междуэлектродными и монтажными ёмкостями, шунтирующими нагрузочные сопротивления. Точное построение формы напряжений и токов при учёте этих ёмкостей является довольно громоздкой задачей. Порядок же длительности процесса опрокидывания оценить нетрудно. Схема мультивибратора с учётом ёмкостей сетка — катод и анод — катод представлена на рис. 16.13.

Так как за время кратковременных процессов опрокидывания ёмкости C_{g1} и C_{g2} не успевают сколько нибудь заметно изменить свой заряд, то ёмкости $C_{a\,k1}$ и $C_{g\,k2}$ можно считать подсоединёнными параллельно нагрузочному сопротивлению R_{a1} лампы $Л_1$, а ёмкости $C_{a\,k2}$ и $C_{g\,k1}$ — параллельно сопротивлению R_{a2}. Так как $C_{a\,k1}=C_{a\,k2}=C_{ak}$, а $C_{g\,k1}=C_{g\,k2}=C_{gk}$, то анодное нагрузочное сопротивление каждой из ламп шунтировано ёмкостью $C_0=C_{a\,k}+C_{g\,k}$. В § 10.4 было показано, что длительность установления напряжения на анодной нагрузке в усилителе приблизительно равна $\approx(2\div 3)R_э C_0$, где $R_э$ определяется ф-лой (16.5).

Это положение в первом приближении может быть распространено и на длительность процессов опрокидывания в мультивибраторе[1]).

§ 16.3. Блокинг-генератор

Блокинг-генератор представляет собой устройство, позволяющее получать довольно мощные разрывные периодические колебания очень сложной формы, удобной для образования коротких импульсов или перепадов (скачков) с крутым фронтом.

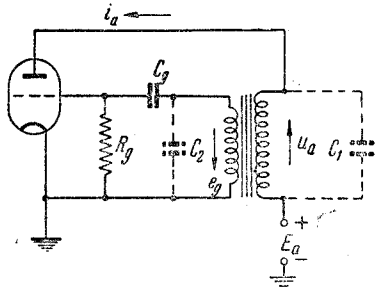


Рис. 16.14.

Схема блокинг-генератора изображена на рис. 16.14. В отличие от ранее рассмотренного двухлампового релаксационного генератора (мультивибратора) в данной схеме используется всего лишь одна лампа, а дополнительный фазовый сдвиг на 180°, необходимый для получения фазового баланса, достигается с помощью трансформатора, через который осуществляется обратная связь. Из сравнения схемы, показанной на рис. 16.14, со схемой обычного автогенератора с колебательным контуром видно, что блокинг-генератор представляет собой вырожденный тип лампового автогенератора с индуктивной обратной связью, у которого ёмкости колебательных контуров сведены до минимума, обусловленного междуэлектродными и монтажными ёмкостями, а обратная связь резко усилена применением трансформатора с железным сердечником. Чем меньше ёмкость обмоток трансформатора и иные шунтирующие ёмкости, а также чем меньше индуктивности рассеяния обмоток трансформатора, тем выше область частот, в которой выполняется фазовый баланс

[1]) В действительности крутизна фронта в мультивибраторе, при одних и тех же величинах R и C, получается меньшей, чем в усилителе.

и, следовательно, тем более крутые фронты импульсов и перепадов напряжения можно получить от блокинг-генератора. Период же релаксаций в основном определяется временем разряда конденсатора C_g через сопротивление R_g.

Рассмотрение картины физических явлений в блокинг-генераторе удобно начинать с процесса разряда конденсатора C_g. Допустим, что в результате предыдущих процессов в блокинг-генераторе конденсатор получил значительный заряд, обращённый минусом к сетке лампы. Лампа при этом заперта, анодный и сеточный токи отсутствуют и конденсатор C_g разряжается через сопротивление R_g и сеточную обмотку трансформатора. Так как постоянная времени $R_g C_g$ относительно велика, скорость изменения разрядного тока мала и индуктивность обмотки трансформатора практически не оказывает влияния на процесс разряда конденсатора. Такое состояние длится до тех пор, пока отрицательное напряжение сетки, равное напряжению конденсатора C_g, не достигает величины напряжения отпирания лампы E_{g0} (участок *аб* на рис. 16.15). Возникновение анодного тока и дальнейшее его нарастание сопровождается индуктированием эдс в сеточной обмотке. Направление витков и схема включения обмоток трансформатора подбираются таким образом, чтобы при возрастании анодного тока эта эдс была положительной при отсчёте от сетки к катоду (см. рис. 16.14), поэтому анодный ток получает дополнительное приращение, которое в свою очередь ускоряет нарастание тока и т. д.

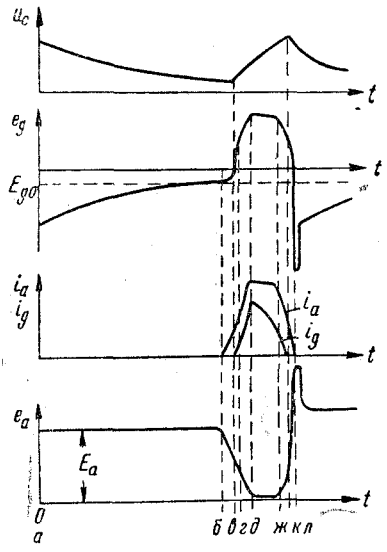


Рис. 16.15.

В результате при выполнении определённых условий, которые будут ниже найдены, наступает лавинообразное нарастание анодного тока и сеточного напряжения. Этот лавинообразный процесс закончится лишь после того, как сеточное напряжение достигнет значительной положительной величины, при которой сильно возрастает сеточный ток (участок *бг* на рис. 16.15).

Быстрое возрастание сеточного тока, начинающегося при $e_g > 0$ (точка *в* на рис. 16.15) создаёт на сеточной обмотке падение напряжения, которое вычитается из эдс, индуктируемой анодным током, и тем самым замедляет рост последнего. Существенное значение имеет также и то обстоятельство, что анодное напряжение

на участке *бд* падает, так как из напряжения E_a источника питания вычитается падение напряжения, создаваемое в обмотке L_a изменением тока i_a. Поэтому на участке *вд* скорости нарастания анодного тока и сеточного напряжения падают и в точке *д* сеточное напряжение достигает предельной величины, после чего начинается спад.

С момента, соответствующего точке *в* (рис. 16.15), начинается заряд конденсатора C_g и рост напряжения u_C, однако ввиду большой ёмкости C_g на участке *вг* получается относительно небольшой прирост u_C. В виду резкого снижения анодного напряжения и значительной величины положительного сеточного напряжения, сеточный ток достигает величины, соизмеримой с анодным током.

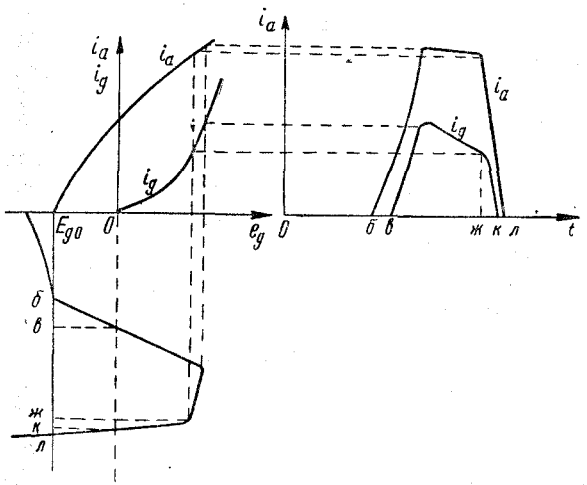


Рис. 16.16

Достигнув максимума сеточный ток убывает весьма быстро. Объясняется это большой крутизной характеристики сеточного тока в области значительных положительных напряжений (рис. 16.16). Так как быстрое убывание i_g создаёт на сеточной обмотке противоэлектродвижущую силу самоиндукции, направленную плюсом к сетке, то снижение e_g, а следовательно, и тока i_a, сильно замедляется, чем и объясняется наличие почти горизонтальной площадки на участке *дж* (рис. 16.15).

Когда рабочая точка на характеристике $i_g(e_g)$ достигает участка с небольшой крутизной (точка *ж* на рис. 16.15 и 16.16), начинается лавинообразное снижение анодного тока, сопровождающееся кратковременными выбросами напряжения на сеточной и

анодной обмотках трансформатора (участок *жл*). Эти выбросы объясняются влиянием индуктивностей обмоток, препятствующих мгновенному прекращению анодного тока при запирании лампы.

Вместе с прекращением сеточного тока прекращается и заряд конденсатора C_g (точка *к*), после чего описанный выше процесс периодически повторяется.

Из приведённого рассмотрения видно, что в основе работы блокинг-генератора лежит явление лавинообразного нарастания и спадания сеточного напряжения и анодного тока на участках *бг* и *жл* (рис. 16.15).

Выясним условия, при которых обеспечивается подобный характер изменения e_g и i_a.

Обращаясь к участку *бв*, на котором лампа открыта, но сеточный ток ещё отсутствует, анодную цепь лампы можно представить в виде следующей эквивалентной схемы (рис. 16.17). На этой схеме ёмкость C_g, не оказывающая заметного влияния на быстро протекающие процессы, опущена. Через e'_g обозначено напряжение на сопротивлении R_g, т. е. на сетке лампы, являющееся результатом исходного возмущения e_g. Если $e'_g > e_g$, то имеет место лавинообразный процесс нарастания, в противном случае напряжение на сетке, нарастающее при многократном обходе замкнутой системы, может стабилизоваться на определённом конечном уровне раньше, чем проявляется нелинейность вольтамперных характеристик лампы. Из этого следует, что условие самовозбуждения блокинг-генератора, как и любой другой системы с обратной связью, сводится к требованию, чтобы при круговом обходе замкнутой системы первоначальное возмущение усиливалось.

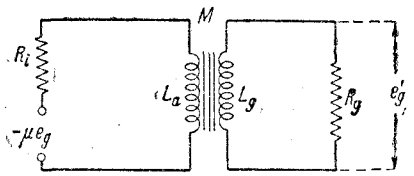


Рис. 16.17

Обратимся к схеме рис. 16.17 и обозначим через

$$n = \frac{w_a}{w_g} \qquad (16.26)$$

коэффициент трансформации; здесь w_a и w_g числа витков, соответственно, анодной и сеточной обмоток. Считая трансформатор идеальным, т. е. пренебрегая рассеянием магнитных потоков $\left(k = \frac{M}{\sqrt{L_a L_g}} = 1\right)$, приходим к схеме замещения, показанной на рис. 16.18. Здесь

$$R_{g\text{э}} = n^2 R_g \qquad (16.27)$$

представляет собой перечисленное в анодную цепь сопротивление R_g.

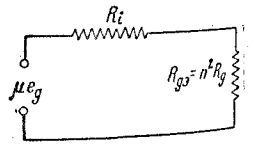


Рис. 16.18

Напряжение на сопротивлении $R_{g\text{э}}$ независимо от характера возмущения e_g будет равно

$$e_{g\text{э}} = \mu e_g \frac{R_{g\text{э}}}{R_i + R_{g\text{э}}},$$

а напряжение e'_g, действующее на сопротивлении R_g, т. е. на нагрузке вторичной обмотки трансформатора,

$$e'_g = \frac{e_{g\text{э}}}{n} = e_g \frac{\mu R_{g\text{э}}}{R_i + R_{g\text{э}}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Отсюда вытекает условие самовозбуждения блокинг-генератора

$$\frac{\mu R_{g\text{э}}}{(R_i + R_{g\text{э}})} \cdot \frac{1}{n} = \frac{e'_g}{e_g} > 1.$$

Подставляя (16.27), получаем

$$\frac{\mu R_g n}{R_i + R_g n^2} > 1. \qquad (16.28)$$

Это неравенство можно привести к виду

$$\frac{\mu}{R_i} > \frac{1}{n R_g} + \frac{n}{R_i}$$

или, наконец,

$$S - \frac{1}{n R_g} - \frac{n}{R_i} > 0. \qquad (16.29)$$

Паразитные ёмкости, шунтирующие обмотки трансформатора, на схеме рис. 16.17 опущены, так как влияние их сказывается, в основном, на длительности фронта импульса. Можно показать, что протяжённость участка *бд* на рис. 16.15 приближённо равна

$$\tau \approx R_g (C_2 + n^2 C_1), \qquad (16.30)$$

где C_1 и C_2 — эквивалентные ёмкости, шунтирующие, соответственно, анодную и сеточную обмотки трансформатора.

При выводе условия (16.29) сопротивление R_i рассматривалось как линейное, не зависящее от величины e_g. Допускаемая при этом погрешность не опасна, так как приводит к увеличению запаса при определении условия самовозбуждения блокинг-генератора.

При значительных величинах e_g необходимо, конечно, учитывать изменение средней крутизны S. Поэтому условие возникновения обратного лавинообразного процесса, начинающегося при наличии сеточного тока (участок *жк* на рис. 16.15), несколько отличается

от выражения (16.29). Можно показать, что в данном случае это условие имеет вид

$$S-\frac{1}{n}S_g-\frac{n}{R_{ia}}+\frac{1}{R_{ig}}-\frac{1}{nR_g}>0. \qquad (16.31)$$

Здесь $S_g=\frac{\partial i_g}{\partial e_g}$ — крутизна характеристики сеточного тока, а $R_{ig}=\frac{\partial e_a}{\partial i_g}$.

Так как положительному приращению анодного напряжения соответствует убывание сеточного тока и наоборот, то $R_{ig}<0$.

Из условия (16.31) видно, что чем больше крутизна S и чем меньше крутизна S_g, тем легче возникает самовозбуждение. Это и естественно, поскольку изменение сеточного тока, создавая падение напряжения на сеточной обмотке трансформатора, ослабляет изменение анодного тока.

Сопротивление R_g, шунтирующее сеточную цепь лампы, затрудняет возникновение самовозбуждения. Выгодно поэтому R_g увеличивать. Не следует при этом забывать, что период релаксаций в блокинг-генераторе определяется временем разряда конденсатора C_g через сопротивление R_g. Приближённо можно считать

$$T\approx C_gR_g. \qquad (16.32)$$

Остаётся, в заключение, определить длительность плоской части импульса (участок *дж* на рис. 16.15).

Можно показать, что эта длительность

$$\tau_и\approx 2r_gC_g, \qquad (16.33)$$

где r_g представляет собой сопротивление промежутка сетка—катод, соответствующее максимальным значениям e_g и i_g (точка *д* на рис. 16.15).

Снижение длительности импульса ограничивается индуктивностью рассеяния анодной обмотки трансформатора и ёмкостью C_1; приближённо

$$\tau_{и\,мин}\approx\pi\sqrt{L_SC_1}. \qquad (16.34)$$

В практике часто требуется в широких пределах изменять частоту следования импульсов при сохранении формы последних. Такая задача встречается, например, в импульсных генераторах стандартных сигналов. В блокинг-генераторе регулировку частоты удобнее всего производить путём изменения величины сопротивления R_g, определяющего постоянную времени разряда конденсатора C_g.

Так как длительность и форма импульсов, как это видно из выражений (16.33) и (16.34), не зависит от величины R_g, то регулировка частоты не сопровождается изменением параметров импульсов. Это свойство блокинг-генератора выгодно отличает его от мультивибратора, где изменение сопротивлений влияет одновременно как на частоту, так и на длительность импульсов.

§ 16.4. Пусковые схемы

В импульсной технике часто встречается необходимость в устройствах, которые под действием внешних электродвижущих сил давали бы на выходе скачкообразные изменения токов и напряжений. При этом важно, чтобы эти изменения не зависели от формы запускающих сигналов. Подобные устройства, называемые т р и г е р н ы м и, бывают двух видов: с одним и с двумя устойчивыми положениями.

Тригер с одним устойчивым положением может быть получен из обычного мультивибратора. Для этого одну из ламп мультивибратора нужно запереть при помощи отрицательного напряжения, подаваемого на сетку (рис. 16.19). В отсутствие внешнего воздействия схема находится в устойчивом состоянии, при котором одна из ламп ($Л_1$) заперта, а другая ($Л_2$) открыта. В этом состоянии напряжение на сетке открытой лампы равно нулю, а напряжение на аноде $e_{a2}=E_a-I_0R_{a2}$.

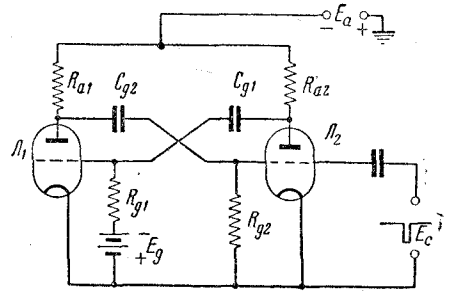


Рис. 16.19

При подаче на сетку лампы $Л_2$ кратковременного запускающего импульса, который в данной схеме должен иметь отрицательную полярность, к сетке лампы $Л_1$ приложится положительный импульс, усиленный по сравнению с входным импульсом лампой $Л_2$. Если величина этого импульса будет недостаточна для отпирания лампы $Л_1$, то опрокидывания схемы не произойдёт и по прекращении действия внешнего импульса схема останется в прежнем устойчивом состоянии. Если же величина развиваемого на сетке лампы $Л_1$ положительного импульса достаточна для отпирания, хотя бы на мгновение, этой лампы, то начнётся обычный для мультивибратора лавинообразный процесс, в результате которого лампа $Л_1$ останется открытой, а лампа $Л_2$ закроется. Такое состояние продолжается до тех пор, пока ток разряда конденсатора C_{g2} поддерживает на сопротивлении R_{g2} отрицательное напряжение, достаточное для запирания лампы $Л_2$,

При рассмотрении принципа работы мультивибратора (§ 16.2) было показано, что обе лампы одновременно не могут быть открытыми. Для того, чтобы перевести схему из одного устойчивого состояния в другое, требуется внешняя эдс, которая может быть приложена либо к одной из ламп, либо к обеим лампам одновременно.

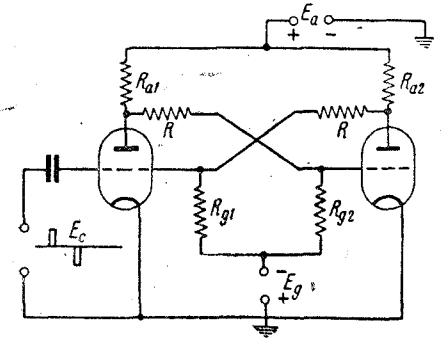


Рис. 16.23

Очевидно, что при воздействии на запертую лампу требуется импульс положительной полярности, а при воздействии на открытую лампу, наоборот,—отрицательной полярности. Отсюда следует, что в тех случаях, когда требуется периодическое перебрасывание схемы, на одну из ламп нужно подавать биполярную последовательность импульсов. Этот случай изображён на рис. 16.23.

При надлежащем выборе режима ламп периодическое перебрасывание схемы может быть осуществлено и с импульсами одной полярности, подаваемыми одновременно на сетки обеих ламп.

§ 16.5. Формирование импульсов

Применяемые в практике импульсные последовательности обычно характеризуются большой скважностью (отношением периода повторения к длительности импульса). Наиболее желательной формой импульсов в большинстве случаев является прямоугольная. Для измерительных целей применяются также импульсы прямоугольной формы при скважности, близкой к двум („квадратная волна", см. § 2.2, рис. 2.5). Для получения импульсов требуемой формы широкое распространение получили специальные формирующие устройства. Рассмотрим принцип действия некоторых из этих устройств.

В тех случаях, когда требуется относительно высокая стабильность частоты следования импульсов и одновременно широкий диапазон изменения частоты, а скважность роли не играет, часто применяют способ, основанный на преобразовании синусоидального колебания в периодическую импульсную последовательность.

При таком способе в качестве первичного источника колебаний используется обычный генератор гармонических колебаний. Напряжение с выхода генератора подаётся к ограничителю, который придаёт напряжению форму, показанную на рис. 16.24 сплошной линией. Пунктирная линия соответствует напряжению на входе ограничителя. Одна из возможных схем ограничителя, осуществляющего двустороннее ограничение, представлена на рис. 16.25.

Эта схема работает следующим образом. При мгновенных значениях эдс $e(t)$, меньших, чем $|E_1|$ и $|E_2|$, оба диода оказываются запертыми и напряжение на выходе по форме совпадает с $e(t)$; различие заключается лишь в том, что $u_{вых}(t)$ меньше, чем $e(t)$ на величину падения напряжения в сопротивлении R, но так как нагрузочное сопротивление выбирается большим по сравнению с R, то падение напряжения на последнем получается незначительным. Этот режим соответствует участкам $-\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}$ и $\frac{T}{2}-\frac{\tau}{2}<t<\frac{T}{2}+\frac{\tau}{2}$ на рис. 16.24. При положительных значениях $e(t)$, превышающих E_1, диод $Д_1$ отпирается и, так как внутреннее сопротивление диода очень мало по сравнению с R, напряжение на выходе почти совпадает с величиной постоянного напряжения E_1. Совершенно аналогично диод $Д_2$ и компенсирующее напряжение E_2 осуществляют ограничение отрицательной полуволны входной эдс $e(t)$. На рис. 16.24 изображён случай симметричного ограничения, но ясно, что выбором E_1 и E_2 можно по желанию регулировать порог ограничения сверху и снизу. Для получения прямоугольной формы импульсов

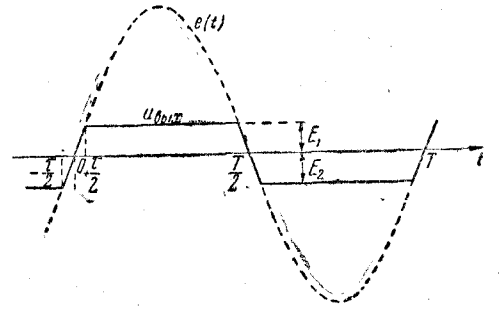


Рис. 16.24

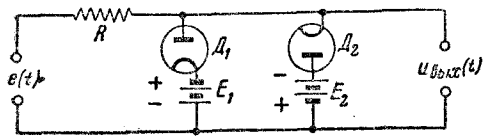


Рис. 16.25

амплитуда эдс E должна намного превышать порог ограничения. Нетрудно установить связь между относительным порогом ограничения и длительностью τ фронтов импульсов.

Очевидно, что

$$\frac{E_1}{E}=\sin\frac{\Omega\tau}{2}\approx\frac{\Omega\tau}{2},$$

откуда

$$\tau=\frac{2}{\Omega}\cdot\frac{E_1}{E}. \qquad (16.37)$$

Необходимость в большом усилении является существенным недостатком формирования импульсов при помощи ограничения.

Кроме того, крутизна фронтов импульса падает с понижением частоты исходного колебания.

Переходим к рассмотрению формирования импульсных последовательностей с большой скважностью. Главной особенностью таких последовательностей является то, что энергия импульса расходуется за очень малую долю периода. Эта особенность указывает на целесообразность применения тех или иных накопителей энергии, которые позволили бы снизить уровень мощности источника энергии до уровня средней мощности импульсной последовательности. В качестве простейшего накопителя энергии можно использовать ёмкость.

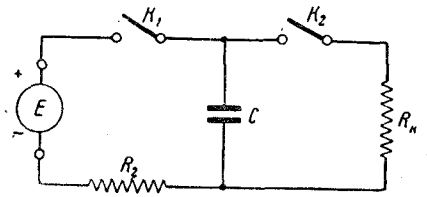


Рис. 16.26

Упрощённая схема устройства с ёмкостным накопителем изображена на рис. 16.26. Генератор с большим внутренним сопротивлением R_2 заряжает ёмкость C до напряжения E, после чего ключ K_1 размыкается, а K_2 замыкается, и конденсатор C подключается к относительно малому нагрузочному сопротивлению $R_н$, в котором и выделяется вся накопленная конденсатором энергия.

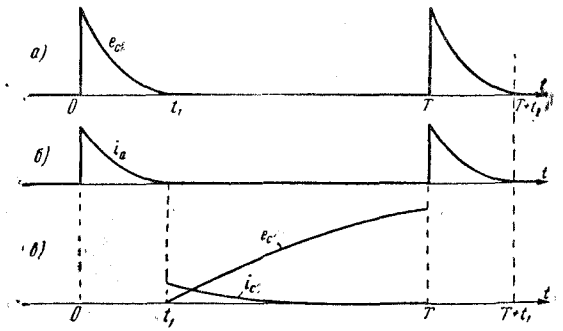


Рис. 16.27

В дальнейшем указанный процесс периодически повторяется. В качестве ключей K_1 и K_2 могут быть использованы как механические (разрядники, прерыватели), так и электронные или ионные приборы.

Импульсы напряжения и тока в нагрузочном сопротивлении будут иметь вид, показанный на рис. 16.27*а* и *б*. Напряжение и ток заряда ёмкости C показаны графически на рис. 16.27*в*. Площади ограниченные кривой тока при заряде и разряде должны быть одинаковыми. Момент t_1 соответствует замыканию ключа K_1, а T — замыканию ключа K_2. Предполагается, что к моменту t_1, т. е. после разряда конденсатора, ключ K_2 разомкнут. Длительность импульсов $\tau_н$ в нагрузке $R_н$ определяется постоянной времени $\tau_н = CR_н$, независимо от частоты повторения.

Следует отметить то существенное обстоятельство, что энергия, которую необходимо израсходовать в сопротивлении R_2 при заряде заданной ёмкости до напряжения E, не зависит от величины R_2. Действительно, исходя из выражения для тока заряда

$$i_C = \frac{E}{R_2}\, e^{-\frac{t}{CR_2}},$$

определим расходуемую в R_2 энергию:

$$W_R = \int_0^\infty i_C^2 R_2\, dt = \frac{E^2}{R_2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{CR_2}}\, dt =$$

$$= \frac{E^2}{R_2}\left(-\frac{CR_2}{2}\right)\left(e^{-\infty} - 1\right) = \frac{CE^2}{2}.$$

Но правая часть полученного выражения представляет собой энергию, запасаемую ёмкостью C при напряжении E. Следовательно, независимо от величины сопротивления R_2, в нём расходуется энергия, равная запасу энергии в ёмкости.

Можно поэтому считать, что кпд рассматриваемого накопительного устройства не может превышать 50%.

Наибольшее R_2, которое можно взять, определяется условием, чтобы за время $T - t_1 \approx T$ конденсатор успевал зарядиться до полного напряжения E. Иными словами, постоянная времени заряда может превышать постоянную времени разряда в $\frac{T}{t_1}$ раз. Так как ёмкость в обоих случаях одинакова, то $\frac{R_2}{R_н} \leqslant \frac{T}{t_1} = N$, где через N обозначена скважность. Это означает, что источник энергии можно рассчитывать на ток в N раз меньший, чем максимальный ток импульса.

Следует отметить, что в ключе K_1 особой необходимости нет, так как в моменты подключения нагрузки (замыкание ключа K_2) ток от источника ограничивается большим сопротивлением R_2. Из этого следует, что можно непосредственно к ёмкости C подключать обычный выпрямитель, рассчитанный на ток, в N раз меньший, чем ток в импульсе.

В качестве элемента, запасающего в интервалах между импульсами энергию, можно использовать также индуктивность. Упрощённая схема индуктивного накопителя изображена на рис. 16.28.

В паузах между импульсами (ключ K замкнут) ток в индуктивности L медленно нарастает по закону

$$i_{L1}=\frac{E}{R_1}\left(1-e^{-\alpha_1 t}\right),$$

где R_1 — величина сопротивления в цепи ключа K (обычно R_1 является внутренним сопротивлением электронного прибора, осуществляющего коммутацию), а $\alpha_1=\frac{R_1}{L}$.

Сопротивление R_1 должно быть значительно меньше нагрузочного сопротивления R. В момент размыкания ключа K на индуктивности создаётся эдс самоиндукции и на нагрузочном сопротивлении развивается импульсное напряжение, которое по величине может во много раз превышать напряжение источника питания E.

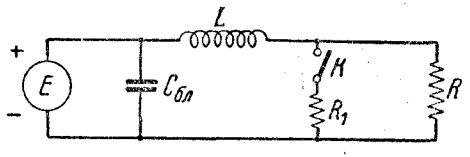


Рис. 16.28

Таким образом, энергия магнитного поля индуктивности, запасённая в интервалах, расходуется в нагрузке в течение очень короткого времени. Импульсы напряжения и тока в нагрузке, как и в схеме ёмкостного накопителя, имеют форму, близкую к экспоненте. Длительность импульсов определяется в данной схеме постоянной времени $\frac{L}{R}$ (блокировочная ёмкость $C_{бл}$ на протекание импульсного процесса влияния не оказывает).

Основным недостатком рассмотренных простейших накопителей, помимо низкой отдачи, является неблагоприятная форма импульса. Для устранения последнего недостатка необходимо в качестве накопителя энергии применять систему, переходные процессы в которой обеспечивают получение импульсов прямоугольной формы. Такими свойствами при выполнении некоторых условий являются системы с распределёнными постоянными.

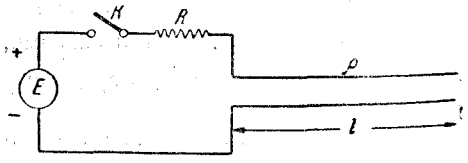


Рис. 16.29.

Рассмотрим, например, систему, состоящую из разомкнутого на конце отрезка линии и источника постоянного напряжения, соединённого с линией через активное сопротивление R, равное волновому сопротивлению линий ρ (рис. 16.29). При замыкании ключа K начинается процесс заряда линии. Этот процесс будет протекать следующим образом.

Непосредственно после момента замыкания ключа, который примем за начало отсчёта времени, в линию устремляется волна тока, величина которого в соответствии с § 9.12 равна

$$I=\frac{E}{R+\rho},$$

и волна напряжения, равная $U=I\rho$.

Так как по условию $R=\rho$, то эдс источника делится поровну между сопротивлением R и линией. По истечении времени $t=\frac{l}{v}$, где v — скорость волны в линии, волна напряжения достигает конца линии, где полностью отражается и направляется к началу линии. По мере продвижения этой волны, напряжение в линии удваивается, так как полярность отражённой волны совпадает с полярностью падающей волны, а потери в линии считаются отсутствующими. Волна тока, отражаясь у разомкнутого конца с изменением знака, компенсирует падающую волну тока.

Распределение напряжения и тока в системе в один из промежуточных моментов распространения обратной волны показан на

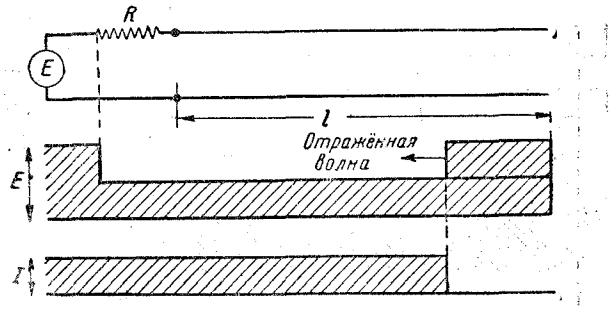


Рис. 16.30.

рис. 16.30. В момент $t=\frac{2l}{v}$ обратные волны напряжения и тока достигают генераторного конца линии, где полностью поглощаются активным сопротивлением R, согласованным с волновым сопротивлением. На этом процесс установления режима в системе заканчивается: линия заряжается до постоянного напряжения источника E, а ток заряда обращается в нуль. Так как во время зарядки линии ток через сопротивление R равняется $I=\frac{E}{R+\rho}$, то напряжение на R имеет вид прямоугольного импульса с амплитудой $U=IR=\frac{E}{2}$ и длительностью $\tau=\frac{2l}{v}$.

Нетрудно убедиться, что такой же импульс можно получить при замыкании предварительно заряженной линии на сопротивление $R=\rho$ (рис. 16.31). Действительно, в момент замыкания через сопротивление R пойдёт ток, равный

$$I=\frac{E}{R+\rho},$$

так как линия может быть заменена эквивалентным генератором с эдс E и внутренним сопротивлением ρ (см. § 9.13).

Мгновенное снижение вдвое напряжения у начала линии равносильно приложению к линии отрицательного напряжения $\frac{E}{2}$. Вызванная этим напряжением волна по мере распространения в линии вычитается из исходного напряжения E (рис. 16.32*б*), а после отражения у открытого конца, где она удваивается, при обратном распространении полностью компенсирует исходное напряжение (рис. 16.32*в*). Так как по достижении сопротивления R обратная волна поглощается, то общая продолжительность тока через R равна времени пробега волной удвоенной длины линии.

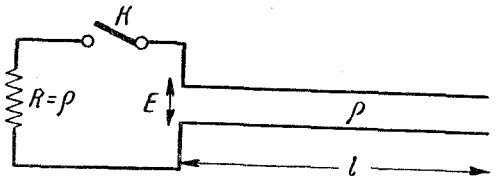


Рис. 16.31.

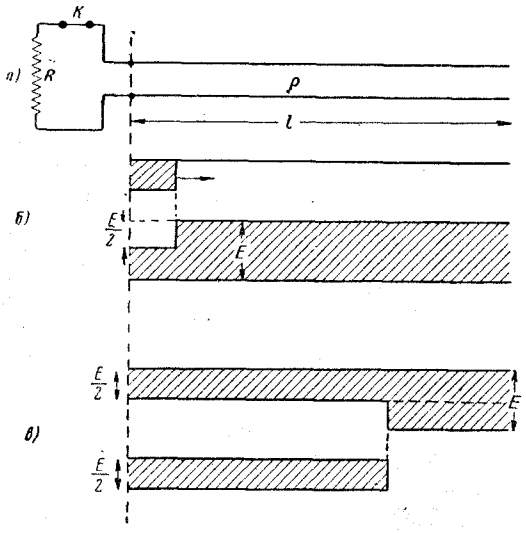


Рис. 16.32.

Таким образом, ток через сопротивление R будет иметь вид прямоугольного импульса с длительностью $\tau=\frac{2l}{v}$ и с амплитудой $I=\frac{E}{2R}$, а напряжение в импульсе будет $U=\frac{E}{2}$.

Для получения периодической последовательности импульсов можно применить схему, изображённую на рис. 16.33. В паузах между импульсами ключ K разомкнут и линия заряжается до напряжения E. При замыкании ключа линия разряжается через нагрузочное сопротивление R. Сопротивление r необходимо для ограничения тока источника при замыкании ключа K.

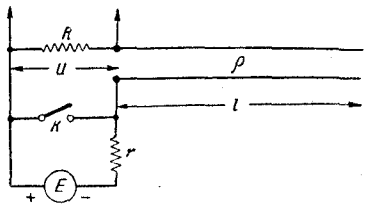


Рис. 16.33

Следует отметить, что в энергетическом отношении система с линией не имеет никаких преимуществ перед простыми накопителями; как и там, энергия, которую нужно израсходовать в R при зарядке линии не может быть меньше, чем полезная энергия, запасаемая в линии и затем используемая в R при разрядке.

Недостатком линии как накопительного устройства является большая длина, необходимая для получения импульсов длительностью в несколько микросекунд. Так, для формирования импульса в одну микросекунду требуется длина

$$l=\frac{\tau v}{2}=\frac{10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2}=150\ м.$$

В связи с этим в импульсной технике широко применяются искусственные линии, составленные из реактивных звеньев.

Теория искусственных линий, изложенная в гл. 8, позволяет выбрать элементы звеньев и их число по заданной величине задержки и с учётом требований к сохранению формы сигнала. Хотя в указанной главе рассмотрение велось с точки зрения создания задержки сигналов при работе линии на согласованную нагрузку, все основные выводы этой теории можно распространить и на разомкнутую искусственную линию. Необходимо лишь учитывать пробег волны в оба конца линии, т. е. время задержки в линии (в один конец) должно быть равно половине требуемой длительности импульса.

Следует иметь в виду, что крутизна фронтов импульса, получающегося при разрядке линии на нагрузочное сопротивление, тем выше, чем шире полоса прозрачности линии, т. е. чем больше число звеньев. В этом отношении нет никакой разницы между задерживающей и формирующей линиями. В обоих случаях при выборе элементов звена необходимо исходить из ширины спектра частот, в пределах которой фазовая характеристика линии должна быть близка к линейной (см. § 8.12).

Отметим, наконец, что при соответствующем включении нагрузочного сопротивления и органов коммутации, формирование импульсов можно осуществить также и с помощью искусственной линии, замкнутой накоротко на конце.

Многозвенные цепные схемы не являются единственно возможными заменителями натуральной линии. Для выяснения возможного характера иных цепей с сосредоточенными постоянными, эквивалентных отрезку разомкнутой на конце линии, обратимся к рассмотрению частотной зависимости входного сопротивления последней. В соответствии с § 7.5, для разомкнутой на конце линии без потерь имеем

$$Z_{вх} = -i\rho \operatorname{ctg} \alpha l = -i\rho \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{v}. \tag{16.38}$$

Так как длина линии выбирается из условия

$$\frac{2l}{v} = \tau,$$

где τ — требуемая длительность импульса, то получаем

$$Z_{вх} = -i\rho \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2}. \tag{16.38'}$$

При частотах, отвечающих условию

$$\frac{\omega\tau}{2} = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi, \ldots\ldots$$

или

$$\omega = 0;\ \frac{2\pi}{\tau};\ 2\frac{2\pi}{\tau};\ 3\frac{2\pi}{\tau}, \ldots\ldots, \tag{16.39}$$

входное сопротивление линии обращается в бесконечность, а при частотах, отвечающих условию

$$\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{5}{2}\pi; \ldots\ldots$$

или

$$\omega = \frac{\pi}{\tau};\ 3\frac{\pi}{\tau};\ 5\frac{\pi}{\tau}; \ldots\ldots \tag{16.40}$$

$Z_{вх}$ обращается в нуль.

График зависимости $\frac{Z_{вх}}{\rho}$ от частоты представлен на рис. 16.34. Этот график отличается от приведённого в гл. 7 рис. 7.7 только обозначением координатных осей.

Дальнейшая задача сводится к отысканию структуры реактивного двухполюсника, обеспечивающего такую же частотную зависимость входного сопротивления, что и представленная на рис. 16.34.

Подобная задача рассматривалась в гл. 6, где было установлено, что заданное расположение резонансных частот может быть получено с помощью одной из двух схем, показанных на рис. 6.8 и 6.9.

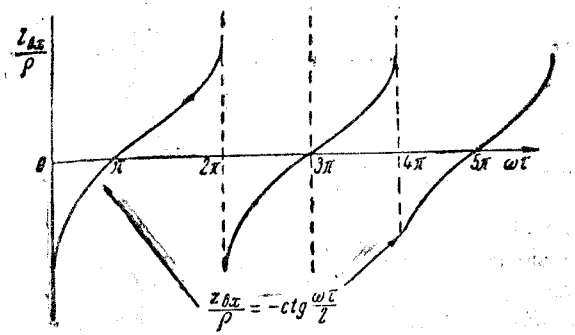


Рис. 16.34

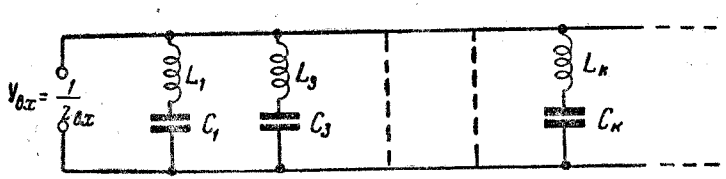


Рис. 16.35

Рассмотрим сперва схему двухполюсника, представляющую собой параллельное соединение резонансных ветвей (рис. 16.35). Число ветвей должно равняться числу резонансов, обращающих $Z_{вх}$ в нуль. Следовательно, в соответствии с условием (16.40), число ветвей должно быть бесконечно большим, а резонансные частоты должны быть:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi}{\tau} \\ \omega_3 &= 3\frac{\pi}{\tau} \\ \omega_5 &= 5\frac{\pi}{\tau} \\ &\cdots\cdots \\ \omega_k &= k\frac{\pi}{\tau} \end{aligned}\right\}. \tag{16.41}$$

Отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} L_1 C_1 &= \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\tau^2}{\pi^2} \\ L_3 C_3 &= \frac{1}{\omega_3^2} = \frac{1}{9}\,\frac{\tau^2}{\pi^2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_k C_k &= \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\tau^2}{\pi^2} \end{aligned}\right\}. \tag{16.42}$$

Для окончательного выбора элементов L_k и C_k необходимо определить требуемые значения характеристик контуров $\rho_k = \sqrt{\frac{L_k}{C_k}}$. С этой целью составим выражение для полной проводимости двухполюсника.

Проводимость каждой из ветвей определяется выражением вида:

$$Y_k(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right)} = \frac{\mathrm{i}\omega C_k}{1-\omega^2 L_k C_k}.$$

Учитывая, что $\omega C_k = \frac{\omega}{\omega_k}\cdot\omega_k C_k = \frac{\omega}{\omega_k}\cdot\frac{1}{\rho_k}$, приведём последнее выражение к виду:

$$Y_k(\mathrm{i}\omega) = \frac{\mathrm{i}}{\rho_k}\cdot\frac{\frac{\omega}{\omega_k}}{1-\frac{\omega_k}{\omega_k^2}}. \tag{16.43}$$

Тогда полная проводимость двухполюсника может быть представлена в форме:

$$Y_{вх} = \mathrm{i}\sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{\frac{\omega}{\omega_k}}{\rho_k\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)}. \tag{16.44}$$

Обратимся теперь к входной проводимости отрезка линии. В соответствии с выражением (16.38′) можем написать:

$$Y_{вх.\,л.} = \frac{1}{Z_{вх}} = \frac{\mathrm{i}}{\rho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\mathrm{i}}{\rho}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega\tau}{\pi}\right). \tag{16.45}$$

Из математики известно следующее разложение:[1])

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\,x = \frac{4x}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{1}{k^2-x^2}. \tag{16.46}$$

[1]) См. например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951, стр. 50, № 1.421.1.

Подставляя вместо x величину $\frac{\omega\tau}{\pi}$, которую в согласии с ур-ниями (16.42) можно представить в форме:

$$\frac{\omega\tau}{\pi} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{k\omega}{\omega_k},$$

перепишем выражение (16.45) следующим образом:

$$Y_{вх.\,л} = \frac{\mathrm{i}}{\rho}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\omega_1}\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{1}{k^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)} =$$

$$= \mathrm{i}\,\frac{4}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{k\,\frac{\omega}{\omega_k}}{\rho k^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)}. \tag{16.45′}$$

Приравнивая почленно суммы (16.44) и (16.45′) приходим к следующему условию тождественности двухполюсника и отрезка линии:

$$\rho_k = \frac{\pi}{4}\,k\rho. \tag{16.47}$$

Итак, характеристики контуров в формирующем двухполюснике должны быть:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\pi}{4}\,\rho \\ \rho_3 &= \frac{\pi}{4}\,3\rho \\ &\cdots\cdots \\ \rho_k &= \frac{\pi}{4}\,k\rho \end{aligned}\right\}. \tag{16.48}$$

Отсюда вытекает следующее уравнение:

$$\frac{L_k}{C_k} = \frac{\pi^2}{16}\,k^2\rho^2. \tag{16.49}$$

Это выражение совместно с выражениями (16.42) приводит к следующим формулам для элементов двухполюсника:

$$\left.\begin{aligned} L_k &= \frac{\tau\rho}{4} \\ C_k &= \frac{4}{\pi^2 k^2}\cdot\frac{\tau}{\rho} \end{aligned}\right\}. \tag{16.50}$$

Напомним, что в схеме рис. 16.33 характеристика линии ρ должна быть равна нагрузочному сопротивлению R. Таким образом, ф-лы (16.50) можно записать ещё и в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} L_k &= \frac{\tau R}{4} = \text{const} \\ C_k &= \frac{4}{\pi^2 k^2}\cdot\frac{\tau}{R} \end{aligned}\right\}. \qquad (16.50')$$

В реальных устройствах берут не более четырёх-пяти ветвей, так как дальнейшее увеличение числа ветвей приводит к чрезмерно малым значениям ёмкостей.

Так, например, для формирования импульсов длительностью в 1 *мксек* при нагрузочном сопротивлении $R = 1000$ *ом*, получим:

$$L_1 = L_3 = \ldots = \frac{10^{-6}\cdot 10^3}{4} = 250 \text{ мкгн},$$

$$C_1 = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{10^{-6}}{10^3} \approx 4\cdot 10^{-10}\ \phi = 400\ n\phi,$$

$$C_3 = \frac{C_1}{9} = 44{,}5\ n\phi,$$

$$C_5 = \frac{C_1}{25} = 8\ n\phi \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что уже при трёх контурах ёмкости получаются соизмеримыми с монтажными ёмкостями схемы. Поэтому схема с параллельным включением ветвей целесообразна только в случае низкоомных нагрузочных сопротивлений и не слишком коротких импульсов.

Нетрудно провести аналогичное рассмотрение для схемы, представленной на рис. 16.36. В данном случае необходимо исходить из разложения на простейшие дроби не проводимости, а сопротивления отрезка линии.

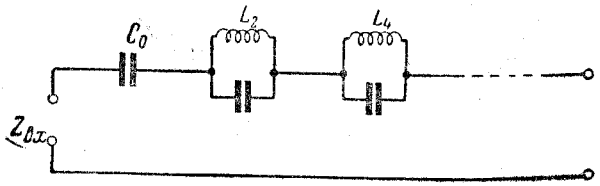


Рис. 16.36

Основываясь на условиях (16.39) приходим к выводу, что эквивалентный двухполюсник должен представлять собой последовательное соединение ёмкости и ряда контуров (рис. 16.36). Ёмкость C_0 обращает $Z_{вх}$ в бесконечность при нулевой частоте, а колебательные контуры при частотах $\omega = 2\cdot\frac{\pi}{\tau};\ 4\cdot\frac{\pi}{\tau}\ldots$. Следовательно, контуры должны быть настроены на частоты

$$\omega_k = k\,\frac{\pi}{\tau}, \qquad (16.51)$$

где

$$k = 2,\ 4,\ 6,\ldots.$$

Так как сопротивление k-го контура определяется выражением вида

$$Z_k = \frac{i\omega L_k\cdot\frac{1}{i\omega C_k}}{i\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right)} = \frac{\frac{L_k}{C_k}}{i\cdot\frac{1}{\omega C_k}(\omega^2 L_k C_k - 1)} =$$

$$= -\frac{i\omega L_k}{\omega^2 L_k C_k - 1} = -\frac{i\rho_k\frac{\omega}{\omega_k}}{\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1}, \qquad (16.52)$$

то полное сопротивление двухполюсника можно записать в форме:

$$Z_{вх} = -i\,\frac{1}{\omega C_0} - i\sum_{k=2,4,6,\ldots}\frac{\rho_k\frac{\omega}{\omega_k}}{\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1}. \qquad (16.53)$$

Обратимся теперь к разложению на простейшие дроби выражения (16.38'). Из математики известно разложение[1])

$$\operatorname{ctg}\pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{k=2,4,6,\ldots}\frac{1}{x^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}. \qquad (16.54)$$

Подразумевая под x величину $\frac{\omega\tau}{2\pi}$, можем записать выражение (16.38') в следующей форме:

$$Z_{вх} = -i\rho\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{\omega\tau} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega\tau}{2\pi}\sum_{k=2,4,6,\ldots}\frac{1}{\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}\right]. \qquad (16.55)$$

На основании соотношения (16.51) это выражение можно привести к виду:

$$Z_{вх} = -i\rho\left[\frac{2}{\omega\tau} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2,4,6,\ldots}\frac{k\frac{\omega}{\omega_k}}{\frac{k^2}{4}\left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1\right)}\right]. \qquad (16.55')$$

[1]) см. сноску на стр. 634.

Приравнивая теперь выражения (16.53) и (16.55), находим следующие условия тождественности двухполюсника и отрезка линии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C_0}=\frac{2\rho}{\tau};\ C_0=\frac{\tau}{2\rho}=\frac{\tau}{2R} \\ \rho_k=\frac{4\rho}{k\pi} \end{aligned}\right\}. \qquad (16.56)$$

На основании выражений (16.51) и (16.56) нетрудно вывести следующие формулы для элементов контуров:

$$\left.\begin{aligned} L_k=\frac{4R\tau}{k^2\pi^2} \\ C_k=\frac{\tau}{4R}=\frac{C_0}{2}=\text{const} \end{aligned}\right\}. \qquad (16.57)$$

Отсюда видно, что при коротких импульсах и больших R применение схемы рис. 16.36 более целесообразно, чем схемы с параллельными ветвями, так как с увеличением k в данном случае уменьшаются величины L_k, что не вызывает конструктивных затруднений.

На этом мы заканчиваем краткое изложение основных принципов построения устройств для генерирования и формирования импульсов. Как уже отмечалось ранее, более детальное изучение, а также расчёт и проектирование импульсных систем составляют содержание отдельной дисциплины.

По вопросам импульсной техники имеется обширная литература[1]).

[1]) Наиболее ясное и сжатое изложение основных проблем импульсной техники дано в книгах Я. С. Ицхоки, Импульсная техника, „Советское радио", 1949, Н. А. Железнова, Радиотехнические устройства управляющих колебаний, ЛКВВИА, 1949 и Н. Н. Крылова, Импульсная техника, Связьиздат, 1950.

ГЛАВА 17

ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

§ 17.1. Понятие об импульсной модуляции и основные определения

Достигнутые успехи в освоении сверхвысоких частот и развитие импульсной техники способствовали созданию новых видов управления колебаниями, а именно импульсной модуляции. Применительно к радиосвязи термин „импульсная модуляция" означает по существу двойную модуляцию: первичную модуляцию некоторой вспомогательной импульсной последовательности передаваемым сообщением и вторичную модуляцию радиочастотного колебания напряжением, полученным от первичной модуляции.

Вторичная модуляция, представляющая собой обычную амплитудную модуляцию несущего колебания импульсами, не требует дополнительного рассмотрения. Как и в случае простой амплитудной модуляции, рассмотренной в гл. 3, спектр колебания в этом случае состоит из несущей частоты и двух симметричных полос боковых частот, каждая из которых определяется спектром импульсной последовательности. В данной главе рассматриваются только вопросы первичной модуляции.

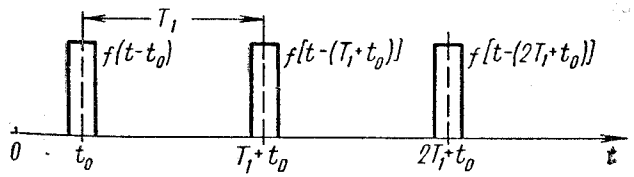


Рис. 17.1

Пусть в отсутствие сигнала мы имеем немодулированную последовательность импульсов, графически представленную на рис. 17.1. Хотя на этом рисунке для простоты изображён случай прямоугольных импульсов, можно считать, что импульсная последовательность получается путём периодического повторения с частотой $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$ импульсов произвольной формы. Обозначая функцию, определяющую отдельный импульс, через $f(t)$, можно периоди-

ческую последовательность аналитически представить в виде следующего выражения:

$$F(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-t_k), \qquad (17.1)$$

где

$$t_k = kT_1 + t_0, \qquad (17.2)$$

а k — целое число.

Если в результате воздействия передаваемого сигнала импульсы изменяются по высоте, сохраняя при этом неизменными свою форму, длительность и положение, то такая модуляция может быть названа амплитудно-импульсной модуляцией (сокращённо АИМ).

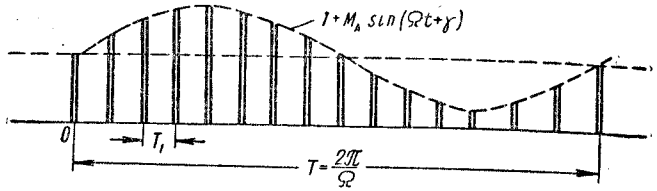


Рис. 17.2

Импульсная последовательность, промодулированная по амплитуде синусоидальным сигналом, изображена на рис. 17.2. Аналитически эта последовательность может быть представлена уравнением

$$F(t)=[1+M_a \sin(\Omega t+\gamma)]\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-t_k), \qquad (17.3)$$

где Ω — частота модуляции,

γ — начальная фаза сигнала [см. выражение (3.3)],

M_a — коэффициент (глубина) модуляции амплитуды импульсов.

Если в результате воздействия сигнала импульсы, сохраняя свою форму и величину, смещаются во времени на величину Δt, пропорциональную напряжению сигнала, то удобно говорить о временно́й импульсной модуляции (ВИМ).

Если при этом амплитуда временно́го сдвига $\Delta t_{макс}$ не зависит от частоты модуляции и определяется исключительно амплитудой модулирующего напряжения, то временна́я импульсная модуляция может рассматриваться как фазово-импульсная модуляция (ФИМ). В этом случае величину временно́го сдвига k-го импульса (при синусоидальном модулирующем сигнале) можно определить выражением

$$\Delta t_k = \Delta t_{макс} \cdot \sin(\Omega t_k+\gamma), \qquad (17.4)$$

величину фазового сдвига выражением

$$\Theta = \omega_1 \Delta t_k = \omega_1 \Delta t_{макс} \cdot \sin(\Omega t_k+\gamma) = \Theta_{макс} \cdot \sin(\Omega t_k+\gamma). \qquad (17.5)$$

Здесь через $\Theta_{макс} = \omega_1 \cdot \Delta t_{макс}$ обозначена амплитуда изменения фазы.

Допустим теперь, что модуляция заключается в изменении частоты следования импульсов, причём амплитуда частотного отклонения $\Delta\omega_{макс}$ пропорциональна амплитуде сигнала и не зависит от частоты модуляции

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_{макс} \cos(\Omega t_k+\gamma). \qquad (17.6)$$

Такую разновидность временно́й модуляции можно рассматривать как частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ).

Как и в случае непрерывного колебания, нетрудно установить связь между модуляцией фазы и модуляцией частоты импульсной последовательности.

Очевидно, что модуляция фазы импульсов по закону

$$\Theta(t) = \Theta_{макс} \sin(\Omega t+\gamma) \qquad (17.5')$$

эквивалентна изменению мгновенной частоты следования по закону

$$\Delta\omega_1(t) = \frac{d\Theta}{dt} = \Theta_{макс}\,\Omega \cos(\Omega t+\gamma) = \Delta\omega_{макс} \cos(\Omega t+\gamma),$$

где обозначено

$$\Delta\omega_{макс} = \Theta_{макс} \cdot \Omega.$$

Наоборот, модуляция частоты следования импульсов по закону

$$\Delta\omega_1(t) = \Delta\omega_{макс} \cos(\Omega t+\gamma)$$

эквивалентна изменению фазы по закону

$$\Theta = \int_0^t \Delta\omega_1(t)\,dt = \int_0^t \Delta\omega_{макс} \cdot \cos(\Omega t+\gamma)\,dt =$$

$$= \frac{\Delta\omega_{макс}}{\Omega} \sin(\Omega t+\gamma) + \Theta_0,$$

откуда временно́й сдвиг, с учётом выражения (17.5), определится выражением

$$\Delta t = \frac{\Theta-\Theta_0}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\Delta\omega_{макс}}{\Omega} \sin(\Omega t+\gamma) = \Delta t_{макс} \sin(\Omega t+\gamma).$$

Здесь

$$\Delta t_{макс} = \frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\Delta\omega_{макс}}{\Omega}. \qquad (17.7)$$

Таким образом, при модуляции полосой частот величина $\Delta t_{макс}$ не зависит от Ω при ФИМ [см. ур-ние (17.4)] и обратно пропорциональна Ω при ЧИМ [см. ур-ние (17.7)]. В случае же тональной модуляции ФИМ и ЧИМ тождественны.

Временну́ю импульсную модуляцию следует ещё различать по способу, с помощью которого обеспечивается соответствие между мгновенным значением модулирующего напряжения и величиной временно́го сдвига. Для выяснения этого различия необходимо уточнить смысл величины t_k в выражении (17.4).

Если схема модулятора построена таким образом, что сдвиг k-го импульса определяется напряжением сигнала, действующим

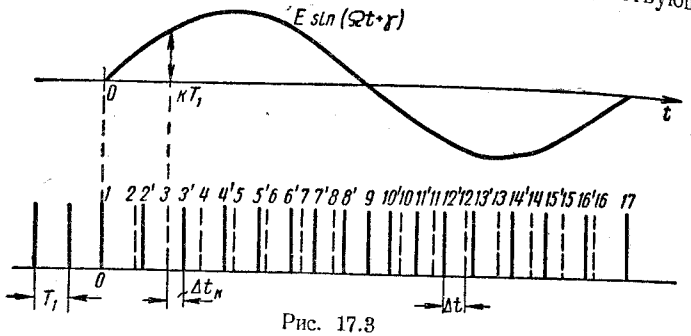


Рис. 17.3

в момент $t_k = kT_1$ (время t_0 здесь опущено), т. е. в момент, соответствующий исходному положению импульса в отсутствие модуляции, то ур-ние (17.4) следует писать в форме

$$\Delta t_k = \Delta t_{макс} \cdot \sin(\Omega k T_1 + \gamma). \qquad (17.8)$$

Такой вид временно́й модуляции изображён на рис. 17.3.

В практике чаще применяются, однако, модуляторы, в которых величина сдвига Δt_k k-го импульса пропорциональна напряжению сигнала, действующему в моменты времени $t_k = kT_1 + \Delta t_k$. Подобный режим модуляции поясняется рис. 17.4, а способ осуществления рассматривается ниже (§ 17.2).

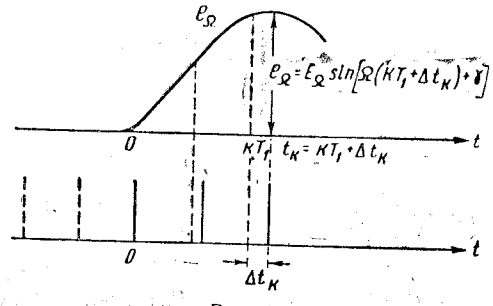


Рис. 17.4

Подставляя в выражение (17.4) вместо t_k сумму $kT + \Delta t_k$, получим

$$\Delta t_k = \Delta t_{макс} \cdot \sin[\Omega(kT_1 + \Delta t_k) + \gamma]. \qquad (17.9)$$

Модуляцию, подчиняющуюся ур-нию (17.8) мы будем называть временно́й модуляцией I рода (ВИМ-I), а модуляцию, описываемую ур-нием (17.9), временно́й модуляцией II рода (ВИМ-II). Подобное подразделение в равной мере относится к фазово-импульсной и частотно-импульсной модуляции.

В тех случаях, когда амплитуда сдвига $\Delta t_{макс}$ мала как по сравнению с периодом модуляции, так и с периодом частоты следования импульсов, различие между ВИМ-I и ВИМ-II стирается.

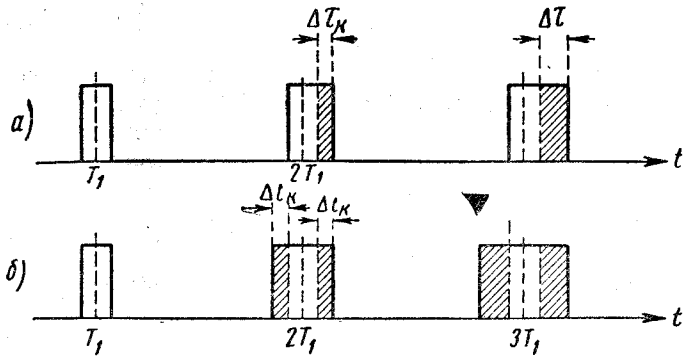


Рис. 17.5

Кроме перечисленных видов модуляции, значительный практический интерес представляет модуляция „по длительности" (ДИМ). При этом обычно имеются в виду импульсы прямоугольной формы.

На рис. 17.5*а* изображена импульсная последовательность при так называемой односторонней модуляции по длительности, когда один из фронтов импульса, в данном случае задний, перемещается в процессе модуляции на величину Δt_k, пропорциональную модулирующему напряжению, а другой фронт сохраняет своё фиксированное положение. Рисунок 17.5*б* соответствует симметричной двусторонней модуляции по длительности.

Как и в ранее разобранных случаях, следует различать два рода модуляции. При односторонней модуляции по длительности I рода приращение длительности импульса (при тональной модуляции) можно представить в виде уравнения:

$$\Delta\tau_k = \Delta\tau_{макс} \cdot \sin(\Omega k T_1 + \gamma), \qquad (17.10)$$

а полную длительность k-го импульса в виде

$$\tau_k = \tau_0 + \Delta\tau_k = \tau_0 + \Delta\tau_{макс} \sin(\Omega k T_1 + \gamma) = \\ = \tau_0 [1 + M_\tau (\sin \Omega k T_1 + \gamma)], \quad (17.11)$$

где

$$M_\tau = \frac{\Delta\tau_{макс}}{\tau_0}.$$

Если немодулированному импульсу соответствует момент времени kT_1 (отсчитываемый по середине импульса), то при изменении длительности на величину $\Delta\tau_k$ момент t_k, соответствующий середине импульса длительностью $\tau_k = \tau_0 + \Delta\tau_k$, будет, очевидно, равен

$$t_k = kT_1 + \frac{\Delta\tau_k}{2} = kT_1 + \frac{\Delta\tau_{макс}}{2} \sin(\Omega k T_1 + \gamma), \quad (17.12)$$

откуда видно, что односторонняя модуляция по длительности сопровождается одновременной модуляцией по фазе.

В случае односторонней модуляции по длительности II рода, приращение длительности при синусоидальном сигнале будет определяться уравнением:

$$\Delta\tau_k = \Delta\tau_{макс} \sin(\Omega k T_1 + \Omega \Delta t_k + \gamma). \quad (17.13)$$

Соответственно этому должны быть переписаны ур-ния (17.11) и (17.12), т. е. в аргументе синуса вместо $\Omega k T_1$ следует подставлять $\Omega(kT_1 + \Delta t_k)$.

В случае симметричной модуляции по длительности имеют место следующие очевидные соотношения:

при модуляции первого рода

$$\left.\begin{aligned} \Delta\tau_k &= 2\Delta\tau_{макс} \sin(\Omega k T_1 + \gamma) \\ \tau_k &= \tau_0 [1 + M_\tau \sin(\Omega k T_1 + \gamma) \end{aligned}\right\}, \quad (17.14)$$

при модуляции второго рода

$$\left.\begin{aligned} \Delta\tau_k &= 2\Delta\tau_{макс} \sin(\Omega k T_1 + \Omega \Delta t_k + \gamma) \\ \tau_k &= \tau_0 [1 + M_\tau \sin(\Omega k T_1 + \Omega \Delta t_k + \gamma)] \end{aligned}\right\}. \quad (17.14')$$

Здесь обозначено

$$M_\tau = \frac{2\Delta\tau_{макс}}{\tau_0}.$$

Нетрудно видеть, что симметричная модуляция по длительности не сопровождается фазовой модуляцией, так как середина импульса сохраняет при модуляции неизменное положение.

Возможны и иные разновидности импульсной модуляции, являющиеся комбинациями перечисленных выше.

Наибольшей простотой, как в отношении получения, так и в отношении детектирования, обладает амплитудно-импульсная модуляция. Однако этот вид модуляции обладает тем крупным недостатком, что он не допускает применения амплитудного ограничения. В связи с этим АИМ мало пригодна в тех случаях, когда одним из главных требований является повышение помехоустойчивости радиолинии. АИМ находит широкое применение в качестве промежуточного преобразования при осуществлении, а также при детектировании более сложных видов импульсной модуляции (ДИМ и ВИМ).

§ 17.2. Некоторые схемы импульсной модуляции

Перечисленные в предыдущем параграфе виды импульсной модуляции могут быть осуществлены различными способами с использованием разнообразных приёмов импульсной техники. Здесь приводятся лишь некоторые из этих способов.

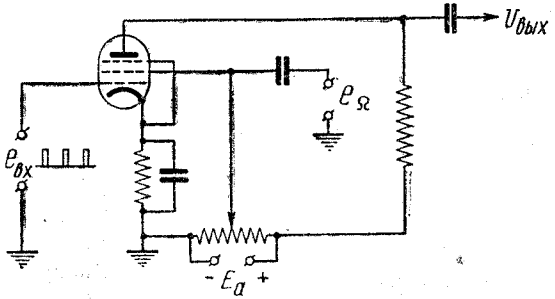


Рис. 17.6

Начнём с амплитудно-импульсной модуляции. Задача управления амплитудой импульсной последовательности может быть выполнена с помощью приёмов, близких к обычной модуляции амплитуды непрерывного колебания. Одна из таких схем представлена на рис. 17.6. Здесь немодулированная последовательность $e_{вх}$ подаётся на управляющую сетку пентода, а модулирующее напряжение e_Ω на экранную сетку.

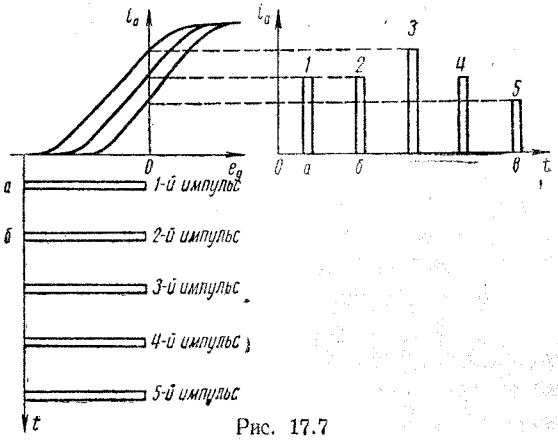


Рис. 17.7

Исходный режим подбирается таким образом, чтобы в отсутствие модулирующего напряжения лампа работала в режиме ограничения снизу и импульсы анодного тока не превышали определённой величины. Такой режим изображён на рис. 17.7 (участок $а$—$б$). Изменение напряжения

экранной сетки приводит к смещению характеристик анодного тока и к соответствующему изменению амплитуды импульсов анодного тока (участок *б*—*в*). Нагрузкой в анодной цепи должно служить омическое сопротивление, подбираемое из условия достаточно хорошего воспроизведения формы импульсов при наличии паразитных ёмкостей (выходная ёмкость лампы модулятора, а также входная ёмкость последующих цепей). Временные диаграммы модулирующего напряжения, анодного тока и напряжения, а также напряжения на выходе модулятора[1]) представлены на рис. 17.8.

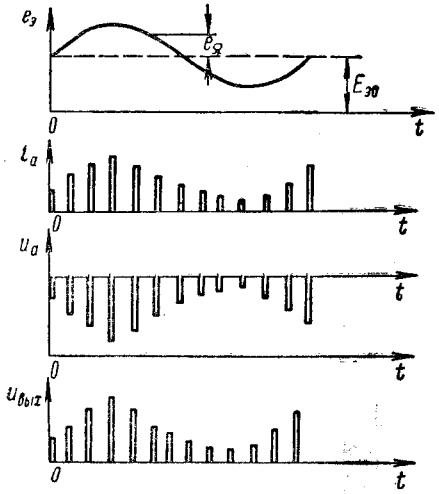


Рис. 17.8

Схема диодного модулятора изображена на рис. 17.9. Здесь диод работает в качестве ограничителя, причём уровень ограничения в отсутствие модуляции определяется постоянным напряжением E_a, а при модуляции суммарным напряжением $E_a + e_\Omega$. Диаграммы действующих в схеме напряжений представлены на рис. 17.10. Заштрихованные части импульсов входного напряжения соответствуют импульсам на выходе модулятора. Достоинствами схемы являются простота устройства и высокая линейность модуляционной характеристики, недостатками — малая крутизна этой характеристики и относительно низкое входное сопротивление по отношению к источнику немодулированной импульсной последовательности.

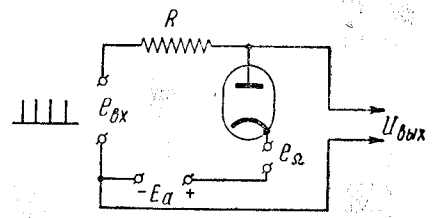


Рис. 17.9

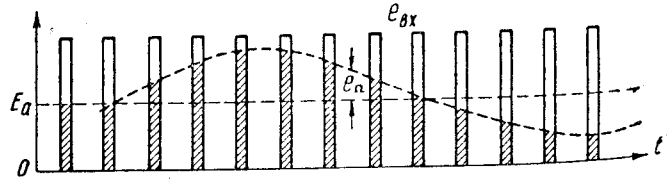


Рис. 17.10

[1]) Для напряжения $U_{вых}$ даны абсолютные величины импульсов, полярность же этих импульсов противоположна полярности импульсов i_a.

Переходим к рассмотрению способов осуществления модуляции по длительности импульсов. Одна из возможных схем показана на рис. 17.11. На управляющую сетку пентода подаётся пилообразное напряжение e_n с частотой, равной требуемой тактовой частоте импульсной последовательности, а также модулирующее напряжение e_Ω. Исходное напряжение смещения E_g подбирается с таким расчётом, чтобы в отсутствие напряжений e_n и e_Ω лампа была заперта. В отсутствие модуляции, т. е. при $e_\Omega = 0$, анодный ток появляется каждый раз, когда линейно нарастающее напряжение e_n достигает величины, равной $|E_g| - |E_{g0}|$. Благодаря сопротивлениям R_g и R_k ток ограничен величиной, близкой к

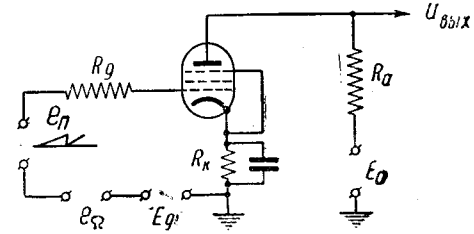


Рис. 17.11

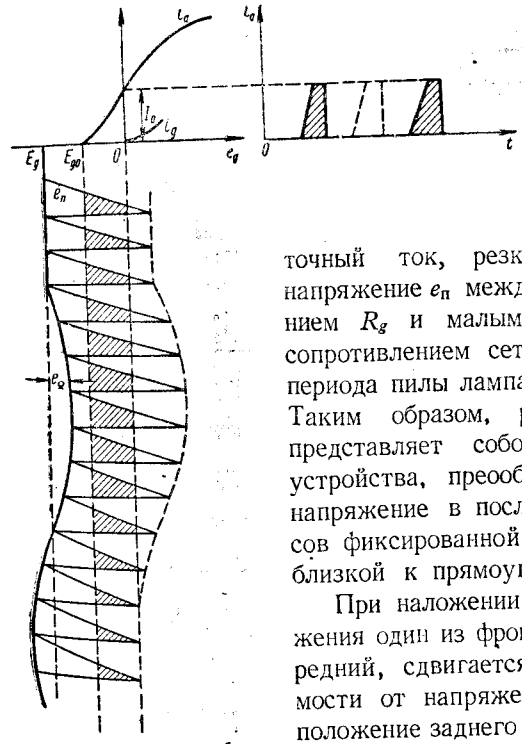


Рис. 17.12

току I_0 (рис. 17.12), так как с ростом анодного тока растёт смещение, создаваемое на R_k, а при заходе результирующего сеточного напряжения в положительную область появляется сеточный ток, резко перераспределяющий напряжение e_n между большим сопротивлением R_g и малым из за сеточного тока сопротивлением сетка — катод r_g. К концу периода пилы лампа мгновенно запирается. Таким образом, рассматриваемая схема представляет собой один из вариантов устройства, преобразующего пилообразное напряжение в последовательность импульсов фиксированной амплитуды и формы, близкой к прямоугольной.

При наложении модулирующего напряжения один из фронтов, в данном случае передний, сдвигается во времени в зависимости от напряжения e_Ω, в то время как положение заднего фронта остаётся неизменным. В результате получается односторонняя модуляция импульсов по длительности.

Ясно, что при выборе пилы с линейно убывающим участком можно получить фиксированное положение переднего фронта и односторонюю модуляцию по длительности за счёт сдвига заднего фронта импульса.

Наконец, если подавать на управляющую сетку симметричное пилообразное напряжение (рис. 17.13), то можно получить симметричную модуляцию по длительности.

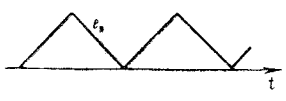


Рис. 17.13

Изменение длительности импульсов по закону передаваемого сигнала с успехом можно осуществить и с помощью пусковых схем типа мультивибраторов. На рассмотрении таких схем мы не останавливаемся.

Переходим к рассмотрению фазово-импульсных модуляторов. Для получения последовательности коротких импульсов, положение которых во времени пропорционально величине модулирующего напряжения, обычно применяется ряд последовательных преобразований. Один

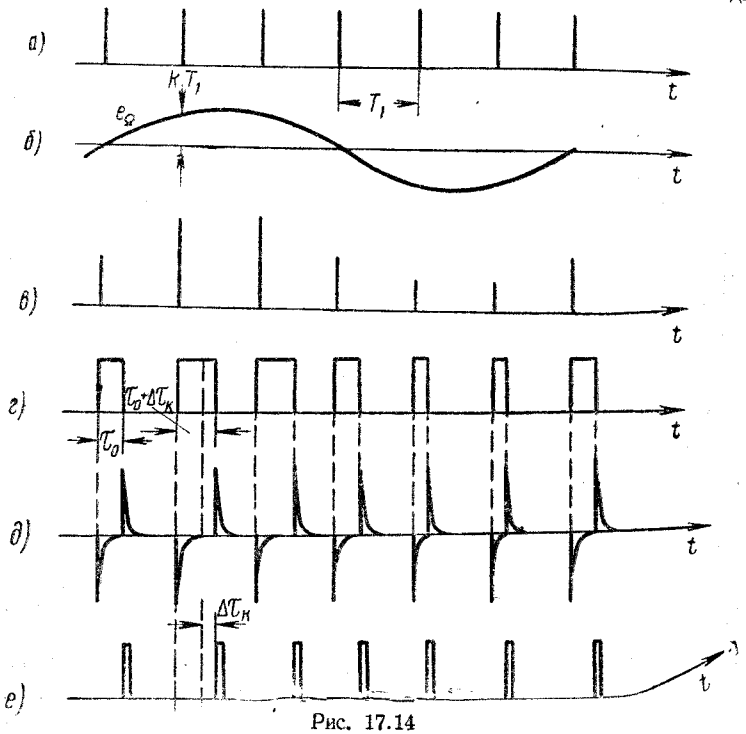


Рис. 17.14

из способов получения фазово-импульсной модуляции поясняется временными диаграммами, показанными на рис. 17.14. Диаграмма рис. 17.14*а* соответствует вспомогательной немодулированной последовательности коротких импульсов, которая затем подвергается

амплитудной модуляции (рис. 17.14*в*). Следующим этапом является преобразование АИМ в одностороннюю модуляцию по длительности (рис. 17,14*г*). Далее импульсы подвергаются дифференцированию (рис. 17.14*д*) и ограничению, в результате чего получаются импульсы одной полярности, модулированные по положению (рис. 17.14*е*). Все перечисленные преобразования могут быть выполнены с помощью двух-трёх ламп. Нетрудно видеть, что описанный способ даёт временну́ю модуляцию первого рода [см. § 17.1, ур-ние (17.8)], поскольку величины сдвигов Δt_k импульсов, показанных на диаграмме 17.14*е*, определяются значениями модулирующего напряжения $e_\Omega(kT_1)$ в соответствующих тактовых точках (рис. 17.14*б*).

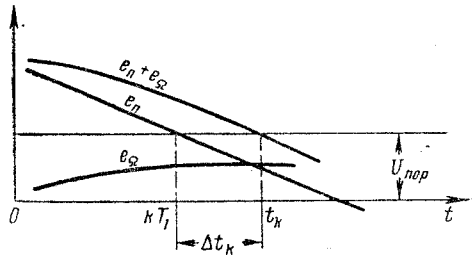


Рис. 17.15

Для получения временной модуляции второго рода может быть использован способ, иллюстрируемый рис. 17.15. Здесь e_n — пилообразное напряжение, подаваемое на тригер и отпирающее последний в моменты, когда e_n пересекает линию, проходящую на уровне $U_{пор}$, соответствующем порогу срабатывания тригера. Таким образом определяется положение тактовых точек kT_1 в отсутствие модуляции (рис. 17.15). При наложении на e_n модулирующего напряжения сигнала e_Ω срабатывание тригера будет происходить в точке t_k, смещённой относительно точки kT_1 на величину Δt_k.

Для опеределения Δt_k можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$e_\Omega(t_k) = E\sin(\Omega t_k + \gamma) = E\sin(\Omega kT_1 + \Omega\Delta t_k + \gamma),$$

$$e_n(t_k) = b - at_k,$$

где a — наклон линейно убывающего напряжения пилы,
b — постоянная величина.

Далее в момент срабатывания тригера выполняется условие:

$$e_\Omega(t_k) + e_n(t_k) = U_{пор},$$

откуда следует уравнение:

$$E\sin(\Omega k\cdot T_1 + \Omega\Delta t_k + \gamma) + (b - at_k) = U_{пор}$$

или

$$(U_{пор} - b) + at_k = E\sin(\Omega kT_1 + \Omega\Delta t_k + \gamma).$$

Но разность $U_{пор} - b$ может быть выражена через наклон пилы с помощью очевидного соотношения:

$$U_{пор} - b = -akT_1.$$

Таким образом, получаем

$$-akT_1 + at_k = E \sin(\Omega kT_1 + \Omega \Delta t_k + \gamma)$$

или

$$(t_k - kT_1) = \Delta t_k = \frac{E}{a} \sin(\Omega kT_1 + \Omega \Delta t_k + \gamma).$$

Здесь

$$\frac{E}{a} = \Delta t_{макс}$$

представляет собой амплитуду временного сдвига при модуляции.

Временную модуляцию — фазовую и частотную — можно получить также и с помощью фазовой модуляции обычного синусоидального колебания, которое затем используется для получения импульсной последовательности.

§ 17.3. Особенности частотных спектров при импульсной модуляции. Метод анализа

Изучение частотного спектра при импульсной модуляции существенно с различных точек зрения. Важно, во-первых, выявить распределение амплитуд по спектру с целью уточнения требований к частотно-фазовым характеристикам цепей, выполнение которых обеспечивает неискажённое пропускание импульсной последовательности, во-вторых, необходимо уметь находить составляющие спектра, попадающие в полосу частот сигнала и, следовательно, оказывающие непосредственное влияние на форму сигнала, выделяемого на выходе соответствующего демодулирующего устройства.

Наиболее просто решается вопрос для амплитудно-импульсной модуляции. Обращаясь к представленной на рис. 17.2 временной диаграмме АИМ, допустим, что в процессе модуляции форма импульсов остаётся неизменной. Эту форму примем прямоугольной, что позволяет значительно упростить рассмотрение без существенного ограничения общности. Тогда в случае синусоидальной модуляции частотой Ω частотный спектр последовательности должен иметь вид, показанный на рис. 17.16, где сплошными линиями изображены амплитуды

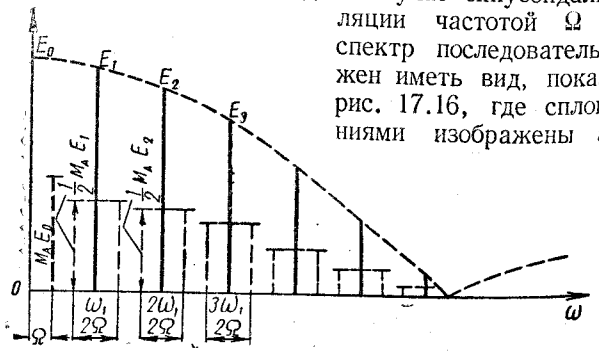


Рис. 17.16

составляющих спектра исходной периодической последовательности (немодулированной), а пунктирными линиями — амплитуды дополнительных частот, возникающих при модуляции. Из простых рассуждений ясно, что поскольку все составляющие исходного спектра пропорциональны амплитуде импульсов, а последняя изменяется по закону $1 + M_a \sin \Omega t$, то компонента с частотой Ω (т. е. изменение среднего значения E_0) будет иметь амплитуду, равную $M_a E_0$, а располагающиеся симметрично относительно первой гармоники ω_1 „боковые частоты“ $\omega_1 \pm \Omega$ будут иметь амплитуды $\frac{1}{2} M_a E_1$, располагающиеся симметрично относительно ω_2 частоты $\omega_2 \pm \Omega$ будут иметь амплитуды $\frac{1}{2} M_a E_2$ и т. д.

Этот результат может быть распространён и на более сложный закон изменения огибающей импульсов. Получаемый из такого рассмотрения спектр тем ближе к истинному, чем медленнее модуляция, т. е. чем больше тактовых импульсов приходится на один период модуляции.

При других видах импульсной модуляции (ЧИМ, ФИМ и т. д.) нахождение спектра импульсной последовательности является значительно более сложной задачей.

При выборе математического аппарата для исследования частотных спектров следует учитывать, что интересующая нас функция представляет собой последовательность отдельных, по существу, не связанных между собой импульсов. При рассмотрении условий прохождения подобных импульсов через линейные цепи наиболее удобным методом является, как известно, представление отдельных импульсов в виде интеграла Фурье. Этот метод полностью сохраняет свои преимущества применительно к модулированной импульсной последовательности. Для учёта особенностей спектра, являющихся результатом модуляции, необходимо, очевидно, просуммировать сплошные спектры всех одиночных импульсов, образующих заданную модулированную последовательность.

Если модулирующий сигнал, а также импульсная последовательность (в отсутствие модуляции) являются периодическими функциями времени, то при выполнении некоторых условий [1]) можно считать, что модулированная последовательность представляет собой также периодическую функцию.

---

[1]) Строго говоря, утверждение о периодическом характере модулированной последовательности импульсов справедливо при условии, что период модуляции $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ и период частоты повторения $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ находятся между собой в рациональном соотношении, т. е. T/T_1 — любое целое или дробное, но обязательно не иррациональное число. Ясно, однако, что это ограничение совершенно не существенно, так как путём изменения одного из периодов T или T_1 на сколь угодно малую величину, не оказывающую фактически никакого влияния на спектр, всегда можно обеспечить рациональность отношения T/T_1.

Таким образом, задача сводится к нахождению дискретного спектра, получающегося в результате суммирования бесконечно большого числа сплошных спектров, соответствующих отдельным импульсам модулированной последовательности.

Рассмотрим сперва операцию перехода от сплошного спектра одиночного импульса к дискретному спектру простой периодической последовательности в отсутствие модуляции. Пусть задан одиночный импульс произвольной формы (которую можно реализовать в физических цепях), определённый условиями:

$$\begin{array}{ll} f_0(t)\neq 0 & t_1<t<t_2 \\ f_0(t)=0 & \text{в интервале} \\ & t_1>t>t_2. \end{array}$$

Интеграл Фурье и спектральная плотность для этой функции могут быть написаны в следующей форме:

$$f_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F_0}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F_0(\omega)\cos(\omega t-\psi)\,d\omega, \quad (17.15)$$

$$\overrightarrow{F_0}(\omega)=\int_{t_1}^{t_2}f_0(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=F_0(\omega)\,e^{-i\psi}. \quad (17.16)$$

Рассмотрим теперь периодическую последовательность импульсов, полученную путём бесконечного повторения $f_0(t)$ с периодом $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$, причём считается выполненным условие $T_1>t_2-t_1$. Ряд Фурье и частотный спектр (дискретный) для такой периодической последовательности напишем в форме, аналогичной выражениям (17.15)—(17.16):

$$f_0(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F_n}\,e^{in\omega_1 t}=\sum_0^{\infty}F_n\cos(n\omega_1 t-\psi_n), \quad (17.17)$$

$$\overrightarrow{F_n}=\frac{2}{T_1}\int_{t_1}^{t_2}f_0(t)\,e^{-in\omega_1 t}\,dt=F_n\,e^{-i\psi_n}. \quad (17.18)$$

Сравнение (17.16) и (17.18) показывает, что при периодическом повторении заданной функции $f_0(t)$ амплитуда n-й гармоники дискретного спектра $\overrightarrow{F_n}$ и спектральная плотность $\overrightarrow{F_0}(n\omega_1)$, соответствующая той же частоте $\omega=n\omega_1$ (входящей в состав сплошного спектра одиночного импульса), связаны между собой следующим простым соотношением:

$$\frac{\overrightarrow{F_n}}{\overrightarrow{F_0}(n\omega_1)}=\frac{2}{T_1}=\frac{\omega_1}{\pi}. \quad (17.19)$$

Этот результат был рассмотрен в § 2.5.

Представим теперь нашу периодическую последовательность импульсов в виде суммы интегралов Фурье, каждый из которых изображает соответствующий одиночный импульс. Для импульса, сдвинутого во времени относительно $f_0(t)$ на отрезок T_1, получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F_0}(\omega)\,e^{i\omega(t-T_1)}\,d\omega,$$

а для импульса, сдвинутого на отрезок kT_1 соответственно

$$f_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F_0}(\omega)\,e^{i\omega(t-kT_1)}\,d\omega, \quad (17.20)$$

При таких обозначениях периодическая последовательность импульсов может быть представлена в виде суммы

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{F_0}(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t-kT_1)}\,d\omega \quad (17.21)$$

или в тригонометрической форме

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F_0(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1]\,d\omega. \quad (17.22)$$

С другой стороны, эта же периодическая функция согласно (17.17) выражается рядом Фурье. Приравнивая (17.17) и (17.22), мы видим, что для компоненты $\omega=n\omega_1$ имеет место тождество:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\omega=n\omega_1-\alpha}^{\omega=n\omega_1+\alpha}F_0(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1]\,d\omega=$$
$$=F_n\cos(n\omega_1 t-\psi_n). \quad (17.23)$$

Смысл этого тождества заключается в том, что при повторении импульсов с интервалами $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ все компоненты с частотами ω, не кратными $n\omega_1$, ослабляются и в пределе при переходе к строго периодической функции обращаются в нуль.

Следовательно, при переходе от сплошного спектра к дискретному, выражение для n-й гармоники может быть получено из (17.22) путём стягивания пределов интегрирования к дискретным значениям частоты $\omega=n\omega_1$, (т. е. при $\alpha\to 0$).

Очевидно, что вблизи дискретной частоты $\omega=n\omega_1$ в бесконечно малом интервале $\pm\alpha$ спектральную плотность можно считать

постоянной и равной $F_0(n\omega_1)$. То же самое можно сказать относительно $\cos(\omega t-\psi)$ и $\sin(\omega t-\psi)$, которые в указанном интервале частот обращаются в

$$\cos(n\omega_1 t-\psi_n) \quad \text{и} \quad \sin(n\omega_1 t-\psi_n).$$

Вынося эти величины за знак интеграла и используя соотношение (17.19), получим вместо (17.23) следующие два выражения:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{n\omega_1-\alpha}^{n\omega_1+\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos(\omega kT_1)\,d\omega=\omega_1, \tag{17.24}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{n\omega_1-\alpha}^{n\omega_1+\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sin(\omega kT_1)\,d\omega=0. \tag{17.25}$$

Выражения (17.24) и (17.25), доказанные с помощью сопоставления интеграла и ряда Фурье для простой (немодулированной) периодической последовательности импульсов, могут быть использованы также для исследования спектра модулированной последовательности, если, конечно, имеется в виду модуляция периодическим сигналом.

Перечисленные в § 17.1 разновидности импульсной модуляции могут быть сведены либо к изменению одного лишь аргумента косинуса в выражении (17.22) (модуляция по фазе или по частоте), либо к изменению одной лишь спектральной плотности $F(\omega)$ (симметричная модуляция по длительности), либо, наконец, к одновременному изменению $F(\omega)$ и фазы („односторонняя" модуляция по длительности).

Во всех этих случаях спектр является дискретным и ур-ние (17.22) с помощью несложного разложения подинтегрального выражения, как будет показано ниже, может быть приведено к сумме интегралов следующего вида

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-(\omega\pm N\Omega)\,kT_1]\,d\omega. \tag{17.26}$$

Из предыдущего ясно, что такой интеграл равен нулю на протяжении всей частотной шкалы, кроме дискретных точек, определяемых из условия:

$$\omega\pm N\Omega=n\omega_1$$

или

$$\omega=n\omega_1\pm N\Omega,$$

где n и N — целые положительные числа.

Действительно, при указанных значениях частот

$$(\omega\pm N\Omega)\,kT_1=n\omega_1\,kT_1=nk2\pi,$$

и так как nk — целое число, то в силу (17.24) имеет место очевидное тождество

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{n\omega_1\pm N\Omega-\alpha}^{n\omega_1\pm N\Omega+\alpha}F(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-(\omega\pm N\Omega)\,kT_1]\,d\omega=$$

$$=\frac{\omega_1}{\pi}\,F(n\omega_1\pm N\Omega)\cos[(n\omega_1\mp N\Omega)\,t-\psi]. \tag{17.27}$$

Заменяя ψ на $\frac{\pi}{2}+\psi_1$, получим аналогичную формулу для

$$\sin[\omega t-\psi_1-(\omega\pm N\Omega)\,kT_1].$$

Таким образом, спектр периодически модулированной импульсной последовательности может содержать в себе частоты, являющиеся всевозможными комбинациями компонент спектра немодулированной последовательности и спектра сигнала.

§ 17.4. Частотный спектр при фазово-импульсной и частотно-импульсной модуляции

Приложим полученные в предыдущем параграфе общие выражения к случаю, когда сдвиг импульсов во времени изменяется в процессе модуляции по закону

$$\Delta t_k=\Delta t_{макс}\sin(\Omega t_k+\gamma)=\Delta t_{макс}\sin(\Omega kT_1+\gamma).$$

В соответствии с § 17.1 и выражением (17.8) такой закон изменения соответствует ФИМ или ЧИМ (при тональной модуляции это безразлично) первого рода.

Уравнение для модулированной последовательности импульсов может быть получено непосредственно из (17.22), если вместо kT_1 подставить $kT_1+\Delta t_k$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F_0(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1-$$

$$-\Delta\omega t_{макс}\cdot\sin(\Omega kT_1+\gamma)]\,d\omega. \tag{17.28}$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, с помощью обычного разложения (обозначая $\omega\Delta t_{макс} = m$, $\Omega kT_1 + \varphi = x$)

$$\cos(m\sin x) = J_0(m) + 2\cdot\sum_{n=2,4,6\ldots} J_n(m)\cos x,$$

$$\sin(m\sin x) = 2\sum_{n=1,3,5\ldots} J_n(m)\sin x,$$

может быть приведено к виду

$$\begin{aligned}\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1-m\sin x] &= J_0(m)\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1]+\\ &+J_1(m)\Big\{\cos[\omega t-\psi-(\omega+\Omega)kT_1-\gamma]-\\ &-\cos[\omega t-\psi-(\omega-\Omega)kT_1+\gamma]\Big\}+\\ &+J_2(m)\Big\{\cos[\omega t-\psi-(\omega+2\Omega)kT_1-2\gamma]+\\ &+\cos[\omega t-\psi-(\omega-2\Omega)kT_1+2\gamma]\Big\}+\cdots\end{aligned} \qquad (17.29)$$

Применяя к каждому из слагаемых этого выражения операцию (17.27), получим весьма простые формулы для всех интересующих нас компонент спектра.

Первое слагаемое даёт, очевидно, частоту повторения и кратные ей частоты $n\omega_1$:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{n\omega_1-\alpha}^{n\omega_1+\alpha} F_0(\omega)\,J_0(m)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-\omega kT_1]\,d\omega &=\\ = J_0(m)\,F_0(n\omega_1)\,\frac{\omega_1}{\pi}\cos(n\omega_1 t-\gamma_n).&\end{aligned} \qquad (17.30)$$

Так как согласно (17.19) $\frac{\omega_1 F_0(n\omega_1)}{\pi} = F_n$, то амплитуды частот (гармоник), кратных основной частоте немодулированной последовательности, равны

$$J_0(n\omega_1\Delta t_{макс})\,F_n.$$

Таким образом, при фазово-импульсной модуляции гармоники частоты повторения представляют собой как бы средние (несущие) частоты колебаний, модулированных по фазе, причём амплитуда фазового отклонения (индекс модуляции) пропорциональна порядковому номеру гармоники: $m = n\omega_1\Delta t_{макс}$.

Следует, правда, отметить, что боковые частоты спектра такого колебания несимметричны относительно частоты $n\omega_1$ в том

смысле, что амплитуды верхних и нижних боковых частот могут быть неодинаковы.

Нижние боковые частоты вида $\omega = n\omega_1 - \Omega$ могут быть получены интегрированием второго слагаемого в выражении (17.29):

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\int_{n\omega_1-\Omega-\alpha}^{n\omega_1-\Omega+\alpha} J_1(m)\,F_0(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-(\omega+\Omega)kT_1-\gamma]\,d\omega &=\\ = J_1(m)\,F_0(n\omega_1-\Omega)\,\frac{\omega_1}{\pi}\cos[(n\omega_1-\Omega)t-\psi],&\end{aligned}$$

где

$m = (n\omega_1-\Omega)\Delta t_{макс}$,

$F(n\omega_1-\Omega)$ — спектральная плотность, соответствующая частоте

$$\omega = n\omega_1 - \Omega,$$

ψ — фаза, соответствующая этой же частоте (в спектре одиночного импульса).

Верхние боковые частоты вида $n\omega_1+\Omega$ определяются интегрированием следующего (3-го) слагаемого (17.29), содержащего член $(\omega\pm\Omega)kT_1$; амплитуды указанных частот равны

$$J_1[(n\omega_1+\Omega)\Delta t_{макс}]\,F_0(n\omega_1+\Omega)\,\frac{\omega_1}{\pi}.$$

Общее выражение для амплитуды комбинационной частоты вида $n\omega_1 \pm N\Omega$ может быть написано в форме

$$J_N[(n\omega_1 \pm N\Omega)\Delta t_{макс}]\,F_0(n\omega_1 \pm N\Omega)\,\frac{\omega_1}{\pi}. \qquad (17.31)$$

Указанная выше асимметрия боковых частот, располагающихся слева и справа от соответствующей гармоники частоты повторения („несущей"), является, очевидно, особенностью, связанной с фазовой модуляцией импульсной последовательности.

В отличие от обычной фазовой модуляции непрерывного (синусоидального) колебания здесь мы должны учитывать, что в процессе модуляции изменяется соотношение между длительностью импульса и интервалом между соседними импульсами. Действительно, интервал изменяется периодически с частотой модуляции Ω, а длительность импульса остаётся неизменной. Это обстоятельство указывает также на то, что в спектре модулированной импульсной последовательности имеются компоненты с частотой сигнала Ω и кратными ей частотами [1]) 2Ω, 3Ω и т. д.

---

[1]) При учёте ур-ния (17.9), т. е. при модуляции II рода, частоты вида 2Ω, 3Ω и т. д. в спектре отсутствуют.

Колебания с частотой Ω определяются слагаемым, содержащим член $(\omega-\Omega)\,kT_1$, который при подстановке $\omega=\Omega$ обращается в нуль, в силу чего:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\Omega-\alpha}^{\Omega+\alpha}F_0(\omega)\,\mathrm{J}_1(m)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos[\omega t-\psi-(\omega-\Omega)\,kT_1+\gamma]\,d\omega=$$

$$=-F_0(\Omega)\,\mathrm{J}_1(\Omega\Delta t_{макс})\,\frac{\omega_1}{\pi}\,\cos(\Omega t-\psi_\Omega+\gamma), \qquad (17.32)$$

где ψ_Ω — фаза, соответствующая частоте Ω в сплошном спектре одиночного импульса.

Для N-й гармоники частоты сигнала получим общее выражение

$$F_0(N\Omega)\,\mathrm{J}_N(N\Omega\Delta t_{макс})\,\frac{\omega_1}{\pi}\,\cos(N\Omega t-\psi_{N\Omega}+N\gamma). \qquad (17.33)$$

Рассмотрим выражение для амплитуды компоненты с частотой Ω. Для практики, как уже отмечалось выше, наибольший интерес представляет случай, когда $\Omega\Delta t_{макс}\ll 1$. При этом один из сомножителей в выражении для амплитуды может быть упрощён следующим образом:

$$\mathrm{J}_1(\Omega\Delta t_{макс})\approx\frac{\Omega\Delta t_{макс}}{2}.$$

Далее, если иметь в виду импульсы малой длительности, то можно считать, что в интервале частот $0<\omega<\Omega$ спектральная плотность практически не изменяется. Это означает, что

$$F_0(\Omega)\approx F_0(0)=\int_{t_1}^{t_2}f_0(t)\,dt,$$

поэтому

$$\frac{\omega_1}{\pi}\,F_0(\Omega)\approx\frac{2}{T_1}\int_{t}^{t_2}f_0(t)\,dt=2E_0,$$

где E_0 — постоянная составляющая периодической (немодулированной) последовательности импульсов.

Подставив полученные выражения в (17.21), получим для амплитуды сигнала следующее приближённое выражение:

$$E_0\,\Omega\,\Delta t_{макс}. \qquad (17.34)$$

Смысл выражения (17.34) становится более наглядным, если выразить $\Delta t_{макс}$ согласно (17.7) через $\Delta\omega_{макс}$, т. е. через частотное отклонение, отвечающее модуляции фазы на величину $\omega_1\Delta t_{макс}$; подставив в (17.34) $\Delta t_{макс}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\Delta\omega_{макс}}{\Omega}$, получим выражение

$$E_0\,\Omega\Delta t_{макс}=E_0\,\frac{\Delta\omega_{макс}}{\omega_1}. \qquad (17.34')$$

Итак, амплитуда колебания основной частоты Ω при фазово-импульсной (и частотно-импульсной) модуляции приближённо равна произведению постоянной слагающей E_0 немодулированной последовательности на относительное изменение частоты повторения $\frac{\Delta\omega_{макс}}{\omega_1}$.

Разумеется, этот результат можно получить непосредственно из рассмотрения процесса модуляции импульсной последовательности по фазе или по частоте как изменения „скважности“ $\frac{T_1}{\tau}$, так как длительность импульсов τ остаётся неизменной, а период T_1 частоты повторения в процессе модуляции периодически изменяется.

При частотно-импульсной модуляции, когда $\frac{\Delta\omega_{макс}}{\omega_1}$ может достигать значительной величины, амплитуда составляющей частоты Ω выражена в спектре импульсной последовательности также весьма заметно. Выделение сигнала из спектра импульсной последовательности может быть в принципе осуществлено с помощью фильтра нижних частот без какого-либо специального (нелинейного) устройства. Однако при суждении об эффективности подобной демодуляции необходимо учитывать некоторые другие факторы, связанные с повышением помехоустойчивости приёма, крутизной характеристики демодуляции и т. д.

Выражения (17.33) и (17.32) позволяют определить коэффициент нелинейных искажений по N-й гармонике, как отношение соответствующих амплитуд:

$$K_N=\frac{F_0(N\Omega)\,\mathrm{J}_N(N\Omega\Delta t_{макс})}{F_0(\Omega)\,\mathrm{J}_1(\Omega\Delta t_{макс})}. \qquad (17.35)$$

При тех же допущениях относительно малости изменения спектральной плотности в интервале $0<\omega<N\Omega$, коэффициент K_N можно определять по упрощённой формуле

$$K_N=\frac{\mathrm{J}_N(N\Omega\Delta t_{макс})}{\mathrm{J}_1(\Omega\Delta t_{макс})}. \qquad (17.35')$$

Учитывая, наконец, что при выполнении условия $N\Omega\Delta t_{макс} \ll 1$ можно считать:

$$J_1(\Omega\Delta t_{макс}) \approx \frac{\Omega\Delta t_{макс}}{2},$$

$$J_2(2\Omega\Delta t_{макс}) \approx \frac{(2\Omega\Delta t_{макс})^2}{8},$$

найдём

$$K_2 \approx \Omega\Delta t_{макс}. \qquad (17.35'')$$

Полученное выражение для коэффициента нелинейных искажений (по второй гармонике) справедливо для импульсов любой формы.

Заметим, что при частотно-импульсной модуляции, когда $\Delta t_{макс}$ изменяется обратно пропорционально Ω согласно ф-ле (17.7), для K_2 имеет место простое выражение:

$$K_2 \approx \frac{\Delta\omega_{макс}}{\omega_1}. \qquad (17.35''')$$

Аналогично с помощью выражения (17.27) можно найти спектры импульсных последовательностей при различных видах модуляции[1]).

§ 17.5. Связь между частотным спектром сообщения и тактовой частотой. Теорема Котельникова

Ознакомившись с основными разновидностями и способами осуществления импульсной модуляции, а также с методом анализа частотных спектров, обратимся к вопросу о необходимом соотношении между наивысшей частотой передаваемого сигнала (сообщения) и тактовой частотой импульсной последовательности. Этот вопрос имеет важнейшее значение для рационального построения импульсной радиолинии. Для улучшения энергетических показателей линии выгодно максимально увеличивать скважность импульсной последовательности, т. е. снижать тактовую частоту ω_1, так как при этом уменьшается средняя мощность излучаемых передатчиком колебаний (при одной и той же мощности в импульсе). Однако снижение тактовой частоты ниже определённого минимума снижает точность передачи сообщения, так как при слишком большом интервале между импульсами тонкая структура сообщения не может быть воспроизведена.

Задача может быть сформулирована следующим образом: задана функция времени $f(t)$ (сообщение), частотный спектр которой ограничен полосой частот $(0, \omega_c)$; необходимо найти максимально допустимый интервал Δt между импульсами, при котором обеспечивается удовлетворительное воспроизведение функции $f(t)$.

Решение поставленной задачи может быть получено с помощью теоремы Котельникова, утверждающей, что если функция времени $f(t)$ ограничена по полосе частот участком от 0 до ω_c, то она полностью определяется заданием её ординат в ряде дискретных точек, отстоящих друг от друга на $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$.

Это положение поясняется рис. 17.17, на котором через Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t \ldots n\Delta t$ и т. д. (n — любое целое положительное или отрицательное число) обозначены положения импульсов на линии времени, а через $f(n\Delta t)$ обозначены передаваемые этими импульсами ординаты функции $f(t)$.

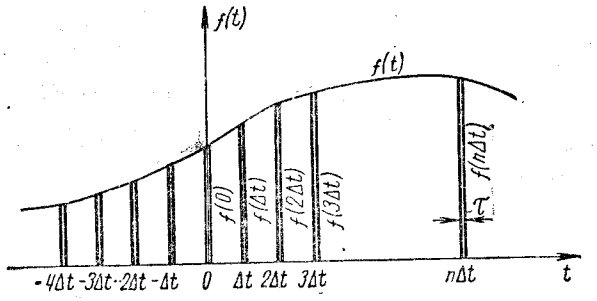


Рис. 17.17

Физическое содержание теоремы Котельникова становится ясным, если учесть, что функция, не содержащая в своём спектре частот превышающих ω_c, не может заметно измениться за промежуток времени $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}$, равный половине периода наивысшей частоты f_c.

К этому же выводу можно придти, если функцию $f(t)$ с ограниченным спектром рассматривать как напряжение (или ток) на выходе фильтра с полосой пропускания $(0, \omega_c)$. При любом характере изменения эдс на входе фильтра, даже при скачкообразном изменении, для установления нового значения выходного напряжения требуется время не меньшее, чем постоянная времени фильтра, т. е. $\frac{1}{2f_c} = \frac{\pi}{\omega_c}$.

Доказательство теоремы Котельникова может быть проведено следующим образом[1]).

Пусть задана произвольная непериодическая функция времени $f(t)$, спектральная плотность которой $\overrightarrow{F}(\omega)$ отлична от нуля

[1]) См., например, И. С. Гоноровский, „Частотная модуляция и её применение". Связьиздат, 1948 и Я. Д. Ширман, „Частотные спектры при временной (фазовой) и частотно-импульсной модуляции". „Радиотехника", № 7 — 8, 1946.

[1]) См. А. А. Харкевич. „Очерки общей теории связи", ГИТТЛ, Москва, 1955, стр. 25.

в полосе частот $(0, \omega_c)$. Интеграл Фурье для такой функции может быть представлен в форме

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\vec{F}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (17.36)$$

Спектральная плотность $\vec{F}(\omega)$, определяемая условием

$$\vec{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\neq 0 \quad \text{при} \quad |\omega|<\omega_c;$$

$$=0 \quad \text{при} \quad |\omega|\geqslant\omega_c,$$

на конечном интервале $(-\omega_c, \omega_c)$ может быть представлена рядом Фурье [см. выражение (2.3)]

$$\vec{F}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n\,e^{in\frac{2\pi}{2\omega_c}\omega}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n\,e^{in\omega\Delta t}. \qquad (17.37)$$

В отличие от ф-лы (2.3) здесь периодом функции является интервал $2\omega_c$, а коэффициенты разложения $\vec{A}_n$ определяются по формуле, аналогичной (2.11), но с заменой в последней t на ω, t_1 и t_2 соответственно на $-\omega_c$ и $+\omega_c$, T на $2\omega_c$ и $\Omega_1=\frac{2\pi}{T}$ на $\frac{\pi}{\omega_c}=\Delta t$.

Подставляя выражение (17.37) в ур-ние (17.36), получим

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}e^{i\omega t}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n\,e^{in\omega\Delta t}\right)d\omega.$$

Меняя местами операции интегрирования и суммирования, находим

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}e^{i\omega(t+n\Delta t)}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{A}_n\,\frac{\sin\omega_c(t+n\Delta t)}{(t+n\Delta t)}. \qquad (17.38)$$

Нетрудно выявить смысл коэффициентов A_n. Подставляя в выражение (17.38) $t=-k\Delta t$, где k — любое целое положительное или отрицательное число и учитывая, что при $k=n$

$$\left.\frac{\sin\omega_c(t+n\Delta t)}{(t+n\Delta t)}\right|_{t=-k\Delta t}=\frac{\sin[(-k+n)\omega_c\Delta t]}{(-k+n)\Delta t}=\frac{\sin[(-k+n)\pi]}{(-k+n)\Delta t}=\omega_c,$$

а при $k\neq n$

$$\left.\frac{\sin\omega_c(t+n\Delta t)}{(t+n\Delta t)}\right|_{t=-k\Delta t}=\frac{\sin[(-k+n)\pi]}{(-k+n)\Delta t}=0,$$

получаем

$$f(-k\Delta t)=\frac{1}{2\pi}\,\omega_c\,\vec{A}_k$$

или

$$\vec{A}_k=\frac{2\pi}{\omega_c}f(-k\Delta t).$$

Подстановка этого выражения в (17.38) даёт

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(-n\Delta t)\,\frac{\sin\omega_c(t+n\Delta t)}{\omega_c(t+n\Delta t)}. \qquad (17.39)$$

Заметим, что поскольку в выражении (17.39) суммирование ведётся как по положительным, так и отрицательным значениям n, можно изменить знак перед n под знаком суммы.

Итак, окончательно приходим к выражению

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta t)\,\frac{\sin\omega_c(t-n\Delta t)}{\omega_c(t-n\Delta t)}. \qquad (17.40)$$

Таким образом, теорема доказана, поскольку функция $f(t)$ выражена через свои мгновенные значения $f(n\Delta t)$, т. е. через значения, принимаемые в моменты, отстоящие друг от друга на $\Delta t=\frac{\pi}{\omega_c}=\frac{1}{2f_c}$, где f_c — наивысшая частота, входящая в спектр функции $f(t)$.

Физический смысл выражения (17.40) может быть выявлен следующим образом. Допустим, что длительности τ показанных на рис. 17.17 импульсов одинаковы, а высоты пропорциональны мгновенному значению функции $f(t)$ в соответствующие моменты времени, т. е. $f(n\Delta t)$. „Пропустим“ теперь подобную импульсную последовательность, отображающую заданное сообщение $f(t)$, через идеальный фильтр нижних частот с граничной частотой ω_c.

Это равносильно ограничению частотного спектра импульсной последовательности такой же самой полосой частот, что и полоса передаваемого сообщения $f(t)$.

Так как импульсы считаются весьма короткими по сравнению с интервалами Δt, то в пределах полосы частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c = \frac{\pi}{\Delta t}$ их спектральную плотность $\vec{E}(\omega)$ можно считать неизменной и равной площади импульсов (см. § 2.7). В частности, в случае прямоугольных импульсов для спектральной плотности n-го импульса имеет место выражение:

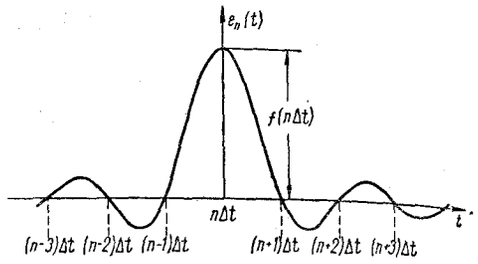


Рис. 17.18

$$\vec{E}_n(\omega) = \vec{E}_n(0) = Kf(n\Delta t)\tau, \quad (17.41)$$

где K — коэффициент пропорциональности между $f(t)$ и высотой импульса.

На выходе идеального фильтра от каждого из импульсов получается функция времени, представленная на рис. 17.18. Эта функция, совпадающая с функцией, показанной на рис. 2.14*г*, определяется уравнением [см. выражение (2.47), в котором ω и t должны быть взаимно заменены]:

$$e_n(t) = \frac{2E_n(0)}{(t-n\Delta t)} \sin\omega_c(t-n\Delta t) = 2E_n(0)\,\omega\,\frac{\sin\omega_c(t-n\Delta t)}{\omega_c(t-n\Delta t)}. \quad (17.42)$$

Максимальная ордината этой функции, получающаяся в момент $t = n\Delta t$, равна $2\omega_c E(0)$, а при подстановке выражения (17.41)

$$e_n(n\Delta t) = 2\omega_c \tau K \cdot f(n\Delta t). \quad (17.43)$$

Так как ω_c и τ — постоянные величины, то максимальные ординаты функций $e_n(t)$ пропорциональны ординатам передаваемого сообщения $f(t)$ в моменты $n\Delta t$. При надлежащем выборе коэффициента пропорциональности K, именно так, чтобы $K = \frac{1}{2\omega_c\tau}$, ур-ние (17.43) переходит в следующее

$$e_n(t) = f(n\Delta t)\,\frac{\sin\omega_c(t-n\Delta t)}{\omega_c(t-n\Delta t)}. \quad (17.44)$$

Этот случай изображён на рис. 17.18.

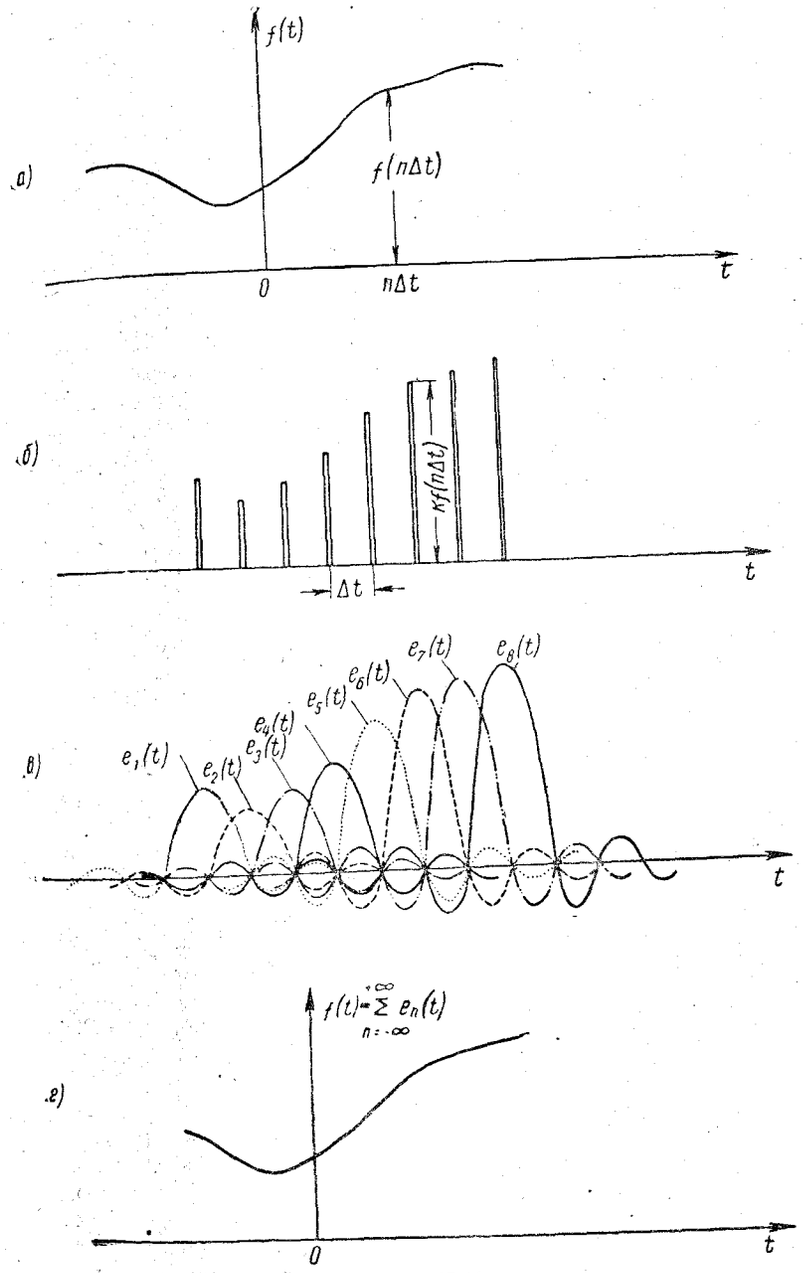


Рис. 17.19

Представленная на этом рисунке функция соответствует одному из слагаемых суммы (17.40). Суммируя функции $e_n(t)$ при различных значениях n (от $-\infty$ до $+\infty$), получим исходную функцию $f(t)$, т. е. передаваемое сообщение.

Этот процесс поясняется рис. 17.19, на котором показаны: передаваемое сообщение $f(t)$ (рис. 17.19*а*), импульсы с высотами, пропорциональными значениям $f(n\Delta t)$ (рис. 17.19*б*), функции $e_n(t)$, получающиеся на приёмном конце линии после пропускания импульсов через фильтр нижних частот (рис. 17.19*в*) и, наконец, результат суммирования функций $e_n(t)$ (рис. 17.19*г*).

Из рис. 17.18 и 17.19, а также из выражения (17.40) видно, что хотя $f(t)$ выражена через бесчисленное число своих ординат (n изменяется от $-\infty$ до $+\infty$), в каждый из моментов $t=\Delta t$, $2\Delta t$, ... и т. д., $f(t)$ определяется только одним слагаемым.

Итак, при передаче по импульсной радиолинии сложных сигналов с полосой частот от 0 до $\Omega_{макс}=2\pi F_{макс}$, интервалы между импульсами не должны превышать $\Delta t \leqslant \frac{1}{2F_{макс}}$, т. е. тактовая частота ω_1 должна отвечать условию:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{\Delta t}>2\pi\cdot 2F_{макс}=2\Omega_{макс}. \qquad (17.45)$$

§ 17.6. Детектирование модулированных импульсов

При приёме сообщений, переданных по импульсной радиолинии, приходится дважды применять процесс детектирования. Сперва производится детектирование радиоимпульсов с помощью обычного амплитудного детектора, на выходе которого выделяются видеоимпульсы. Режим работы этого детектора ничем не отличается от разобранного в гл. 13 детектирования высокочастотного колебания. Нужно лишь, чтобы постоянная времени нагрузки детектора была достаточно малой для удовлетворительного воспроизведения формы огибающей радиоимпульса. Полученная в результате первого детектирования последовательность видеоимпульсов подаётся ко второму, импульсному, детектору, на выходе которого выделяется сообщение, тем или иным способом наложенное на импульсную последовательность при модуляции.

По сравнению с процессом детектирования радиоимпульсов и вообще радиочастотных (непрерывных) колебаний импульсное детектирование обладает рядом существенных особенностей. Эти особенности связаны со структурой спектра модулированной последовательности импульсов, а также с необычным для высокочастотного колебания соотношением между частотой модуляции и частотой следования импульсов (тактовой частотой).

Проведённое в предыдущих параграфах исследование показывает, что в спектре модулированной последовательности, наряду

с гармониками частоты повторения и с различными комбинационными частотами, содержатся также и непосредственно модулирующие частоты. Из этого следует, что задача выделения из модулированной импульсной последовательности сообщения может быть в принципе осуществлена с помощью линейной избирательной системы (фильтра). С другой стороны, то обстоятельство, что частота следования импульсов (тактовая частота) обычно превышает наивысшую частоту модуляции всего лишь в $2\div 3$ раза, затрудняет разделение частот и создаёт опасность попадания в полосу частот сообщения ряда комбинационных частот. Ясно поэтому, что выбор метода детектирования должен производиться с учётом особенностей спектра импульсной последовательности при том или ином виде модуляции.

Так, например, в случае амплитудно-импульсной модуляции, когда в спектре имеется сильно выраженная составляющая с частотой модуляции Ω, можно воспользоваться линейным методом выделения сигнала. Применяя фильтр нижних частот с полосой

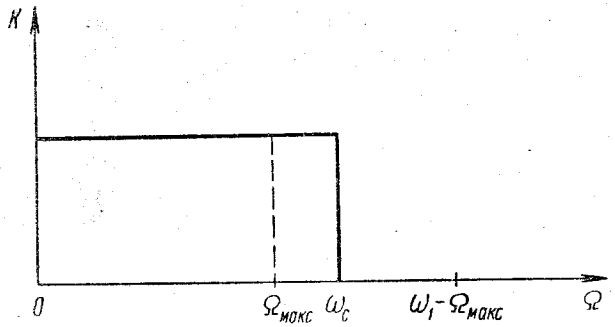


Рис. 17.20

пропускания от 0 до $\omega_c>\Omega_{макс}$, где $\Omega_{макс}$ — наивысшая частота модуляции, можно выделить полезные составляющие спектра и задержать тактовую частоту ω_1 и все остальные частоты спектра. Из представленного на рис. 17.16 спектра видно, что наиболее опасной частотой является частота $\omega_1-\Omega$. Для возможности выделения полосы частот от 0 до $\Omega_{макс}$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Omega_{макс}<\omega_1-\Omega_{макс}$$

или

$$\omega_1>2\Omega_{макс}.$$

Расположение частот $\Omega_{макс}$, ω_c и $\Omega_1-\Omega_{макс}$ показано на рис. 17.20.

Таким образом, тактовая частота ω_1 должна превышать наивысшую частоту модуляции по крайней мере в два раза. Этот

вывод совпадает с результатом, полученным в предыдущем параграфе.

В практике обычно исходят из условия

$$\omega_1 = (2 \div 3)\,\Omega_{макс}.$$

Дальнейшее повышение частоты следования импульсов невыгодно, так как при этом увеличивается средняя мощность излучаемого передатчиком колебания и, кроме того, сокращается число каналов, которое можно разместить в интервалах между импульсами (см. § 17.7).

Наряду с линейными фильтрами широко распространено также детектирование АИМ с помощью обычной диодной схемы. Особенностью импульсного диодного детектора по сравнению с детектором непрерывного колебания является необходимость в относительно большой постоянной времени цепи нагрузки. Эта особенность вытекает из большой скважности импульсной последовательности.

Кроме того, так как импульсный диодный детектор связывается с апериодическим усилителем видеоимпульсов (а не с резонансным усилителем, как в случае детектора непрерывного радиочастотного колебания), то при расчёте режима и выборе элементов схемы необходимо детектор и предварительный видеоусилитель рассматривать как одно целое[1]).

Рассмотрим теперь детектирование импульсов, модулированных по длительности. Как и в случае АИМ, при периодическом изменении длительности импульсов в спектре модулированной последовательности возникает сильно выраженная компонента с частотой модуляции Ω. Амплитуда этой компоненты пропорциональна отношению $\frac{\Delta\tau_{макс}}{\tau_0}$. Ясно, что для выделения из спектра импульсного напряжения полезной составляющей может быть, как и в случае АИМ, использован линейный фильтр. Необходимо лишь при выборе параметров импульсной последовательности и модуляции, а также полосы прозрачности фильтра учитывать сложную структуру спектра и возможность попадания комбинационных частот в полосу фильтра.

Упомянем в заключение о детектировании импульсной последовательности, модулированной по фазе или по частоте (ФИМ и ЧИМ). Ранее уже отмечалось, что компонента основной частоты модуляции в спектре модулированного напряжения при ВИМ выражена весьма слабо. Поэтому линейные методы детектирования в данном случае оказываются неэффективными[2]) и в практике обычно

[1]) Детальное исследование импульсного диодного детектора проведено в монографии Л. С. Гуткина „Преобразование сверхвысоких частот и детектирование", Госэнергоиздат, 1953.

[2]) Эти вопросы детально исследованы в статье Я. Д. Ширмана. „Радиотехника", № 7 — 8, 1946.

применяется преобразование ВИМ в АИМ или в ДИМ, после чего используется диодный детектор (в случае АИМ) или фильтр (в случае ДИМ).

Детектирование ВИМ можно также осуществить следующим образом: с помощью фильтра выделяется одна из гармоник импульсной последовательности вместе с примыкающим к этой гармонике спектром боковых частот, являющихся результатом модуляции, после чего осуществляется обычное частотное (или фазовое) детектирование непрерывного колебания. В виду сложности этот способ применяется редко.

§ 17.7. Принципы многоканальной радиосвязи

Увеличение пропускной способности линий радиосвязи путём одновременной передачи сообщений по нескольким каналам является одной из важных проблем радиотехники. Многоканальные радиолинии получили широкое распространение в диапазоне сверхвысоких частот. Укв радиолинии большой протяжённости представляют собой обычно систему ретрансляционных приёмо-передающих станций, удалённых одна от другой не более, чем на несколько десятков километров (для обеспечения связи в пределах оптической видимости).

Все известные способы осуществления многоканальной радиосвязи могут быть сведены к двум видам, основанным на использовании: 1) частотной селекции и 2) временной селекции.

К первому виду относятся системы, в которых каждому каналу отводится свой спектр частот, а разделение каналов на приёмном конце линии осуществляется с помощью частотных фильтров.

Ко второму виду относятся системы, в которых все каналы занимают одинаковую полосу частот, но вся линия в целом используется поочерёдно для передачи сигналов по отдельным каналам.

Одной из наиболее совершенных систем первого вида является система, в которой частотная модуляция высокочастотного колебания, излучаемого передатчиком, сочетается с однополосной амплитудной модуляцией в каждом из каналов. Скелетная схема подобной системы представлена на рис. 17.21.

На передающем конце линии модулирующие частоты Ω накладываются с помощью балансных модуляторов на вспомогательные частоты Ω_1, Ω_2, ... Ω_n, таким образом, что последние подавляются, а из двух боковых полос одна отфильтровывается в последующих полосовых фильтрах. В результате к смесителю каналов подаются полосы частот $\Omega_1 + \Omega$, $\Omega_2 + \Omega$ ... $\Omega_n + \Omega$ и т. д.

Спектр сигнала, поступающего на вход частотного модулятора передатчика, показан на рис. 17.22. Напряжению, поступающему с одного канала, соответствует определённая величина девиации частоты передатчика. Модулятор рассчитывается таким образом,

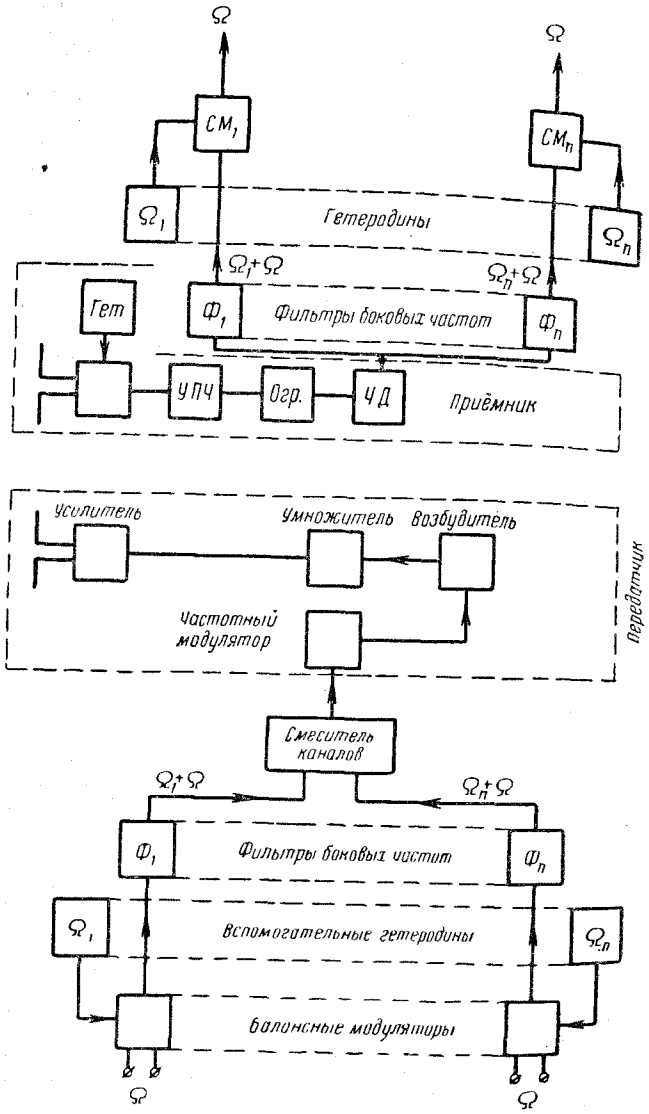


Рис. 17.21

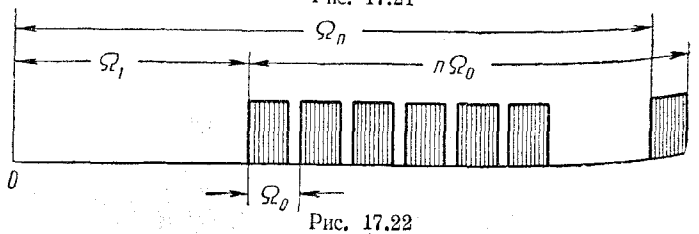


Рис. 17.22

чтобы суммарное напряжение всех каналов не выходило за пределы линейного участка модуляционной характеристики. Таким образом, полная девиация частоты равна линейной сумме девиаций, создаваемых отдельными каналами. Это является необходимым условием устранения паразитного взаимодействия между отдельными каналами. На приёмном конце радиолинии осуществляется сперва ограничение по амплитуде и частотное детектирование, затем разделение каналов с помощью фильтров, идентичных фильтрам передающего конца, после чего полученные на выходе фильтров сигналы с однополосным спектром поступают к преобразователям частоты, к которым подаются также частоты Ω_1, Ω_2, ... Ω_n от местных гетеродинов. Для воспроизведения на выходе преобразователей частот, совпадающих с частотами сообщений, подаваемых к балансным модуляторам, должна обеспечиваться синхронность частоты местного гетеродина и соответствующего генератора на передающем конце линии. С этой целью на приёмном и передающем концах линии обычно применяются одинаковые низкочастотные генераторы с кварцевой стабилизацией. Гармоники этих генераторов используются в качестве вспомогательных частот Ω_1, Ω_2 ... Ω_n и т. д.

Описанная система обладает существенными достоинствами. Применение широкополосной частотной модуляции позволяет получить высокую помехоустойчивость связи, а применение однополосной амплитудной модуляции в каналах выгодно тем, что в отсутствие сообщения в каком-либо из каналов, напряжение на его выходе отсутствует. Так как при передаче речи, музыки и других сообщений имеются значительные паузы, то при большом числе каналов нет необходимости ограничивать максимальную девиацию частоты, отводимую на один канал, величиной $\frac{1}{n} f_{д.\,макс}$, где n — число каналов, а $f_{д.\,макс}$ — наибольшая допускаемая передатчиком девиация.

Теория и опыт показывают, что средний за большое время уровень сигнала обычно не превышает $0{,}15 \div 0{,}2$ от пикового уровня. Вероятность совпадения во времени пиков в большом числе каналов настолько мала, что без риска можно устанавливать уровень средней девиации для каждого из каналов в несколько раз бо́льшим чем $\frac{1}{n} f_{д.\,макс}$. Это позволяет получить значительный выигрыш в уровне полезного сигнала без увеличения мощности передатчика.

Недостатком многоканальных линий с частотной модуляцией является необходимость предъявления жёстких требований к линейности фазовых характеристик всех высокочастотных элементов линии. При большом числе ретрансляционных пунктов даже небольшое нарушение линейности характеристик приводит к возникновению нелинейных искажений, которые проявляются в образовании дополнительных частот, попадающих в соседние каналы и создаю-

щих так называемые „переходные шумы“ и „перекрёстную модуляцию“.

Переходим к рассмотрению принципов построения многоканальных линий с временно́й селекцией. Как уже отмечалось, в подобных системах линия связи поочерёдно используется для отдельных каналов. Такой принцип работы возможен при использовании импульсных методов модуляции. Из проведённого в § 17.1 рассмотрения модуляции импульсной последовательности видно, что при большой скважности подавляющая часть паузы между импульсами остаётся неиспользованной, так как временно́й сдвиг импульсов (при ВИМ) или приращения длительности (при ДИМ) составляют очень малую часть периода следования импульсов. Можно поэтому разделить период следования на равные промежутки, каждый из которых используется для передачи импульсов одного канала. Таким образом можно передавать одновременно n импульсных последовательностей, где n — число каналов. Каждая из последовательностей модулируется при этом напряжением, поступающим из соответствующего канала.

Разделение каналов на приёмном конце линии осуществляется с помощью использования временно́й селекции. Суть этого способа заключается в том, что детекторное устройство, предназначенное для данного канала, подключается к линии только на промежуток времени, выделенный этому каналу. Соответствующий модулятор на передающей стороне линии и детектор на приёмной стороне должны синхронно подключаться к линии. Этот процесс повто-

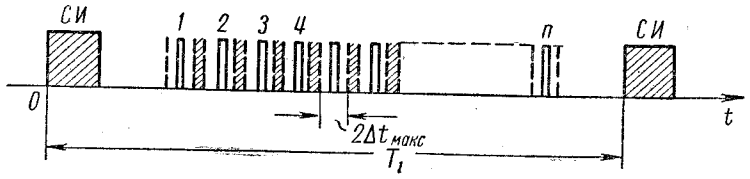


Рис. 17.23

ряется периодически с частотой следования импульсов. Для обеспечения синхронизма коммутации используется специальный сихронизирующий, так называемый, „маркерный“ импульс. Таким образом, последовательность посылаемых передатчиком импульсов должна иметь вид, показанный на рис. 17.23. В течение каждого из периодов T_1 тактовой частоты передаётся один синхронизирующий и n канальных импульсов.

Длительность синхронизирующего импульса берётся обычно в несколько раз больше, чем длительность канальных импульсов. Это позволяет выделить синхронизирующий импульс в оконечном приёмном устройстве радиолинии с помощью, например, относительно узкополосного фильтра.

Амплитуда сдвига сигнальных импульсов при модуляции должна быть несколько меньше, чем половина интервала T_1/n.

Заштрихованные участки на рис. 17.23 соответствуют защитным интервалам между отдельными каналами.

Переключение линии с одного канала на другой может быть осуществлено с помощью различных схем и устройств. Одним из наиболее изящных решений этой задачи является специальный электронный коммутатор, называемый циклофоном. Принцип работы циклофона на передающем конце линии поясняется рис. 17.24. Циклофон представляет собой элекронную трубку лучевого типа и состоит из катода *1*, системы электродов *2* для получения узкого электронного пучка, двух пар взаимно перпендикулярных отклоняющих пластин *3*, далее системы n пар, расположенных по окружности отклоняющих пластин *4*, металлического диска *5* с $n+1$ вырезами и общего анода *6*.

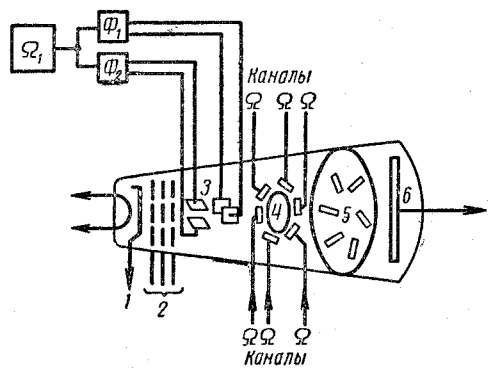


Рис. 17. 24

На отклоняющие пластины *3* подаются два синусоидальных напряжения с тактовой частотой Ω_1. Фазовращатели Φ_1 и Φ_2 создают сдвиг по фазе между напряжениями, поступающими на пластины, 90°, благодаря чему обеспечивается вращение электронного пучка с угловой частотой, равной тактовой частоте.

При прохождении электронного пучка через щели в диске *5*, в цепи анода *6* возникают импульсы тока и напряжения. За каждый период T_1 получается $n+1$ импульсов, из них один маркерный и n сигнальных. В отсутствие модуляции след от электронного пучка описывает на диске *5* правильную окружность и импульсы в анодной цепи следуют через одинаковые промежутки времени.

Модулирующие напряжения из каждого канала поступают на свои пластины, входящие в систему *4*. Благодаря тому, что щели в диске *5* расположены под некоторым углом к радиусу, за исключением щели, соответствующей маркерному импульсу, отклонение пучка при модуляции приводит к пропорциональному сдвигу импульсов относительно исходного положения.

Таким образом, циклофон выполняет одновременно следующие функции: образование серии канальных импульсов, а также маркерного импульса, модуляция канальных импульсов и их суммирование в общей анодной цепи. Полученная таким образом многоканальная импульсная последовательность используется для осуществления обычной амплитудной модуляции в передатчике диапазона свч.

Устройство и схема включения циклофона на приёмном конце радиолинии поясняется рис. 17.25. В отличие от ранее рассмотренного циклофона здесь отсутствуют отклоняющие пластины для модуляции, а щели в диске *4* прорезаны вдоль радиусов. Кроме того, вместо одного общего анода здесь имеется n пластин, осуществляющих разделение каналов.

На входе циклофона после обычного амплитудного детектирования имеется селекторное устройство *С*, которое выделяет маркерные импульсы и создаёт синусоидальное напряжение с частотой,

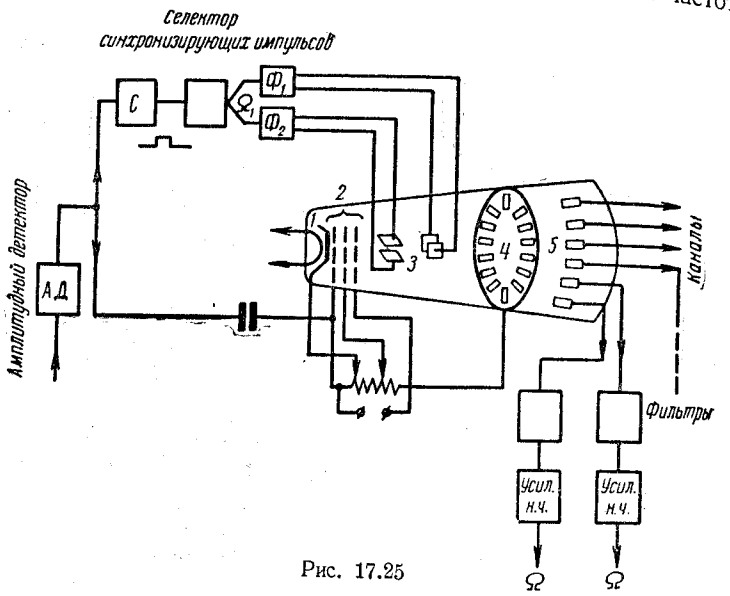


Рис. 17.25

равной тактовой частоте, излучаемой передатчиком импульсной последовательности. С выхода селектора полученное напряжение через фазосдвигающие устройства $Ф_1$ и $Ф_2$ (каждое создает сдвиг по фазе в 45°) подаётся на две пары отклоняющих пластин *3*. Таким образом обеспечивается синхронизм вращения электронного луча в приёмном циклофоне относительно передающего циклофона.

Сигнал, представляющий собой последовательность видеоимпульсов, полученных в результате обычного амплитудного детектирования, поступает на управляющую сетку циклофона. В интервалах между импульсами трубка заперта большим отрицательным напряжением. При появлении импульса возникает электронный луч, который проходит через соответствующую щель в диске *4*. Благодаря синхронному вращению лучей в передающем и приёмном циклофонах, каждому каналу соответствует одновременное возникновение импульса в первой трубке и прохождение мимо соответствующей щели во второй трубке. При этом щели в диске *4* приёмной трубки смещаются на половину диаметра электронного пучка, так что при передаче немодулированной последовательности через каждую из щелей за время длительности импульса проходит только половина электронного потока пучка.

Этот случай соответствует рис. 17.26*а*. Если в результате временно́й модуляции импульс в одном из каналов сдвинут в сторону опережения, то электронный поток через соответствующую щель увеличивается (рис. 17.26*б*), а при сдвиге в сторону запаздывания — уменьшается (рис. 17.26*в*). Это приводит к изменению

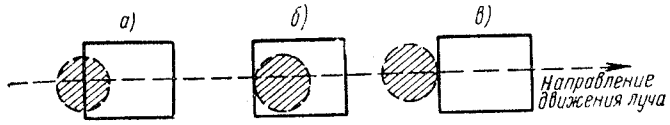


Рис. 17.26

импульсов тока в цепи соответствующей пластины *5* как по длительности, так и по амплитуде.

В цепи каждой из пластин *5* имеются фильтры, которые выделяют относительно низкую частоту модуляции и задерживают тактовую частоту, а также все другие высокочастотные компоненты импульсной последовательности.

Как видим, приёмный циклофон осуществляет преобразование временно́й импульсной модуляции в ДИМ (и одновременно в АИМ) и разделение каналов.

В импульсных радиолиниях, использующих временну́ю модуляцию, все факторы, приводящие к изменению положения импульсов, могут являться источниками помех. Отсюда видно, что особое внимание необходимо уделять обеспечению чёткого срабатывания всех устройств, используемых для генерирования и формирования импульсов, особенно в линиях с большим числом ретрансляций. Обширный материал по импульсной радиосвязи содержится в книге В. И. Сифорова, С. А. Дробова, Л. Д. Ширмана и Н. А. Железнова „Теория импульсной радиосвязи“ (ЛК ВВИА, Ленинград, 1951).

ГЛАВА 18

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ РАДИОСВЯЗИ

§ 18.1. Значение уровня помех при приёме радиосигналов

Мощность колебаний, улавливаемых из пространства антенной радиоприёмного устройства, обычно очень мала. В зависимости от расстояния между приёмной и передающими станциями, от мощности передатчика, от направленности действия передающей и приёмной антенн, от условий распространения радиоволн и ряда других факторов, эта мощность колеблется в пределах $10^{-10} \div 10^{-14}$ *вт*.

При нагрузочном (входном) сопротивлении порядка 75 *ом* нижнему пределу мощности 10^{-14} *вт* соответствует напряжение порядка единиц микровольт. Это напряжение действует на сетке первой лампы приёмника. На выходе же приёмника для нормальной работы регистрирующего (индикаторного) устройства требуется мощность порядка единиц или даже десятков ватт.

Отсюда видно, что основной задачей радиоприёмника является осуществление очень большого усиления. Современные радиоприёмные устройства способны усиливать сигнал в 10^{14} раз по мощности или соответственно в 10^7 раз по напряжению[1]). Для получения такого усиления требуется, примерно, 8—10 ламп.

Следует отметить, что увеличением числа ламп усиление можно намного повысить. Здесь, однако, выявляется одно из принципиальных ограничений, присущих любому радиоприёмному устройству, а именно: вместе с полезным сигналом усиливаются и помехи, действующие на входе приёмника. Повышать усиление имеет смысл только при условии, что отношение величины сигнала к величине помехи на входе приёмника превышает определённый минимум, необходимый для различения сигнала на фоне помех. Важнейшее значение приобретает поэтому уровень сигнала относительно помехи на входе приёмника. Чем выше этот уровень, тем слабее действие помех и тем в бо́льшей степени может быть использовано усиление приёмника.

[1]) При переходе от усиления по мощности к усилению по напряжению необходимо учитывать соотношение нагрузочных сопротивлений на входе и выходе приёмника. В данном случае для оценки только порядка величин это отношение приравнено единице.

Основными способами повышения уровня сигнала являются: увеличение мощности передатчика и применение антенн направленного действия как при передаче, так и при приёме. Большое значение имеет правильное размещение приёмной станции, если это возможно, удаление последней от источников индустриальных помех.

При заданном отношении поля сигнала к полю помех в районе расположения приёмной антенны, значительного улучшения приёма можно добиться рациональным выбором параметров модуляции сигнала и параметров приёмного устройства (построение схемы, полоса пропускания, вид детектирования и др.).

Детальное изучение перечисленных вопросов входит в задачу курса радиоприёмных устройств. В данной книге рассматриваются лишь некоторые положения, существенные для выяснения механизма действия помех при приёме радиосигналов с различными видами модуляции и необходимые для дальнейшего более углублённого изучения проблемы помехоустойчивости радиосвязи.

§ 18.2. Действие синусоидальной помехи при приёме сигналов с амплитудной и частотной модуляцией

Синусоидальная помеха часто возникает в практике при одновременном действии на приёмник двух близких по частоте радиопередающих станций: „полезной", создающей сигнал, и „мешающей", создающей помеху. В отсутствие модуляции последняя представляет собой простое синусоидальное колебание. Так как приёмник настраивается на полезную станцию, то частота сигнала может считаться совпадающей с резонансной частотой приёмника. Если частота помехи отличается от последней более, чем на половину полосы пропускания усилителя промежуточной частоты, то на детектор это напряжение попадает значительно ослабленным. Однако возможны случаи, когда помеха попадает в полосу пропускания приёмника и проходит через усилитель промежуточной частоты в одинаковых с сигналом условиях. Имея в виду этот случай, допустим, что на сетку первой лампы приёмника действуют два немодулированных напряжения:

$$\left.\begin{aligned} u_c &= U_c \sin \omega_c t \\ u_n &= U_n \sin \omega_n t \end{aligned}\right\}. \qquad (18.1)$$

Здесь буквы c и n обозначают соответственно сигнал и помеху.

Каждое из этих напряжений, действуя по отдельности, может создавать на выходе детектора лишь постоянное напряжение, обычно не оказывающее никакого влияния на регистрирующее устройство приёмника. Это положение справедливо при любом виде детектирования — амплитудном или частотном. Иная картина получается

при одновременном воздействии на детектор двух гармонических напряжений. В этом случае благодаря нелинейному характеру процесса детектирования на выходе детектора возникают низкочастотные составляющие, являющиеся продуктом взаимодействия сигнала и помехи. Для определения напряжения на выходе детектора необходимо исходить из суммарного напряжения сигнала и помехи на входе.

Обозначая это напряжение через

$$u = u_c + u_n = U_c \sin \omega_c t + U_n \sin \omega_n t, \tag{18.2}$$

отношение амплитуд помехи и сигнала через

$$M_n = \frac{U_n}{U_c} \tag{18.3}$$

и расстройку частоты помехи относительно частоты сигнала через

$$\Omega_n = \omega_n - \omega_c, \tag{18.4}$$

приведём выражение (18.2) к виду:

$$u = U_c \sin \omega_c t + U_n \sin (\omega_c + \Omega_n) t =$$

$$= U_c \sin \omega_c t + U_n \cos \Omega_n t \cdot \sin \omega_c t + U_n \sin \Omega_n t \cdot \cos \omega_c t =$$

$$= U_c [(1 + M_n \cos \Omega_n t) \sin \omega_c t + M_n \sin \Omega_n t \cos \omega_c t]. \tag{18.5}$$

С помощью простых тригонометрических преобразований суммарное напряжение можно представить в виде одного сложного колебания с изменяющимися во времени амплитудой и фазой

$$u = U_c \sqrt{(1 + M_n \cos \Omega_n t)^2 + (M_n \sin \Omega_n t)^2} \sin (\omega_c t + \Theta) =$$

$$= A(t) \sin [\omega_c t + \Theta(t)]. \tag{18.6}$$

В этом выражении

$$A(t) = U_c \sqrt{1 + M_n^2 + 2 M_n \cos \Omega_n t} \tag{18.7}$$

и

$$\Theta(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{M_n \sin \Omega_n t}{1 + M_n \cos \Omega_n t} \tag{18.8}$$

представляют собой амплитуду и фазу результирующего колебания.

Так как расстройка Ω_n частоты помехи ω_n относительно частоты сигнала ω_c предполагается относительно малой величиной (не выше полосы пропускания приёмника), то функции $A(t)$ и $\Theta(t)$ можно рассматривать как „медленно“ изменяющиеся, т. е. в пределах одного периода высокой частоты $\frac{2\pi}{\omega_c}$ или $\frac{2\pi}{\omega_n}$ форму результирующего напряжения можно считать синусоидальной. Само собой

разумеется, что с одинаковым основанием результирующее напряжение можно представить в виде колебания с частотой ω_n и с соответственно изменяющейся фазой. Применённая выше форма выражения (18.6) удобна для случая, когда амплитуда $U_c > U_n$.

Выражение (18.6) показывает, что линейную сумму двух гармонических напряжений с близкими частотами можно условно рассматривать как колебание модулированное по амплитуде и по фазе (а, следовательно, и по частоте).

В приёмнике амплитудно-модулированных колебаний детектор не чувствителен к изменению фазы или частоты колебания. В этом случае существенное значение имеет только изменение амплитуды колебания. Так как напряжение на выходе амплитудного детектора пропорционально амплитуде (в случае „линейного“ детектирования, см. гл. 14), то выражение (18.7) с точностью до постоянного коэффициента определяет напряжение помехи на выходе приёмника.

Анализ особенно упрощается в случае относительно слабой помехи, т. е. при

$$M_n = \frac{U_n}{U_c} \ll 1. \tag{18.9}$$

В этом случае выражению (18.7) может быть придан следующий вид:

$$A(t) \approx U_c (1 + M_n \cos \Omega_n t). \tag{18.7'}$$

Отсюда видно, что отношение $M_n = \frac{U_n}{U_c}$ имеет смысл коэффициента модуляции, получающейся в результате наложения помехи на несущее колебание сигнала.

После детектирования получается гармоническое напряжение с частотой $\Omega_n = \omega_n - \omega_c$ и амплитудой, пропорциональной $M_n U_c$.

Так как при тональной модуляции полезного колебания напряжение на выходе приёмника пропорционально коэффициенту модуляции M_c, то отношение амплитуд сигнала C и помехи $П$ на выходе приёмника равно

$$\frac{C_{AM}}{П_{AM}} = \frac{M_c U_c}{M_n U_c} = \frac{M_c}{M_n} = \frac{U_c}{U_n} M_c. \tag{18.10}$$

Учитывая, что предельная глубина неискажённой модуляции не может превысить 100%, приходим к выводу, что максимально возможное отношение сигнала к помехе на выходе приёмника амплитудно-модулированных колебаний равно

$$\frac{C_{AM}}{П_{AM}} = \frac{1}{M_n} = \frac{U_c}{U_n}. \tag{18.10'}$$

Итак, при передаче сигнала с помощью амплитудной модуляции соотношение между сигналом и помехой в процессе детекти-

рования сохраняется неизменным и отношение сигнала к помехе на выходе приёмника не может быть улучшено по сравнению с отношением амплитуд высокочастотных напряжений сигнала и помехи на входе приёмника[1]).

Для обеспечения требуемого подавления помех при амплитудной модуляции отстаётся лишь одно средство: повышение отношения сигнала к помехе на входе приёмника. Для этого требуется повышать мощность передатчика, а также применять направленные антенны, если это допускается характером передачи и приёма.

Иначе обстоит дело при передаче сигналов с помощью частотной модуляции и при использовании в приёмнике частотного детектора. Благодаря ограничителю (см. § 14.4) частотный детектор не реагирует на амплитудную модуляцию и напряжение помехи на выходе детектора пропорционально частотному отклонению, создаваемому помехой. Поэтому существенное значение имеет выражение (18.8), дифференцирование которого (см. § 3.4) позволяет найти частотное отклонение. Предварительно упростим выражение (18.8), использовав условие малости M_n:

$$\Theta(t) \approx \operatorname{arc\,tg}(M_n \sin \Omega_n t) \approx M_n \sin \Omega_n t.$$

Тогда частотное отклонение равно

$$\Delta\omega_n(t) = \frac{d\Theta}{dt} = M_n \Omega_n \cos \Omega_n t = \omega_{д.п} \cos \Omega_n t. \qquad (18.12)$$

Отсюда видно, что наложение синусоидальной помехи с относительно малой амплитудой на синусоидальное несущее колебание сигнала создаёт эффект гармонической частотной модуляции[2]). Частота этой модуляции равна $\Omega_n = \omega_n - \omega_c$, а девиация равна

$$\omega_{д.п} = M_n \Omega_n = \frac{U_n}{U_c} \Omega_n. \qquad (18.13)$$

Амплитуда напряжения помехи на выходе частотного детектора пропорциональна найденной величине $\omega_{д.п}$. Следовательно, при заданном и неизменном отношении U_c/U_n на входе приёмника, амплитуда напряжения помехи на выходе частотного детектора пропорциональна абсолютной величине расстройки $|\Omega_n| = |\omega_n - \omega_c|$.

Полезно напомнить, что в случае амплитудной модуляции и амплитудного детектирования напряжение помехи на выходе приёмника в соответствии с ф-лой (18.7) не зависит от частоты Ω_n.

[1]) Имеется в виду условие, что частота помехи попадает в полосу пропускания УПЧ.

[2]) Не следует забывать, что этот результат получен при допущении о малости амплитуды помехи по сравнению с амплитудой сигнала. При сильной помехе закон изменения мгновенной частоты суммарного колебания получается более сложный.

Графики зависимости амплитуды помехи E_n на выходе приёмника от положения ω_n в полосе пропускания представлены на рис. 18.1.

Горизонтальная пунктирная линия, проведённая на уровне $E_n = M_n U_c = U_n$, соответствует случаю амплитудного детектирования.

Наклонные пунктирные прямые изображают зависимости

$$E_n = K_{ч.д} \cdot \omega_{д.п} = K_{ч.д} \cdot \frac{U_n}{U_c} |\Omega_n|.$$

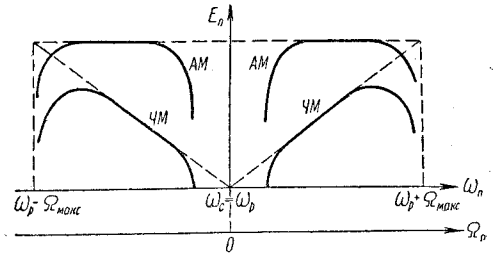


Рис. 18.1

Здесь $K_{ч.д}$ — крутизна характеристики частотного детектора.

Сплошными линиями на том же рисунке показаны реальные зависимости $E_n(\omega_n)$ при учёте влияния неравномерности частотных характеристик отдельных звеньев приёмника. Завал в области частот близких к $\omega_c = \omega_p$ обусловлен влиянием выходного (апериодического) усилителя приёмника, не пропускающего очень низкие частоты $\Omega_n = |\omega_n - \omega_c|$. При больших расстройках $\Omega_n = |\omega_n - \omega_0|$ завал характеристики $E_n(\omega_n)$ может быть обусловлен как ослаблением помехи в колебательных контурах приёмника, так и ослаблением детектированной помехи в выходных цепях приёмника.

В практике наивысшая пропускаемая апериодическим усилителем частота $\Omega_{макс}$ обычно меньше, чем половина полосы пропускания резонансной части приёмника (до детектора). На рис. 18.1 изображён именно этот случай, причём резонансная частота приёмника совмещена с ,,несущей'' частотой сигнала.

Составим отношение сигнала к помехе для случая частотной модуляции. Так как напряжение полезного сигнала на выходе частотного детектора пропорционально девиации $\omega_{д.с}$, создаваемой в передатчике в процессе модуляции, то очевидно, что

$$\frac{C_{ЧМ}}{П_{ЧМ}} = \frac{\omega_{д.с}}{\omega_{д.п}} = \frac{\omega_{д.с}}{M_n \Omega_n} = \frac{U_c}{U_n} \cdot \frac{\omega_{д.с}}{\Omega_n}. \qquad (18.14)$$

Отсюда видно, что, увеличивая девиацию частоты в передатчике, можно улучшить отношение сигнал / помеха при одном и том же отношении U_c/U_n на входе приёмника. При заданных U_c/U_n и $\omega_{д.с}$ отношение $\frac{C_{ЧМ}}{П_{ЧМ}}$ падает с возрастанием Ω_n, т. е. при частотной модуляции действие помехи наиболее сильно выражено при значениях Ω_n, близких к граничной частоте полосы пропуска-

ния $\Omega_{макс}$. Для этой частоты, соответствующей наиболее тяжёлому случаю, отношение сигнала к помехе при *ЧМ* будет:

$$\frac{C_{ЧМ}}{П_{ЧМ}} = \frac{U_c}{U_n} \cdot \frac{\omega_{д.с}}{\Omega_{макс}}. \qquad (18.15)$$

Сравнение выражений (18.15) и (18.10′) показывает, что ослабление действия синусоидальной помехи при переходе от *АМ* к *ЧМ* равно:

$$Q = \frac{C_{ЧМ}/П_{ЧМ}}{C_{АМ}/П_{АМ}} = \frac{\frac{U_c}{U_n} \cdot \frac{\omega_{д.с}}{\Omega_{макс}}}{\frac{U_c}{U_n}} = \frac{\omega_{д.с}}{\Omega_{макс}}. \qquad (18.16)$$

Для частот $\Omega_n < \Omega_{макс}$ выигрыш в ослаблении помех возрастает.

Эти результаты указывают пути повышения отношения сигнал/помеха на выходе приёмника по сравнению с тем же отношением на входе. Необходимо по возможности ограничить полосу пропускания в апериодическом усилителе с целью сужения спектра помех, прослушиваемых на выходе приёмника, и одновременно довести до возможного максимума амплитуду частотного отклонения $\omega_{д.с}$, создаваемую полезным сигналом.

Само собой разумеется, что выражение (18.16), полученное из рассмотрения действия одной лишь синусоидальной помехи в отсутствие полезной модуляции и при малом уровне помехи относительно сигнала, не может служить базой для технического расчёта; значение выражения (18.16) в том, что оно указывает на потенциальную возможность ослабления действия помех за счёт расширения размахов частотного отклонения, а не за счёт повышения мощности передатчика, как это требуется при использовании амплитудной модуляции.

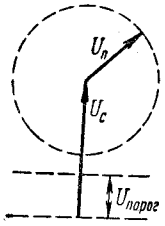


Рис. 18.2

Практическая реализация этого способа ослабления помех возможна лишь в диапазоне ультракоротких волн и при радиопередаче на относительно небольшие расстояния (в пределах прямой видимости). Только при этих условиях удаётся обеспечить необходимую для „широкополосной" частотной модуляции ширину канала связи, а также избежать искажений сигнала, связанных с многократностью путей распространения радиоволн (см. § 1.2).

Полезно отметить, что приёмник с амплитудным ограничителем и частотным детектором является „пороговой" системой. Для нормального приёма необходимо, чтобы амплитуда сигнала превышала амплитуду помехи на величину не меньшую, чем порог ограничения (рис. 18.2). При нарушении этого условия разность между сигналом и помехой, получающаяся при наложении помехи на сигнал со сдвигом по фазе

в 180°, оказывается ниже порога ограничения и ограничитель не обеспечивает срезания паразитной амплитудной модуляции.

Необходимо также иметь в виду, что увеличение девиации частоты при модуляции заставляет соответственно увеличивать полосу пропускания усилителя промежуточной частоты в приёмнике, а это ведёт к росту уровня шумовых помех на входе ограничителя. Повышать $\omega_{д.с}$ можно лишь при условии обеспечения достаточно высокого уровня полезного сигнала на входе приёмника, т. е. при достаточно большой мощности передатчика.

§ 18.3. Действие синусоидальной помехи при приёме импульсных сигналов

Допустим, что в полосу пропускания приёмника, помимо полезного сигнала, представляющего собой последовательность радиоимпульсов, попадает помеха в виде немодулированного синусоидального колебания.

Частоту заполнения импульсов ω_0 считаем совпадающей с резонансной частотой приёмника (или усилителя промежуточной частоты). Так как приёмник импульсных сигналов, как правило, содержит амплитудный детектор для выделения видеоимпульсов, то основное значение имеет влияние помехи на форму огибающей высокочастотного напряжения, поступающего на детектор.

Примем для упрощения, что огибающая радиоимпульсов представляет собой периодическую последовательность импульсов прямоугольной формы. В зависимости от соотношения амплитуд и фаз сигнала и помехи, а также от соотношения между длительностью импульсов и частотой заполнения огибающая суммарного напряжения может принимать различную форму.

Рассмотрим некоторые характерные случаи. На диаграммах рис. 18.3 показано формирование напряжения на выходе детектора при наложении слабой помехи (рис. 18.3*б*) на сильный сигнал $U_n \ll U_c$. (рис. 18.3*а*). При построении этих диаграмм сделано предположение, что радиоимпульсы представляют собой отрезки одного непрерывного высокочастотного колебания (когерентные радиоимпульсы). Это исходное колебание в промежутках между импульсами показано на рис. 18.3*а* пунктиром.

Искомое суммарное колебание в промежутках времени соответствующих импульсам будет представлять собой обычные биения двух гармонических сигналов с различными частотами (ω_c и ω_n) и различными амплитудами (U_c и U_n). В паузах между импульсами остаётся одно лишь напряжение помехи с постоянной амплитудой U_n (рис. 18.3б).

Напряжение на выходе амплитудного детектора, воспроизводящее огибающую напряжения, показанного на рис. 18.3*в*, дано на рис. 18.3*г*.

Наконец, на последней диаграмме (рис. 18.3*д*) дано напряжение на выходе детектора после разделительного конденсатора.

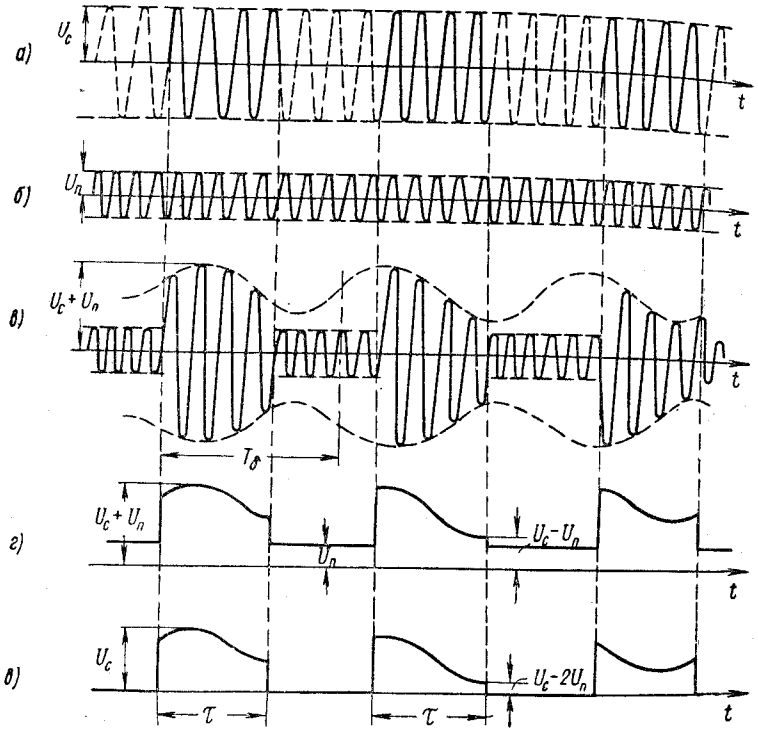


Рис. 18.3

В результате наложения помехи верхушка импульсов флуктуирует около своего среднего значения, соответствующего отсутствию помехи.

Следует ещё остановиться на вопросе о соотношении между периодом биений $T_б$ (рис. 18.3*в*) и длительностью импульсов τ. В случае согласованного фильтра полоса пропускания $2\Delta f_0 \approx \frac{2}{\tau}$. Так как частота помехи, попадающей в полосу прозрачности фильтра, не может отличаться от f_0 более, чем на Δf_0, то период биений $T_б \geqslant \frac{1}{\Delta f_0}$. Отсюда следует, что в пределах отрезка времени τ может укладываться не более периода биений. Этот случай и показан на рис. 18.3. Если же полоса пропускания $2\Delta f_0$ значительно превышает $\frac{1}{\tau_0}$ и частота помехи расположена вблизи границ полосы, то в пределах длительности импульса изменение величины импульса может совершать несколько полных циклов.

При рассматривании импульсов, показанных на рис. 18.3*д*, с помощью осциллографа, синхронизованного с частотой следования импульсов, получается изображение, представленное на рис. 18.4. При многократном наложении импульсов с амплитудой, изменяющейся в пределах $U_c \pm U_n$, верхушка импульсов флуктуирует около значения U_c. Из простых соображений ясно, что полученный результат можно распространить и на случай некогерентных радиоимпульсов, когда фазы огибающих отдельных импульсов при наложении помехи имеют случайный характер.

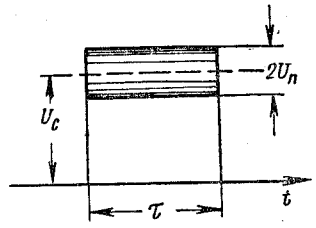


Рис. 18.4

Распределение яркости свечения экрана трубки на участке от $U_c - U_n$ до $U_c + U_n$ (рис. 18.4) подчиняется закону, найдённому в § 2.12 для распределения синусоидального колебания со случайной фазой.

Случай сильной помехи ($U_n > U_c$) изображён на рис. 18.5. Напряжение на выходе детектора (после разделительного конденсатора) приобретает характер импульсов, изменяющихся не только по величине, но и по полярности (рис. 18.5*д*).

Степень и характер мешающего действия синусоидальной помехи зависят от способа индикации импульсных сигналов. В системах, где основную роль играет среднее значение последовательности видеоимпульсов (например, план-индикатор радиолокационной станции, магнито-электрический прибор и т. д.), флуктуация амплитуды импульсов не опасна, пока $U_n < U_c$. В случае же $U_n > U_c$, когда импульсы становятся биполярными, подобные системы выводятся помехой из строя.

Несколько иначе обстоит дело с приёмниками порогового типа. Вызванное наложением помехи превышение уровня сигнала в подобных приёмниках не опасно; уменьшение же амплитуды видеоимпульса (при наложении помехи в противофазе) до уровня, меньшего чем порог ограничения, приводит к потере части импульсов. В том случае, когда $U_c < U_n$ (при биполярных импульсах), теряется 50% общего числа импульсов. В случае же $U_n < U_c$ процент потерянных импульсов зависит от отношений $\frac{U_n}{U_c}$ и $\frac{U_{пор}}{U_c}$. Чем ближе к единице второе отношение, тем больше теряется импульсов при одном и том же отношении $\frac{U_n}{U_c}$.

Необходимо, кроме того, отметить, что при конечной крутизне фронтов импульсов наложение синусоидальной помехи приводит

также к сдвигу моментов срабатывания порогового устройства. В системах с фазово-импульсной или частотно-импульсной модуляцией это может приводить к значительным помехам.

Сказанное поясняется рис. 18.6*в*, на котором изображены три импульса, получающиеся при наложении относительно слабой по-

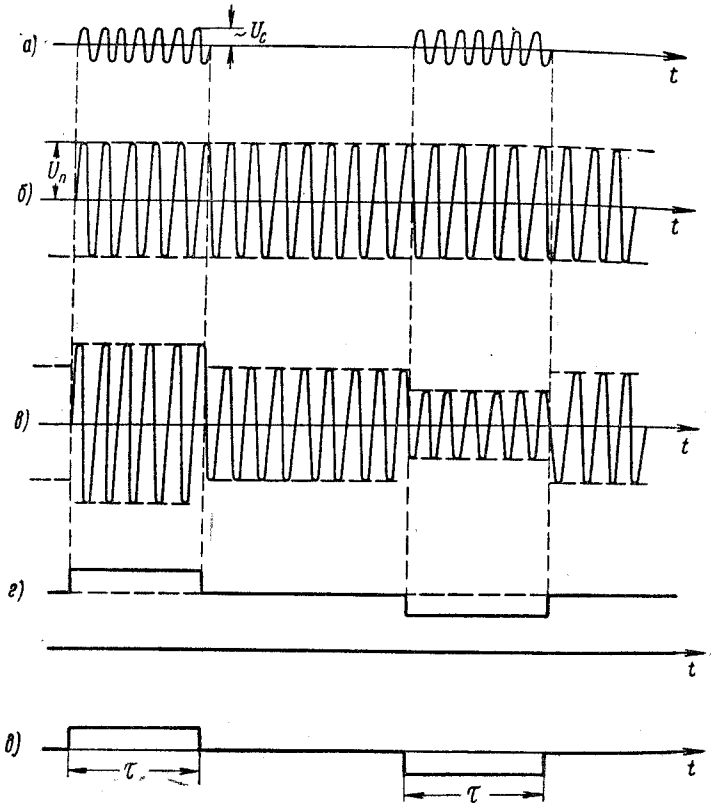


Рис. 18.5

мехи (рис. 18.6*б*) в фазе (*I* импульс), со сдвитом близким к 90° (*II* импульс) и в противофазе (*III* импульс) относительно исходных радиоимпульсов (рис. 18.6*а*). Расстройка частоты ω_n помехи относительно частоты заполнения ω_0 радиоимпульсов принята относительно малой, так что период биений $T_б \gg \tau$ и в пределах длительности импульса τ форма огибающей остаётся неизменной, но весь импульс сдвигается на величину U_n либо вверх (импульс *I*), либо вниз (импульс *III*), как это показано на рис. 18.6*в*).

На выходе амплитудного детектора и разделительного конденсатора получается диаграмма, показанная на рис. 18.6*г*, которая

отличается от предыдущей тем, что вся фигура смещена относительно линии времени на величину U_n вниз[1]). В результате импульс *I* восстанавливает своё положение (как и в отсутствие помехи), импульс *II* сдвигается вниз на величину U_n, а импульс *III* — на величину $2U_n$.

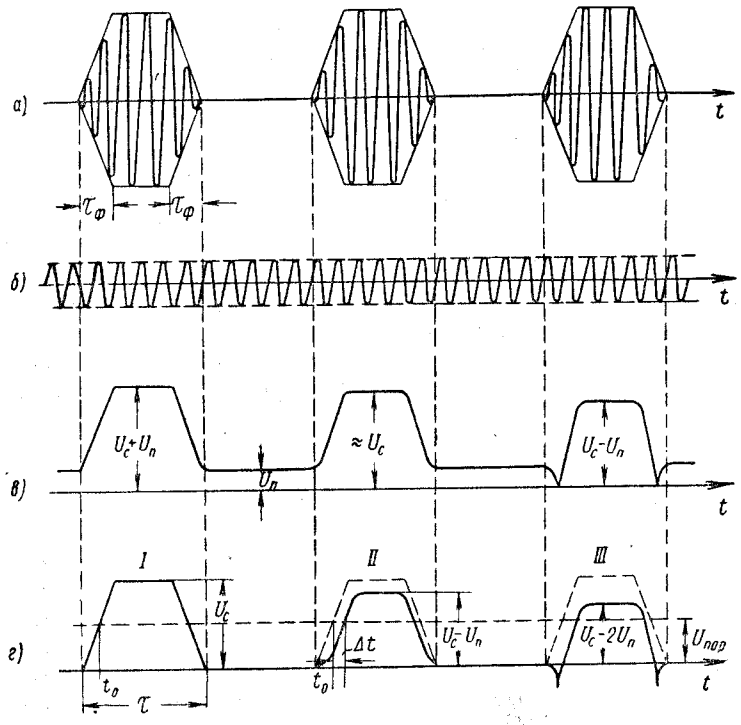


Рис. 18.6

Допустим теперь, что порог срабатывания устройства, следующего за первым детектором, был установлен на уровне $U_{пор} = \frac{1}{2}U_c$ (рис. 18.6*г*). Тогда момент срабатывания для импульса *II* будет сдвинут на величину Δt относительно правильного момента t_0 (который был бы в отсутствие помехи), а для импульса *III* — на ещё большую величину. При допущении о линейности фронтов им-

[1]) Как и в предыдущем рассмотрении предполагается, что скважность импульсной последовательности велика и среднее значение напряжения на выходе амплитудного детектора определяется практически одной лишь непрерывной помехой.

пульсов величины сдвигов Δt легко определяются с помощью очевидных выражений:

$$\text{для второго импульса } \Delta t = \frac{U_n}{U_c}\,\tau_\phi,$$

$$\text{для третего импульса } \Delta t = 2\Delta t = 2\,\frac{U_n}{U_c}\,\tau_\phi,$$

где τ_ϕ — длительность фронта импульса.

Так как в процессе приёма последовательности радиоимпульсов сдвиг фазы между сигналом и помехой может принимать различные значения в пределах $\pm\pi$, то и величина Δt, отсчитываемая относительно среднего положения момента срабатывания (в импульсе *II*), может изменяться в пределах $\Delta t = \pm\,\frac{U_n}{U_c}\,\tau_\phi$.

При случайном характере фазовых сдвигов (в случае некогерентных радиоимпульсов) величина Δt является также случайной величиной. Так как в системах импульсной радиосвязи, работающих по принципу временно́й модуляции (см. §§ 17.1 и 17.9), величина напряжения на выходе приёмника пропорциональна сдвигу фронтов импульсов, то отношение амплитуды сигнала к амплитуде помехи на выходе можно представить в виде следующего выражения, аналогичного выражению (18.15):

$$\frac{C_{ИМ}}{\Pi_{ИМ}} = \frac{\Delta t_{макс}}{\Delta t_n} = \frac{U_c}{U_n}\cdot\frac{\Delta t_{макс}}{\tau_\phi}, \qquad (18.17)$$

где $\Delta t_{макс}$ — амплитуда сдвига импульса при полезной модуляции (см. § 17.1).

Как и следовало ожидать, чем круче фронты импульсов (чем меньше τ_ϕ), тем меньше влияние помехи на работу приёмника. Не следует, однако, забывать, что для сокращения τ_ϕ нужно увеличивать полосу пропускания приёмника, а это ведёт к повышению уровня собственных шумов приёмника, а также к облегчению попадания внешних помех в полосу приёмника. Поэтому выигрыш в помехоустойчивости при импульсной радиосвязи (по сравнению с обычной амплитудной модуляцией) получается относительно небольшой. Системы с частотной модуляцией более помехоустойчивы, чем импульсные системы. Однако импульсные системы более удобны для осуществления многоканальных радиолиний (см. § 17.10).

§ 18.4. Действие импульсных помех на приёмное устройство

Пусть в непосредственной близости от приёмника произошло замыкание электрической цепи, сопровождающееся броском тока, в результате чего во входных цепях приёмника индуктируется эдс, создающая помеху. Величина этой помехи будет, очевидно, зависеть от характера броска тока, от степени связи электрической сети с антенной приёмника и т. д.

Для качественного исследования действия помехи на приёмное устройство можно считать, что возникновение скачка тока в электрической сети эквивалентно включению некоторого постоянного напряжения непосредственно на вход приёмника. График спектральной плотности $E(\omega)$ этого напряжения представлен на рис. 18.7. На этом же рисунке изображена резонансная кривая приёмника.

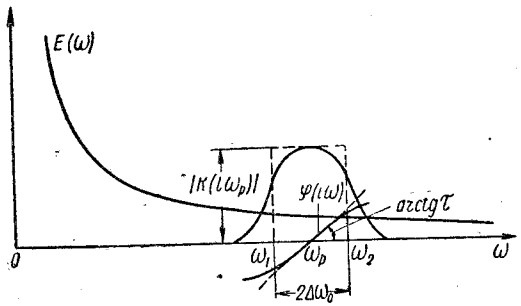


Рис. 18.7

Для определения напряжения, действующего на детектор приёмника, необходимо просуммировать компоненты помехи, попадающие в полосу прозрачности приёмника.

С целью упрощения рассуждений заменим реальную резонансную кривую приёмника (сплошная линия) идеализированной прямоугольной характеристикой с полосой пропускания $2\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, симметричной относительно резонансной[1]) частоты приёмника ω_p (пунктирная линия). Тогда в пределах полосы $2\Delta\omega_0$ коэффициент усиления приёмника (до детектора) можно считать постоянным, т. е.

$$|K(i\omega)| = |K(i\omega_p)| = \text{const}.$$

Фазовую характеристику считаем линейной (в полосе $2\Delta\omega_0$) и равной

$$\varphi(\omega) = (\omega - \omega_p)\tau,$$

где τ — наклон фазовой характеристики.

Тогда в соответствии с выражением (2.37) напряжение на выходе „полосового" фильтра может быть найдено следующим образом:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overrightarrow{E}(\omega)\,K(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}\overrightarrow{E}(\omega)K(i\omega)e^{i\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\overrightarrow{E}(\omega)K(i\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (18.18)$$

[1]) В случае супергетеродинного приёмника под ω_p следует подразумевать резонансную частоту УПЧ и учитывать те компоненты, которые после преобразования попадают в полосу пропускания УПЧ.

В относительно узкой полосе частот от ω_1 до ω_2 можно считать

$$\vec{E}(\omega)=\frac{1}{i\omega}\approx\frac{1}{i|\omega_p|},$$

а в пределах полосы от $-\omega_2$ до $-\omega_1$:

$$\vec{E}(\omega)\approx-\frac{1}{i|\omega_p|}.$$

Учитывая сделанное выше замечание о постоянстве $|K(i\omega)|$ и линейности $\varphi(\omega)$ в пределах указанных полос, получаем:

$$u_{вых}(t)=\left|K(i\omega_p)\right|\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-i|\omega_p|\tau}}{i|\omega_p|}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}e^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{i|\omega_p|\tau}}{i|\omega_p|}\int_{\omega_1}^{\omega_2}e^{i\omega(t-\tau)}d\omega\right]=$$

$$=\frac{|K(i\omega_p)|}{2\pi|\omega_p|(t-\tau)}\left\{e^{-i|\omega_p|\tau}\left[e^{-i\omega_1(t-\tau)}-e^{-i\omega_2(t-\tau)}\right]+\right.$$

$$\left.+e^{i|\omega_p|\tau}\left[e^{i\omega_2(t-\tau)}-e^{i\omega_1(t-\tau)}\right]\right\}=$$

$$=\frac{|K(i\omega_p)|}{\pi|\omega_p|(t-\tau)}\left\{\cos\left[\omega_1(t-\tau)+|\omega_p|\tau\right]-\cos\left[\omega_2(t-\tau)+|\omega_p|\tau\right]\right\}=$$

$$=\frac{2|K(i\omega_p)|}{\pi|\omega_p|(t-\tau)}\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}(t-\tau)\sin\left[\frac{(\omega_2+\omega_1)}{2}(t-\tau)+|\omega_p|\tau\right].$$

Учитывая, что

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}=\Delta\omega_0,$$

$$\frac{\omega_2+\omega_1}{2}=\omega_p$$

и заменяя $|\omega_p|$ на ω_p получаем следующее окончательное выражение:

$$u_{вых}(t)=\frac{2|K(i\omega_p)|}{\pi\omega_p(t-\tau)}\sin\Delta\omega_0(t-\tau)\sin\omega_p t. \qquad (18.18')$$

График функции $u_{вых}(t)$ изображён на рис. 18.8.

Напряжение на выходе полосового фильтра представляет собой высокочастотное напряжение с пульсирующей огибающей, которая достигает максимума в момент $t=\tau$.

Частота заполнения равна резонансной частоте системы ω_p, а частота пульсаций огибающей — половине полосы пропускания фильтра, т. е. $\Delta\omega_0$.

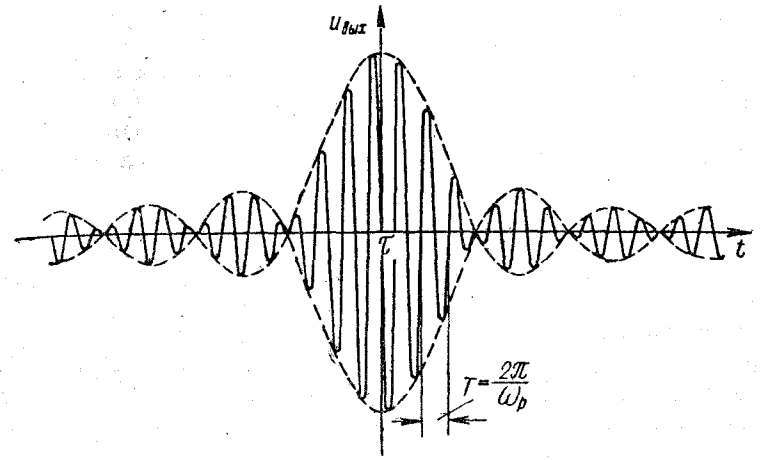


Рис. 18.8

Нетрудно определить максимальное значение огибающей. При малых по сравнению с $\frac{1}{\Delta\omega_0}$ значениях $(t-\tau)$ можно считать

$$\frac{\sin\Delta\omega_0(t-\tau)}{t-\tau}=\Delta\omega_0.$$

Поэтому при $(t-\tau)\to 0$ огибающая стремится к пределу, равному

$$\lim_{t\to\tau}\frac{2|K(i\omega_p)|}{\pi\omega_p(t-\tau)}\sin\Delta\omega_0(t-\tau)=\frac{2\Delta\omega_0}{\pi\omega_p}|K(i\omega_p)|. \qquad (18.19)$$

Напряжение $u_{дет}$ на выходе амплитудного детектора, совпадающее по форме с огибающей высокочастотного напряжения, изображено на рис. 18.9. Таким образом, при воздействии на вход

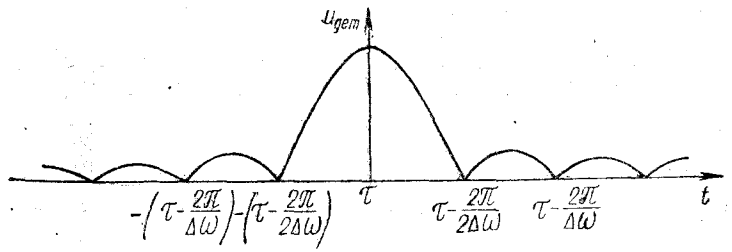


Рис. 18.9

приёмника помехи в виде скачка напряжения, на выходе приёмника получается „щелчок". Из выражения (18.19) видно, что величина щелчка пропорциональна полосе пропускания фильтра $2\Delta\omega_0$ и обратно пропорциональна резонансной частоте приёмника, т. е. рабочей частоте, на которую настроен приёмник.

Из первого положения следует, что для ослабления помехи полоса пропускания приёмника должна быть доведена до минимума, обусловленного шириной спектра принимаемого сигнала[1]).

Второе положение объясняет хорошо известное из практики явление, заключающееся в ослаблении действия импульсных помех при повышении рабочей частоты (укорочении волны) радиосвязи. Это свойство диапазона УКВ широко используется в частности для радиосвязи в авиации и некоторых других областях, когда приходится встречаться с высоким уровнем импульсных помех от системы зажигания в двигателях внутреннего сгорания.

Приведённые выше результаты, полученные из рассмотрения помехи в виде скачка напряжения, нетрудно распространить на импульсы прямоугольной формы. Подставляя в выражение (18.18) соответствующие спектральные плотности $E(\omega)$, нетрудно также исследовать помехи, представляющие собой импульсы различной формы. При этом может оказаться, что в зависимости от длительности импульса интенсивность помехи на выходе приёмника при одной и той же полосе пропускания может существенно изменяться[2]).

Отметим, наконец, что при наложении показанной на рис. 18.8 помехи на несущее колебание сигнала (если таковое имеется) действие помехи зависит от соотношения фаз указанных двух напряжений. При совпадении фаз или при сдвиге на 180° величина щелчка получается такой же, как и в отсутствие сигнала[3]). При промежуточных значениях фазового сдвига действие помехи несколько ослабляется.

§ 18.5. Собственные шумы приёмника

Существуют две основные причины возникновения шумовых помех в приёмниках: флуктуации электронного тока в лампах (дробовой эффект) и электрические флуктуации, связанные с тепловым движением электронов в электрических проводниках.

[1]) В практике приходится расширять полосу пропускания сверх этого минимума из-за нестабильности частоты передатчика, а также гетеродина приёмника.

[2]) Это зависит от того, попадает ли ω_p в область максимумов или минимумов спектральной плотности импульса (см. § 2.7).

[3]) При сдвиге на 180° напряжение помехи на выходе приёмника обратно по знаку напряжению, получающемуся при совпадении фаз.

Рассмотрим сперва механизм образования помех, обусловленных дробовым эффектом. Пусть в анодной цепи электронной лампы включён колебательный контур, состоящий из параллельно включённых индуктивности, ёмкости и сопротивления (рис. 18.10). Анодный ток можно рассматривать как совокупность отдельных импульсов, обусловленных переносом заряда одного электрона. Длительность отдельных импульсов, зависящая от геометрии лампы и от напряжённости электрических полей в междуэлектродных промежутках, составляет для различных ламп величину порядка $(1 \div 10) \cdot 10^{-10}$ *сек*. Так как моменты выхода электронов из катода могут рассматриваться как случайные и взаимно независимые, то образуемый ими результирующий ток флуктуирует около своего среднего значения I_{a0} (рис. 18.11). Это среднее значение или, что тоже самое, постоянная составляющая анодного тока легко определяется, если известно среднее за одну секунду число электронов K_1, попадающих на анод.

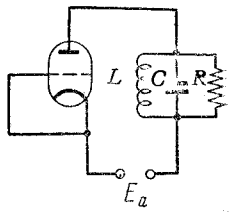


Рис. 18.10

Очевидно, что

$$I_{a0} = K_1 e, \tag{18.20}$$

где e — заряд одного электрона.

Флуктуационная составляющая анодного тока представляет собой случайную функцию времени („случайный процесс", см. § 2.11).

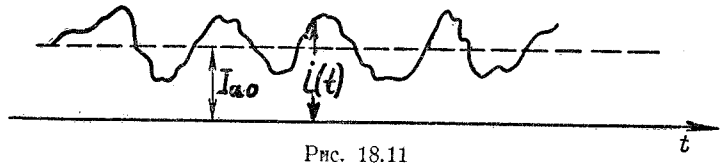


Рис. 18.11

Интенсивность флуктуации характеризуется средним квадратом отклонения мгновенного значения функции от её среднего значения. Определённая таким образом величина, называемая дисперсией, применительно к рассматриваемому случайному процессу может быть записана в следующей форме:

$$\sigma_i^2 = \overline{[i(t) - I_{a0}]^2}. \tag{18.21}$$

Черта над правой частью означает в данном случае операцию усреднения по времени. Величина σ_i^2 определяет среднюю мощность, выделяемую флуктуационной составляющей анодного тока в сопротивлении 1 *ом*. В соответствии с таким определением, величина σ_i представляет собой эффективное (среднеквадратичное) значение флуктуационного тока.

Структура флуктуации при заданном среднем числе K_1 зависит ещё от длительности импульсов, т. е. от времени пролёта электроном междуэлектродного пространства. В практике эти длительности малы по сравнению с периодом собственного колебания контура и, тем более, по сравнению с постоянной времени контура. Можно поэтому при рассмотрении действия отдельных электронов на контур исходить из допущения, что заряд электрона переносится мгновенно. Иными словами, длительность отдельных импульсов можно считать исчезающе малой.

Нетрудно при этих допущениях найти „энергетический спектр", анодного тока $W_i(\omega)$. В соответствии с ф-лой (2.87) имеем

$$W_i(\omega) = 2K_1[G_i(\omega)]^2, \tag{18.22}$$

где $G_i(\omega)$ — модуль спектральной плотности импульса тока, создаваемого пролётом одного электрона.

В виду малой длительности импульса спектральная плотность $G_i(\omega)$, в согласии с § 2.7, равна площади импульса. Так как последняя равна заряду электрона, то получаем

$$G_i(\omega) = \int_0^\tau i_1\,dt = e. \tag{18.23}$$

Подставляя это выражение в ф-лу (18.22), находим

$$W_i(\omega) = 2K_1 e^2,$$

а с учётом выражения (18.20)

$$W_i(\omega) = 2\,I_{a0}e. \tag{18.24}$$

Эта формула справедлива для случая работы лампы в режиме насыщения, т. е. когда пространственный заряд отсутствует и весь ток эмиссии попадает на анод.

Наличие в большинстве ламп, используемых в нормальных режимах, пространственного заряда значительно ослабляет дробовые флуктуации анодного тока. При проведении технических расчётов это обстоятельство учитывается ведением в ф-лу (18.24) так называемого „коэффициента депрессии" дробового эффекта Γ^2:

$$W_i(\omega) = \Gamma^2 \cdot 2\,I_{a0}e. \tag{18.25}$$

Величина Γ^2 в зависимости от геометрии триода и режима пространственного заряда может падать до 0,02. Таким образом, ослабление дробового эффекта пространственным зарядом может быть очень значительным.

В многосеточных лампах дробовой эффект выражен сильнее, чем в триодах. Это объясняется тем, что разделение тока эмиссии между отдельными электродами лампы ослабляет депрессию дробового эффекта из-за пространственного заряда. На основании ф-лы (18.24) [или ф-лы (18.25)] нетрудно найти энергетический спектр $W_u(\omega)$ напряжения, создаваемого на контуре флуктуационной составляющей анодного тока. Очевидно,

$$W_u(\omega) = W_i(\omega)[z(\omega)]^2, \tag{18.26}$$

где $z(\omega)$ — модуль сопротивления контура.

Используя выражение (4.88), получаем для квадрата модуля сопротивления контура следующее приближённое выражение:

$$[z(\omega)]^2 = \frac{R^2}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}. \tag{18.27}$$

Подставляя ф-лы (18.24) и (18.27) в выражение (18.26), получаем:

$$W_u(\omega) = \frac{2eI_{a0}R_0^2}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}. \tag{18.28}$$

График $W_u(\omega)$ представлен на рис. 18.12. Ординаты этой кривой представляют собой квадраты ординат зависимости $z(\omega)$, помноженные на постоянную величину $2eI_{a0}$.

Так как энергетический спектр $W_u(\omega)$ представляет собой средний квадрат флуктуационного напряжения в полосе частот, равной $1_{гц}$, то для определения среднего квадрата полного флуктуационного напряжения U_ϕ необходимо проинтегрировать выражение (18.28) в пределах от $f=0$ до $f=\infty$ [см. § 2.11]:

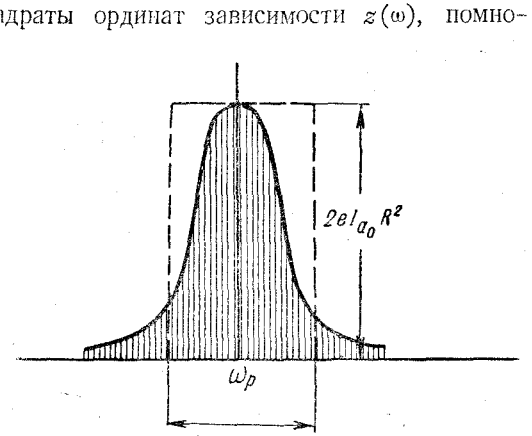


Рис. 18.12

$$\sigma_u^2 = \overline{U_\phi^2(t)} = \int_0^\infty W_u(\omega)df = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_u(\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{2eI_{a0}R^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}. \tag{18.29}$$

Переходя к новой переменной $\omega_1 = \omega - \omega_p$, будем иметь:

$$\sigma_u^2 = \overline{U_{\phi}^2(t)} = \frac{eI_{a0}R^2}{\pi}\int_{-\omega_p}^{\infty}\frac{d\omega_1}{1+\omega_1^2\tau^2} = \frac{eI_{a0}R^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau}\left|\operatorname{arctg}\omega_1\tau\right|_{-\omega_p}^{\infty} =$$

$$= \frac{eI_{a0}R^2}{\pi\tau}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega_p\tau)\right|.$$

Учитывая, что $\omega_p\tau = \frac{\omega_p}{\alpha} = 2Q \gg 1$ (см. § 4.4), полагаем

$$\operatorname{arctg}(-\omega_p\tau) = -\operatorname{arctg}(2Q) \approx -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_u^2 = \overline{U_{\phi}^2(t)} = \frac{eI_{a0}R^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\pi = \frac{eI_{a0}R^2}{2Q/\omega_p} = eI_{a0}R^2\cdot\frac{\pi f_p}{Q} =$$

$$= 2eI_{a0}R^2\cdot\frac{\pi f_p}{2Q} = 2eI_{a0}R^2\cdot\frac{\omega_p}{4Q}. \qquad (18.29')$$

Полученный результат позволяет ввести понятие полосы шумов одиночного контура.

Заменяя площадь кривой $W_u(\omega)$, представленной на рис. 18.12, равновеликим прямоугольником с высотой $2eI_{a0}R^2$, находим, что основание этого прямоугольника, определяющее полосу шумов, равно

$$2\Delta f_э = \frac{\pi f_p}{2Q}. \qquad (18.30)$$

Заметим, что при определении полосы по ослаблению $\frac{1}{\sqrt{2}}$, получается

$$2\Delta f_0 = \frac{f_p}{Q}.$$

Таким образом, определяемая ф-лой (18.30) полоса шумов в $\frac{\pi}{2}$ раз больше полосы пропускания контура.

Аналогично можно найти средний квадрат напряжения и полосу шумов на анодной нагрузке и на выходе усилителя при любой форме частотной характеристики.

Вырезание из равномерного спектра шума относительно узкой полосы частот, совпадающей с полосой прозрачности колебательной системы, придаёт шумовому напряжению на выходе характер высокочастотного колебания с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Для того, чтобы выявить структуру шумового напряжения по заданному спектральному распределению, можно воспользоватся методом функции корреляции. Суть этого метода изложена в приложении II. Здесь мы ограничимся иллюстрацией, основанной

на рассмотрении реакции контура на импульс тока, обусловленный переносом заряда одного электрона.

Попадание электрона на анод создаёт почти мгновенное изменение заряда конденсатора на величину e, а напряжения на величину $\Delta u = \frac{e}{C}$. Это изменение напряжения является начальной амплитудой свободного колебания, возбуждаемого в контуре отдельным электроном. Используя результаты параграфа 9.6, это колебание можно представить в форме:

$$\left.\begin{aligned} u_a &= \frac{e}{C}e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_{0к}t - \frac{\alpha}{\omega_{0к}}\sin\omega_{0к}t\right) && \text{при } t>0 \\ &= 0 && \text{при } t<0 \end{aligned}\right\}. \qquad (18.31)$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{2RC}$ и $\omega_{0к} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$ — коэффициент затухания и собственная частота контура.

Результирующее напряжение помехи образуется наложением очень большого числа колебаний вида (18.31), беспорядочно сдви-

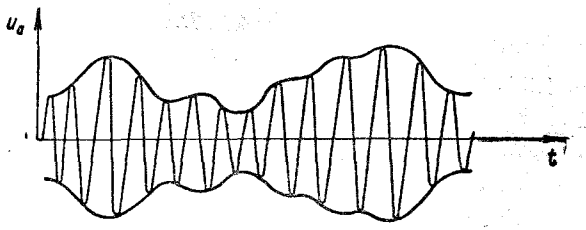


Рис. 18.13

нутых во времени относительно друг друга в соответствии с моментами выхода электронов из катода. Получающееся при этом напряжение имеет вид, показанный на рис. 18.13. Все параметры колебания: амплитуда, фаза и частота являются случайными величинами. Однако при достаточно высокой добротности контура (при узкой полосе пропускания колебательной системы) разброс частоты весьма мал и наивероятнейший период близок к периоду собственного колебания контура. Скорость изменения огибающей амплитуд тем меньше, чем уже полоса пропускания контура. В теории случайных процессов доказывается, что наивероятнейшая частота изменения огибающей близка к величине $\Delta\omega_0 = \alpha$, т. е. к половине полосы пропускания контура.

Это положение можно распространить на любую избирательную систему. Таким образом, к детектору приёмника усиленная помеха попадает в виде высокочастотного колебания, модулированного случайным образом как по амплитуде, так и по частоте (фазе), причём длительности отдельных выбросов огибающих помехи имеют величины того же порядка, что и полезные сигналы,

так как полоса пропускания колебательных систем обычно согласуется с частотой передаваемого сигнала.

Так, например, при длительности сигнальных импульсов τ_0, полоса пропускания берётся не меньше $2\Delta f_0 = \frac{2}{\tau_0}$. Длительность выброса огибающей помехи, близкая к $\frac{1}{\Delta f_0}$, близка и к τ_0.

В тех случаях, когда полосу пропускания цепи приходится расширять сверх величины, необходимой для передачи импульса (из-за нестабильности частоты передатчика и гетеродина приёмника), пики помех получаются более узкими, нежели сигнальные импульсы.

Все приведённые выше рассуждения можно распространить с небольшими изменениями и на шумовую помеху, обусловленную тепловым движением электронов в проводниках. Вызываемые этим движением микротоки создают на внешних зажимах электрической цепи флуктуационную электродвижущую силу. Эта эдс называется также „электродвижущей силой теплового шума". Энергетический спектр эдс теплового шума определяется формулой Найквиста:

$$W_u(\omega) = 4kTR, \tag{18.32}$$

где $k = 1{,}37 \cdot 10^{-23} \frac{ватт \cdot сек}{град}$ — постоянная Больцмана,

T — абсолютная температура проводника,

R — активная составляющая полного сопротивления цепи в омах.

В полосе частот Δf средний квадрат шумовой эдс, очевидно, равен

$$\sigma_u^2 = \overline{U_ш^2} = W_u(\omega)\,\Delta f = 4kTR\,\Delta f. \tag{18.33}$$

Это выражение справедливо в пределах полосы частот Δf, внутри которой сопротивление R остаётся неизменным. При определении шумового напряжения на зажимах двухполюсника, содержащего кроме омического сопротивления ещё ёмкости и индуктивности, под величиной R, как отмечалось выше, следует понимать активную составляющую полного сопротивления двухполюсника.

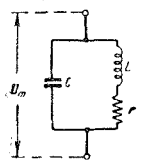


Рис. 18.14

Таким образом, в случае колебательного контура, представленного на рис. 18.14, величину R следует согласно ф-ле (4.81) определять выражением

$$R(\omega) = \frac{Z_{эр}}{1+a^2} = \frac{Z_{эр}}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}.$$

Энергетический спектр при этом будет

$$W_u(\omega) = 4kTR(\omega) = 4kTZ_{эр}\frac{1}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}$$

и для определения шумового напряжения в полосе частот от f_1 до f_2 необходимо пользоваться выражением

$$U^2_{ш.\,эф} = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} W_u(\omega)\,d\omega = \frac{4kTZ_{эр}}{2\pi}\int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2}\frac{d\omega}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}.$$

Если пределы интегрирования приравнять $f_1 = 0$ и $f_2 = \infty$, то получим полное шумовое напряжение, действующее на внешних зажимах параллельного контура, в виде

$$U^2_{ш.\,эф} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} W_u(\omega)\,d\omega = \frac{2kTZ_{э.р}}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{1+(\omega-\omega_p)^2\tau^2}. \tag{18.34}$$

Используя результаты вычисления интеграла, входящего в выражение (18.29), а также введённое выше понятие полосы шумов одиночного контура, получаем

$$U^2_{ш.эф} = \frac{2kTZ_{эр}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\tau} = 2kTZ_{эр}\cdot\frac{\omega_p}{2Q} = 4kTZ_{эр}\frac{\pi f_p}{2Q}. \tag{18.35}$$

Это выражение отличается от ф-лы (18.29′) только постоянным коэфициентом ($4kTZ_{эр}$ вместо $2eI_{a0}R^2$). Структура же эдс теплового шума, как и в случае дробового эффекта, определяется собственной частотой и добротностью контура.

В обоих случаях средняя мощность (средний квадрат напряжения или тока) шумовой помехи пропорциональна полосе пропускания цепи, а эффективное напряжение пропорционально корню квадратному из полосы. Это положение является фундаментальным для теории и практики радиоприёма.

Полезно напомнить, что в случае помехи в виде одиночного импульса (см. § 18.3) наибольшая (начальная) амплитуда помехи на выходе колебательной системы приёмника пропорциональна первой степени полосы пропускания.

Разница между указанными двумя случаями может быть пояснена следующим образом. При одиночном импульсе расширение полосы пропускания цепи увеличивает число суммируемых компонент спектра помехи, имеющих одинаковую фазу [см. ф-лу (2.47), а также графики $\psi(\omega)$ на рис. (2.20), которые в относительно узкой полосе частот практически не зависят от частоты]. Ясно, что начальная амплитуда помехи на выходе пропорциональна числу складываемых гармонических составляющих входного импульса, т. е. пропорциональна полосе пропускания цепи.

В случае же хаотической последовательности импульсов (дробовой эффект, тепловые шумы) эффективное напряжение в какой-либо узкой полосе частот является результатом сложения гармонических

составляющих от большого числа импульсов. Так как фазы этих составляющих, в виду хаотичности импульсов, являются случайными величинами, равновероятными в интервале $0 \div 2\pi$, то складывать нужно средние мощности (т. е. средние квадраты) гармонических составляющих. То же самое относится и к сложению напряжений, действующих в отдельных участках полосы пропускания цепи. Этим и объясняется прямая пропорциональность между полосой пропускания и мощностью шумов на выходе цепи.

При проведении технических расчётов часто пользуются понятием эквивалентного шумового сопротивления лампы, условно включаемого между сеткой и катодом лампы. При определении величины этого сопротивления учитываются все шумы, возникающие в лампе.

§ 18.6. Действие шумовой помехи на амплитудный детектор

Помимо эффективного значения и спектрального распределения, для полной характеристики шумового напряжения требуется ещё знание закона распределения уровней напряжения. Основные сведения о законах распределения для случайных величин и особенно для нормального закона (Гауссов закон) приведены в гл. 2. Тепловые шумы, а также шумы дробового эффекта, получающиеся в результате наложения большого числа взаимно независимых импульсов, отвечают сформулированным в § 2.12 условиям и подчиняются нормальному закону распределения. Рассматривая шумовое напряжение u в какой-либо фиксированный момент времени как случайную величину, можно плотность вероятностей для этой величины представить в виде выражения [см. ф-лу (2.83)]

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\overline{U_ш^2}}}\, e^{-\frac{u^2}{2\overline{U_ш^2}}}, \qquad (18.36)$$

где $\overline{U_ш^2}$ — средний квадрат (дисперсия) флуктуационного напряжения, определяемый ф-лой (18.29) или (18.33). График нормального закона распределения изображён на рис. 2.30.

Такое распределение характерно для шумового напряжения, действующего на выходе линейной цепи, в данном случае на выходе усилителя высокой и промежуточной частоты приёмника.

При нелинейном преобразовании случайной величины закон распределения претерпевает изменение. Поэтому напряжение на выходе детектора, хотя и остаётся случайной величиной, подчиняется уже другому закону распределения. В случае „линейного" амплитудного детектора напряжение на его выходе, как это вытекает из § 14.2, определяется огибающей высокочастотного напряжения на входе. Следовательно, и распределение выходного напряжения совпадает с распределением огибающей напряжения на входе детектора. В приложении III показано, что плотность

вероятностей для огибающей „узкополосного" шумового напряжения, изображённого на рис. 18.13, определяется следующим выражением

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_u^2}\, e^{-\frac{A^2}{2\sigma_u^2}}. \qquad (18.37)$$

Здесь $\sigma_u^2 = \overline{U_ш^2}$ — средний квадрат шумового напряжения на входе детектора.

График функции $p(A)$ представлен на рис. 18.15. Если коэффициент передачи детектора близок к единице, то выражение (18.37) и рис. 18.15 могут быть отнесены непосредственно к напряжению, действующему на выходе детектора.

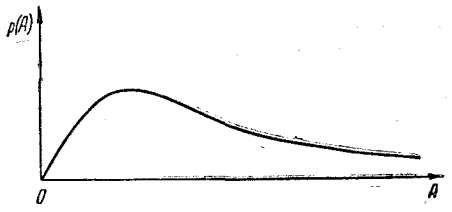


Рис. 18.15

С помощью выражения (18.37) можно определить ряд важных параметров шумовой помехи, действующей на выходе приёмника, например: среднеквадратичное (эффективное) значение, среднее значение (постоянная составляющая), пикфактор и др. Знание этих параметров особенно важно в тех случаях, когда реальная чувствительность приёмника определяется уровнем собственных шумов и уровень сигналов соизмерим с уровнем шумов. Подобные условия характерны, в частности, для работы радиолокационного приёмника при наблюдении за целью, находящейся на границе дальности действия радиолокатора.

Найдём прежде всего средний квадрат шумового напряжения на выходе детектора (в отсутствие сигнала). Приравнивая коэффициент передачи детектора единице, т. е., понимая под A выходное напряжение, воспользуемся выражением, аналогичным выражению (2.75) [см. § 2.11]

$$\overline{A^2} = \int_0^\infty A^2 \cdot p(A)\, dA.$$

Подставляя $p(A)$ из ф-лы (18.37) и произведя интегрирование, получим[1])

$$\overline{A^2} = \frac{1}{\sigma_u^2}\int_0^\infty A^3 e^{-\frac{A^2}{2\sigma_u^2}}\, dA = 2\sigma_u^2. \qquad (18.38)$$

[1]) см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, стр. 169, № 3.272.

$\int_0^\infty e^{-px^2} x^{2a+1}\, dx = \frac{a!}{2p^{a+1}}$ $(p > 0)$. В данном случае $p = \frac{1}{2\sigma_u^2}$, $a = 1$, таким образом, интеграл равен $\frac{1}{2\left(\frac{1}{2\sigma_u^2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sigma_u^4}} = 2\sigma_u^4$; следовательно, $\overline{A^2} = 2\sigma_u^2$.

Среднее значение (постоянная составляющая) выходного напряжения определится аналогично[1]):

$$\overline{A} = \int_0^\infty Ap(A)\,dA = \frac{1}{\sigma_u^2}\int_0^\infty A^2\, e^{-\frac{A^2}{2\sigma_u^2}}\,dA =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_u = 1{,}26\,\sigma_u. \qquad (18.39)$$

Теперь нетрудно найти и средний квадрат флуктуационной составляющей выходного напряжения.

Так как определяемая выражением (18.38) величина $\overline{A^2}$ является суммой квадратов постоянной составляющей $\overline{A}$ и искомого эффективного зачения σ_ϕ флуктуационной составляющей, то

$$\sigma_\phi^2 = \overline{A^2} - (\overline{A})^2 = 2\,\sigma_u^2 - \frac{\pi}{2}\,\sigma_u^2 = \sigma_u^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_u^2 \cdot 0{,}43$$

и

$$\sigma_\phi = U_{\phi.эф} = \sqrt{0{,}43}\,\sigma_u \approx 0{,}66\,\sigma_u. \qquad (18.40)$$

Итак, все найденные величины достаточно просто выражаются через эффективное напряжение помехи σ_u на входе детектора.

Приведём сводку полученных результатов.

Средний квадрат полного напряжения на выходе детектора

$$\overline{A^2} = 2\,\sigma_u^2.$$

Эффективное значение флуктуационной составляющей

$$\sigma_\phi = \sqrt{0{,}43}\,\sigma_u = 0{,}66\,\sigma_u.$$

Среднее значение (постоянная составляющая)

$$\overline{A} = 1{,}26\,\sigma_u.$$

При подаче продектированного напряжения через разделительный конденсатор на пластины вертикального отклонения осциллографической трубки и при линейной развёртке по горизонтали, на экране трубки получается изображение, представленное на рис. 18.16*б*.

[1]) см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, стр. 169, № 3.271.

$\int_0^\infty e^{px^2} x^{2a}\,dx = \frac{(2a-1)!}{2(2p)^a}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ ($p>0$). Подставляя $a=1$ и $p=\frac{1}{2\sigma_u^2}$, получим для рассматриваемого интеграла следующее выражение:

$$\frac{1}{4p}\sqrt{\frac{\pi}{p}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}} = \frac{1}{4}\sqrt{8\sigma_u^6\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_u^3 = 1{,}26\,\sigma_u^3.$$

На рис. 18.16*а* изображена кривая $p(A)$, построенная по ф-ле (18.37), при совмещении масштаба A с рис. 18.16*б*. Линия времени на рис. 18.16*б* смещена относительно нулевого уровня огибающей

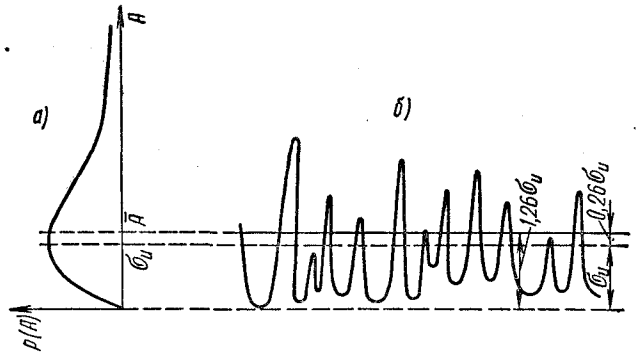


Рис. 18.16

на величину $\overline{A}$. При подаче полного напряжения с выхода детектора непосредственно на пластины трубки без разделительного конденсатора это смещение линии времени отсутствует.

Шумовая ,,дорожка" на экране трубки снизу ограничена чёткой линией (пунктирная линия на рис. 18.16*б*), а сверху имеет вид ,,гребёнки[1]).

Чёткое ограничение снизу объясняется тем, что огибающая напряжения на входе детектора не может снижаться ниже нуля, а выбросы вверх могут достигать теоретически очень больших величин.

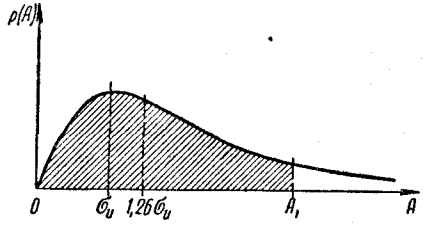


Рис. 18.17

Наблюдаемые глазом наибольшие выбросы в 3—4 раза больше эффективного значения помехи σ_ϕ. Это обстоятельство легко объяснить на основе закона распределения огибающей, определяемого выражением (18.37).

Интегрируя $p(A)$ в пределах от 0 до определённого уровня, например A_1, найдём вероятность пребывания огибающей в области $0 < A < A_1$ (рис. 18.17):

$$P(0 < A < A_1) = \int_0^{A_1} p(A)\,dA = \int_0^{A_1} \frac{A}{\sigma_u^2}\, e^{-\frac{A^2}{2\sigma_u^2}}\,dA. \qquad (18.41)$$

[1]) При перемене полярности напряжения на пластинах вертикального отклонения линия ограничения будет расположена в верхней, а гребёнка в нижней части осциллограммы.

Переходя к новой переменной $x = A^2$, получим

$$P(0 < A < A_1) = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_0^{A_1^2} \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2\sigma_u^2}} dx = 1 - e^{-\frac{A_1^2}{2\sigma_u^2}}. \quad (18.42)$$

Из этого выражения видно, что вероятность выхода огибающей за линию $A = A_1$ равна:

$$P(A_1 < A < \infty) = e^{-\frac{A_1^2}{2\sigma_u^2}}.$$

При $A_1 = 2\sigma_u$ получается $P(A_1 < A < \infty) = 0{,}135$, а при $A_1 = 3\sigma_u$ всего 0,01. Таким образом, вероятность того, что всплеск огибающей превысит уровень $3\sigma_u$, равна всего лишь одному проценту.

Так как $\sigma_u = \frac{1}{0{,}66}\sigma_\phi$ [см. ф-лу (18.40)], то можно считать, что наблюдаемая ширина шумовой дорожки не превышает приблизительно $3\,\sigma_u = \frac{3}{0{,}66}\sigma_\phi \approx 4{,}5\,\sigma_\phi$. Отсюда следует, что пикфактор помехи, понимаемый как отношение половины ширины шумовой дорожки к эффективному значению σ_ϕ, приближённо равен $2 \div 2{,}5$.

В тех случаях, когда имеет место ограничение помехи из-за нелинейности амплитудных характеристик усилителей (до и после детектора), шумовая дорожка может быть ограничена как сверху, так и снизу.

Наибольшая яркость свечения экрана получается на уровне, соответствующем максимальному значению $p(A)$. Это объясняется тем, что время пребывания электронного луча в полоске $A, A + dA$ пропорционально ординате кривой закона распределения $p(A)$.

Дифференцируя выражение (18.37) и приравнивая производную $\frac{dp(A)}{dA}$ нулю, находим

$$\frac{1}{\sigma_u^2}\left[1 - \frac{2A_{кр}^2}{2\sigma_u^2}\right] e^{-\frac{A_{кр}^2}{2\sigma_u^2}} = 0,$$

откуда

$$A_{кр} = \sigma_u. \quad (18.43)$$

Таким образом, линия максимального свечения на осциллограмме рис. 18.16 проходит на $0{,}26\,\sigma$ ниже линии развёртки.

При наложении на помеху сигнала в виде высокочастотного импульса происходит перераспределение яркости и в случае синхронизации частоты развёртки с частотой следования (повторения) импульсов получается изображение, представленное на рис. 18.18 (для случая, когда амплитуда высокочастотного импульса U_c равна удвоенному значению σ_u).

Случай $U_c = \sigma_u$ показан на рис. 18.19.

Опытный оператор обнаруживает сигнал на экране трубки даже при $\frac{C}{\Pi} \approx 0{,}5 \div 0{,}6$.

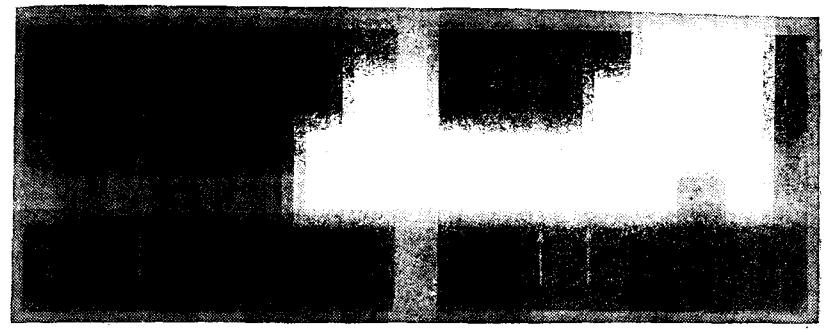


Рис 18.18

Рис. 18.19

Для чёткого и удобного различения сигнала требуется $\frac{C}{\Pi} \approx 2 \div 3$. Аналогичные результаты получаются и в случае детектора малых амплитуд („квадратичный" детектор).

§ 18.7. Энергетические соотношения при приёме импульсных сигналов на фоне шумов

Собственные шумы приёмника играют основную роль в диапазоне сверхвысоких частот, так как промышленные, атмосферные и другие помехи, обладающие относительно низкочастотным спектром, в указанном диапазоне не оказывают существенного влияния на работу приёмного устройства.

На сверхвысоких частотах широкое распространение получили импульсные методы модуляции.

Необходимо поэтому рассмотреть хотя бы в основных чертах вопрос о помехоустойчивости радиоприёма импульсных сигналов в том случае, когда основной помехой являются собственные шумы приёмника.

Допустим, что заданы амплитуда U и длительность τ_0 высокочастотного импульса напряжения с огибающей в виде прямоугольника. Если это напряжение прикладывается к активному нагрузочному сопротивлению на входе приёмника, то средняя мощность в импульсе будет

$$P_c = \frac{U^2}{2R}, \quad (18.44)$$

а полная энергия импульса

$$A_c = P_c \tau_0. \quad (18.45)$$

Для удовлетворительного воспроизведения импульса потребуется вполне определённая полоса пропускания усилителя промежуточной частоты. Допустим, что полоса выбрана из условия, чтобы за время τ_0 амплитуда импульса на выходе достигала своего максимального значения. В § 9.8 было установлено, что для этого требуется полоса, равная $2\Delta f_0 = \frac{2}{\tau_0}$.

При этой полосе мощность импульса на выходе в момент $t = \tau_0$ достигнет величины $P_c = \frac{U^2}{2R}$.

Коэффициент усиления принят равным единице, а сопротивления нагрузки на входе и выходе считаются одинаковыми.

Допустим далее, что на входе приёмника действует шумовая эдс (тепловые и дробовые шумы) с энергетическим спектром $W_u(\omega)$. Тогда средний квадрат этой эдс в полосе частот $2\Delta f_0$, т. е. эдс на выходе фильтра, равен

$$\overline{U_ш^2} = W_u(\omega) \cdot 2\Delta f_0.$$

При сопротивлении нагрузки R, которое мы считаем неизменным в полосе частот $2\Delta f_0$ и одинаковым как для сигнала, так и для шумов, средняя мощность шумовой помехи будет равна

$$\overline{P}_ш = \frac{\overline{U_ш^2}}{R} = \frac{W_u(\omega) \cdot 2\Delta f_0}{R}. \qquad (18.46)$$

Разделив ур-ние (18.44) на (18.46) найдём отношение средней мощности сигнала, соответствующей амплитуде U, к средней мощности помехи

$$\frac{P_c}{P_ш} = \frac{\frac{\overline{U^2}}{2R}}{W_u(\omega)\frac{2\Delta f_0}{R}}.$$

Подставляя сюда $2\Delta f_0 = \frac{2}{\tau_0}$ и учитывая ф-лу (18.45), получаем

$$\frac{P_c}{P_ш} = \frac{\frac{\overline{U^2}}{2R} \cdot \tau_0}{\frac{W_u(\omega)}{R}} = \frac{P_c \tau_0}{2W_u(\omega)} = \frac{A_c}{2W_u(\omega)}. \qquad (18.47)$$

Из полученного выражения следует, что при заданной удельной мощности помех на входе приёмника $W(\omega)$ (т. е. мощности на 1 *гц*) и при согласовании полосы пропускания с длительностью импульса, отношение $P/P_ш$ не зависит от τ_0 и определяется только энергией импульса $A_c = P_c \cdot \tau_0$.

Таким образом, уменьшение длительности импульса с целью получения большой мгновенной мощности для перекрытия шумовых помех не даёт никакого выигрыша.

Широкое распространение импульсных методов передачи и приёма сигналов следует поэтому объяснять не выигрышем в помехоустойчивости, а дополнительными возможностями, заложенными в использовании принципа временной селекции (см. § 17.10).

Приложение I

Условное представление нерегулярного процесса в виде тригонометрического ряда

Иногда удобно нерегулярный сигнал, заданный в промежутке T, представлять в виде ряда Фурье. Это может быть достигнуто, если функцию $e(t)$ рассматривать не изолированно в промежутке T, а продолжить её периодически вне указанного интервала, что равносильно замене реального сигнала $e(t)$ новой периодической функцией $e_1(t)$, совпадающей с $e(t)$ в интервале T. Для $e_1(t)$ в соответствии с выражением (2.2) можно написать:

$$e_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t - \beta_n\right) \tag{I.1}$$

или

$$e_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t\right), \tag{I.2}$$

где

$$a_n = E_n \cos\beta_n, \quad b_n = E_n \sin\beta_n. \tag{I.3}$$

Если интервал T выбран настолько большим, что функция $e_1(t)$ успевает проявить все основные свойства функции $e(t)$, то выражением (I.1) или (I.2) можно пользоваться для энергетических и некоторых иных расчётов, не считаясь с тем, что линейчатый спектр возник в результате подмены нерегулярной функции $e(t)$ фиктивной периодической функцией $e_1(t)$. Ясно, что при очень больших значениях T линейчатый спектр функции $e_1(t)$ мало отличается от сплошного. Связь между E_n и энергетическим спектром $W(\Omega)$ (см. § 2.11) легко устанавливается с помощью вывода, подобного выводу ф-лы (2.87). Относя среднюю мощность $\frac{E_n^2}{2}$ составляющей с частотой Ω_n к полосе частот $\Delta f = \frac{1}{T}$, получим

$$\frac{E_n^2}{2} = W(\Omega)\,\Delta f = \frac{W(\Omega)}{T},$$

откуда [1]

$$E_n = \sqrt{\frac{2W(\Omega)}{T}}. \tag{I.4}$$

---

[1]) Этот результат можно получить непосредственно из выражения (2.72), поскольку при периодическом повторении функции с периодом T модуль $F_n = \frac{2}{T}|F(i\Omega_n)|$ [см. ф-лу (2.29)]. Таким образом,

$$W(\Omega) = \frac{2|F(\Omega)|^2}{T} = \frac{2}{T}\left(\frac{TF_n}{2}\right)^2 = \frac{F_n^2 T}{2},$$

откуда

$$F_n = \sqrt{\frac{2W(\Omega)}{T}}.$$

Формулы (I.1) и (I.2) особенно удобны для представления нерегулярных сигналов, подчиняющихся нормальному закону распределения.

В этом случае из независимости слагаемых ряда (I.1) вытекает случайность фаз β_n. Если применить выражение (I.2) к большому числу отрезков T, то a_n и b_n, изменяясь случайным образом от одного отрезка к другому, образуют последовательности случайных величин, распределённых нормально около нулевого значения.

Дисперсии случайных величин a_n или b_n, т. е. $\overline{a_n^2}$ или $\overline{b_n^2}$, легко определяются с помощью следующих рассуждений.

Из ф-л (I.3) и (I.4) следует

$$a_n^2 + b_n^2 = E_n^2 = \frac{2W(\Omega)}{T}. \tag{I.5}$$

Так как правая часть ф-лы (I.5) есть постоянная величина [1]), то усреднение левой части по интервалам даёт

$$\overline{a_n^2} + \overline{b_n^2} = \frac{2W(\Omega)}{T}. \tag{I.6}$$

Кроме того, должно выполняться равенство $\overline{a_n^2} = \overline{b_n^2}$, поскольку случайные величины a_n и b_n взаимно независимы, имеют одинаковое распределение и определяются случайными фазами β_n, равновероятными в интервале от 0 до 2π. Отсюда вытекает [2]), что

$$\overline{a_n^2} = \overline{b_n^2} = \frac{W(\Omega)}{T}. \tag{I.7}$$

Приложение II

Функция корреляции для нерегулярных процессов

Как отмечалось в § 2.11, статистические свойства нерегулярного сигнала-представляющего собой стационарный случайный процесс, не зависят от выбора t.

Допустим, что $e(t)$ представляет собой сигнал, действующий в какой-либо реальной системе, обладающей вполне определённой полосой пропускания. При рассмотрении характера изменения $e(t)$ во времени можно заметить, что между мгновенными значениями сигнала в моменты t и $t+\tau$ существует некоторая связь, тем более сильная (явная), чем меньше длина интервала τ, отделяющего $e(t)$ от $e(t+\tau)$. Задание $e(t)$ с какой-то степенью вероятности предопределяет и $e(t+\tau)$, причём эта взаимозависимость определяется только интервалом τ, а не выбором t.

Величина интервала τ, в пределах которого заметна взаимосвязь между $e(t)$ и $e(t+\tau)$, зависит от спектрального состава отдельных функций (импульсов), образующих нерегулярный процесс $e(t)$ или, что то же, от длительности указанных импульсов. Ясно, что длительность этих импульсов тесно связана с полосой пропускания цепи. Чем больше эта длительность, тем плавнее ход функции $e(t)$, тем с бо́льшей вероятностью и на бо́льшем интервале τ

---

[1]) Полученная в результате усреднения по всем интервалам T.

[2]) Несколько иным способом аналогичное выражение доказывается ниже в приложении III.

можно предсказать характер этой функции, тем сильнее связь между $e(t)$ и $e(t+\tau)$. В теории вероятностей „сила связи" между двумя случайными величинами характеризуется так называемым коэффициентом корреляции.

Общее выражение для коэффициента корреляции имеет вид

$$R = \frac{\overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{II.1}$$

Здесь σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсии для x и y, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние их значения (математические ожидания).

Если $x-\bar{x}$ и $y-\bar{y}$ взаимно независимые случайные величины, то

$$\overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})} = \overline{(x-\bar{x})} \cdot \overline{(y-\bar{y})} = 0.$$

Следовательно, для полностью независимых случайных величин $R=0$. В зависимости от силы связи R изменяется в пределах ± 1. Значения 1 достигаются только в случае, когда $x-\bar{x}$ и $y-\bar{y}$ связаны линейной зависимостью.

Изучение корреляционных свойств нерегулярных процессов основано на работах А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина и ряда других советских математиков. Можно представить коэффициент корреляции между $e(t)$ и $e(t+\tau)$ в виде [1]

$$R(\tau) = \frac{\overline{[e(t)-\bar{e}(t)]\cdot[e(t+\tau)-\bar{e}(t+\tau)]}}{\sigma^2}. \tag{II.2}$$

Выражение (II.2) вытекает из ф-лы (II.1), если учесть, что при стационарных процессах математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а усреднение по системам эквивалентно усреднению по времени.

Из первого положения следует, что

$$\overline{e(t)} = \overline{e(t+\tau)},$$

$$\overline{e^2(t)} = \overline{e^2(t+\tau)},$$

а из второго положения, что $\overline{e(t)}$ или $\overline{e(t+\tau)}$ представляет собой постоянную составляющую (среднее значение) функции $e(t)$.

Обозначим:

$$u(t) = e(t) - \overline{e(t)},$$

$$u(t+\tau) = e(t+\tau) - \overline{e(t)}.$$

Из этого определения следует, что $u(t)$ представляет собой мгновенное значение отклонения сигнала $e(t)$ от среднего значения $\overline{e(t)}$.

В новых обозначениях выражение (II.2) принимает вид

$$R(\tau) = \frac{\overline{u(t)\,u(t+\tau)}}{\sigma^2}. \tag{II.3}$$

[1] Величина $R(\tau)$ называется также нормализованной функцией корреляции в отличие от $\psi(\tau)$, применяемой дальше.

На основании упомянутого в § 2.11 свойства стационарных случайных процессов (стр. 71) операцию усреднения произведения $u(t)\,u(t+\tau)$ можно выполнять с помощью выражения

$$\overline{u(t)\,u(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\,u(t+\tau)\,dt. \tag{II.4}$$

Функция

$$\psi(\tau) = \sigma^2 R(\tau) = \overline{u(t)\,u(t+\tau)} \tag{II.5}$$

называется функцией корреляции для процесса $u(t)$ [или для процесса $e(t)$ после исключения постоянной составляющей $\overline{e(t)}$].

Из определений (II.3) и (II.5), а также из независимости математического ожидания от времени следует, что для стационарных процессов $R(\tau)$ и $\psi(\tau)$ являются функциями чётными относительно τ. Ясно также, что

$$\psi(0) = \overline{u^2(t)} = \sigma^2.$$

Характер функции $\psi(\tau)$ обусловлен спектральным составом процесса $e(t)$. В наглядной форме это удобно показать на примере простейшего периодического сигнала — гармонического колебания. Если

$$e(t) = E\cos(\Omega t - \beta), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

то

$$\psi(\tau) = \overline{e(t)\,e(t+\tau)} = \frac{E^2}{T}\int_0^T \cos(\Omega t - \beta)\cos[\Omega(t+\tau)-\beta]\,dt =$$

$$= \frac{E^2}{2}\cos\Omega\tau. \tag{II.6}$$

Итак, для гармонического колебания функция корреляции [1] является также гармонической, обладающей той же частотой, что и $e(t)$. При $\tau=0$ значение функции $\psi(0) = \frac{E^2}{2}$ есть не что иное, как средний квадрат гармонического колебания.

Отметим, что при $\tau = \frac{T}{4}$ функция $\psi\left(\frac{T}{4}\right) = 0$, что, однако, нельзя истолковывать как отсутствие связи между двумя значениями косинусоиды, разделёнными интервалом $\frac{T}{4}$. Из этого примера видно, что для суждения о структуре функции $e(t)$ необходимо исследовать характер функции $\psi(\tau)$ при изменении интервала τ от нуля до бесконечности. Для нерегулярных сигналов, в составе которых нет гармонических колебаний с конечной амплитудой, функция корреляции, как правило, стремится к нулю при $\tau\to\infty$.

В общем виде связь между функцией корреляции и энергетическим спектром случайного процесса может быть установлена на основе теоремы Хинчина [2].

[1] По отношению к гармоническому колебанию, представляющему регулярный процесс, понятие функции корреляции можно применять лишь условно.

[2] См. С. О. Райс. Теория флуктуационных шумов. Сборник переводов под редакцией Н. А. Железнова. ИИЛ, 1953.

Применительно к интересующей нас задаче указанная теорема приводит к выражению

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} W(\Omega) \cos \Omega\tau \, d\Omega. \tag{II.7}$$

Не приводя здесь доказательства соотношения (II.7), ограничимся весьма простым и наглядным, хотя и не строгим, выводом, основанным на представлении нерегулярного сигнала в виде ряда Фурье.

Полагая, что $e(t)$ не содержит постоянной составляющей и дискретных колебаний, в соответствии с выражением (I.2) можем написать:

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right), \tag{II.8}$$

$$e(t+\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n \frac{2\pi}{T} (t+\tau) + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} (t+\tau) \right]. \tag{II.9}$$

Ряд (II.9) справедлив для всех значений t, удовлетворяющих условию $0 < t+\tau < T$, поскольку ряд (II.8) представляет функцию $e(t)$ в интервале $0 < t < T$. Так как выбор T произволен, приведённое выше условие всегда можно выполнить при любых конечных значениях τ.

Ясно также, что коэффициенты a_n и b_n определяются длиной интервала T и не зависят от сдвига на величину τ. Для определения функции корреляции перемножим ряды (II.8) и (II.9) и применим ф-лу (II.4). Интегрируя почленно в пределах от 0 до T и учитывая ф-лы (I.5) и (II.6), получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T e(t)\, e(t+\tau)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{2} \cos \left(\frac{2\pi}{T} n\tau \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W(\Omega)}{T} \cos \left(n \frac{2\pi}{T} \tau \right). \tag{II.10}$$

При $T \to \infty$ в соответствии с ф-лой (II.4) придём к нужному результату:

$$\psi(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e(t)\, e(t+\tau)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W(\Omega) \cos \Omega\tau \, d\Omega. \tag{II.11}$$

Если полоса частот устройства, на выходе которого наблюдается величина $e(t)$, ограничена пределами Ω_1 и Ω_2, ф-ла (II.11) переходит в следующую:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} W(\Omega) \cos \Omega\tau \, d\Omega. \tag{II.12}$$

Учитывая, что подинтегральная функция в ф-ле (II. 11) является чётной относительно Ω, можем написать

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\Omega)\, e^{i\Omega\tau} \, d\Omega.$$

Как видим, полученное выражение [1] представляет собой интеграл Фурье (обратное преобразование), устанавливающий связь между энергетическим спектром $W(\Omega)$ и функцией корреляции $\psi(\tau)$ для случайного процесса $e(t)$.

Очевидно должно существовать и прямое преобразование Фурье для $\psi(\tau)$; по аналогии с выражением (2.26) можем написать[2]

$$W(\Omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)\, e^{-i\Omega\tau} \, d\tau = 4 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \Omega\tau \, d\tau.$$

Итак, функция корреляции $\psi(\tau)$ и энергетический спектр нерегулярного сигнала (стационарный процесс) $W(\Omega)$ связаны соотношениями:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W(\Omega) \cos \Omega\tau \, d\Omega, \tag{II.13}$$

$$W(\Omega) = 4 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \Omega\tau \, d\tau. \tag{II.14}$$

Для практических целей особо важное значение имеет соотношение (II.14), так как $\psi(\tau)$ часто определяется проще, чем $W(\Omega)$. В последнее время всё бо́льшее распространение находит способ определения энергетического спектра, основанный на отыскании функции корреляции.

Помимо своего значения как средства для определения $W(\Omega)$, функция корреляции сама по себе является существенной характеристикой исследуемого сигнала. Быстрота, с которой функция корреляции $\Omega(\tau)$ убывает с увеличением τ, даёт некоторое представление о структуре $e(t)$.

Приложение III

Вывод формулы для закона распределения огибающей шумового напряжения

Шумовое напряжение, действующее на выходе узкополосной колебательной системы, можно представить в форме

$$u(t) = U(t) \cos [\omega_p t + \Theta(t)], \tag{III.1}$$

[1] Коэффициент $\frac{1}{2}$ [сравнить с ф-лой (2.27)] учитывает усреднение квадрата функции $e(t)$.

[2] Напомним, что $\psi(\tau)$ — чётная функция относительно τ.

где ω_p — резонансная частота системы, а $U(t)$ и $\Theta(t)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза напряжения. Само собой разумеется, что $U(t)$ и $\Theta(t)$ — случайные величины (см. § 18.5).

Выражение (III.1) можно представить также в следующей форме:

$$u(t) = U(t)\cos\Theta \cdot \cos\omega_p t - U(t)\sin\Theta\sin\omega_p t = \\ = U_c\cos\omega_p t - U_s\sin\omega_p t. \qquad \text{(III.2)}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} U_c &= U(t)\cos\Theta \\ U_s &= U(t)\sin\Theta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.3)}$$

представляют собой амплитуды „при косинусе" и „при синусе", причём

$$U(t) = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}. \qquad \text{(III.4)}$$

Для того, чтобы найти закон распределения $U(t)$, необходимо предварительно найти распределение для случайных величин U_c и U_s.

С этой целью поступим следующим образом. Используя выражение (I.1) (см. приложение I), представим шумовое напряжение в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\cos(\omega_n t - \beta_n), \qquad \text{(III.5)}$$

где $\omega_n = n\dfrac{2\pi}{T}$ — частота n-й гармоники,

T — произвольный, достаточно большой отрезок времени, выбранный в качестве периода разложения функции $u(t)$,

U_n — амплитуда n-й гармоники и

β_n — случайная фаза n-й гармоники.

Введём в выражение (III.5) резонансную частоту ω_p:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\cos[(\omega_n - \omega_p)t - \beta_n + \omega_p t]$$

и преобразуем полученное выражение по формуле

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

Тогда получим

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\Big\{\cos[(\omega_n - \omega_p)t - \beta_n]\cos\omega_p t - \\ - \sin[(\omega_n - \omega_p)t - \beta_n]\sin\omega_p t\Big\}. \qquad \text{(III.6)}$$

Сравнивая это выражение с ур-нием (III.2), приходим к выводу, что для U_c и U_s действительны следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} U_c &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n\cos[(\omega_n - \omega_p)t - \beta_n] \\ U_s &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n\sin[(\omega_n - \omega_p)t - \beta_n] \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.7)}$$

Так как U_c и U_s представлены в виде сумм бесконечно большого числа гармонических слагаемых со случайными и взаимно независимыми фазами, то в соответствии с § 2.12 U_c и U_s являются случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения. Их дисперсии (средние квадраты) одинаковы и равны

$$\overline{U_c^2} = \overline{U_s^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n^2}{2}. \qquad \text{(III.8)}$$

Учитывая ф-лу (I.4), можем написать

$$\overline{U_c^2} = \overline{U_s^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2W(\Omega)}{T} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}W(\Omega)\,\Delta\Omega_n,$$

где $W(\Omega)$ — энергетический спектр шумового напряжения $u(t)$, а $\Delta\Omega_n$ — интервал частот между n-й и $(n+1)$-й гармониками.

Устремляя $T \to 0$, в пределе получим

$$\overline{U_c^2} = \overline{U_s^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} W(\Omega)\,d\Omega.$$

Но правая часть этого выражения есть не что иное, как средний квадрат рассматриваемого шумового напряжения [см. выражение (2.68)].

Следовательно, окончательно получаем [1])

$$\overline{U_c^2} = \overline{U_s^2} = \sigma^2 = \phi_0. \qquad \text{(III.9)}$$

Итак, плотности вероятностей для случайных величин U_c и U_s могут быть представлены в виде следующих выражений:

$$\left.\begin{aligned} p(U_c) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi_0}}\,e^{-\frac{U_c^2}{2\phi_0}} \\ p(U_s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi_0}}\,e^{-\frac{U_s^2}{2\phi_0}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.10)}$$

Для перехода от U_c и U_s к огибающей $U(t)$ представим шумовое напряжение, определяемое выражением (III.1), на векторной диаграмме, линия времени которой вращается с угловой частотой ω_p (рис. III.1). Тогда составляющая U_c равна проекции вектора $U(t)$ на ось ox, а U_s — проекции на ось oy.

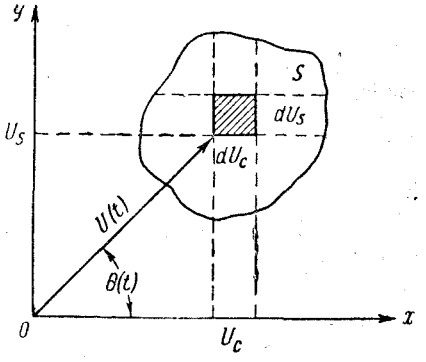


Рис. III.1

Так как U_c и U_s — взаимно независимые случайные величины, то вероятность того, что точка A [конец вектора $U(t)$] лежит в элементарном прямоугольнике $dU_c \cdot dU_s$, равна простому произведению вероятностей пребывания U_c

[1]) Приведённый здесь вывод может быть использован также для доказательства выражения (I.7).

в интервале dU_c и U_s в интервале dU_s. Последние же равны соответственно $p(U_c)\,dU_c$ и $p(U_s)\,dU_s$. Перемножив эти вероятности и используя выражения (III.10), найдём вероятность пребывания точки A в прямоугольнике $dU_c \cdot dU_s$:

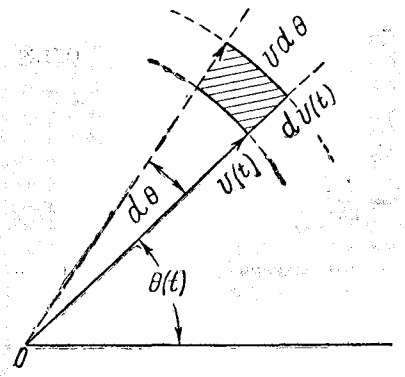


Рис. III.2

$$p(U_c)\,p(U_s)\,dU_c\,dU_s = \frac{1}{2\pi\phi_0}\,e^{-\frac{U_c^2+U_s^2}{2\phi_0}}\,dU_c\,dU_s = \frac{1}{2\pi\phi_0}\,e^{-\frac{U^2(t)}{2\phi_0}}\,dU_c\,dU_s. \quad \text{(III.11)}$$

Вероятность же пребывания точки A в области S (рис. III.1) определяется двукратным интегралом

$$P(s) = \iint_S p(U_c)\,p(U_s)\,dU_c\,dU_s. \quad \text{(III.12)}$$

Теперь удобно от прямоугольных координат перейти к полярным (рис. III. 2). Тогда площадь заштрихованного элемента вместо $dU_c \cdot dU_s$ будет равна

$$ds = U d\Theta \cdot dU,$$

а выражения (III.12) можно записать в форме

$$P(s) = \frac{1}{2\pi\phi_0}\iint_S U\,e^{-\frac{U^2(t)}{2\phi_0}}\,dU\,d\Theta. \quad \text{(III.13)}$$

Заметим, что подинтегральное выражение может быть представлено в виде произведения членов, содержащих только $U(t)$ и только θ

$$\frac{1}{2\pi}\,d\Theta\,\frac{U(t)}{\phi_0}\,e^{-\frac{U^2(t)}{2\phi_0}}\cdot dU(t) = p(\Theta)\,d\Theta \cdot p(U)\,dU. \quad \text{(III.14)}$$

Из этого следует [1], что $U(t)$ и $\Theta(t)$ — независимые случайные величины, имеющие следующие плотности вероятностей:

$$p(\Theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{(III.15)}$$

$$p(U) = \frac{U}{\phi_0}\,e^{-\frac{U^2}{2\phi_0}}. \quad \text{(III.16)}$$

Напомним, что здесь $\phi_0 = \sigma^2$. Из первого выражения видно, что фаза θ равновероятна в интервале $0 \div 2\pi$. Второе же выражение определяет искомое распределение огибающей, совпадающее с выражением 18.37.

[1] На основании теоремы об умножении вероятностей независимых событий.

К приближённому решению нелинейного уравнения автогенератора

Перепишем ур-ние (12.43) следующим образом

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} + 2(\alpha_э + b\,u_a^2)\,\frac{du_a}{dt} + \frac{1}{LC}\,u_a = 0, \quad \text{(IV.1)}$$

где обозначено

$$b = \frac{S(|K_{oc}| - D)}{C\,U_{aS}^2}, \quad \text{(IV.2)}$$

$$\alpha_э = \frac{1}{2C}\left[\frac{1}{R} - S(|K_{oc}| - D)\right]. \quad \text{(IV.3)}$$

Выражение (12.46) запишем в форме

$$u_a = U_a \cos[\omega_p t + \varphi(t)] = U_a \cos\psi. \quad \text{(IV.4)}$$

Здесь U_a и φ — медленные функции времени.
Находим:

$$\frac{du_a}{dt} = \dot{u}_a = \dot{U}_a \cos\psi - U_a\dot{\psi}\sin\psi;$$

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} = \ddot{u}_a = \ddot{U}_a\cos\psi - \dot{U}_a\dot{\psi}\sin\psi -$$

$$- \dot{U}_a(\dot{\psi}\sin\psi) - U_a[\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi];$$

$$u_a^2 = U_a^2\cos^2\psi = U_a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\psi\right);$$

$$u_a^2\,\frac{du_a}{dt} = U_a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\psi\right)[\dot{U}_a\cos\psi - U_a\dot{\psi}\sin\psi] =$$

$$= \frac{1}{2}\,U_a^2\cdot\dot{U}_a\cos\psi - \frac{1}{2}\,U_a^3\dot{\psi}\sin\psi +$$

$$+ \frac{1}{2}\,U_a^2\cdot\dot{U}_a\cos\psi\cos 2\psi - \frac{1}{2}\,U_a^3\dot{\psi}\sin\psi\cos 2\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\,U_a^2\dot{U}_a\cos\psi - \frac{1}{2}\,U_a^3\dot{\psi}\sin\psi + \frac{1}{4}\,U_a^2\dot{U}_a\cos\psi +$$

$$+ \frac{1}{4}\,U_a^2\dot{U}_a\cos 3\psi + \frac{1}{4}\,U_a^3\dot{\psi}\sin\psi -$$

$$- \frac{1}{4}\,U_a^3\dot{\psi}\sin 3\psi =$$

$$= \frac{3}{4}\,U_a^2\cdot\dot{U}_a\cos\psi - \frac{1}{4}\,U_a^3\dot{\psi}\sin\psi +$$

$$+ \frac{1}{4}\,U_a^2\dot{U}_a\cos 3\psi - \frac{1}{4}\,U_a^3\dot{\psi}\sin 3\psi.$$

В выражении для $\ddot{u}_a$ можно отбросить слагаемые, содержащие $\ddot{\psi}$ и $\ddot{U}_a$, т. е. вторые производные медленно меняющихся функций времени (заметим, что $\ddot{\psi} = \ddot{\varphi}$). В выражении же для $u_a^2 \frac{du_a}{dt}$ можно отбросить слагаемые, содержащие $\sin 3\psi$ и $\cos 3\psi$, т. е. третью гармонику основной частоты, которая отфильтровывается контуром.

С учётом этих замечаний подстановка полученных выражений в ур-ние (IV.1) приводит к следующему уравнению:

$$[2\dot{U}_a\dot{\psi} + 2\alpha_э U_a\dot{\psi} + \frac{b}{4} U_a^3\dot{\psi}] \sin\psi +$$

$$+ [U_a\dot{\psi}^2 - 2\alpha_э\dot{U}_a - \frac{3b}{4} U_a^2\dot{U}_a + \frac{1}{LC} U_a] \cos\psi = 0. \qquad \text{(IV.5)}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin\psi$ и $\cos\psi$, получим два уравнения, связывающие изменения амплитуды $U_a(t)$ и фазы $\psi(t)$.

Для исследования закона изменения амплитуды достаточно воспользоваться первым из этих уравнений

$$2\dot{U}_a + 2\alpha_э U_a + \frac{b}{4} U_a^3 = 0. \qquad \text{(IV.6)}$$

Умножив правую часть этого уравнения на U_a и учитывая, что

$$2U_a \cdot \dot{U}_a = \frac{d(U_a^2)}{dt},$$

перепишем ур-ние (IV.6) в форме

$$\frac{d(U_a^2)}{dt} + 2\alpha_э U_a^2 + \frac{b}{4} U_a^4 = 0. \qquad \text{(IV.6'')}$$

Обозначим

$$U_a^2 = x, \qquad \text{(IV.7)}$$

тогда

$$\frac{dx}{dt} + 2\alpha_э x + \frac{b}{4} x^2 = 0 \qquad \text{(IV.8)}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -2\alpha_э x\left(1 + \frac{b}{8\alpha_э} x\right).$$

Теперь можно разделить переменные x и t:

$$\frac{dx}{x\left(1 + \frac{b}{8\alpha_э} x\right)} = -2\alpha_э\, dt. \qquad \text{(IV.9)}$$

Но

$$\frac{1}{x\left(1 + \frac{b}{8\alpha_э} x\right)} = \frac{1}{x} - \frac{b/8\alpha_э}{1 + \frac{b}{8\alpha_э} x}.$$

Следовательно, ур-ние (IV.9) можно представить в виде

$$\frac{dx}{x} - \frac{b}{8\alpha_э} \frac{dx}{1 + \frac{b}{8\alpha_э} x} = -2\alpha_э\, dt$$

или

$$\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x + \frac{8\alpha_э}{b}} = -2\alpha_э\, dt. \qquad \text{(IV.10)}$$

Почленное интегрирование этого выражения даёт:

$$\ln x - \ln\left(x + \frac{8\alpha_э}{b}\right) = -2\alpha_э(t + c_1)$$

или

$$\ln \frac{x + \frac{8\alpha_э}{b}}{x} = 2\alpha_э(t + c_1),$$

откуда

$$\frac{x + \frac{8\alpha_э}{b}}{x} = c\, e^{2\alpha_э t}.$$

Решая это уравнение относительно x, находим

$$x = -\frac{8\alpha_э}{b} \frac{1}{\left(1 - c\, e^{2\alpha_э t}\right)}. \qquad \text{(IV.11)}$$

На основании (IV.7), находим искомое выражение для амплитуды U_a:

$$U_a(t) = \frac{\sqrt{-\frac{8\alpha_э}{b}}}{\sqrt{1 - c\, e^{2\alpha_э t}}}. \qquad \text{(IV.12)}$$

Теперь заметим, что определяемое выражением (IV.3) эквивалентное затухание контура (с учётом обратной связи) является отрицательной величиной (см. § 12.3). Переходя к абсолютному значению $|\alpha_э|$, можем написать:

$$U_a(t) = \frac{\sqrt{\frac{8|\alpha_э|}{b}}}{\sqrt{1 - c\, e^{-2|\alpha_э| t}}}. \qquad \text{(IV.12')}$$

Устремляя $t \to \infty$, легко находим стационарную амплитуду $\left(e^{-2|\alpha_э| t} \to 0\right)$

$$U_{a\,ст} = \sqrt{\frac{8|\alpha_э|}{b}}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Подставляя сюда выражения (IV.2) и (IV.3), получаем

$$U_{a\,cm} = 2U_{as}\sqrt{\frac{S(|K_{oc}|-D)-\frac{1}{R}}{S(|K_{oc}|-D)}}. \qquad \text{(IV.14)}$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{S(|K_{oc}|-D}{2C} = \frac{S(|K_{oc}|-D)-\frac{1}{2RC}}{2C} + \frac{1}{2RC} =$$

$$= |\alpha_э^3| + \alpha,$$

выражению (IV.14) можно придать ещё и следующую форму, совпадающую с ур-нием (12.50):

$$U_{a\,cm} = 2U_{as}\sqrt{\frac{|\alpha_э|}{|\alpha_э|+\alpha}}. \qquad \text{(IV.14')}$$

ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия по „Основам радиотехники"

1. М. А. Бонч-Бруевич. Основы радиотехники. Связьтехиздат, 1936.
2. Б. П. Асеев. Основы радиотехники. Связьиздат, 1947.
3. В. А. Котельников и А. М. Николаев. Основы радиотехники. Связьиздат, ч. I 1950 и ч. II 1954.
4. Н. Н. Крылов. Теоретические основы радиотехники. изд. Морской транспорт, 1953.
5. Я. С. Ицхоки. Нелинейная радиотехника. Советское радио, 1955.
6. *E. A. Guillemin. Communication networks.* vol. II, 1947.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Введение

		стр.
§ 1.1.	Задачи радиотехники	5
§ 1.2.	Краткий обзор развития радиотехники	6
§ 1.3.	Основные радиотехнические процессы	15
§ 1.4.	Линейные и нелинейные системы	18
§ 1.5.	Задачи и содержание курса	26

Глава 2. Управляющие сигналы

§ 2.1.	Основные характеристики сигналов	27
§ 2.2.	Периодические сигналы	28
§ 2.3.	Примеры периодических сигналов	33
§ 2.4.	Распределение мощности в спектре периодического сигнала	40
§ 2.5.	Непериодические сигналы	42
§ 2.6.	Некоторые свойства преобразований Фурье	47
§ 2.7.	Частотные спектры некоторых распространённых функций	50
§ 2.8.	Гармоническое колебание в заданном промежутке времени	54
§ 2.9.	Спектральная плотность группы равноотстоящих импульсов	57
§ 2.10.	Распределение энергии в спектре непериодического сигнала	58
§ 2.11.	Нерегулярные сигналы	62
	Таблица спектральных плотностей для некоторых импульсов	64
§ 2.12.	Совокупность гармонических колебаний со случайными фазами	71
§ 2.13.	Хаотическая последовательность импульсов	75
§ 2.14.	Характеристики некоторых реальных сигналов	78

Глава 3. Модулированные колебания

§ 3.1.	Общие определения	83
§ 3.2.	Амплитудно-модулированное колебание	84

стр.
§ 3.3. Спектр амплитудно-модулированного колебания 87
§ 3.4. Угловая модуляция. Связь между частотной и фазовой модуляцией 94
§ 3.5. Спектр колебания при гармонической угловой модуляции 100
§ 3.6. Спектр колебания при угловой модуляции сложным сигналом 108
§ 3.7. Спектр колебания при смешанной модуляции, частотной и амплитудной 114

Глава 4. Колебательные системы. Одиночный контур

§ 4.1. Введение 116
§ 4.2. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений 117
§ 4.3. Резонансная кривая и фазовая характеристика для последовательного контура 119
§ 4.4. Полоса пропускания последовательного контура 129
§ 4.5. Энергетические соотношения при резонансе . . . 132
§ 4.6. Параллельный контур. Резонанс токов 134
§ 4.7. Резонансная кривая и фазовая характеристика параллельного контура. Полоса пропускания . . . 142
§ 4.8. Схемы замещения параллельного контура 145

Глава 5. Колебательные системы. Связанные контуры

§ 5.1. Виды связи. Коэффициент связи 149
§ 5.2. Соотношения между токами в связанных контурах. Схема замещения первого контура 155
§ 5.3. Резонансные частоты двухконтурной системы . . 159
§ 5.4. Настройка связанных контуров 162
§ 5.5. Энергетические соотношения в двухконтурной системе 167
§ 5.6. Резонансные кривые двухконтурной системы . . . 168
§ 5.7. Полоса пропускания двухконтурной системы . . 175
§ 5.8. Параллельное подключение генератора к двухконтурной системе 178

Глава 6. Элементы теории линейных цепей

§ 6.1. Определение токов и напряжений в сложной цепи 184
§ 6.2. Энергетические функции 189
§ 6.3. Двухполюсники 195
§ 6.4. Четырёхполюсники. Частотные свойства коэффициента передачи четырёхполюсника 204
§ 6.5. Основные уравнения пассивного четырёхполюсника 212

Глава 7. Цепи с распределёнными постоянными

стр.
§ 7.1. Общие замечания 217
§ 7.2. Основные уравнения для однородной линии при гармоническом возбуждении 217
§ 7.3. Учёт граничных условий 224
§ 7.4. Волновое сопротивление и постоянная распространения однородной линии 228
§ 7.5. Линии без потерь при различных видах нагрузки 236
§ 7.6. Основные применения высокочастотных линий . . 249

Глава 8. Цепные схемы и фильтры. Искусственные линии

§ 8.1. Основные уравнения для однородных цепных схем 257
§ 8.2. Решение уравнения 259
§ 8.3. Входное сопротивление цепной схемы с согласованной нагрузкой 264
§ 8.4. Характеристическое сопротивление и постоянная распространения однородной цепной схемы . . . 265
§ 8.5. Однородная цепная схема без потерь, нагруженная на активное сопротивление 272
§ 8.6. Электрические фильтры. Общие замечания 275
§ 8.7. Фильтры нижних частот 278
§ 8.8. Фильтры верхних частот 283
§ 8.9. Полосовые фильтры 285
§ 8.10. Заградительные (режекторные) фильтры 289
§ 8.11. Сложные фильтры 290
§ 8.12. Искусственные линии 295

Глава 9. Прохождение управляющих сигналов и модулированных колебаний через линейные системы

§ 9.1. Введение 301
§ 9.2. Распространение интеграла Фурье на комплексное переменное. Преобразование Лапласа 302
§ 9.3. Прохождение импульсных сигналов через дифференцирующие и интегрирующие цепи 313
§ 9.4. Прохождение импульсных сигналов через фильтр нижних частот 318
§ 9.5. Воздействие импульсных электродвижущих сил на колебательный контур 322
§ 9.6. Воздействие импульсных электродвижущих сил на систему связанных контуров 325
§ 9.7. Прохождение амплитудно-модулированных колебаний через колебательные системы 329
§ 9.8. Воздействие высокочастотных импульсов на колебательный контур 335

стр.

§ 9.9. Приближённый метод исследования переходных процессов в резонансных системах при амплитудной модуляции 338
§ 9.10. Прохождение частотно-модулированных колебаний через колебательные системы 343
§ 9.11. Переходные явления в системах с распределёнными постоянными. Основные уравнения 350
§ 9.12. Первая падающая волна при включении произвольного напряжения 353
§ 9.13. Отражение волны у конца линии 358
§ 9.14. Многократное отражение волн в линии конечной длины 363
§ 9.15. Устанавливающийся режим в линии, короткозамкнутой на конце 365
§ 9.16. Устанавливающийся режим в разомкнутой линии 369

Глава 10. Усиление колебаний. Линейные усилители

§ 10.1. Принцип действия усилителя. Основные режимы усиления 371
§ 10.2. Основные соотношения для линейного усилителя. Эквивалентная схема анодной цепи электронной лампы 377
§ 10.3. Апериодические усилители низкой частоты . . . 384
§ 10.4. Импульсные усилители на сопротивлениях . . . 390
§ 10.5. Прохождение периодической последовательности импульсов через усилитель на сопротивлениях 397
§ 10.6. Усилители постоянного тока 400
§ 10.7. Резонансные и полосовые усилители. Усиление амплитудно-модулированых колебаний 403
§ 10.8. Прохождение высокочастотных импульсов через многоступенные и полосовые усилители 411
§ 10.9. Усилительные схемы с общей сеткой и с общим анодом 413
§ 10.10. Особенности усиления на сверхвысоких частотах 417
§ 10.11. Кристаллические усилители. Принцип действия 421
§ 10.12. Эквивалентные схемы и основные соотношения для кристаллических усилителей 426

Глава 11. Нелинейное усиление колебаний

§ 11.1. Режим работы электронной лампы при больших амплитудах колебаний 432
§ 11.2. Апериодические усилители мощности. Двухтактные схемы 436

стр.

§ 11.3. Резонансные усилители мощности 440
§ 11.4. Элементы схем резонансных усилителей мощности 446
§ 11.5. Умножение частоты 450

Глава 12. Генерирование колебаний

§ 12.1. Введение. Обобщённая схема автогенератора синусоидальных колебаний 452
§ 12.2. Основные схемы высокочастотных автогенераторов. Обратная связь 456
§ 12.3. Возникновение колебаний в автогенераторе . . . 459
§ 12.4. Уравнения для амплитуды и частоты стационарных автоколебаний 463
§ 12.5. Определение стационарной амплитуды. Мягкий и жёсткий режимы самовозбуждения 469
§ 12.6. Баланс фаз в автогенераторе. Стабильность частоты автоколебаний 475
§ 12.7. Влияние высших гармонических составляющих анодного тока на частоту генерации 479
§ 12.8. Двухконтурные автогенераторы. Кварцованные автогенераторы. Явление затягивания частоты 484
§ 12.9. Возбуждённая лампа как отрицательное сопротивление. Динатронный и транзитронный генераторы 490
§ 12.10. Установление колебаний в ламповом автогенераторе. Импульсная работа 494
§ 12.11. Генераторы типа RC 504
§ 12.12. Кристаллические генераторы синусоидальных колебаний 509

Глава 13. Управление колебаниями (модуляция)

§ 13.1. Общие замечания 511
§ 13.2. Амплитудная модуляция 511
§ 13.3. Балансная амплитудная модуляция 521
§ 13.4. Модуляция частоты колебаний 523
§ 13.5. Модуляция фазы колебаний 530

Глава 14. Детектирование колебаний. Преобразование частоты

§ 14.1. Вводные замечания 534
§ 14.2. Амплитудное детектирование. Диодный детектор 534
§ 14.3. Амплитудное детектирование. Сеточный и анодный детектор 545

стр.

§ 14.4. Частотное детектирование 549
§ 14.5. Фазовое детектирование 557
§ 14.6 Преобразование частоты 558

Глава 15. Действие внешней силы на системы с обратной связью

§ 15.1. Регенерация 563
§ 15.2. Действие синусоидальной эдс на автогенератор Захватывание частоты 568
§ 15.3. Процесс установления режима захватывания . . 575
§ 15.4. Усилители с отрицательной обратной связью . . 582
§ 15.5. Устойчивость усилителей с обратной связью . . 586
§ 15.6. Критерии устойчивости систем с обратной связью 590

Глава 16. Элементы импульсной техники

§ 16.1. Введение 602
§ 16.2. Мультивибратор 602
§ 16.3. Блокинг-генератор 615
§ 16.4. Пусковые схемы 621
§ 16.5. Формирование импульсов 624

Глава 17. Импульсная модуляция

§ 17.1. Понятие об импульсной модуляции и основные определения 639
§ 17.2. Некоторые схемы импульсной модуляции . . . 645
§ 17.3. Особенности частотных спектров при импульсной модуляции. Метод анализа 650
§ 17.4. Частотный спектр при фазово-импульсной модуляции и частотно-импульсной модуляции 655
§ 17.5. Связь между частотным спектром сообщения и тактовой частотой. Теорема Котельникова . . 660
§ 17.6. Детектирование модулированных импульсов . . . 666
§ 17.7. Принципы многоканальной радиосвязи 669

Глава 18. Помехоустойчивость радиосвязи

§ 18.1. Значение уровня помех при приёме радиосигналов 676
§ 18.2. Действие синусоидальной помехи при приёме сигналов с амплитудной и частотной модуляцией 677
§ 18.3. Действие синусоидальной помехи при приёме импульсных сигналов 683

стр.

§ 18.4. Действие импульсных помех на приёмное устройство 688
§ 18.5. Собственные шумы приёмника 692
§ 18.6. Действие шумовой помехи на амплитудный детектор 700
§ 18.7. Энергетические соотношения при приёме импульсных сигналов на фоне шумов 705

Приложения

I. Условное представление нерегулярного процесса в виде тригонометрического ряда 708
II. Функция корреляции для нерегулярного процесса 709
III. Вывод формулы для закона распределения огибающей шумового напряжения 713
IV. К приближённому решению нелинейного уравнения автогенератора 717
Литература 720

Иосиф
Семёнович
Гоноровский
ОСНОВЫ
РАДИОТЕХНИКИ

Отв. редактор *А. И. Иванов-Цыганов*
Техн. редактор *Н. В. Леднёва*
Корректоры *Е. А. Куканова и С. И. Шерышева*

Подписано к печати 30/IV.1957 г.
Форм. бум. 60×92/16. 45,5 печ. л. 38,68 авт. л. 39,80 уч.-изд. л.
Тираж 25000 экз. Т-02166 Связьиздат, Москва-центр
Чистопрудный бульвар, 2. Зак. изд. 7481. Цена 15 руб. 50 коп.

Набрано в гос. типографии им. К. Пожела. Заказ № 1700.
Отпечатано в гос. типографии «Вайздас». Заказ № 1293.

СПИСОК ОПЕЧАТОК

к книге И. С. Гоноровского «Основы радиотехники»

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
416	3 сн.	(рис. 10.42)	(рис. 10.40)
491	5 св.	... первое уравнение ...	... третье уравнение ...
491	9 „	$1-\frac{r}{R_2}$ $+\frac{}{LC}=0.$	$1-\frac{r}{R_2}$ $+\frac{}{LC}\,i_L=0.$
591	10 сн.	... § 12,8 ...	... § 12,3 ...
595	6 „		
	1 строчка определителя Δ_5	$a_2\,a_3\,a_5\,a_7\,a_9$	$a_1\,a_3\,a_5\,a_7\,a_9$
607	5 св.	$\Delta E'_{g1}=\ldots\ldots$	$\Delta E'_{g2}=\ldots\ldots$
607	8 „	$E_{g1}=\Delta E_{g2}+\ldots\ldots$	$E_{g1}=\Delta E_{g1}+\ldots\ldots$
610	12 „	$\ldots u_{C2}$	$\ldots u_{C1}$
613	7 сн.	$T\approx 2R_gC_g\ln\frac{E_a-e_{a\,мин}}{\lvert E_{g0}+E_g\rvert}\cdot$	$T\approx 2R_gC_g\ln\frac{E_g+E_a-C_{a\,мин}}{\lvert E_{g0}+E_g\rvert}.$
696	2 св.	$=\frac{eI_{a0}R^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau}\left\lvert\operatorname{arc\,tg}\,\omega_1\pi\right\rvert_{-\omega_p}^{\infty}=$	$=\frac{eI_{a0}R^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau}\left\lvert\operatorname{arc\,tg}(\omega_1\tau)\right\rvert_{-\omega_p}^{\infty}=$